T.C.

ERCİYES ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

İKİNCİ MERTEBEDEN DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN SALINIMLILIK KRİTERLERİ

Hazırlayan

Neslihan HALICI

Danışman

Doç. Dr. Pakize TEMTEK

Yüksek Lisans Tezi

EKİM 2017

KAYSERİ

T.C.

ERCİYES ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

İKİNCİ MERTEBEDEN DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN SALINIMLILIK KRİTERLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Hazırlayan

Neslihan HALICI

Danışman

Doç. Dr. Pakize TEMTEK

EKİM 2017

KAYSERİ

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.

Neslihan HALICI

YÖNERGEYE UYGUNLUK

''İkinci Mertebeden Diferensiyel Denklemler İçin Salınım Kriterleri'' adlı Yüksek Lisans Tezi, Erciyes Üniversitesi Lisansüstü Tez Önerisi ve Tez Yazma Yönergesi'ne uygun olarak hazırlanmıştır.

Tezi Hazırlayan

Neslihan HALICI

Danışman

Doç. Dr. Pakize TEMTEK

Matematik ABD Başkanı

Prof. Dr. İlhan ÖZTÜRK

Doç. Dr. Pakize TEMTEK danışmanlığında **Neslihan HALICI** tarafından hazırlanan **"İkinci Mertebeden Diferensiyel Denklemler İçin Salınımlılık Kriterleri"** adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik** Anabilim Dalında **Yüksek Lisans** tezi olarak kabul edilmiştir.

6.10.2017

JÜRİ:

Başkan : Doç. Dr. M. Tamer ŞENEL M.T.Şenel ....

Üye: Doç. Dr. Pakize TEMTEK ....

Üye: Doç. Dr. Halis BİLGİL ....

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulunun 07/11/2017 tarih ve 2017/48-03 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

09/10/2017

Mehmet Akkurt

Enstitü Müdürü

Prof. Dr. Mehmet AKKURT

TEŞEKKÜR

‘’İkinci Mertebeden Diferensiyel Denklemleri İçin Salınımlılık Kriterleri’’ konulu tez çalışmasının seçiminde, yürütülmesinde, sonuçlandırılmasında, değerlendirilmesinde her türlü yardımlarını esirgemeyen ve beni yönlendiren değerli hocam Sayın Doç. Dr. Pakize TEMTEK’ e teşekkür ederim.

Ayrıca tez çalışmam sırasında maddi ve manevi desteğini hiçbir zaman benden esirgemeyen değerli eşim Haluk HALICI ve tüm aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Neslihan HALICI

Kayseri, Ekim 2017

İKİNCİ MERTEBEDEN DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN SALINIMLILIK KRİTERLERİ

Neslihan HALICI

Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü

Yüksek Lisans Tezi, EKİM 2017

Danışman: Doç. Dr. Pakize TEMTEK

ÖZET

Bu tez çalışmamızda ikinci mertebeden farklı tipteki (delay, advance, neutral, mixed, lineer, lineer olmayan,…) diferensiyel denklemlerle ilgili yapılmış çalışmaları özelden genele doğru inceleyeceğiz. Aynı zamanda bu incelemeyi yaparken tarihi sürecide göz önüne alacağız.

Çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

İkinci bölüm de ikinci mertebeden neutral diferensiyel denklemler ile ilgili yapılmış çalışmalar üç farklı tipteki denklem için ele alınıp incelenmiştir.

Üçüncü bölüm ikinci mertebeden lineer olmayan ikinci yanlı diferensiyel denklemlerle ilgili yapılmış çalışmalar yine üç farklı tipteki denklem için ele alınıp incelenmiştir.

Dördüncü bölümde ise, ikinci mertebeden lineer olmayan neutral delay diferensiyel denklemler için yapılmış çalışma ele alınıp incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Diferensiyel denklem, salınım, salınımsızlık

OSCILLATION CRITERIA FOR SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

Neslihan HALICI
Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences
M.Sc. Thesis, October 2017
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Pakize TEMTEK

ABSTRACT

In this thesis, we analyse the studies related to the second order differential equations in different types (delayed, advanced, neutral, mixed, linear and nonlinear,…) from the specific to the general. Moreover, we take the historical process into the consideration at the same time making this analiysis.

The work consists of four chapters. In the first chapter, the some basic definitions and theories are taken place.

In the second chapter, the studies made with regards to the second order neutral differential equations are examined within three different equations.

The third chapter presents the studies made associated with the second order nonlinear forced differential equations within three different equations are considered and observed.

Lastly in the fourth chapter, the study related to the second order nonlinear neutral delayed differential equations is observed.

Keywords: Differential Equations, oscillation , nonoscillation

İÇİNDEKİLER

İKİNCİ MERTEBEDEN DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN SALINIMLILIK KRİTERLERİ

3.BÖLÜM

İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN İKİNCİ YANLI DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN SALINIMLILIK KRİTERİ

GİRİŞ

Diferensiyel denklemler fizik, biyoloji, mühendislik, ekonomi ve sosyal bilimler gibi birçok alanda uygulama alanına sahiptir. Bu nedenle diferensiyel denklemlerin çözümlerinin bilinmesi önemlidir. Ancak belli formdaki denklemler hariç, genelde diferensiyel denklemlerin açık çözümleri elde edilememektedir. Çözümler için analitik ifade bulunamaması durumu, araştırmacıları çözümleri elde etmeden çözümlerin davranışını araştırmaya yöneltmiştir. Bu yaklaşım diferensiyel denklemlerde nitel (kalitatif) teori olarak bilinmektedir. Diferensiyel denklemler üzerine çok çeşitli gruplarda kalitatif çalışmalar yapılmış, hala da çok yoğun bir şekilde yapılmaya devam edilmektedir. Bu araştırmalarla, çözümü analitik olarak elde edilmeyen denklemlerin çözümlerinin, sınırlılık, kararlılık, asimptotik davranış, salınımlılık ve salınımsızlılık gibi kalitatif özellikleri incelenmektedir. Diferensiyel denklemler genelde kalitatif olarak araştırılırken, bilinmeyen fonksiyonun denklemdeki yer alış biçimine göre (yani operatörün özelliklerine göre), ikinci basamaktan, üçüncü basamaktan, yüksek basamaktan, lineer, lineer olmayan, yarı lineer, sub/super lineer, gecikmeli, neutral, vb. gibi çeşitli kategorilere ayrılır. Genel bir denklem üzerinde çalışmayla kıyaslanırsa, daha dar bir denklem sınıfı üzerinde çalışmak daha avantajlıdır. Her grup denklem sınıfı için araştırma teknikleri farklılık gösterebilmektedir.

