8-BOYUTTA PARA-NORDEN-
WALKER MANİFOLDLAR

Zeynep YAVUZ

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Ana Bilim Dalı
Doç. Dr. Murat İŞCAN
2013

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

8-BOYUTTA PARA-NORDEN-WALKER MANİFOLDLAR

Zeynep YAVUZ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

ERZURUM
2013

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAY FORMU

8-BOYUTTA PARA-NORDEN-WALKER MANİFOLDLAR

Doç. Dr. Murat İŞCAN danışmanlığında, Zeynep YAVUZ tarafından hazırlanan bu çalışma 15/07/2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliği **(3/3)** ile kabul edilmiştir.

Başkan	: Doç. Dr. Murat İŞCAN	*İmza*	:
Üye	: Doç. Dr. Kürşat AKBULUT	*İmza*	:
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Levent AKGÜN	*İmza*	:

Yukarıdaki sonucu onaylıyorum

Prof. Dr. İhsan **EFEOĞLU**
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

8-BOYUTTA PARA-NORDEN-WALKER MANİFOLDLAR

Zeynep YAVUZ

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Murat İŞCAN

Bu tezde, 8-boyutta para-kompleks yapıya ve Norden metriğine sahip özel bir φ yapısı elde edilip, bu yapının integrallenebilirliği incelenip, integrallenebilmesi için gerek ve yeter şart verilmiştir. 8-boyutta verilen (M_8, φ, g) para-Norden-Walker manifoldunun para-Kähler-Norden-Walker ve quasi-para-Kähler-Norden olabilmesi için gerek ve yeter şartlar verilmiştir. Son olarak, (M_8, φ, g) para-Norden-Walker manifoldunun izotropik para-Kähler-Nordenliği incelenmiştir.

2013, 50 sayfa

Anahtar Kelimeler: Norden metriği, Walker metriği, Nijenhuis Tensörü, Parakompleks yapı.

ABSTRACT

Master Thesis

EIGHT DIMENSIONAL PARA-NORDEN-WALKER MANIFOLDS

Zeynep YAVUZ

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Murat İŞCAN

In this thesis, an 8-dimensional para-complex structure φ with the Norden metric has been obtained and the integrability of this structure, the conditions to make it integrable has been studied. Also the conditions which is needed to make the (M_8, φ, g) para-Norden-Walker manifold a para-Kähler-Norden-Walker and quasi-para-Kähler-Norden manifold has been obtained. Lastly, the existence of the condition for the manifold (M_8, φ, g) to be an isotropic para-Kähler-Norden manifold has been checked.

2013, 50 pages

Keywords: Norden metric, Walker metric, Nijenhuis Tensor, Paracomplex structure.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Tez konusu olarak bu konuyu çalışmamı sağlayan, benden bilgisini ve yardımlarını esirgemeyen hocam Sayın Doç. Dr. Murat İŞCAN'a şükranlarımı sunarım.

Ayrıca çalışmalarım boyunca göstermiş oldukları desteklerinden dolayı aileme teşekkür etmeyi borç bilirim.

Zeynep YAVUZ
Temmuz 2013

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

I	Birim Afinor Alanı
S_{ij}^{h}	Burulma Tensörü
$\Gamma_{ij}^{\ h}$	Cristoffel Sembolü
R_{ijk}^{h}	Eğrilik Tensörü
$T_q^{\ p}(M_n)$	***M_n*** Manifoldu Üzerinde ***(p,q)*** Tipli Tensör Demeti
$T(M_n)$	***M_n*** Manifoldunun Tanjant Demeti
D	Null Dağılım
g	Pseudo-Riemannian Metriği
$T_x(M_n)$	$x \in M_n$ Noktasındaki Tanjant Demet
L_X	***X*** Vektör Alanına Göre Lie Türevi
∇_X	***X*** Vektör Alanına Göre Kovaryant Türev

1. GİRİŞ

Manifoldlar üzerindeki yapılar teorisi modern diferensiyel geometrinin en önemli konularındandır. Bu konulardan biriside para-kompleks yapılaya sahip manifoldların diferensiyel geometrik olarak incelenmesidir.

(Norden 1960) g metriği her $X, Y \epsilon \mathfrak{T}_0^1(M_{2n})$ için;

$$g(\varphi X, Y) = g(X, \varphi Y)$$

veya

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y)$$

şartını sağlıyorsa g' ye Norden metriği adı verilir. (M_{2n}, φ) hemen hemen parakompleks manifoldu g Norden metriğine sahipse, (M_{2n}, φ, g) manifolduna hemen hemen para-Norden manifold denir.

M_8, 8-manifoldu üzerindeki g nötral metriği, M_8'de g'ye göre paralel 4-boyutlu D null dağılımına sahipse Walker'dir denir. Bu şekildeki metriklerin kanonik formu Walker (1950) tarafından oluşturulmuştur. Uygun $(x_1, x_2, \dots, x_8)$ koordinatlarının varlığı durumunda metrik;

$$g = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & I_4 \\ I_4 & B \end{pmatrix}$$

şeklinde ifade edilir. Burada I_4, 4×4 tipindeki birim matris, B'de 4×4 tipinde bileşenleri $(x_1, x_2, \dots, x_8)$ koordinatlarının fonksiyonları olan matristir.

Walker manifoldu üzerindeki en yoğun çalışmalar 2004 yılından sonra başlamıştır. Matsushita (2004) Walker 4-manifoldlar için uygun hemen hemen kompleks yapılar inşa etmiş. Chaichi *et al.* (2005) 4-boyutlu Walker metriklerinin eğrilik özelliklerini incelemiş. Davidov *et al.* (2007) Almost Kahler-Walker 4-manifoldları ve Davidov *et al.* (2008) Hermitian-Walker 4-manifoldları araştırmış. Salimov and Iscan (2010) Norden-Walker metriklerinin bazı özelliklerini incelemiştir.

Sunulan bu tezde para-kompleks yapıya sahip Norden ve Walker metriği ile donatılmış manifoldlara 8-boyutta bir örnek verilmiştir. Çalışmamızın anlaşılabilmesi için ve konunun sınırlanması amacıyla ikinci bölümde ilgili özellikler ve tanımlar, kuramsal temeller adı altında verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise Tanjant Demet, Nijenhuis Tensörü, Skaler Eğrilik, Hermitian ve Kahlerian Manifoldlar ve Paralel Null-Dağılımı hakkında bilgiverilmiştir.

Dördüncü bölümde örneğimizin temelini teşkil eden φ yapısı elde edilip, bu yapının integrallenebilirliği incelenip, integrallenebilmesi için gerek ve yeter şart verilmiştir. Daha sonra (M_8, φ, g) üçlüsünün para-Kähler-Norden-Walker ve quasi-para-Kähler-Norden olabilmesi için gerek ve yeter şatlar verilmiştir. Son olarak (M_8, φ, g) para-Norden-Walker manifoldunun izotropik para-Kähler-Nordenliği incelenmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Skaler Çarpım Uzayları

2.1.1. Simetrik bilineer formlar

Tanım 2.1.1: V bir reel vektör uzayı olsun. $<,>: V \times V \to \mathbb{R}$ dönüşümü $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $\forall\ \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ için,

i. $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$

ii. $\langle a\vec{u} + b\vec{v}, \vec{w} \rangle = a\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + b\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$

$\langle \vec{u}, a\vec{v} + b\vec{w} \rangle = a\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + b\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$

özelliklerine sahip ise $<,>$ dönüşümüne V vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.2: $<,>$, V vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form olsun.

i. $\forall\ \vec{v} \in V$ ve $\vec{v} \neq 0$ için $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle > 0$ ise $<,>$ simetrik bilineer formuna pozitif tanımlı,

ii. $\forall\ \vec{v} \in V$ ve $\vec{v} \neq 0$ için $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle < 0$ ise $<,>$ simetrik bilineer formuna negatif tanımlı,

iii. $\forall\ \vec{v} \in V$ için $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \geq 0$ ise $<,>$ simetrik bilineer formuna pozitif yarı tanımlı,

iv. $\forall\ \vec{v} \in V$ için $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \leq 0$ ise $<,>$ simetrik bilineer formuna negatif yarı definit,

v. $\forall \vec{w} \in V$ için $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$ olduğunda $\vec{v} = 0$ olmak zorunda ise $<,>$ simetrik bilineer formuna non-dejenere, değilse dejeneredir denir (O'Neill 1983).

V vektör uzayı üzerinde $<,>$ simetrik bilineer formu tanımlı değil ise, $\vec{v} \in V$ vektörler için

$$\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle > 0 \text{ veya } \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle < 0 \text{ veya } \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0$$

olur. V üzerinde bir simetrik bilineer form $<,>$ ise V nin herhangi bir W altuzayı için $<,>|_W$ kısıtlaması da yine simetrik ve bilineerdir.

Tanım 2.1.3: V bir vektör uzayı ve $<,>: V \times V \to \mathbb{R}$ bir simetrik bilineer form olsun.
$<,>|_W : W \times W \to \mathbb{R}$
negatif tanımlı olacak şekildeki en büyük boyutlu W alt uzayının boyutuna $<,>$ simetrik bilineer formunun indeksi denir ve ν ile gösterilir (O'Neill 1983).

Buna göre $1 \le \nu \le boyV$ dir. $\nu = 0$ olması için gerek ve yeter şart $<,>$ nın pozitif yarı tanımlı olmasıdır.

V nin bir bazı $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ olsun. $g_{ij} = \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle$ olarak tanımlanan $n \times n$ tipindeki (g_{ij}) matrisine, $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$ bazına göre $<,>$ simetrik bilineer formunun matrisi denir. $<,>$ simetrik olduğundan (g_{ij}) matrisi de simetriktir. Ayrıca

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} v^i \vec{e}_i, \sum_{j=1}^{n} w^j \vec{e}_j \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} v^i w^j$$

olduğundan (g_{ij}) matrisi $<,>$ yi belirtir.

Teorem 2.1.1: Bir $<,>$ simetrik bilineer formunun non-dejenere olması için gerek ve yeter şart $<,>$ nın herhangi bir baza göre matrisinin tersinin olmasıdır (O'Neill 1983).

Tanım 2.1.4: Bir $\vec{v} \in V$ vektörü için
$\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle > 0$ veya $\vec{v} = 0$ ise bu $\vec{v}$ vektörüne space-like vektör,
$\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle < 0$ ise bu $\vec{v}$ vektörüne time-like vektör,
$\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0$ ve $\vec{v} \neq 0$ ise bu $\vec{v}$ vektörüne null vektör denir (O'Neill 1983).

2.1.2. Skaler çarpım

Tanım 2.1.5: Bir V vektör uzayı üzerinde non-dejenere, simetrik bilineer formuna V vektör uzayı üzerinde bir skaler çarpım denir. V üzerindeki bir skaler çarpım $<,>$ ise $(V,<,>)$ ikilisine skaler çarpım uzayı denir.

Pozitif tanımlı skaler çarpıma bir iç çarpım denir. Buna örnek olarak, $\mathbb{R}^n$ üzerinde $\vec{v}.\vec{w} = \sum_{i=1}^{n} v^i w^i$ şeklinde tanımlanan nokta çarpmasını verebiliriz.

2.2. Diferensiyellenebilir Manifoldlar

Tanım 2.2.1: X Hausdorff topolojik uzay olmak üzere herhangi bir $U \subset X$ açık kümesinin $V \subset \mathbb{R}^n$ bölgesine

$$\varphi : U \to V$$

homeomorfizmine X de n boyutlu koordinat sistemi, U ya ise φ haritasının koordinat komşuluğu veya koordinat bölgesi denir. Bazen harita (U,φ) şeklinde de gösterilir.

Eğer $x \in U$ ise

$$\varphi(x) = (x^1, x^2, \dots, x^n) \subset \mathbb{R}^n$$

olur. $x^1,\dots, x^n$ reel sayılarına φ haritasında x noktasının koordinatları denir.

Tanım 2.2.2: Eğer X Hausdorff topolojik uzayının n boyutlu φ_α haritalarının U_α bölgeleri bu uzayı örterse, yani

$$X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \ , \quad \text{(A-indisler kümesi)}$$

ise X ‘ e n boyutlu topolojik manifold veya sadece n boyutlu manifold denir.

Tanım 2.2.3: X topolojik Hausdorff uzay ve k ise $0 \le k \le \infty$ şartını sağlayan tam sayı olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in A, U_\alpha \subset X\}$ lokal koordinatlar ailesine X üzerinde C^k sınıfından n boyutlu atlas adı verilir:

1. Lokal haritaların U_α bölgesi X i örter, yani X, n boyutlu topolojik manifolddur.
2. Keyfi $\alpha, \beta \in A$ için $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$ ise

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

dönüşümü C^k sınıfındandır. Bu şarta bazen $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ve (U_β, φ_β) haritalarının C^k uzlaşması şartı da denir.

$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümüne ise koordinatların dönüşümü $\left(u_\beta^i = u_\beta^i(u_\alpha^j), i, j = 1,...,n\right)$ denir. Burada u_β^i, (U_β, φ_β) haritasındaki $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ noktasının koordinatlar, u_α^j ise $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ haritasındaki x noktasının koordinatlarıdır.

$U_\alpha \cap U_\beta = \phi$ ise bu durumda $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümü tayin edilemez. Bu durumda $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümünün C^k sınıfından olduğu kabul edilecektir. 2. şartı, $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümlerinin C^k sınıfından diffeomorfizmler olmasına denktir. Bu ise, $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ koordinat dönüşümünün Jakobiyen matrisinin determinantının sıfırdan farklı olması demektir.

Tanım 2.2.4: $\{(\mathrm{U}_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ ve $\{(\mathrm{U}_\beta, \varphi_\beta)\}$, C^k sınıfından herhangi iki atlas olsun. Bu atlasların keyfi $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ve (U_β, φ_β) haritaları C^k uzlaşmış ise yani, $\{(\mathrm{U}_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ ve $\{(\mathrm{U}_\beta, \varphi_\beta)\}$ atlaslarının birleşimi C^k sınıfından atlas ise verilen atlaslara denk atlaslar denir.

