PARALEL YÜZEYLER VE EĞRİLER

Sezai KIZILTUĞ

Doktora Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Doç. Dr. Ömer TARAKCI
2013

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

PARALEL YÜZEYLER VE EĞRİLER

Sezai KIZILTUĞ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ERZURUM
2013

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAY FORMU

PARALEL YÜZEYLER VE EĞRİLER

Doç. Dr. Ömer TARAKCI danışmanlığında, Sezai KIZILTUĞ tarafından hazırlanan bu çalışma 29/03/2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora tezi olarak **oybirliği** ile kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Yusuf YAYLI :

Üye : Prof. Dr. Abdullah MAĞDEN :

Üye : Doç Dr. Abdullah KAPLAN :

Üye : Doç. Dr. Aydın GEZER :

Üye : Doç. Dr. Ömer TARAKÇI :

Yukarıdaki sonucu onaylıyorum

Prof. Dr. İhsan **EFEOĞLU**
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Doktora Tezi

PARALEL YÜZEYLER VE EĞRİLER

Sezai KIZILTUĞ

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ömer TARAKCI

Bu tez dört kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda paralel yüzeyler ve Darboux çatısı ile ilgili geçmişten günümüze yapılmış bazı bilgiler verildi. İkinci kısımda hem Öklid hem de Minkowski uzayında bazı temel tanım ve kavramlar verildi. Üçüncü kısımda ise hem Öklid hem de Minkowski uzayda paralel yüzey tanımından ve yüzey üzerindeki bir eğrinin Darboux çatısından bahsedildi. Son kısımda ise yine hem Öklid hem de Minkowski uzayda yüzey üzerindeki bir eğrinin paralel yüzey üzerindeki görüntülerini elde edip, paralel yüzey üzerindeki bu eğrinin eğrilikleri hesaplanarak, yüzey üzerindeki eğrinin eğrilikleri ile paralel yüzey üzerindeki eğrinin eğrilikleri arasındaki ilişkiler incelendi. Daha sonra ise, Bertrand D-eğri çifti, Manheim D-eğri çifti ve İnvolute-Evolute D-eğri çifti tanımları verilerek bu eğri çiftlerinin paralel yüzey üzerindeki görüntüleri elde edilerek, görüntüleri ile kendileri arasındaki ilişkiler incelendi.

2013, 96 sayfa

Anahtar Kelimeler: Paralel Yüzey, Bertrand D-eğri çifti, Manheim D-eğri çifti, involüt-evolüt D-eğri çifti, Darboux çatısı.

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

PARALLEL SURFACES AND CURVES

Sezai KIZILTUĞ

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ömer TARAKCI

This thesis consists of four parts. In first part some informations about parallel surface and Darbox frame, which made from past to present were given. In second part, some basic definition and concepts were given on both Euclidean and Minkowski spaces. In third part, on both Euclidean and Minkowski space, definition of parallel surfaces and Darbox frame of a curve on a surface were explained. In conclusion, relations between curvatures of curve on the surface and curvatures of curve on parallel surface were examined on both Euclidean and Minkowski space, by getting images on a parallel surface of a curve on a surface on space, by calculating curvatures of this curve on parallel surface. Then, relations between images and their were examined. By giving definitions of Bertrand D-partner curve, Manheim D-partner curve and involute-evolute D-partner curve and by getting the images of these curve pairs on the parallel surface.

2013, 96 pages

Keywords: Parallel Surface, Bertrand D-curve mate, Manheim D- curve mate, involute-evolute D- curve mate, Darboux frame.

TEŞEKKÜR

Doktora tezi olarak sunduğum bu çalışma, Atatürk üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde yapılmıştır. Doktora danışmanlığımı üstlenen özenle çalışmalarımı takip eden, bilgi ve tecrübesiyle destek veren ve her konuda yardımlarını esirgemeyen saygıdeğer hocam sayın Doç. Dr. Ömer TARAKCI'ya saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, bu noktada olmamda önemli katkıları olan değerli hocam sayın Prof. Dr. Yusuf YAYLI'ya saygı ve minnet duyar, teşekkür ederim.

Çalışmalarım sırasında gerekli yardımlarını esirgemeyen değerli hocalarım Sayın Prof. Dr. Abdullah MAĞDEN, sayın Doç. Dr. Aydın GEZER, sayın Yrd. Doç. Dr. Mehmet ÖNDER'e çok teşekkür ederim. Ayrıca bu tezin şekillenmesinde büyük katkısı olan sayın Arş. Gör. Semra KAYA'ya da teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca tez bitene kadar bana büyük bir sabırla katlanan aileme, özellikle de anne ve babama sevgi, saygı ve şükranlarımı sunarım.

Sezai KIZILTUĞ
Mart 2013

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

κ	Eğrilik
k_g	Geodezik eğrilik
k_n	Normal eğrilik
τ	Torsion
t_r	Geodezik burulma
$<,>_L$	Lorentz metriği
$<,>$	Simetrik bilineer form

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Bir yüzey üzerindeki eğrinin Darboux çatısı Fransız matematikçi Jean Gaston Darboux tarafından tanımlandı. Daha sonra bu yüzey üzerindeki α eğrisinin geodezik eğriliği k_g, normal eğriliği k_n ve geodezik burulması t_r eğrilikleri ile bu çatı arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Uğurlu ve Kocayiğit timelike yüzey üzerindeki eğrilerin Darboux çatısını çalıştılar. Ayrıca, Uğurlu ve Topal, timelike yüzey üzerindeki eğrilerin Darboux ani dönme vektörleri arasındaki ilişkileri gösterdiler.

Son yıllarda ise özel yüzeyler üzerindeki eğriler incelendi. Yaylı ve Doğan, tubular yüzey üzerindeki eğrileri incelediler. Yine Yaylı ve Özkaldı, sabit açılı yüzey üzerindeki eğrileri incelediler ve yeni karakterizasyonlar elde ettiler.

Paralel yüzeyler de geçmişten günümüze birçok matematikçinin ilgi odağı olan yüzeylerden biri olmuştur. Hacısalihoğlu ve Tarakcı sabit sırt uzaklıklı yüzeyleri tanımladılar. Paralel yüzeyin sabit sırt uzaklıklı bir yüzeyin özel hali olduğunu gösterdiler.

Yine Hacısalihoğlu ve Yaşar, Lorentz uzayında bir hiperyüzeyin paralel yüzeyini çalıştılar ve yeni karakterizasyonlar elde ettiler. Son yıllarda Çöken, Çiftçi ve Ekici timelike regle yüzeylerin paralel yüzeyleri üzerine çalıştılar. Kazaz ve Oral hem Öklid hem de Minkowski uzayda yüzey üzerindeki Bertrand D-eğrilerini tanımladılar ve Öklid ve Minkowski uzayında yönlendirilmiş iki yüzey üzerine yatan Bertrand D-eğrilerini karakterize eden teoremler verdiler.

Dae Won Yoon ise Öklid uzayda Paralel Weingarten yüzeylerini çalıştı ve bir yüzeyin Weingarten yüzeyi olması için gerek ve yeter şartın bu yüzeyin paralel yüzeyinin de Weingarten yüzey olması gerektiğini gösterdi. Bizim amacımız ise bir yüzey üzerindeki eğriyi bu yüzeyin paralel yüzeyi üzerindeki görüntüsünü elde edip, paralel yüzey üzerindeki bu eğrinin karakteristik özelliklerini araştırmaktır.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Öklid 3-Uzayında Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1: Bir reel Afin uzay A ve A ile birleşen vektör uzayı da V olsun. V de

$$<,>: V \times V \to R$$
$$(\vec{a},\vec{b}) \to \langle \vec{a},\vec{b} \rangle = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i$$

şeklinde bir Öklid iç çarpımı tanımlanırsa, A Afin uzayına 3-boyutlu Öklid uzayı denir ve E^3 ile gösterilir (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 2.1.2: Bir $\vec{a}$ vektörünün kendisiyle iç çarpımının kareköküne bu vektörün normu denir. Yani,

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\langle \vec{a},\vec{a} \rangle}\ .$$

Tanım 2.1.3: E^3 vektör uzayından alınan iki vektör $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ olsun. Aşağıdaki gibi tanımlanan ifadeye $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerinin vektörel çarpımı denir.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}\ ,\ \left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\| = \|\vec{a}\|\left\|\vec{b}\right\|\sin\theta$$

Tanım 2.1.4: I , R nin açık bir aralığı olmak üzere, differensiyellenebilir bir $\alpha : I \to E^n$ fonksiyonuna E^n de bir eğri denir (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 2.1.5: M eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilmiş olsun. Eğer $\forall s \in I$ için $\|\alpha'(s)\| = 1$ ise M eğrisi, (I,α) ya göre birim hızlı eğridir denir.

Tanım 2.1.6: Her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı, yani $\forall s \in I$ için $\alpha'(s) \neq 0$ olan eğriye regüler eğri denir (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 2.1.7: Bir α eğrisinin T teğet vektörü sabit bir k doğrultusuyla sabit bir açı yapıyorsa, bu α eğrisine genel helis denir.

Tanım 2.1.8: Bir α eğrisinin N asli normal vektörü sabit bir k doğrultusuyla sabit bir açı yapıyorsa, bu α eğrisine slant helis denir (Izumiya ve Takeuchi 2002).

Tanım 2.1.9: α bir uzay eğrisi olsun. α eğrisi bir uzay eğrisi olduğundan her bir noktasında; T teğet, N asli normal ve B binormal vektörlerden oluşan bir $\{T, N, B\}$ ortonormal koordinat sisteminin var olduğunu biliyoruz. Bu $\{T, N, B\}$ üçlüsüne hareketli üçlü ya da Frenet Çatısı denir (Hacısalihoğlu 1983).

Tanım 2.1.10: T teğet vektör olmak üzere bir eğri boyunca ilerlediğimiz zaman teğetin değişim oranını ifade eden $\vec{k} = \dfrac{dT}{ds} = \kappa N$ vektörüne eğrilik vektörü denir. Ve κ çarpanına eğrinin birinci eğriliği veya eğrinin eğriliği adı verilir.

Tanım 2.1.11: $\alpha = \alpha(s)$ bir eğri ve B eğrinin bir noktasındaki binormal vektör olmak üzere $\dfrac{dB}{ds} = -\tau N$ eşitliğini sağlayan τ fonksiyonuna α eğrisinin ikinci eğriliği veya burulması denir (Struik 1988).

κ eğrilik, τ burulma olmak üzere, Frenet türev formülleri şu şekilde verilir:

$$\begin{aligned} T' &= \kappa N \\ N' &= -\kappa T + \tau B \\ B' &= -\tau N \end{aligned} \tag{2.1}$$

2.2. Minkowski 3-Uzayında Temel Kavramlar

Tanım 2.2.1: R^3 standart reel vektör uzayı üzerinde

$$\langle , \rangle_L : R^3 \times R^3 \to R$$

$$(\vec{a},\vec{b}) \to \langle \vec{a},\vec{b} \rangle_L = a_1b_1 + a_2b_2 - a_3b_3$$

Lorentz iç çarpımı alınırsa, R^3 afin uzayı, Minkowski 3-uzayı olarak adlandırılır ve E_1^3 ile gösterilir (O'Neill 1983).

Tanım 2.2.2: E_1^3 Minkowski 3-uzayında herhangi bir vektör $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ olmak üzere;

(1) $\langle \vec{a},\vec{a} \rangle_L > 0$ veya $\vec{a} = 0$ ise $\vec{a}$ ya spacelike vektör,

(2) $\langle \vec{a},\vec{a} \rangle_L < 0$ ise $\vec{a}$ timelike vektör,

(3) $\langle \vec{a},\vec{a} \rangle_L = 0$ veya $\vec{a} \neq 0$ ise $\vec{a}$ lightlike *(veya* null*)* vektör denir.

Tanım 2.2.3: E_1^3 Minkowski 3-uzayında herhangi bir vektör $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ olmak üzere;

(1) $\langle \vec{a},\vec{a} \rangle_L = 1$ ise $\vec{a}$ ya birim hızlı spacelike vektör,

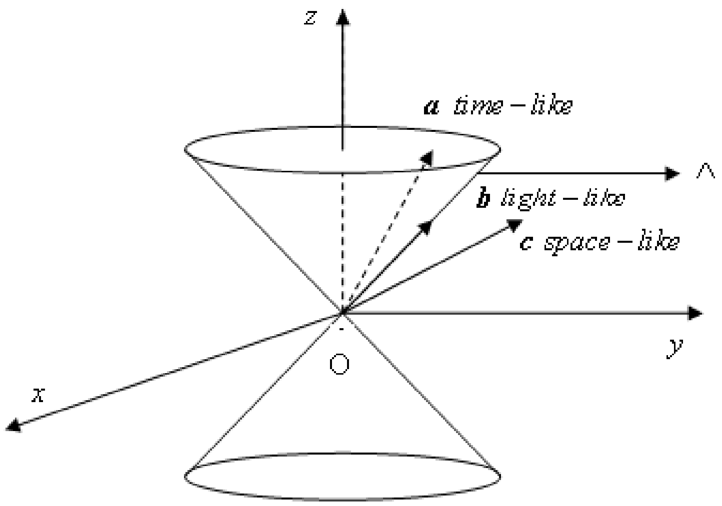
(2) $\langle \vec{a},\vec{a} \rangle_L = -1$ ise $\vec{a}$ ya birim hızlı timelike vektör denir.

Tanım 2.2.4: E_1^3 Minkowski 3-uzayının null vektörlerinin tamamının oluşturduğu kümeye null koni denir ve

$$\Lambda = \left\{ a \in E_1^3 : \langle a, a \rangle = 0, a \neq 0 \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

E_1^3 uzayındaki timelike vektörler Λ nın içinde, lightlike (veya null) vektörler Λ nın üzerinde ve spacelike vektörlerde Λ nın dışında bulunurlar.



Şekil 2.1. E_1^3 uzayındaki null koni

Tanım 2.2.5: E_1^3 Minkowski 3-uzayında iki vektör $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ olmak üzere,

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_3b_2-a_2b_3,a_1b_3-a_3b_1,a_1b_2-a_2b_1)$$

vektörüne $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ nin vektörel çarpımı denir (O'Neill 1983).

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j \ ise\\ 0, & i\neq j \ ise\end{cases} \quad \text{ve} \quad e_i=(\delta_{i1},\delta_{i2},\delta_{i3})$$

olmak üzere

$$\vec{a}\times\vec{b}=-\det\begin{bmatrix} e_1 & e_2 & -e_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{bmatrix}$$

ile verilir. Burada,

$$e_1\times e_2=e_3,\ e_2\times e_3=-e_1,\ e_3\times e_1=-e_2.$$

Teorem 2.2.6: E_1^3 Minkowski 3-uzayında üç vektör $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$, $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$ olsun. Bu durumda,

(1) $\left\langle \vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\right\rangle_L=-\det(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$

(2) $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=-\langle\vec{a},\vec{c}\rangle\vec{b}+\langle\vec{b},\vec{c}\rangle\vec{a}$

(3) $\langle\vec{a}\times\vec{b},\vec{a}\rangle_L=0$ ve $\langle\vec{a}\times\vec{b},\vec{b}\rangle=0$

(4) $\langle\vec{a}\times\vec{b},\vec{a}\times\vec{b}\rangle_L=-\langle\vec{a},\vec{a}\rangle\langle\vec{b},\vec{b}\rangle+\left(\langle\vec{a},\vec{b}\rangle\right)^2$

dir (Kühnel 2005).

Tanım 2.2.7: $\vec{a}$ ve $\vec{b}$, E_1^3 uzayında timelike vektör olsun. Bu takdirde

$$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle_L=-\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cosh\theta$$

olacak şekilde bir tek $\theta\geq 0$ reel sayısı vardır. Bu $\theta\geq 0$ reel sayısına $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri arasındaki hiperbolik açı denir (Ugurlu, Çalıskan 1995).

Tanım 2.2.8: E_1^3 uzayının bir timelike alt vektör uzayını geren iki spacelike vektör $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ olsun. Bu takdirde,

$$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle_L=\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cosh\theta$$

olacak şekilde bir tek $\theta\geq 0$ reel sayısı vardır. Bu $\theta\geq 0$ reel sayısına $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri arasındaki merkez açı denir.

Tanım 2.2.9: E_1^3 uzayının bir spacelike alt vektör uzayını geren iki spacelike vektör $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ olsun. Bu takdirde,

$$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle_L=\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta$$

olacak şekilde bir tek $\theta\geq 0$ reel sayısı vardır. Bu $0\leq\theta<2\pi$ reel sayısına $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri arasındaki spacelike açı denir.

Tanım 2.2.10: E_1^3 uzayında $\vec{a}$ bir spacelike vektör ve $\vec{b}$ bir timelike vektör olsun. Bu takdirde,

$$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle_L=\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\sinh\theta$$

olacak şekilde bir tek $\theta \geq 0$ reel sayısı vardır. Bu $\theta \geq 0$ reel sayısına, $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri arasındaki Lorentz timelike açı denir.

Tanım 2.2.11: I , R nin bir açık aralığı olmak üzere $\alpha : I \to E_1^3$ şeklinde diferensiyellenebilir bir dönüşüm ise α ya E_1^3 uzayında bir eğri denir.

Tanım 2.2.12: E_1^3 uzayında birim hızlı $\alpha : I \to E_1^3$ eğrisi için $\forall s \in I$ için $\alpha'(s) = T(s)$ eşitliğiyle belirli $T(s)$ vektörüne α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki birim teğet vektörü denir.

Tanım 2.2.13: E_1^3 uzayında birim hızlı $\alpha : I \to E_1^3$ eğrisi verilsin. α eğrisinin birim teğet vektörü T olmak üzere:

(1) T vektörü spacelike ise α eğrisine spacelike eğri,

(2) T vektörü timelike ise α eğrisine timelike eğri,

(3) T vektörü lightlike ise α eğrisine lightlike veya null eğri

denir (Lopez 2008).

Tanım 2.2.14: $M : U \to E_1^3$ şeklinde tanımlanan yüzeyin,

(1) Birinci esas formu pozitif tanımlı ise bu yüzeye space-like,

(2) Birinci esas formu indefinit ise bu yüzeye time-like,

(3) Birinci esas formunun rankı 1 ise bu yüzeye null yüzey denir (Kühnel 2005).

2.2.1. Minkowski 3-uzayında eğrilik, burulma ve frenet formülleri

Bu bölümde E_1^3 uzayında birim hızlı bir eğrinin eğrilik ve burulma fonksiyonları ile Frenet formüllerini vereceğiz.

(1) α eğrisi timelike ise:

$\langle T'(s), T(s)\rangle = 0$ olduğundan sıfırdan farklı $T'(s)$ vektörü spacelike bir vektördür. α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğriliği $\kappa(s) = \|T'(s)\|$ ile tanımlanır.

$$N(s) = \frac{T'(s)}{\kappa(s)}$$

eşitliğiyle belirli $N(s)$ vektörüne eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki asli normal vektörü denir.

$$B(s) = T(s) \times N(s)$$

eşitliğiyle belirli $B(s)$ vektörüne eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki asli binormal vektörü denir. Burada $B(s)$ vektörü spacelike vektördür. $T(s)$, $N(s)$, $B(s)$ vektörlerine eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet vektörleri denir. $\{T(s), N(s), B(s)\}$ kümesine eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet çatısı denir. α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki burulması

$$\tau(s) = \langle N'(s), B(s)\rangle$$

olarak tanımlanır. Bu takdirde α eğrisinin Frenet formülleri

$$\begin{aligned} T' &= \kappa N \\ N' &= \kappa T + \tau B \\ B' &= -\tau N \end{aligned} \tag{2.2}$$

(2) α eğrisi spacelike ise:

Bu takdirde $T'(s)$ vektörünün causal karakterine bağlı olarak üç durum vardır:

(a) $T'(s)$ vektörü spacelike vektör olsun. Bu takdirde $\kappa(s) = \|T'(s)\|$, $N(s) = \dfrac{T'(s)}{\kappa(s)}$ ve $B(s) = T(s) \times N(s)$ yazılır. Eğrinin Frenet formülleri

$$\begin{aligned} T' &= \kappa N \\ N' &= -\kappa T + \tau B \\ B' &= \tau N \end{aligned} \tag{2.3}$$

elde edilir. Burada eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki burulması

$$\tau(s) = \langle -N'(s), B(s)\rangle$$

dir.

(b) $T'(s)$ vektörü timelike vektör olsun. Eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki normal vektörü $N(s)=\dfrac{T'(s)}{\kappa(s)}$ ve $\kappa(s)=\sqrt{-\langle T'(s),T(s)\rangle}$ dir. $B(s)=T(s)\times N(s)$ binormal vektörü spacelike olur. Bu takdirde Frenet formülleri

$$\begin{aligned} T' &= \kappa N \\ N' &= \kappa T + \tau B \\ B' &= \tau N \end{aligned} \tag{2.4}$$

olarak elde edilir. Burada eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki burulması

$$\tau(s)=\langle N'(s),B(s)\rangle$$

dir.

(c) $T'(s)$ vektörü lightlike vektör olsun. $T(s)$ vektörü ile lineer bağımsız olan normal vektörü $N(s)=T'(s)$ olarak tanımlayalım. $\langle N(s),B(s)\rangle=1$ olmak üzere $T(s)$ vektörüne dik olacak şekilde bir tek lightlike $B(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki binormal vektörü denir. Bu takdirde Frenet formülleri

$$\begin{aligned} T' &= N \\ N' &= \tau N \\ B' &= -1-\tau B \end{aligned} \tag{2.5}$$

olarak elde edilir. $\tau(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki burulması denir. Bu durum için eğrinin eğriliği tanımsızdır.

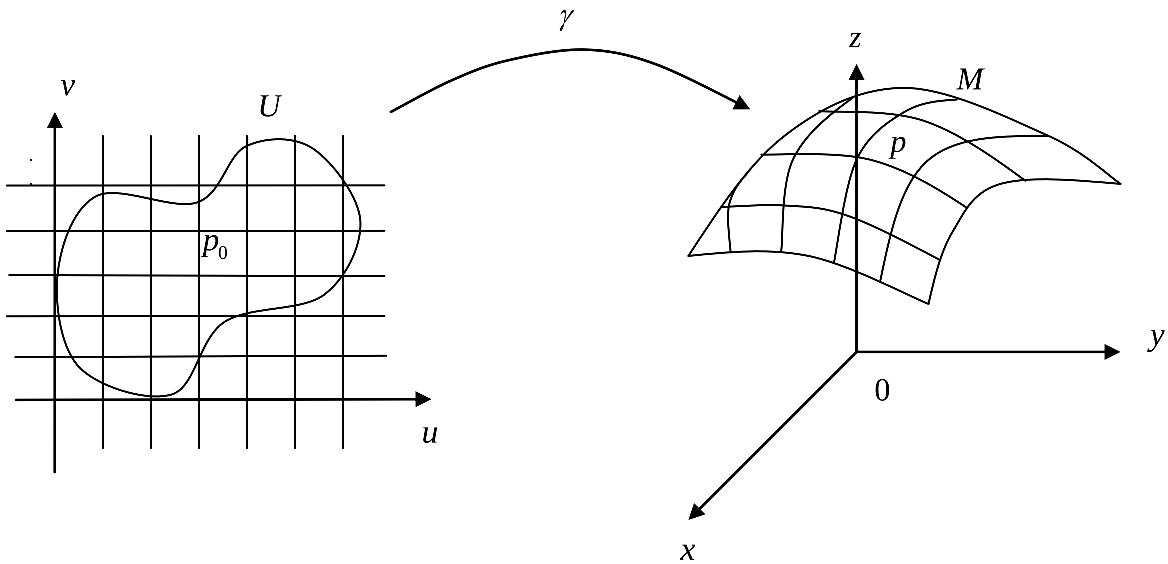
3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Öklid Uzayında Eğri-Yüzey İkilisinin Eğrilikleri:

Tanım 3.1.1: U, E^2 düzleminin bağlantılı bir açık alt kümesi olsun. U ile homeomorf olan E^3 Öklid uzayının alt kümesine sade yüzey denir (Tarakcı 2002).

Tanım 3.1.2: M yüzeyi verilmiş olsun. E^2 düzleminin $U \subset E^2$ bölgesinin homeomorf $\gamma : U \to M$ dönüşümünde yüzeyin $p \in S$ noktasının, E^2 düzleminin $p_0 \in E^2$ noktasına dönüştüğü açıktır. p_0 noktasının kartezyen koordinatlarını u ve v ile gösterelim. u ve v ye yüzeyin p noktasının eğrisel koordinatları denir. γ ya ise M yüzeyinin parametrizasyonu denir (Salimov ve Mağden 2008).

Süreklilığe göre, U bölgesindeki her bir doğruya, yüzeyde herhangi bir eğri karşılık gelecektir. $u = sbt,\ v = sbt$ doğrularına, yüzeyde karşılık gelen eğrilere yüzeyin koordinat eğrileri denir. $u = sbt,\ v = sbt$ aileleri yüzey üzerinde koordinat şebekesi adı verilen bir sistem oluşturur.



Şekil 3.1. M yüzeyi üzerindeki koordinat şebekesi

Tanım 3.1.3: M_1 ve M_2, 3-boyutlu Öklid uzayında iki yüzey ve M_1 in birim normal vektör alanı Z olsun. r sabit bir sayı olmak üzere,

$$f : M_1 \longrightarrow M_2, \qquad f(P) = P + rZ_P$$

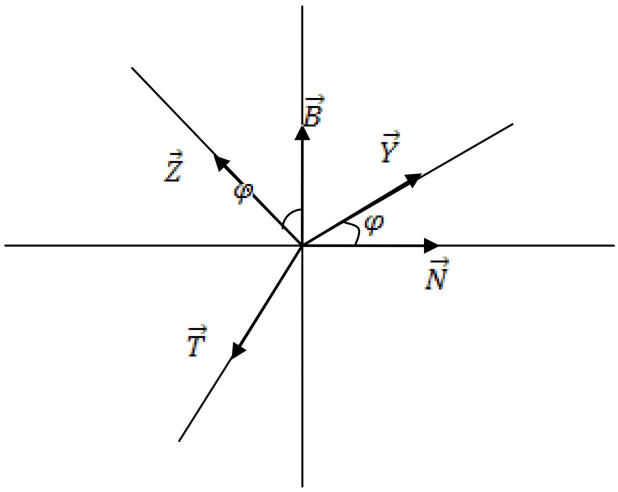
olarak tanımlanan bir f fonksiyonu varsa M_1 ve M_2 yüzeylerine *paralel yüzeyler* denir (Hacısalihoğlu 1983). M yüzeyi verildiğinde,

$$M_r = \{P + rZ_P : \; P \in M, \;\; r \in \mathbb{R} \;\; ve \; r = sbt\}$$

eşitliği ile verilen M_r cümlesi, M ye paralel bir yüzeydir (Craig 1883).

Tanım 3.1.4: M 3 boyutlu Öklid uzayında bir yüzey olsun. M yüzeyinin asli normal vektörü sabit bir doğrultuyla sabit bir açı yapıyorsa bu M yüzeyine sabit açılı yüzey denir (Özkaldı ve Yaylı 2012).

Tanım 3.1.5: Diferensiyellenebilir bir M yüzeyi üzerinde bir α eğrisi verilsin. α eğrisi M yüzeyi üzerinde olduğundan, her bir noktasında Darboux çatısı olarak isimlendirilen ikinci bir çatı mevcuttur. Darboux çatısı, T teğet, Y geodezik normal ve Z yüzey normali olmak üzere $\{T, Y, Z\}$ ortonormal koordinat sistemi olarak tanımlanır. Burada birinci vektör, eğrinin bir P noktasında yüzeye ve eğriye teğet olan T birim teğet vektör alanıdır. Z, yüzeyin P noktasındaki birim normal vektör alanı ve çatının ikinci vektörü olan birim geodezik normal vektör alanı da $Y = Z \times T$ eşitliği ile tanımlanır. T vektörü, Frenet ve Darboux çatılarının her ikisinde de ortak olduğundan, diğer N, B, Y ve Z vektörleri aynı düzlemde bulunurlar (Şekil 3.2).