Kalitatif teorinin önemli bir konusu da salınım teorisidir. Salınım teorisinin temeli 1836'da Sturm tarafından yayınlanan, kendine eşlenik ikinci mertebeden diferensiyel denklemlerin çözümlerinin sıfırlarıyla ilgili iyi bilinen sonuçlara dayanmaktadır. O zamandan beri farklı sınıftaki lineer ve lineer olmayan diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınım davranışı farklı yöntemlerle araştırılmıştır. Bu araştırmalarda salınımlılık ve salınımsızlık teorisinde ilk sonuçlar

$$x''(t) + q(t)x(t) = 0 \qquad (A_1)$$

lineer denklemi için elde edilmiştir. Bu denklem modeli için ilk integral tipi salınımlılık kriterini 1918 yılında Fite vermiştir. Fite bu çalışmasında $q(t) \geq 0$ olmak üzere

$$\lim_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} q(s)ds = \infty \qquad (A_2)$$

olması halinde (A_1) in salınımlı olduğunu ispatlamıştır [1].

1949 yılında Wintner, Fite'nin kriterinin $q(t) < 0$ olması durumunda da geçerli olduğunu göstermiştir. Ayrıca Wintner,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{s} q(u)duds = \infty \qquad (A_3)$$

olması durumunda (A_1) in salınımlı olduğu ispatlamıştır [2]. Daha sonra (A_3)şartı Fite-Wintner-Leighton kriteri olarak genişletilip (A_1)diferensiyel denkleminin salınımlılığı ispatlanmıştır [1,3]. Leighton da p(t) pozitif sürekli bir fonksiyon olmak üzere daha genel

$$(p(t)x'(t))' + q(t)x(t) = 0 \qquad (A_4)$$

denklemi için çalışmalar yapmıştır [4].

Bu çalışmalardan itibaren diferensiyel denklemlerin salınım veya salınımsızlık davranışları ile ilgili çalışmalar yapılmaya devam etmiştir ve günümüzde de çalışmalar sürdürülmektedir. Adi diferensiyel denklemler fizik, kimya, biyoloji, mühendislik ve ekonomi gibi alanlarda önemli rol oynayarak geleceğin araştırılmasında vazgeçilmez araçlar olarak kullanılmaktadır. Ancak, gelecek hakkında bilgi edinebilmek için geçmişin dinamik yapısı da iyi bir şekilde bilinmeli ve kullanılmalıdır. Geleceğin araştırılmasında, geçmişin göz ardı edilmesi, gerçekliğin de göz ardı edilmesine neden olmaktadır. Bu bağlamda modele zaman gecikmelerinin dâhil edilmesi oldukça önem arz etmektedir. Biz bu tez çalışmamızda ikinci mertebeden farklı tipteki (delay, advance, nötral, mixed, …) diferensiyel denklemlerle ilgili yapılmış çalışmaları özelden genele doğru inceleyeceğiz. Aynı zamanda bu incelemeyi yaparken tarihi süreci de göz önüne alacağız.

1.BÖLÜM

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, tez çalışması boyunca kullanılacak olan gerekli tanım ve kavramları verelim. İlk olarak diferensiyel denklem yapılarını inceleyerek başlayalım.

Tanım 1.1 (Gecikmeli(Delay, Retarted) Fonksiyonel Diferensiyel Denklemler).

Bir gecikmeli diferensiyel denklem, $\tau(t): R \rightarrow R$ reel değerli, $\lim_{t\rightarrow\infty} \tau(t) = \infty$ ve $\tau(t) < t$ koşullarını sağlayan bir fonksiyon olmak üzere $x^{'}(t) = f(t, x(t), x(\tau(t)))$ şeklindeki denklemlerdir. Yani bu tür denklemler, bilinmeyen bir fonksiyon ve onun en yüksek mertebeden türevi hariç diğer türevlerin bir yada daha çok gecikme değişkenlerine bağlı olduğu diferensiyel denklemlerdir. Buradan da görüldüğü gibi $x'(t)$ nin değişim oranı yalnızca x(t) değerine değil aynı zamanda x($\tau(t)$) değerine de bağlıdır. Aynı zamanda $\tau(t) \geq 0$ olmak üzere $x'(t) = f(t, x(t), x(t - \tau(t)))$ şeklindeki diferensiyel denklemlerde gecikmeli diferensiyel denklemlerdir. Burada en yüksek mertebede türev t anında, diğerleri ise t veya t den daha önceki zamanlarda hesaplanır. Örneğin,

$$x^{'}(t) + x(t-2) - x\left(t - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$x^{'}(t) + x(t-5) - 4 = 0$$

şeklindeki diferensiyel denklemler birer gecikmeli diferensiyel denklemdir.

Gecikmeli terim içeren diferensiyel denklemler; otomatik kontrol teori, salınım teorisi, roket hareketindeki ateşlemeyle bağıntılı problemlere ilişkin incelemelerde, elektrodinamik sistemler çalışmalarında, ekonomide uzun vadeli planlamayla ilgili problemlerde ve teknolojide olduğu gibi bilimin bir çok sahasında uygulama alanına sahiptir (El'sgol'ts 1973).

Yukarıda verilen tanım iki veya daha yüksek mertebeden diferensiyel denklemler için de benzer şekilde verilebilir. Biz burada ikinci mertebeden diferensiyel denklemler ile ilgilendiğimiz için tanımı aşağıdaki şekilde verebiliriz.

