HECKE GRUPLARI VE FİBONACCİ DİZİSİ

Feyza YATKIN

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Prof. Dr. Erdal KARADUMAN
2013

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HECKE GRUPLARI VE FİBONACCİ DİZİSİ

Feyza YATKIN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ERZURUM
2013

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAY FORMU

HECKE GRUPLARI VE FİBONACCİ DİZİSİ

Prof. Dr. Erdal KARADUMAN danışmanlığında, **Feyza YATKIN** tarafından hazırlanan bu çalışma 21/01/2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak **oybirliği (3/3)** ile kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Ramazan DİKİCİ *İmza* :

Üye : Prof. Dr. Hüseyin AYDIN *İmza* :

Üye : Prof. Dr. Erdal KARADUMAN *İmza* :

Yukarıdaki sonucu onaylıyorum

Prof. Dr. İhsan EFEOĞLU
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

HECKE GRUPLARI VE FİBONACCİ DİZİSİ

Feyza YATKIN

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Erdal KARADUMAN

Bu çalışmada ilk olarak Hecke grupları ve buna bağlı olarak genişletilmiş Hecke grubu tanımlanmıştır. Daha sonra genişletilmiş Hecke gruplarının Fibonacci dizisi ile ilgili bağlantısından bahsedilmiş ve bununla ilgili bazı teorem, sonuç ve uygulamalara yer verilmiştir.

2013, 34 sayfa

Anahtar Kelimeler: Hecke Grupları, Genişletilmiş Hecke Grupları, Fibonacci Dizisi.

ABSTRACT

Master Thesis

HECKE GROUPS AND FIBONACCI SEQUENCE

Feyza YATKIN

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Erdal KARADUMAN

In this study, firstly Hecke groups and accordingly extended Hecke groups are defined. Then, it is mentioned that relationship between extended Hecke groups and Fibonacci sequence and some theorems, results and applications are presented about this issue.

2013, 34 pages

Keywords: Hecke Groups, Extended Hecke Groups, Fibonacci Sequence.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde yapılmıştır.

Bu çalışmada bana her türlü kolaylığı sağlayan ve desteklerini esirgemeyen değerli hocam Sayın Prof. Dr. Erdal KARADUMAN'a teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Matematik Bölümü'nde gerekli ilgiyi ve yardımı esirgemeyen başta Bölüm Başkanı Sayın Prof. Dr. Abdullah MAĞDEN olmak üzere anabilim dalımızın değerli öğretim üyeleri Sayın Prof. Dr. Hüseyin AYDIN'a, Sayın Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU'na, Sayın Doç. Dr. İnci GÜLTEKİN'e, Sayın Yrd. Doç. Dr. Nurullah ANKARALIOĞLU'na ve Matematik Bölümünün diğer tüm öğretim elemanlarına;

Çalışmalarım boyunca kendilerinden görmüş olduğum destek ve güvenden dolayı aileme ve arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans eğitimim boyunca "Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı" ile tarafıma vermiş olduğu maddi destekten dolayı TÜBİTAK'a teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Feyza YATKIN
Ocak 2013

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$A \star B$	A ile B Gruplarının Serbest Çarpımı
C_n	n Mertebeli Devirli Grup
D_n	Dihedral Grup
$\bar{F}_{\lambda_q}$	Genişletilmiş Hecke Grubu İçin Temel Bölge
F_{λ_q}	Hecke Grubu İçin Temel Bölge
F_n	$n.$ Fibonacci Sayısı
$F(X)$	X Üzerindeki Serbest Grup
$[G, X]$	Topolojik Dönüşüm Grubu
$GL(n, \mathbb{R})$	Genel Lineer Grup
$\bar{H}(\lambda_q)$	Genişletilmiş Hecke Grubu
$H(\lambda_q)$	Hecke Grubu
$H(\lambda)$	Hecke Grubu
$PGL(n, \mathbb{R})$	Projektif Genel Lineer Grup
$PSL(n, \mathbb{R})$	Projektif Özel Lineer Grup
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$SL(n, \mathbb{R})$	Özel Lineer Grup
$\mathbb{Z}$	Tam Sayılar Kümesi
$ZGL(n, \mathbb{R})$	Genel Lineer Grubun Merkezi
$ZSL(n, \mathbb{R})$	Özel Lineer Grubun Merkezi

ŞEKİLLER DİZİNİ

ÇİZELGELER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Hecke, 1936 yılında "Über die Bestimmung Dirichletcher Reichen durch ihre Funktionalgleichungen" adlı çalışmasında, λ sabit bir pozitif tamsayı olmak üzere,

$$T(z) = -\frac{1}{z} \quad ve \quad U(z) = z + \lambda$$

kesirli lineer dönüşümleri ile üretilen ve $H(\lambda)$ ile gösterilen Hecke gruplarını tanıtmıştır. Ayrıca E. Hecke $H(\lambda)$ nın ayrık olması için gerek ve yeter şartın $\lambda = \lambda_q = 2cos\frac{\pi}{q}, q \in \mathbb{N}, q \geq 3$ veya $\lambda \geq 2$ olması gerektiğini göstermiştir.

$q = 3$ için $\lambda = 1$ değerine karşılık gelen grup, modüler grup olarak bilinmektedir ve bu grup literatürde en çok çalışılan gruptur. (Dikici and Işık 1997) ve (Dikici and Özkan 1998) bu çalışmalardan bazılarıdır. Hecke grupları ve onların normal alt grupları birçok kişi tarafından çalışılmıştır. Bu çalışmaların örneği için (Cangül and Singerman 1998), (Cangül 1999) ve (Şahin 2006)'ya bakılabilir.

Pisa'lı Leonardo Fibonacci Rönesans öncesi Avrupası'nın en önde gelen matematikçisidir. Fibonacci için, "Matematiği Araplar'dan alıp, Avrupa'ya aktaran kişi" denilebilir.

Fibonacci'nin yaşamı hakkında matematik yazıları dışında pek az şey bilinmektedir. İlk ve en iyi bilinen kitabı Liber Abaci'nin yazıldığı 1202 tarihine bakılırsa, 1170 dolayında doğmuş olabileceği sanılıyor. Bu yönde pek kanıt olmamakla birlikte İtalya'nın Pisa kentinde doğmuş olması olasılığı vardır. Fibonacci henüz çocuk yaştayken, Pisa'lı bir tüccar olan babası Guglielmo, Pisalı tüccarların yaşadığı Bugia adlı Kuzey Afrika limanına Konsül olarak atanır. Babası burada oğluna hesap öğretmesi için bir Arap hoca tutar. Fibonacci daha sonra Liber Abaci isimli kitabında hocasından "Dokuz Hint Rakamının Sanatını" öğrenirken duyduğu mutluluğu anlatacaktır.

Fibonacci’nin Liber Abaci adlı kitabının yayınlandığı yıllarda, Hindu-Arap sayıları, Avrupa’da Harzemli Muhammed Bin Musa'nın eserlerinin çevirilerini okuyabilmiş bir kaç "aydın" haricinde bilinmiyordu. Fibonacci, kitabında bu rakamları anlatmaya şöyle başlar:

Dokuz Hint Rakamı 9 8 7 6 5 4 3 2 1 dir. Bu dokuz rakama "0" işaretinin de eklenmesiyle, herhangi bir sayı yazılabilir.