Şekil 3.2. N , B, Y ve Z vektörleri aynı düzlemde bulunurlar

Frenet çatısı, T etrafında pozitif yönde $\varphi = \varphi(s)$ açılık bir dönmeye tabi tutulursa Darboux çatısı elde edilir. Bu ise, Y ile N ve Z ile B arasındaki φ açısının

$$\begin{bmatrix} T \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

matrisi yardımıyla

$$Y = \cos\varphi N + \sin\varphi B, \; Z = -\sin\varphi N + \cos\varphi B \tag{3.2}$$

şeklinde yazılabilir. Yani, (3.2) eşitlikleri

$$\begin{bmatrix} Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ B \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

matris formunda yazılabilir. (3.3) eşitliğindeki

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

matrisi düzlemin dönme matrisi, yani ortogonal matristir. O halde Frenet çatısının elemanları olan N ve B vektörlerini elde etmek istersek, (3.2) eşitliklerinden N ve B vektörlerini bulmamız gerekir. Gerekli işlemler yapılırsa;

$$\begin{bmatrix} N \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ Z \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

$$N = \cos\varphi Y - \sin\varphi Z, \quad B = \sin\varphi Y + \cos\varphi Z$$

olur. Şimdi (2.1) eşitliği ile verilen Frenet türev formülleri yardımıyla, eğrinin yay parametresine göre Darboux türev formüllerini hesaplayalım:

$$T' = \kappa N$$
$$T' = \kappa(\cos\varphi Y - \sin\varphi Z) \tag{3.6}$$
$$T' = \kappa\cos\varphi Y - \kappa\sin\varphi Z$$

yazılabilir. Aynı şekilde

$$Y = \cos\varphi N + \sin\varphi B$$
$$Y' = -\sin\varphi\frac{d\varphi}{ds}N + \cos\varphi N' + \cos\varphi\frac{d\varphi}{ds}B + \sin\varphi B'$$
$$Y' = -\sin\varphi\frac{d\varphi}{ds}N + \cos\varphi(-\kappa T + \tau B) + \cos\varphi\frac{d\varphi}{ds}B + \sin\varphi(-\tau N)$$
$$Y' = (-\kappa\cos\varphi)T + (-\sin\varphi\frac{d\varphi}{ds} - \sin\varphi\tau)N + (\cos\varphi\tau + \cos\varphi\frac{d\varphi}{ds})B$$
$$Y' = (-\kappa\cos\varphi)T + (-\sin\varphi\frac{d\varphi}{ds} - \sin\varphi\tau)(\cos\varphi Y - \sin\varphi Z)$$
$$+(\cos\varphi\tau + \cos\varphi\frac{d\varphi}{ds})(\sin\varphi Y + \cos\varphi Z)$$

ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$Y' = (-\kappa\cos\varphi)T + (\frac{d\varphi}{ds} + \tau)Z \tag{3.7}$$

eşitliği elde edilir. (3.7) denkleminde

$$k_g = \kappa\cos\varphi\,,\quad t_r = \tau + \frac{d\varphi}{ds} \tag{3.8}$$

sembolleri kullanılır. Benzer şekilde

$$Z = -\sin\varphi N + \cos\varphi B$$
$$Z' = -\cos\varphi\frac{d\varphi}{ds}N - \sin\varphi N' - \sin\varphi\frac{d\varphi}{ds}B + \cos\varphi B'$$
$$Z' = -\cos\varphi\frac{d\varphi}{ds}N - \sin\varphi(-\kappa T + \tau B) - \sin\varphi\frac{d\varphi}{ds}B + \cos\varphi(-\tau N)$$
$$Z' = (\kappa\sin\varphi)T + (-\cos\varphi\frac{d\varphi}{ds} - \cos\varphi\tau)N + (-\sin\varphi\tau - \sin\varphi\frac{d\varphi}{ds})B$$
$$Z' = (\kappa\sin\varphi)T + (-\cos\varphi\frac{d\varphi}{ds} - \cos\varphi\tau)(\cos\varphi Y - \sin\varphi Z)$$
$$+(-\sin\varphi\tau - \sin\varphi\frac{d\varphi}{ds})(\sin\varphi Y + \cos\varphi Z)$$

olarak bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$Z' = \kappa \sin \varphi T - (\frac{d\varphi}{ds} + \tau)Y \tag{3.9}$$

eşitliği elde edilir. (3.9) denkleminde de

$$k_n = \kappa \sin \varphi, \; t_r = \tau + \frac{d\varphi}{ds} \tag{3.10}$$

sembollerini kullanırız. Şimdi, (3.8) ve (3.10) eşitliklerindeki birinci ifadeler (3.6) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$T' = k_g Y - k_n Z \tag{3.11}$$

bulunur. Böylece, Darboux türev formülleri, (3.7), (3.9) ve (3.11) denklemleri birleştirilirse aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\begin{bmatrix} T' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_g & k_n \\ -k_g & 0 & t_r \\ -k_n & -t_r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

Bu matristeki k_g ye geodezik eğrilik, k_n ifadesine normal eğrilik ve t_r ye de geodezik burulma adı verilir.

Tanım 3.1.6: M, E^3 uzayında bir yüzey ve $\alpha : I \to M$ bir eğri olmak üzere M yüzeyinin birim dik vektör alanı Z olsun. α'' vektör alanı, $Z \circ \alpha$ vektör alanının lineer bileşimi ise α eğrisine, M yüzeyi içinde bir geodezik eğri denir.

Tanım 3.1.7: $\alpha : I \to M$ birim hızlı bir eğri olsun.

$$k_g(s) = \langle \alpha''(s), Y \rangle$$

eşitliğiyle belirli $k_g(s)$ sayısına $(M, \alpha(s))$ eğri-yüzey ikilisinin $\alpha(s)$ noktasındaki geodezik eğriliği denir.

Tanım 3.1.8: M, E^3 uzayında bir yüzey ve $\alpha : I \to M$ bir eğri olmak üzere, her $s \in I$ için $\alpha'(s)$ hız vektörü, $\alpha(s)$ noktasında M yüzeyinin bir asimptotik vektörü ise α eğrisine, M yüzeyi içinde bir asimptotik eğri denir.

Tanım 3.1.9: $\alpha : I \to M$ birim hızlı bir eğri olsun.

$$k_n = \langle \alpha''(s), Z \rangle$$

eşitliğiyle belirli $k_n(s)$ sayısına $(M, \alpha(s))$ eğri-yüzey ikilisinin $\alpha(s)$ noktasındaki asimptotik eğriliği denir.

Tanım 3.1.10: M, E^3 uzayında bir yüzey ve $\alpha : I \to M$ bir eğri olsun. Her $s \in I$ için $\alpha'(s)$ hız vektörü, $\alpha(s)$ noktasında M yüzeyinin bir eğrilik vektörü ise α eğrisine, M yüzeyi içinde bir eğrilik çizgisi (veya baş eğri) denir.

Tanım 3.1.11: $\alpha : I \to M$ birim hızlı bir eğri olsun.

$$t_r = -\langle Z', Y \rangle$$

eşitliğiyle belirli $t_r(s)$ sayısına $(M, \alpha(s))$ eğri-yüzey ikilisinin $\alpha(s)$ noktasındaki geodezik burulması denir.

3.2. Minkowski Uzayında Eğri-Yüzey İkilisinin Eğrilikleri:

Bir $M = M(u,v)$ spacelike yüzeyini göz önüne alalım. $M(u,v)$ üzerindeki bir α spacelike eğrisinin her noktasında $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı vardır. Frenet çatısından başka, α eğrisi $M(u,v)$ üzerinde olduğundan, ikinci bir çatıdan bahsetmek mümkündür. α eğrisinin bir P noktasındaki birim teğet vektörünü T ve yüzeyin P deki birim normal vektörünü Z ile gösterelim. Bu durumda

$$T \times Y = Z$$
$$Y \times Z = -T$$
$$Z \times T = -Y$$

ile tanımlanan Y spacelike vektörünü alırsak $\{T, Y, Z\}$ gibi yeni bir çatı elde ederiz. Bu çatıyı, Frenet çatısıyla ile karşılaştırmak için B ve Z timelike vektörleri arasındaki hiperbolik açıyı θ ile gösterelim. Bu durumda

$$Y = \cosh\theta N + \sinh\theta B, \quad Z = \sinh\theta N + \cosh\theta B \tag{3.13}$$

yazılabilir. T, Y, Z vektörlerinin, α eğrisinin s yayına göre türevleri bu vektörler cinsinden ifade edilerek, Frenet formüllerine benzer formüller bulunur.

(3.13) denklemlerinde Y vektörü $\cosh\theta$ ile Z vektörü $\sinh\theta$ ile çarpıp ilkinden ikincisi çıkartılırsa

$$(\cosh^2\theta - \sinh^2\theta)N = \cosh\theta Y - \sinh\theta Z$$

bulunur.

Bu ifade $\frac{dT}{ds} = \kappa N$ denkleminde yerine yazılırsa

$$\frac{dT}{ds} = \kappa(\cosh\theta Y - \sinh\theta Z)$$

elde edilir. (3.13) denklemindeki Y ve Z nin türevleri alınır ve P noktasındaki eğrilik yarıçapı r ve burulma yarıçapı t ise

$$\frac{d}{ds}\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/r & 0 \\ -1/r & 0 & 1/t \\ 0 & 1/t & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

eşitlikleri göz önüne alınırsa,

$$\frac{dY}{ds} = \cosh\theta\frac{dN}{ds} + \sinh\theta\frac{d\theta}{ds}N + \sinh\theta\frac{dB}{ds} + \cosh\theta\frac{d\theta}{ds}B$$

$$= \cosh\theta(-\kappa T + \tau B) + \sinh\theta\frac{d\theta}{ds}N + \tau\sinh\theta N + \cosh\theta\frac{d\theta}{ds}B$$

$$= -\kappa\cosh\theta T + \left(\tau + \frac{d\theta}{ds}\right)(\sinh\theta N + \cosh\theta B)$$

$$\frac{dY}{ds} = -\kappa\cosh\theta T + \left(\tau + \frac{d\theta}{ds}\right)Z$$

$$\frac{dZ}{ds} = \sinh\theta\frac{dN}{ds} + \cosh\theta\frac{d\theta}{ds}N + \cosh\theta\frac{dB}{ds} + \sinh\theta\frac{d\theta}{ds}B$$

$$= \sinh\theta(-\kappa T + \tau B) + \cosh\theta\frac{d\theta}{ds}N + \tau\cosh\theta N + \sinh\theta\frac{d\theta}{ds}B$$

$$= -\kappa\sinh\theta T + \left(\tau + \frac{d\theta}{ds}\right)(\cosh\theta N + \sinh\theta B)$$

$$\frac{dZ}{ds} = -\kappa\sinh\theta T + \left(\tau + \frac{d\theta}{ds}\right)Y$$

bulunur. Buna göre Darboux çatısının türev formülleri

$$\frac{dT}{ds} = \kappa \cosh \theta Y - \kappa \sinh \theta Z$$
$$\frac{dY}{ds} = -\kappa \cosh \theta T + \left(\tau + \frac{d\theta}{ds} \right) Z$$
$$\frac{dZ}{ds} = -\kappa \sinh \theta T + \left(\tau + \frac{d\theta}{ds} \right) Y$$

biçiminde verilir. Bu formüllerde

$$\kappa \cosh \theta = \frac{\cosh \theta}{r} = \frac{1}{r_g} = k_g$$
$$-\kappa \sinh \theta = \frac{-\sinh \theta}{r} = \frac{1}{r_n} = k_n$$
$$\tau + \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{t} + \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\tau_r} = t_r$$

denirse, spacelike yüzey üzerindeki spacelike eğrinin Darboux türev formülleri

$$\begin{bmatrix} T' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_g & k_n \\ -k_g & 0 & t_r \\ k_n & t_r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

biçimindedir (Kocayigit 2004). Burada; k_g, k_n ve τ_r sırasıyla, α eğrisinin geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik torsiyonudur. Ayrıca T, Y ve Z vektörleri arasındaki iç çarpım da aşağıdaki gibidir.

$$\langle T,T \rangle = 1,\ \langle Y,Y \rangle = -1,\ \langle Z,Z \rangle = 1$$
$$\langle T,Y \rangle = \langle T,Z \rangle = \langle Y,Z \rangle = 0$$

Eğer yüzeyimiz bir timelike yüzey ve üzerindeki eğri bir timelike eğri ise Darboux türev denklemleri

$$\begin{bmatrix} T' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_g & k_n \\ k_g & 0 & -t_r \\ k_n & t_r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

ile verilir (Ugurlu ve Çalıskan 1995). Ayrıca, T, Y ve Z vektörleri arasındaki iç çarpım da aşağıdaki gibidir.

$$\langle T,T \rangle = -1,\ \langle Y,Y \rangle = 1,\ \langle Z,Z \rangle = 1$$
$$\langle T,Y \rangle = \langle T,Z \rangle = \langle Y,Z \rangle = 0$$

Yüzeyimiz timelike ve üzerindeki eğri de bir spacelike eğri ise bu takdirde Darboux türev formülleri aşağıdaki gibi verilebilir.

$$\begin{bmatrix} T' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_g & -k_n \\ k_g & 0 & t_r \\ k_n & t_r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ Y \\ Z \end{bmatrix}. \tag{3.16}$$

Ve T, Y ve Z vektörleri arasındaki iç çarpım da aşağıdaki gibidir.

$$\langle T,T \rangle = 1,\ \langle Y,Y \rangle = 1,\ \langle Z,Z \rangle = -1$$

$$\langle T,Y \rangle = \langle T,Z \rangle = \langle Y,Z \rangle = 0$$

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Öklid Uzayında Bir Yüzey Üzerindeki α Eğrisinin Paralel Yüzey Üzerindeki Görüntüsü

Bu bölümde biz ilk olarak paralel yüzey tanımından faydalanarak yüzey üzerindeki bir eğrinin paralel yüzey üzerindeki görüntüsünü elde ettik. Daha sonra paralel yüzey üzerindeki eğrinin Darboux çatısı oluşturduk. Oluşturduğumuz bu Darboux çatısından faydalanarak, paralel yüzey üzerindeki eğrinin geodezik eğriliğini, asimptotik eğriliğini ve geodezik burulmasını hesapladık. Ve bu eğriliklerle yüzey üzerindeki eğrinin eğrilikleri arasındaki ilişkileri gösterdik. Ayrıca bu ilişkilerden faydalanarak bazı teoremler ve sonuçlar verdik.

M ve M_r 3-boyutlu Öklid uzayında yönlendirilebilir yüzeyler olsun. M yüzeyi üzerindeki eğri $\alpha(s)$ ve M_r paralel yüzeyi üzerindeki eğri $\beta(s_\beta)$ olsun. Eğer paralel yüzey tanımını kullanırsak paralel yüzey üzerindeki $\beta(s_\beta)$ eğrisi için bir parametrizasyon aşağıdaki gibi verilebilir.

$$\beta(s_\beta) = \alpha(s) + rZ \tag{4.1}$$

M_r paralel yüzeyi üzerindeki $\beta(s_\beta)$ eğrisinin Darboux çatısını $\{T^*, Y^*, Z^*\}$ olarak alalım. Şimdi bu çatımızı oluşturmaya başlayalım ilk olarak (4.1) denkleminde s ye göre türev alırsak

$$\frac{d\beta}{ds} = \frac{d\beta}{ds_\beta}\frac{ds_\beta}{ds} = \alpha'(s) + rZ' \tag{4.2}$$

elde edilir. $(M, \alpha(s))$ yüzey ikilisinin Darboux türev formüllerini (4.2) de yerine yazıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$T^* \frac{ds_\beta}{ds} = (1 - rk_n)T - rt_r Y \tag{4.3}$$

eşitliğini elde ederiz. Yukarıdaki eşitlikte her iki tarafın normu alınırsa

$$\frac{ds_\beta}{ds}=\sqrt{(1-rk_n)^2+(rt_r)^2} \tag{4.4}$$

bulunur. (4.4) denklemini (4.3) de yerine yazarsak T^* vektörünü aşağıdaki gibi elde etmiş oluruz.

$$T^*=\frac{1}{\sqrt{(1-rk_n)^2+(rt_r)^2}}\left[(1-rk_n)T-rt_rY\right] \tag{4.5}$$

$Y^*=Z\times T^*$ eşitliğiyle tanımlanan Y^* vektör alanını göz önüne alalım. Z normal vektörü ile (4.5) in vektörel çarpımını alıp ve vektörel çarpımın özelliklerini kullanırsak

$$Y^*=\frac{1}{\sqrt{(1-rk_n)^2+(rt_r)^2}}\left[rt_rT+(1-rk_n)Y\right] \tag{4.6}$$

elde ederiz. Böylece bulduğumuz bu eşitliklerden aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.1.1: M ve M_r 3-boyutlu Öklid uzayında yönlendirilebilir yüzeyler olsun. M yüzeyi üzerindeki eğri $\alpha(s)$ ve M_r paralel yüzeyi üzerindeki eğri $\beta(s_\beta)$ olsun. O zaman $\alpha(s)$ ve $\beta(s_\beta)$ eğrilerinin Darboux çatıları arasındaki ilişki aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\begin{bmatrix}T^*\\Y^*\\Z^*\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1-rk_n}{\sqrt{(1-rk_n)^2+(rt_r)^2}} & \frac{-rt_r}{\sqrt{(1-rk_n)^2+(rt_r)^2}} & 0\\ \frac{rt_r}{\sqrt{(1-rk_n)^2+(rt_r)^2}} & \frac{1-rk_n}{\sqrt{(1-rk_n)^2+(rt_r)^2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T\\Y\\Z\end{bmatrix} \tag{4.7}$$

Şimdi $(M_r,\beta(s_\beta))$ eğri-yüzey ikilisinin eğriliklerini hesaplayalım. M_r paralel yüzeyi üzerindeki $\beta(s_\beta)$ eğrisinin geodezik eğriliği k_g^*, normal eğriliği k_n^* ve geodezik burulması t_r^* olsun. $\beta(s_\beta)$ eğrisinin geodezik eğriliği

$$k_g^*=\left\langle \beta''(s_\beta),\,Y^*\right\rangle \tag{4.8}$$

şeklinde hesaplanır. (4.1) eşitliğinin iki kez s ye göre türevi alınırsa $\beta''(s_\beta)$ aşağıdaki gibi

$$\beta''(s_\beta) = (-rk_n' + rt_r k_g)T + (k_g(1-rk_n) - rt_r')Y + (k_n(1-rk_n) - rt_r^2)Z \quad (4.9)$$

bulunur. (4.6) ve (4.9) eşitliklerini (4.8) de yerine yazalım:

$$k_g^* = \left\langle (-rk_n' + rt_r k_g)T, \frac{rt_r T}{\sqrt{(1-rk_n)^2 + (rt_r)^2}} \right\rangle + \left\langle (-rk_n' + rt_r k_g)T, \frac{(1-rk_n)Y}{\sqrt{(1-rk_n)^2 + (rt_r)^2}} \right\rangle$$
$$+ \left\langle (k_g(1-rk_n) - rt_r')Y, \frac{rt_r T}{\sqrt{(1-rk_n)^2 + (rt_r)^2}} \right\rangle + \left\langle (k_g(1-rk_n) - rt_r')Y, \frac{(1-rk_n)Y}{\sqrt{(1-rk_n)^2 + (rt_r)^2}} \right\rangle$$
$$+ \left\langle (k_n(1-rk_n) - rt_r^2)Z, \frac{rt_r T}{\sqrt{(1-rk_n)^2 + (rt_r)^2}} \right\rangle + \left\langle (k_n(1-rk_n) - rt_r^2)Z, \frac{(1-rk_n)Y}{\sqrt{(1-rk_n)^2 + (rt_r)^2}} \right\rangle$$

Yukarıdaki eşitlikte öklid iç çarpımın özelliklerini kullanırsak, k_g^* geodezik eğriliği aşağıdaki gibi elde ederiz.

$$k_g^* = \frac{rt_r(-rk_n' + rt_r k_g) - (1-rk_n)(k_g(1-rk_n) - rt_r')}{\sqrt{(1-rk_n)^2 + (rt_r)^2}} . \quad (4.10)$$

Diğer taraftan $\beta(s_\beta)$ eğrisinin asimptotik eğriliği

$$k_n^* = \langle \beta''(s_\beta), Z^* \rangle \quad (4.11)$$

şeklinde hesaplanır. (4.9) ile Z^* vektörünü (4.11) de yerine yazılırsa

$$k_n^* = \langle -rk_n' + rt_r k_g)T + (k_g(1-rk_n) - rt_r')Y + (k_n(1-rk_n) - rt_r^2)Z, Z^* \rangle$$

elde edilir.

İç çarpımın özelliklerini kullanıp $Z = Z^*$ olduğu göz önüne alınırsa k_n^* asimptotik eğriliği aşağıdaki gibi bulunur.

$$k_n^* = k_n(1-rk_n) - rt_r^2 . \quad (4.12)$$

Benzer şekilde geodezik burulma

$$t_r^* = -\langle Z', Y^* \rangle \quad (4.13)$$

şeklindedir. (4.6) ile Z' yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa

$$t_r^* = -\left\langle -k_n T - t_r Y,\ \frac{rt_r T + (1-rk_n)Y}{\sqrt{(1-rk_n)^2 + (rt_r)^2}} \right\rangle$$

elde edilir. Bu eşitliği düzenlersek,

$$t_r^* = \left\langle k_n T,\ \frac{rt_r T}{\sqrt{(1-rk_n)^2 + (rt_r)^2}} \right\rangle + \left\langle k_n T,\ \frac{(1-rk_n)Y}{\sqrt{(1-rk_n)^2 + (rt_r)^2}} \right\rangle$$
$$+ \left\langle t_r Y,\ \frac{rt_r T}{\sqrt{(1-rk_n)^2 + (rt_r)^2}} \right\rangle + \left\langle t_r Y,\ \frac{(1-rk_n)Y}{\sqrt{(1-rk_n)^2 + (rt_r)^2}} \right\rangle$$

olur. Yine iç çarpımın özelliklerini kullanırsak, t_r^* yi aşağıdaki gibi bulmuş oluruz.

$$t_r^* = \frac{t_r}{\sqrt{(1-rk_n)^2 + (rt_r)^2}} \tag{4.14}$$

Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.1.2: M ve M_r 3-boyutlu Öklid uzayında yönlendirilebilir yüzeyler olsun. M yüzeyi üzerindeki eğri $\alpha(s)$ ve M_r paralel yüzeyi üzerindeki eğri $\beta(s_\beta)$ olsun. Bu durumda $\alpha(s)$ ve $\beta(s_\beta)$ eğrilerinin geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik burulması arasındaki ilişki aşağıdaki gibi verilir.

(1) $$k_g^* = \frac{rt_r(-rk_n' + rt_r k_g) - (1-rk_n)(k_g(1-rk_n) - rt_r')}{\sqrt{(1-rk_n)^2 + (rt_r)^2}}$$

(2) $$k_n^* = k_n(1-rk_n) - rt_r^2$$

(3) $$t_r^* = \frac{t_r}{\sqrt{(1-rk_n)^2 + (rt_r)^2}}.$$

Teorem 4.1.3: M yüzeyi üzerine uzanan $\alpha(s)$ eğrisi asimptotik eğri olsun. Bu durumda $\beta(s_\beta)$ eğrisinin geodezik eğriliği k_g^*, normal eğriliği k_n^* ve geodezik burulması t_r^* aşağıdaki gibidir.

(1) $k_g^* = \dfrac{k_g(r^2 t_r^2 + 1) + r t_r'}{\sqrt{1+(r t_r)^2}}$

(2) $k_n^* = -r t_r^2$

(3) $t_r^* = \dfrac{t_r}{\sqrt{1+(r t_r)^2}}$

İspat: M yüzeyi üzerine uzanan $\alpha(s)$ eğrisi asimptotik eğri olduğundan $k_n = 0$ olur. Bunu teorem (4.1.2) de yerine yazarsak ispatımız tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.4: M yüzeyi üzerindeki $\alpha(s)$ eğrisi eğrilik çizgisi olsun. Bu durumda $\beta(s_\beta)$ eğrisinin geodezik eğriliği k_g^*, normal eğriliği k_n^* ve geodezik burulması t_r^* aşağıdaki gibidir.

(1) $k_g^* = \pm k_g(1 - r k_n)$

(2) $k_n^* = k_n(1 - r k_n)$

(3) $t_r^* = 0$.

İspat: M yüzeyi üzerindeki $\alpha(s)$ eğrisi eğrilik çizgisi olduğundan geodezik burulması $t_r = 0$ olur. Bunu teorem (4.1.2) de yerine yazarsak ispatımız tamamlanmış olur.

Teorem (4.1.4) den aşağıdaki sonuçları verebiliriz.

Sonuç 4.1.1: M yüzeyi üzerindeki $\alpha(s)$ eğrisi eğrilik çizgisi olsun. O zaman M_r paralel yüzeyi üzerindeki $\beta(s_\beta)$ eğrisinin asimptotik eğri olması için gerek ve yeter şart $\alpha(s)$ eğrisinin asimptotik eğri olmasıdır.

Sonuç 4.1.2: M yüzeyi üzerindeki $\alpha(s)$ eğrisi eğrilik çizgisi olsun. O zaman M_r paralel yüzeyi üzerindeki $\beta(s_\beta)$ eğrisinin geodezik eğri olması için gerek ve yeter şart $\alpha(s)$ eğrisinin geodezik eğri olmasıdır.

Teorem 4.1.5: M yüzeyi üzerindeki $\alpha(s)$ eğrisinin asimptotik eğriliği $k_n = \frac{1}{r}$ olsun. Bu durumda $\beta(s_\beta)$ eğrisinin geodezik eğriliği k_g^*, normal eğriliği k_n^* ve geodezik burulması t_r^* aşağıdaki gibidir.

(1) $k_g^* = \pm r k_g t_r$

(2) $k_n^* = -r t_r^2$

(3) $t_r^* = \frac{-1}{r}$.

İspat: Eğer $k_n = \frac{1}{r}$ olarak alıp verilenleri teorem (4.1.2) yerine yazarsak yukarıdaki eşitlikler elde edilir.

Sonuç 4.1.3: M yüzeyi üzerindeki $\alpha(s)$ eğrisinin asimptotik eğriliği $k_n = \frac{1}{r}$ olsun. O zaman M_r paralel yüzeyi üzerindeki $\beta(s_\beta)$ eğrisinin geodezik eğri olması için gerek ve yeter şart $\alpha(s)$ eğrisinin geodezik eğri olmasıdır.

Teorem 4.1.6: M sabit açılı bir yüzey ve M_r de bu yüzeyin paralel yüzeyi olsun. Eğer M yüzeyi üzerindeki $\alpha(s)$ eğrisi hem geodezik hem de eğrilik çizgisi ise bu durumda M yüzeyi üzerindeki $\alpha(s)$ eğrisinin slant helis olması için gerek ve yeter şart M_r paralel yüzeyi üzerindeki $\beta(s_\beta)$ eğrisinin slant helis olmasıdır.

İspat: M yüzeyi sabit açılı bir yüzey olduğundan yüzey normali Z sabit bir k doğrultuyla sabit bir açı yapar yani

$$\langle Z,k\rangle = sabit \tag{4.15}$$

yazabiliriz. Yüzey üzerindeki bir eğri geodezik eğri olduğundan, yüzeyin normal vektörü ile eğrinin normal vektörü çakışır. Yani $Z = N$ yazabiliriz. Bunu (4.15) de yerine yazarsak

$$\langle N,k\rangle = sabit \tag{4.16}$$

olduğu görülür. Slant helis tanımından eğrinin asli normali sabit bir doğrultuyla sabit bir açı yaptığından (4.16) dan $\alpha(s)$ slant helistir. Paralel yüzeylerde yüzey normalleri aynı olduğundan M_r paralel yüzeyi de sabit açılı yüzeydir. Sonuç (4.1.2) den M_r paralel yüzey üzerindeki $\beta(s_\beta)$ eğrisi de geodezik eğridir. Dolayısıyla aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$\langle Z,k\rangle = \langle N^*,k\rangle = sabit \tag{4.17}$$

Burada N^*, $\beta(s_\beta)$ eğrisinin normal vektörüdür. Dolayısıyla $\beta(s_\beta)$ eğrisi de slant helistir.

Tersine, M_r paralel yüzeyi üzerindeki $\beta(s_\beta)$ eğrisi slant helis olsun. buna göre $\langle Z,k\rangle = \langle N^*,k\rangle = sabit$ olur. Burada $Z = N^*$ olduğundan, $\beta(s_\beta)$ geodezik bir eğridir. Böylece sonuç (4.1.2) ye göre $\alpha(s)$ de bir geodezik eğri olur. Dolayısıyla $\alpha(s)$ slant helistir.

Teorem 4.1.7: M sabit açılı bir yüzey ve M_r de bu yüzeyin paralel yüzeyi olsun. Eğer M yüzeyi üzerindeki $\alpha(s)$ eğrisi hem asimptotik hem de eğrilik çizgisi ise bu durumda, M yüzeyi üzerindeki $\alpha(s)$ eğrisinin genel helis olması için gerek ve yeter şart M_r paralel yüzeyi üzerindeki $\beta(s_\beta)$ eğrisinin genel helis olmasıdır.

İspat: M yüzeyi sabit açılı bir yüzey olduğundan yüzey normali Z sabit bir k doğrultuyla sabit bir açı yapar yani

$$\langle Z, k \rangle = sabit \tag{4.18}$$

yazabiliriz. M yüzeyi üzerindeki $\alpha(s)$ eğrisi asimtotik eğri olduğundan yüzeyin asli normal vektörü ile eğrinin binormal vektörü çakışır. Yani $Z = B$ yazabiliriz. $Z = B$ eşitliğini (4.18) de yerine yazarsak

$$\langle B, k \rangle = sabit \tag{4.19}$$

elde edilir. Genel helis tanımından eğrinin binormal vektörü sabit bir doğrultuyla sabit bir açı yaptığından $\alpha(s)$ genel helistir. Paralel yüzeylerde yüzey normalleri aynı olduğundan M_r paralel yüzeyi de sabit açılı yüzeydir. Sonuç (4.1.1) den M_r paralel yüzeyi üzerindeki $\beta(s_\beta)$ eğrisi de asimptotik eğridir. Dolayısıyla aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$\langle Z, k \rangle = \langle B^*, k \rangle = sabit \tag{4.20}$$

Burada B^*, $\beta(s_\beta)$ eğrisinin binormal vektörüdür. Dolayısıyla $\beta(s_\beta)$ eğrisi de genel helisidir.

Tersine M_r paralel yüzey üzerindeki $\beta(s_\beta)$ eğrisi genel helis olsun. Bu durumda (4.20) eşitliğini yazabiliriz. Burada $Z = B^*$ olduğundan $\beta(s_\beta)$ asimptotik bir eğridir. Böylece sonuç (4.1.1) den $\alpha(s)$ asimptotik eğridir. Dolayısıyla $\alpha(s)$ genel helis dir.

Teorem 4.1.8: M Öklid uzayında yönlendirilebilir bir yüzey ve M_r de bu yüzeyin paralel yüzeyi olsun. Eğer M yüzeyi üzerindeki $\alpha(s)$ eğrisi eğrilik çizgisi olsun. Bu durumda $\alpha(s)$ eğrisinin bir genel helis olması için gerek ve yeter şart M_r paralel yüzeyi üzerindeki $\beta(s_\beta)$ eğrisinin de genel helis olmasıdır.

İspat: $\alpha(s)$ eğrisi genel helis olsun. Bu durumda

$$\langle T, k \rangle = sabit \tag{4.21}$$

yazabiliriz. Ayrıca M yüzeyi üzerindeki $\alpha(s)$ eğrisi eğrilik çizgisi olduğundan $t_r = 0$ olduğunu biliyoruz. Bunu $T^* = \dfrac{1}{\sqrt{(1-rk_n)^2 + (rt_r)^2}}\left[(1-rk_n)T - rt_rY\right]$ eşitliğinde yerine yazarsak,

$$T^* = \pm T \tag{4.22}$$

elde ederiz. (4.22) yi (4.21) de yerine yazarsak

$$\langle T^*, k\rangle = sabit \tag{4.23}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\beta(s_\beta)$ eğrisinin birim teğet vektörü sabit bir doğrultuyla sabit bir açı yaptığından $\beta(s_\beta)$ eğrisi de bir genel helis olur.