Tanım 2.2.5: X Hausdorff uzay üzerinde C^k atlaslarının denklik sınıfına C^k-yapı denir.

C^k-yapısının tüm C^k atlaslarının birleşimi yine C^k atlas oluşturur. Bu atlasa maksimal C^k atlas adı verilir. X üzerindeki C^k atlaslarının her bir denklik sınıfı, kendisinin bir elemanı ile ifade edilir. Yani, C^k-yapısı,onun keyfi C^k atlası yardımıyla oluşturulabilir. Buradan da, X üzerindeki her bir C^k-yapısının bu yapıdan olan bir C^k atlas ile verilebileceği sonucu çıkar.

C^0-yapıya topolojik yapı, C^k, $(1 \leq k \leq \infty)$ yapıya ise düzgün (smooth) yapı denir. Bundan sonra yalnız C^∞ sınıfından olan yapılara bakılacaktır.

Tanım 2.2.6: M, Hausdorff ve sayılabilir baza sahip topolojik uzay olsun. Eğer, M üzerinde n- boyutlu C^∞ atlaslarının C^∞ yapısı verilmişse M uzayına n-boyutlu C^∞ sınıfından diferensiyellenebilir veya düzgün manifold denir ve M_n ile gösterilir (Salimov ve Mağden 2008) .

2.3.Tensör Alanları

Tanım 2.3.1: M_n, C^∞ sınıfından bir manifold ve $T_p, \forall p \in M_n$ noktasındaki tanjant uzayı olsun. M_n manifoldunun $\forall p \in M_n$ noktasına T_p uzayından bir X_p vektörü karşılık getiren X vektör değerli fonksiyonuna vektör alanı denir (Salimov ve Mağden 2008) .

f, M_n manifoldunda bir fonksiyon ise Xf de M_n manifoldunda bir fonksiyon tanımlar. Bu ise

$$(Xf)(p) = X_p f$$

ile tanımlanır. $U \subset M_n$ koordinat komşuluğunu alalım. Bu komşuluktaki bir vektör alanı

$$X = \xi^i \partial_i$$

olarak yazılır. ξ^i ler U daki lokal koordinatlara bağlıdır. Yani,

$$\xi^i = \xi^i\left(x^i,..., x^n\right),\ \ i = 1,..., n$$

olur.

Tanım 2.3.2: $\vec{x}_j \in B_n,\ j = 1,..., q$ ve $\overset{i}{\xi} \in B_n^*, i = 1,..., p$ kovektör değişkenlerinin

$$\omega = t\ (\vec{x}_1, \vec{x}_2,..., \vec{x}_q, \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi},..., \overset{p}{\xi})$$

reel değerli fonksiyonunu gözönüne alalım. Eğer bu fonksiyon her bir değişkene göre lineerlik şartını sağlarsa, multilineer fonksiyon denir. Mesela birinci vektör değişkenine göre lineerlik şartı $\lambda, \mu \in \Re$ olmak üzere,

$$\omega = t\ (\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}, \vec{x}_2,..., \vec{x}_q, \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi},..., \overset{p}{\xi}) = \lambda t\ (\vec{x}, \vec{x}_2,..., \vec{x}_q, \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi},..., \overset{p}{\xi}) + \mu t(\vec{y}, \vec{x}_2,..., \vec{x}_q, \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi},..., \overset{p}{\xi})$$

biçiminde gösterilebilir. Bu multilineer fonksiyona karşılık gelen

$$t: \underbrace{B_n \times B_n \times ... \times B_n}_{q} \times \overbrace{B_n^* \times ... \times B_n^*}^{p} \rightarrow \mathbb{R}$$

operatörüne B_n uzayında p dereceden kontravaryant, q dereceden kovaryant tensör adı verilir ve $T_q^p\left(B_n\right)$ ile gösterilir. $p \geq 0, q \geq 0$ olmak üzere $s = p+q$ sayısına ise tensörün valentliği, (p,q) sembolüne ise tensörün tipi denir. ($p,0$) tipli tensöre kontravaryant tensörler, ($0,q$) tipli tensörlere ise kovaryant tensörler denir.

$S_2\left(B_n\right)$, $T_2^0\left(B_n\right)$ uzayının bütün simetrik tensörlerinin alt uzayı olmak üzere herhangi bir $g \in S_2\left(B_n\right)$ tensörünü alalım;

$$g\left(\vec{x}, \vec{y}\right) = 0, \forall \vec{y} \in B_n \tag{2.1}$$

şartından $\vec{x}=0$ alınırsa, bu taktirde g tensörüne regüler tensör denir. Koordinatlarla (2.1) eşitliği

$$g_{ij}x^i y^j = 0$$

biçiminde yazılır. Bu eşitlik $\forall y^j$ için sağlandığından

$$g_{ij}x^i = 0,\ j = 1,\dots,n$$

bulunur.Bu denklem sisteminin $x^i = 0$ çözümüne sahip olması için

$$Det(g_{ij}) \neq 0$$

olması gerekir. Burada (g_{ij}), g_{ij} tensörüne karşılık gelen matristir.

$g \in S_2(B_n)$ tensörü regüler tensör ise g tensörüne B_n de esas tensör adı verilir. Esas tensöre karşılık gelen (g_{ij}) matrisinin tersini $(\tilde{g}^{ij})$ ile gösterelim. Bu taktirde

$$\tilde{g}^{kj} g_{ji} = \delta_i^k \tag{2.2}$$

yazılır. B_n ve B_n^* uzayları arasında

$$\xi_i = g_{ik}x^k, \left(\eta_i = g_{ik}y^k\right) \tag{2.3}$$

dönüşümüne bakalım. Buradan (2.2) eşitliğine göre

$$x^k = \tilde{g}^{ki}\xi_i, \left(y^k = \tilde{g}^{ki}\eta_i\right) \tag{2.4}$$

olur. $g \in S_2(B_n)$ tensörüne karşılık gelen invariant bilineer formu

$$\omega = g(\vec{x},\vec{y}) = g_{ij}x^i y^j$$

yazalım. Burada (2.3) ve (2.4) eşitliklerini dikkate alırsak

$$\omega = g(\vec{x},\vec{y}) = g_{ij}x^i y^j = x^i\eta_i = \tilde{g}^{ij}\eta_i\xi_j$$

olur. Yani, g_{ij} esas tensörü verildiğinde biz kovektör değişkenerinin $\omega = \tilde{g}^{ij}\eta_i\xi_j$ invaryant bilineer formunu alırız. Buna göre de $\tilde{g}^{ij}$, (2,0) tipli tensörün koordinatlarıdır. Bu tensöre g_{ij} tensörünün ters tensörü denir. Ayrıca,

$$\tilde{g}(\eta,\xi) = \tilde{g}^{ij}\eta_i\xi_j = \eta_i x^i = g_{ik}y^k x^i,$$
$$\tilde{g}(\xi,\eta) = \tilde{g}^{ji}\xi_j\eta_i = \xi_j y^j = g_{jk}x^k y^j$$
$$= g_{ki}x^i y^k = g_{ki}y^k x^i = \tilde{g}(\eta,\xi)$$

olduğundan $\tilde{g}^{ij}$ tensörü simetriktir.

Böylece B_n de g_{ij} tensörü verildiğinde $B_n \to B_n^*$ izomorfizmi bulunur. Buna göre vektör ve kovektörler aynılaştırılır ve aynı $\vec{x}$ sembolü ile gösterilir. Yani,

$$x_k = g_{ki}x^i, x^i = \tilde{g}^{ik}x_k$$

yazılır. Bu işlemlere indisin indirilmesi $(x^i \to x_k)$ ve yükseltilmesi $(x_k \to x^i)$ işlemleri denir. Buna göre $S(\vec{x},\vec{y})$ tensörünü göz önüne alalım:

$$S_{.j}^{p} = \tilde{g}^{pi}S_{ij}, S_{i.}^{p} = \tilde{g}^{pj}S_{ij}, S_{..}^{pq} = \tilde{g}^{pi}\tilde{g}^{pj}S_{ij}$$

verilmiş S_{ij} tensöründen indislerin yükseltilmesi işlemleridir.

$$S_{p}^{.j} = g_{pi}S^{ij}, S_{p}^{i.} = g_{pj}S^{ij}, S_{pq}^{..} = g_{pi}g_{qj}S^{ij}$$

ise verilmiş S^{ij} tensöründen indislerin indirilmesi işlemidir.

Eğer $g(\vec{x},\vec{y})$, B_n uzayında (0,2) tipli tensör ise, $\forall\vec{x},\vec{y} \in B_n$ vektörlerinin skaler çarpımı denildiğinde g tensörünün $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörleri üzerindeki izi anlaşılır ve $\vec{x}\vec{y}$ veya $(\vec{x},\vec{y})$ biçiminde gösterilir. Yani,

$$\vec{x}\vec{y} = g(\vec{x},\vec{y}) = g_{ij}x^i y^j \tag{2.5}$$

biçiminde tanımlanır.

Eğer $Det(g_{ij}) \neq 0$ olursa bu taktirde (2.5) skaler çarpımına regüler çarpım denir.

M_n, C^∞ sınıfından bir manifold olmak üzere $\forall m \in M_n$ noktasındaki her bir (p,q) tipli tensör için uygun bir $T_q^p(m)$ tensör uzayı vardır.

Tanım 2.3.3: M_n, C^∞ sınıfından bir manifold ve $T_q^p(m), \forall m \in M_n$ noktasındaki (p,q) tipli tensör tensör uzayı olsun. M_n manifoldunun $\forall m \in M_n$ noktasına $T_q^p(m)$ tensör uzayından bir $t_q^p(m)$ tensörü karşılık getiren T fonksiyonuna (p,q) tipli tensör alanı denir (Bishop and Goldberg 1968).

Eğer $p=1, q=0$ ise vektör alanı elde edilir. Yani, (1,0) tipli tensör alanı bir vektör alanıdır.

Eğer $p=q=0$ ise her $m \in M_n$ noktasına bir skaler değer karşılık gelır. Bu yüzden (0,0) tipli tensör alanı reel değerli bir fonksiyondur.

Eğer $U \subset M_n$ bölgesinde f fonksiyonu C^∞ sınıfından ise $\forall x \in U$ için $df|_x \in T_1^0(x)$ olur. Böylece f fonksiyonunun diferensiyeli olan df operatörü ifadesi (0,1) tipli bir tensör alanıdır.

Herhangi bir *m* noktasındaki T_m tensörü simetrik tensör ise *T* tensör alanına simetrik tensör alanı denir. Eğer herhangi bir bir *m* noktasındaki T_m tensörü antisimetrik tensör ise *T* tensör alanına antisimetrik tensör alanı denir.

T, (*p*,*q*) tipli tensör alanı olsun. $\theta_1,...,\theta_p$ (0,1) tipli tensör alanları ve $X_1,...,X_q$ vektör alanları olmak üzere

$$T(\theta_1,...,\theta_p,X_1,...,X_q)(m)=T_m(\theta_1(m),...,\theta_p(m),X_1(m),...,X_q(m))$$

ifadesi reel değerli fonksiyon tanımlar. Özelikle x^i koordinatlarına göre *T* tensör alanının bileşenleri

$$T_{j_1 \cdots j_q}^{i_1 \cdots i_{p_1}} = T\left(dx^{i_1},...,dx^{i_q},\partial_{j_1},...,\partial_{j_p}\right)$$

biçiminde reel değerli fonksiyonlardır (Bishop and Goldberg 1968).

T tensör alanının bileşenleri C^{∞} sınıfından fonksiyonlar ise T tensör alanına C^{∞} sınıfındandır denir. C^{∞} sınıfından olan (0,1) tipli tensör alanına 1-form (pfaffian form) denir.

(p,q) tipli T tensör alanının C^{∞} sınıfından olması için gerek ve yeter şart her bir $\theta_1,...,\theta_p$ 1-formları ve herbir C^{∞} sınıfından $X_1,...,X_q$ vektör alanları için $T(\theta_1,...,\theta_p,X_1,...,X_q)$ fonksiyonunun C^{∞} sınıfından olmasıdır.

2.4. Diferensiyellenebilir Manifold Üzereinde Afin Konneksiyon

M_n diferensiyellenebilir manifoldunun $\gamma : u^i = u^i(t)$ eğrisi boyunca konneksiyon dahil edilmesi eğrinin noktalarına tatbik edilmiş vektörler arasında uygunluk oluşturma kuralıdır. Eğer γ eğrisinin herhangi bir noktasındaki v^i vektörü t parametresine bağlı olarak değiştikçe verilen konneksiyona göre başlangıçtaki ile uygun kalırsa,bu durumda bu vektör verilmiş konneksiyona göre γ eğrisi boyunca parelel kaydırılmış olur. Eğer konneksiyon diferensiyellenebilirse, o zaman paralel kaydırmayı ifade eden $v^i = v^i(t)$ fonksiyonları da diferensiyellenebilir fonksiyonlar olur. Eğer vektörlerin paralel kaydırılması halinde lineer bağımlılık korunursa verilen konneksiyona afin veya lineer konneksiyon adı verilir.

Tanım 2.4.1: M_n manifoldu üzerinde $\mathcal{T}^1_0(M_n)$ vektör alanlarının modülü olmak üzere

$$\nabla_X Y = \nabla(X,Y) : \mathcal{T}^1_0(M_n) \times \mathcal{T}^1_0(M_n) \to \mathcal{T}^1_0(M_n)$$

dönüşümü

i. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,

ii. $\nabla_Z(fX+gY) = (Zf)X + f\nabla_Z X + (Zg)Y + g\nabla_Z Y$

şartlarını sağlıyorsa ∇ 'ya afin konneksiyon denir. Burada

$$\nabla_X : \mathcal{T}^1_0(M_n) \to \mathcal{T}^1_0(M_n)$$

dönüşümüne kovariant diferensiyellenme denir (Bishop ve Goldberg 1968).