Liber Abaci, 13.yy. Avrupa’sında büyük ilgi görür, çok sayıda kopya edilir ve kilisenin yasaklamasına karşın Arap sayıları İtalyan tüccarlar arasında yayılır. Kitap Kutsal Roma İmparatoru II. Frederick’in dikkatini çeker. Frederick bilime düşkün ve bilim adamlarını koruyan bir imparatordur. Bu nedenle kendisine Stupor Mudi (Dünya Harikası) denilmektedir. 1220 yılında Fibonacci huzura çağrılır ve Frederick’in bilim adamlarından biri tarafından sınava tabi tutulur. Sonunda Fibonacci göze girer. Yıllarca hem imparatorla, hem de imparatorun dostlarıyla yazışır. 1225 yılında yazdığı Liber Quadratornum’u (Kare Sayıların Kitabı) imparatora ithaf eder. Diyofantus Denklemleri’ne ayrılan bu kitap Fibonacci’nin başyapıtıdır. Her ne kadar Liber Abaci’ye göre çok daha dar bir çevrenin ilgisini çekse de kitap sayılar kuramına büyük katkı getirmiştir.

Leonardo Fibonacci, Arap matematiğini kullanışlı Hindu-Arap sayılarını Batı'ya tanıtmakla çok büyük bir katkıda bulundu. Ancak ilginçtir, çağımız matematikçileri Fibonacci’nin adını daha çok, Liber Abaci’de yer alan bir problemde ortaya çıkan bir sayı dizisi nedeniyle bilirler.

Liber Abaci'de yer alan problemin metni aşağı yukarı şöyledir:

-Adamın biri, dört bir yanı duvarla çevrili yere bir çift tavşan koymuş. Her çift tavşanın bir ay içinde yeni bir çift tavşan doğurduğu, her yeni çiftin de ergenleşmesi için bir ay gerektiği ve tavşanların ölmediği var sayılırsa, 100 ay sonunda dört duvarın arasında kaç çift tavşan olur?

Fibonacci bu probleme, bir toplama alıştırması olarak bakmıştır. Buradan,

$$\{0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,\ldots\}$$

sayı dizisini elde etmiştir. Bu sayı dizisinin her bir elemanına *"Fibonacci sayısı"* denir. Bu sayı dizisi, $F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ başlangıç değerleri ile

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}\,, n \geq 1$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır. Bazı Fibonacci sayıları;

Çizelge 1.1. Fibonacci sayıları

n	0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	$\cdots$

şeklinde verilebilir (Vajda 1989).

Fibonacci sayıları ailesi üç ayrı nedenle, yüzyıllardan bu yana yoğun bir ilgi odağı olmuştur.

- Birincisi; dizinin daha küçük elemalarının doğada, beklenmedik yerlerde tekrar tekrar karşımıza çıkmasıdır; bitkilerde, böceklerde, çiçeklerde vb.
- İkincisi; $\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = Altın\ oran$ sayısının çok önemli bir sayı olmasıdır. Bu sayı, oyun kartlarının biçiminden Mısır'daki piramitlere kadar birçok şeyin matematiksel temelini oluşturmaktadır.
- Üçüncüsü; daha çok sayıların kendilerinin, sayılar teorisinde beklenmedik biçimde farklı birçok kullanımı olan ilginç özellikleriyle ilgilidir.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde çalışmamızda kullanacağımız bazı temel tanımlar verilecektir.

Tanım 2.1: A boş olmayan bir küme olmak üzere

$$*: A \times A \to A$$

dönüşümüne A üzerinde bir ikili işlem denir. Eğer $*$, A üzerinde bir ikili işlem ise $(A,*)$ ifadesine A'da bir cebirsel yapı denir (Taşçı 2007).

Tanım 2.2: G boş olmayan bir küme ve bu küme üzerinde bir ikili işlem $*$ olsun. Buna göre eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa $(G,*)$ cebirsel yapısına bir grup denir.

G1) $\forall a, b \in G$ için $a * b \in G$ (Kapalılık şartı)
G2) $\forall a, b, c \in G$ için $a * (b * c) = (a * b) * c$ (Birleşme özelliği)
G3) $\forall a \in G$ için $a * e = e * a = a$ olacak şekilde bir $e \in G$ vardır (Birim eleman)
G4) G kümesindeki her bir a için e, G nin birim elemanı olmak üzere

$$a * a' = a' * a = e$$

olacak şekilde $a' \in G$ vardır (Ters elemanın varlığı) (Taşçı 2007).

Tanım 2.3: $(G,*)$ bir grup olmak üzere $\forall a. b \in G$ için

$$a * b = b * a$$

oluyorsa bu gruba değişmeli (komutatif yada Abelyan) grup denir.

Tanım 2.4: $(G,*)$ bir grup ve H, G nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer H, G grubundaki işleme göre bir grup teşkil ederse yani $(H,*)$ cebirsel yapısı bir grup ise o takdirde $(H,*)$ a $(G,*)$ grubunun bir alt grubu denir ve $H \leq G$ şeklinde gösterilir (Taşçı 2007).

Tanım 2.5: G sonlu bir küme ise $(G,*)$ grubuna bir sonlu grup denir ve eleman sayısına da grubun mertebesi denir (Çallıalp 2001).

Tanım 2.6: G bir grup olmak üzere G de $G = \{a^n : n \in \mathbb{Z}\}$ olacak şekilde bir a elemanı varsa o zaman G grubuna devirli grup denir. Böyle bir a elemanına G nin üreteci denir ve $G =< a >$ şeklinde gösterilir (Taşçı 2007).

Tanım 2.7: G bir grup olmak üzere G nin merkezi $M(G)$ veya $Z(G)$ ile gösterilir ve

$$M(G) = \{a \in G : ax = xa, \forall x \in G \ i\c{c}in\}$$

olarak tanımlanır. Diğer bir deyimle bir G grubunun merkezi, G nin her elemanı ile değişmeli olan G deki elemanlardan oluşan bir kümedir. Burada $M(G) \leq G$ dir (Taşçı 2007).

Tanım 2.8: Düzlemde bir şeklin simetrilerinden oluşan gruba söz konusu şeklin simetriler grubu denir. Bir düzgün n-genin simetriler grubuna n-inci dihedral grup denir ve bu grup, D_n ile gösterilir. Bu grubun mertebesi ise $2n$'dir (Karakaş 2010). Burada

$$D_n = \{x, y : x^n = y^2 = e, xy = yx^{n-1}\}$$

şeklindedir.

Tanım 2.9: G ve G' iki grup olmak üzere G den G' ye bir $\sigma: G \to G'$ fonksiyou verilmiş olsun. Eğer her $x, y \in G$ için $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$ ise σ'ya G den G' ye bir grup homomorfizmi (ya da kısaca bir homomorfizm) denir (Karakaş 2010).

Tanım 2.10: G ve G' iki grup, $\Phi: G \to G'$ bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki iki koşul sağlanırsa, Φ ye G ile G' arasında bir izomorfizm denir:

1. Φ bire-bir ve örtendir.
2. Her $x, y \in G$ için $\Phi(xy) = \Phi(x)\Phi(y)$ dir.

Eğer G ile G' arasında bir izomorfizm varsa, G ile G' izomorf gruplardır denir ve $G \cong G'$ yazılır (Karakaş 2010).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Özel Kavramlar

Tanım 3.1.1: X boştan farklı bir küme olsun. Bu küme yardımıyla $x \leftrightarrow x^{-1}$ $(x \in X)$ eşleşmesinden yararlanarak, X^{-1} kümesini tanımlayalım. Ayrıca $X^{\pm} = X \cup X^{-1}$ olsun. Burada $X^{\pm}$ kümesinin her bir elemanına harf denir. Bununla birlikte $n \in \mathbb{N}$, $x_i \in X$, $\varepsilon_i = \pm 1$ ve $1 \leq i \leq n$ olmak üzere,

$$w = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_n}$$

ifadesine X üzerinde bir kelime denir. Özel olarak $n = 0$ ise boş kelime elde edilir ve boş kelime 1_w ile gösterilir.