Tanım 1.2. $\tau(t): R \to R$ reel değerli bir fonksiyon olmak üzere $\lim_{t\to\infty} \tau(t) = \infty$ ve $\tau(t) < t$ koşulları sağlanmak üzere $x''(t) = f(t, x(t), x(\tau(t)), x'(t), x'(\tau(t)))$ şeklindeki denklemlere gecikmeli (delay) diferensiyel denklemler adı verilir.

Örneğin,

$$x''(t) - 2x'(t) + 3x\left(t - \frac{3}{2}\right) = 0$$

$$x''(t) - 3x'(t - sin^2 t) - x\left(\frac{t}{3}\right) + t = 1$$

şeklindeki diferensiyel denklemler birer gecikmeli diferensiyel denklemdir.

Tanım 1.3 (İleri(Advanced) Fonksiyonel Diferensiyel Denklemler).

$\tau(t) \geq 0$ reel değerli bir fonksiyon olmak üzere $x'(t) = f(t, x(t), x(t + \tau(t)))$ şeklindeki diferensiyel denklemlere ileri (advanced) diferensiyel denklem denir. Burada en yüksek mertebede türev t anında diğerleri ise, t veya t den daha ileri zamanlarda hesaplanır. Biz ikinci mertebeden diferensiyel denklemler ile ilgilendiğimiz için verilen tanım $\tau(t) \geq 0$ olmak üzere

$x''(t) = f(t, x'(t), x'(\tau(t)), x(t), x(\tau(t)))$ şeklindeki diferensiyel denklemler için de verilebiliriz. Örneğin,

$$x'(t) = -x(t+1) + x(t + \sqrt{t}) - t + 1$$

$$x''(t) - 3x'(t + cos^2 t) - x(5t) + t = 1$$

şeklindeki diferensiyel denklemler birer ileri diferensiyel denklemdir.

Tanım 1.4(Karma(Mixed) Fonksiyonel Diferensiyel Denklemler). Hem gecikmeli(delay) hem ileri(advance) terimlerin bulunduğu denklemlere karma(mixed) diferensiyel denklemler denir. Örneğin,

$$x'(t) = 2x(t-1) - 3x(t+1) + 1$$

$$x'(t) = -x(t-1)x(t) - tx(t+1)$$

$$x''(t) - 2x'(t+5) + 3x\left(t - \frac{3}{2}\right) = 0$$

şeklindeki diferensiyel denklemler birer karma diferensiyel denklemlerdir.

Tanım 1.5(Nötral(Neutral) Diferensiyel Denklemler). En yüksek mertebeden türevinin sadece t ye bağlı değil aynı zamanda sapma argümentlerine bağlı terimlerin de bulunduğu fonksiyonel diferansiyel denklemlere nötral(neutral) diferensiyel denklem denir. Örneğin,

$$x'(t) = -\frac{t}{t+1}x'(t-1) + x(t-2) + 3sint$$

$$\left(x(t) + \frac{1}{3}x(t-2)\right)'' + \frac{\gamma}{t^2}x(t) = 0$$

denklemleri de neutral tipli diferensiyel denklemlere bir örnek teşkil eder.

Şimdi ikinci mertebeden en genel

$$F\big(t, x(t), x'(t), x''(t)\big) = 0 \tag{1.1.1}$$

diferensiyel denklemi için aşağıdaki tanımları verelim. Verilen bu tanımlar lineer, lineer olmayan, ileri, gecikmeli, karma, neutral denklem yapıları için de benzer şekilde ifade edilebilir.

Tanım 1.6. $t \in [t_x, \infty) \subset [t_0, \infty)$ olmak üzere $[t_x, \infty)$ aralığı üzerinde iki kez diferensiyellenebilir ve (1.1.1) denklemini sağlayan bir x(t) fonksiyonuna, (1.1.1) diferensiyel denkleminin çözümü denir. Ayrıca $t_x \geq t_0 > 0$ sayısı x(t) çözümüne bağlı bir değerdir.

Tanım 1.7. x(t), $[t_0, \infty)$ aralığında verilen bir diferensiyel denklemin bir çözümü olsun. Eğer en az bir $t \in [t_0, \infty)$ için $x(t) \neq 0$ oluyorsa, bu çözüme aşikar olmayan çözüm denir.

Tanım 1.8. x(t), (1.1.1) diferensiyel denkleminin $[t_0, \infty)$aralığında aşikar olmayan bir çözümü olsun. Eğer $t \geq t_0$ için x(t) çözümü sonsuz sayıda sıfırlara sahipse, bu x(t) çözümüne salınımlıdır denir. Bu tanıma göre salınımlı bir x(t) çözümü için

$\lim_{t\to\infty} t_n = \infty$ ve $x(t_n) = 0$ olacak şekilde bir (t_n) dizisi vardır. Örneğin,

$x''(t) + 4x(t) = 0$ denklemi için $x(t) = sin2t$ (veya $x(t) = cos2t$) çözümü salınımlı bir çözümdür.

Tanım 1.9. (1.1.1) diferensiyel denkleminin aşikar olmayan bir x(t) çözümü salınımlı değilse, salınımsızdır denir. Yani çözüm $[t_0, \infty)$ aralığında sonlu sayıda sıfıra sahipse, çözümün salınımsızdır olduğu söylenir. Örneğin, $x''(t) - 4x(t) = 0$ denklemi için $x(t) = e^{2t}$ (veya $x(t) = e^{-2t}$) çözümü salınımsız bir çözümdür.

Tanım 1.10. Eğer (1.1.1) denkleminin bütün çözümleri salınımlı ise, denkleme salınımlıdır, aksi halde salınımsızdır denir.