Afin konneksiyonun γ eğrisinin çeşitli noktalarına tatbik edilmiş vektörler arasında uygunluğu ifade eden şartı, yani vektörün eğri boyunca verilmiş afin konneksiyona göre paralel kaydırılması şartını bulalım. γ eğrisinin başlangıç noktasında $\underset{k}{a}^i, k=1,...n$ lokal bazını alalım ve farzedelim ki $\underset{k}{a}^i(t)$ nin bağımlılığı baz vektörlerin verilmiş eğri boyunca paralel kaydırılması kuralını ifade etsin. Keyfi $v^i=\lambda^k \underset{k}{a}^i$ vektörünün verilen afin konneksiyona göre γ eğrisi boyunca paralel kaydırılması için gerek ve yeter şart λ^k katsayılarının sabit olmasıdır. Bu nedenden istifade edilerek

$$dv^i=\lambda^k d\underset{k}{a}^i \tag{2.6}$$

ifadesi yazılabilir. $v^i=\lambda^k \underset{k}{a}^i$ eşitliğinden

$$\lambda^k=\overset{k}{a}_i v^i \tag{2.7}$$

yazılır. Burada $\underset{k}{a}^i$ baz vektörü olduğundan buna karşılık gelen kobaz vektörü $\overset{k}{a}_i$ ile gösterilir.

Dolayısıyla $\underset{k}{a}^i \overset{s}{a}_i=\delta_k^s$ olur. (2.7) ifadesi (2.6) de kullanılırsa,

$$dv^i+\omega_k^i v^k=0 \tag{2.8}$$

yazılır. (2.8) denkleminde

$$\omega_i^k=-\overset{s}{a}_i\, d\underset{s}{a}^k \tag{2.9}$$

biçimindedir. (2.8) şartı v^i vektörünün verilen afin konneksiyona göre paralel kaydırılması şartıdır. (2.9) biçiminde dahil edilen ω_i^k objelerine konneksiyon (bağlantı) formları denir.

Teorem 2.4.1: 1. Konneksiyon formları $\underset{k}{a}^{i}, k=1,...,n$ bazının seçilişinden bağımsızdır.

2. Konneksiyon formları, eğrisel koordinatların dönüştürülmesi durumunda tensör dönüşüm kuralına göre dönüşmez.

İspat: 1. ω_i^k ve $\overline{\omega}_i^k$ iki baza karşılık gelen konneksiyon formları olsun. Paralel kaydırılan v^i vektörü için aşağıdaki şartları yazabiliriz:

$$dv^i + \omega_k^i v^k = 0 \tag{2.10}$$

$$dv^i + \overline{\omega}_k^i v^k = 0 \tag{2.11}$$

(2.10) ve (2.11) şartlarından, v^i vektörünün başlangıç değerinin keyfiliği şartından $\omega_k^i = \overline{\omega}_k^i$ bulunur.

2. M_n manifoldunda u^i eğrisel koordinatların değişmesi halinde baz vektörlerinin ve kovektörlerinin dönüşüm kuralını yazalım.

$$\overset{k}{a}_i = A_i^{i'} \overset{k}{a}_{i'}, \quad \underset{k}{a}^{i} = A_{i'}^{i} \underset{k}{a}^{i'} \tag{2.12}$$

Burada $A_{i'}^{i} = \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}, \quad A_i^{i'} = \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^i}$ biçimindedir. (2.12) in ikinci şartından

$$d\underset{k}{a}^{i} = dA_{i'}^{i} \underset{k}{a}^{i'} + A_{i'}^{i} d\underset{k}{a}^{i'} \tag{2.13}$$

yazarız. (2.9) denkleminde (2.12) in birinci şartını ve (2.13) eşitliği göz önüne alınırsa,

$$\omega_j^i = -\overset{k}{a}_j \, d\underset{k}{a}^{i} = -A_j^{j'} \overset{k}{a}_{j'} \left(dA_{i'}^{i} \underset{k}{a}^{i'} + A_{i'}^{i} d\underset{k}{a}^{i'} \right)$$

veya

$$\omega_j^i = A_j^{j'} A_{i'}^{i} \omega_{j'}^{i'} - A_j^{j'} dA_{j'}^{i} \tag{2.14}$$

olur. (2.14) eşitliği gösterir ki ω_j^i konneksiyon formları tensörün koordinatları olamaz.

Şimdi ise kovektörün γ eğrisi boyunca verilen afin konneksiyona göre paralel kaydırılması şartını inceleyelim;

Tanım 2.4.2: ω_i kovektörünün γ eğrisi boyunca paralel kaydırılan keyfi v^i vektörü üzerindeki izi bu eğri boyunca sabit kalırsa ω_i kovektörüne γ eğrisi boyunca verilen afin konneksiyona göre paralel kaydırılmıştır denir.

Bu tanıma göre

$$d\left(v^i \omega_i\right) = dv^i \omega_i + v^i d\omega_i = 0 \tag{2.15}$$

olur. v^i vektörünün paralel kaydırılması şartından

$$dv^i = -\omega_k^i v^k \tag{2.16}$$

yazılır. (2.16) eşitliğini (2.15) ifadesinde kullanırsak,

$$\left(d\omega_i - \omega_i^k \omega_k\right) v^i = 0$$

bulunur. v^i vektörünün keyfiliğinden dolayı ω_i kovektörün γ eğrisi boyunca verilen afin konneksiyona göre paralel kaydırılma şartı

$$d\omega_i - \omega_i^k \omega_k = 0 \tag{2.17}$$

biçimindedir. Vektörün ve kovektörün γ eğrisi boyunca paralel kaydırılması şartını kullanarak, eğrinin çeşitli noktalarına uygulanmış keyfi tipli tensörün paralel kaydırılmasını verebiliriz. γ eğrisi boyunca (p,q) tipli keyfi tensörün izi

$$Z = t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \underset{1}{v}^{j_1} \dots \underset{q}{v}^{j_q} \overset{1}{\omega}_{i_1} \dots \overset{p}{\omega}_{i_p}$$

verilmiş olsun. Z fonksiyonunun vektör ve kovektör değişkenlerinin γ eğrisi boyunca paralel kaydırılması şartları dahilinde diferensiyeli

$$\begin{aligned} dZ = {} & dt_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \underset{1}{v}^{j_1} \dots \underset{q}{v}^{j_q} \overset{1}{\omega}_{i_1} \dots \overset{p}{\omega}_{i_p} + t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} d\underset{1}{v}^{j_1} \dots \underset{q}{v}^{j_q} \overset{1}{\omega}_{i_1} \dots \overset{p}{\omega}_{i_p} \\ & + \dots + t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \underset{1}{v}^{j_1} \dots \underset{q}{v}^{j_q} \overset{1}{\omega}_{i_1} \dots d\overset{p}{\omega}_{i_p} \\ = {} & \left(dt_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} - \omega_{j_1}^s t_{s j_2 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} - \dots - \omega_{j_q}^s t_{s j_2 \dots s}^{i_1 \dots i_p} + \omega_s^{i_1} t_{s j_2 \dots j_q}^{s i_2 \dots i_p} + \omega_s^{i_p} t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots s}\right) \underset{1}{v}^{j_1} \dots \underset{q}{v}^{j_q} \overset{1}{\omega}_{i_1} \dots \overset{p}{\omega}_{i_p} \end{aligned} \tag{2.18}$$

olarak yazılır. Bu eşitlikte

$$\delta t^{i_1..i_p}_{j_1...j_q} = dt^{i_1..i_p}_{j_1...j_q} - \omega^s_{j_1} t^{i_1..i_p}_{sj_2...j_q} - ... - \omega^s_{j_q} t^{i_1..i_p}_{sj_2..s} + \omega^{i_1}_s t^{si_2..i_p}_{j_1...j_q} + \omega^{i_p}_s t^{i_1..s}_{j_1...j_q} \qquad (2.19)$$

olarak alınırsa

$$dZ = \delta t^{i_1..i_p}_{j_1...j_q} \underset{1}{v}^{j_1} ... \underset{q}{v}^{j_q} \overset{1}{\omega}_{i_1} ... \overset{p}{\omega}_{i_p} \qquad (2.20)$$

yazılır. γ eğrisi boyunca verilen afin konneksiyona göre paralel kaydırılan vektör ve kovektör değişkenlerinin multilineer fonksiyonunun diferensiyeli de değişkenlerin multilineer fonksiyonu olur. O halde dZ multilineer fonksiyonuna belirli tensör karşılık gelecektir. Bu tensörün tipi $t^{i_1..i_p}_{j_1...j_q}$ tensörünün tipi ile aynı olur. Koordinatları ise (2.19) eşitliği ile verilmiştir. $\delta t^{i_1..i_p}_{j_1...j_q}$ tensörüne $t^{i_1..i_p}_{j_1...j_q}$ tensörünün mutlak diferensiyeli denir. Tensörün mutlak diferensiyeli ile tüm eğri boyunca keyfi noktalarda uygulanmış tensörler arasındaki eşleme (2.20) eşitliği ile verilir.

Tensörün mutlak diferensiyelinin tanımından çıkartılan sonuçlar şöyle ifade edilebilir:

a. Vektörün ve kovektörün parelel kaydırılması şartları

$$\delta v^i = 0, \qquad \delta\omega_i = 0$$

şeklinde olur. Dolayısıyla keyfi tipli tensörün paralel kaydırılması şartı

$$\delta t^{i_1..i_p}_{j_1...j_q} = 0$$

olarak verilir.

b. Birim tensörün mutlak diferensiyeli sıfıra eşittir, yani

$$\delta\left(\delta_i^j\right) = 0$$

olur.

(2.19) eşitliğinden dolayı tensörlerin mutlak diferensiyelleri için aşağıdaki özellikleri yazabiliriz:

1. $\delta(t_1 \mp t_2) = \delta t_1 \mp \delta t_2$, t_1 ve t_2 aynı tipli tensörlerdir,

2. $\delta(\lambda t) = (d\lambda)t + \lambda(\delta t)$, λ -skalerdir,

3. $\delta(A \otimes B) = (\delta A) \otimes B + A \otimes (\delta B)$, A ve B keyfi tipli tensörlerdir, $\otimes$- tensör çarpımıdır.

4. Tensörlerin simetrikleştirme, alterleneştirme ve kontraksiyon işlemleri mutlak diferensiyelleme işlemi ile sıraları değişebilir

2.4.1. Afin konneksiyonlu uzaylar

Tanım 2.4.3.: X_n diferensiyellenebilir manifoldunun herbir eğrisi boyunca afin konneksiyon verilmiş olsun. Lineerlik şartını sağlayan X_n diferensiyellenebilir manifolduna *n*- boyutlu afin konneksiyonlu uzay denir.

X_n manifoldunun keyfi M noktası ve bu noktanın civarında keyfi vektör alanları verilmiş olsun. Keyfi v^i vektör alanının M noktasından geçen keyfi bir eğri için hesaplanmış mutlak diferensiyeli, bu eğri boyunca elementer yer değişme du^i vektörünün lineer fonksiyonudur, yani

$$\delta v^i = v^i_k du^k \tag{2.21}$$

olarak yazılır. Burada v^i_k, v^i ye ve noktaya bağlı fonksiyondur. Diğer taraftan $dv^i = \partial_k v^i du^k$ olduğundan

$$\delta v^i = dv^i + \omega^i_k v^k = \partial_k v^i du^k + \omega^i_k v^k \tag{2.22}$$

olur. (2.21) ve (2.22) eşitliklerinden

$$\omega^i_k v^k = (v^i_s - \partial_s v^i) du^s \tag{2.23}$$

ifadesi bulunur. $v^k, \partial_s v^i$ ve v_s^i u^i lerin fonksiyonarıdır. ω_k^i formları v^i vektör alanlarının seçilişine bağlı olmadığından ω_k^i formları du^k nın lineer fonksiyonu olur, yani

$$\omega_k^i = \Gamma_{sk}^i du^s \tag{2.24}$$

olarak yazılır. Burada Γ_{sk}^i katsayıları afin uzayın noktasının fonksiyonlarıdır. Bunlara afin konneksiyonun katsayıları denir. Katsayıların verilmesi X_n de afin konneksiyonunu tayin eder.

Şimdi Γ_{sk}^i afin konneksiyon katsayılarının dönüşüm kuralını verelim. (2.24) eşitliği kullanılarak

$$\omega_{j'}^{i'} = \Gamma_{k'j'}^{i'} du^{k'} = \Gamma_{k'j'}^{i'} A_k^{k'} du^k$$

yazılır. Ayrıca

$$A_j^{j'} dA_{j'}^i = A_j^{j'} \left(\partial_k A_{j'}^i \right) du^k \tag{2.25}$$

olduğundan ve diğer taraftan $A_j^{j'} A_{j'}^i = \delta_j^i$ eşitliğinin ∂_k kısmi diferensiyeli alındığında

$$\left(\partial_k A_j^{j'} \right) A_{j'}^i + A_j^{j'} \left(\partial_k A_{j'}^i \right) = 0$$
$$\Rightarrow A_j^{j'} \left(\partial_k A_{j'}^i \right) = -\left(\partial_k A_j^{j'} \right) A_{j'}^i$$

olur. Bu son eşitlik (2.25) denkleminde kullanılırsa

$$A_j^{j'} dA_{j'}^i = -A_{j'}^i \left(\partial_k A_j^{j'} \right) du^k \tag{2.26}$$

elde edilir. (2.26) , (2.24) ve (2.14) eşitlikleri kullanılarak konneksiyon katsayılarının dönüşüm kuralı

$$\Gamma_{kj}^i = A_{i'}^i A_j^{j'} A_k^{k'} \Gamma_{k'j'}^{i'} + A_{i'}^i A_{kj}^{i'} \tag{2.27}$$

olarak verilir. Burada $A_{kj}^{i'} = \partial_k A_j^{i'}$ biçimindedir.