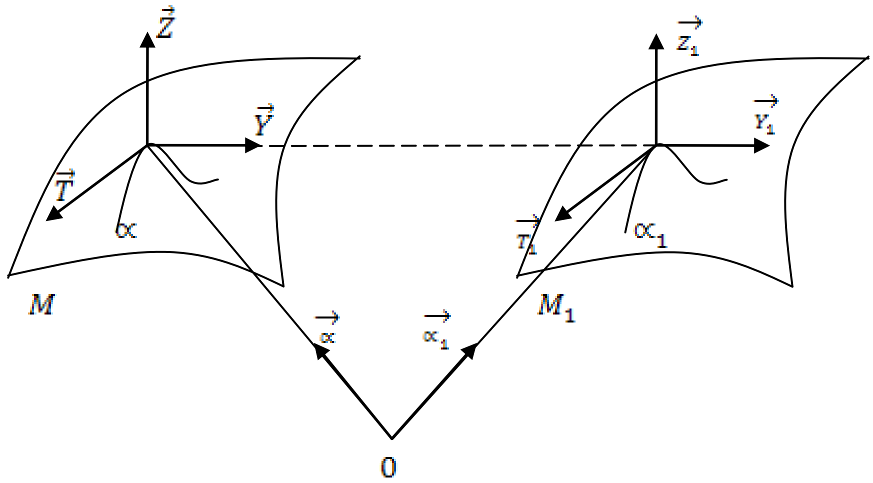
Tersine olarak paralel yüzeylerde eğrilik çizgileri korunduğundan $T^* = \pm T$ eşitliğini yazabiliriz. Böylece $\alpha(s)$ eğrisi de genel helistir.

4.2. Öklid Uzayında Bertrand D-Eğri Çiftinin Paralel Yüzey Üzerindeki Görüntüsü

Bu bölümde 3-boyutlu Öklid uzayında yönlendirilmiş M ve M_1 yüzeyleri üzerinde yatan $\alpha(s)$ ve $\alpha_1(s_1)$ eğrileri için H. H Uğurlu ve M Önder tarafından verilen Bertrand D-eğri çiftinin tanımından bahsedeceğiz. Daha sonra, Bertrand D-eğrilerinin paralel yüzey üzerindeki görüntülerini elde edip görüntüleri ile kendileri arasındaki Bertrand D-eğri çifti olma şartını araştıracağız. Ayrıca elde ettiğimiz ifadelerden bazı teoremler ve sonuçlar vereceğiz.

Tanım 4.2.1: 3-boyutlu Öklid uzayında yönlendirilmiş iki yüzey M ve M_1 olsun. M ve M_1 üzerinde yatan ve yay uzunluğu parametresi ile verilen eğriler de, sırasıyla, $\alpha(s)$ ve $\alpha_1(s_1)$ olsun. $\alpha(s)$ ve $\alpha_1(s_1)$ eğrilerinin Darboux çatıları $\{T, Y, Z\}$ ve $\{T_1, Y_1, Z_1\}$ ile gösterilsin. Eğer, $\alpha(s)$ ve $\alpha_1(s_1)$ eğrilerinin karşılıklı noktalarında, $\alpha(s)$ eğrisinin Y Darboux çatı elemanı ile $\alpha_1(s_1)$ eğrisinin Y_1 Darboux çatı elemanı çakışıyorsa, bu takdirde $\alpha(s)$ e bir Bertrand D-eğrisi ve $\alpha_1(s_1)$ eğrisine de $\alpha(s)$ eğrisinin bir Bertrand

D-eğrisidir denir. Böylece $\{\alpha, \alpha_1\}$ eğri çiftine bir Bertrand D-çifti adı verilir. Eğer yönlendirilmiş M ve M_1 yüzeyleri üzerinde yatan böyle eğriler var ise $\{M, M_1\}$ yüzey çiftine Bertrand yüzey çifti denir (Kazaz 2010).



Şekil 4.1. Bertrand D-eğri çifti

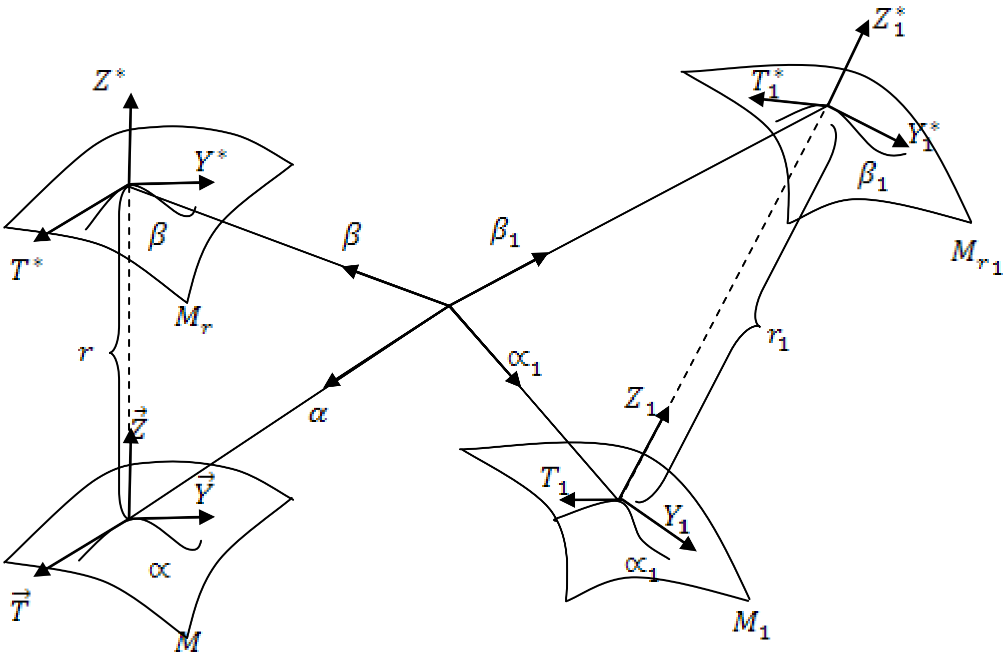
Yukarıdaki çalışmada M yüzeyi üzerindeki $\alpha(s)$ eğrisinin paralel yüzeyi üzerindeki görüntüsünü bulmuştuk. Şimdi ise M_1 yüzeyi üzerindeki $\alpha_1(s_1)$ eğrisinin bu yüzeyin paralel yüzeyi olan M_{r_1} yüzeyi üzerindeki görüntüsünü elde edelim.

$\alpha(s)$ ve $\alpha_1(s_1)$ Bertrand D-eğri çifti olduğundan aşağıdaki eşitliği yazabiliriz (Kazaz 2010).

$$\alpha_1(s_1) = \alpha(s_1) - \lambda Y_1(s_1) \tag{4.24}$$

$(\alpha_1(s_1), M_1)$ eğri- yüzey ikilisinin çatısı $\{T_1, Y_1, Z_1\}$ olsun. O zaman bu ikilinin Darboux türev formüleri de aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} T_1' &= k_{g_1} Y_1 + k_{n_1} Z_1 \\ Y_1' &= -k_{g_1} T_1 + t_{r_1} Z_1 \\ Z_1' &= -k_{n_1} T_1 - t_{r_1} Y_1 \end{aligned} \tag{4.25}$$



Şekil 4.2. Bertrand D-eğri çiftinin paralel yüzey üzerindeki görüntüleri

M_1 ve M_{r_1} paralel yüzeyler olsunlar $\alpha_1(s_1)$ eğrisi M_1 yüzeyi üzerinde $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrisi de M_{r_1} paralel yüzeyi üzerinde bir eğri olsun. Bu durumda paralel yüzey tanımından $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrisi için bir parametrizasyon aşağıdaki gibi verilebilir

$$\beta_1(s_{\beta_1}) = \alpha_1(s_1) + r_1 Z_1 \tag{4.26}$$

(4.24) ü (4.26) yerine yazarsak aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\beta_1\left(s_{\beta_1}\right) = \alpha\left(s_1\right) - \lambda Y_1\left(s_1\right) + r_1 Z_1 \tag{4.28}$$

$\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrisinin Darboux çatısını da $\{T_1^*, Y_1^*, Z_1\}$ olarak düşünelim. Bu çatıyı M_1 yüzeyi üzerindeki $\alpha_1(s_1)$ eğrisinin Darboux çatısını düşünerek bu çatımızı belirleyelim. (4.28) eşitliğinde (s_1) e göre türev alınırsa

$$\frac{d\beta_1}{ds_1} = \frac{d\beta_1}{ds_{\beta_1}}\frac{ds_{\beta_1}}{ds_1} = \alpha'\left(s_1\right)\frac{ds}{ds_1} - \lambda Y_1'\left(s_1\right) + r_1 Z_1' \tag{4.29}$$

elde edilir. Eğer (4.24) eşitliğinde s_1 e göre türev alıp $\alpha_1(s_1)$ eğrisinin Darboux türev formüllerini (4.25) kullanırsak

$$\alpha'(s_1)\frac{ds}{ds_1} = T\frac{ds}{ds_1} = \left(1-\lambda k_{g_1}\right)T_1 + \lambda t_{r_1} Z_1 \tag{4.30}$$

eşitliğini elde ederiz. (4.30) u (4.29) yerine yazıp gerekli düzenlemeleri yaparsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$T_1^* \frac{ds_{\beta_1}}{ds_1} = \left(1-r_1 k_{n_1}\right)T_1 - r_1 t_{r_1} Y_1 \tag{4.31}$$

(4.31) eşitliğinde her iki tarafın normu alınırsa

$$\frac{ds_{\beta_1}}{ds_1} = \sqrt{\left(1-r_1 k_{n_1}\right)^2 + \left(r_1 t_{r_1}\right)^2} \tag{4.32}$$

elde edilir. (4.32) denklemini (4.31) de yerine yazarsak T_1^* vektörünü aşağıdaki gibi elde etmiş oluruz.

$$T_1^* = \frac{1}{\sqrt{\left(1-r_1 k_{n_1}\right)^2 + \left(r_1 t_{r_1}\right)^2}}\left[T_1\left(1-r_1 k_{n_1}\right) - r_1 t_{r_1} Y_1\right] \tag{4.33}$$

Y_1^* vektörünü $Y_1^* = Z_1 \times T_1^*$ olarak alırsak vektörel çarpımının özelliğinden ve (4.33) den Y_1^* vektörünü aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$Y_1^* = \frac{1}{\sqrt{\left(1-r_1 k_{n_1}\right)^2 + \left(r_1 t_{r_1}\right)^2}}\left[r_1 t_{r_1} T_1 + \left(1-r_1 k_{n_1}\right) Y_1\right] \tag{4.34}$$

Böylece elde ettiğimiz bu eşitliklerden aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 4.2.1: M_1 ve M_{r_1} 3-boyutlu Öklid uzayında yönlendirilebilir yüzeyler olsun. M_1 yüzeyi üzerindeki eğri $\alpha_1(s_1)$ ve M_{r_1} paralel yüzeyi üzerindeki eğri $\beta_1(s_{\beta_1})$ olsun. O zaman $\alpha_1(s_1)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrilerinin Darboux çatıları arasındaki ilişki aşağıdaki gibi verilebilir.

$$\begin{bmatrix} T_1^* \\ Y_1^* \\ Z_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1-r_1k_{n_1}}{\sqrt{\left(1-r_1k_{n_1}\right)^2+\left(r_1t_{r_1}\right)^2}} & \dfrac{-r_1t_{r_1}}{\sqrt{\left(1+r_1k_{n_1}\right)^2+\left(r_1t_{r_1}\right)^2}} & 0 \\ \dfrac{r_1t_{r_1}}{\sqrt{\left(1-r_1k_{n_1}\right)^2+\left(r_1t_{r_1}\right)^2}} & \dfrac{1-r_1k_{n_1}}{\sqrt{\left(1-r_1k_{n_1}\right)^2+\left(r_1t_{r_1}\right)^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix}$$

Teorem 4.2.2: M yüzeyi üzerindeki $\alpha(s)$ eğrisi eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart $\alpha(s)$ ve $\beta(s_\beta)$ eğrilerinin Bertrand D-eğri çifti olmalarıdır.

İspat: M yüzeyi üzerindeki $\alpha(s)$ eğrisi eğrilik çizgisi olduğundan $t_r = 0$ dır. (4.6) eşitliğini göz önüne alıp

$$Y^* = \frac{1}{\sqrt{\left(1-rk_n\right)^2+\left(rt_r\right)^2}}\left[rt_rT+\left(1-rk_n\right)Y\right]$$

da yerine yazarsak $Y^* = \pm Y$ elde ederiz. Böylece Y^* ve Y vektörleri lineer bağımlı olduğundan tanım gereği $\alpha(s)$ ve $\beta(s_\beta)$ eğrileri Bertrand D-eğri çifti olurlar.

Tersine, $\alpha(s)$ ve $\beta(s_\beta)$ Bertrand D-eğri çifti olsunlar. Bu durumda Y^* ve Y vektörlerinin lineer bağımlı olması gerekir. Yukarıdaki (4.6) denklemi göz önüne alırsak $t_r = 0$ olması gerektiği kolayca görülebilir.

Teorem.4.2.3: M_1 yüzeyi üzerindeki $\alpha_1(s_1)$ eğrisi eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart $\alpha_1(s_1)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrilerinin Bertrand D-eğri cifti olmalarıdır.

İspat: M_1 yüzeyi üzerindeki $\alpha_1(s_1)$ eğrisi eğrilik çizgisi olduğundan $t_{r_1} = 0$ dır. Bunu aşağıdaki eşitliği göz önüne alıp

$$Y_1^* = \frac{1}{\sqrt{\left(1-r_1k_{n_1}\right)^2+\left(r_1t_{r_1}\right)^2}}\left[r_1t_{r_1}T_1+\left(1-r_1k_{n_1}\right)Y_1\right]$$

da yerine yazarsak, $Y_1^* = \pm Y_1$ elde ederiz. Y_1^* ve Y_1 vektörleri lineer bağımlı olduğundan $\alpha_1(s_1)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrileri Bertrand D-eğrileridir.

Teorem 4.2.4: M yüzeyi üzerindeki $\alpha(s)$ eğrisi eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart $\alpha_1(s_1)$ ve $\beta(s_\beta)$ eğrilerinin Bertrand D-eğri cifti olmalarıdır.

İspat: M yüzeyi üzerindeki $\alpha(s)$ eğrisi eğrilik çizgisi olduğundan $t_r = 0$ dır. Bunu (4.6) da yerine yazarsak , $Y^* = \pm Y$ elde ederiz. Biz $\alpha(s)$ ve $\alpha_1(s_1)$ eğrilerinin Bertrand D-eğri çifti olduğunu biliyoruz dolayısıyla $Y = Y_1$ yazabiliriz. Bunu $Y^* = \pm Y$ eşitliğinde yerine yazarsak $Y^* = \pm Y_1$ elde ederiz. Böylece $\alpha_1(s_1)$ ve $\beta(s_\beta)$ eğrileri Bertrand D-eğri çifti olur.

Tersine $\alpha_1(s_1)$ ve $\beta(s_\beta)$ eğrilerinin Bertrand D-eğri cifti olsun. Bu durumda Y^* ve Y_1 vektörlerinin lineer bağımlı olması gerekir. Ayrıca $\alpha(s)$ ve $\alpha_1(s_1)$ Bertrand eğri çifti olmasını da kullanırsak $t_r = 0$ olduğu görülür.

Teorem 4.2.5: M yüzeyi üzerindeki $\alpha(s)$ ve M_1 yüzeyi üzerindeki $\alpha_1(s_1)$ eğrilerinin eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart $\beta(s_\beta)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrilerinin Bertrand D-eğri çifti olmalarıdır.

İspat: $\alpha(s)$ ve $\alpha_1(s_1)$ eğrileri eğrilik çizgisi olduğundan $t_r = t_{r_1} = 0$ dır. Bunu (4.6) ve (4.34) da yerlerine yazarsak

$$Y^* = \pm Y \text{ ve } Y_1^* = \pm Y_1$$

elde ederiz. Ayrıca $\alpha(s)$ ve $\alpha_1(s_1)$ eğrileri Bertrand D-eğri çifti olduğundan $Y = Y_1$ yazabiliriz. Bunu yukarıdaki eşitlikte yerine yazarsak $Y^* = \pm Y_1^*$ elde etmiş oluruz. Böylece $\beta(s_\beta)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrileri Bertrand D-eğri çiftidir.

Tersine, varsayalım ki $\beta(s_\beta)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrileri Bertrand eğri çifti olsun. $\alpha(s)$ ve $\alpha_1(s_1)$ eğrilerinin de Bertrand D-eğri cifti olduğunu göz önüne alıp (3.6) dan aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$Y_1 = \frac{1}{1-rk_n}\left[\left(\sqrt{(1-rk_n)^2+(rt_r)^2}\right)Y^* - rt_r T\right] \tag{4.35}$$

(4.35) eşitliğini (4.34) deki eşitlikte yerine yazarsak

$$Y_1^* = \frac{1}{\sqrt{\left(1-r_1k_{n_1}\right)^2+\left(r_1t_{r_1}\right)^2}}\left[r_1t_{r_1}T_1 + \frac{1-r_1k_{n_1}}{1-rk_n}\left[\left(\sqrt{(1-rk_n)^2+(rt_r)^2}\right)Y^* - rt_r T\right]\right] \tag{4.36}$$

elde edilir. $\beta(s_\beta)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrileri Bertrand D-eğri çifti olduğundan, Y_1^* ve Y^* lineer bağımlı olması gerekir. Yukarıdaki eşitliği de göz önüne alırsak $t_r = t_{r_1} = 0$ elde etmiş oluruz. Böylece $\alpha(s)$ ve $\alpha_1(s_1)$ eğrilik çizgileridir.

Teorem 4.2.6: M yüzeyi üzerindeki $\alpha(s)$ hem geodezik hem de eğrilik çizgisi olsun. Bu durumda $\beta(s_\beta)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrileri Bertrand D-eğri çifti olurlar.

İspat: $\alpha(s)$ eğrisi hem geodezik hem de eğrilik çizgisi olduğundan $k_g = t_r = 0$ dır. Ayrıca $\alpha(s)$ ve $\alpha_1(s_1)$ eğrileri Bertrand D-eğri çifti olduğundan aşağıdaki eşitliği yazabiliriz (Kazaz 2010).

$$t_{r_1} = \left(k_g \sin\theta + t_r \cos\theta\right)\frac{ds}{ds_1}.$$

Eğer $k_g = t_r = 0$ ifadelerini yukarıdaki eşitlikte yerine yazarsak

$$t_{r_1} = 0$$

elde ederiz. Bunu (4.34) eşitliğinde yerine yazarsak

$$Y_1^* = \pm Y_1$$

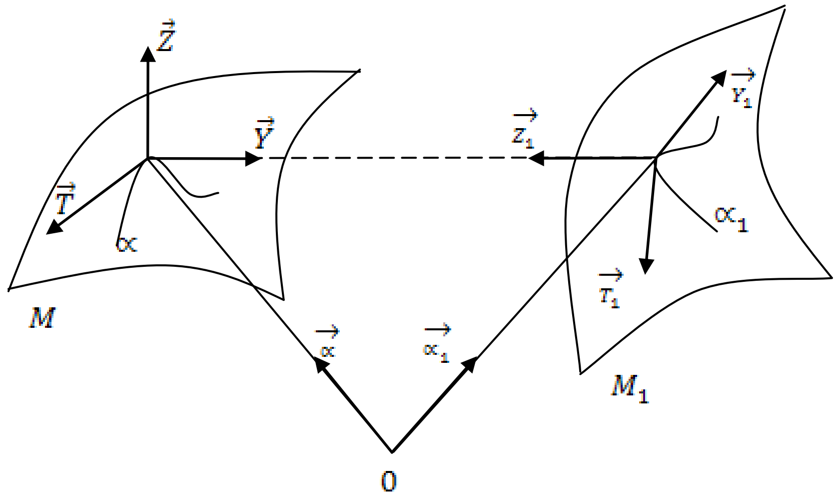
eşitliğini elde ederiz. $t_r = 0$ olduğundan $Y^* = \pm Y$ elde edilir. Ayrıca $\alpha(s)$ ve $\alpha_1(s_1)$ eğrileri Bertrand D-eğri çifti olduğundan $Y = Y_1$ yazabiliriz. Buradan, elde ettiğimiz son eşitlikleri de göz önüne alırsak $Y^* = \pm Y_1^*$ elde etmiş oluruz. Dolayısıyla $\beta(s_\beta)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrileri Bertrand D-eğri çifti olurlar.

4.3. Öklid Uzayında Mannheim D-Eğri Çiftinin Paralel Yüzey Üzerindeki Görüntüsü

Bu kısımda, 3-boyutlu Öklid uzayında yönlendirilmiş M ve M_1 yüzeyleri üzerinde yatan $\alpha(s)$ ve $\alpha_1(s_1)$ eğrileri için H.H Uğurlu ve M Önder tarafından verilen Mannheim D-eğri çiftinin tanımının dan bahsedeceğiz. Daha sonra ise Mannheim D-eğrilerinin paralel yüzey üzerindeki görüntülerini elde edip görüntüleri ile kendileri arasında Mannheim D-eğri çifti olma şartını araştıracağız. Elde ettiğimiz ifadelerden de bazı teoremler ve sonuçlar vereceğiz.

Tanım 4.3.1: 3-boyutlu Öklid uzayında yönlendirilmiş iki yüzey M ve M_1 olsun. M ve M_1 üzerinde yatan ve yay uzunluğu parametresi ile verilen eğriler, sırasıyla, $\alpha(s)$ ve $\alpha_1(s_1)$ olsun. $\alpha(s)$ ve $\alpha_1(s_1)$ eğrilerinin Darboux çatıları $\{T, Y, Z\}$ ve $\{T_1, Y_1, Z_1\}$ ile gösterilsin. Eğer $\alpha(s)$ ve $\alpha_1(s_1)$ eğrilerinin karşılıklı noktalarında, $\alpha(s)$ eğrisinin Y Darboux çatı elemanı ile $\alpha_1(s_1)$ eğrisinin Z_1 Darboux çatı elemanı çakışıyorsa, bu takdirde $\alpha(s)$ eğrisine bir Mannheim D-eğrisi ve $\alpha_1(s_1)$ eğrisine de $\alpha(s)$ eğrisinin bir Mannheim D-eğrisidir denir. Bu takdirde $\{\alpha, \alpha_1\}$ eğri çiftine bir Mannheim D-çifti adı verilir (Uğurlu ve Önder 2010).

Eğer yönlendirilmiş M ve M_1 yüzeyleri üzerinde yatan böyle eğriler var ise $\{M, M_1\}$ yüzey çiftine Mannheim yüzey çifti denir.



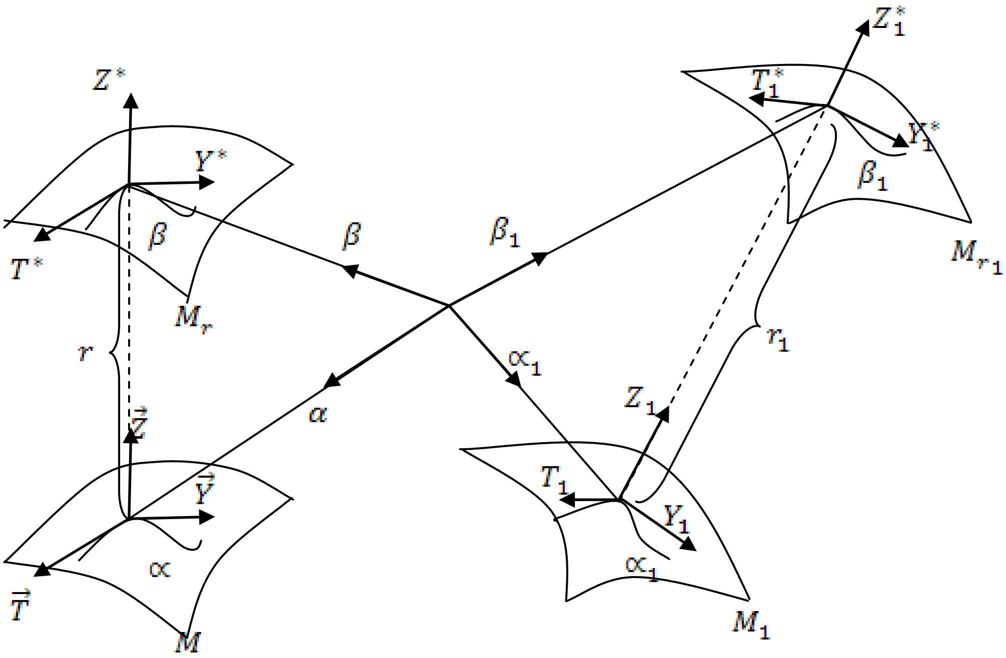
Şekil 4.3. Mannheim D-eğri çifti

Şimdi, Mannheim D-eğri çiftinin paralel yüzey üzerindeki görüntüsünü ele alalım. İlk çalışmamızda M yüzeyi üzerindeki $\alpha(s)$ eğrisinin paralel yüzeyi üzerindeki görüntüsünü bulmuştuk. Şimdi ise M_1 yüzeyi üzerindeki $\alpha_1(s_1)$ eğrisinin bu yüzeyin paralel yüzeyi olan M_{r_1} yüzeyi üzerindeki görüntüsünü elde edelim. $\alpha(s)$ ve $\alpha_1(s_1)$ Mannheim D-eğri çifti ise tanımdan aşağıdaki eşitliği yazabiliriz (Uğurlu ve Önder 2010).

$$\alpha_1(s_1) = \alpha(s_1) - \lambda Z_1(s_1) \tag{4.37}$$

$\left(\alpha_1(s_1), M_1\right)$ eğri-yüzey ikilisinin çatısı $\{T_1, Y_1, Z_1\}$ olsun. O zaman bu ikilinin Darboux türev formülleri de aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} T_1' &= k_{g_1} Y_1 + k_{n_1} Z_1 \\ Y_1' &= -k_{g_1} T_1 + t_{r_1} Z_1 \\ Z_1' &= -k_{n_1} T_1 - t_{r_1} Y_1 \end{aligned} \tag{4.38}$$



Şekil 4.4. Mannheim D-eğri çiftinin paralel yüzey üzerindeki görüntüleri

M_1 ve M_{r_1} paralel yüzeyler olsunlar. $\alpha_1(s_1)$ eğrisi M_1 yüzeyi üzerinde $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrisi de M_{r_1} paralel yüzeyi üzerinde bir eğri olsun. Bu durumda paralel yüzey tanımından $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrisi için bir parametrizasyon aşağıdaki gibi verilebilir.

$$\beta_1(s_{\beta_1}) = \alpha_1(s_1) + r_1 Z_1 \tag{4.39}$$

(4.37) denklemini (4.39) de yerine yazarsak,

$$\beta_1(s_{\beta_1}) = \alpha(s_1) - \lambda Z_1(s_1) + r_1 Z_1(s_1) \tag{4.40}$$

elde ederiz. $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrisinin Darboux çatısını da $\{T_1^*, Y_1^*, Z_1\}$ olarak düşünelim. Bu çatıyı M_1 yüzeyi üzerindeki $\alpha_1(s_1)$ eğrisinin Darboux çatısını düşünerek bu çatımızı belirleyelim (4.39) eşitliğinde s_1 e göre türev alınırsa,

$$\frac{d\beta_1}{ds_1} = \frac{d\beta_1}{ds_{\beta_1}}\frac{ds_{\beta_1}}{ds_1} = \alpha'(s_1)\frac{ds}{ds_1} - \lambda Z_1' + r_1 Z_1' \tag{4.41}$$

elde edilir. Eğer (4.37) eşitliğinde s_1 e göre türev alıp $\alpha_1(s_1)$ eğrisinin Darboux çatısını kullanırsak

$$\alpha'(s_1)\frac{ds}{ds_1} = T\frac{ds}{ds_1} = (1-\lambda k_{n_1})T_1 - \lambda t_{r_1} Y_1 \tag{4.42}$$

elde edilir. (4.42) u (4.41) yerine yazıp gerekli düzenlemeler yapılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$T_1^* \frac{ds_{\beta_1}}{ds_1} = \left(1-k_{n_1}(r_1+\lambda)\right)T_1 - \left(t_{r_1}(r_1-2\lambda)\right)Y_1 \ . \tag{4.43}$$

(4.43) eşitliğinde her iki tarafın normu alınırsa

$$\frac{ds_{\beta_1}}{ds_1} = \sqrt{(1-k_{n_1}(r_1+\lambda))^2 + (t_{r_1}(r_1-2\lambda))^2} \tag{4.44}$$

bulunur. (4.44) eşitliğini (4.43) da yerine yazıp gerekli düzenlemeleri yapılırsa

$$T_1^* = \frac{1}{\sqrt{(1-k_{n_1}(r_1+\lambda))^2 + (t_{r_1}(r_1-2\lambda))^2}}((1-k_{n_1}(r_1+\lambda))T_1 - (t_{r_1}(r_1-2\lambda))Y_1) \tag{4.45}$$

eşitliği elde ederiz.