Yukarıda verilen Tanım 1.10. sadece ikinci mertebeden diferensiyel denklemler için geçerlidir. Daha yüksek mertebeden diferensiyel denklemler için geçerli değildir. Bu durumda ikinci mertebeden daha yüksek mertebeden diferensiyel denklem en az bir salınımlı çözüme sahipse, diferensiyel denkleme salınımlıdır denir. Aksi taktirde diferensiyel denklem salınımsızdır denir. Örneğin, $x'''(t) + 4x'(t) = 0$ diferensiyel denklemi $x = 1,\ x = sin2t,\ x = cos2t$ çözümlerine sahiptir. Bu denklemin $x = sin2t$ gibi salınımlı bir çözümü olduğundan diferensiyel denkleme salınımlıdır denir. Ayrıca $x'''(t) - x'(t) = 0$ diferensiyel denklemi $x = 1, x = e^{t}, x = e^{-t}$ çözümlerine sahiptir. Bu çözümlerin hepsi de salınımsız olduğundan diferensiyel denkleme salınımsızdır denir.

Şimdi de Analizden bilinen temel tanım ve kavramları hatırlatalım.

Tanım 1.11 (Konveks Fonksiyon-Konkav Fonksiyon). Bir aralıkta sürekli olan f fonksiyonu bu aralıkta alınmış her x,y için

$f(\frac{x+y}{2}) \geq \frac{f(x)+f(y)}{2}$ eşitsizliğini sağlıyorsa, bu aralıkta f fonksiyonuna konkav fonksiyon denir. Eğer

$f(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$ eşitsizliğini sağlıyorsa, bu aralıkta f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir.

Teorem 1.1 (Ortalama Değer Teoremi). f ve g, [a,b] aralığında tanımlı ve g ile f.g bu aralıkta integrallenebilir olsun. Eğer f fonksiyonu, [a,b] de sürekli ise, [a,b] aralığında

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$$

olacak şekilde en az bir c noktası vardır.

2. BÖLÜM

İKİNCİ MERTEBEDEN NEUTRAL DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN SALINIMLILIK KRİTERLERİ

Bu bölümde ikinci mertebeden belli tipteki diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlı olması ile ilgili yapılan çalışmaları ele alacağız. Burada diferensiyel denklemlerin yapılarını özelden genele doğru inceleyeceğiz. Aynı zamanda bu incelemeyi yaparken tarihi süreci de göz önüne alacağız.

2.1. $\boldsymbol{[r(t)(x(t)+p(t)x(\tau(t)))']'+q(t)x(\sigma(t))=0}$ Diferensiyel Denklemler İçin Salınım Teoremleri

Biz bu kesimde B. Baculíková ve J. Džurina [5] tarafından incelenen

$$[r(t)(x(t)+p(t)x(\tau(t)))']'+q(t)x\big(\sigma(t)\big)=0 \tag{E1}$$

şeklindeki ikinci mertebeden neutral diferensiyel denklemleri göz önüne alacağız, burada g(t)∈ $C([t_0,\infty))$, $r(t), p(t), \tau(t), \sigma(t) \in C'([t_0,\infty))$ ve

$(\boldsymbol{H_1}) r(t)>0,\ q(t)>0,\ 0\le p(t)\le p_0<\infty,$

$(\boldsymbol{H_2}) \lim_{t\to\infty}\tau(t)=\infty$, $\lim_{t\to\infty}\sigma(t)=\infty,$

$(\boldsymbol{H_3}) \tau'(t)\ge\tau_0>0$, $\tau o\sigma=\sigma o\tau$

dir. Ayrıca,

$$R(t)=\int_{t_0}^{t}\frac{1}{r(s)}ds\to\infty \quad t\to\infty \tag{2.1.1}$$

olduğunu kabul edelim. Burada $z(t)=x(t)+p(t)x(\tau(t))$ şeklinde alalım.

(E1) denkleminin bir çözümü $T_x \geq t_0$için $r(t)z'(t) \in C'([T_x, \infty))$ özelliğine sahip bir $x(t) \in C([T_x, \infty))$ fonksiyonudur ve $[T_x, \infty)$aralığında (E1) denklemini sağlar. Biz (E1) denkleminin x(t) çözümleri olarak sadece her $T \geq T_x$ için $sup\{|x(t)|: t \geq T\}$ özelliğini sağlayan çözümleri göz önüne alacağız. (E1) denkleminin böyle bir çözüme sahip olduğunu kabul edelim. (E1) denkleminin bir çözümü, $[T_x, \infty)$aralığı üzerinde keyfi çoklukta sıfıra sahipse, salınımlıdır; aksi taktirde salınımsızdır denir. (E1) diferensiyel denkleminin tüm çözümleri salınımlı ise, denkleme salınımlıdır denir.

İkinci mertebeden denklemler fizik, kimya, biyoloji ve ekonomi ile ilgili çeşitli problemlerde uygulama alanına sahiptir. Bu nedenle, çeşitli tipteki ikinci mertebeden denklemlerin çözümlerinin salınım veya salınımsızlığını göstermek adına yeterli şartları elde etmek için yoğun bir ilgi vardır. Bunun için [6-24] çalışmalarına bakılabilir.

İncelenen salınım kriterlerinde ele alınan neutral diferensiyel denklemlerin katsayıları üzerinde çeşitli kısıtlamalar yapılmıştır. Örneğin, Grammatikopolis vd. [6] de

$$(x(t) + p(t)x(t-\tau))\ '' + q(t)x(t-\sigma) = 0$$

diferensiyel denkleminin $0 \leq p(t) \leq 1$ olmak üzere

$$\int^{\infty} q(s)\big(1 - p(s-\sigma)\big)ds = \infty$$

şartı ile birlikte salınımlı olduğunu göstermiştir.

Aynı denklem için Erbe vd. [7] $q(t) \geq q_0 > 0$, $p_1 \leq p(t) \leq p_2$ ve p(t) nin belli bir yerden sonra negatif olmaması durumunda gerekli salınım kriterlerini oluşturmuştur.