X üzerinde tanımlanan yukarıdaki gibi herhangi bir w kelimesi üzerinde aşağıdaki operasyonlar uygulanabilir:

I. $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere, herhangi bir kelimeye $x^{\varepsilon} x^{-\varepsilon}$ $(x \in X, \varepsilon = \pm 1)$ şeklinde ters çift varsa, bu çiftler silinir. Yapılan bu işleme indirgeme işlemi denir. Özel olarak w kelimesi $x^{\varepsilon} x^{-\varepsilon}$ şeklinde hiçbir ters çift içemiyorsa, bu kelimeye indirgenmiş kelime denir.

II. $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere, herhangi bir kelimeye $x^{\varepsilon} x^{-\varepsilon}$ şeklindeki ters harf çiftleri eklenebilir. Bu işleme de kelime üzerinde ekleme işlemi denir (Çevik 2010).

Tanım 3.1.2: Bir grubun üreteçleri arasında bağıntılar yoksa bu gruba serbest grup denir.

Başka bir şekilde şöyle açıklayabiliriz:

Tanım 3.1.3: X bir küme, X deki her bir x elemanının $\bar{x}$ ile gösterilen başka bir elemanla eşlenmesiyle elde edilen küme $\bar{X}$ ve $E = X \cup \bar{X}$ olsun. E nin elemanları genelde harfler olarak adlandırılır. E nin elemanlarının yan yana getirilmesi ile oluşturulan kelimelerin kümesi U, yani

$$U = \{u | u = e_1 e_2 \dots e_n (e_i \in E)\}$$

olsun. Burada hiç harfi olmayan bir kelime boş kelime olarak adlandırılır. U üzerinde aşağıdaki şekilde bir bağıntı tanımlansın. $u, v \in U$ olmak üzere eğer $x\bar{x}$ ve $\bar{x}x$ şeklindeki ifadeler atılarak veya ilave edilerek birinden diğeri elde edilen kelimeler denk olarak kabul edilir. Bu şekilde tanımlanan bağıntı U üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Bu denklik bağıntısına göre U daki kelimelerin denklik sınıflarının kümesi $F(X)$ olsun. Bir $u \in U$ kelimesinin denklik sınıfı $[u]$ ile gösterilir. $F(X)$ üzerinde bir grup işlemi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$[u], [v] \in F(X)$ ise $u = e_1 e_2 \dots e_n$ ve $v = e_1' e_2' \dots e_m'$ şeklinde olup

$$[u][v] = [e_1 e_2 \dots e_n e_1' e_2' \dots e_m']$$

ile tanımlanır. Bu şekilde tanımlanan işlem iyi tanımlıdır. Bu işleme göre $F(X)$ bir gruptur. Bu şekilde elde edilen $F(X)$ grubuna X üzerindeki serbest grup denir. Burada

$$f: X \to F(X), x \to [x]$$

ile tanımlanan bir içine fonksiyonu vardır. Ayrıca $F(X)$ için aşağıdaki evrensel özellik sağlanır (Mucuk 2010).

Önerme 3.1.4: X kümesi üzerindeki serbest grup $F(X)$ olsun. G herhangi bir grup olmak üzere bir $g: X \to G$ fonksiyonu verildiğinde

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & F(X) \arrow[d, dashed, "\hat{g}"] \\ & G \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde bir tek $\hat{g}: F(X) \to G$ grup homomorfizmi vardır (Mucuk 2010).

Örnek 3.1.5: $X = \{a\}$ tek nokta kümesi alınırsa X üzerindeki serbest grup $F(X) = \{a^n, a^{-n} | n \epsilon \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ olur.

Teorem 3.1.6: F grubunun serbest grup olması için gerek ve yeter şart F nin $F = \langle X; \rangle$ biçiminde bir gösteriminin olmasıdır (Fine 1999).

Tanım 3.1.7: $A = \langle a_1, \dots ; R_1, \dots \rangle$ ve $B = \langle b_1, \dots ; S_1, \dots \rangle$ iki grup olsun. A ve B gruplarının $A \star B$ ile gösterilen serbest çarpımı,

$$G = \langle a_1, b_1, \dots ; R_1, S_1, \dots \rangle$$

gösterimli gruptur. Yani G nin üreteçleri, A ve B nin üreteçlerinin tümünden ve bağıntıları da A nın R_i ve B nin S_j bağıntılarının tümünden oluşur (Şahin 2001).

Örnek 3.1.8: $G = \langle x | x^4 = 1 \rangle$ ve $H = \langle y | y^3 = 1 \rangle$ gruplarının serbest çarpımı $G \star H = \langle x, y | x^4 = y^3 = 1 \rangle$ grubu olur (Mucuk 2010).

Tanım 3.1.9: $A = \langle a_1, \dots ; R_1, \dots \rangle$ ve $B = \langle b_1, \dots ; S_1, \dots \rangle$ iki grup, $H \subset A$, $K \subset B$ has alt gruplar ve $\Phi: H \longrightarrow K$ bir izomorfizm olsun. A ve B nin, H yı K ya birleştirerek elde edilen serbest çarpımı, gösterimi

$$G = \langle a_1, \dots, b_1, \dots; R_1, \dots, S_1, \dots, H = \Phi(\mathrm{H})\rangle$$

olan bir G grubudur. G grubunun üreteçleri A ve B nin üreteçlerinin ayrık birleşimidir ve bağıntıları da A ve B nin bağıntıları ile birlikte alt grup izomorfizmini veren bağıntıların ek bir kümesinden oluşur.

H izomorfik resmi ile özdeşlendiği için G, A ve B gruplarının H ile birleştirilmiş serbest çarpımıdır denir. Bu çarpım $G = A \star_H B$ ile gösterilir. A ile B gruplarına G nin çarpanları denir.

Bir G grubu eğer aşikar olmayan bir H has alt grubu ve her ikisi de aşikar olmayan G_1 ve G_2 grupları için $G = G_1 \star_H G_2$ ise G birleştirilmiş bir serbest çarpımdır (Şahin 2001).

Tanım 3.1.10: $n \geq 1$ olmak üzere $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı $n \times n$ tersinir matrislerin kümesi matrislerdeki çarpma işlemine göre bir grup oluşturur. Bu gruba $\mathbb{R}$ üzerinde n dereceli genel lineer grup denir ve $GL(n, \mathbb{R})$ ile gösterilir (Asar 2009).

Buradan $PGL(2, \mathbb{R})$ ile gösterilen projektif genel lineer grup

$$PGL(2, \mathbb{R}) = GL(2, \mathbb{R})/Z(GL(2, \mathbb{R}))$$

olarak tanımlanır.

$GL(2, \mathbb{R})$ de 1 determinantlı matrisler bir alt grup oluştururlar ve $SL(2, \mathbb{R})$ ile gösterilen bu alt gruba özel lineer grup denir, yani

$$SL(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\}$$

olur. Dolayısıyla $PSL(2, \mathbb{R})$ ile gösterilen projektif özel lineer grup,

$$PGL(2,\mathbb{R}) = GL(2,\mathbb{R})/Z(GL(2,\mathbb{R}))$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 3.1.11: $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ ve $ad - bc \neq 0$ olmak üzere

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

biçimindeki dönüşümlere kesirli doğrusal dönüşüm veya Mobiüs dönüşümü denir.