Y_1^* vektörünü $Y_1^* = Z_1 \times T_1^*$ olarak alırsak vektörel çarpımının özelliğinden ve (4.45) den Y_1^* vektörünü aşağıdaki gibi yazabiliriz

$$Y_1^* = \frac{1}{\sqrt{(1-k_{n_1}(r_1+\lambda))^2 + (t_{r_1}(r_1-2\lambda))^2}}((t_{r_1}(r_1-2\lambda))T_1 + (1-k_{n_1}(r_1+\lambda))Y_1) \ . \tag{4.46}$$

Böylece elde ettiğimiz bu eşitliklerden aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.3.1: M_1 ve M_{r_1} 3-boyutlu Öklid uzayında yönlendirilebilir yüzeyler olsun. M_1 yüzeyi üzerindeki eğri $\alpha_1(s_1)$ ve M_{r_1} paralel yüzeyi üzerindeki eğri $\beta_1\left(s_{\beta_1}\right)$ olsun. O zaman $\alpha_1(s_1)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrilerinin Darboux çatıları arasındaki ilişki aşağıdaki gibi verilebilir.

$$\begin{bmatrix} T_1^* \\ Y_1^* \\ Z_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{(1-k_{n_1}(r_1+\lambda))}{\sqrt{(1-k_{n_1}(r_1+\lambda))^2 + (t_{r_1}(r_1-2\lambda))^2}} & \dfrac{-((t_{r_1}(r_1-2\lambda))}{\sqrt{(1-k_{n_1}(r_1+\lambda))^2 + (t_{r_1}(r_1-2\lambda))^2}} & 0 \\ \dfrac{((t_{r_1}(r_1-2\lambda))}{\sqrt{(1-k_{n_1}(r_1+\lambda))^2 + (t_{r_1}(r_1-2\lambda))^2}} & \dfrac{(1-k_{n_1}(r_1+\lambda))}{\sqrt{(1-k_{n_1}(r_1+\lambda))^2 + (t_{r_1}(r_1-2\lambda))^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix}$$

Teorem 4.3.2: M_1 yüzeyi üzerindeki $\alpha_1(s_1)$ eğrisi eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart $\alpha_1(s_1)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrilerinin Bertrand D-eğri cifti olmalarıdır.

İspat: M_1 yüzeyi üzerindeki $\alpha_1(s_1)$ eğrisi eğrilik çizgisi olduğundan $t_{r_1}=0$ dır. Bunu aşağıdaki eşitlikte yerine yazarsak

$$Y_1^* = \frac{1}{\sqrt{(1-k_{n_1}(r_1+\lambda))^2+(t_{r_1}(r_1-2\lambda))^2}}((t_{r_1}(r_1-2\lambda))T_1+(1-k_{n_1}(r_1+\lambda))Y_1)$$

$Y_1^* = \pm Y_1$ elde ederiz. Böylece $\alpha_1(s_1)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrileri Bertrand D-eğri çiftidir.

Tersine $\alpha_1(s_1)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ Bertrand D-eğri çifti olsunlar. Bu durumda Y_1^* ve Y_1 vektörlerinin lineer bağımlı olması gerekir. Yukarıdaki eşitliği göz önüne alırsak $t_{r_1}=0$ olması gerektiği kolayca görülebilir.

Teorem 4.3.3: Eğer $r_1 = 2\lambda$ olması için gerek ve yeter şart $\alpha_1(s_1)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrilerinin Bertrand D-eğri cifti olmalarıdır.

İspat: $r_1 = 2\lambda$ ifadesini aşağıdaki eşitlikte yerine yazarsak

$$Y_1^* = \frac{1}{\sqrt{(1-k_{n_1}(r_1+\lambda))^2+(t_{r_1}(r_1-2\lambda))^2}}((t_{r_1}(r_1-2\lambda))T_1+(1-k_{n_1}(r_1+\lambda))Y_1)$$

$Y_1^* = \pm Y_1$ elde ederiz. Böylece $\alpha_1(s_1)$ ve $\alpha_1(s_1)$eğrilerinin Bertrand D-eğri olduğu görülür. Tersine $\alpha_1(s_1)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ Bertrand D-eğri çifti olsunlar. Bu durumda Y_1^* ve Y_1 vektörlerinin lineer bağımlı olması gerekir.

$$Y_1^* = \frac{1}{\sqrt{(1-k_{n_1}(r_1+\lambda))^2+(t_{r_1}(r_1-2\lambda))^2}}((t_{r_1}(r_1-2\lambda))T_1+(1-k_{n_1}(r_1+\lambda))Y_1)$$

Yukarıdaki eşitliği de göz önüne alırsak, Y_1^* ve Y_1 vektörlerinin lineer bağımlı olması için $(t_{r_1}(r_1-2\lambda))T_1$ ifadesinin sıfır olması gerekir. Buradan da $r_1 = 2\lambda$ olması gerektiği görülür.

Teorem 4.3.4: $\alpha(s)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrileri Mannheim D-eğri cifti olması için gerek ve yeter şart $\tan\theta = \dfrac{t_{r_1}\left(r_1 - 2\lambda\right)}{1 - k_{n_1}\left(r_1 + \lambda\right)}$ olmasıdır. Burada θ açısı T_1 ve T vektörleri arasındaki açıdır.

İspat: Varsayalım ki $\alpha(s)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrileri Manheim D-eğri cifti olsun. O zaman aşağıdaki eşitliklere yazabiliriz (H. H Uğurlu, M Önder 2010).

$$T_1 = \cos\theta T + \sin\theta Z \quad \text{ve} \quad Y_1 = \sin\theta T - \cos\theta Z\,.$$

Bu eşitlikleri

$$Y_1^* = \frac{1}{\sqrt{(1-k_{n_1}(r_1+\lambda))^2 + (t_{r_1}(r_1-2\lambda))^2}}((t_{r_1}(r_1-2\lambda))T_1 + (1-k_{n_1}(r_1+\lambda))Y_1)$$

ifadesinde yerine yazıp gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} Y_1^* = \frac{1}{\sqrt{(1-k_{n_1}(r_1+\lambda))^2 + (t_{r_1}(r_1-2\lambda))^2}} & \Big\{(\cos\theta(t_{r_1}(r_1-2\lambda)) + \sin\theta(1-k_{n_1}(r_1+\lambda)))T \\ & + (\sin\theta(t_{r_1}(r_1-2\lambda)) - \cos\theta(1-k_{n_1}(r_1+\lambda)))Z\Big\} \end{aligned} \tag{4.47}$$

eşitliğini elde ederiz. $\alpha(s)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrileri Mannheim eğri çifti olduğundan Y_1^* ve Z vektörlerinin lineer bağımlı olması gerekir. (4.47) eşitliğini göz önüne aldığımızda Y_1^* ve Z vektörlerinin lineer bağımlı olması için

$$\Big\{(\cos\theta(t_{r_1}(r_1-2\lambda)) + \sin\theta(1-k_{n_1}(r_1+\lambda)))T$$

ifadesinin sıfır olması gerekir. T vektörü sıfır olamayacağından

$$(\cos\theta(t_{r_1}(r_1-2\lambda)) + \sin\theta(1-k_{n_1}(r_1+\lambda)) = 0$$

olur. Buradan da $\tan\theta = \dfrac{t_{r_1}\left(r_1 - 2\lambda\right)}{1 - k_{n_1}\left(r_1 + \lambda\right)}$ elde edilir.

Sonuç 4.3.1: $\beta(s_\beta)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrileri Manheim D- eğri cifti olması için gerek ve yeter şart $\tan\theta = \dfrac{t_{r_1}\left(r_1 - 2\lambda\right)}{1 - k_{n_1}\left(r_1 + \lambda\right)}$ olmasıdır. Burada θ açısı T_1 ve T vektörleri arasındaki açıdır.

İspat: $\beta(s_\beta)$ eğrisi M_r paralel yüzey üzerinde bir eğridir paralel yüzeylerde yüzey normalleri aynı olduğundan yukarıdaki teorem gereğince $\beta(s_\beta)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrileri Manheim D-eğri çiftidir gerek ve yeter şart $\tan\theta = \dfrac{t_{r_1}\left(r_1 - 2\lambda\right)}{1 - k_{n_1}\left(r_1 + \lambda\right)}$ olmasıdır.

Sonuç 4.3.2: $\alpha_1(s_1)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrilerinin Bertrand D-eğri çifti olması için gerek ve yeter şart $\tan\theta = \dfrac{t_{r_1}\left(r_1 - 2\lambda\right)}{1 - k_{n_1}\left(r_1 + \lambda\right)}$ olmasıdır. Burada θ açısı T_1 ve T vektörleri arasındaki açıdır.

İspat: $\alpha(s)$ ve $\alpha_1(s_1)$ eğrileri Mannheim eğri cifti olduğundan $Z = \pm Y_1$ eşitliğini yazabiliriz. Eğer bu ifadeyi (4.47) eşitliğinde yerine yazarsak

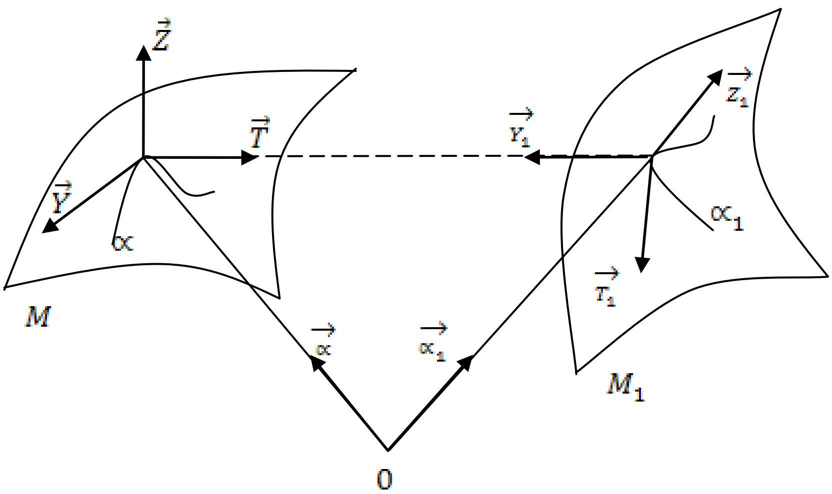
$$Y_1^* = \frac{1}{\sqrt{(1 - k_{n_1}(r_1 + \lambda))^2 + (t_{r_1}(r_1 - 2\lambda))^2}} \Big\{ (\cos\theta(t_{r_1}(r_1 - 2\lambda)) + \sin\theta(1 - k_{n_1}(r_1 + \lambda)))T$$
$$\pm (\sin\theta(t_{r_1}(r_1 - 2\lambda)) - \cos\theta(1 - k_{n_1}(r_1 + \lambda)))Y_1 \Big\}$$

eşitliğini elde etmiş oluruz. $\alpha_1(s_1)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrileri Bertrand D-eğri çifti olduğundan Y_1 ve Y_1^* vektörlerinin lineer bağımlı olması gerekir. Yukarıdaki eşitlik göz önüne alındığında $\tan\theta = \dfrac{t_{r_1}\left(r_1 - 2\lambda\right)}{1 - k_{n_1}\left(r_1 + \lambda\right)}$ elde edilir.

4.4. Öklid Uzayında İnvolüt-Evolüt D-Eğri Çiftinin Paralel Yüzey Üzerindeki Görüntüsü

Bu kısımda ise 3 boyutlu Öklid uzayında yönlendirilmiş M ve M_1 yüzeyleri üzerinde yatan $\alpha(s)$ ve $\alpha_1(s_1)$ eğrileri için involüt-evolüt D-eğri çiftinin tanımı verildi. Daha sonra, involüt-evolüt D-eğri çiftinin paralel yüzey üzerindeki görüntülerini elde edip görüntüleri ile kendileri arasındaki involüt-evolüt D-eğri olma şartını araştıracağız. Ayrıca elde ettiğimiz ifadelerden bazı teoremler ve sonuçlar vereceğiz.

Tanım 4.4.1: 3-boyutlu Öklid uzayında yönlendirilmiş iki yüzey M ve M_1 olsun. M ve M_1 üzerinde yatan ve yay uzunluğu parametresi ile verilen eğriler de, sırasıyla, $\alpha(s)$ ve $\alpha_1(s_1)$ olsun. $\alpha(s)$ ve $\alpha_1(s_1)$ eğrilerinin Darboux çatıları $\{T, Y, Z\}$ ve $\{T_1, Y_1, Z_1\}$ ile gösterilsin. Eğer $\alpha(s)$ ve $\alpha_1(s_1)$ eğrilerinin karşılıklı noktalarında, $\alpha(s)$ eğrisinin T Darboux çatı elemanı ile $\alpha_1(s_1)$ eğrisinin Y_1 Darboux çatı elemanı çakışıyorsa, bu takdirde $\alpha(s)$ e bir evolüte D-eğrisi ve $\alpha_1(s_1)$ eğrisine de $\alpha(s)$ eğrisinin bir involüt D-eğri çifti denir. Bu takdirde $\{\alpha, \alpha_1\}$ eğri çiftine bir involüt-Evolüt D-çifti adı verilir (Bektaş ve Yüce 2012).



Şekil 4.5. Involüt-Evolüt D-çifti

Şimdi ise Involute-Evolute D-eğri çiftinin paralel yüzey üzerindeki görüntüsünü inceleyelim. (4.1) deki kısımda M yüzeyi üzerindeki $\alpha(s)$ eğrisinin paralel yüzeyi üzerindeki görüntüsünü bulmuştuk. Şimdi, M_1 yüzeyi üzerindeki $\alpha_1(s_1)$ eğrisinin bu yüzeyin paralel yüzeyi olan M_{r_1} yüzeyi üzerindeki görüntüsünü elde edelim. $\alpha(s)$ ve $\alpha_1(s_1)$ involüt-evolüt D-eğri çifti olduğundan aşağıdaki eşitliği yazabiliriz (Bektaş ve Yüce 2012).

$$\alpha_1(s_1)=\alpha(s_1)-\lambda T_1(s_1)$$

(4.48)

$\left(\alpha_1(s_1),M_1\right)$ ikilisinin çatısı $\left\{T_1,Y_1,Z_1\right\}$ olsun. O zaman bu ikilinin Darboux türev formüleri de aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} T_1' &= k_{g_1}Y_1+k_{n_1}Z_1 \\ Y_1' &= -k_{g_1}T_1+t_{r_1}Z_1 \\ Z_1' &= -k_{n_1}T_1-t_{r_1}Y_1 \end{aligned} \tag{4.49}$$

M_1 ve M_{r_1} paralel yüzeyler olsun. $\alpha_1(s_1)$ eğrisi M_1 yüzeyi üzerinde, $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrisi de M_{r_1} paralel yüzeyi üzerinde bir eğri olsun. Bu durumda paralel yüzey tanımından $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrisi için bir parametrizasyon

$$\beta_1(s_{\beta_1})=\alpha_1(s_1)+r_1Z_1. \tag{4.50}$$

şeklindedir. (3.48) denklemini (3.50) de yerine yazarsak

$$\beta_1(s_{\beta_1})=\alpha(s_1)-\lambda T_1(s_1)+r_1Z_1(s_1) \tag{4.51}$$

elde ederiz. $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrisinin Darboux çatısını da $\left\{T_1^*,Y_1^*,Z_1\right\}$ olarak ele alalım. Bu çatıyı M_1 yüzeyi üzerindeki $\alpha_1(s_1)$ eğrisinin Darboux çatısını düşünerek bu çatımızı belirleyelim. (4.51) eşitliğinde s_1 e göre türev alınırsa

$$\frac{d\beta_1}{ds_1}=\frac{d\beta_1}{ds_{\beta_1}}\frac{ds_{\beta_1}}{ds_1}=\alpha'\left(s_1\right)\frac{ds}{ds_1}+T_1-\lambda T_1'+r_1Z_1' \tag{4.52}$$

elde edilir. Eğer (4.48) eşitliğinde s_1 e göre türev alınıp ve $\alpha_1(s_1)$ eğrisinin Darboux çatısını kullanırsak

$$\alpha'\left(s_1\right)\frac{ds}{ds_1}=T\frac{ds}{ds_1}=\lambda k_{g_1}Y_1+\lambda k_{n_1}Z_1 \tag{4.53}$$

elde edilir. (4.53) eşitliğini (4.52) de yerine yazıp gerekli düzenlemeler yapılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$T_1^* \frac{ds_{\beta_1}}{ds_1} = \left(1 - r_1 k_{n_1}\right) T_1 - \left(r_1 t_{r_1}\right) Y_1 \,. \tag{4.54}$$

(4.54) eşitliğinde her iki tarafın normu alınırsa

$$\frac{ds_{\beta_1}}{ds_1} = \sqrt{(1 - r_1 k_{n_1})^2 + (r_1 t_{r_1})^2} \tag{4.55}$$

bulunur. (4.55) eşitliğini (4.54) de yerine yazıp gerekli düzenlemeleri yapılırsa

$$T_1^* = \frac{1}{\sqrt{(1 - r_1 k_{n_1})^2 + (r_1 t_{r_1})^2}} \left((1 - r_1 k_{n_1}) T_1 - (r_1 t_{r_1}) Y_1\right) \tag{4.56}$$

Y_1^* vektörünü $Y_1^* = Z_1 \times T_1^*$ olarak alırsak vektörel çarpımının özelliğinden ve (4.56) den Y_1^* vektörünü aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$Y_1^* = \frac{1}{\sqrt{(1 - r_1 k_{n_1})^2 + (r_1 t_{r_1})^2}} \left((r_1 t_{r_1}) T_1 + (1 - r_1 k_{n_1}) Y_1\right) \tag{4.57}$$

Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.4.1: M_1 ve M_{r_1} 3-boyutlu Öklid uzayında yönlendirilebilir yüzeyler olsun. M_1 yüzeyi üzerindeki eğri $\alpha_1(s_1)$ ve M_{r_1} paralel yüzeyi üzerindeki eğri $\beta_1\left(s_{\beta_1}\right)$ olsun. O zaman $\alpha_1(s_1)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrilerinin Darboux çatıları arasındaki ilişki aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\begin{bmatrix} T_1^* \\ Y_1^* \\ Z_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{(1 - r_1 k_{n_1})}{\sqrt{(1 - r_1 k_{n_1})^2 + (r_1 t_{r_1})^2}} & \dfrac{-(r_1 t_{r_1})}{\sqrt{(1 - r_1 k_{n_1})^2 + (r_1 t_{r_1})^2}} & 0 \\ \dfrac{(r_1 t_{r_1})}{\sqrt{(1 - r_1 k_{n_1})^2 + (r_1 t_{r_1})^2}} & \dfrac{(1 - r_1 k_{n_1})}{\sqrt{(1 - r_1 k_{n_1})^2 + (r_1 t_{r_1})^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix}$$

Teorem 4.4.2: M yüzeyi üzerindeki $\alpha(s)$ eğrisinin asimptotik eğriliği $k_n = \frac{1}{r}$ olması için gerek ve yeter şart $\alpha(s)$ ve $\beta(s_\beta)$ eğrilerinin involüt-evolüt D-eğri çifti olmalarıdır.

İspat: M yüzeyi üzerindeki $\alpha(s)$ eğrisi asimptotik eğriliği $k_n = \frac{1}{r}$ olsun. Aşağıdaki eşitliği göz önüne alıp

$$Y^* = \frac{1}{\sqrt{(1-rk_n)^2 + (rt_r)^2}}\left[rt_r T + (1-rk_n)Y\right]$$

$k_n = \frac{1}{r}$ ifadesini yukarıdaki eşitlikte yerine yazarsak, $Y^* = \pm T$ elde ederiz. Böylece Y^* ve T vektörleri lineer bağımlı olduğundan tanım gereği $\alpha(s)$ ve $\beta(s_\beta)$ eğrileri involüt-evolüt D-eğri çifti olurlar.

Tersine $\alpha(s)$ ve $\beta(s_\beta)$ involüt-evolüt D-eğri çifti olsunlar. Bu durumda Y^* ve T vektörlerinin lineer bağımlı olması gerekir. $Y^* = \frac{1}{\sqrt{(1-rk_n)^2 + (rt_r)^2}}\left[rt_r T + (1-rk_n)Y\right]$ denklemini göz önüne alırsak, $k_n = \frac{1}{r}$ olması gerektiği görülür.

Teorem 4.4.3: M yüzeyi üzerindeki $\alpha(s)$ eğrisinin asimptotik eğriliği $k_n = \frac{1}{r}$ olsun. Bu durumda $\alpha_1(s_1)$ ve $\beta(s_\beta)$ eğrileri Bertrand D-eğri çifti olurlar.

İspat: M yüzeyi üzerindeki $\alpha(s)$ eğrisi asimptotik eğriliği $k_n = \frac{1}{r}$ olsun. Aşağıdaki eşitliği göz önüne alıp

$$Y^* = \frac{1}{\sqrt{(1-rk_n)^2 + (rt_r)^2}}\left[rt_r T + (1-rk_n)Y\right]$$

$k_n = \frac{1}{r}$ ifadesini yukarıdaki eşitlikte yerine yazarsak $Y^* = \pm T$ elde ederiz. Ayrıca $\alpha(s)$ ve $\alpha_1(s_1)$ eğrileri İnvolute-Evolute D-eğri çifti olduğundan $T = Y_1$ yazabiliriz. Bunu $Y^* = \pm T$ ifadesinde yerine yazarsak, $Y^* = \pm Y_1$ elde ederiz. Buradan da Y^* ve Y_1 vektörleri lineer bağımlı olduğundan, tanım gereği $\alpha_1(s_1)$ ve $\beta(s_\beta)$ eğrileri Bertrand D-eğri çifti olurlar.

Teorem 4.4.4: M_1 yüzeyi üzerindeki $\alpha_1(s_1)$ eğrisinin asimptotik eğriliği $k_{n_1} = \frac{1}{r}$ olması için gerek ve yeter şart $\alpha_1(s_1)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrilerinin involüt-evolüt D-eğri çifti olmalarıdır.

İspat: M_1 yüzeyi üzerindeki $\alpha_1(s_1)$ eğrisinin asimptotik eğriliği $k_{n_1} = \frac{1}{r}$ olsun. Aşağıdaki eşitliği göz önüne alıp

$$Y_1^* = \frac{1}{\sqrt{(1-r_1k_{n_1})^2 + (r_1t_{r_1})^2}}((r_1t_{r_1})T_1 + (1-r_1k_{n_1})Y_1)$$

$k_{n_1} = \frac{1}{r}$ ifadesini yukarıdaki eşitlikte yerine yazarsak $Y_1^* = \pm T_1$ elde ederiz. Böylece Y_1^* ve T_1 vektörleri lineer bağımlı olduğundan tanım gereği $\alpha_1(s_1)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrileri involüt-evolüt D-eğri çifti olurlar. Tersine $\alpha_1(s_1)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ involüt-evolüt D-eğri cifti olsunlar. Bu durumda Y_1^* ve T_1 vektörlerinin lineer bağımlı olması gerekir. $Y_1^* = \frac{1}{\sqrt{(1-r_1k_{n_1})^2 + (r_1t_{r_1})^2}}((r_1t_{r_1})T_1 + (1-r_1k_{n_1})Y_1)$ eşitliğini göz önüne alırsak $k_{n_1} = \frac{1}{r}$ olması gerektiği görülür.

Teorem 4.4.5: $\alpha(s)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrilerinin Bertrand D-eğri çifti olsun. O zaman, $\tan\theta = \frac{r_1t_{r_1}}{1-r_1k_{n_1}}$ olur. Burada θ açısı T_1 ve T vektörleri arasındaki açıdır.

İspat: Varsayalım ki, $\alpha(s)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrileri involüt-evolüt D-eğri çifti olsun. Biz ayrıca aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz (Bektaş ve Yüce 2012).

$$T_1 = \cos\theta Y - \sin\theta Z \quad \text{ve} \quad Y_1 = \sin\theta Y + \cos\theta Z$$

Yukarıdaki ifadeler $Y_1^* = \dfrac{1}{\sqrt{(1-r_1k_{n_1})^2 + (r_1t_{r_1})^2}}((r_1t_{r_1})T_1 + (1-r_1k_{n_1})Y_1)$ eşitliğinde yerine yazılırsa, aşağıdaki eşitliği

$$Y_1^* = \frac{1}{\sqrt{(1-r_1k_{n_1})^2 + (r_1t_{r_1})^2}}((r_1t_{r_1}\cos\theta + (1-r_1k_{n_1})\sin\theta)Y - (r_1t_{r_1}\sin\theta + (1-r_1k_{n_1})\cos\theta)Z$$

elde ederiz. $\alpha(s)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrileri Bertrand D-eğri çifti olduğundan Y_1^* ve Y vektörleri lineer bağımlı olması gerekir. Y_1^* ve Y vektörlerinin lineer bağımlı olması için $(r_1t_{r_1}\sin\theta + (1-r_1k_{n_1})\cos\theta)Z = 0$ olması gerekir. Burada Z vektörü sıfır olamayacağından $(r_1t_{r_1}\sin\theta + (1-r_1k_{n_1})\cos\theta) = 0$ olur. Böylece $\tan\theta = \dfrac{r_1t_{r_1}}{1-r_1k_{n_1}}$ elde ederiz.

Teorem 4.4.6: M_1 yüzeyi üzerindeki $\alpha_1(s_1)$ eğrisinin eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart $\alpha_1(s_1)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrilerinin Bertrand D-eğri cifti olmalarıdır.

İspat: M_1 yüzeyi üzerindeki $\alpha_1(s_1)$ eğrisi eğrilik çizgisi olduğundan $t_{r_1} = 0$ dır. $t_{r_1} = 0$ ifadesini, $Y_1^* = \dfrac{1}{\sqrt{(1-r_1k_{n_1})^2 + (r_1t_{r_1})^2}}((r_1t_{r_1})T_1 + (1-r_1k_{n_1})Y_1)$ eşitliğinde yerine yazarsak $Y_1^* = \pm Y_1$ elde ederiz. Y_1^* ve Y_1 vektörleri lineer bağımlı olduğundan $\alpha_1(s_1)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrileri Bertrand D-eğrileridir.

4.5. Minkowski Uzayında Bir Yüzey Üzerindeki α Eğrisinin Paralel Yüzey Üzerindeki Görüntüsü

Bu bölümde biz ilk olarak Minkowski 3-uzayda paralel yüzey tanımından faydalanarak yüzey üzerindeki bir eğrinin paralel yüzey üzerindeki görüntüsünü elde ettik. Daha sonra paralel yüzey üzerindeki eğrinin Darboux çatısı bulunarak paralel yüzey üzerindeki eğrinin eğriliklerini hesaplayıp yüzey üzerindeki eğrinin eğrilikleri ile paralel yüzey üzerindeki eğrinin eğrilikleri arasındaki ilişkileri gösterdik. Ayrıca, elde ettiğimiz bu ifadelerden bazı teoremler ve sonuçlar verdik.

3-boyutlu Minkowski uzayında eğri ve yüzeyin karakterine bağlı olarak 3 durum söz konusudur. Biz sadece timelike yüzey üzerindeki timelike ve spacelike eğri durumları için inceleme yapacağız.

4.5.1. Timelike yüzey üzerindeki Timelike α eğrisinin paralel yüzey üzerindeki görüntüsü

M ve M_r 3-boyutlu Öklid uzayında yönlendirilebilir timelike yüzeyler olsun. M yüzeyi üzerindeki bir timelike eğri $\alpha(s)$ ve M_r timelike paralel yüzeyi üzerindeki timelike eğri $\beta(s_\beta)$ olsun. Eğer paralel yüzey tanımını kullanırsak paralel yüzey üzerindeki $\beta(s_\beta)$ eğrisi için bir parametrizasyon aşağıdaki gibi verilebilir.

$$\beta(s_\beta) = \alpha(s) + rZ \tag{4.58}$$

M_r timelike paralel yüzey üzerindeki timelike $\beta(s_\beta)$ eğrisinin Darboux çatısını $\{T^*, Y^*, Z^*\}$ olarak alalım. Şimdi bu çatımızı oluşturmaya başlayalım. İlk olarak (4.58) denkleminde s ye göre türev alırsak

$$\frac{d\beta}{ds} = \frac{d\beta}{ds_\beta}\frac{ds_\beta}{ds} = \alpha'(s) + rZ' \tag{4.59}$$

elde edilir.