(2.24) denklemini kullanarak afin konneksiyonlu uzayda verilen keyfi vektör alanı için mutlak diferensiyeli

$$\delta v^i = (\partial_k v^i + \Gamma_{ks}^i v^s) du^k \tag{2.28}$$

biçiminde olur. (2.28) denkleminin sol tarafı bir tensör ve du^k vektör olduğundan parantezin içindeki ifade bir tensörün koordinatlarıdır. Bu tensöre verilen v^i tensörünün kovaryant türevi denir ve

$$\nabla_k v^i = \partial_k v^i + \Gamma^i_{ks} v^s \tag{2.29}$$

olarak gösterilir. Bu türevin sonucu (1,1) tipinde bir tensördür. Benzer şekilde ω_j kovektör alanının kovaryant türevi

$$\nabla_k \omega_j = \partial_k \omega_j - \Gamma^s_{kj} \omega_s \tag{2.30}$$

olur ve sonuç (0,2) tipli bir tensördür. (2,24) eşitliğinden, (p,q) tipli $t^{i_1..i_p}_{j_1...j_q}$ tensörünün mutlak diferensiyeli

$$\delta t^{i_1..i_p}_{j_1...j_q} = (\partial_k t^{i_1..i_p}_{j_1...j_q} + \sum_{\lambda=1}^{p} \Gamma^{i_\lambda}_{ks} t^{i_1..s..i_p}_{j_1...j_q} - \sum_{\mu=1}^{q} \Gamma^s_{kj_\mu} t^{i_1..i_p}_{j_1..s...j_q}) du^k \tag{2.31}$$

biçiminde olur. (2.31) denkleminin sol tarafı bir tensör ve du^k vektör olduğundan parantezin içindeki ifade bir tensörün koordinatlarıdır. Bu tensöre verilen $t^{i_1..i_p}_{j_1...j_q}$ tensörünün kovaryant türevi denir ve

$$\nabla_k t^{i_1..i_p}_{j_1...j_q} = \partial_k t^{i_1..i_p}_{j_1...j_q} + \sum_{\lambda=1}^{p} \Gamma^{i_\lambda}_{ks} t^{i_1..s..i_p}_{j_1...j_q} - \sum_{\mu=1}^{q} \Gamma^s_{kj_\mu} t^{i_1..i_p}_{j_1..s...j_q} \tag{2.32}$$

biçiminde gösterilir. Tensörün kovaryant türev tanımından görülür ki (p,q) tipli tensörünün kovaryant türevi (p,q+1) tipli bir tensördür.

Kovaryant türevin tanımından yararlanılarak aşağıdaki özelikler yazılır:

1. $\nabla_k (\underset{1}{t}{}^{i_1..i_p}_{j_1...j_q} \overline{+} \underset{2}{t}{}^{i_1..i_p}_{j_1...j_q}) = \nabla_k \underset{1}{t}{}^{i_1..i_p}_{j_1...j_q} \overline{+} \nabla_k \underset{2}{t}{}^{i_1..i_p}_{j_1...j_q}$

2. $\nabla_k (\lambda t^{i_1..i_p}_{j_1...j_q}) = (\partial_k \lambda) t^{i_1..i_p}_{j_1...j_q} \overline{+} \lambda \nabla_k t^{i_1..i_p}_{j_1...j_q}$, $\lambda \in F$ (F fonksiyonlar kümesi)

3. $\nabla_k (t^{i_1..i_p}_{j_1...j_q} \otimes g^{l_1..l_p}_{s_1..s_q}) = \nabla_k t^{i_1..i_p}_{j_1...j_q} \otimes g^{l_1..l_p}_{s_1..s_q} + t^{i_1..i_p}_{j_1...j_q} \otimes \nabla_k g^{l_1..l_p}_{s_1..s_q}$

4. Tensörlerin simetrikleştirme, alterleneştirme ve kontraksiyon işlemleri mutlak diferensiyelleme işlemi ile sıraları değişebilir.

2.4.2. Eğrilik ve burulma tensörleri

A_n afin konneksiyonlu uzayında $f = f\left(u^1,...,u^n\right)$ diferensiyellenebilir fonksiyonu verilmiş olsun. Bu fonksiyonun tam diferensiyeli, yani $df = \partial_k f du^i$ ifadesi, koordinatların dönüşümü halinde invaryant kalır ve *df* fonksiyonunun du^i vektörünün lineer fonksiyonu olur. Bu lineer fonksiyona karşılık gelen kovektörün koordinatları

$$V_i = \partial_i f \tag{2.33}$$

ile gösterilir. Bu kovektöre f fonksiyonunun gradienti, f fonksiyonuna ise bu kovektör alanın potansiyel fonksiyonu denir. Keyfi V_i kovektörünün herhangi bir skaler alanın gradienti olması için gerek ve yeter şart

$$\partial_{[j} V_{i]} = 0 \tag{2.34}$$

olmasıdır (Yano 1965).

V_i gradient kovektörünün kovaryant türevi

$$\nabla_j V_i = \partial_j V_i - \Gamma^k_{ji} V_k \tag{2.35}$$

biçimindedir. (2.35) denkleminde j ve i indislerine göre alterneleştirme işlemi yapılır ve (2.34) eşitliği kullanılırsa

$$\nabla_{[j} V_{i]} = S^k_{ij} V_k \tag{2.36}$$

bulunur. Burada

$$S^k_{ij} = \Gamma^k_{[ij]} \tag{2.37}$$

olarak verilmiştir. (2.36) denkleminin sol tarafındaki kovaryant türev ise (0,2) tipli tensör olduğuna göre S^k_{ij} kemiyetleri aşağı indislerine göre antisimetrik olan (1,2) tipli tensör ifade eder. (2.37) tensörüne A_n uzayının burulma tensörü denir. A_n manifolundan alınmış keyfi *X, Y* vektör alanları için burulma tensörünün invariyant formda yazılışı ise

$$S(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \tag{2.38}$$

biçimindedir (Kobayashi and Nomizu 1963). Burada $[X,Y]$, *X* ve *Y* vektör alanlarının Lie parentezi olup

$$[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$$

şeklindedir.

Keyfi v^k vektörünün $\nabla_s v^i = \partial_s v^i + \Gamma^i_{sm} v^m$ kovaryant türevi $(1,1)$ tensör belirtir. Bu tensörün kovaryant türevi ise,

$$\begin{aligned}\nabla_r \nabla_s v^i &= \partial_r \nabla_s v^i + \Gamma^i_{rm} \nabla_s v^m - \Gamma^m_{rs} \nabla_m v^i \\ &= \partial_r (\partial_s v^i + \Gamma^i_{sk} v^k) + \Gamma^i_{rm} (\partial_s v^m + \Gamma^m_{sk} v^k) - \Gamma^m_{rs} \nabla_m v^i \\ &\partial^2_{rs} v^i + \partial_r \Gamma^i_{sk} v^k + \Gamma^i_{sk} \partial_r v^k + \Gamma^i_{rm} \partial_s v^m + \Gamma^i_{rm} \Gamma^m_{sk} v^k - \Gamma^m_{rs} \nabla_m v^i\end{aligned}$$

biçiminde bulunur. Bu eşitlikte r, s indislerine göre alterneleştirme işlemi uygulanırsa,

$$2\nabla_{[r} \nabla_{s]} v^i = R^i_{rsk} v^k - 2S^k_{rs} \nabla_k v^i \qquad (2.39)$$

denklemi elde edilir. (2.39) denkleminde

$$\begin{aligned}R^i_{rsk} &= \partial_r \Gamma^i_{sk} - \partial_s \Gamma^i_{rk} + \Gamma^i_{rm} \Gamma^m_{sk} - \Gamma^i_{sm} \Gamma^m_{rk} \qquad (2.40) \\ &= 2(\partial_{[r} \Gamma^i_{s]k} + \Gamma^i_{[r|m|} \Gamma^m_{s]k})\end{aligned}$$

olarak alınmıştır. (2.39) denkleminin sol tarafındaki terim ve sağ tarafındaki ikinci terim tensör ve v^i keyfi vektör olduğundan R^i_{rsk} ifadesi $(1,3)$ tipli tensördür. Bu tensöre A_n uzayının eğrilik tensörü veya Riemannian- Christoffel tensörü denir.

(2.39) formülüne benzer olarak aşağıdaki formüller yazılır:

$$2\nabla_{[r} \nabla_{s]} \omega_k = -R^m_{rsk} \omega_m - 2S^m_{rs} \nabla_m \omega_k \ , \qquad (2.41)$$

$$2\nabla_{[r} \nabla_{s]} \varphi^j_i = R^j_{rsm} \varphi^m_i - R^m_{rsi} \varphi^j_m - 2S^k_{rs} \nabla_k \varphi^j_i \ , \qquad (2.42)$$

$$2\nabla_{[r}\nabla_{s]}t^{i_1..i_p}_{j_1...j_q} = R^{i_1}_{rsm}t^{mi_2..i_p}_{j_1...j_q} + ... + R^{i_p}_{rsm}t^{i_1..m}_{j_1...j_q}$$

$$- R^{m}_{rsj_1}t^{i_1..i_p}_{mj_2...j_q} - ... - R^{m}_{rsj_q}t^{i_1..i_p}_{j_1..m} - 2S^{k}_{rs}\nabla_k t^{i_1..i_p}_{j_1...j_q}.$$

(2.42) formülüne φ_i^j afinorunun Ricci özdeşliği denir.

Keyfi $X, Y, Z \in A_n$ vektör alanları için eğrilik tensörünün invaryant formda yazılışı ise

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \qquad (2.44)$$

biçimindedir (Kobayashi and Nomizu 1963).

2.4.3. Konneksiyonların dönüşümü

Keyfi iki afin konneksiyonlu uzayların diffeomorfizmine bakalım. Bu durımda, bu uzayların karşılıklı noktalarının koordinatları aynı olacak şekilde uygun eğrisel koordinat sistemi verilebilir. Bu tür karşılık getirme aynı bir X_n differensiyellenebilir manifoldunda iki keyfi afin konneksiyonun verilmesiyle de oluşturulabilir. Bu duruma konneksiyonların birinden diğerine geçmeye konneksiyonların dönüştürülmesi veya parelel kaydırma kuralının dönüştürülmesi olarak bakılabilir. Bu konneksiyonların katsayılarını Γ^k_{ij} ve $\overline{\Gamma}^k_{ij}$ ile gösterelim. Keyfi v^i vektör alanının bu konneksiyonlara göre kovaryant türevleri

$$\nabla_k v^i = \partial_k v^i + \Gamma^i_{km}v^m, \quad \overline{\nabla}_k v^i = \partial_k v^i + \overline{\Gamma}^i_{km}v^m$$

biçiminde olur. Sonuncu eşitlikten

$$\overline{\nabla}_k v^i - \nabla_k v^i = T^i_{km}v^m \qquad (2.45)$$

yazılır. Burada

$$T^i_{km} = \overline{\Gamma}^i_{km} - \Gamma^i_{km} \qquad (2.46)$$

biçimindedir. (2.45) eşitliği ile verilen T^i_{km}, $(1,2)$ tipli tensör meydana getirir. Bu tensöre afin deformasyon tensörü denir.

Teorem 2.4.2: (1,2) tipli T^i_{km} tensörü ve Γ^i_{km} ise ∇ afin konneksiyonunun katsayıları olmak üzere (2.46) eşitliği ile verilen $\overline{\Gamma}^i_{km}$ katsayıları da diğer bir afin konneksiyonun katsayıları olur.

İspat: (2.46) eşitliğinden

$$\Gamma^k_{ij} = \overline{\Gamma}^k_{ij} - T^k_{ij}$$

yazılır. Γ^k_{ij} için konneksiyon katsayılarının dönüştürülmesi halinde

$$\overline{\Gamma}^k_{ij} - T^k_{ij} = A^k_{k'} A^{i'}_i A^{j'}_j \left(\overline{\Gamma}^{k'}_{i'j'} - T^{k'}_{i'j'}\right) + A^k_{k'} A^{k'}_{ij} \tag{2.47}$$

olur. Burada T^k_{ij} tensör olduğundan,

$$T^k_{ij} = A^k_{k'} A^{i'}_i A^{j'}_j T^{k'}_{i'j'} \tag{2.48}$$

yazılır. (2.48) eşitliği (2.47) eşitliğinde kullanılırsa

$$\overline{\Gamma}^k_{ij} = A^k_{k'} A^{i'}_i A^{j'}_j \overline{\Gamma}^{k'}_{i'j'} + A^k_{k'} A^{k'}_{ij}$$

olduğu bulunur. Yani $\overline{\Gamma}^k_{ij}$ ‘ler konneksiyon katsayılarının dönüştürülmesi kuralına göre değişir. Dolayısıyla bir afin konneksiyondur.

Bu teoremin bazı sonuçlarını ifade edelim;

Sonuç 1. $\overset{1}{\Gamma}{}^k_{ij}$ ve $\overset{2}{\Gamma}{}^k_{ij}$ afin konneksiyon katsayıları olmak üzere her λ skaler için

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{\overset{1}{\Gamma}{}^k_{ij} + \lambda \overset{2}{\Gamma}{}^k_{ij}}{1+\lambda} \tag{2.49}$$

değeri de bir afin konneksiyonun katsayılarıdır.

İspat: (2.49) eşitliği

$$\Gamma^k_{ij} = \overset{1}{\Gamma}{}^k_{ij} + \frac{\lambda}{1+\lambda}(\overset{2}{\Gamma}{}^k_{ij} - \overset{1}{\Gamma}{}^k_{ij}) \tag{2.50}$$

biçiminde yazılır. (2.50) eşitliğinin sağ tarafındaki ikinci terim tensör olduğundan 2.3.1.Teoremine göre Γ^k_{ij} afin konneksiyon olur.

Özel halde $\lambda = 1$ alırsak

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^{k}_{ij} = \frac{\overset{1}{\Gamma}{}^{k}_{ij} + \overset{2}{\Gamma}{}^{k}_{ij}}{2} \tag{2.51}$$

buluruz. $\overset{\circ}{\Gamma}{}^{k}_{ij}$ konneksiyonuna $\overset{1}{\Gamma}{}^{k}_{ij}$ ve $\overset{2}{\Gamma}{}^{k}_{ij}$ konneksiyonlarına göre orta konneksiyon denir.

Sonuç 2. Γ^{k}_{ij} afin konneksiyon verilmiş olsun. Bu taktirde, $\tilde{\Gamma}^{k}_{ij} = \Gamma^{k}_{ij}$ katsayıları da afin konneksiyon tayin eder.