$ad - bc = 1$ olmak üzere her bir Mobiüs dönüşümü 2×2 tipinde bir

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

matrisi ile temsil edilir. A ve B matrisleri sırasıyla f ve g Mobiüs dönüşümleri ile ilişkilendirilirse bu durumda AB matris çarpımı $(f \circ g)(z) = (f(g(z))$ olan $f \circ g$ bileşke işlemine karşılık gelir. $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ birim matrisi,

$$f(z) = z = \frac{1z+0}{0z+1}$$

birim dönüşümüne ve

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

ters matrisi f nin tersi olan

$$f^{-1}(z) = z = \frac{dz - b}{-cz + a}$$

dönüşümüne karşılık gelir (Apostol 1989).

Tanım 3.1.12: $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ve $ad - bc = 1$ olmak üzere tüm Mobiüs dönüşümlerinin kümesi fonksiyonların bileşke işlemi altında bir grup oluşturup bu gruba modüler grup denir ve Γ ile gösterilir. Burada $\Gamma = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ olup

$$\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}) = \left\{ \frac{az + b}{cz + d} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\}$$

şeklindedir.

$\Gamma = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ modüler grubu

$$T(z) = -\frac{1}{z} \quad ve \quad U(z) = z + 1$$

kesirli doğrusal dönüşümleri ile üretilir. $S = TU$ yani

$$S(z) = -\frac{1}{z + 1}$$

olsun. Bu durumda Γ modüler grubu 2 ve 3 mertebeli sonlu devirli iki grubun serbest çarpımına izomorftur ve aşağıdaki gibi bir temsile sahiptir:

$$\Gamma = \langle T, S | T^2 = S^3 = I \rangle \cong C_2 \star C_3$$

(Şahin *et al*. 2004).

Tanım 3.1.13: $\bar{\Gamma} = PGL(2,\mathbb{Z})$ genişletilmiş modüler grup, Γ modüler grubun üreteçlerine $R(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ yansıması eklenerek tanımlanır. $PGL(2,\mathbb{Z})$ genişletilmiş modüler grup $GL(2,\mathbb{Z})/\{\pm I\}$ bölüm grubuna eşittir ve $PSL(2,\mathbb{Z})$ modüler grup $SL(2,\mathbb{Z})/\{\pm I\}$ bölüm grubuna eşittir. $\bar{\Gamma}$ genişletilmiş modüler grubun üreteçleri

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ve \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

olarak temsil edilebilir. Buradan genişletilmiş modüler grup

$$\bar{\Gamma} = \langle T, S, R \,|\, T^2 = S^3 = R^2 = (TR)^2 = (SR)^2 = I \rangle \cong D_2 \star_{\mathbb{Z}_2} D_3$$

temsiline sahiptir (Koruoğlu vd. 2008).

Tanım 3.1.14: G hem bir grup hem de bir topolojik uzay olsun. Eğer her $g, h \in G$ için

$$m: G \times G \to G; \quad m(g,h) = gh$$

$$i: G \to G; \quad i(g) = g^{-1}$$

işlemleri sürekli iseler G ye bir topolojik grup denir (Jones 1987).

Örneğin; $(\mathbb{C}, +)$ grubu bir topolojik gruptur, çünkü $m(z,w) = z + w$ ve $i(z) = z^{-1}$ grup işlemleri süreklidir. Eğer karmaşık sayıların çarpımı işlemi düşünülürse $S^1 = \{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\}$ birim çemberi de bir topolojik gruptur.

Tanım 3.1.15: G bir topolojik grup olsun. Eğer G nin her g elemanı için $\{g\}$ kümesi g'nin bir komşuluğu ise G ye ayrık grup denir (Başkan 1980).

Eşdeğer bir ifadeyle G nin elemanlarının hiçbirisi G nin bir yığılma noktası değilse G ye ayrık grup denir (Şahin 2001).

Tanım 3.1.16: G bir topolojik grup ve X herhangi bir topolojik uzay olsun.

$$\Lambda: G \times X \to X; \quad \Lambda(g, x) = g\Lambda x$$

sürekli dönüşümü, eğer her $g, h \in G$ için ve $x \in X$ için

1. $g\Lambda(h\Lambda x) = gh\Lambda x$
2. $e\Lambda x = x$

koşullarını gerçekliyorsa $[G, X]$ ikilisine bir topolojik dönüşüm grubu denir (Başkan 1980).

Tanım 3.1.17: $[G, X]$ bir topolojik dönüşüm grubu ve $x, y \in X$ olmak üzere $g(x) = y$ olacak biçimde en az bir $g \in G$ elemanı varsa x ve y noktalarına G altında denktirler denir. Herhangi bir x noktasına denk olan tüm noktaların kümesine x noktasının yörüngesi denir (Başkan 1980).

Tanım 3.1.18: $PSL(2, \mathbb{R})$ nin sonlu üreteçli ayrık bir Γ alt grubuna bir Fuchsian grup denir.

Herhangi bir Γ Fuchsian grubu için $L(\Gamma)$, Γ nın limit noktalarının kümesi olsun. $L(\Gamma)$ reel eksenin aşağıdaki üç koşuldan birini sağlayan bir alt kümesidir:

1. $L(\Gamma)$ en fazla iki noktadan oluşur.
2. $L(\Gamma) = \mathbb{R}$ dir.
3. $L(\Gamma)$, $\mathbb{R}$ nin hiçbir yerde yoğun olmayan mükemmel bir alt kümesidir.

(2) tipindeki gruplara birinci türden Fuchsian gruplar ve (3) tipindeki gruplara ise ikinci türden Fuchsian gruplar denir (Şahin 2001).

Tanım 3.1.19: F, $U = \{z \in \mathbb{C}: Im(z) > 0\}$ da açık bir küme olsun. Eğer F açık kümesi,

1. Her bir $z \in U$ için $G(z)$ yörüngesi ile $\bar{F}$ en az bir noktada kesişir
2. Her bir $z \in U$ için $G(z)$ yörüngesi ile F en çok bir noktada kesişir

koşullarını sağlıyorsa F ye G grubu için bir temel bölgedir denir (Şahin 2001).

3.2. Hecke Grupları

Hecke, 1936 yılında "Über die Bestimmung Dirichletcher Reichen durch ihre Funktionalgleichungen" adlı çalışmasında Hecke gruplarını aşağıdaki şekilde tanımlamıştır.

Tanım 3.2.1: λ sabit bir pozitif tamsayı olmak üzere,

$$T(z) = -\frac{1}{z} \quad ve \quad U(z) = z + \lambda$$

kesirli doğrusal dönüşümleri ile üretilen gruplara Hecke grupları denir ve $H(\lambda)$ ile gösterilir (Hecke 1936).

Burada $S = TU$ alınırsa

$$S(z) = -\frac{1}{z + \lambda}$$

elde edilir. Bu gruplar $H(\lambda)$ bir Fuchsian grup olduğunda Dirichlet serilerinin çalışılmasında kullanılır. Bu çalışmaların örneği için "Hecke's Theory of Modular Forms and Dirichlet Series (Berndt and Knopp 2007)'e bakılabilir.

$\lambda < 2$ durumuna karşılık gelen Hecke grupları $H(\lambda_q)$ ile gösterilir. $\lambda \geq 2$ değerlerine karşılık gelen Hecke grupları ise $H(\lambda)$ ile gösterilir.

Hecke gruplarının temel bölgeleri E. Hecke tarafından aşağıdaki gibi bulunmuştur.