$\left(M,\alpha(s)\right)$ timelike eğri yüzey ikilisinin Darboux türev (2.3) formüllerini ele alıp (4.59) de yerine yazıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$T^* \frac{ds_\beta}{ds} = (1+rk_n)T + rt_r Y \tag{4.60}$$

eşitliği elde edilir. Yukarıdaki eşitlikte her iki tarafın normu alınırsa

$$\frac{ds_\beta}{ds} = \sqrt{\left|(rt_r)^2 - \left(1+rk_n\right)^2\right|} \tag{4.61}$$

elde edilir. (4.61) denklemini (4.60) de yerine yazarsak T^* vektörünü aşağıdaki gibi elde ederiz.

$$T^* = \frac{1}{\sqrt{\left|(rt_r)^2 - \left(1+rk_n\right)^2\right|}}\left[\left(1+rk_n\right)T + rt_r Y\right] \tag{4.62}$$

$Y^* = Z \times T^*$ eşitliğiyle tanımlanan Y^* vektör alanını göz önüne alalım. Z spacelike normal vektörü ile (4.62) nin vektörel çarpımını alıp ve Minkowski uzayda vektörel çarpımın özelliklerini kullanırsak

$$Y^* = \frac{1}{\sqrt{\left|(rt_r)^2 - \left(1+rk_n\right)^2\right|}}\left[rt_r T + \left(1+rk_n\right)Y\right] \tag{4.63}$$

elde ederiz. Böylece bulduğumuz bu eşitliklerden aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.5.1: M ve M_r 3-boyutlu Minkowski uzayda yönlendirilebilir timelike yüzeyler olsun. M yüzeyi üzerindeki timelike eğri $\alpha\left(s\right)$ ve M_r paralel yüzeyi üzerindeki timelike eğri $\beta(s_\beta)$ olsun. O zaman $\alpha(s)$ ve $\beta(s_\beta)$ eğrilerinin Darboux çatıları arasındaki ilişki aşağıdaki gibi verilebilir (Kızıltuğ ve Yaylı 2012).

$$\begin{bmatrix} T^* \\ Y^* \\ Z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1+rk_n}{\sqrt{\left|(rt_r)^2 - \left(1+rk_n\right)^2\right|}} & \frac{rt_r}{\sqrt{\left|(rt_r)^2 - \left(1+rk_n\right)^2\right|}} & 0 \\ \frac{rt_r}{\sqrt{\left|(rt_r)^2 - \left(1+rk_n\right)^2\right|}} & \frac{1+rk_n}{\sqrt{\left|(rt_r)^2 - \left(1+rk_n\right)^2\right|}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \tag{4.64}$$

Böylece $\left(M_r, \beta(s_\beta)\right)$ eğri-yüzey ikilisinin Darboux çatısını oluşturduk. Şimdi $\left(M_r, \beta(s_\beta)\right)$ eğri-yüzey ikilisinin eğriliklerini hesaplayalım. M_r timelike paralel yüzeyi üzerindeki timelike $\beta(s_\beta)$ eğrisinin geodezik eğriliği k_g^*, normal eğriliği k_n^* ve geodezik torsiyonu t_r^* olsun. $\beta(s_\beta)$ eğrisinin geodezik eğriliği

$$k_g^* = \left\langle \beta''(s_\beta),\, Y^* \right\rangle \tag{4.65}$$

şeklinde hesaplanır. (4.58) eşitliğinin iki kez s ye göre türevi alıp ve timelike yüzey üzerindeki timelike bir Darboux çatısını kullanırsak

$$\beta''(s_\beta) = (rk_n' + rt_r k_g)T + (k_g(1+rk_n) + rt_r')Y + (k_n(1+rk_n) - rt_r^2)Z \tag{4.66}$$

eşitliğini elde ederiz. (4.63) ve (4.66) eşitlikleri (4.65) de kullanılırsa

$$k_g^* = \left\langle (rk_n' + rt_r k_g)T + (k_g(1+rk_n) + rt_r')Y + (k_n(1+rk_n) - rt_r^2)Z,\ \frac{rt_r T + \left(1+rk_n\right)Y}{\sqrt{\left|(rt_r)^2 - \left(1+rk_n\right)^2\right|}} \right\rangle$$

elde edilir. Buradan gerekli düzenlemeleri yaparsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$\begin{aligned} k_g^* = {} & \left\langle (rk_n' + rt_r k_g)T, \frac{rt_r T}{\sqrt{\left|(rt_r)^2 - \left(1+rk_n\right)^2\right|}} \right\rangle + \left\langle (rk_n' + rt_r k_g)T, \frac{\left(1+rk_n\right)Y}{\sqrt{\left|(rt_r)^2 - \left(1+rk_n\right)^2\right|}} \right\rangle \\ & + \left\langle (k_g(1+rk_n) + rt_r')Y, \frac{rt_r T}{\sqrt{\left|(rt_r)^2 - \left(1+rk_n\right)^2\right|}} \right\rangle + \left\langle (k_g(1+rk_n) + rt_r')Y, \frac{\left(1+rk_n\right)Y}{\sqrt{\left|(rt_r)^2 - \left(1+rk_n\right)^2\right|}} \right\rangle \\ & + \left\langle (k_n(1+rk_n) - rt_r^2)Z, \frac{rt_r T}{\sqrt{\left|(rt_r)^2 - \left(1+rk_n\right)^2\right|}} \right\rangle + \left\langle (k_n(1+rk_n) - rt_r^2)Z, \frac{\left(1+rk_n\right)Y}{\sqrt{\left|(rt_r)^2 - \left(1+rk_n\right)^2\right|}} \right\rangle \end{aligned}$$

Yukarıdaki eşitlikte Minkowski uzayda iç çarpımın özelliklerini kullanıp gerekli işlemler yapılırsa, timelike $\beta(s_\beta)$ eğrisinin k_g^* geodezik eğriliği aşağıdaki gibi elde edilir.

$$k_g^* = \frac{-rt_r(rk_n' + rt_r k_g) + (1+rk_n)(k_g(1+rk_n) + rt_r')}{\sqrt{\left|(rt_r)^2 - \left(1+rk_n\right)^2\right|}} \tag{4.67}$$

Diğer taraftan $\beta(s_\beta)$ eğrisinin asimptotik eğriliği

$$k_n^* = \left\langle \beta''(s_\beta),\, Z^* \right\rangle \tag{4.68}$$

şeklinde hesaplanır. (4.66) ile Z^* vektörü (4.68) de yerine yazılırsa aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$k_n^* = \left\langle (rk_n' + rt_r k_g)T + (k_g(1+rk_n) + rt_r')Y + (k_n(1+rk_n) - rt_r^2)Z, Z^* \right\rangle .$$

Buradan da Minkowski uzayda iç çarpımın özelliklerini kullanıp $Z = Z^*$ olduğu göz önüne alınırsa $\beta(s_\beta)$ eğrisinin k_n^* normal eğriliği aşağıdaki gibi elde edilir.

$$k_n^* = k_n(1+rk_n) - rt_r^2 . \tag{4.69}$$

$\beta(s_\beta)$ eğrisinin geodezik torsiyonu

$$t_r^* = -\left\langle Z',\, Y^* \right\rangle \tag{4.70}$$

şeklinde hesaplanır. (4.63) ile Z' yukarıdaki eşitlikte yerine yazarsak

$$t_r^* = -\left\langle k_n T + t_r Y,\ \frac{rt_r T + (1+rk_n)Y}{\sqrt{\left|(rt_r)^2 - (1+rk_n)^2\right|}} \right\rangle$$

eşitliğini elde ederiz. Yukarıdaki eşitliği düzenleyip benzer işlemler yapılırsa $\beta(s_\beta)$ eğrisinin t_r^* geodezik torsiyonu aşağıdaki gibi bulunur.

$$t_r^* = \frac{-t_r}{\sqrt{\left|(rt_r)^2 - (1+rk_n)^2\right|}} . \tag{4.71}$$

Böylece (4.67), (4.69) ve (4.71) eşitliklerinden aşağıdaki teoremleri verebiliriz.

Teorem 4.5.2: M ve M_r 3-boyutlu Minkowski uzayında yönlendirilebilir timelike yüzeyler olsun. M yüzeyi üzerindeki timelike eğri $\alpha(s)$ ve M_r paralel yüzeyi üzerindeki timelike eğri $\beta(s_\beta)$ olsun.

O zaman $\alpha(s)$ ve $\beta(s_\beta)$ eğrilerinin geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik torsiyonu arasındaki ilişki aşağıdaki gibi verilebilir (Kızıltuğ ve Yaylı 2012):

(1) $$k_g^* = \frac{-rt_r(rk_n' + rt_r k_g) + (1+rk_n)(k_g(1+rk_n) + rt_r')}{\sqrt{\left|(rt_r)^2 - (1+rk_n)^2\right|}}$$

(2) $$k_n^* = k_n(1+rk_n) - rt_r^2$$

(3) $$t_r^* = \frac{-t_r}{\sqrt{\left|(rt_r)^2 - (1+rk_n)^2\right|}}.$$

Teorem 4.5.3: M timelike yüzeyi üzerine uzanan $\alpha(s)$ eğrisi asimptotik eğri olsun. Bu durumda $\beta(s_\beta)$ eğrisinin geodezik eğriliği k_g^*, normal eğriliği k_n^* ve geodezik torsiyonu t_r^* aşağıdaki gibidir (Kızıltuğ ve Yaylı 2012):

(1) $$k_g^* = \frac{k_g(r^2t_r^2 - 1) + rt_r'}{\sqrt{\left|-1 + r^2t_r^2\right|}},$$

(2) $$k_n^* = -rt_r^2,$$

(3) $$t_r^* = \frac{-t_r}{\sqrt{\left|-1 + r^2t_r^2\right|}}$$

İspat: M yüzey üzerine uzanan $\alpha(s)$ eğrisi asimptotik eğri olduğundan $k_n = 0$ dır. Bunu teorem (3.2) de yerine yazarsak ispatımız tamamlanmış olur.

Teorem 4.5.4: M timelike yüzeyi üzerine uzanan $\alpha(s)$ eğrisi eğrilik çizgisi olsun. Bu durumda $\beta(s_\beta)$ eğrisinin geodezik eğriliği k_g^*, normal eğriliği k_n^* ve geodezik torsiyonu t_r^* aşağıdaki gibidir (Kızıltuğ ve Yaylı 2012).

(1) $$k_g^* = \pm k_g(1+rk_n),$$

(2) $$k_n^* = k_n(1+rk_n),$$

(3) $$t_r^* = 0$$

İspat: M yüzeyi üzerine uzanan $\alpha(s)$ eğrisi eğrilik çizgisi olduğundan $t_r = 0$ dır. Bunu teorem (3.2) de yerine yazarsak ispatımız tamamlanmış olur.

Böylece Teorem (4.4.4) den aşağıdaki sonuçları verebiliriz.

Sonuç 4.5.1: M timelike yüzeyi üzerine uzanan $\alpha(s)$ eğrisi eğrilik çizgisi olsun. O zaman M_r timelike paralel yüzeyi üzerindeki $\beta(s_\beta)$ eğrisinin asimptotik eğri olması için gerek ve yeter şart $\alpha(s)$ eğrisinin asimptotik eğri olmasıdır (Kızıltuğ ve Yaylı 2012).

Sonuç 4.5.2: M timelike yüzeyi üzerine uzanan $\alpha(s)$ eğrisi eğrilik çizgisi olsun. O zaman M_r timelike paralel yüzeyi üzerindeki $\beta(s_\beta)$ eğrisinin geodezik eğri olması için gerek ve yeter şart $\alpha(s)$ eğrisinin geodezik eğri olmasıdır.

Teorem 4.5.5: M timelike yüzeyi üzerine uzanan timelike $\alpha(s)$ eğrisinin asimptotik eğriliği $k_n = \dfrac{-1}{r}$ olsun. Bu durumda $\beta(s_\beta)$ eğrisinin geodezik eğriliği k_g^*, normal eğriliği k_n^* ve geodezik torsiyonu t_r^* aşağıdaki gibidir (Kızıltuğ ve Yaylı 2012):

(1) $k_g^* = \pm r k_g t_r$,

(2) $k_n^* = -r t_r^2$,

(3) $t_r^* = \dfrac{\pm 1}{r}$.

İspat: Eğer $k_n = \dfrac{-1}{r}$ olarak alıp, teorem (4.4.1) de yerine yazarsak yukarıdaki eşitlikleri kolayca elde ederiz.

Böylece teorem (4.5.5) den aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 4.5.3: M timelike yüzeyi üzerine uzanan timelike $\alpha(s)$ eğrisinin asimptotik eğriliği $k_n = \frac{-1}{r}$ olsun. O zaman M_r timelike paralel yüzeyi üzerindeki timelike $\beta(s_\beta)$ eğrisinin geodezik eğri olması için gerek ve yeter şart $\alpha(s)$ eğrisinin geodezik eğri olmasıdır (Kızıltuğ ve Yaylı 2012)..

Teorem 4.5.6: M sabit açılı bir timelike yüzey ve M_r de bu yüzeyin paralel yüzeyi olsun. Eğer M yüzeyi üzerine uzanan timelike $\alpha(s)$ eğrisi hem geodezik hem de eğrilik çizgisi ise bu durumda M yüzeyi üzerindeki $\alpha(s)$ eğrisinin Slant helis olması için gerek ve yeter şart M_r paralel yüzeyi üzerindeki $\beta(s_\beta)$ eğrisinin Slant helis olmasıdır (Kızıltuğ ve Yaylı 2012)..

İspat: M yüzeyi sabit açılı bir yüzey olduğundan, yüzeyin normali Z, sabit bir k doğrultuyla sabit bir açı yapar. Yani

$$\langle Z, k \rangle = \theta \tag{4.71}$$

yazılır. Yüzey üzerindeki bir eğri geodezik eğri ise yüzeyin normal vektörü ile eğrinin normal vektörü çakıştığından, $Z = N$ yazabiliriz. Bunu (4.71) de yerine yazarsak

$$\langle N, k \rangle = \theta \tag{4.72}$$

elde edilir. Slant helis tanımından eğrinin asli normali sabit bir doğrultuyla sabit bir açı yaptığından (4.72) den $\alpha(s)$ eğrisi slant helistir. Bu durumda sabit açılı yüzey üzerindeki geodezik eğri bir slant helistir. Paralel yüzeylerde yüzey normalleri aynı olduğundan M_r paralel yüzeyi de sabit açılı yüzeydir. Sonuç (4.5.2) den M_r paralel yüzeyi üzerindeki $\beta(s_\beta)$ eğrisi de geodezik eğridir. Buna göre,

$$\langle Z^*, k \rangle = \langle N^*, k \rangle = \theta \tag{4.73}$$

eşitliğini yazabiliriz. Burada N^*, $\beta(s_\beta)$ eğrisinin normal vektörüdür. Dolayısıyla $\beta(s_\beta)$ eğrisi de slant helistir.

Tersine, M_r paralel yüzey üzerindeki $\beta(s_\beta)$ eğrisi slant helis ise (4.73) eşitliğini yazabiliriz. Burada $Z = N^*$ olduğundan $\beta(s_\beta)$ geodezik bir eğridir. Dolayısıyla sonuç (4.5.2) den $\alpha(s)$ de bir geodezik eğridir. Böylece $\alpha(s)$ slant helistir.

Teorem 4.5.7: M sabit açılı bir timelike yüzey ve M_r de bu yüzeyin paralel yüzeyi olsun. Eğer M yüzeyi üzerindeki $\alpha(s)$ eğrisi hem asimptotik hem de eğrilik çizgisi ise, bu durumda M yüzeyi üzerindeki $\alpha(s)$ eğrisinin genel helis olması için gerek ve yeter şart M_r paralel yüzeyi üzerindeki $\beta(s_\beta)$ eğrisinin genel helis olmasıdır (Kızıltuğ ve Yaylı 2012).

İspat: M yüzeyi sabit açılı bir yüzey olduğundan, yüzeyin Z normali sabit bir k doğrultuyla sabit bir açı yapar. Yani,

$$\langle Z, k \rangle = \theta \tag{4.74}$$

dır. Yüzey üzerindeki bir eğri asimptotik eğri ise yüzeyin normal vektörü ile eğrinin binormal vektörü çakıştığından, $Z = B$ yazabiliriz. Bunu (4.74) de yerine yazarsak

$$\langle B, k \rangle = \theta \tag{4.75}$$

elde edilir.

Genel helis tanımından eğrinin binormal vektörü sabit bir doğrultuyla sabit bir açı yaptığından, $\alpha(s)$ genel helistir. Paralel yüzeylerde yüzey normalleri aynı olduğundan M_r paralel yüzeyi de sabit açılı yüzeydir. Sonuç (3.6) dan M_r paralel yüzeyi üzerindeki $\beta(s_\beta)$ eğrisi de asimptotik eğridir. Dolayısıyla

$$\langle Z, k \rangle = \langle B^*, k \rangle = \theta \tag{4.76}$$

eşitliğini yazabiliriz.

Burada B^*, $\beta(s_\beta)$ eğrisinin binormal vektörüdür. Dolayısıyla $\beta(s_\beta)$ eğrisi de genel helisidir. Tersine, M_r paralel yüzeyi üzerindeki $\beta(s_\beta)$ eğrisi genel helis olsun.

Dolayısıyla (4.76) eşitliğini yazabiliriz. Burada $Z = B^*$ olduğundan $\beta(s_\beta)$ asimptotik bir eğridir.

Böylece sonuç (4.5.1) den $\alpha(s)$ asimptotik eğridir. Sonuç olarak $\alpha(s)$ genel helistir.

Teorem 4.5.8: M Minkowski uzayında yönlendirilebilir bir timelike yüzey ve M_r de bu yüzeyin paralel yüzeyi olsun. Eğer M yüzeyi üzerine uzanan $\alpha(s)$ eğrisi eğrilik çizgisi ise bu durumda, M yüzeyi üzerindeki $\alpha(s)$ eğrisinin bir genel helis olması için gerek ve yeter şart M_r paralel yüzeyi üzerindeki $\beta(s_\beta)$ eğrisinin de genel helis olmasıdır (Kızıltuğ ve Yaylı 2012).

İspat: $\alpha(s)$ eğrisi helis olduğundan eğrinin teğet vektörü sabit bir doğrultuyla sabit bir acı yapar, yani,

$$\langle T, k \rangle = sabit \tag{4.78}$$

yazabiliriz. Ayrıca M yüzeyi üzerindeki $\alpha(s)$ eğrisi eğrilik çizgisi olduğundan $t_r = 0$ olduğunu biliyoruz. Bunu aşağıdaki eşitlikte yerine yazalım.

$$T^* = \frac{1}{\sqrt{\left|(rt_r)^2 - (1 + rk_n)^2\right|}} \left[(1 + rk_n) T + rt_r Y \right]$$

$$T^* = \pm T \tag{4.79}$$

elde ederiz. (4.79) ifadesini (4.78) de yerine yazarsak

$$\langle T^*, k \rangle = sabit \tag{4.80}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\beta(s_\beta)$ eğrisinin birim teğet vektörü sabit bir doğrultuyla sabit bir açı yaptığından $\beta(s_\beta)$ eğrisi de bir genel helistir.

Tersine olarak paralel yüzeylerde eğrilik çizgileri korunduğundan $T^* = \pm T$ eşitliğini yazabiliriz. Böylece $\alpha(s)$ eğrisi de genel helis olur.

4.5.2. Timelike yüzey üzerindeki Spacelike α eğrisinin paralel yüzey üzerindeki görüntüsü

M ve M_r 3-boyutlu Öklid uzayında yönlendirilebilir timelike yüzeyler olsunlar. M yüzeyi üzerindeki spacelike eğri $\alpha(s)$ ve M_r timelike paralel yüzeyi üzerindeki spacelike eğri $\beta(s_\beta)$ olsun. Eğer paralel yüzey tanımını kullanırsak paralel yüzey üzerindeki $\beta(s_\beta)$ eğrisi için bir parametrizasyon aşağıdaki gibi verilebilir.

$$\beta(s_\beta) = \alpha(s) + rZ \tag{4.81}$$

M_r timelike paralel yüzey üzerindeki spacelike $\beta(s_\beta)$ eğrisinin Darboux çatısını $\{T^*, Y^*, Z^*\}$ olarak alalım. Şimdi bu çatımızı oluşturmaya başlayalım. İlk olarak (4.81) denkleminde s ye göre türev alırsak

$$\frac{d\beta}{ds} = \frac{d\beta}{ds_\beta}\frac{ds_\beta}{ds} = \alpha'(s) + rZ' \tag{4.82}$$

elde edilir. $(M, \alpha(s))$ eğri yüzey ikilisinin (2.3) deki Darboux türev formüllerini ele alıp (4.82) de yerine yazdıktan sonra gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$T^* \frac{ds_\beta}{ds} = (1 + rk_n)T + rt_r Y \tag{4.83}$$

eşitliği elde edilir. Yukarıdaki eşitlikte her iki tarafın normu alınırsa

$$\frac{ds_\beta}{ds} = \sqrt{\left|(rt_r)^2 - (1 + rk_n)^2\right|} \tag{4.84}$$

bulunur. (4.84) denklemini (4.83) de yerine yazarsak T^* vektörünü aşağıdaki gibi elde etmiş oluruz.

$$T^* = \frac{1}{\sqrt{\left|(rt_r)^2 - (1 + rk_n)^2\right|}}\left[(1 + rk_n)T + rt_r Y\right] \tag{4.85}$$

$Y^* = -Z \times T^*$ eşitliğiyle tanımlanan Y^* vektör alanını göz önüne alalım. Z spacelike normal vektörü ile (4.85) in vektörel çarpımını alıp ve Minkowski uzayda vektörel çarpımın özelliklerini kullanırsak

$$Y^* = \frac{1}{\sqrt{\left|(rt_r)^2 - \left(1+rk_n\right)^2\right|}}\left[-rt_r T - \left(1+rk_n\right)Y\right] \tag{4.86}$$

elde ederiz. Böylece bulduğumuz bu eşitliklerden aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.5.9: M ve M_r 3-boyutlu Minkowski uzayında yönlendirilebilir timelike yüzeyler olsun. M yüzeyi üzerindeki spacelike eğri $\alpha(s)$ ve M_r paralel yüzeyi üzerindeki spacelike eğri $\beta(s_\beta)$ olsun. O zaman $\alpha(s)$ ve $\beta(s_\beta)$ eğrilerinin Darboux çatıları arasındaki ilişki aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\begin{bmatrix} T^* \\ Y^* \\ Z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1+rk_n}{\sqrt{\left|(rt_r)^2 - \left(1+rk_n\right)^2\right|}} & \dfrac{rt_r}{\sqrt{\left|(rt_r)^2 - \left(1+rk_n\right)^2\right|}} & 0 \\ \dfrac{-rt_r}{\sqrt{\left|(rt_r)^2 - \left(1+rk_n\right)^2\right|}} & \dfrac{-1-rk_n}{\sqrt{\left|(rt_r)^2 - \left(1+rk_n\right)^2\right|}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ Y \\ Z \end{bmatrix}. \tag{4.87}$$

Böylece $\left(M_r, \beta(s_\beta)\right)$ eğri-yüzey ikilisinin Darboux çatısını oluşturmuş olduk. Şimdi $\left(M_r, \beta(s_\beta)\right)$ eğri-yüzey ikilisinin eğriliklerini hesaplayalım. M_r timelike paralel yüzeyi üzerindeki spacelike $\beta(s_\beta)$ eğrisinin geodezik eğriliği k_g^*, normal eğriliği k_n^* ve geodezik torsion t_r^* olsun. $\beta(s_\beta)$ eğrisinin geodezik eğriliği

$$k_g^* = \left\langle \beta''(s_\beta),\, Y^* \right\rangle \tag{4.88}$$

şeklinde hesaplanır. (4.81) eşitliğinin iki kez s ye göre türevi alınıp, (2.3) Darboux türev formülleri kullanılırsa

$$\beta''(s_\beta) = (rk_n' - rt_r k_g)T + (k_g(1+rk_n) + rt_r')Y + (k_n(1+rk_n) - rt_r^2)Z \tag{4.89}$$

eşitliği elde edilir. (4.86) ve (4.89) eşitliklerini (4.88) de yerine yazarsak

$$k_g^* = \left\langle (rk_n' - rt_r k_g)T + (k_g(1+rk_n) + rt_r')Y + (k_n(1+rk_n) - rt_r^2)Z,\ \frac{-rt_r T - \left(1+rk_n\right)Y}{\sqrt{\left|(rt_r)^2 - \left(1+rk_n\right)^2\right|}} \right\rangle$$

olur. Gerekli düzenlemeleri yaparsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$k_g^* = \left\langle (rk_n' - rt_r k_g)T, \frac{-rt_r T}{\sqrt{\left|(rt_r)^2 - (1+rk_n)^2\right|}} \right\rangle + \left\langle (rk_n' - rt_r k_g)T, \frac{-(1+rk_n)Y}{\sqrt{\left|(rt_r)^2 - (1+rk_n)^2\right|}} \right\rangle$$

$$+ \left\langle (k_g(1+rk_n) + rt_r')Y, \frac{-rt_r T}{\sqrt{\left|(rt_r)^2 - (1+rk_n)^2\right|}} \right\rangle + \left\langle (k_g(1+rk_n) + rt_r')Y, \frac{-(1+rk_n)Y}{\sqrt{\left|(rt_r)^2 - (1+rk_n)^2\right|}} \right\rangle$$

$$+ \left\langle (k_n(1+rk_n) - rt_r^2)Z, \frac{-rt_r T}{\sqrt{\left|(rt_r)^2 - (1+rk_n)^2\right|}} \right\rangle + \left\langle (k_n(1+rk_n) - rt_r^2)Z, \frac{-(1+rk_n)Y}{\sqrt{\left|(rt_r)^2 - (1+rk_n)^2\right|}} \right\rangle$$

Bu eşitlikte Minkowski uzayında iç çarpımın özelliklerini kullanıp, gerekli işlemler yapılırsa, spacelike $\beta(s_\beta)$ eğrisinin k_g^* geodezik eğriliğini aşağıdaki gibi elde ederiz.

$$k_g^* = \frac{-rt_r(rk_n' - rt_r k_g) - (1+rk_n)(k_g(1+rk_n) + rt_r')}{\sqrt{\left|(rt_r)^2 - (1+rk_n)^2\right|}} \tag{4.90}$$

$\beta(s_\beta)$ eğrisinin asimptotik eğriliği

$$k_n^* = \left\langle \beta''(s_\beta),\, Z^* \right\rangle \tag{4.91}$$

şeklinde hesaplanır. (4.89) ifadesi ile Z^* vektörü (4.91) de yerine yazılırsa aşağıdaki eşitliği elde ederiz

$$k_n^* = \left\langle (rk_n' - rt_r k_g)T + (k_g(1+rk_n) + rt_r')Y + (k_n(1+rk_n) - rt_r^2)Z, Z^* \right\rangle.$$

Buradan da Minkowski uzayında iç çarpımın özelliklerini kullanıp $Z = -Z^*$ olduğu göz önüne alırsak $\beta(s_\beta)$ eğrisinin k_n^* normal eğriliği aşağıdaki gibi elde edilir.

$$k_n^* = -k_n(1+rk_n) + rt_r^2 \tag{4.92}$$

$\beta(s_\beta)$ eğrisinin geodezik torsiyonu

$$t_r^* = -\left\langle Z',\, Y^* \right\rangle \tag{4.93}$$

şeklinde hesaplanır. (4.86) ile Z' yukarıdaki eşitlikte yerine yazarsak

$$t_r^* = -\left\langle k_n T + t_r Y,\ \frac{rt_r T + (1+rk_n)Y}{\sqrt{\left|(rt_r)^2 - (1+rk_n)^2\right|}} \right\rangle$$

eşitliğini elde ederiz. Yukarıdaki eşitliği düzenleyip benzer işlemler yapılırsa $\beta(s_\beta)$ eğrisinin t_r^* geodezik torsiyonu aşağıdaki gibi bulunur.

$$t_r^* = \frac{-t_r}{\sqrt{\left|(rt_r)^2 - (1+rk_n)^2\right|}}. \tag{4.94}$$

Böylece (4.90), (4.92) ve (4.94) eşitliklerinden aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.5.10: M ve M_r 3-boyutlu Minkowski uzayında yönlendirilebilir timelike yüzeyler olsun. M yüzeyi üzerindeki spacelike eğri $\alpha(s)$ ve M_r paralel yüzeyi üzerindeki spacelike eğri $\beta(s_\beta)$ olsun. O zaman $\alpha(s)$ ve $\beta(s_\beta)$ eğrilerinin geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik torsiyonu arasındaki ilişki aşağıdaki gibi verilebilir.

(1) $$k_g^* = \frac{-rt_r(rk_n' - rt_r k_g) - (1+rk_n)(k_g(1+rk_n) + rt_r')}{\sqrt{\left|(rt_r)^2 - (1+rk_n)^2\right|}},$$

(2) $$k_n^* = -k_n(1+rk_n) + rt_r^2,$$

(3) $$t_r^* = \frac{t_r(1+2rk_n t_r)}{\sqrt{\left|(rt_r)^2 - (1+rk_n)^2\right|}}.$$

Teorem 4.5.11: M timelike yüzeyi üzerine uzanan spacelike $\alpha(s)$ eğrisi asimptotik eğri olsun. Bu durumda $\beta(s_\beta)$ eğrisinin geodezik eğriliği k_g^*, normal eğriliği k_n^* ve geodezik torsiyonu t_r^* aşağıdaki gibidir.

(1) $$k_g^* = \frac{k_g(r^2 t_r^2 - 1) - rt_r'}{\sqrt{\left|-1 + r^2 t_r^2\right|}},$$

(2) $$k_n^* = rt_r^2,$$

(3) $$t_r^* = \frac{t_r}{\sqrt{\left|-1 + r^2 t_r^2\right|}}.$$

İspat: M yüzey üzerine uzanan $\alpha(s)$ eğrisi asimptotik eğri olduğundan $k_n = 0$ dır. Bunu teorem (4.5.10) de yerine yazarsak ispatımız tamamlanmış olur.

Teorem 4.5.12: M timelike yüzeyi üzerine uzanan spacelike $\alpha(s)$ eğrisi eğrilik çizgisi olsun. Bu durumda $\beta(s_\beta)$ eğrisinin geodezik eğriliği k_g^*, normal eğriliği k_n^* ve geodezik torsiyonu t_r^* aşağıdaki gibidir.

(1) $k_g^* = \pm k_g(1 + rk_n)$,

(2) $k_n^* = -k_n(1 + rk_n)$,

(3) $t_r^* = 0$.

İspat: M yüzeyi üzerinde uzanan $\alpha(s)$ eğrisi eğrilik çizgisi olduğundan $t_r = 0$ dır. Bunu teorem (4.5.10) da yerine yazarsak ispatımız tamamlanmış olur.

Böylece teorem (4.5.12) den aşağıdaki sonuçları verebiliriz.

Sonuç 4.5.4: M timelike yüzeyi üzerine uzanan spacelike $\alpha(s)$ eğrisi eğrilik çizgisi olsun. Bu durumda M_r timelike paralel yüzeyi üzerindeki spacelike $\beta(s_\beta)$ eğrisinin asimptotik eğri olması için gerek ve yeter şart $\alpha(s)$ eğrisinin asimptotik eğri olmasıdır.

Sonuç 4.5.5: M timelike yüzeyi üzerine uzanan $\alpha(s)$ eğrisi eğrilik çizgisi olsun. O zaman M_r timelike paralel yüzeyi üzerindeki $\beta(s_\beta)$ eğrisinin geodezik eğri olması için gerek ve yeter şart $\alpha(s)$ eğrisinin geodezik eğri olmasıdır.

Teorem 4.5.13: M timelike yüzeyi üzerine uzanan spacelike $\alpha(s)$ eğrisinin asimptotik eğriliği $k_n = \dfrac{-1}{r}$ olsun. Bu durumda $\beta(s_\beta)$ eğrisinin geodezik eğriliği k_g^*, normal eğriliği k_n^* ve geodezik torsiyonu t_r^* aşağıdaki gibidir.

(1) $k_g^* = \pm r k_g t_r$,

(2) $k_n^* = r t_r^2$,

(3) $t_r^* = \dfrac{\pm 1}{r}$.

İspat: Eğer $k_n = \dfrac{-1}{r}$ olarak alıp ver teorem (4.5.10) yerine yazarsak yukarıdaki eşitlikleri kolayca elde ederiz.

Böylece teorem (4.5.13) den aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 4.5.6: M timelike yüzeyi üzerine uzanan spacelike $\alpha(s)$ eğrisinin asimptotik eğriliği $k_n = \dfrac{-1}{r}$ olsun. Bu durumda M_r timelike paralel yüzeyi üzerindeki spacelike $\beta(s_\beta)$ eğrisinin geodezik eğri olması için gerek ve yeter şart $\alpha(s)$ eğrisinin geodezik eğri olmasıdır.