Bu sonuç diğer yazarlar tarafından geliştirilmiş ve genelleştirilmiştir. Buna bağlı olarak, Grace ve Lalli [8] deki çalışmasında

$\frac{f(x)}{x} \geq k$, $\int^{\infty} \frac{ds}{r(s)} = \infty$ ve $\rho(t)$ isteğe bağlı bir fonksiyon olmak üzere

$$\int^{\infty} \rho(s)q(s)\big(1 - p(s-\sigma)\big) - \frac{(\rho'(s))^2 r(s-\sigma)}{4k\rho(s)} ds = \infty$$

şartları altında

$$[r(t)(x(t) + p(t)x(t-\tau\,))']' + q(t)f(x(t-\sigma)) = 0$$

diferensiyel denkleminin salınımı üzerindeki çalışmasından bahsedebiliriz.

Xu ve Xia [9] daki çalışmasında $0 \leq p(t) < \infty$, $q(t) \geq M > 0$ olmak üzere

$$[(x(t) + p(t)x(t-\tau))'' + q(t)f(x(t-\sigma)) = 0$$

diferensiyel denkleminin salınımı üzerinde durmuştur. Ayrıca Lie vd. [10] da daha genel olan

$$[r(t)(x(t) + p(t)x(\tau(t)))']' + q(t)f\left(x\left(\sigma(t)\right)\right) = 0 \qquad (E_1)$$

neutral diferensiyel denklemi üzerinde çalışmışlardır. Bu çalışmada double Ricatti dönüşümünü uygulayarak, yeni salınım kriterleri incelenmiştir, burada

$0 \leq p(t) \leq p_0 < \infty$ ile $0 \leq p(t) \leq 1$ şartları yer değiştirmiş ve aynı zamanda

$\sigma(t) \leq \tau(t) \leq t$ ve $\rho(t)$ isteğe bağlı fonksiyon olmak üzere

$$\int^{\infty} \rho(s)q(s)\big(1 - p(s-\sigma)\big) - \frac{(\rho'(s))^2 r(s-\sigma)}{4k\rho(s)} ds = \infty$$

alınmıştır.

Bu çalışmada (E1) denkleminin salınımlılığını göstermek için birinci mertebeden diferensiyel eşitsizliğin pozitif çözümünün olmaması halinde, ikinci meretebeden diferensiyel denklemi karşılaştırarak yeni karşılaştırma teoremlerini inceleyeceğiz. Karşılaştırma teoremleri aslında (E1) denkleminin salınımını incelemeyi kolaylaştırmak ve (E1) denkleminin katsayıları üzerinde belirtilen bazı koşulları ortadan kaldırmak için yapılmıştır.

Uyarı 2.1.1. Burada incelenen bütün fonksiyonel eşitsizliklerin belli bir yerden sonra sağlandığı kabul edilir. Yani bunlar yeterince büyük her t için sağlanır.

Uyarı 2.1.2. Verilen sonuçların ispatında (E1) denkleminin salınımsız çözümlerini elimine ederken sadece pozitif çözümleri ile ilgilenilecektir.

TEMEL SONUÇLAR

Şimdi (2.1.1) şartı altında (E1) diferensiyel denkleminin pozitif çözümleri için sonuçlar verilecektir. Öncelikle bu sonuçların ispatında kullanacak olan aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 2.1.1.

x(t), (E1) denkleminin pozitif bir çözümü olmak üzere, $z(t) = x(t) + p(t)x(\tau(t))$ fonksiyonu için

$$z(t) > 0\,, r(t)z'(t) > 0 \; ve \; (r(t)\, z'\,(t))' < 0 \qquad (2.1.2)$$

şartları sağlanır.

İspat: Kabul edelim ki x(t), (E1) denkleminin pozitif bir çözümü olsun. (E1) denkleminden

$$[r(t)(x(t) + p(t)x(\tau(t)\,))']' = -q(t)x\big(\sigma(t)\big) < 0$$

olup buradan $(r(t)\, z'\,(t))' < 0$ elde edilir. Böylece $r(t)z'\,(t)$ azalan olup burada $z'\,(t) < 0$ veya $z'\,(t) > 0$ olur. Kabul edelim ki $z'(t) < 0$ olsun. Bu taktirde

$r(t)\, z'(t) < -c < 0$ dır ve bu ifadenin her iki tarafının t_1 den t ye integralini alırsak

$$\int_{t_1}^{t} z'(s)ds \leq \int_{t_1}^{t} \frac{-c}{r(s)} ds$$

$$z(t) \leq z(t_1\,) - c\int_{t_1}^{t} \frac{1}{r(s)} ds$$

olup $t \to \infty$ için $z(t) \to -\infty$ elde edilir. Bu ise z nin pozitifliği ile çelişir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Şimdi aşağıdaki sonuçlarımızın ispatında kullanacağımız Q(t) fonksiyonunu yeterince büyük t ler için

$$Q(t) = min\{q(t), q(\tau(t))\} \qquad (2.1.3)$$

şeklinde tanımlayalım.

Teorem 2.1.1. $Q(t)$, (2.1.3) deki gibi tanımlı ve t_1 yeterince büyük olsun. Kabul edelim ki birinci mertebeden

$$\left(y(t)+\frac{p_0}{q_0}y\big(\tau(t)\big)\right)'+Q(t)\Big(R\big(\sigma(t)\big)-R(t_1)\Big)y(\sigma(t))\leq 0 \qquad (E_2)$$

neutral diferensiyel eşitsizlik pozitif bir çözüme sahip değilse, bu durumda (E1) denklemi salınımlıdır.