Teorem 3.2.2: $\lambda \geq 2$ ve reel sayı ise veya $q \geq 3$ bir tamsayı olmak üzere

$$\lambda = \lambda_q = 2cos\frac{\pi}{q}, \qquad 1 \leq \lambda \leq 2$$

ise

$$F_\lambda = \left\{z \in U : |Rez| < \frac{\lambda}{2}, |z| > 1\right\}$$

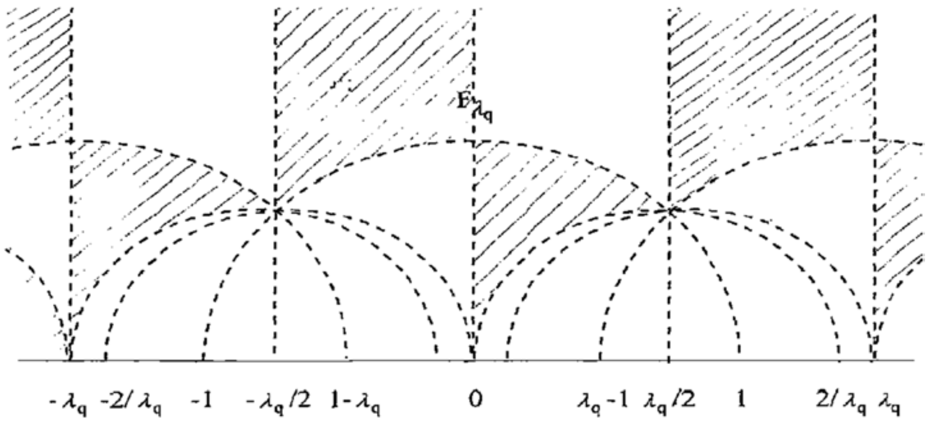
kümesi $H(\lambda)$ grubunun bir temel bölgesidir ve diğer $\lambda > 0$ değerleri için bir temel bölge bulunamaz (Şahin 2001). Burada $U = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\}$ üst yarı düzlemdir.

Dolayısıyla $H(\lambda_q)$ Hecke grubu için bir temel bölge olarak

$$F_{\lambda_q} = \left\{z \in U : |Rez| < \frac{\lambda_q}{2}, |z| > 1\right\}$$

kümesi alınabilir.

Bu küme λ nın farklı değerlerine karşılık T ve S dönüşümleri gözönüne aınarak aşağıdaki gibi gösterilir.



Şekil 3.1. $H(\lambda_q)$ Hecke grubunun temel bölgesi

Teorem 3.2.2: $H(\lambda)$ gruplarının bir Fuchsian grup olması için gerek ve yeter şart $\lambda = \lambda_q = 2cos\frac{\pi}{q}, q \geq 3$ bir tamsayı veya $\lambda \geq 2$ reel sayı olmasıdır (Hecke 1936).

$H(\lambda_q)$ Hecke grubu $\lambda = \lambda_q$ veya $\lambda = 2$ olduğunda birinci türden Fuchsian gruptur, $H(\lambda), \lambda > 2$ olduğunda ikinci türden Fuchsian gruptur (Koruoğlu ve Şahin 2010).

$H(\lambda_q)$ Hecke grubu, $PSL(2,\mathbb{R})$ grubunun 2 mertebeli $T(z) = -\frac{1}{z}$ ve q mertebeli $S(z) = -\frac{1}{z+\lambda_q}$ ile üretilen ayrık alt grubudur (Şahin 2001). Bu $T(z)$ ve $S(z)$ üreteçlerinin matris temsilleri ise

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ve \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \lambda_q \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

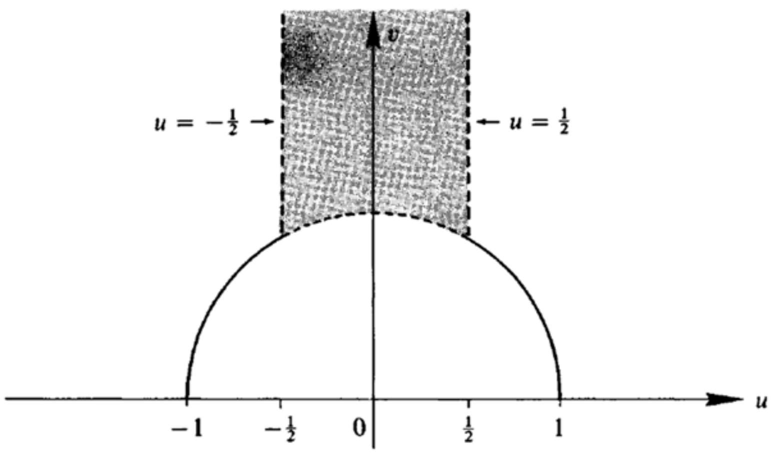
$\lambda = \lambda_q = 2cos\frac{\pi}{q}, 1 \leq \lambda < 2$ durumuna karşılık gelen $H(\lambda_q)$ Hecke grupları ve bunların normal alt grupları (Cangül 1993) tarafından çalışılmıştır.

$q = 3$ için $\lambda = \lambda_3 = 2cos\frac{\pi}{3} = 1$ değerine karşılık gelen $H(\lambda_3)$ Hecke grubu modüler grup olarak bilinir.

Buna göre $H(\lambda_3)$ modüler grubu için bir temel bölge

$$F = \left\{z \in U: |z| > 1, |Rez| < \frac{1}{2}\right\}$$

kümesidir (Şahin 2001).



Şekil 3.2. Modüler grubun temel bölgesi

$H(\lambda_q)$ Hecke grubunun grup yapısı aşağıdaki teoremde ifade edilmiştir.

Teorem 3.2.3: $H(\lambda_q)$ Hecke grubu 2 ve q mertebeli sonlu devirli iki grubun serbest çarpımına izomorftur, yani

$$H(\lambda_q) \cong C_2 \star C_q$$

dır (Cangül 1996).

$H(\lambda_q)$ grubunun grup gösterimi

$$H(\lambda_q) = \langle T, S | T^2 = S^q = I \rangle \cong C_2 \star C_q$$

şeklindedir (Şahin 2001).

3.3. Genişletilmiş Hecke Grupları

Tanım 3.3.1: Hecke gruplarına $R_1(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ yansıması katılarak elde edilen $\overline{H}(\lambda_q)$ grubuna genişletilmiş Hecke grubu denir.

S ve T Hecke grubunun üreteçleri olmak üzere

$$R_2 = R_1 S \quad ve \quad R_3 = R_1 T$$

dönüşümlerini alalım.

$$S(z) = -\frac{1}{z + \lambda_q} \quad \text{ve} \quad T(z) = -\frac{1}{z}$$

olduğundan R_2 ve R_3 dönüşümleri

$$R_2(z) = -(\bar{z} + \lambda_q) \quad ve \quad R_3(z) = -\bar{z}$$

olur. Bu dönüşümlerin matris gösterimleri ise

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \lambda_q \end{pmatrix} \; ve \; R_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olur. R_1, R_2 ve R_3 yansımaları genişletilmiş Hecke grubunun üreteçleridir. Dolayısıyla genişletilmiş Hecke gruplarının grup gösterimleri

$$\overline{H}(\lambda_q) = \langle R_1, R_2, R_3 | R_1^2 = R_2^2 = R_3^2 = (R_1R_2)^2 = (R_3R_1)^2 = I \rangle$$

biçimindedir. Burada

$$R_1R_3 = R_3R_1 = T, \qquad R_1R_2 = S \ \ ve \ \ R = R_1$$

olduğu dikkate alınırsa, genişletilmiş Hecke grubunun gösterimi

$$\overline{H}(\lambda_q) = \langle T, S, R | T^2 = S^q = R^2 = I, TR = RT, RS = S^{-1}R \rangle$$