Teorem 4.5.14: M sabit açılı bir timelike yüzey ve M_r de bu yüzeyin paralel yüzeyi olsun. Eğer M yüzeyi üzerine uzanan spacelike $\alpha(s)$ eğrisi hem geodezik hem de eğrilik çizgisi ise bu durumda M yüzeyi üzerindeki $\alpha(s)$ eğrisinin Slant helis olması için gerek ve yeter şart M_r paralel yüzeyi üzerindeki $\beta(s_\beta)$ eğrisinin Slant helis olmasıdır.

İspat: M yüzeyi sabit açılı bir yüzey olduğundan yüzeyin Z normali sabit bir k doğrultuyla sabit bir açı yapar. Yani,

$$\langle Z, k \rangle = \theta \tag{4.95}$$

yazabiliriz. Yüzey üzerindeki bir eğri geodezik eğri ise yüzeyin normal vektörü ile eğrinin normal vektörü çakışır. Yani $Z = N$ yazabiliriz. Bunu (4.95) de yerine yazarsak

$$\langle N, k \rangle = \theta \tag{4.96}$$

elde edilir. Slant helis tanımından eğrinin asli normali sabit bir doğrultuyla sabit bir açı yaptığından (4.96) den $\alpha(s)$ eğrisi slant helistir. Buradan şunu söyleyebiliriz, sabit açılı yüzey üzerindeki geodezik eğri bir slant helistir. Şimdi paralel yüzeylerde yüzey normalleri aynı olduğundan, M_r paralel yüzeyi de sabit açılı yüzeydir. Sonuç (4.5.5) den M_r paralel yüzey üzerindeki $\beta(s_\beta)$ eğrisi de geodezik eğridir. Dolayısıyla aşağıdaki eşitliği yazabiliriz

$$\langle Z^*, k\rangle = \langle N^*, k\rangle = \theta \qquad (4.97)$$

Burada, N^*, $\beta(s_\beta)$ eğrisinin normal vektörüdür. Dolayısıyla $\beta(s_\beta)$ eğrisi de slant helisidir.

Tersine, M_r paralel yüzeyi üzerindeki $\beta(s_\beta)$ eğrisi slant helis olsun. Buna göre (4.97) eşitliğini yazabiliriz. Burada $Z = N^*$ olduğundan $\beta(s_\beta)$ geodezik bir eğridir. Böylece sonuç (4.5.5) den $\alpha(s)$ de bir geodezik eğridir. Böylece $\alpha(s)$ slant helis dir.

Teorem 4.5.15: M sabit açılı bir timelike yüzey ve M_r de bu yüzeyin paralel yüzeyi olsun. Eğer M yüzeyi üzerine uzanan spacelike $\alpha(s)$ eğrisi hem asimptotik hem de eğrilik çizgisi ise bu durumda M yüzeyi üzerindeki $\alpha(s)$ eğrisinin genel helis olması için gerek ve yeter şart M_r paralel yüzeyi üzerindeki $\beta(s_\beta)$ eğrisinin de genel helis olmasıdır.

İspat: M yüzeyi sabit açılı bir yüzey olduğundan yüzeyin Z normali sabit bir k doğrultuyla sabit bir açı yapar. Yani

$$\langle Z, k\rangle = \theta \qquad (4.98)$$

dır. Yüzey üzerindeki bir eğri asimptotik eğri ise yüzeyin normal vektörü ile eğrinin binormal vektörü çakışır. Yani $Z = B$ yazabiliriz. Bunu (4.98) de yerine yazarsak

$$\langle B, k\rangle = \theta \qquad (4.99)$$

elde edilir.

Genel helis tanımından eğrinin binormal vektörü sabit bir doğrultuyla sabit bir açı yaptığından $\alpha(s)$ genel helistir. Paralel yüzeylerde yüzeylerin normalleri aynı olduğundan M_r paralel yüzeyi de sabit açılı yüzeydir. Sonuç (4.5.4) den M_r paralel yüzeyi üzerindeki $\beta(s_\beta)$ eğrisi de asimptotik eğridir. Dolayısıyla aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$\langle Z,k\rangle = \langle B^*,k\rangle = \theta \tag{4.100}$$

Burada, B^*, $\beta(s_\beta)$ eğrisinin binormal vektörüdür. Böylece $\beta(s_\beta)$ eğrisi de genel helisidir.

Tersine M_r paralel yüzeyi üzerindeki $\beta(s_\beta)$ eğrisi genel helis olsun. Buna göre (4.100) eşitliğini yazabiliriz. Burada $Z = B^*$ olduğundan $\beta(s_\beta)$ asimptotik bir eğridir. Dolayısıyla sonuç (4.5.4) den $\alpha(s)$ asimptotik eğridir. Dolayısıyla $\alpha(s)$ genel helistir.

Teorem 4.5.16: M Minkowski uzayında yönlendirilebilir bir timelike yüzey ve M_r de bu yüzeyin paralel yüzeyi olsun. Eğer M yüzeyi üzerine uzanan spacelike $\alpha(s)$ eğrisi eğrilik çizgisi ise bu durumda M yüzeyi üzerindeki $\alpha(s)$ eğrisinin bir genel helis olması için gerek ve yeter şart M_r paralel yüzeyi üzerindeki $\beta(s_\beta)$ eğrisinin de genel helis olmasıdır.

İspat: $\alpha(s)$ eğrisi helis olduğundan eğrinin teğet vektörü sabit bir doğrultuyla sabit bir açı yaptığından

$$\langle T,k\rangle = sabit \tag{4.101}$$

yazabiliriz. Ayrıca M yüzeyi üzerindeki $\alpha(s)$ eğrisi eğrilik çizgisi olduğundan $t_r = 0$ olduğunu biliyoruz. Bu,

$$T^* = \frac{1}{\sqrt{\left|(rt_r)^2 - (1+rk_n)^2\right|}}\left[(1+rk_n)T + rt_rY\right]$$

eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$T^* = \pm T \tag{4.102}$$

elde ederiz. (4.102) yi (4.101) de yerine yazarsak

$$\langle T^*,k\rangle = sabit \tag{4.103}$$

elde edilir. Buna göre, $\beta(s_\beta)$ eğrisinin birim teğet vektörü sabit bir doğrultuyla sabit bir açı yaptığından $\beta(s_\beta)$ eğrisi de bir helis olur.

Tersine olarak paralel yüzeylerde eğrilik çizgileri korunduğundan $T^* = \pm T$ eşitliğini yazabiliriz. Böylece $\alpha(s)$ eğrisi de genel helistir.

4.6. Minkowski Uzayında Bertrand D-eğri çiftinin Paralel Yüzey Üzerindeki Görüntüsü

Bu bölümde Minkowski 3-uzayında yönlendirilmiş M ve M_1 yüzeyleri üzerinde yatan $\alpha(s)$ ve $\alpha_1(s_1)$ eğrileri için Bertrand partner *D*-eğrilerini ele alacağız. Daha sonra, Bertrand partner *D*-eğrilerinin paralel yüzey üzerindeki görüntülerini inceleyip elde ettiğimiz ifadelerden bazı teoremler ve sonuçlar vereceğiz.

Tanım 4.6.1: 3-boyutlu Minkowski uzayında yönlendirilmiş iki yüzey M ve M_1 olsun. M ve M_1 üzerinde yatan ve yay uzunluğu parametresi ile verilen eğriler de, sırasıyla, $\alpha(s)$ ve $\alpha_1(s_1)$ olsun. $\alpha(s)$ ve $\alpha_1(s_1)$ eğrilerinin Darboux çatıları $\{T, Y, Z\}$ ve $\{T_1, Y_1, Z_1\}$ ile gösterilsin. Eğer, $\alpha(s)$ ve $\alpha_1(s_1)$ eğrilerinin karşılıklı noktalarında, $\alpha(s)$ eğrisinin Y Darboux çatı elemanı ile $\alpha_1(s_1)$ eğrisinin Y_1 Darboux çatı elemanı çakışıyorsa, bu taktirde $\alpha(s)$ e bir *Bertrand D-eğrisi* ve $\alpha_1(s_1)$ eğrisine de $\alpha(s)$ eğrisinin bir Bertrand partner D-eğrisidir denir. Bu takdirde $\{\alpha, \alpha_1\}$ eğri çiftine bir Bertrand D-çifti adı verilir. Eğer yönlendirilmiş M ve M_1 yüzeyleri üzerinde yatan böyle eğriler var ise $\{M, M_1\}$ yüzey çiftine Bertrand yüzey çifti denir (Kazaz 2010).

Şimdi, Bertrand D -eğri çiftinin paralel yüzey üzerindeki görüntüsüne bakalım. Yalnız Minkowski uzayda çalıştığımız için yukarıdaki tanıma göre eğri ve yüzeyin karakterine bağlı olarak 5 durum söz konusudur. Biz sadece timelike bir yüzey üzerinde timelike ve spacelike eğri durumlarını göz önüne alacağız.

İlk olarak eğri ve yüzeyimiz timelike olsun.

4.6.1. Minkowski uzayında timelike Bertrand D-Eğri çiftinin paralel yüzey üzerindeki görüntüsü

Biz (4.4.1) de M yüzeyi üzerindeki $\alpha(s)$ eğrisinin paralel yüzeyi üzerindeki görüntüsünü bulmuştuk. Şimdi, M_1 timelike yüzeyi üzerindeki timelike $\alpha_1(s_1)$ eğrisinin bu yüzeyin paralel yüzeyi olan timelike M_{r_1} yüzeyi üzerindeki görüntüsünü elde edelim.

$\alpha(s)$ ve $\alpha_1(s_1)$ Bertrand D-eğri çifti olduğundan tanıma göre

$$\alpha_1(s_1) = \alpha(s_1) - \lambda Y_1(s_1) \tag{4.104}$$

eşitliğini yazabiliriz [14]. $(\alpha_1(s_1), M_1)$ timelike eğri- yüzey ikilisinin çatısı $\{T_1, Y_1, Z_1\}$ olsun. O zaman bu ikilinin Darboux türev formülleri de aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} T_1' &= k_{g_1} Y_1 + k_{n_1} Z_1 \\ Y_1' &= k_{g_1} T_1 - t_{r_1} Z_1 \\ Z_1' &= k_{n_1} T_1 + t_{r_1} Y_1 \end{aligned} \tag{4.105}$$

M_1 ve M_{r_1} paralel timelike yüzeyler olsunlar. $\alpha_1(s_1)$ eğrisi M_1 yüzeyi üzerinde, $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrisi de M_{r_1} paralel yüzeyi üzerinde bir timelike eğri olsun. Bu durumda paralel yüzey tanımından $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrisi için bir parametrizasyon

$$\beta_1(s_{\beta_1}) = \alpha_1(s_1) + r_1 Z_1 \tag{4.106}$$

olarak verilebilir. (4.104) ü, (4.106) da yerine yazarsak aşağıdaki eşitlik elde edilir

$$\beta_1\left(s_{\beta_1}\right) = \alpha\left(s_1\right) - \lambda Y_1\left(s_1\right) + r_1 Z_1 . \tag{4.107}$$

$\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrisinin Darboux çatısını da $\{T_1^*, Y_1^*, Z_1\}$ olarak ele alalım. Bu çatıyı M_1 yüzeyi üzerindeki $\alpha_1(s_1)$ eğrisinin Darboux çatısını düşünerek bu çatımızı belirleyelim. (4.107) eşitliğinde s_1 parametresine göre türev alınırsa

$$\frac{d\beta_1}{ds_1}=\frac{d\beta_1}{ds_{\beta_1}}\frac{ds_{\beta_1}}{ds_1}=\alpha'\left(s_1\right)\frac{ds}{ds_1}-\lambda Y_1'\left(s_1\right)+r_1Z_1' \tag{4.108}$$

eşitliğini elde ederiz. Eğer (4.104) eşitliğinde s_1 e göre türev alıp $\alpha_1(s_1)$ eğrisinin Darboux türev formüllerini (3.2) kullanırsak

$$\alpha'\left(s_1\right)\frac{ds}{ds_1}=T\frac{ds}{ds_1}=\left(1+\lambda k_{g_1}\right)T_1-\lambda t_{r_1}Z_1 \tag{4.109}$$

olarak bulunur. (4.109) u (4.108) yerine yazıp gerekli düzenlemeleri yaparsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$T_1^*\frac{ds_{\beta_1}}{ds_1}=(1+r_1k_{n_1})T_1+r_1t_{r_1}Y_1 \tag{4.110}$$

(4.110) eşitliğinde her iki tarafın normu alınırsa

$$\frac{ds_{\beta_1}}{ds_1}=\sqrt{\left|(r_1t_{r_1})^2-(1-r_1k_{n_1})^2\right|} \tag{4.111}$$

bulunur. (4.111) denklemini (4.110) de kullanırsak T_1^* vektörünü aşağıdaki gibi elde etmiş oluruz.

$$T_1^*=\frac{1}{\sqrt{\left|(r_1t_{r_1})^2-(1+r_1k_{n_1})^2\right|}}\left[(1+r_1k_{n_1})T_1+r_1t_{r_1}Y_{11}\right] \tag{4.112}$$

Y_1^* vektörünü $Y_1^*=Z_1\times T_1^*$ olarak alırsak vektörel çarpımının özelliğinden ve (4.112) den Y_1^* vektörünü aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$Y_1^*=\frac{1}{\sqrt{\left|(r_1t_{r_1})^2-(1+r_1k_{n_1})^2\right|}}\left[r_1t_{r_1}T_1+(1+r_1k_{n_1})Y_1\right] \tag{4.113}$$

Teorem 4.6.1: M_1 ve M_{r_1} 3-boyutlu Öklid uzayında yönlendirilebilir timelike yüzeyler olsun. M_1 yüzeyi üzerindeki timelike eğri $\alpha_1(s_1)$ ve M_{r_1} paralel yüzeyi üzerindeki timelike eğri $\beta_1(s_{\beta_1})$ olsun. O zaman $\alpha_1(s_1)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrilerinin Darboux çatıları arasındaki ilişki aşağıdaki gibi verilebilir (Önder ve Kızıltuğ 2012).

$$\begin{bmatrix} T_1^* \\ Y_1^* \\ Z_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1+r_1k_{n_1}}{\sqrt{\left|(r_1t_{r_1})^2-(1+r_1k_{n_1})^2\right|}} & \dfrac{r_1t_{r_1}}{\sqrt{\left|(r_1t_{r_1})^2-(1+r_1k_{n_1})^2\right|}} & 0 \\ \dfrac{r_1t_{r_1}}{\sqrt{\left|(r_1t_{r_1})^2-(1+r_1k_{n_1})^2\right|}} & \dfrac{1+r_1k_{n_1}}{\sqrt{\left|(r_1t_{r_1})^2-(1+r_1k_{n_1})^2\right|}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix}$$

Teorem 4.6.2: Minkowski uzayda timelike M yüzeyi üzerindeki timelike $\alpha(s)$ eğrisinin eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart $\alpha(s)$ ve $\beta(s_\beta)$ eğrilerinin Bertrand D-eğri cifti olmalarıdır (Önder ve Kızıltuğ 2012).

İspat: M yüzeyi üzerindeki $\alpha(s)$ eğrisi eğrilik çizgisi olduğundan $t_r = 0$ dır. (4.63) eşitliğini göz önüne alıp $t_r = 0$ olduğunu

$$Y^* = \frac{1}{\sqrt{\left|(rt_r)^2-\left(1+rk_n\right)^2\right|}}\left[rt_rT+\left(1+rk_n\right)Y\right]$$

eşitliğinde kullanırsak, $Y^* = \pm Y$ elde ederiz. Böylece Y^* ve Y vektörleri lineer bağımlı olduğundan tanım gereği $\alpha(s)$ ve $\beta(s_\beta)$ eğrileri Bertrand D-eğri cifti olurlar. Tersine $\alpha(s)$ ve $\beta(s_\beta)$ Bertrand D-eğri çifti olsunlar. Bu durumda Y^* ve Y vektörlerinin lineer bağımlı olması gerekir. Yukarıdaki (4.63) denklemini göz önüne alırsak $t_r = 0$ olması gerektiği görülebilir.

Teorem 4.6.3: Minkowski uzayında timelike M_1 yüzeyi üzerindeki timelike $\alpha_1(s_1)$ eğrisinin eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart $\alpha_1(s_1)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrilerinin Bertrand D-eğri cifti olmalarıdır (Önder ve Kızıltuğ 2012).

İspat: M_1 yüzeyi üzerindeki $\alpha_1(s_1)$ eğrisi eğrilik çizgisi olduğundan $t_{r_1} = 0$ dır. (4.113) eşitliğini göz önüne alıp $t_{r_1} = 0$ olduğu

$$Y_1^* = \frac{1}{\sqrt{\left|(r_1 t_{r_1})^2 - (1 + r_1 k_{n_1})^2\right|}} \left[r_1 t_{r_1} T_1 + (1 + r_1 k_{n_1}) Y_1 \right]$$

eşitliğinde yerine yazılırsa $Y_1^* = \pm Y_1$ elde ederiz. Y_1^* ve Y_1 vektörleri lineer bağımlı olduğundan $\alpha_1(s_1)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrileri Bertrand D-eğrileridir. Tersine olarak ta benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 4.6.4: Minkowski uzayda timelike M yüzeyi üzerindeki timelike $\alpha(s)$ eğrisinin eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart $\alpha_1(s_1)$ ve $\beta(s_\beta)$ eğrilerinin Bertrand D-eğri cifti olmalarıdır (Önder ve Kızıltuğ 2012).

İspat: M yüzeyi üzerindeki $\alpha(s)$ eğrisi eğrilik çizgisi olduğundan $t_r = 0$ dır. Bunu (4.63) de yerine yazarsak $Y^* = \pm Y$ elde ederiz. Biz $\alpha(s)$ ve $\alpha_1(s_1)$ eğrilerinin Bertrand D-eğri çifti olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $Y = Y_1$ yazabiliriz. Bu durumda $Y^* = \pm Y_1$ elde ederiz. Böylece $\alpha_1(s_1)$ ve $\beta(s_\beta)$ eğrileri Bertrand D-eğri çifti olur. Tersine $\alpha_1(s_1)$ ve $\beta(s_\beta)$ eğrileri Bertrand D-eğri çifti olsun. Bu durumda Y^* ve Y_1 vektörleri lineer bağımlı olması gerekir. Ayrıca $\alpha(s)$ ve $\alpha_1(s_1)$ Bertrand eğri çifti olmasını da kullanırsak $t_r = 0$ olduğu görülür.

Teorem 4.6.5: Minkowski uzayında timelike M yüzeyi üzerindeki timelike $\alpha(s)$ eğrisi ve timelike M_1 yüzeyi üzerindeki timelike $\alpha_1(s_1)$ eğrisinin eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart $\beta(s_\beta)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrilerinin Bertrand D-eğri çifti olmalarıdır (Önder ve Kızıltuğ 2012).

İspat: $\alpha(s)$ ve $\alpha_1(s_1)$ eğrileri eğrilik çizgisi olduğundan $t_r = t_{r_1} = 0$ dır. Bunu (4.63) ve (4.113) de yerlerine yazarsak $Y^* = \pm Y$ ve $Y_1^* = \pm Y_1$ elde ederiz. Ayrıca $\alpha(s)$ ve $\alpha_1(s_1)$

eğrileri Bertrand D-eğri çifti olduğundan $Y = Y_1$ yazabiliriz. Buradan da $Y^* = \pm Y_1^*$ elde etmiş oluruz. Böylece $\beta(s_\beta)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ timelike eğrileri Bertrand D-eğri çiftidir.

Tersine, varsayalım ki $\beta(s_\beta)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrileri Bertrand eğri çifti olsun ve $\alpha(s)$ ve $\alpha_1(s_1)$ eğrilerinin de Bertrand D-eğri çifti olduğunu göz önüne alıp (4.63) den

$$Y_1 = \frac{1}{1+rk_n}\left[\left(\sqrt{\left|(rt_r)^2 - \left(1+rk_n\right)^2\right|}\right)Y^* + rt_r T\right] \tag{4.114}$$

eşitliğini elde ederiz. (4.114) eşitliğini (4.113) deki eşitlikte yerine yazarsak

$$Y_1^* = \frac{1}{\sqrt{\left|(r_1 t_{r_1})^2 - (1+r_1 k_{n_1})^2\right|}}\left[r_1 t_{r_1} T_1 + \frac{1-r_1 k_{n_1}}{1-rk_n}\left[\left(\sqrt{\left|(rt_r)^2 - \left(1+rk_n\right)^2\right|}\right)Y^* + rt_r T\right]\right]$$

elde ederiz. $\beta(s_\beta)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrileri Bertrand D-eğri çifti olduğundan Y_1^* ve Y^* lineer bağımlı olması gerekir. Yukarıdaki son eşitliği de göz önüne alırsak $t_r = t_{r_1} = 0$ elde etmiş oluruz. Böylece $\alpha(s)$ ve $\alpha_1(s_1)$ eğrilik çizgileridir.

Teorem 4.6.6: M yüzeyi üzerindeki $\alpha(s)$ hem geodezik hem de eğrilik çizgisi olsun. Bu durumda $\beta(s_\beta)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrileri Bertrand D-eğri çifti olurlar (Önder ve Kızıltuğ 2012).

İspat: $\alpha(s)$ eğrisi hem geodezik hem de eğrilik çizgisi olduğundan $k_g = t_r = 0$ dır. Ayrıca $\alpha(s)$ ve $\alpha_1(s_1)$ eğrileri Bertrand D-eğri çifti olduğundan aşağıdaki eşitliği yazabiliriz (Kazaz 2010).

$$t_{r1} = \left(k_g \sinh\theta + t_r \cosh\theta\right)\frac{ds}{ds_1}$$

Eğer $k_g = t_r = 0$ ifadelerini yukarıdaki eşitlikte yerine yazarsak, $t_{r_1} = 0$ elde ederiz. Bunu (4.113) eşitliğinde yerine yazarsak

$$Y_1^* = \pm Y_1$$

bulunur. $t_r = 0$ olduğundan $Y^* = \pm Y$ elde edilir. Ayrıca $\alpha(s)$ ve $\alpha_1(s_1)$ eğrileri Bertrand D-eğri çifti olduğundan $Y = Y_1$ yazabiliriz. Bunu elde ettiğimiz son eşitlikleri de göz önüne alırsak $Y^* = \pm Y_1^*$ elde etmiş oluruz. Dolayısıyla $\beta(s_\beta)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrileri Bertrand D-eğri çifti olurlar.

4.6.2. Minkowski uzayında timelike Bertrand D-eğri çiftinin paralel yüzey üzerindeki görüntüsü

Yukarıdaki çalışmadaki ikinci durumda timelike M yüzeyi üzerindeki spacelike $\alpha(s)$ eğrisinin paralel yüzeyi üzerindeki görüntüsünü bulmuştuk. Şimdi, timelike M_1 yüzeyi üzerindeki spacelike $\alpha_1(s_1)$ eğrisinin bu yüzeyin paralel yüzeyi olan timelike M_{r_1} yüzeyi üzerindeki görüntüsünü elde edelim.

$\alpha(s)$ ve $\alpha_1(s_1)$ Bertrand D-eğri çifti olduğundan tanıma göre aşağıdaki eşitliği yazabiliriz (Uğurlu ve Önder).

$$\alpha_1(s_1) = \alpha(s_1) - \lambda Y_1(s_1) \tag{4.115}$$

$\left(\alpha_1(s_1), M_1\right)$ eğri-yüzey ikilisinin çatısı $\{T_1, Y_1, Z_1\}$ olsun. O zaman bu ikilinin Darboux türev formülleri de aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} T_1' &= k_{g_1} Y_1 + k_{n_1} Z_1 \\ Y_1' &= -k_{g_1} T_1 + t_{r_1} Z_1 \\ Z_1' &= k_{n_1} T_1 + t_{r_1} Y_1 \end{aligned} \tag{4.116}$$

M_1 ve M_{r_1} paralel spacelike yüzeyler olsunlar $\alpha_1(s_1)$ eğrisi M_1 yüzeyi üzerinde $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrisi de M_{r_1} paralel yüzeyi üzerinde bir spacelike eğri olsun. Bu durumda paralel yüzey tanımından $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrisi için bir parametrizasyon aşağıdaki gibi verilebilir.

$$\beta_1(s_{\beta_1}) = \alpha_1(s_1) + r_1 Z_1 \tag{4.117}$$

(4.115) ifadesini (4.117) de yerine yazarsak aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\beta_1\left(s_{\beta_1}\right) = \alpha\left(s_1\right) - \lambda Y_1\left(s_1\right) + r_1 Z_1 \tag{4.118}$$

$\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrisinin Darboux çatısını da $\{T_1^*, Y_1^*, Z_1\}$ olarak ele alalım. Bu çatıyı M_1 yüzeyi üzerindeki $\alpha_1(s_1)$ eğrisinin (4.116) Darboux çatısını ele alıp belirleyelim.

(4.118) eşitliğinde s_1 e göre türev alınırsa

$$\frac{d\beta_1}{ds_1} = \frac{d\beta_1}{ds_{\beta_1}}\frac{ds_{\beta_1}}{ds_1} = \alpha'(s_1)\frac{ds}{ds_1} - \lambda Y_1'(s_1) + r_1 Z_1' \tag{4.119}$$

elde edilir. Eğer (4.115) eşitliğinde s_1 parametresine göre türev alıp $\alpha_1(s_1)$ eğrisinin Darboux türev formüllerini (3.2) kullanırsak

$$\alpha'(s_1)\frac{ds}{ds_1} = T\frac{ds}{ds_1} = \left(1+\lambda k_{g_1}\right)T_1 - \lambda t_{r_1} Z_1 \tag{4.120}$$

eşitliğini elde ederiz. (4.120) yi (4.119) yerine yazıp gerekli düzenlemeleri yaparsak

$$T_1^* \frac{ds_{\beta_1}}{ds_1} = (1 + r_1 k_{n_1})T_1 + r_1 t_{r_1} Y_1 \tag{4.121}$$

eşitliğini elde ederiz. (4.121) eşitliğinde her iki tarafın normu alınırsa

$$\frac{ds_{\beta_1}}{ds_1} = \sqrt{\left|(r_1 t_{r_1})^2 - (1 - r_1 k_{n_1})^2\right|} \tag{4.122}$$

olarak bulunur. (4.122) denklemini (4.121) de yerine yazarsak T_1^* vektörünü aşağıdaki gibi elde etmiş oluruz.

$$T_1^* = \frac{1}{\sqrt{\left|(r_1 t_{r_1})^2 - (1 + r_1 k_{n_1})^2\right|}}\left[(1 + r_1 k_{n_1})T_1 + r_1 t_{r_1} Y_1\right] \tag{4.123}$$

Y_1^* vektörünü $Y_1^* = -Z_1 \times T_1^*$ olarak alırsak vektörel çarpımının özelliğinden ve (4.123) den Y_1^* vektörünü aşağıdaki gibi yazabiliriz

$$Y_1^* = \frac{1}{\sqrt{\left|(r_1 t_{r_1})^2 - (1 + r_1 k_{n_1})^2\right|}}\left[-r_1 t_{r_1} T_1 - (1 + r_1 k_{n_1})Y_1\right] \tag{4.124}$$

Teorem 4.6.7: M_1 ve M_{r_1} 3-boyutlu Öklid uzayında yönlendirilebilir timelike yüzeyler olsun. M_1 yüzeyi üzerindeki spacelike eğri $\alpha_1(s_1)$ ve M_{r_1} paralel yüzeyi üzerindeki spacelike eğri $\beta_1(s_{\beta_1})$ olsun. O zaman $\alpha_1(s_1)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrilerinin Darboux çatıları arasındaki ilişki aşağıdaki gibi verilebilir.

$$\begin{bmatrix} T_1^* \\ Y_1^* \\ Z_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1+r_1k_{n_1}}{\sqrt{\left|(r_1t_{r_1})^2-(1+r_1k_{n_1})^2\right|}} & \dfrac{r_1t_{r_1}}{\sqrt{\left|(r_1t_{r_1})^2-(1+r_1k_{n_1})^2\right|}} & 0 \\ \dfrac{-r_1t_{r_1}}{\sqrt{\left|(r_1t_{r_1})^2-(1+r_1k_{n_1})^2\right|}} & \dfrac{-(1+r_1k_{n_1})}{\sqrt{\left|(r_1t_{r_1})^2-(1+r_1k_{n_1})^2\right|}} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix}$$

Teorem 4.6.8: Minkowski uzayda timelike M yüzeyi üzerindeki spacelike $\alpha(s)$ eğrisinin eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart $\alpha(s)$ ve $\beta(s_\beta)$ eğrilerinin Bertrand D-eğri cifti olmalarıdır.

İspat: $\alpha(s)$ eğrisi, M yüzeyi üzerinde eğrisi eğrilik çizgisi olduğundan $t_r=0$ dır. (4.86) eşitliğini göz önüne alıp

$$Y^* = \frac{1}{\sqrt{\left|(rt_r)^2-\left(1+rk_n\right)^2\right|}}\left[-rt_rT-\left(1+rk_n\right)Y\right]$$

eşitliğinde $t_r=0$ ifadesini kullanırsak $Y^*=\pm Y$ elde ederiz. Böylece Y^* ve Y vektörleri lineer bağımlı olduğundan tanım gereği $\alpha(s)$ ve $\beta(s_\beta)$ eğrileri Bertrand D-eğri cifti olurlar. Tersine, $\alpha(s)$ ve $\beta(s_\beta)$ Bertrand D-eğri çifti olsunlar. Bu durumda Y^* ve Y vektörlerinin lineer bağımlı olması gerekir. Yukarıdaki denklemi göz önüne alırsak $t_r=0$ olması gerektiği görülür.

Teorem 4.6.9: Minkowski uzayında timelike M_1 yüzeyi üzerindeki spacelike $\alpha_1(s_1)$ eğrisinin eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart $\alpha_1(s_1)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrilerinin Bertrand D-eğri cifti olmalarıdır.