İspat: Kabul edelim ki x(t), (E1) denkleminin pozitif bir çözümü olsun. Dolayısıyla z(t) fonksiyonunda t yerine $\sigma(t)$ alınır

$$z(\sigma(t))=x(\sigma(t))+p(\sigma(t))x(\tau(\sigma(t)))$$

ve (H_1) ve (H_3) şartı kullanılırsa,

$$z(\sigma(t))\leq x(\sigma(t))+p_0x(\sigma(\tau(t))) \qquad (2.1.4)$$

elde edilir. Diğer taraftan (E1) denklemi aşağıdaki şekilde

$$[r(t)z'(t)]'+q(t)x\big(\sigma(t)\big)=0 \qquad (2.1.5)$$

yazılabilir. (2.1.5) denkleminde t yerine $\tau(t)$ yazıp her iki tarafı p_0 ile çarparsak,

$$0=\frac{p_0}{\tau'(t)}[r\big(\tau(t)\big)z'(\tau(t))]'+p_0q(\tau(t))x\big(\sigma(\tau(t))\big)$$

olur. (H_3) şartından $\tau'(t)\geq\tau_0>0$ olduğundan

$$0\geq\frac{p_0}{\tau_0}[r\big(\tau(t)\big)z'(\tau(t))]'+p_0q(\tau(t))x\big(\sigma(\tau(t))\big) \qquad (2.1.6)$$

elde edilir. (2.1.5) ile (2.1.6) ifadelerini taraf tarafa toplarsak

$$[r(t)z'(t)]'+\frac{p_0}{\tau_0}[r\big(\tau(t)\big)z'(\tau(t))]'+q(t)x\big(\sigma(t)\big)+p_0q(\tau(t))x\big(\sigma(\tau(t))\big)\leq 0$$

bulunur. (2.1.4) ve (2.1.3) den

$$q(t)x\big(\sigma(t)\big)+p_0q(\tau(t))x\big(\sigma(\tau(t))\big)=Q(t)z(\sigma(t))$$

olduğundan

$$[r(t)z'(t)]' + \frac{p_0}{\tau_0}[r(\tau(t))z'(\tau(t))]' + Q(t)z(\sigma(t)) \leq 0 \tag{2.1.7}$$

elde edilir. Lemma 2.1.1 den $y(t) = r(t)z'(t) > 0$ azalan olup burada

$z'(t) = \frac{z'(t)r(t)}{r(t)}$ ifadesinin her iki tarafı t_1 den t ye integre edilirse;

$$\int_{t_1}^{t} z'(s)\,ds = \int_{t_1}^{t} \frac{z'(s)r(s)}{r(s)} ds$$

$$z(t) - z(t_1) = \int_{t_1}^{t} \frac{y(s)}{r(s)} ds$$

elde edilir. Buradan

$$z(t) \geq \int_{t_1}^{t} \frac{y(s)ds}{r(s)}$$

olup ortalama değer teoreminden

$$z(t) \geq y(t) \int_{t_1}^{t} \frac{ds}{r(s)}$$

şeklinde yazılabilir. Böylece

$$z(t) \geq \int_{t_1}^{t} \frac{1}{r(s)} z'(s)r(s)ds \geq y(t) \int_{t_1}^{t} \frac{1}{r(s)} ds = y(t)(R(t) - R(t_1)) \tag{2.1.8}$$

elde edilir. Buradan (2.1.8) ifadesini (2.1.7) ifadesinde yerine yazarsak, yani

$$[r(t)z'(t)]' + \frac{p_0}{\tau_0}[r(\tau(t))z'(\tau(t))]' + Q(t)z(\sigma(t)) \leq 0 \tag{2.1.7}$$

eşitsizliğinden

$$y'(t) + \frac{p_0}{\tau_0} y'(\tau(t)) + Q(t)y(\sigma(t))(R(\sigma(t)) - R(t_1)) \leq 0$$

elde edilir. Bu ise, y(t) nin (E_2) denkleminin pozitif bir çözümü olduğunu gösterir. Böylece çelişki elde edilir ve ispat tamamlanır.

Uyarı 2.1.3. (H_3) koşulu sağlandığı için $\tau o \sigma = \sigma o \tau$ dır. Örneğin $\tau(t) = at$,

$\sigma(t) = bt$ için de $\tau o \sigma = \sigma o \tau$ dır.

Uyarı 2.1.4. Neutral diferensiyel denklemlerin özellikleri çalışılırken, (E1) denkleminin katsayıları üzerinde $\sigma(t) \leq \tau(t),\ \sigma(t) \leq t,\ \tau(t) \leq t,\ 0 \leq p(t) < 1$ gibi farklı kısıtlamalar da vardır. Teorem 2.1.1 böyle kısıtlamalar içermez. Sonuç olarak verilen teorem daha önceki sonuçları tamamlayıcı niteliğe sahip olup genişletilmiş ve daha genel halidir. Ayrıca Teorem 2.1.1 de oluşturulan karşılaştırma prensibi (E1) denkleminin salınımını, birinci mertebeden (E_2) neutral diferensiyel eşitsizliğin araştırmasına indirger. Böylece (E_2) nin pozitif çözümlere sahip olmaması için (E_2) ye uygulanan mevcut veya yeni şartlar bize (E1) denklemi için salınım kriterlerini verir. (E1) denkleminin katsayıları üzerine ilave şartlar uygulanarak Teorem 2.1.1 den (E1) denklemi için çeşitli salınım kriterleri elde edilebilir.

Teorem 2.1.2. $Q(t)$, (2.1.3) deki gibi tanımlı ve t_1 yeterince büyük olsun. Ayrıca kabul edelim ki

$$\tau(t) \geq t \tag{2.1.9}$$

olsun. Birinci mertebeden

$$w'(t) + \frac{\tau_0}{\tau_0 + p_0} Q(t)\left(R\big(\sigma(t)\big) - R(t_1)\right) w(\sigma(t)) \leq 0 \tag{E_3}$$

diferensiyel eşitsizliğin pozitif bir çözümü yoksa, (E1) denklemi salınımlıdır.