İspat: Burulma tensörünün ifadesi

$$S^{k}_{ij} = \Gamma^{k}_{[ij]} = \frac{1}{2}\left(\Gamma^{k}_{ij} - \Gamma^{k}_{ji}\right)$$

olduğundan

$$\tilde{\Gamma}^{k}_{ji} = \Gamma^{k}_{ji} + 2S^{k}_{ij}, \qquad \tilde{\Gamma}^{k}_{ji} = \Gamma^{k}_{ji} \tag{2.52}$$

yazılır. 2.3.1. Teorem'den dolayı $\tilde{\Gamma}^{k}_{ji}$ katsayıları bir afin konneksiyon belirtir. $\tilde{\Gamma}^{k}_{ji}$ ve Γ^{k}_{ji} konneksiyonlarına karşılıklı konneksiyon denir.

2.4.4. Burulması sıfır olan uzaylar

Burulmasız afin konneksiyonlu uzayların burulma tensörü sıfıra eşit olduğundan bu uzayların konneksiyon katsayıları alt indislerine göre simetriktir, yani

$$\Gamma^{k}_{ji} = \Gamma^{k}_{ji} = \tilde{\Gamma}^{k}_{ij}$$

olur. Burulmasız afin konneksiyonlu uzayın herhangi eğrisel koordinat sistemine göre koordinatları $\overset{\circ}{u}{}^{1},\ldots,\overset{\circ}{u}{}^{n}$ olan $O\ (\overset{\circ}{u}{}^{i})$ noktasını alalım ve konneksiyon katsayılarının verilmiş olduğu koordinat sistemine göre bu noktadaki değerlerinin $\overset{\circ}{\Gamma}{}^{k}_{ij}$ katsayıları ile verildiğini kabul edelim. $\delta^{i'}_{k}$ kronecker sembolü olmak üzere

$$u^{i'} = \delta_k^{i'}\{(u^k - \overset{\circ}{u}{}^k) + \frac{1}{2}\overset{\circ}{\Gamma}{}^k_{pq}(u^p - \overset{\circ}{u}{}^p)(u^q - \overset{\circ}{u}{}^q)\} \tag{2.53}$$

biçiminde yeni koordinatları tanımlayalım. (2.53) dönüşümü difereniyellenebilirdir ve $u^{i'}$ koordinatlarının u^i koordinatlarına göre kısmi türevleri

$$A_i^{i'} = \delta_i^{i'} + \delta_k^{i'}\overset{\circ}{\Gamma}{}^k_{ip}(u^p - \overset{\circ}{u}{}^p), \quad A_{ij}^{i'} = \delta_k^{i'}\overset{\circ}{\Gamma}{}^k_{ij} \tag{2.54}$$

biçiminde yazılır. (2.54) eşitliği *0* noktasında ve civarında $\det\left(A_i^{i'}\right) \neq 0$ şartını sağlar. Yani, (2.53) dönüşümü diferensiyellenebilir manifoldun tanımındaki mümkün olan dönüşümler sınıfındandır. (2.54) türev fonksiyonları *0* noktasında yazılırsa,

$$A_i^{i'} = \delta_i^{i'}, \quad A_{ij}^{i'} = \delta_k^{i'}\overset{\circ}{\Gamma}{}^k_{ij} \tag{2.55}$$

olur. Şimdi ise konneksiyon katsayılarının yeni koordinat sistemine göre *O* noktasındaki değerlerini hesaplayalım. Bunun için (2.55) ve (2.27) eşitlikleri kullanılarak

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^i_{jk} = \delta_j^{j'}\delta_k^{k'}\delta_{i'}^i\overset{\circ}{\Gamma}{}^{i'}_{j'k'} + \delta_{i'}^i\delta_l^{i'}\overset{\circ}{\Gamma}{}^l_{kj}$$

veya

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^{i'}_{j'k'} = 0$$

bulunur. Böylece burulmasız afin uzayın herbir noktasında öyle koordinat sistemi verilebilir ki, konneksiyon katsayıları bu sisteme göre bu noktadaki bütün değerleri sıfır olur. (2.53) ile verilen koordinatlara normal koordinat sistemi denir.

Burulmasız afin konneksiyonlu uzaylarda aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

1. $R_{(rs)k}{}^i = 0,$

2. $R_{[rsk]}{}^i = 0,$

3. $\nabla_{[t}R_{rs]k}{}^i = 0$ (Bianci-Padov eşitliği).

Bu eşitliklerin her üçünün invaryant (tensör) karekter taşıdığını dikkate alırsak, bunların ispatını normal koordinat sisteminde incelemek yeterli ve daha kolaydır.

Burulmasız afin konneksiyonlu uzayda simetrik ve regüler a_{ij} tensörü verilmiş olsun. Bu tensörün tersi $\tilde{a}^{ij}$ olmak üzere a_{ij} tensörünün kovaryant türevi

$$\nabla_k a_{ij} = a_{kij} \tag{2.56}$$

olarak gösterilsin. (2.56) eşitliğinde indislerin yeri dairesel olarak değiştirilerek aşağıdaki eşitlikler yazılır:

$$\begin{aligned} \partial_k a_{ij} - \Gamma^m_{ki} a_{mj} - \Gamma^m_{kj} a_{mi} &= \nabla_k a_{ij}, \\ \partial_i a_{jk} - \Gamma^m_{ij} a_{mk} - \Gamma^m_{ik} a_{jm} &= \nabla_i a_{jk}, \\ \partial_j a_{ki} - \Gamma^m_{jk} a_{mi} - \Gamma^m_{ji} a_{km} &= \nabla_j a_{ki}. \end{aligned}$$

Sonuncu iki eşitlikten birinci eşitlik çıkartılırsa,

$$2\Gamma^m_{ij} a_{mk} = \partial_i a_{jk} + \partial_j a_{ik} - \partial_k a_{ij} - \left(a_{ijk} + a_{jik} - a_{kij}\right) \tag{2.57}$$

bulunur. (2.57) eşitliğinin her iki tarafı $\tilde{a}^{rk}$ tensörü ile çarpılırsa

$$\Gamma^r_{ij} = \left\{ {r \atop ij} \right\} - \frac{1}{2}\tilde{a}^{rk}\left(a_{ijk} + a_{jik} - a_{kij}\right) \tag{2.58}$$

olur. Burada

$$\left\{ {r \atop ij} \right\} = \frac{1}{2}\tilde{a}^{rk}\left(\partial_i a_{jk} + \partial_j a_{ik} - \partial_k a_{ij}\right) \tag{2.59}$$

biçimindedir. (2.59) ifadesine a_{ij} tensörünün Christoffer sembolü denir. Burulmasız afin konneksiyonlu uzayın konneksiyon katsayıları regüler ve simetrik a_{ij} tensörünün Christoffer sembolü ve kovaryant türevleri yardımıyla ifade edilir.

Tanım 2.4.4: Burulmasız afin konneksiyonlu A_n uzayında $e_{i_1 i_2 .. i_n} = \begin{cases} \mp 1 \\ 0 \end{cases}$, $e = e_{1,2,\ldots,n}$ n-vektörü olmak üzere $\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \ldots \underset{n}{v}$ lineer bağımsız vektörleri üzerine kurulan paralelyüzün hacmi

$$V = e_{i_1 i_2 .. i_n} \underset{1}{v}^{i_1} \underset{2}{v}^{i_2} \ldots \underset{n}{v}^{i_n} \tag{2.60}$$

olsun. $\underset{1}{v},\underset{2}{v},...,\underset{n}{v}$ vektörlerinin paralel taşınması sonucunda V hacmi korunursa burulmasız A_n uzayına eş afin (denk afin) uzay denir.

(2.60) denkleminden

$$\delta e_{i_i..i_n} = 0 \text{ veya } \nabla_k e_{i_i..i_n} = 0 \tag{2.61}$$

olur. Eş afin uzayın konneksiyonu (2.61) denklemiyle belirlenir. (2.61) şartı

$$\partial_k e_{i_i..i_n} - \Gamma^s_{ki_1} e_{si_2..i_n} - ... - \Gamma^s_{ki_n} e_{i_1...s} = 0 \tag{2.62}$$

biçiminde yazılır. n – vektörün antisimetrikliğine göre (2.61) sisteminin bütün denklemleri

$$\partial_k e_{12..n} - \Gamma^s_{k1} e_{s2..n} - ... - \Gamma^s_{kn} e_{12..s} = 0 \tag{2.63}$$

denklemine denk olur. $e_{12..n} = e$ olarak yazılırsa bu durumda (2.63) eşitliğinden

$$\Gamma^s_{ks} = \partial_k \ln e \tag{2.64}$$

yazılır. (2.64) eşitliği eş afin konneksiyonun katsayıları ile belirlenen Γ^s_{ks} toplamı gradiyentdir. Bu gradiyentin potansiyel fonksiyonu ise $\ln e$ olur.

$$R_{ij} = R_{kij}{}^{k} = \partial_k \Gamma^k_{ij} - \partial_i \Gamma^k_{kj} + \Gamma^k_{kl} \Gamma^l_{ij} - \Gamma^l_{ki} \Gamma^k_{lj} \tag{2.65}$$

tensörüne Ricci tensörü denir. Eş afin konneksiyonunu

$$R_{ij} = R_{ji} \tag{2.66}$$

şartı ile de karakterize edebiliriz.

Burulmasız afin konneksiyonlu uzaylarda eğrilik tensörünün $R_{[rsk]}{}^{i} = 0,\quad R_{(rs)k}{}^{i} = 0$ şartlarını sağladığını gözönüne alırsak

$$R_{rsk}{}^{k} = R_{rs} - R_{sr} \tag{2.67}$$

yazarız. (2.66) ve (2.67) eşitlikleri eş afin konneksiyonunun

$$R_{rsk}{}^{k} = 0$$

şartı ile karekterize edilebileceğini gösterir.

Tanım 2.4.5: Burulmasız afin konneksiyonlu uzayın her bir noktasındaki tanjant uzayında verilen simetrik (0,2) tipli g_{ij} tensörü tanjant uzayın paralel kaydırılması durumunda korunuyorsa böyle uzaylara metrik uzay denir. Burada simetrik (0,2) tipli g_{ij} tensörüne metrik tensör de denir.

Tanım 2.4.6: Metrik uzayın g_{ij} metrik tensörü regüler ise yani $\det(g_{ij}) \neq 0$ oluyorsa böyle uzaya Weyl uzayı denir ve W_n ile gösterilir.

Tanım 2.4.7: Eğer Weyl uzayı eş-afin uzay olursa bu uzaya Riemannian uzayı denir ve V_n ile gösterilir.

Riemannian uzayı burulmasız konneksiyona sahip olan uzaydır ve bu uzayın Riemannian konneksiyonu

$$\nabla_k g_{ij} = 0 \tag{2.68}$$

şartı ile karekterize edilir. V_n Riemannian uzayının konneksiyon katsayıları

$$\Gamma_{ij}^k = \left\{ {k \atop ij} \right\} = \frac{1}{2} g^{kr} \left(\partial_i g_{rj} + \partial_j g_{ir} - \partial_r g_{ij} \right) \tag{2.69}$$

biçimide verilir. Yani, V_n uzayının konneksiyon katsayıları g_{ij} tensörünün Christoffel sembolleriyle çakışır. (2.69) katsayılarıyla verilen konneksiyona Riemannian konneksiyonu veya Levi-Civita konneksiyonu denir. Diğer taraftan Riemannian manifoldu üzerinde $\nabla g = 0$ şartını sağlayan ama burulması olan konneksiyonlar da vardır. Bu tür konneksiyonlara ise metrik konneksiyon denir.

2.4.5. Riemannian manifoldu

Her bir $x \in M_n$ noktasında $\forall Y \in T_x(M_n)$ ve (0,2) tipli simetrik g tensörü için $g(X,Y) = 0$ eşitliğinden $X = 0$ oluyorsa g ye M_n üzerinde Riemannian metriği denir.

Lokal koordinatlarda bu şart $Det(g_{ij}) \neq 0$ şartına denktir. g nin bileşenleri g_{ij} olmak üzere g için

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j$$

ifadesi de kullanılır (Kobayashi and Nomizu 1963).

Eğer M_n üzerinde Riemannian metriği verilmişse, o zaman (M_n, g) çiftine Riemannian manifoldu denir.

Burulmasız $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{ks} \left(\partial_i g_{sj} + \partial_j g_{is} - \partial_s g_{ij} \right)$ konneksiyonuna ise Riemannian manifoldunun Riemannian konneksiyonu denir.

2.4.6. Pseudo-Riemannian manifoldu

(M_n, g) pseudo-Riemannian manifoldu g metrik tensörü simetrik, bilineer ve non-dejenere olan M_n Riemannian manifolddur. Burada g metrik tensörünün pozitif tanımlı olması gerekmez, fakat non-dejenere olmak zorundadır. Böyle metriklere de pseudo-Riemannian metrik denir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Tanjant Demet

M_n, C^∞ sınıfından n- boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold ve M_n manifoldunun p noktasındaki tanjant uzay $T_p(M_n)$ olmak üzere

$$T(M_n) = \bigcup_{p \in M_n} T_p(M_n) \tag{3.1}$$

ile tanımlanan $T(M_n)$ kümesine tanjant demet denir.

$T(M_n)$' nin herhangi bir $\tilde{p}$ noktası, yani $\tilde{p} \in T_p(M_n)$ için M_n manifoldu üzerindeki $T(M_n)$ tabii demet yapısını tanımlayan $\pi : T(M_n) \to M_n$ demet projeksiyonu $\tilde{p} \mapsto p$ karşılık getirir. Yani $\pi(\tilde{p}) = p$ olur. $\pi^{-1}(p) = T(M_n)$ kümesine M_n temel uzayının p noktasındaki fibre denir.