İspat: $\alpha_1(s_1)$ eğrisi, M_1 yüzeyi üzerinde eğrisi eğrilik çizgisi olduğundan $t_{r_1}=0$ dır. Bunu (4.124) eşitliğini göz önüne alıp

$$Y_1^* = \frac{1}{\sqrt{\left|(r_1 t_{r_1})^2 - (1 + r_1 k_{n_1})^2\right|}} \left[-r_1 t_{r_1} T_1 - (1 + r_1 k_{n_1}) Y_1 \right]$$

ifadesinde $t_{r_1} = 0$ olduğunu kullanırsak $Y_1^* = \pm Y_1$ elde ederiz. Y_1^* ve Y_1 vektörleri lineer bağımlı olduğundan $\alpha_1(s_1)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrileri Bertrand D-eğrileridir.

Tersine olarak ta benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 4.6.10: Minkowski uzayında timelike M yüzeyi üzerindeki spacelike $\alpha(s)$ eğrisinin eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart $\alpha_1(s_1)$ ve $\beta(s_\beta)$ eğrilerinin Bertrand D-eğri cifti olmalarıdır.

İspat: $\alpha(s)$ eğrisi, M yüzeyi üzerinde eğrilik çizgisi olduğundan $t_r = 0$ dır. Bunu (4.86) yerine yazarsak $Y^* = \pm Y$ elde ederiz. Biz $\alpha(s)$ ve $\alpha_1(s_1)$ eğrilerinin Bertrand D-eğri cifti olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $Y = Y_1$ yazabiliriz. Bu durumda $Y^* = \pm Y_1$ elde ederiz. Böylece $\alpha_1(s_1)$ ve $\beta(s_\beta)$ eğrileri Bertrand D-eğri çifti olur.

Tersine $\alpha_1(s_1)$ ve $\beta(s_\beta)$ eğrileri Bertrand D-eğri cifti olsun. Bu durumda Y^* ve Y_1 vektörlerinin lineer bağımlı olması gerekir. Ayrıca $\alpha(s)$ ve $\alpha_1(s_1)$ eğrilerinin Bertrand eğri cifti olmasını da kullanırsak $t_r = 0$ olduğu görülür.

Teorem 4.6.11: Minkowski uzayında timelike M yüzeyi üzerindeki spacelike $\alpha(s)$ eğrisi ve timelike M_1 yüzeyi üzerindeki spacelike $\alpha_1(s_1)$ eğrisinin eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart $\beta(s_\beta)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrilerinin Bertrand D-eğri cifti olmalarıdır.

İspat: $\alpha(s)$ ve $\alpha_1(s_1)$ eğrileri eğrilik çizgisi olduğundan $t_r = t_{r_1} = 0$ dır. Bunu (4.86) ve (4.124) de yerlerine yazarsak $Y^* = \pm Y$ ve $Y_1^* = \pm Y_1$ elde ederiz. Ayrıca $\alpha(s)$ ve $\alpha_1(s_1)$

eğrileri Bertrand D-eğri çifti olduğundan $Y = Y_1$ yazabiliriz. Buradan da $Y^* = \pm Y_1^*$ elde etmiş oluruz. Böylece $\beta(s_\beta)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ spacelike eğrileri Bertrand D-eğri çiftidir.

Tersine varsayalım ki $\beta(s_\beta)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrileri Bertrand eğri çifti olsun. $\alpha(s)$ ve $\alpha_1(s_1)$ eğrilerinin de Bertrand D-eğri cifti olduğu göz önüne alınırsa (4.86) dan

$$Y_1 = \frac{1}{1+rk_n}\left[\left(\sqrt{\left|(rt_r)^2 - \left(1+rk_n\right)^2\right|}\right)Y^* + rt_r T\right] \tag{4.125}$$

eşitliğini elde ederiz. (4.125) eşitliğini (4.124) deki eşitlikte yerine yazarsak

$$Y_1^* = \frac{1}{\sqrt{\left|(r_1 t_{r_1})^2 - (1+r_1 k_{n_1})^2\right|}}\left[r_1 t_{r_1} T_1 + \frac{1-r_1 k_{n_1}}{1-rk_n}\left[\left(\sqrt{\left|(rt_r)^2 - \left(1+rk_n\right)^2\right|}\right)Y^* + rt_r T\right]\right]$$

eşitliğini elde ederiz.

Tersine $\beta(s_\beta)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrileri Bertrand D-eğri çifti olduğundan Y_1^* ve Y^* lineer bağımlı olması gerekir. Yukarıdaki son eşitliği de göz önüne alırsak $t_r = t_{r_1} = 0$ elde etmiş oluruz. Böylece $\alpha(s)$ ve $\alpha_1(s_1)$ eğrilik çizgileridir.

4.7. Minkowski Uzayında Mannheim D-eğri çiftinin Paralel Yüzey Üzerindeki Görüntüsü

Bu bölümde Minkowski 3-uzayda yönlendirilmiş M ve M_1 yüzeyleri üzerinde yatan $\alpha(s)$ ve $\alpha_1(s_1)$ eğrileri için Mannheim partner *D*-eğrilerinin tanımını verip daha sonra ise Mannheim partner *D*-eğrilerinin paralel yüzey üzerindeki görüntülerini inceleyip elde ettiğimiz ifadelerden bazı teoremler ve sonuçlar vereceğiz.

Tanım 4.7.1: 3-boyutlu Minkowski uzayında yönlendirilmiş iki yüzey M ve M_1 olsun. M ve M_1 üzerinde yatan ve yay uzunluğu parametresi ile verilen eğriler de, sırasıyla, $\alpha(s)$ ve $\alpha_1(s_1)$ olsun. $\alpha(s)$ ve $\alpha_1(s_1)$ eğrilerinin Darboux çatıları $\{T, Y, Z\}$ ve $\{T_1, Y_1, Z_1\}$ ile gösterilsin. Eğer, $\alpha(s)$ ve $\alpha_1(s_1)$ eğrilerinin karşılıklı noktalarında, $\alpha(s)$

eğrisinin Y Darboux çatı elemanı ile $\alpha_1(s_1)$ eğrisinin Z_1 Darboux çatı elemanı çakışıyorsa, bu taktirde $\alpha(s)$ eğrisine bir Mannheim D-eğrisi ve $\alpha_1(s_1)$ eğrisine de $\alpha(s)$ eğrisinin bir Mannheim partner D-eğrisidir denir. Bu takdirde $\{\alpha, \alpha_1\}$ eğri çiftine bir Mannheim D-çifti adı verilir (Kazaz 2011).

Eğer yönlendirilmiş M ve M_1 yüzeyleri üzerinde yatan böyle eğriler var ise $\{M, M_1\}$ yüzey çiftine Mannheim yüzey çifti denir.

Şimdi ise Mannheim D -eğri çiftinin paralel yüzeyi üzerindeki görüntüsünü ele alalım. Ancak, Minkowski uzayda çalıştığımız için yukarıdaki tanıma göre eğri ve yüzeyin karakterine bağlı olarak 5 durum söz konusudur. Biz sadece timelike yüzey üzerindeki timelike ve spacelike eğri durumlarını göz önüne alacağız. İlk olarak eğri ve yüzeyimizi timelike olarak ele alalım.

4.7.1. Minkowski uzayında timelike Mannheim D-Eğri çiftinin paralel yüzey üzerindeki görüntüsü

(4.5.1) de, M yüzeyi üzerindeki $\alpha(s)$ eğrisinin paralel yüzeyi üzerindeki görüntüsünü bulmuştuk. Şimdi, M_1 timelike yüzeyi üzerindeki timelike $\alpha_1(s_1)$ eğrisinin bu yüzeyin paralel yüzeyi olan timelike M_{r_1} yüzeyi üzerindeki görüntüsünü elde edelim. $\alpha(s)$ ve $\alpha_1(s_1)$ Manheim D-eğri çifti olduğundan tanımdan aşağıdaki eşitliği yazabiliriz (Kazaz 2011).

$$\alpha_1(s_1) = \alpha(s_1) - \lambda Z_1(s_1) \tag{4.126}$$

$\left(\alpha_1(s_1), M_1\right)$ timelike eğri- yüzey ikilisinin çatısı $\{T_1, Y_1, Z_1\}$ olsun. O zaman bu ikilinin Darboux türev formüleri de aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} T_1' &= k_{g_1} Y_1 + k_{n_1} Z_1 \\ Y_1' &= k_{g_1} T_1 - t_{r_1} Z_1 \\ Z_1' &= k_{n_1} T_1 + t_{r_1} Y_1 \end{aligned} \tag{4.127}$$

M_1 ve M_{r_1} paralel timelike yüzeyler olsunlar. Timelike $\alpha_1(s_1)$ eğrisi M_1 yüzeyi üzerinde, timelike $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrisi de M_{r_1} paralel yüzeyi üzerinde bir eğri olsun. Bu durumda paralel yüzey tanımından $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrisi için bir parametrizasyon aşağıdaki gibi verilebilir.

$$\beta_1(s_{\beta_1}) = \alpha_1(s_1) + r_1 Z_1 \tag{4.128}$$

(4.126) denklemini (4.128) de yerine yazarsak

$$\beta_1(s_{\beta_1}) = \alpha(s_1) + (r_1 - \lambda) Z_1(s_1) \tag{4.129}$$

elde ederiz. $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrisinin Darboux çatısını da $\{T_1^*, Y_1^*, Z_1\}$ olarak düşünelim. Bu çatıyı M_1 yüzeyi üzerindeki $\alpha_1(s_1)$ eğrisinin Darboux çatısını düşünerek bu çatımızı belirleyelim. (4.128) eşitliğinde (s_1) e göre türev alınırsa

$$\frac{d\beta_1}{ds_1} = \frac{d\beta_1}{ds_{\beta_1}} \frac{ds_{\beta_1}}{ds_1} = \alpha'(s_1)\frac{ds}{ds_1} + (r_1 - \lambda) Z_1'(s_1) \tag{4.130}$$

elde edilir. Eğer (4.126) eşitliğinde s_1 e göre türev alınıp, $\alpha_1(s_1)$ eğrisinin Darboux çatısı kullanılırsa

$$\alpha'(s_1)\frac{ds}{ds_1} = T\frac{ds}{ds_1} = (1 + \lambda k_{n_1}) T_1 + \lambda t_{r_1} Y_1 \tag{4.131}$$

elde edilir. (4.131) eşitliği (4.130) da yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$T_1^* \frac{ds_{\beta_1}}{ds_1} = (1 + r_1 k_{n_1}) T_1 + (r_1 t_{r_1}) Y_1 \tag{4.132}$$

(4.132) eşitliğinde her iki tarafın normu alınırsa

$$\frac{ds_{\beta_1}}{ds_1} = \sqrt{\left|(r_1 t_{r_1})^2 - (1 + r_1 k_{n_1})^2\right|} \tag{4.133}$$

bulunur. (4.133) eşitliğini (4.132) de yerine yazıp gerekli düzenlemeleri yapılırsa

$$T_1^* = \frac{1}{\sqrt{\left|(r_1 t_{r_1})^2 - (1 + r_1 k_{n_1})^2\right|}} ((1 + r_1 k_{n_1}) T_1 + (r_1 t_{r_1}) Y_1) \tag{4.134}$$

elde ederiz. Y_1^* vektörünü $Y_1^* = Z_1 \times T_1^*$ olarak alırsak vektörel çarpımının özelliğinden ve (4.134) den Y_1^* vektörünü aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$Y_1^* = \frac{1}{\sqrt{\left|(r_1 t_{r_1})^2 - (1 + r_1 k_{n_1})^2\right|}}((r_1 t_{r_1})T_1 + (1 + r_1 k_{n_1})Y_1) \tag{4.135}$$

Teorem 4.7.1: M_1 ve M_{r_1} 3-boyutlu Minkowski uzayında yönlendirilebilir timelike yüzeyler olsun. M_1 yüzeyi üzerindeki timelike eğri $\alpha_1(s_1)$ ve M_{r_1} paralel yüzeyi üzerindeki timelike eğri $\beta_1(s_{\beta_1})$ olsun. Bu durumda $\alpha_1(s_1)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrilerinin Darboux çatıları arasındaki ilişki aşağıdaki gibi verilebilir (Önder ve Kızıltuğ 2012).

$$\begin{bmatrix} T_1^* \\ Y_1^* \\ Z_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1 + r_1 k_{n_1}}{\sqrt{\left|(r_1 t_{r_1})^2 - (1 + r_1 k_{n_1})^2\right|}} & \frac{r_1 t_{r_1}}{\sqrt{\left|(r_1 t_{r_1})^2 - (1 + r_1 k_{n_1})^2\right|}} & 0 \\ \frac{r_1 t_{r_1}}{\sqrt{\left|(r_1 t_{r_1})^2 - (1 + r_1 k_{n_1})^2\right|}} & \frac{1 + r_1 k_{n_1}}{\sqrt{\left|(r_1 t_{r_1})^2 - (1 + r_1 k_{n_1})^2\right|}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix}$$

Teorem 4.7.2: Timelike M_1 yüzeyi üzerindeki timelike $\alpha_1(s_1)$ eğrisinin eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart $\alpha_1(s_1)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrilerinin Bertrand D-eğri cifti olmalarıdır.

İspat: M_1 yüzeyi üzerindeki $\alpha_1(s_1)$ eğrisi eğrilik çizgisi olduğundan $t_{r_1} = 0$ dır. Bunu

$$Y_1^* = \frac{1}{\sqrt{\left|(r_1 t_{r_1})^2 - (1 + r_1 k_{n_1})^2\right|}}((r_1 t_{r_1})T_1 + (1 + r_1 k_{n_1})Y_1)$$

eşitliğinde yerine yazarsak $Y_1^* = \pm Y_1$ elde ederiz. Böylece $\alpha_1(s_1)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrileri Bertrand D-eğri çiftidir.

Teorem 4.7.3: $\alpha(s)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrileri Manheim D-eğri cifti olması için gerek ve yeter şart $\tanh\theta = \dfrac{r_1 t_{r_1}}{1 + r k_{n_1}}$ olmasıdır. Burada θ açısı T_1 ve T vektörleri arasındaki açıdır.

İspat: Varsayalım ki $\alpha(s)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrileri Manheim D-eğri cifti olsun. Ayrıca, aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz (Kazaz 2011).

$$T_1 = \cosh\theta T + \sinh\theta Z \quad \text{ve} \quad Y_1 = \sinh\theta T - \cosh\theta Z$$

Bu eşitlikleri aşağıdaki ifade de yerine yazarsak

$$Y_1^* = \frac{1}{\sqrt{\left|(r_1 t_{r_1})^2 - (1 + r_1 k_{n_1})^2\right|}}((r_1 t_{r_1})T_1 + (1 + r_1 k_{n_1})Y_1)$$

$$Y_1^* = \frac{1}{\sqrt{\left|(r_1 t_{r_1})^2 - (1 + r_1 k_{n_1})^2\right|}}\left\{(r_1 t_{r_1} \cosh\theta - (1 + r_1 k_{n_1})\sinh\theta)T + (-r_1 t_{r_1} \sinh\theta + (1 + r_1 k_{n_1})\cosh\theta)Z\right\}$$

eşitliğini elde ederiz. $\alpha(s)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrileri Manheim eğri çifti olduğundan Y_1^* ve Z vektörlerinin lineer bağımlı olması gerekir. Böylece $\tanh\theta = \dfrac{r_1 t_{r_1}}{1 + r k_{n_1}}$ olarak seçilirse ispatımız tamamlanmış olur.

Sonuç. 4.7.1: $\beta(s_\beta)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrileri Manheim D- eğri cifti olması için gerek ve yeter şart $\tanh\theta = \dfrac{r_1 t_{r_1}}{1 + r k_{n_1}}$ olmasıdır. Burada θ açısı T_1 ve T vektörleri arasındaki açıdır (Önder ve Kızıltuğ 2012).

İspat: $\beta(s_\beta)$ eğrisi M_r paralel yüzey üzerinde bir eğridir. Paralel yüzeylerde yüzey normalleri aynı olduğundan yukarıdaki teorem gereğince $\beta(s_\beta)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrileri Manheim D-eğri çifti olması için gerek ve yeter şart $\tanh\theta = \dfrac{r_1 t_{r_1}}{1 + r k_{n_1}}$ olmasıdır.

Sonuç. 4.7.2: $\alpha(s)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrilerinin Bertrand D-eğri çifti olması için gerek ve yeter şart $\tanh\theta = \dfrac{r_1 t_{r_1}}{1+rk_{n_1}}$ olmasıdır. Burada θ açısı T_1 ve T vektörleri arasındaki açıdır (Önder ve Kızıltuğ 2012).

İspat: $\alpha(s)$ ve $\alpha_1(s_1)$ eğrileri Mannheim eğri cifti olduğundan $Z = \pm Y_1$ eşitliğini yazabiliriz. (4.135) eşitliğini kullanırsak ispatımız tamamlanmış olur.

4.7.2. Minkowski uzayında timelike Mannheim D-eğri çiftinin paralel yüzey üzerindeki görüntüsü

(4.5.1) deki kısımda, M yüzeyi üzerindeki $\alpha(s)$ eğrisinin paralel yüzeyi üzerindeki görüntüsünü bulmuştuk. Şimdi ise M_1 timelike yüzeyi üzerindeki spacelike $\alpha_1(s_1)$ eğrisinin bu yüzeyin paralel yüzeyi olan timelike M_{r_1} yüzeyi üzerindeki görüntüsünü elde edelim. $\alpha(s)$ ve $\alpha_1(s_1)$ Manheim D-eğri çifti olduğundan aşağıdaki eşitliği yazabiliriz (Kazaz 2010).

$$\alpha_1(s_1) = \alpha(s_1) - \lambda Z_1(s_1) \tag{4.136}$$

$(\alpha_1(s_1), M_1)$ timelike eğri- yüzey ikilisinin çatısı $\{T_1, Y_1, Z_1\}$ olsun. O zaman bu ikilinin Darboux türev formüleri de aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} T_1' &= k_{g_1} Y_1 - k_{n_1} Z_1 \\ Y_1' &= k_{g_1} T_1 + t_{r_1} Z_1 \\ Z_1' &= k_{n_1} T_1 + t_{r_1} Y_1 \end{aligned} \tag{4.137}$$

M_1 ve M_{r_1} paralel timelike yüzeyler olsunlar. Timelike $\alpha_1(s_1)$ eğrisi M_1 yüzeyi üzerinde, timelike $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrisi de M_{r_1} paralel yüzeyi üzerinde bir eğri olsun. Bu durumda paralel yüzey tanımından $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrisi için bir parametrizasyon aşağıdaki gibi verilebilir.

$$\beta_1(s_{\beta_1}) = \alpha_1(s_1) + r_1 Z_1 \tag{4.138}$$

(4.136) denklemini (4.138) de yerine yazarsak

$$\beta_1(s_{\beta_1}) = \alpha(s_1) + (r_1 - \lambda)Z_1(s_1) \tag{4.139}$$

elde ederiz. $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrisinin Darboux çatısını da $\{T_1^*, Y_1^*, Z_1\}$ olarak düşünelim. Bu çatıyı M_1 yüzeyi üzerindeki $\alpha_1(s_1)$ eğrisinin Darboux çatısını düşünerek bu çatımızı belirleyelim. (4.139) eşitliğinde (s_1) e göre türev alınırsa

$$\frac{d\beta_1}{ds_1} = \frac{d\beta_1}{ds_{\beta_1}}\frac{ds_{\beta_1}}{ds_1} = \alpha'(s_1)\frac{ds}{ds_1} + (r_1 - \lambda)Z_1'(s_1) \tag{4.140}$$

elde edilir. Eğer (4.136) eşitliğinde s_1 e göre türev alınıp ve $\alpha_1(s_1)$ eğrisinin Darboux çatısını kullanırsak

$$\alpha'\left(s_1\right)\frac{ds}{ds_1} = T\,\frac{ds}{ds_1} = (1 + \lambda k_{n_1})T_1 + \lambda t_{r_1}Y_1 \tag{4.141}$$

olarak bulunur. (4.141) eşitliği (4.134) de yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$T_1^*\frac{ds_{\beta_1}}{ds_1} = (1 + r_1k_{n_1})T_1 + (r_1t_{r_1})Y_1 \tag{4.142}$$

eşitliği elde edilir. (4.142) eşitliğinde her iki tarafın normu alınırsa

$$\frac{ds_{\beta_1}}{ds_1} = \sqrt{\left|(r_1t_{r_1})^2 - (1 + r_1k_{n_1})^2\right|} \tag{4.143}$$

olur. (4.143) eşitliğini (4.142) de yerine yazıp gerekli düzenlemeleri yapılırsa

$$T_1^* = \frac{1}{\sqrt{\left|(r_1t_{r_1})^2 - (1 + r_1k_{n_1})^2\right|}}((1 + r_1k_{n_1})T_1 + (r_1t_{r_1})Y_1) \tag{4.144}$$

elde ederiz. Y_1^* vektörünü $Y_1^* = -Z_1 \times T_1^*$ olarak alırsak vektörel çarpımın özelliğinden ve (4.144) den Y_1^* vektörünü

$$Y_1^* = \frac{1}{\sqrt{\left|(r_1t_{r_1})^2 - (1 + r_1k_{n_1})^2\right|}}(-(r_1t_{r_1})T_1 - (1 + r_1k_{n_1})Y_1) \tag{4.145}$$

olarak buluruz.

Teorem 4.7.4: M_1 ve M_{r_1} 3-boyutlu Minkowski uzayında yönlendirilebilir timelike yüzeyler olsun. M_1 yüzeyi üzerindeki spacelike eğri $\alpha_1(s_1)$ ve M_{r_1} paralel yüzeyi üzerindeki spacelike eğri $\beta_1(s_{\beta_1})$ olsun. O zaman $\alpha_1(s_1)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrilerinin Darboux çatıları arasındaki ilişki aşağıdaki gibi verilebilir.

$$\begin{bmatrix} T_1^* \\ Y_1^* \\ Z_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1+r_1k_{n_1}}{\sqrt{\left|(r_1t_{r_1})^2-(1+r_1k_{n_1})^2\right|}} & \frac{r_1t_{r_1}}{\sqrt{\left|(r_1t_{r_1})^2-(1+r_1k_{n_1})^2\right|}} & 0 \\ \frac{-r_1t_{r_1}}{\sqrt{\left|(r_1t_{r_1})^2-(1+r_1k_{n_1})^2\right|}} & \frac{-1-r_1k_{n_1}}{\sqrt{\left|(r_1t_{r_1})^2-(1+r_1k_{n_1})^2\right|}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix}$$

Teorem 4.7.5: Timelike M_1 yüzeyi üzerindeki spacelike $\alpha_1(s_1)$ eğrisinin eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart $\alpha_1(s_1)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrilerinin Bertrand D-eğri cifti olmalarıdır.

İspat: M_1 yüzeyi üzerindeki $\alpha_1(s_1)$ eğrisi eğrilik çizgisi olduğundan $t_{r_1}=0$ dır. Bunu aşağıdaki eşitlikte yerine yazarsak

$$Y_1^* = \frac{1}{\sqrt{\left|(r_1t_{r_1})^2-(1+r_1k_{n_1})^2\right|}}(-(r_1t_{r_1})T_1-(1+r_1k_{n_1})Y_1)$$

$Y_1^* = \pm Y_1$ elde ederiz. Böylece $\alpha_1(s_1)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrileri Bertrand D-eğri çiftidir. Tersine $\alpha_1(s_1)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrileri Bertrand D-eğri çifti olsunlar. Bu durumda Y_1^* ve Y_1 vektörlerinin lineer bağımlı olması gerekir. Yukarıdaki eşitliği göz önüne aldığımızda $t_{r_1}=0$ olduğunu görürüz.

Teorem 4.7.6: $\alpha(s)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrileri Manheim D-eğri çifti olması için gerek ve yeter şart $\tanh\theta = \frac{r_1t_{r_1}}{1+rk_{n_1}}$ olmasıdır. Burada θ açısı T_1 ve T vektörleri arasındaki açıdır.

İspat: Varsayalım ki $\alpha(s)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrileri Manheim D-eğri cifti olduğundan, Biz aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz (Kazaz 2010).

$$T_1 = \cosh\theta T + \sinh\theta Z \quad \text{ve} \quad Y_1 = \sinh\theta T - \cosh\theta Z$$

Bu eşitlikleri, $Y_1^* = \dfrac{1}{\sqrt{\left|(r_1 t_{r_1})^2 - (1 + r_1 k_{n_1})^2\right|}}(-(r_1 t_{r_1})T_1 - (1 + r_1 k_{n_1})Y_1)$ eşitliğinde yerine yazarsak

$$Y_1^* = \frac{1}{\sqrt{\left|(r_1 t_{r_1})^2 - (1 + r_1 k_{n_1})^2\right|}}\{-(r_1 t_{r_1} \cosh\theta - (1 + r_1 k_{n_1})\sinh\theta)T -$$
$$(-r_1 t_{r_1} \sinh\theta + (1 + r_1 k_{n_1})\cosh\theta)Z\}$$

eşitliği elde ederiz. $\alpha(s)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrileri Manheim eğri çifti olduğundan Y_1^* ve Z vektörlerinin lineer bağımlı olması gerekir. Böylece $\tanh\theta = \dfrac{r_1 t_{r_1}}{1 + r k_{n_1}}$ olarak seçilirse ispatımız tamamlanmış olur.

Sonuç. 4.7.3: $\beta(s_\beta)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrileri Manheim D-eğri çifti olması için gerek ve yeter şart $\tanh\theta = \dfrac{r_1 t_{r_1}}{1 + r k_{n_1}}$ olmasıdır. Burada θ açısı T_1 ve T vektörleri arasındaki açıdır.

İspat: $\beta(s_\beta)$ eğrisi M_r paralel yüzeyi üzerinde bir eğridir. Paralel yüzeylerde yüzey normalleri aynı olduğundan teorem (4.7.6) gereğince $\beta(s_\beta)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrileri Manheim D-eğri çiftidir gerek ve yeter şart $\tanh\theta = \dfrac{r_1 t_{r_1}}{1 + r k_{n_1}}$ olmasıdır.

Sonuç. 4.7.4: $\alpha(s)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrileri Bertrand D-eğri çifti olması için gerek ve yeter şart $\tanh\theta = \dfrac{r_1 t_{r_1}}{1 + r k_{n_1}}$ olmasıdır. Burada θ açısı T_1 ve T vektörleri arasındaki açıdır.

İspat: $\alpha(s)$ ve $\alpha_1(s_1)$ eğrileri Mannheim eğri çifti olduğundan $Z = \pm Y_1$ eşitliğini yazabiliriz. (4.145) eşitliğini kullanırsak ispatımız tamamlanmış olur.

4.8. Minkowski Uzayında İnvolute-Evolute D-Eğri Çiftinin Paralel Yüzey Üzerindeki Görüntüsü

Bu bölümde Minkowski 3-uzayında yönlendirilmiş M ve M_1 yüzeyleri üzerinde $\alpha(s)$ ve $\alpha_1(s_1)$ eğrileri için involüt-evolüt D-eğri çiftinin tanımı verildi. Daha sonra ise involüt-evolüt D-eğrilerinin paralel yüzey üzerindeki görüntülerini inceleyip elde ettiğimiz ifadelerden bazı teoremler ve sonuçlar vereceğiz.

Tanım 4.8.1: 3-boyutlu Minkowski uzayında yönlendirilmiş iki yüzey M ve M_1 olsun. M ve M_1 üzerinde yatan ve yay uzunluğu parametresi ile verilen eğriler de, sırasıyla, $\alpha(s)$ ve $\alpha_1(s_1)$ olsun. $\alpha(s)$ ve $\alpha_1(s_1)$ eğrilerinin Darboux çatıları $\{T, Y, Z\}$ ve $\{T_1, Y_1, Z_1\}$ ile gösterilsin. Eğer, $\alpha(s)$ ve $\alpha_1(s_1)$ eğrilerinin karşılıklı noktalarında, $\alpha(s)$ eğrisinin T Darboux çatı elemanı ile $\alpha_1(s_1)$ eğrisinin Y_1 Darboux çatı elemanı çakışıyorsa, bu taktirde $\alpha(s)$ eğrisine bir evolüt D-eğrisi ve $\alpha_1(s_1)$ eğrisine de $\alpha(s)$ eğrisinin bir involüt D-eğrisidir denir. Bu takdirde $\{\alpha, \alpha_1\}$ eğri çiftine bir involüt-evolüt D-çifti adı verilir.

Şimdi ise involüt-evolüt D-eğri çiftinin paralel yüzey üzerindeki görüntüsüne bakalım. Yalnız, Minkowski uzayında çalıştığımız için yukarıdaki tanıma göre eğri ve yüzeyin karakterine bağlı olarak 5 durum söz konusudur. Biz sadece timelike yüzey üzerindeki timelike ve spacelike eğri durumlarını göz önüne alacağız. İlk olarak eğri ve yüzeyimiz timelike olsun.