İspat: Kabul edelim ki x(t), (E1) nin pozitif bir çözümü olsun. Lemma 2.1.1 ve

Teorem 2.1.1 in ispatından $y(t) = r(t)z'(t) > 0$ azalandır ve (E_2) diferensiyel eşitsizliğini sağlar. Burada

$$w(t) = y(t) + \frac{p_0}{\tau_0} y(\tau(t))$$

alalım. (2.1.9) da $\tau(t) \geq t$ olduğundan $\tau(t)$ yerine t yazarsak

$$w(t) \leq \left(1 + \frac{p_0}{\tau_0}\right) y(t)$$

bulunur. Buradan t yerine $\sigma(t)$ alınırsa,

$$\left(\frac{\tau_0}{p_0 + \tau_0}\right) w(\sigma(t)) \leq y(\sigma(t)) \tag{2.1.10}$$

elde edilir. (2.1.10) ifadesi (E_2) denkleminde yerine yazılırsa,

$$w'(t) + Q(t)\left(R\big(\sigma(t)\big) - R(t_1)\right)\left(\frac{\tau_0}{p_0 + \tau_0}\right)w(\sigma(t)) \leq 0$$

bulunur. Bu ise, $w(t)$ nin (E_3) ün pozitif bir çözümü olduğunu gösterir. Böylece çelişki elde edilir ve ispat tamamlanır.

$\sigma(t)$ gecikmeli argümanını kısıtlayarak (E_3) ün pozitif çözümlerinin olmaması için uygun kriterler kullanılıp (E1) nin salınımlılığını kolayca elde edebiliriz [11,12] .

Şimdi vereceğimiz sonuçların ispatında kullanılan G.S. Ladde, V. Lakshmikantham, B.G. Zhang [12] tarafından verilen Teorem 2.1.1 i ifade edelim.

Teorem 2.1.1. [12]

$y'(t) + p(t)y(\tau(t)) \leq 0$ burada $p \in C[R_+, R_+]$, $\tau(t) < t$ ve $\lim_{t\to\infty} \tau(t) = \infty$ iken $\lim_{t\to\infty} \int_{\tau(t)}^{t} p(s)ds > \frac{1}{e}$ ise,

$$y'(t) + p(t)y(\tau(t)) \leq 0$$

eşitsizliği pozitif bir çözüme sahip değildir.

Sonuç 2.1.1. $Q(t)$, (2.1.3) deki gibi tanımlı ve t_1 yeterince büyük olsun. Ayrıca kabul edelim ki (2.1.9) şartı geçerli ve

$$\sigma(t) \leq t \tag{2.1.11}$$

olsun. Eğer

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{\sigma(t)}^{t} Q(s)R\big(\sigma(s)\big)ds > \frac{\tau_0 + p_0}{\tau_0 e} \tag{2.1.12}$$

ise, (E1) denklemi salınımlıdır.

İspat:

$$w'(t) + Q(t)\left(R\big(\sigma(t)\big) - R(t_1)\right)\left(\frac{\tau_0}{p_0 + \tau_0}\right)w(\sigma(t)) \leq 0 \tag{E_3}$$

denkleminden ve Teorem 2.1.1 [12] den $\sigma(t) \leq t \leq \tau(t)$ olduğundan burada

$$p_1(t) = (\frac{\tau_0}{p_0+\tau_0})Q(t)\left(R\big(\sigma(t)\big) - R(t_1)\right)$$

şeklinde olup

$$\liminf_{t\to\infty} p_1(t) = \lim_{t\to\infty} \inf \int_{\sigma(t)}^{t} (\frac{\tau_0}{p_0+\tau_0})Q(s)\left(R\big(\sigma(s)\big) - R(t_1)\right)) > \frac{1}{e}$$

ve buradan

$$\lim_{t\to\infty} \inf \int_{\sigma(t)}^{t} Q(s)\left(R\big(\sigma(s)\big) - R(t_1)\right)) > \frac{p_0+\tau_0}{e\tau_0}$$

elde edilir. [12] deki Teorem 2.1.1 şartı sağlandığından (E_3) pozitif bir çözüme sahip değildir. Dolayısıyla (E1) salınımlıdır.

Şimdi, $\tau(t)$ gecikmeli argüman olduğu durumu göz önüne alalım. Biz burada $\tau^{-1}(t)$ ters fonksiyonunu kullanalım.

Teorem 2.1.3. $Q(t)$, (2.1.3) deki gibi tanımlı ve t_1 yeterince büyük olsun. Ayrıca kabul edelim ki

$$\tau(t) \le t \tag{2.1.13}$$

olsun. Eğer birinci mertebeden

$$w'(t) + (\frac{\tau_0}{\tau_0+p_0})Q(t)\left(R\big(\sigma(t)\big) - R(t_1)\right)w(\tau^{-1}\sigma(t)) \le 0 \tag{E_4}$$

diferensiyel eşitsizlik pozitif bir çözüme sahip değilse bu durumda (E1) denklemi salınımlıdır.

İspat: Kabul edelim ki x(t), (E1) nin pozitif bir çözümü olsun. Bu durumda

$y(t) = r(t)z'(t) > 0$, (E_2) diferensiyel eşitsizliğinin azalan bir çözümüdür. Biz w(t) fonksiyonunu

$$w(t) = y(t) + \frac{p_0}{\tau_0}y(\tau(t))$$

olacak şekilde alalım. (2.1.13) den w(t) fonksiyonunda t yerine $\tau(t)$ yazarsak

$$w(t) \leq (1+\frac{p_0}{\tau_0})y(\tau(t)) \tag{2.1.14}$$

olup $w(t)$, (E_3) ün pozitif bir çözümüdür. (2.1.14) eşitsizliğinde t yerine $\tau^{-1}o\sigma(t)$ yazarsak

$$w(\tau^{-1}o\sigma(t)) \leq (1+\frac{p_0}{\tau_0})y(\tau(\tau^{-1}o\sigma(t)))$$

$$w(\tau^{-1}o\sigma(t)) \leq (1+\frac{p_0}{\tau_0})y(\sigma(t))$$

$$(\frac{\tau_0}{p_0+\tau_0})w(\tau^{-1}o\sigma(t)) \leq \ y(\sigma(t))$$

elde edilir. Bu ifadeyi (E_2) denkleminde yerine yazarsak

$$w'(t)+Q(t)\Big(R\big(\sigma(t)\big)-R(t_1)\Big)(\frac{\tau_0}{p_0+\tau_0})w(\tau^{-1}o\sigma(t)) \leq 0$$

olup (E_4) denklemi elde edilir. Dolayısıyla w(t), (E_4) ün pozitif bir çözümü olmak üzere bu bir çelişkidir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 2.1.2. $Q(t)$, (2.1.3) deki gibi tanımlı ve t_1 yeterince büyük olsun. Ayrıca kabul edelim ki

$$\sigma(t) \leq \tau(t) \leq t \tag{2.1.15}$$

olsun. Eğer

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{\tau^{-1}o\sigma(t)}^{t} Q(s)R\big(\sigma(s)\big)ds > \frac{\tau_0+p_0}{\tau_0 e} \tag{2.1.16}$$

ise, (E1) denklemi salınımlıdır.