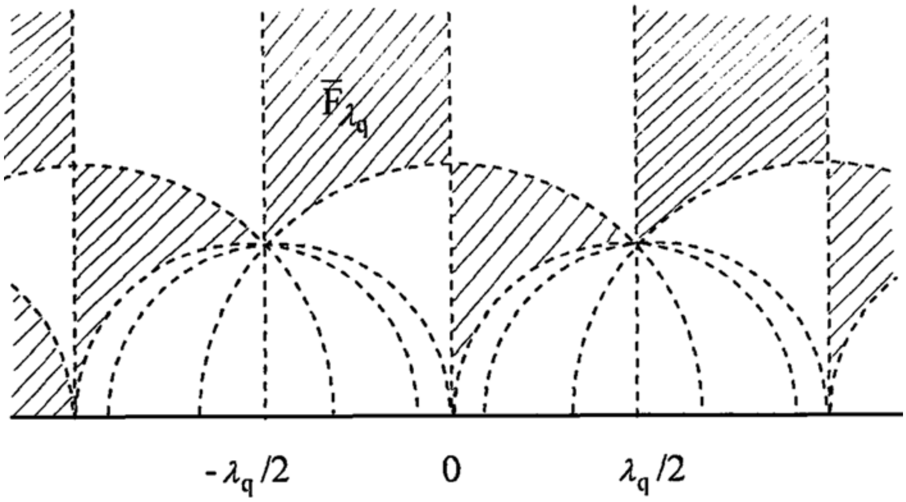
biçiminde ifade edilebilir. $TR = RT$ ve $RS = S^{-1}R$ bağıntıları dikkate alınırsa $(TR)^2 = I$ ve $(RS)^2 = I$ bağıntıları elde edilir. Dolayısıyla genişletilmiş Hecke gruplarının gösterimi

$$\overline{H}(\lambda_q) = \langle T, S, R | T^2 = S^q = R^2 = (TR)^2 = (RS)^2 = I \rangle$$

biçiminde ifade edilir (Şahin 2001).

Teorem 3.3.2: $\bar{F}_{\lambda_q} = \left\{ z \in U : -\frac{\lambda_q}{2} < Re(z) < 0, |z| > 1 \right\}$

kümesi $\overline{H}(\lambda_q)$ gruplarının bir temel bölgesi olur (Şahin 2001).



Şekil 3.3. $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke grubunun temel bölgesi

Teorem 3.3.3: Genişletilmiş Hecke gruplarının grup yapısı

$$\overline{H}(\lambda_q) \cong D_2 \star_{\mathbb{Z}_2} D_q$$

biçimindedir (Şahin 2001).

İspat: Genişletilmiş Hecke gruplarının grup gösterimleri

$$\overline{H}(\lambda_q) = \langle\, T, S, R | T^2 = S^q = R^2 = (TR)^2 = (RS)^2 = I \rangle$$

biçiminde belirtilmişti. Burada $R \equiv R$ özdeşlemesi ile

$$\overline{H}(\lambda_q) = \langle T, R | T^2 = R^2 = (TR)^2 = I \rangle \star \langle S, R | S^q = R^2 = (SR)^2 = I \rangle$$

ve buradan da

$$\overline{H}(\lambda_q) \cong D_2 \star_{\mathbb{Z}_2} D_q$$

elde edilir.

$\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke grubunda $q = 3$ için $\lambda = \lambda_3 = 2cos\frac{\pi}{3} = 1$ alınırsa bu grup, genişletilmiş modüler grup olarak bilinir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Genelleştirilmiş Fibonacci Dizilerinin Genişletilmiş Hecke Grupları İle Bağlantısı

Jones and Thornton (1986)'da $\bar{\Gamma}$ genişletilmiş modüler grubun bir elemanının matris temsilinin girdileri ile Fibonacci sayıları arasında bir bağıntı bulmuşlardır. Buna göre eğer

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{RTS} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \in \bar{\Gamma}$$

ise bu durumda $\boldsymbol{f}$ nin $\boldsymbol{k}$. kuvveti

$$\boldsymbol{f^k} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{f_{k-1}} & \boldsymbol{f_k} \\ \boldsymbol{f_k} & \boldsymbol{f_{k+1}} \end{pmatrix}$$

olup burada$\boldsymbol{f_k}$, $\boldsymbol{f_0 = 0}$, $\boldsymbol{f_1 = 1}$ ve $\boldsymbol{f_k = f_{k-1} + f_{k-2}}$ ile tanımlanan Fibonacci dizisidir.

4.1.1. $\overline{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{\lambda_q})$ genişletilmiş Hecke gruplarında genelleştirilmiş Fibonacci dizileri

Koruoğlu ve Şahin (2010) genişletilmiş Hecke grupları ile genelleştirilmiş Fibonacci dizileri arasında aşağıdaki bağlantıları bulmuşlardır. Buna göre, ilk olarak $\overline{H}(\lambda_q)$'da

$$h = TSR = \begin{pmatrix} \lambda_q & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ve \quad f = RTS = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \lambda_q \end{pmatrix}$$

olsun.

Lemma 4.1.1.1: $\overline{H}(\lambda_q)$'da $h = TSR$ elemanı için h'nın k. kuvveti aşağıdaki gibidir:

$$h^k = \begin{pmatrix} a_k & a_{k-1} \\ a_{k-1} & a_{k-2} \end{pmatrix}$$

olup burada, $a_0 = 1$, $a_1 = \lambda_q$ olmak üzere $k \geq 2$ için $a_k = \lambda_q a_{k-1} + a_{k-2}$ dir (Koruoğlu ve Şahin 2010).

İspat: İspat için ilk olarak

$$h^k = \begin{pmatrix} \lambda_q a_{k-1} + b_{k-1} & a_{k-1} \\ a_{k-1} & b_{k-1} \end{pmatrix}$$

olduğunu gösterelim. Bunun için tümevarım metodu kullanılacaktır. Buna göre,

$$h = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \quad ve \quad h^k = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix}$$

olsun. $h = \begin{pmatrix} \lambda_q & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ alınarak devam edilirse, h^2,

$$h^2 = \begin{pmatrix} \lambda_q & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_q & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \lambda_q^2 & \lambda_q \\ \lambda_q & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_q a_1 + b_1 & a_1 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. Böylece $k = 2$ için doğru sonuç elde edilir. Şimdi

$$h^{k-1} = \begin{pmatrix} \lambda_q a_{k-2} + b_{k-2} & a_{k-2} \\ a_{k-2} & b_{k-2} \end{pmatrix}$$

olduğunu kabul edip h^k için doğruluğunu gösterelim. Buna göre h^{k+1},

$$h^{k+1} = \begin{pmatrix} \lambda_q a_{k-2} + b_{k-2} & a_{k-2} \\ a_{k-2} & b_{k-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_q & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_{k-2} + \lambda_q(\lambda_q a_{k-2} + b_{k-2}) & b_{k-2} + \lambda_q a_{k-2} \\ b_{k-2} + \lambda_q a_{k-2} & a_{k-2} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \lambda_q a_{k-1} + b_{k-1} & a_{k-1} \\ a_{k-1} & b_{k-1} \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. Burada $b_2 = a_1$, $b_k = a_{k-2}$ ve $b_k = a_{k-1}$ olduğuna dikkat edilmelidir. Bununla birlikte $a_0 = 1$ sınır şartından $b_1 = a_0$ ve

$$h^k = \begin{pmatrix} a_k & a_{k-1} \\ a_{k-1} & a_{k-2} \end{pmatrix}$$

olur. Böylece bir a_k reel sayı dizisi elde edilir. Bu dizinin tanımından ve sınır şartlarından

$$a_k = \lambda_q a_{k-1} + a_{k-2}, \quad k \geq 2 \; için, \tag{1}$$
$$a_0 = 1, \quad a_1 = \lambda_q$$

olur.