4.8.1. Minkowski uzayında timelike İnvolüt-Evolüt D-eğri çiftinin paralel yüzey üzerindeki görüntüsü

M yüzeyi üzerindeki $\alpha(s)$ eğrisinin paralel yüzeyi üzerindeki görüntüsünü bulmuştuk. Şimdi ise M_1 timelike yüzeyi üzerindeki timelike $\alpha_1(s_1)$ eğrisinin bu yüzeyin paralel yüzeyi olan timelike M_{r_1} yüzeyi üzerindeki görüntüsünü elde edelim. $\alpha(s)$ ve $\alpha_1(s_1)$ involüt-evolüt D-eğri çifti olduğundan aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$\alpha_1(s_1) = \alpha(s_1) - \lambda T_1(s_1) \tag{4.146}$$

($\alpha_1(s_1), M_1$) eğri-yüzey ikilisinin çatısı $\{T_1, Y_1, Z_1\}$ olsun. O zaman bu ikilinin Darboux türev formüleri de aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} T_1' &= k_{g_1} Y_1 + k_{n_1} Z_1 \\ Y_1' &= k_{g_1} T_1 - t_{r_1} Z_1 \\ Z_1' &= k_{n_1} T_1 + t_{r_1} Y_1 \end{aligned} \tag{4.147}$$

M_1 ve M_{r_1} paralel yüzeyler olsunlar. $\alpha_1(s_1)$ eğrisi M_1 yüzeyi üzerinde $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrisi de M_{r_1} paralel yüzeyi üzerinde bir eğri olsun. Bu durumda paralel yüzey tanımından $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrisi için bir parametrizasyon aşağıdaki gibi verilebilir.

$$\beta_1(s_{\beta_1}) = \alpha_1(s_1) + r_1 Z_1 \tag{4.148}$$

(4.146) denklemini (4.148) de yerine yazarsak

$$\beta_1(s_{\beta_1}) = \alpha(s_1) - \lambda T_1(s_1) + r_1 Z_1(s_1) \tag{4.149}$$

elde ederiz. $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrisinin Darboux çatısını da $\{T_1^*, Y_1^*, Z_1\}$ olarak düşünelim. Bu çatıyı M_1 yüzeyi üzerindeki $\alpha_1(s_1)$ eğrisinin Darboux çatısını düşünerek bu çatımızı belirleyelim. (4.149) eşitliğinde (s_1) e göre türev alınırsa

$$\frac{d\beta_1}{ds_1} = \frac{d\beta_1}{ds_{\beta_1}} \frac{ds_{\beta_1}}{ds_1} = \alpha'(s_1) \frac{ds}{ds_1} + T_1 - \lambda T_1' + r_1 Z_1' \tag{4.150}$$

olarak bulunur. Eğer (4.146) eşitliğinde s_1 e göre türev alıp, $\alpha_1(s_1)$ eğrisinin Darboux çatısını kullanırsak

$$\alpha'(s_1) \frac{ds}{ds_1} = T \frac{ds}{ds_1} = \lambda k_{g_1} Y_1 + \lambda k_{n_1} Z_1 \tag{4.151}$$

elde edilir. (4.151) u (4.150) yerine yazıp gerekli düzenlemeler yapılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir

$$T_1^* \frac{ds_{\beta_1}}{ds_1} = \left(1 + r_1 k_{n_1}\right) T_1 + \left(r_1 t_{r_1}\right) Y_1 \tag{4.152}$$

(4.152) eşitliğinde her iki tarafın normu alınırsa

$$\frac{ds_{\beta_1}}{ds_1} = \sqrt{\left|(r_1 t_{r_1})^2 - (1 + r_1 k_{n_1})^2\right|} \tag{4.153}$$

eşitliğini elde ederiz. (4.153) eşitliğini (4.152) da yerine yazıp gerekli düzenlemeleri yapılırsa

$$T_1^* = \frac{1}{\sqrt{\left|(r_1 t_{r_1})^2 - (1 + r_1 k_{n_1})^2\right|}} ((1 + r_1 k_{n_1}) T_1 + (r_1 t_{r_1}) Y_1) \tag{4.154}$$

olur. Y_1^* vektörünü $Y_1^* = Z_1 \times T_1^*$ olarak alırsak, vektörel çarpımın özelliğinden ve (4.154) den Y_1^* vektörünü aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$Y_1^* = \frac{1}{\sqrt{\left|(r_1 t_{r_1})^2 - (1 + r_1 k_{n_1})^2\right|}} ((r_1 t_{r_1}) T_1 + (1 + r_1 k_{n_1}) Y_1) \tag{4.155}$$

Teorem 4.8.1: M_1 ve M_{r_1} 3-boyutlu Öklid uzayında yönlendirilebilir timelike yüzeyler olsun. M_1 yüzeyi üzerindeki eğri $\alpha_1(s_1)$ ve M_{r_1} paralel yüzeyi üzerindeki eğri $\beta_1\left(s_{\beta_1}\right)$ olsun. O zaman $\alpha_1(s_1)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrilerinin Darboux çatıları arasındaki ilişki aşağıdaki gibi verilebilir.

$$\begin{bmatrix} T_1^* \\ Y_1^* \\ Z_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{(1 + r_1 k_{n_1})}{\sqrt{\left|(r_1 t_{r_1})^2 - (1 + r_1 k_{n_1})^2\right|}} & \dfrac{(r_1 t_{r_1})}{\sqrt{\left|(r_1 t_{r_1})^2 - (1 + r_1 k_{n_1})^2\right|}} & 0 \\ \dfrac{(r_1 t_{r_1})}{\sqrt{\left|(r_1 t_{r_1})^2 - (1 + r_1 k_{n_1})^2\right|}} & \dfrac{(1 + r_1 k_{n_1})}{\sqrt{\left|(r_1 t_{r_1})^2 - (1 + r_1 k_{n_1})^2\right|}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix}$$

Teorem 4.8.1: Timelike M yüzeyi üzerindeki timelike $\alpha(s)$ eğrisinin asimptotik eğriliği $k_n = -\frac{1}{r}$ olması için gerek ve yeter şart $\alpha(s)$ ve $\beta(s_\beta)$ eğrilerinin involüt-evolüt D-eğri çifti olmalarıdır.

İspat: M yüzeyi üzerindeki $\alpha(s)$ eğrisinin asimptotik eğriliği $k_n = -\frac{1}{r}$ olsun. $Y^* = \frac{1}{\sqrt{\left|(rt_r)^2 - (1+rk_n)^2\right|}}\left[rt_r T + (1+rk_n)Y\right]$ eşitliğini göz önüne alıp, $k_n = -\frac{1}{r}$ ifadesini bu eşitlikte yerine yazılırsa $Y^* = \pm T$ elde ederiz. Böylece Y^* ve T vektörleri lineer bağımlı olduğundan $\alpha(s)$ ve $\beta(s_\beta)$ eğrileri involüt-evolüt D-eğri çifti olurlar. Tersine $\alpha(s)$ ve $\beta(s_\beta)$ involüt-evolüt D-eğri cifti olsunlar. Bu durumda Y^* ve T vektörlerinin lineer bağımlı olması gerekir. $Y^* = \frac{1}{\sqrt{\left|(rt_r)^2 - (1+rk_n)^2\right|}}\left[rt_r T + (1+rk_n)Y\right]$ eşitliğini göz önüne alırsak $k_n = -\frac{1}{r}$ olması gerektiği görülür.

Teorem 4.8.2: Timelike M yüzeyi üzerindeki timelike $\alpha(s)$ eğrisinin asimptotik eğriliğinin $k_n = -\frac{1}{r}$ olması için gerek ve yeter şart $\alpha_1(s_1)$ ve $\beta(s_\beta)$ eğrilerinin Bertrand D-eğri çifti olmalarıdır.

İspat: M yüzeyi üzerindeki $\alpha(s)$ eğrisinin asimptotik eğriliği $k_n = \frac{1}{r}$ olsun. $Y^* = \frac{1}{\sqrt{\left|(rt_r)^2 - (1+rk_n)^2\right|}}\left[rt_r T + (1+rk_n)Y\right]$ eşitliğini göz önüne alıp, $k_n = \frac{1}{r}$ ifadesini bu eşitlikte yerine yazarsak $Y^* = \pm T$ elde ederiz. Ayrıca $\alpha(s)$ ve $\alpha_1(s_1)$ eğrileri involüt-evolüt D-eğri çifti olduğundan $T = Y_1$ yazabiliriz. Bunu $Y^* = \pm T$ eşitliğinde yerine yazarsak, Y^* ve Y_1 vektörleri lineer bağımlı olduğundan gereği $\alpha_1(s_1)$ ve $\beta(s_\beta)$

eğrileri Bertrand D-eğri çifti olurlar. Tersine $\alpha_1(s_1)$ ve $\beta(s_\beta)$ Bertrand D-eğri çifti olsunlar. Bu durumda Y^* ve Y_1 vektörlerinin lineer bağımlı olması gerekir. Yukarıdaki eşitliği göz önüne alırsak $k_n = \frac{1}{r}$ olması gerektiği kolayca görülebilir.

Teorem 4.8.3: Timelike M_1 yüzeyi üzerindeki $\alpha_1(s_1)$ eğrisinin asimptotik eğriliği $k_{n_1} = -\frac{1}{r}$ olması için gerek ve yeter şart timelike $\alpha_1(s_1)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrilerinin involüt-evolüt D-eğri çifti olmalarıdır.

İspat: M_1 yüzeyi üzerindeki $\alpha_1(s_1)$ eğrisinin asimptotik eğriliği $k_{n_1} = -\frac{1}{r}$ ise,

$Y_1^* = \frac{1}{\sqrt{\left|(r_1 t_{r_1})^2 - (1 + r_1 k_{n_1})^2\right|}}((r_1 t_{r_1})T_1 + (1 + r_1 k_{n_1})Y_1)$ eşitliğini göz önüne alıp $k_{n_1} = -\frac{1}{r}$ ifadesi bu eşitlikte yerine yazılırsa $Y_1^* = \pm T_1$ elde ederiz. Böylece Y_1^* ve T_1 vektörleri lineer bağımlı olduğundan gereği $\alpha_1(s_1)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrileri involüt-evolüt D-eğri çifti olurlar. Tersine $\alpha_1(s_1)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ involüt-evolüt D-eğri çifti olsunlar. Bu durumda Y_1^* ve T_1 vektörlerinin lineer bağımlı olması gerekir. Yukarıdaki eşitliği göz önüne alırsak $k_{n_1} = -\frac{1}{r}$ olması gerektiği kolayca görülebilir.

Teorem 4.8.4: Timelike $\alpha(s)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrilerinin Bertrand D-eğri çifti olmaları için gerek ve yeter şart $\tanh\theta = \frac{r_1 t_{r_1}}{1 + r_1 k_{n_1}}$ olmasıdır. Burada θ açısı T_1 ve T vektörleri arasındaki açıdır.

İspat: Varsayalım ki $\alpha(s)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrileri İnvolute-Evolute D-eğri çifti olsun. Biz ayrıca aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz (Bektaş ve Yüce 2012).

$$T_1 = \cosh\theta Y - \sinh\theta Z \quad \text{ve} \quad Y_1 = \sinh\theta Y + \cosh\theta Z$$

Bu eşitlikleri $Y_1^* = \dfrac{1}{\sqrt{\left|(r_1 t_{r_1})^2 - (1 + r_1 k_{n_1})^2\right|}}((r_1 t_{r_1})T_1 + (1 + r_1 k_{n_1})Y_1)$ ifadesinde yerine yazalım. Bu durumda

$$Y_1^* = \frac{1}{\sqrt{\left|(r_1 t_{r_1})^2 - (1 + r_1 k_{n_1})^2\right|}}((r_1 t_{r_1} \cosh\theta + (1 + r_1 k_{n_1})\sinh\theta)Y$$
$$+(-r_1 t_{r_1} \sinh\theta + (1 + r_1 k_{n_1})\cosh\theta)Z$$

eşitliğini elde ederiz.

$\alpha(s)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrileri Bertrand D-eğri çifti olduğundan Y_1^* ve Y vektörleri lineer bağımlı olması gerekir. Böylece $\tanh\theta = \dfrac{r_1 t_{r_1}}{1 + r_1 k_{n_1}}$ olarak seçilirse ispatımız tamamlanmış olur.

Teorem 4.8.5: Timelike M_1 yüzeyi üzerindeki timelike $\alpha_1(s_1)$ eğrisinin eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart $\alpha_1(s_1)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrilerinin Bertrand D-eğri cifti olmalarıdır.

İspat: M_1 yüzeyi üzerindeki $\alpha_1(s_1)$ eğrisi eğrilik çizgisi olduğundan $t_{r_1} = 0$ dır. Bunu $Y_1^* = \dfrac{1}{\sqrt{\left|(r_1 t_{r_1})^2 - (1 + r_1 k_{n_1})^2\right|}}((r_1 t_{r_1})T_1 + (1 + r_1 k_{n_1})Y_1)$ eşitliğinde yerine yazarsak, $Y_1^* = \pm Y_1$ elde ederiz. Y_1^* ve Y_1 vektörleri lineer bağımlı olduğundan $\alpha_1(s_1)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrileri Bertrand D-eğri çifti olurlar.

4.8.2. Minkowski uzayında spacelike İnvolüt-Evolüt D-eğri çiftinin paralel yüzey üzerindeki görüntüsü

M yüzeyi üzerindeki $\alpha(s)$ eğrisinin paralel yüzeyi üzerindeki görüntüsünü bulmuştuk. Şimdi ise M_1 timelike yüzeyi üzerindeki spacelike $\alpha_1(s_1)$ eğrisinin bu yüzeyin paralel yüzeyi olan timelike M_{r_1} yüzeyi üzerindeki görüntüsünü elde edelim. $\alpha(s)$ ve $\alpha_1(s_1)$ İnvolute-Evolute D-eğri çifti olduğundan aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$\alpha_1(s_1)=\alpha(s_1)-\lambda T_1(s_1) \tag{4.156}$$

$(\alpha_1(s_1), M_1)$ eğri-yüzey ikilisinin çatısı $\{T_1, Y_1, Z_1\}$ olsun. O zaman bu ikilinin Darboux türev formüleri de aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} T_1' &= k_{g_1}Y_1 - k_{n_1}Z_1 \\ Y_1' &= k_{g_1}T_1 + t_{r_1}Z_1 \\ Z_1' &= k_{n_1}T_1 + t_{r_1}Y_1 \end{aligned} \tag{4.157}$$

M_1 ve M_{r_1} paralel yüzeyler olsunlar $\alpha_1(s_1)$ eğrisi M_1 yüzeyi üzerinde $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrisi de M_{r_1} paralel yüzeyi üzerinde bir eğri olsun. Bu durumda paralel yüzey tanımından $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrisi için bir parametrizasyon aşağıdaki gibi verilebilir

$$\beta_1(s_{\beta_1})=\alpha_1(s_1)+r_1Z_1 \tag{4.158}$$

(4.156) denklemini (4.158) de yerine yazarsak

$$\beta_1(s_{\beta_1})=\alpha(s_1)-\lambda T_1(s_1)+r_1Z_1(s_1) \tag{4.159}$$

elde ederiz. $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrisinin Darboux çatısını da $\{T_1^*, Y_1^*, Z_1\}$ olarak düşünelim. Bu çatıyı M_1 yüzeyi üzerindeki $\alpha_1(s_1)$ eğrisinin Darboux çatısını düşünerek bu çatımızı belirleyelim. (4.159) eşitliğinde (s_1) e göre türev alınırsa

$$\frac{d\beta_1}{ds_1}=\frac{d\beta_1}{ds_{\beta_1}}\frac{ds_{\beta_1}}{ds_1}=\alpha'(s_1)\frac{ds}{ds_1}+T_1-\lambda T_1'+r_1Z_1' \tag{4.160}$$

Eğer (4.156) eşitliğinde s_1 e göre türev alınıp, $\alpha_1(s_1)$ eğrisinin Darboux çatısını kullanırsak

$$\alpha'(s_1)\frac{ds}{ds_1}=T\frac{ds}{ds_1}=\lambda k_{g_1}Y_1+\lambda k_{n_1}Z_1 \tag{4.161}$$

elde edilir. (4.161) u (4.160) yerine yazıp gerekli düzenlemeler yapılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$T_1^*\frac{ds_{\beta_1}}{ds_1}=\left(1+r_1k_{n_1}\right)T_1+\left(r_1t_{r_1}\right)Y_1 \tag{4.162}$$

(4.162) eşitliğinde her iki tarafın normu alınırsa

$$\frac{ds_{\beta_1}}{ds_1} = \sqrt{\left|(r_1 t_{r_1})^2 - (1 + r_1 k_{n_1})^2\right|} \tag{4.163}$$

yukarıdaki eşitliği elde ederiz. (4.163) eşitliğini (4.162) da yerine yazıp gerekli düzenlemeleri yaparsak

$$T_1^* = \frac{1}{\sqrt{\left|(r_1 t_{r_1})^2 - (1 + r_1 k_{n_1})^2\right|}}((1 + r_1 k_{n_1})T_1 + (r_1 t_{r_1})Y_1) \tag{4.164}$$

Y_1^* vektörünü $Y_1^* = -Z_1 \times T_1^*$ olarak alırsak vektörel çarpımın özelliğinden ve (4.164) den Y_1^* vektörünü aşağıdaki gibi yazabiliriz

$$Y_1^* = \frac{1}{\sqrt{\left|(r_1 t_{r_1})^2 - (1 + r_1 k_{n_1})^2\right|}}(-(r_1 t_{r_1})T_1 - (1 + r_1 k_{n_1})Y_1) \tag{4.165}$$

Teorem 4.8.6: M_1 ve M_{r_1} 3-boyutlu Öklid uzayında yönlendirilebilir timelike yüzeyler olsun. M_1 yüzeyi üzerindeki spacelike eğri $\alpha_1(s_1)$ ve M_{r_1} paralel yüzeyi üzerindeki eğri $\beta_1\left(s_{\beta_1}\right)$ olsun. O zaman $\alpha_1(s_1)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrilerinin Darboux çatıları arasındaki ilişki aşağıdaki gibi verilebilir.

$$\begin{bmatrix} T_1^* \\ Y_1^* \\ Z_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{(1 + r_1 k_{n_1})}{\sqrt{\left|(r_1 t_{r_1})^2 - (1 + r_1 k_{n_1})^2\right|}} & \dfrac{(r_1 t_{r_1})}{\sqrt{\left|(r_1 t_{r_1})^2 - (1 + r_1 k_{n_1})^2\right|}} & 0 \\ \dfrac{(r_1 t_{r_1})}{\sqrt{\left|(r_1 t_{r_1})^2 - (1 + r_1 k_{n_1})^2\right|}} & \dfrac{(1 + r_1 k_{n_1})}{\sqrt{\left|(r_1 t_{r_1})^2 - (1 + r_1 k_{n_1})^2\right|}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix}$$

Teorem 4.8.7: Timelike M yüzeyi üzerindeki spacelike $\alpha(s)$ eğrisinin asimptotik eğriliği $k_n = -\dfrac{1}{r}$ olması için gerek ve yeter şart $\alpha(s)$ ve $\beta(s_\beta)$ eğrilerinin İnvolüt-Evolüt D-eğri çifti olmalarıdır.

İspat: M yüzeyi üzerindeki $\alpha(s)$ eğrisinin asimptotik eğriliği $k_n = -\dfrac{1}{r}$ ise, $Y^* = \dfrac{1}{\sqrt{\left|(rt_r)^2 - (1+rk_n)^2\right|}}\left[-rt_rT - (1+rk_n)Y\right]$ eşitliğini göz önüne alıp, $k_n = -\dfrac{1}{r}$ ifadesini bu eşitlikte yerine yazarsak $Y^* = \pm T$ elde ederiz. Böylece Y^* ve T vektörleri lineer bağımlı olduğundan tanım gereği $\alpha(s)$ ve $\beta(s_\beta)$ eğrileri İnvolute-Evolute D-eğri çifti olurlar. Tersine $\alpha(s)$ ve $\beta(s_\beta)$ involüt-evolüt D-eğri cifti olsunlar. Bu durumda Y^* ve T vektörlerinin lineer bağımlı olması gerekir.

$$Y^* = \frac{1}{\sqrt{\left|(rt_r)^2 - (1+rk_n)^2\right|}}\left[-rt_rT - (1+rk_n)Y\right]$$

eşitliğini göz önüne alırsak $k_n = -\dfrac{1}{r}$ olması gerektiği kolayca görülebilir.

Teorem 4.8.8: Timelike M yüzeyi üzerindeki spacelike $\alpha(s)$ eğrisinin asimptotik eğriliği $k_n = -\dfrac{1}{r}$ olması için gerek ve yeter şart $\alpha_1(s_1)$ ve $\beta(s_\beta)$ eğrilerinin Bertrand D-eğri çifti olmalarıdır.

İspat: M yüzeyi üzerindeki $\alpha(s)$ eğrisi asimptotik eğriliği $k_n = \dfrac{1}{r}$ olsun. $Y^* = \dfrac{1}{\sqrt{\left|(rt_r)^2 - (1+rk_n)^2\right|}}\left[-rt_rT - (1+rk_n)Y\right]$ eşitliğini göz önüne alıp, $k_n = \dfrac{1}{r}$ ifadesi bu eşitlikte yerine yazılırsa $Y^* = \pm T$ elde ederiz. Ayrıca $\alpha(s)$ ve $\alpha_1(s_1)$ eğrileri İnvolute-Evolute D-eğri çifti olduğundan $T = Y_1$ yazabiliriz. Bunu $Y^* = \pm T$ eşitliğinde yerine yazarsak, Y^* ve Y_1 vektörleri lineer bağımlı olduğundan $\alpha_1(s_1)$ ve $\beta(s_\beta)$ eğrileri Bertrand D-eğri cifti olurlar. Tersine, $\alpha_1(s_1)$ ve $\beta(s_\beta)$ Bertrand D-eğri çifti olsunlar. Bu durumda Y^* ve Y_1 vektörlerinin lineer bağımlı olması gerekir. Tersine,

$Y^{*} = \dfrac{1}{\sqrt{\left|(rt_r)^2 - \left(1 + rk_n\right)^2\right|}}\left[-rt_r T - \left(1 + rk_n\right)Y\right]$ eşitliği göz önüne alırsak $k_n = \dfrac{1}{r}$ olması gerektiği kolayca görülebilir.

Teorem 4.8.9: Timelike M_1 yüzeyi üzerindeki spacelike $\alpha_1(s_1)$ eğrisinin asimptotik eğriliği $k_{n_1} = -\dfrac{1}{r}$ olması için gerek ve yeter şart timelike $\alpha_1(s_1)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrilerinin involüt-evolüt D-eğri çifti olmalarıdır.

İspat: M_1 yüzeyi üzerindeki $\alpha_1(s_1)$ eğrisinin asimptotik eğriliği $k_{n_1} = -\dfrac{1}{r}$ ise,

$Y_1^{*} = \dfrac{1}{\sqrt{\left|(r_1 t_{r_1})^2 - (1 + r_1 k_{n_1})^2\right|}}(-(r_1 t_{r_1})T_1 - (1 + r_1 k_{n_1})Y_1)$ eşitliğini göz önüne benzer işlemler yapılırsa $Y_1^{*} = \pm T_1$ elde ederiz. Böylece Y_1^{*} ve T_1 vektörleri lineer bağımlı olduğundan tanım gereği $\alpha_1(s_1)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrileri İnvolute-Evolute D-eğri çifti olurlar. Tersine $\alpha_1(s_1)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ İnvolute-Evolute D-eğri çifti olsunlar. Bu durumda Y_1^{*} ve T_1 lineer bağımlı olması gerekir.

$Y_1^{*} = \dfrac{1}{\sqrt{\left|(r_1 t_{r_1})^2 - (1 + r_1 k_{n_1})^2\right|}}(-(r_1 t_{r_1})T_1 - (1 + r_1 k_{n_1})Y_1)$ eşitliğini göz önüne alırsak $k_{n_1} = -\dfrac{1}{r}$ olması gerektiği kolayca görülebilir.

Teorem 4.8.10: Timelike $\alpha(s)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrilerinin Bertrand D-eğri çifti olması için gerek ve yeter şart $\tanh\theta = \dfrac{r_1 t_{r_1}}{1 + r_1 k_{n_1}}$ olmasıdır. Burada θ açısı T_1 ve T vektörleri arasındaki açıdır.

İspat: Varsayalım ki $\alpha(s)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrileri İnvolute-Evolute D-eğri çifti olsun. Biz ayrıca aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz (Bektaş ve Yüce 2012).

$$T_1 = \cosh\theta Y - \sinh\theta Z \quad \text{ve} \quad Y_1 = \sinh\theta Y + \cosh\theta Z$$

Bu eşitlikleri $Y_1^* = \dfrac{1}{\sqrt{\left|(r_1 t_{r_1})^2 - (1+r_1 k_{n_1})^2\right|}}(-(r_1 t_{r_1})T_1 - (1+r_1 k_{n_1})Y_1)$ de yerine yazarsak aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$Y_1^* = \frac{1}{\sqrt{\left|(r_1 t_{r_1})^2 - (1+r_1 k_{n_1})^2\right|}}(-(r_1 t_{r_1}\cosh\theta + (1+r_1 k_{n_1})\sinh\theta)Y$$
$$-(-r_1 t_{r_1}\sinh\theta + (1+r_1 k_{n_1})\cosh\theta)Z$$

$\alpha(s)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrileri Bertrand D-eğri çifti olduğundan Y_1^* ve Y vektörleri lineer bağımlı olması gerekir. Böylece $\tanh\theta = \dfrac{r_1 t_{r_1}}{1+r_1 k_{n_1}}$ olarak seçilirse ispatımız tamamlanmış olur.

Teorem 4.8.11: Timelike M_1 yüzeyi üzerindeki spacelike $\alpha_1(s_1)$ eğrisinin eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart $\alpha_1(s_1)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrilerinin Bertrand D-eğri çifti olmalarıdır.

İspat: M_1 yüzeyi üzerindeki $\alpha_1(s_1)$ eğrisi eğrilik çizgisi olduğundan $t_{r_1} = 0$ dır. Bunu $Y_1^* = \dfrac{1}{\sqrt{\left|(r_1 t_{r_1})^2 - (1+r_1 k_{n_1})^2\right|}}((r_1 t_{r_1})T_1 + (1+r_1 k_{n_1})Y_1)$ eşitliğini göz önüne alıp, $t_{r_1} = 0$ bu eşitlikte yerine yazarsak $Y_1^* = \pm Y_1$ elde ederiz. Y_1^* ve Y_1 vektörleri lineer bağımlı olduğundan $\alpha_1(s_1)$ ve $\beta_1(s_{\beta_1})$ eğrileri Bertrand D-eğrileridir. Tersine olarak da benzer şekilde gösterilebilir.

5. SONUÇ

Bu tezde, ilk olarak Öklid uzayında paralel yüzey tanımından faydalanarak yüzey üzerindeki bir eğrinin paralel yüzey üzerindeki görüntüsü elde edildi. Daha sonra paralel yüzey üzerindeki bu eğrinin Darboux çatısı oluşturularak, paralel yüzey üzerindeki bu eğrinin, geodezik eğriliği, asimptotik eğriliği ve geodezik torsiyonu hesaplandı. Ve yüzey üzerindeki eğrinin eğrilikleri ile paralel yüzey üzerindeki eğrinin eğrilikleri arasındaki ilişkiler gösterildi. Daha sonra ise yine Öklid uzayında Bertrand D-eğri çifti, Manheim D-eğri çifti ve involüt-evolüt D-eğri cifti tanımlarından bahsedip, bu eğri çiftlerinin paralel yüzeyleri üzerindeki görüntüleri elde edildi. Daha sonra kendileri ile görüntüleri arasındaki ilişkiler incelendi. Ve bazı özel durumlar da bu eğri çiftlerinin korunduğu gösterildi. Son olarak ise Öklid uzayında yapılan bu çalışma Minkowski uzaya genişletilerek timelike yüzey üzerindeki timelike ve spacelike eğri durumları için ayrı ayrı incelenerek bazı teoremler ve sonuçlar elde edildi.

KAYNAKLAR

Bektaş, Ö., Yüce, S., 2012. Special Involüte-Evolüte Partner D-Curves in Euclidean Space. arxiv, 1204.

Craig, T., 1883. Note on Parallel Surfaces. Journal Für Die Reine und Angewandte Mathematik, (94), 162-170.

Hacısalihoğlu, H. H., 1983. Diferensiyel Geometri. İnönü Üniv. Fen Ed. Fak. Yayınları, 340, Ankara.

Izumiya, S., Takeuchi, N., 2002. Generic properties of helices and Bertrand curves. Journal of Geometry, (74), 97–109.

Kazaz, M., Uğurlu, H. H., Önder, M., Kahraman, T., 2010. Mannheim Partner D-Curves in Euclidean 3-space. 5. Ankara Matematik Günleri, Ankara.

Kazaz, M., Uğurlu, H. H., Önder, M., Oral, S., 2010. Bertrand Partner D-Curves in Euclidean 3-space, 5. Ankara Matematik Günleri, Ankara.

Kazaz, M., Uğurlu, H.H., Önder, M., Kahraman, T., 2011. Mannheim Partner D-Curves in Minkowski 3-space, IX Geometri sempozyumu, Samsun.

Kazaz, M., Uğurlu, H.H., Önder, M., Oral, S., 2011. Bertrand Partner D-Curves in Minkowski 3-space, , IX Geometri sempozyumu, Samsun.

Kocayigit, H., 2004. Minkowski 3-Uzayında Time-like Asal Normalli Space-like Egrilerin Frenet ve Darboux vektörleri. Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Manisa.

Kühnel, W., 2005. Differential Geometry Curves-Surfaces-Manifolds. American Mathematical Society, 380, USA.

Lopez, R., 2008. Differential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski Space. 67, Brazil.

O’ Neill, B., 1983. Semi Riemann Geometry. Academic Pres, 468, Newyork, London.

Önder, M., Kızıltuğ, S., 2012. Bertrand and Mannheim Partner D-Curves on Parallel Surfaces in Minkowski 3-Space. International Journal of Geometry, 1(2), 34-45.

Özkaldı, S., Yaylı, Y., 2011. Constant Angle Surfaces And Curves in E^3. International Electronic Journal of Geometry, 4(1), 70-78.

Kızıltuğ, S., Yaylı, Y., 2012. Spacelike Curves on Spacelike Parallel Surfaces in Minkowski 3-space. International Journal of Mathematics and Computation, (19) 0974-5718.

Kızıltuğ, S., Yaylı, Y., 2012. Timelike Curves on Timelike Parallel Surfaces in Minkowski 3-space. Mathematica Aeterna, 2(8), 675-687.

Salimov, A., Mağden A., 2008. Diferensiyel Geometri. Aktif Yayınevi, 326, Erzurum.

Struik, D.J., 1988. Lectures on Classical Differential Geometry. 2nd ed. Addison Wesley, Dover.

Tarakçı, Ö., 2002. Sabit Sırt Uzaklıklı Hiperyüzeyler. Doktora tezi, Ankara Üniv. Fen Bilimleri Ens., Ankara.

Ugurlu, H. H., Çalıskan, A., 1995. Timelike regle yüzey üzerindeki bir timelike eğrinin Frenet ve Darboux vektörleri. I. Spil Fen Bilimleri Kongresi, Manisa.

ÖZGEÇMİŞ

Sezai KIZILTUĞ 1982 yılında Erzincan'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini yine bu ilde tamamladı. 2000 yılında Balıkesir Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nü kazanıp 2005 yılında mezun oldu. 2009 yılında Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisansını tamamladı.