M_n temel uzayının $\{U; x^h\}$ koordinat komşuluklar sistemiyle örtüldüğünü farzedelim. Burada $(x^h), U$ komşuluğunda tanımlı lokal koordinat sistemidir. $\pi^{-1}(U) \subset T(M_n)$ açık kümesi $U \times \mathbb{R}^n$ direk çarpımına diferensiyellenebilir homeomorfizmdir. $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}$ reel alan üzerindeki n- boyutlu vektör uzayı olur. $\tilde{p} \in T_p(M_n)$ $(p \in U)$ noktası (p, X) sıralı çifti ile gösterilir ve $X \in \mathbb{R}^n$ vektörünün bileşenleri $T_p(M_n)$ tanjant uzayında $\{\partial_h\}$ $\left(\partial_h = \frac{\partial}{\partial x^h}\right)$ doğal bazına göre $\tilde{p}$ nın $(y^h) = (x^{\bar{h}})$ $\bar{h} = n+1,...,2n$ kartezyen koordinatları ile verilir. U komşuluğunda $p = \pi(\tilde{p})$ nin koordinatları (x^h) $h = 1,..,n$ ile gösterilirse $\tilde{p}$ noktası uygun $(x^h, x^{\bar{h}}) \mapsto \tilde{p} \in \pi^{-1}(U)$ ile verilmiş olur. Biz $\pi^{-1}(U) \subset T(M_n)$ açık kümesinde $(x^h, x^{\bar{h}})$ lokal koordinatlar sistemini elde ederiz. Burada $(x^h, x^{\bar{h}})$ ya (x^h) dan indirgenmiş (elde edilmiş) $\pi^{-1}(U)$ da koordinatlar denir.

M_n manifoldunun $p=\pi(\tilde{p})$ noktasını ihtiva eden diğer bir koordinat komşuluğu $\{U^{'}, x^{h'}\}$ ise $\pi^{-1}(U^{'})$ koordinat komşuluğu $\tilde{p}$ ihtiva eder ve $\pi^{-1}(U^{'})$ ya göre $\tilde{p}$ nın indirgenmiş koordinatları $\left(x^{h'}, y^{h'}\right)$ ile verilecektir. Burada

$$\begin{cases} x^{h'} = x^{h'}(x), \\ y^{h'} = \frac{\partial x^{h'}}{\partial x^{h}} y^{h}, \end{cases} \tag{3.2}$$

olarak verilir. $x^{h'}(x)$, p noktasındaki $x^1, x^2, ..., x^n$ değişkenlerinin C^∞ sınıfından olan diferensiyellenebilir fonksiyonlarıdır. $x^{\bar{h}} = y^h, x^{\bar{h}'} = y^{h'}$ ile gösterirsek (3.2) denklemi

$$x^{p'} = x^{p'}(x). \quad p^{'} = 1,...2n \tag{3.3}$$

olarak yazılır. (3.2) denkleminin Jacobianı

$$\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^{p}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^{h'}}{\partial x^{h}} & 0 \\ \frac{\partial^2 x^{h'}}{\partial x^{h} \partial x^{i}} y^{i} & \frac{\partial x^{h'}}{\partial x^{h}} \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

matrisi ile verilir. (3.2) denkleminin tersi ise

$$\begin{cases} x^{h} = x^{h}(x'), \\ y^{h} = \frac{\partial x^{h}}{\partial x^{h'}} y^{h'} \end{cases} \tag{3.5}$$

veya

$$x^{p} = x^{p}(x'), \quad p = 1,...,2n \tag{3.6}$$

olarak yazılır. (3.5) denkleminin Jacobian matrisi;

$$\frac{\partial x^{p}}{\partial x^{p'}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^{h}}{\partial x^{h'}} & 0 \\ \frac{\partial^2 x^{h}}{\partial x^{h'} \partial x^{i'}} y^{i'} & \frac{\partial x^{h}}{\partial x^{h'}} \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

matrisi ile verilir. (3.4) ve (3.7) denklemleri $T(M_n)$ tanjant demetin daima yönlendirilebilir olduğunu gösterir, çünkü, $Det\left(\frac{\partial x^{p^{'}}}{\partial x^{p}}\right) \rangle 0 \quad (Det\left(\frac{\partial x^{p}}{\partial x^{p^{'}}}\right) \rangle 0)$.

M_n manifoldu üzerindeki C^∞ sınıfında (r,s) tipli tüm tensör alanlarının kümesini $\mathcal{T}^{\,r}_{\,s}(M_n)$ ve M_n deki tüm tensör alanlarının kümesini ise $\mathcal{T}(M_n) = \sum_{r,s=0}^{\infty} T^r_s(M_n)$ ile göstereceğiz. Benzer olarak $T(M_n)$ tanjant demetindeki tensör alanlarının kümelerini ise sırasıyla $\mathcal{T}^r_s(T(M_n))$ ve $\mathcal{T}(T(M_n))$ olarak göstereceğiz.

3.2. Nijenhuis Tensörü

Nijenhuis tensörü yapıların integrallenebilme şartlarının incelenmesinde gerekli tensördür. A ve B afinorlarının verildiğini kabul edelim. $X,Y \in T^1_0(M_n)$ için $N_{AB}(X,Y)$ tensörünü şöyle tanımlayalım:

$$\begin{aligned} N_{AB}(X,Y) &= [AX,BY]+[BX,AY]+AB[X,Y]+BA[X,Y] \\ &\quad -A[X,BY]-A[BX,Y]-B[X,AY]-B[AX,Y] \end{aligned} \tag{3.8}$$

$\varphi^i_j X^j = \varphi^i$ ifadesi bir vektör alanı olduğundan, (3.8) eşitliğinin sağ tarafı vektör alanı olup $N_{AB}(X,Y) \in T^1_2(M_n)$ bir tensör alanıdır. X ve Y ye göre lineerdir.

Çeşitli kaynaklarda Nijenhuis tensörüne A,B afinorlarının Torsion'u denir. $A=B$ alınırsa bir tek afinor için Nihjenhuis tensörü ifadesi kullanılır (Torsion denilmez). Bir afinor yapı için Nijenhuis tensörü, $A=B=\varphi$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} N_\varphi(X,Y) = N(X,Y) &= [\varphi X,\varphi Y]+[\varphi X,\varphi Y]+\varphi^2[X,Y]+\varphi^2[X,Y] \\ &\quad -\varphi[X,\varphi Y]-\varphi[\varphi X,Y]-\varphi[X,\varphi Y]-\varphi[\varphi X,Y] \\ &= 2([\varphi X,\varphi Y]+\varphi^2[X,Y]-\varphi[X,\varphi Y]-\varphi[\varphi X,Y]) \end{aligned}$$

şeklindedir. Parantezin içi $N(X,Y)$ olarak alınır.

$$N_\varphi(X,Y) = N(X,Y) = [\varphi X,\varphi Y]+\varphi^2[X,Y]-\varphi[X,\varphi Y]-\varphi[\varphi X,Y] \tag{3.9}$$

eşitliğindeki φ afinoru için $\varphi^2 = -I$ ise yapıya almost kompleks yapı, $\varphi^2 = I$ ise almost product yapı, $\varphi^2 = 0$ ise dual yapı denilir. Bu yapılar için $N(X,Y)=0$ olması yapıların integrallenebilme şartıdır.

Şimdi de Nijenhuis tensörünü lokal koordinatlarda yazmaya çalışalım:

Bunun için Lie parantezinin

$$[fX, gY] = fg[X,Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X \tag{3.10}$$

özelliğinden faydalanacağız. $X = \partial_i,\ Y = \partial_j$ eşitliklerini (3.9) ve (3.10) eşitliklerinde yerine yazacağız. İlk önce (3.9) eşitliğinde yerine yazarsak,

$$[f\partial_i, g\partial_j] = fg[\partial_i, \partial_j] + f(\partial_i g)\partial_j - g(\partial_j f)\partial_i$$

eşitliği elde edilir. $[\partial_i, \partial_j] = 0$ olduğundan

$$[f\partial_i, g\partial_j] = f(\partial_i g)\partial_j - g(\partial_j f)\partial_i \tag{3.11}$$

yazılır. Şimdi de (3.10) eşitliğinde yerine yazarsak,

$$N_\varphi(\partial_i, \partial_j) = N^k_{(\varphi)ij}\partial_k = N^k_{ij}\partial_k$$

$$N^k_{ij}\partial_k = [\varphi\partial_i, \varphi\partial_j] + \varphi^2 \underbrace{[\partial_i, \partial_j]}_{=0} - \varphi[\partial_i, \varphi\partial_j] - \varphi[\varphi\partial_i, \partial_j]$$

$$= [\varphi_i^s\partial_s, \varphi_j^l\partial_l] - \varphi[\partial_i, \varphi_j^l\partial_l] - \varphi[\varphi_i^s\partial_s, \partial_j]$$

ve Lie parantezinin özelliğinden, yani (3.11) eşitliğinden

$$N^k_{ij}\partial_k = \varphi_i^s\varphi_j^l \underbrace{[\partial_s, \partial_l]}_{=0} + \varphi_i^s(\partial_s\varphi_j^l)\partial_l - \varphi_j^l(\partial_l\varphi_i^s)\partial_s$$

$$-\varphi\{\varphi_j^l \underbrace{[\partial_i, \partial_l]}_{=0} + (\partial_i\varphi_j^l)\partial_l - \varphi_j^l \underbrace{(\partial_l.1)}_{=0}\partial_i\}$$

$$-\varphi\{\varphi_i^s \underbrace{[\partial_s, \partial_j]}_{=0} + \varphi_i^s \underbrace{(\partial_s.1)}_{=0}\partial_j - (\partial_j\varphi_i^s)\partial_s\}$$

$$N^k_{ij}\partial_k = \varphi_i^s\partial_s\varphi_j^l\partial_l - \varphi_j^l\partial_l\varphi_i^s\partial_s - \partial_i\varphi_j^l\varphi_l^k\partial_k + \partial_j\varphi_i^s\varphi_s^k\partial_k$$

$$= (\varphi_i^s\partial_s\varphi_j^k - \varphi_j^l\partial_l\varphi_i^k - \partial_i\varphi_j^l\varphi_l^k + \partial_j\varphi_i^s\varphi_s^k)\partial_k$$

$$N^k_{ij}\partial_k = (\varphi_i^s\partial_s\varphi_j^k - \varphi_j^l\partial_l\varphi_i^k - \partial_i\varphi_j^l\varphi_l^k + \partial_j\varphi_i^s\varphi_s^k)\partial_k \tag{3.12}$$

eşitliği elde edilir. (3.12) eşitliği Nijenhuis tensörünün lokal koordinatlarla yazılımıdır.

3.3. Hermitian ve Kahlerian Manifoldlar

M_{2n} diferensiyellenebilir bir manifold olsun. M_{2n} üzerinde (1,1) tipli φ tensör alanı için $\varphi^2 = -1$ olan tensör alanına almost kompleks yapı denir. (M_{2n}, φ) ise almost kompleks manifold olarak adlandırılır. M_{2n} üzerindeki Hermitian metrik, M_{2n} üzerindeki her X, Y vektör alanları için

$$g(\varphi X, Y) = -g(X, \varphi Y) \tag{3.13}$$

şartını sağlayan g Riemannian metriğidir. (3.13) şartını sağlayan g metriğine hybrid metrik denir.

Hermitian metriğe sahip almost kompleks manifoldda almost Hermitian manifold, Hermitian metriğe sahip komleks manifoldda ise Hermitian manifold denir.

Teorem 3.3.1: M_{2n}, φ almost kompleks yapısına sahip almost komleks manifold olsun. M_{2n} nin kompleks manifold olması için gerek ve yeter şart $\nabla\varphi = 0$ ve $T = 0$ olacak şekilde ∇ afin konneksiyonunun olmasıdır. Burada T, ∇ nın burulma tensörüdür.

M_{2n}, φ almost kompleks yapısına ve g Hermitian metriğe sahip almost hermitian manifold olsun. M_{2n} üzerindeki Ω fundamental 2-formu

$$\Omega(X, Y) = g(X, \varphi Y) = (g \circ \varphi)(X, Y) \tag{3.14}$$

ile tanımlanır.

Teorem 3.3.2: M_{2n}, φ almost kompleks yapısına ve g Hermitian metriğe sahip almost kompleks manifold olsun. ∇, g ile tanımlanan Riemannian konneksiyonunun kovaryant türevlemesi olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:

a) $\nabla\varphi = 0$

b) $\nabla\Omega = 0$

c) φ almost kompleks yapının Nijenhuis tensörünün sıfır olması ve Ω fundamental 2-formunun kapalı olması, yani $N_\varphi = 0$ ve $d\Omega = 0$.

M_{2n} almost kompleks manifoldu üzerindeki g Hermitian metriği için Ω fundamental 2-formu kapalı ise g'ye Kahlerian metrik denilir. Kahlerian metriğine sahip M_{2n} almost kompleks manifolduna almost Kahlerian manifold denilir. Kahlerian metriğine sahip M_{2n} kompleks manifolduna da Kahlerian manifold denilir. Teorem 3.5.2 den açıktır ki, M_{2n} Hermitian manifoldunun Kahlerian manifoldu olması için gerek ve yeter şart $\nabla\varphi = 0$ olmasıdır. Yani Kahlerian manifoldu, $\varphi^2 = -I$ şartını sağlayan φ almost kompleks yapısına, her X, Y vektör alanı için

$$g(\varphi X, Y) = g(X, \varphi Y) \tag{3.15}$$

şartını sağlayan g Riemannian metriğine ve $\nabla\varphi = 0$ şartını sağlayan $2n-$boyutlu bir manifolddur. (3.15) ile verilen g metriğine pür metrik denir (Yano and Kon 1984).

3.4. Paralel Null-Dağılımı

M, (p,q) işaretli pseudo-Riemannian manifold olsun. $T(M)$ Tanjant demetinin $T(M) = V_1 \oplus V_2$ şeklindeki parçalanışı verilsin. Burada V_1 ve V_2 diferensiyellenebilir alt demetlerine dağılımlar (tamamlayıcı dağılımlar) denir.

$$\pi_1 : T(Mn) \to V_1$$

$$\pi_2 : T(Mn) \to V_2$$

tamamlayıcı izdüşüm operatörleri tanımlanır. Eğer $\nabla\pi_1 = 0$ ise V_1'e paralel dağılım denir. (Buna denk olarak, X_1, V_1 de değerini alan herhangi bir diferensiyellenebilir vektör alanı ise, $\nabla\pi_1$ de yine V_1 de değerini alır.)