Önceki teoreme benzer olarak aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.1.1.2: f nin k. kuvveti

$$f^k = \begin{pmatrix} a_{k-1} & a_k \\ a_k & a_{k+1} \end{pmatrix}$$

dir. Burada $a_0 = 1$, $a_1 = \lambda_q$ olmak üzere $k \geq 2$ için $a_k = \lambda_q a_{k-1} + a_{k-2}$ dir

(Koruoğlu ve Şahin 2010).

Bu sonuç Jones and Thornton (1986) nın bulduğu sonuç ile çakışır.

Şimdi Lemma 4.1.1.1'deki a_k dizisinin genel formülü ve bu formül ile genelleştirilmiş bir Fibonacci dizisi elde edilecektir.

Önerme 4.1.1.3: Tüm $k \geq 2$ ler için

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_q^2 + 4}} \left[\left(\frac{\lambda_q + \sqrt{\lambda_q^2 + 4}}{2} \right)^{k+1} - \left(\frac{\lambda_q - \sqrt{\lambda_q^2 + 4}}{2} \right)^{k+1} \right] \qquad (2)$$

(Koruoğlu ve Şahin 2010).

İspat: (1)'deki eşitliği çözmek için, a_k dizisinin karakteristik denklemi r^k olsun. Bu durumda

$$r^k = \lambda_q r^{k-1} + r^{k-2} \Rightarrow r^2 - \lambda_q r - 1 = 0$$

denklemi elde edelir. Bu denklemin kökleri

$$r_{1,2} = \frac{\lambda_q \pm \sqrt{\lambda_q^2 + 4}}{2}$$

dir. Bu $r_{1,2}$ köklerinden faydalanarak a_k nın genel bir formülüne ulaşılır. Eğer a_k, $r_{1,2}$ nin kombinasyonları olarak ayrılırsa,

$$a_k = A \left(\frac{\lambda_q + \sqrt{\lambda_q^2 + 4}}{2} \right)^k + B \left(\frac{\lambda_q - \sqrt{\lambda_q^2 + 4}}{2} \right)^k$$

elde edilir. $a_0 = 1$ ve $a_1 = \lambda_q$ olduğu dikkate alınırsa, A ve B sabitleri hesaplanabilir.

$$a_0 = 1 = A + B$$
$$a_1 = \lambda_q = A\left(\frac{\lambda_q + \sqrt{\lambda_q^2 + 4}}{2}\right) + B\left(\frac{\lambda_q - \sqrt{\lambda_q^2 + 4}}{2}\right)$$

ve böylece

$$2\lambda_q = A\left(\lambda_q + \sqrt{\lambda_q^2 + 4}\right) + (1 - A)\left(\lambda_q - \sqrt{\lambda_q^2 + 4}\right)$$

olur. Buradan A ve B sabitleri

$$A = \frac{\lambda_q + \sqrt{\lambda_q^2 + 4}}{2\sqrt{\lambda_q^2 + 4}} \quad ve \quad B = \frac{\lambda_q - \sqrt{\lambda_q^2 + 4}}{2\sqrt{\lambda_q^2 + 4}}$$

olarak bulunur. Son adım olarak, a_k nın formülü

$$a_k = \left(\frac{\lambda_q + \sqrt{\lambda_q^2 + 4}}{2\sqrt{\lambda_q^2 + 4}}\right)\left(\frac{\lambda_q + \sqrt{\lambda_q^2 + 4}}{2}\right)^k + \left(\frac{\sqrt{\lambda_q^2 + 4} - \lambda_q}{2\sqrt{\lambda_q^2 + 4}}\right)\left(\frac{\lambda_q - \sqrt{\lambda_q^2 + 4}}{2}\right)^k$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\lambda_q^2 + 4}}\left[\left(\frac{\lambda_q + \sqrt{\lambda_q^2 + 4}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{\lambda_q - \sqrt{\lambda_q^2 + 4}}{2}\right)^{k+1}\right]$$

olarak yazılır.

Bu formül genelleştirilmiş bir Fibonacci dizisidir. Eğer $\lambda_q = 1$ alınırsa, genel Fibonacci dizisi elde edilir. Burada $a_k = h_{k+1}$, $(k + 1)$. Fibonacci sayısıdır. Aynı zamanda Fibonacci dizisi

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right] = h_{k+1}$$

şeklinde olur.

Böylece, $\bar{\Gamma}$ genişletilmiş modüler grupta

$$h^k = \begin{pmatrix} h_{k+1} & h_k \\ h_k & h_{k-1} \end{pmatrix}$$

olur.

Fibonacci sayıları kullanılarak, $\bar{\Gamma}$ genişletilmiş modüler grubun tüm elemanları elde edilebildiğinden bu eşitlik son derece önemlidir (Koruoğlu ve Şahin 2010).

Ayrıca, eğer $\lambda_q = 2$ olarak alınırsa,

$$P_0 = 0, P_1 = 1 \;\; P_{n+2} = 2P_{n+1} + P_n$$

olarak tanımlanan genel Pell dizisi elde edilir. Buna göre,

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{8}}\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^{k+1} - \left(1-\sqrt{2}\right)^{k+1}\right] = h_{k+1}$$

olur. Burada $a_k = h_{k+1}$, $(k+1)$. Pell sayısıdır.

4.2. Genişletilmiş Modüler Gruba Bir Uygulama

Genişletilmiş modüler grup

$$\bar{\Gamma} = \langle T, S, R | T^2 = S^3 = R^2 = (TR)^2 = (SR)^2 = I \rangle \cong D_2 *_{\mathbb{Z}_2} D_3$$

temsiline sahiptir.

Fine (1994) ve Koruoğlu *et al.* (2008)'de aşağıdaki matrisleri, modüler grup ve genişletilmiş modüler grupta bloklar olarak adlandırmaktadırlar:

$$TS = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ve \quad TS^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$W(T, S, R)$, $\bar{\Gamma}$ da R nin üsleri çift sayı olacak şekildeki bir kelime olsun; bu durumda bu kelime $i = 0,1,2$ ve $j = 0,1$ için

$$S^i (TS)^{m_0} (TS^2)^{n_0} \dots (TS)^{m_k} (TS^2)^{n_k} T^j \tag{3}$$

şeklinde olur. $W(T, S, R)$, $\bar{\Gamma}$ da R nin üsleri tek sayı olacak şekildeki bir kelime ise; bu durumda bu kelime $i = 0,1,2$ ve $j = 0,1$ için

$$RS^i (TS)^{m_0} (TS^2)^{n_0} \dots (TS)^{m_k} (TS^2)^{n_k} T^j \tag{4}$$

şeklinde olur. Burada blokların üsleri pozitif tamsayılardır, fakat m_0 ve n_k sıfır olabilir. Bu temsil geneldir ve indirgenmiş blok formu kısaca BRF (blok reduced form) olarak adlandırılır.

BRF de herhangi bir indirgenmiş kelime bu bloklar ile yazılabilir. Örneğin, BRF de

$$TSTSTSTS^2TS^2TS$$

kelimesi

$$(TS)^3(TS^2)^2(TS)$$

şeklinde ve BRF de

$$RTS^2RTS^2R$$

kelimesi

$$R(TS^2)(TS)$$

şeklindedir.