V_1 paralel dağılım olsun. V_1'e kısıtlanmış metriğin rank'ı sabit olsun. V_1 paralel ve V_1'e kısıtlanmış metrik sıfıra eşit ise V_1'e paralel null dağılım denir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Parakompleks Yapı

M_{2n} , (n,n) işaretli pseudo-Riemann nötral metriğine sahip bir Riemann manifoldu olsun. $\mathfrak{T}_q^p(M_{2n})$ ile M_{2n} manifoldu üzerindeki (p,q) tipli tensör alanlarını kümesini gösterelim. Manifoldların, tensör alanlarının, konneksiyonların C^∞ sınıfından ve diferensiyellenebilir olduğunu kabul edelim.

Hemen hemen parakompleks manifold sırasıyla φ'nin $+I$ ve $-I$ özdeğerlerine karşılık gelen T^+M_{2n} ve T^-M_{2n} öz demetlerinin aynı rank'a sahip olması durumunda hemen hemen product manifolddur. Burada hemen hemen parakompleks manifoldun boyutu çifttir. φ parakompleks yapısı göz önüne alınırsa aşağıdaki afinorlar kümesi elde edilir: $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde mertebesi 2 olan cebiri temsil eden bazlar $\{I,\varphi\}$, $\varphi^2 = I$ şeklindedir. $\mathbb{R}(j) = \{a_0 + a_1 j \,:\, j^2 = 1;\ a_0,\ a_1 \epsilon\, \mathbb{R}\}$ ile tanımlanan cebire parakompleks sayılar cebiri denir. Bu cebir birleşimli, değişimli ve birimli bir cebirdir.

Hemen hemen parakompleks yapının integrallenebilmesi için gerek ve yeter şart;

$$N_\varphi(X,Y) = [\varphi X, \varphi Y] - \varphi[\varphi X, Y] - \varphi[x, \varphi Y] + [X,Y]$$

Nijenhius tensörünün sıfıra eşit olmasıdır.

4.2. Norden metrikleri

g metriği her $X, Y \epsilon\, \mathfrak{T}_0^1(M_{2n})$ için;

$$g(\varphi X, Y) = g(X, \varphi Y)$$

veya

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y)$$

şartını sağlıyorsa g' ye Norden metriği denir. (M_{2n}, φ) hemen hemen parakompleks manifoldu g Norden metriğine sahipse, (M_{2n}, φ, g) manifolduna hemen hemen para-Norden manifold denir.

4.3. Paraholomorfik (Hemen Hemen Paraholomorfik) Tensör Alanları

t^* , $M_n(\mathbb{R}(j))$ üzerinde parakompleks bir tensör alanı olsun. Böyle bir tensör alanı aynı zamanda M_{2n} manifoldu üzerinde bir tensör alanıdır ve φ'ye göre pür'dür denir.

$(0, q)$ tipli ω tensör alanı için pür olma şartı her $X_1, X_2, \dots, X_q \epsilon\, \mathfrak{T}_0^1(M_{2n})$ için aşağıdaki şartların sağlanma durumudur.

$$\omega(\varphi X_1, X_2, \dots, X_q) = \omega(X_1, \varphi X_2, \dots, X_q) = \cdots = \omega(X_1, X_2, \dots, \varphi X_q)$$

ω tensör alanına uygulanan,

$$\phi_\varphi : \mathfrak{T}_q^0(M_{2n}) \rightarrow \mathfrak{T}_{q+1}^0(M_{2n})$$

operatör,

$$(\phi_\varphi \omega)(X, Y_1, Y_2, \dots, Y_q) = (\varphi X)\left(\omega(Y_1, Y_2, \dots, Y_q)\right) - X(\omega Y_1, Y_2, \dots, Y_q))$$

$$+\omega\left((L_{Y_1}\varphi)X, Y_2, \dots, Y_q\right) + \cdots + \omega\left(Y_1, Y_2, \dots, \left(L_{Y_q}\varphi\right)X\right)$$

şeklinde tanımlanır. Burada L_Y , Y'ye göre Lie diferensiyellenmesini temsil etmektedir. φ , M_{2n} üzerinde parakompleks yapı ve $\phi_\varphi \omega = 0$ ise $M_n(\mathbb{R}(j))$ üzerindeki ω^* tensör alanına paraholomorfiktir denir. $M_n(\mathbb{R}(j))$ üzerindeki ω^* paraholomorfik tensör alanı her $X_1, X_2, \dots, X_q \epsilon\, \mathfrak{T}_0^1(M_{2n})$ için;

$$(\phi_\varphi \omega)(X, Y_1, Y_2, \dots, Y_q) = 0$$

olacak şekilde M_{2n} üzerinde ω pür tensör alanı formundadır.

Bu yüzden M_{2n} üzerindeki ω tensör alanına da paraholomorfik tensör alanı denir. φ, M_{2n} üzerinde hemen hemen parakompleks yapı ise $\phi_{\varphi}\omega = 0$ şartını sağlayan ω tensör alanına da hemen hemen paraholomorfiktir denir.

4.4. Paraholomorfik Norden (Para-Kähler-Norden) Metrikler

Para-Norden manifoldda her $X, Y, Z \epsilon\, \mathfrak{T}_0^1(M_n)$ için,

$$(\phi_{\varphi} g)(X, Y, Z) = 0$$

ise g para-Norden metriğine paraholomorfiktir denir.

$(\phi_{\varphi} g)(X, Y, Z) = 0$ eşitliğinde $X = \partial_k, Y = \partial_i, Z = \partial_j$ olarak seçilirse $\phi_{\varphi} g$'nin $X^1, X^2, \dots, X^n$ lokal koordinat sistemine göre bileşenleri olan $(\phi_{\varphi} g)_{kij}$ aşağıdaki şekilde ifade edilebilir;

$$(\phi_{\varphi} g)_{kij} = \varphi_k^m \partial_m g_{ij} - \varphi_i^m \partial_k g_{mj} + g_{mj}(\partial_i \varphi_k^m - \partial_k \varphi_i^m) + g_{im} \partial_j \varphi_k^m \, .$$

Eğer (M_{2n}, φ, g) paraholomorfik-Norden metriğe sahip para-Norden manifold ise (M_{2n}, φ, g)'ye paraholomorfik-Norden manifold denir.

4.5. Para-Norden-Walker Metrikler

Bu çalışmada 8 boyutlu para-Norden manifoldları üzerine yoğunlaşacağız. Walker metriğini kullanarak, hemen hemen parakompleks yapıyla beraber yeni bir para-Norden-Walker metriği oluşturacağız.

4.6. g Walker Metriği

M_8, 8-manifoldu üzerindeki g nötral metriği, M_8'de g'ye göre paralel 4-boyutlu D null dağılımına sahipse Walker'dir denir. Bu şekildeki metriklerin kanonik formu Walker tarafından oluşturulmuştur. Uygun $(x_1, x_2, \dots, x_8)$ koordinatlarının varlığı durumunda metrik;

$$g = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & I_4 \\ I_4 & B \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

şeklinde ifade edilir. Burada I_4, 4×4 tipindeki birim matris, B'de 4×4 tipinde bileşenleri $(x_1, x_2, \dots, x_8)$ koordinatlarının fonksiyonları olan matristir.

4.7. Hemen Hemen Para-Norden-Walker Manifoldlar

φ, M_8 Walker manifoldunda aşağıdaki şartları sağlayan parakompleks yapı olsun;

1) $\varphi^2 = I$

2)$g(\varphi X, Y) = g(X, \varphi Y)$ (Nordenlik şartı)

3) $\varphi\partial_1 = \partial_3,\ \varphi\partial_2 = \partial_4,\ \varphi\partial_3 = \partial_1,\ \varphi\partial_4 = \partial_2$

Bu üç özelliği kullanarak yapılan hesaplamalar sonucunda φ yapısı $\{\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_8\}$ doğal çatısına göre;

$$\varphi=\begin{bmatrix}0&0&1&0&m&-k&1/2(b-a)&-l\\0&0&0&1&-k&n&l&0\\1&0&0&0&1/2(a-b)&l&-m&k\\0&1&0&0&-l&0&k&-n\\0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0\end{bmatrix}$$

lokal bileşenlerine sahiptir. Burada m,n,k,l; $(x^1,x^2,\dots,x^8)$'in keyfi fonksiyonlarıdır. Bu çalışmada bu yapının özel bir hali olan,

$$\varphi=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0&0&1/2(b-a)&0\\0&0&0&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&1/2(a-b)&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0\end{bmatrix}$$

yapısı üzerinde çalışılacaktır.

4.7.1. φ-yapısının integrallenebilmesi

Genel durumu göz önüne alırsak, hemen hemen para-Norden-Walker manifoldunun φ hemen hemen parakompleks yapısının integrallenebilmesi için gerek ve yeter şart,

$$(N_\varphi)^i_{jk}=\varphi^m_j\partial_m\varphi^i_k-\varphi^m_k\partial_m\varphi^i_j-\varphi^i_m\partial_j\varphi^m_k+\varphi^i_m\partial_k\varphi^m_j=0$$

olmasıdır.

Yapılan hesaplamalar sonucu Nijenhius tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri; ($N^i_{jk}=-N^i_{kj}$ olduğundan $j<k$ durumunun göz önüne alınması yeterlidir)

$N_{15}^{1} = N_{37}^{1} = -N_{17}^{3} = -N_{35}^{3} = \frac{1}{2}(b_1 - a_1),$

$N_{25}^{1} = N_{47}^{1} = -N_{27}^{3} = -N_{45}^{3} = \frac{1}{2}(b_2 - a_2),$

$N_{17}^{1} = N_{35}^{1} = -N_{15}^{3} = -N_{37}^{3} = \frac{1}{2}(b_3 - a_3),$

$N_{27}^{1} = N_{45}^{1} = -N_{25}^{3} = -N_{47}^{3} = \frac{1}{2}(b_4 - a_4),$

$N_{56}^{1} = N_{78}^{1} = N_{67}^{3} = -N_{58}^{3} = \frac{1}{2}(a_6 - b_6),$

$N_{67}^{1} = N_{58}^{1} = -N_{56}^{3} = -N_{78}^{3} = \frac{1}{2}(a_8 - b_8),$

$N_{57}^{1} = \frac{1}{4}(b - a)(a_3 - b_3),$

$N_{57}^{3} = \frac{1}{4}(a - b)(a_1 - b_1).$

şeklindedir.

Teorem 4.7.1.1: (M_8, φ, g) para-Norden-Walker manifoldunda φ-hemen hemen parakompleks yapısının integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart;

$$a_1 - b_1 = 0, a_2 - b_2 = 0, a_3 - b_3 = 0, a_4 - b_4 = 0, a_6 - b_6 = 0, a_8 - b_8 = 0$$

kısmi diferensiyel denklemlerinin sağlanmasıdır.

Sonuç 4.7.1.2: (M_8, φ, g) hemen hemen para-Norden-Walker manifoldunun, φ-hemen hemen parakompleks yapısının integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart;

$$a = b + \xi(x^5, x^7)$$

olacak şekilde bir ξ fonksiyonunun olmasıdır.

Sonuç 4.7.1.3: Eğer $g = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & I_4 \\ I_4 & B \end{pmatrix}$ metriği için,

$$B = \begin{bmatrix} -b(x^1, \ldots, x^8) + \xi(x^5 + x^7) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b(x^1, \ldots, x^8) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde ise g metriği her zaman para-Norden-Walker'dir.

4.7.2. Twin para-Norden metriği

(M_{2n}, φ, g) hemen hemen para-Norden manifold olsun. (M_{2n}, φ, g) para-Norden manifoldunun birleşmeli metriği, M_{2n} üzerindeki her X, Y vektör alanları için,

$$G(X,Y) = (g \circ \varphi)(X,Y)$$

şeklinde tanımlanır.

Bu metrik koordinatlarla;

$$G_{ij} = \varphi_m^i g_{mj}$$

şeklinde yazılır. Yapılan hesaplamalar sonucunda (M_8, φ, g) manifoldunun Twin para-Norden metriğinin koordinatları;

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2(a+b) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2(a+b) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur.

Sonuç 4.7.2.1: (M_8, φ, g) manifoldunun twin para-Norden metriği, (5.1) formuna sahip olmadığından Walker değildir.

4.8. (M_8, φ, g) Üzerinde Paraholomorfik Norden-Walker (Para-Kähler-Norden-Walker) Metrikleri

(M_8, φ, g) hemen hemen para-Norden-Walker manifold olsun. Eğer,

$$(\emptyset_\varphi g)_{kij} = \varphi_k^m \partial_m g_{mj} - \varphi_i^m \partial_k g_{mj} + g_{mj}(\partial_i \varphi_k^m - \partial_k \varphi_i^m) + g_{im} \partial_j \varphi_k^m = 0$$

şartı sağlanırsa φ integrallenebilirdir ve (M_8, φ, g) üçlüsüne paraholomorfik para-Norden-Walker veya para-Kähler-Norden-Walker manifold denir.