Şimdi, $\bar{\Gamma}$ genişletilmiş modüler grupta temel sonuçları elde etmek için aşağıdaki matrislere ihtiyaç duyulur.

$$f = RTS = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, h = RTS^2 = TSR = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Bu matrisler önceki kısımda verilen f ve h nın $\lambda_q = 1$ için özel durumlarıdır. $\bar{\Gamma}$ genişletilmiş modüler grupta (3) ve (4) formundaki her bir elemanı f ve h nın kuvvetleri ile elde edebilmek için aşağıdaki tanıma ihtiyaç vardır.

Tanım 4.2.1: f ve h ya yeni bloklar denir. BRF deki $W(T,S,R)$ kelimesi eğer f ve h nın kuvvetleri ile elde edilebiliyorsa bu kelimeye, indirgenmiş yeni blok formu kısaca $NBFR$ (new blok reduced form) denir (Koruoğlu ve Şahin 2010).

Şimdi aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.2.2: $\bar{\Gamma}$ genişletilmiş modüler gruptaki her bir indirgenmiş kelime bir $NBRF$ ye sahiptir (Koruoğlu ve Şahin 2010).

İspat: $W(T,S,R)$, $\bar{\Gamma}$ da bir indirgenmiş kelime olsun. Bu durumda BRF deki $W(T,S,R)$, ya

$$S^i(TS)^{m_0}(TS^2)^{n_0}\dots(TS)^{m_k}(TS^2)^{n_k}T^j$$

ya da

$$RS^i(TS)^{m_0}(TS^2)^{n_0}\dots(TS)^{m_k}(TS^2)^{n_k}T^j$$

olur. $W(T,S,R)$ deki TS ve TS^2 blokları için $TS=Rf=hR$ ve $TS^2=Rh=fR$ bağıntıları elde edilir. Böylece $W(T,S,R)$ deki TS ve TS^2 bloklarının yerine bu bağıntılar yazılırsa istenen elde edilir.

Bu sonuç kullanılarak; $\bar{\Gamma}$ genişletilmiş modüler grubun tüm elemanları, f ve h nın kuvvetleri olarak yazılabilir.

Örnek 4.2.3: BRF deki kelime

$$W=(TS^2)(TS)^2(TS^2)(TS)^2$$

$\bar{\Gamma}$ genişletilmiş modüler grupta olsun. $TS=Rf=hR$ ve $TS^2=Rh=fR$ bağıntılarına göre

$$W=(Rh)(Rf)(Rf)(Rh)(Rf)(Rf)$$

olur. Böylece $NBRF$ deki bu kelime

$$W=f^2h^3f=\begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f_2 & f_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_4 & h_3 \\ h_3 & h_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_0 & f_1 \\ f_1 & f_2 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir (Koruoğlu ve Şahin 2010).

5. SONUÇ

Bu çalışmada Hecke grupları ve bu grupların grup yapısı tanıtılmıştır. Buna bağlı olarak genişletilmiş Hecke grupları tanıtılmıştır. Daha sonra genişletilmiş Hecke gruplarının genelleştirilmiş Fibonacci dizisiyle olan bağlantısına değinilmiştir. Buna göre 4.1. kısımda bir a_k dizisi tanıtılmıştır. Bu dizide $\lambda_q = 1$ olarak alındığında bu standart Fibonacci dizisini vermektedir. Burada $a_k = h_{k+1}$, $(k+1)$. Fibonacci sayısını vermektedir. Ayrıca bu a_k dizinde $\lambda_q = 2$ olarak alınırsa bu ise Pell dizisini vermektedir.

KAYNAKLAR

Asar, A.O., Arıkan, A., Arıkan, A., 2009. Cebir. Eflatun Yayınevi, No: 18, 373 s, Ankara.

Apostol, T.M., 1990. Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory. Springer-Verlag New York, Inc. 161 s, USA.

Cangül, İ.N., 1996. The Group Structure of Hecke Groups $H(\lambda_q)$. Turkish Journal of Mathematics, 20, 203-207.

Cangül, İ.N. and Singerman, D., 1998. Normal Subgroups of Hecke Groups and Regular Maps. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 123, 59-74.

Cangül, İ.N., 1999. Normal Subgroups and Elements of $H'(\lambda_q)$. Turkish Journal of Mathematics, 23, 251-256.

Çevik, A.S., 2010. Cebire Giriş. Nobel Yayın Dağıtım No:1591, 278 s, Ankara.

Başkan, T., 1980. Ayrık Gruplar. Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, 215 s, Ankara.

Berndt, B.C. and Knopp, M.I., 2008. Hecke's Theory of Modular Forms and Dirichlet Series. World Scientific Publishing, 137 s, Singapore.

Çallıalp, F., 2001. Örneklerle Soyut Cebir. Birsen Yayınevi No: Y. 0029, 300 s, İstanbul.

Dikici, R. and Işık, A., 1997. Fibonacci Sequences in Modular Groups. Journal of Institute of Mathematics & Computer Sciences (Mathematics Series), 10 (3), 187-189.

Dikici, R. and Özkan, E., 1998. General Recurrences in Modular Groups. Journal of Faculty of Science Ege University, 21 (2).

Fine, B., 1994. Trace Classes and Quadtaric Forms in The Modular Forms. Canadian Mathematical Bulletion, 37 (2), 202-212.

Fine, B. and Rosenberg, G., 1999. Algebraic Generalitions of Discrete Groups. Marcel Dekker Inc., 317 s, USA.

Hecke, E., 1936. Über Die Bestimmung Dirichletsher Reichen Durch İhre Funktionalgleichungen, Mathematische Annalen, 36 (2), 664-699.

Jones, G.A. and Thornton, J.S., 1986.Automorphisms and Congruence Subgroups of The Extended Modular Group, Journal of the London Mathematical Society, 34 (2), 26-40.

Jones, G.A. and Singerman, D., 1987. Complex Functions. Cambridge University Press, 342 s, Great Britania.

Koruoğlu, Ö., Şahin, R. and İkikardeş, S., 2008. Trace Classes and Fixed Points for The Extended Modular Group $\bar{\Gamma}$, Turkish Journal of Mathematics, 32, 11-19.

Koruoğlu, Ö. and Şahin, R., 2010. Generalized Fibonacci Sequences Related to The Extended Hecke Groups and An Application to The Extended Modular Groups, 34, 325-332.

Mucuk, O., 2010. Topoloji ve Kategori. Nobel Bilim ve Araştırma Merkezi Yayın No: 45, 462 s, Ankara.

Şahin, R., 2001. Genişletilmiş Hecke Grupları. Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Balıkesir Üniversitesi.

Şahin, R., İkikardeş, S. and Koruoğlu, Ö., 2004. On the Power Subgroups of the Extended Modular Group $\bar{\Gamma}$, Turkish Journal of Mathematics, 28, 143-151.

Şahin, R., İkikardeş, S. and Koruoğlu, Ö., 2006. Some Subgroups of the Extended Hecke Groups $\bar{H}(\lambda_q)$, Rocky Mountain Journal of Mathematics, 36 (3), 1033-1048.

Taşçı, D., 2007. Soyut Cebir. Alp Yayınevi No :60, 671 s, Ankara.

Vajda, S., 1989. Fibonacci and Lucas Numbers and The Golden Section, Ellis Horwood Limited, Chichester, England.

ÖZGEÇMİŞ

1988 yılında Erzurum’da doğdu. İlk ve orta öğretimini Erzurum’da tamamladı. 2005 tarihinde Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümüne yerleşerek lisans öğrenimine başladı ve 2009 yılında mezun oldu. Aynı yıl Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans öğrenimine başladı. Halen lisansüstü eğitimine devam etmektedir.