Yapılan hesaplamalar sonucunda $\emptyset_\varphi g$ tensörünün 0'dan farklı bileşenleri;

$$(\emptyset_\varphi g)_{155} = a_3, \quad (\emptyset_\varphi g)_{157} = -\frac{1}{2}(a_1 + b_1), \quad (\emptyset_\varphi g)_{177} = b_3,$$

$$(\emptyset_\varphi g)_{255} = a_4, \quad (\emptyset_\varphi g)_{257} = -\frac{1}{2}(a_2 + b_2), \quad (\emptyset_\varphi g)_{277} = b_4,$$

$$(\emptyset_\varphi g)_{355} = a_1, \quad (\emptyset_\varphi g)_{357} = -\frac{1}{2}(a_3 + b_3), \quad (\emptyset_\varphi g)_{377} = b_1,$$

$$(\emptyset_\varphi g)_{455} = a_2, \quad (\emptyset_\varphi g)_{457} = -\frac{1}{2}(a_4 + b_4), \quad (\emptyset_\varphi g)_{477} = b_2,$$

$$(\emptyset_\varphi g)_{517} = -(\emptyset_\varphi g)_{715} = \frac{1}{2}(a_1 - b_1), \quad (\emptyset_\varphi g)_{527} = -(\emptyset_\varphi g)_{725} = \frac{1}{2}(a_2 - b_2),$$

$$(\emptyset_\varphi g)_{537} = -(\emptyset_\varphi g)_{735} = \frac{1}{2}(a_3 - b_3), \quad (\emptyset_\varphi g)_{547} = -(\emptyset_\varphi g)_{745} = \frac{1}{2}(a_4 - b_4),$$

$$(\emptyset_\varphi g)_{555} = \frac{1}{2}(a - b)a_3 + a_7, \quad (\emptyset_\varphi g)_{557} = -b_5,$$

$$(\emptyset_\varphi g)_{567} = -(\emptyset_\varphi g)_{765} = \frac{1}{2}(a_6 - b_6), \quad (\emptyset_\varphi g)_{577} = \frac{1}{2}(a - b)b_3 + a_7,$$

$$(\emptyset_\varphi g)_{587} = -(\emptyset_\varphi g)_{785} = \frac{1}{2}(a_8 - b_8), \quad (\emptyset_\varphi g)_{655} = a_8,$$

$$(\emptyset_\varphi g)_{657} = -\frac{1}{2}(a_6 + b_6), \quad (\emptyset_\varphi g)_{677} = b_8, \quad (\emptyset_\varphi g)_{755} = \frac{1}{2}(b - a)a_1 + b_5,$$

$$(\emptyset_\varphi g)_{757} = -a_7, \quad (\emptyset_\varphi g)_{777} = \frac{1}{2}(b - a)b_1 + b_5, \quad (\emptyset_\varphi g)_{855} = a_6,$$

$$(\emptyset_\varphi g)_{857} = -\frac{1}{2}(a_8 + b_8), \quad (\emptyset_\varphi g)_{877} = b_6.$$

olarak bulunur.

Teorem 4.8.1: (M_8, φ, g) üçlüsünün para-Kähler-Norden-Walker olması için gerek ve yeter şart,

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_6 = a_7 = a_8 = 0,$$

$$b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = b_6 = b_8 = 0.$$

olmasıdır.

Sonuç 4.8.2: (M_8, φ, g) üçlüsü, (5.1) Walker metriğindeki B matrisinin**,**

$$B = \begin{bmatrix} a(x^5) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b(x^7) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

bileşenlerine sahip olması durumunda para-Kähler-Norden-Walker'dir.

4.9. Quasi-Para-Kähler-Norden Metrikleri

Para-Norden metriğine sahip, integrallenemeyen hemen hemen parakompleks manifoldların temel sınıfı quasi-para-Kähler manifoldların sınıfını oluşturur. (M_{2n}, φ, g) hemen hemen para-Norden manifoldu,

$$\sigma_{X,Y,Z}\, g\big((\nabla_X \varphi)Y, Z\big) = 0$$

şartını sağlıyorsa bu manifolda quasi-para-Kähler manifold denir. (Salimov *et al.* 2007). Burada σ, üç bileşenin döngüsel toplamıdır.

Teorem 4.9.1: (M_{2n}, φ, g) hemen hemen para-Norden manifold olsun. g, para-Norden metriğinin quasi-para-Kähler-Norden olması için gerek ve yeter şart her $X, Y \in \Im_0^1(M_{2n})$ için;

$$\big(\emptyset_\varphi g\big)(X,Y,Z) + \big(\emptyset_\varphi g\big)(Y,Z,X) + \big(\emptyset_\varphi g\big)(Z,X,Y) = 0 \qquad (5.2)$$

olmasıdır.

Sonuç 4.9.2: (5.2) şartı,

$$\left(\emptyset_{\varphi}g\right)(X,Y,Z)+2g\left((\nabla_X\varphi)Y,Z\right)=0$$

şartına denktir.

(M_{2n},φ,g) para-Norden-Walker manifoldu,$\emptyset_k g_{ij}+2\nabla_k G_{ij}=0$ şartını sağlıyorsa quasi-para-Kähler-Norden'dir. Burada G, $G_{ij}=\varphi_i^m g_{mj}$ şeklinde tanımlanmıştır.

(5.1) metriğinin tersi olan $g^{-1}=(g^{ij})$ matrisi,

$$g^{-1}=\begin{pmatrix}-B & I_4\\ I_4 & 0\end{pmatrix}$$

şeklindedir.

(5.1) Walker metriğinin Levi-Civita konneksiyonu,

$\nabla_{\partial_1}\partial_5=\frac{1}{2}a_1\partial_5,\quad \nabla_{\partial_1}\partial_7=\frac{1}{2}b_1\partial_3,\quad \nabla_{\partial_2}\partial_5=\frac{1}{2}a_2\partial_1,$

$\nabla_{\partial_2}\partial_7=\frac{1}{2}b_2\partial_3,\quad \nabla_{\partial_3}\partial_5=\frac{1}{2}a_3\partial_1,\quad \nabla_{\partial_3}\partial_7=\frac{1}{2}b_3\partial_3,$

$\nabla_{\partial_4}\partial_5=\frac{1}{2}a_4\partial_1,\quad \nabla_{\partial_4}\partial_7=\frac{1}{2}b_4\partial_3,\quad \nabla_{\partial_5}\partial_6=\frac{1}{2}a_6\partial_1,$

$\nabla_{\partial_5}\partial_7=\frac{1}{2}a_7\partial_1+\frac{1}{2}b_5\partial_3,\quad \nabla_{\partial_5}\partial_8=\frac{1}{2}a_8\partial_1,$

$\nabla_{\partial_6}\partial_7=\frac{1}{2}b_6\partial_3,\quad \nabla_{\partial_7}\partial_8=\frac{1}{2}b_8\partial_3,$

$$\nabla_{\partial_5}\partial_5=\frac{1}{2}(aa_1+a_5)\partial_1-\frac{1}{1}a_6\partial_2+\frac{1}{2}(ba_3-a_7)\partial_3+\frac{1}{2}a_8\partial_4-\frac{1}{2}a_1\partial_5-\frac{1}{2}a_2\partial_6$$
$$-\frac{1}{2}a_3\partial_7-\frac{1}{2}a_4\partial_8,$$

$$\nabla_{\partial_7}\partial_7=\frac{1}{2}(ab_1-b_5)\partial_1-\frac{1}{1}b_6\partial_2+\frac{1}{2}(bb_3+b_7)\partial_3-\frac{1}{2}b_8\partial_4-\frac{1}{2}b_1\partial_5-\frac{1}{2}b_2\partial_6$$
$$-\frac{1}{2}b_3\partial_7-\frac{1}{2}b_4\partial_8.$$

şeklindedir.

G, twin para-Norden metriğinin kovaryant türevi ∇G'nin bileşenleri,

$$\nabla_7 G_{15} = -\frac{1}{2}b_1, \quad \nabla_5 G_{17} = -\frac{1}{2}a_1, \quad \nabla_7 G_{25} = -\frac{1}{2}b_2, \quad \nabla_5 G_{27} = -\frac{1}{2}a_2,$$

$$\nabla_7 G_{35} = -\frac{1}{2}b_3, \quad \nabla_5 G_{37} = -\frac{1}{2}a_3, \quad \nabla_7 G_{45} = -\frac{1}{2}b_4, \quad \nabla_5 G_{47} = -\frac{1}{2}a_4,$$

$$\nabla_5 G_{55} = \frac{1}{2}aa_3 - \frac{1}{2}ba_3 + a_7, \quad \nabla_7 G_{56} = -\frac{1}{2}b_6, \quad \nabla_5 G_{57} = -\frac{1}{2}aa_1 - \frac{1}{2}a_5 - \frac{1}{2}b_5,$$

$$\nabla_7 G_{57} = -\frac{1}{2}a_7 + \frac{1}{2}bb_3 + \frac{1}{2}b_7, \quad \nabla_7 G_{55} = -b_5, \quad \nabla_7 G_{58} = -\frac{1}{2}b_8, \quad \nabla_5 G_{67} = -\frac{1}{2}a_6,$$

$$\nabla_5 G_{77} = -a_7, \quad \nabla_7 G_{77} = -\frac{1}{2}ab_1 + \frac{1}{2}bb_1 + b_5, \quad \nabla_5 G_{78} = -\frac{1}{2}a_8.$$

Teorem 4.9.3: (M_8, φ, g) üçlüsünün quasi-para-Kähler-Norden olması için gerek ve yeter şart;

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = a_8 = 0,$$

$$b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = b_6 = b_7 = b_8 = 0.$$

kısmi diferensiyel denklemlerinin sağlanmasıdır.

4.10. İzotropik Para-Kähler-Norden Metrikler

Vektör uzayındaki iç çarpım, tensör uzayındaki iç çarpıma genişlettirilebilir. Ayrıca eğer t_1 ve t_2, $t_1{}^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}$ ve $t_2{}^{k_1 \ldots k_r}_{l_1 \ldots l_s}$ bileşenlerine sahip (r, s) tipli tensörler ise,

$$g(t_1, t_2) = g_{i_1 k_1} \ldots g_{i_r k_r} g^{j_1 l_1} \ldots g^{j_s l_s} t_1{}^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} t_2{}^{k_1 \ldots k_r}_{l_1 \ldots l_s}.$$

Eğer $t_1 = t_2 = \nabla\varphi \epsilon \Im_2^1(M_{2n})$ ise $\nabla\varphi$ nin kare normu $\|\nabla\varphi\|^2$;

$$\|\nabla\varphi\|^2 = g^{ij} g^{kl} g_{ms} (\nabla\varphi)_{ik}^m (\nabla\varphi)_{jl}^s.$$

şeklinde tanımlanır.

$$\|\nabla\varphi\|^2 = 0, \quad \nabla\varphi \neq 0$$

şartını sağlayan para-Norden metriğine sahip hemen hemen parakompleks manifolda izotropik para-Kähler-Norden'dir denir.

Teorem 4.10.1: (M_8, φ, g) para-Norden-Walker manifoldu izotropik para-Kähler-Norden'dir.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu tezde parakompleks yapıya sahip para-Norden-Walker manifoldlarına bir örnek verilmiştir. Verilen örnekteki φ yapısının;

$$\varphi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2(b-a) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2(a-b) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde olduğu ifade edilmiştir.

φ yapısının integrallenebilme şartı araştırılmış ve bu şartın,

$$a_1 - b_1 = 0, a_2 - b_2 = 0, a_3 - b_3 = 0, a_4 - b_4 = 0, a_6 - b_6 = 0, a_8 - b_8 = 0$$

kısmi diferensiyel denklemlerinin sağlanması olduğu görülmüştür.

İkinci olarak (M_8, φ, g) para-Norden manifoldunun birleşmeli para-Norden metriğinin Walker olmadığı görülmüştür.

(M_8, φ, g) üçlüsünün para-Kähler-Norden-Walker olması için gerek ve yeter şartın;

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_6 = a_7 = a_8 = 0,$$

$$b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = b_6 = b_8 = 0.$$

kısmi diferensiyel denklemlerinin sağlanması olduğu görülüp, (M_8, φ, g) manifoldunun Walker metriğinin B matrisinin,

$$B = \begin{bmatrix} a(x^5) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b(x^7) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

bileşenlerine sahip olması durumunda para-Kähler-Norden-Walker olduğu sonucuna varılmıştır.

Ayrıca (M_8, φ, g) para-Norden-Walker manifoldunun quasi-para-Kähler-Norden olması için gerek ve yeter şart incelenmiş ve bu şartın,

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = a_8 = 0,$$
$$b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = b_6 = b_7 = b_8 = 0.$$

olduğu görülmüştür.

Son olarak (M_8, φ, g) para-Norden-Walker manifoldunun izotropik para-Kähler-Norden olduğu sonucuna varılmıştır.

KAYNAKLAR

Bishop R.L. and Goldberg S.I., 1968. Tensor Analysis on Manifolds. The Mcmillan Company, New York, p.19-135.

Chaichi M., Garcia-Rio E. and Matsushita Y., Curvature Properties of Four-Dimensional Walker Metrics. | Class. Quantum. Grav, 22 (2005), No. 3, 559-577.

Davidov J., Díaz-Ramos J.C., García-Río E., Matsushita Y., Muškarov O., Vázquez Lorenzo R., Almost Kähler Walker 4-manifolds, Journal of Geometry and Physics 57 (2007) 1075-1088.

Davidov J., Díaz-Ramos J.C., García-Río E., Matsushita Y., Muškarov O., Vázquez-Lorenzo R., Hermitian-Walker 4-manifolds, Journal of Geometry and Physics 58 (2008) 307-323.

Iscan M. and Salimov A.A., On Kähler-Norden manifolds, Proceedings of the Indian Academy of Sciences-Mathematical Sciences 119 (1) (2009) 71-80.

Kobayashi S., and Nomızu K., 1963. Foundations of Differential Geometry. Interscience Publishers.

Matsushita Y., Four-dimensional Walker metrics and symplectic structure, Journal of Geometry and Physics 52 (2004) 89-99.

Norden A. P., On a certain class of four-dimensional A-spaces, Iz. VUZ no.4 (1960) 145-157.

O'Neill, B., 1983. Semi Riemann Geometry. Academic Pres, 468, Newyork, London.

Salimov A.A., and Mağden A., 208. Diferensiyel Geometriye Giriş. AtatürkÜniversitesi.

Salimov A. A. and Iscan M., Some properties of Norden–Walker metrics, Kodai Math. J. 33(2) (2010) 283–293.

Salimov A. A., Iscan M. and Etayo F., 2007. Paraholomorphic B-manifold and its properties. Topology and its Applications, 154 (2007), 925-933.

Walker A.G., Canonical form for a Rimannian space with a paralel field of null planes, Quart. J. Math. Oxford, 1 (2) (1950) 69-79.

Yano K., 1965. Differential Geometry on Complex and Almost Complex Spaces, Pergamon Press, N.Y..

Yano K. and Kon M., 1984. Structures on manifolds, Series in Pure Mathematics, vol. 3, World Scientific Publishing Co., Singapore.

ÖZGEÇMİŞ

1988 yılında Erzurum'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Erzurum'da tamamladı. 2006 yılında girdiği Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik bölümünden 2010 yılında mezun oldu. Aynı yıl Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsüne bağlı olarak yüksek lisans öğrenimine başlamıştır ve halen yüksek lisans eğitimine devam etmektedir.