İspat: Sonuç 2.1.2 nin ispatı Sonuç 2.1.1 in ispatına benzerdir. Bu yüzden ispatı ihmal edilebilir.

Örnek 2.1.1. Aşağıdaki ikinci merteben

$$\left(t^{\frac{1}{2}}[x(t)+p_0x(\alpha t)]'\right)'+\frac{a}{t^{\frac{3}{2}}}x(\beta t)=0 \tag{E_5}$$

neutral diferensiyel denklemi göz önüne alalım. Burada $0<p_0<\infty$, $0<\alpha<\infty$ $0<\beta<1$ ve $a>0$ dır. Eğer $\alpha \geq 1$ ise, bu durumda $Q(t)=q\big(\tau(t)\big)=\frac{a}{(\alpha t)^{\frac{3}{2}}}$ dır ve

Sonuç 2.1.1 deki (2.1.12) şartı $\frac{2\alpha\beta^{\frac{1}{2}}}{\alpha^{\frac{3}{2}}} ln\frac{1}{\beta} > \frac{\alpha+p_0}{\alpha e}$ şeklini alır. Bu (E_5) salınımını garanti eder. Diğer taraftan $0 < \beta < \alpha \leq 1$ ise, bu durumda $Q(t) = q(t) = \frac{a}{t^{\frac{3}{2}}}$ dir ve Sonuç 2.1.2 deki (2.1.16) şartı $2\alpha\beta^{\frac{1}{2}} ln\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\alpha+p_0}{\alpha e}$ eşitsizliğine indirgenir. Sonuç olarak (E_5), $\tau(t) = \alpha t$ gecikmeli veya ileri argüman olması durumunda her $\alpha \in (0, \infty)$ için salınımlıdır. Belirtelim ki [10] makalesindeki salınım kriterinde (2.1.16) şartı gereklidir ve böylece $\alpha \geq 1$ için uygulanamaz. Diğer taraftan [6] daki kriterde $0 \leq p(t) \leq 1$ olması gereklidir ve böylece $p_0 > 1$ iken uygulanamaz. Dahası [9] salınım kriterinde

$q(t) \geq M > 0$ olmalıdır ve böylece (E_5) için kullanılamaz ve aynı sebepten [7] makalesindeki salınım şartı sağlanmaz.

Bundan sonraki sonuçlarımızda kullanmak üzere yeterince büyük t_1 için

$$Q(t) = min\{q(t), q(\tau(t))\}, \quad Q_1(t) = \frac{1}{r(t)} \int_t^{\infty} Q(s)ds \tag{2.1.17}$$

$$Q_2(t) = Q(t)(R(t) - R(t_1)) \tag{2.1.18}$$

fonksiyonlarını tanımlayalım, burada $t \geq t_1$ dir.

Teorem 2.1.4. $\tau(t) \geq t$ olsun. Kabul edelim ki birinci mertebeden

$$w'(t) - \frac{\tau_0}{\tau_0 + p_0} Q_1(t) w(\sigma(t)) \geq 0 \tag{E_6}$$

$$w'(t) - \frac{\tau_0}{\tau_0 + p_0} Q_2(t) w(\sigma(t)) \geq 0 \tag{E_7}$$

ileri tipteki diferensiyel eşitsizliklerden en az biri pozitif bir çözüme sahip olmasın, bu durumda (E1) denklemi salınımlıdır.

İspat: Kabul edelim ki x(t) , (E1) denkleminin pozitif bir çözümü olsun. Dolayısıyla z(t) fonksiyonunda t yerine $\sigma(t)$ alırsak

$$z(\sigma(t)) = x(\sigma(t)) + p(\sigma(t))x(\tau(\sigma(t)))$$

elde edilir. Ayrıca (H_1) şartı gereğince $0 \leq p(t) \leq p_0 < \infty$ olduğundan ve (H_3) şartı gereğince $\tau o \sigma = \sigma o \tau$ olduğundan z(t) fonksiyonu

$$z(\sigma(t)) \leq x(\sigma(t)) + p_0 x(\sigma(\tau(t))) \tag{2.1.19}$$

eşitsizliğini sağlar. Ayrıca (E1) denklemi (2.1.5) de olduğu gibi yazılabilir. (2.1.5) denkleminde (H_1) ve (H_3) şartlarını dikkate alarak t yerine $\tau(t)$ yazıp her iki tarafı p_0 ile çarparsak,

$$0 = \frac{p_0}{\tau'(t)}[r(\tau(t))z'(\tau(t))]' + p_0 q(\tau(t))x(\sigma(\tau(t)))$$

olur. (H_3) şartından

$$0 \geq \frac{p_0}{\tau_0}[r(\tau(t))z'(\tau(t))]' + p_0 q(\tau(t))x(\sigma(\tau(t))) \tag{2.1.20}$$

elde edilir. Diğer taraftan (2.1.5) ile (2.1.20) ifadelerini taraf tarafa toplarsak

$$[r(t)z'(t)]' + \frac{p_0}{\tau_0}[r(\tau(t))z'(\tau(t))]' + q(t)x(\sigma(t)) + p_0 q(\tau(t))x(\sigma(\tau(t))) \leq 0$$

bulunur. Ayrıca (2.1.19) dan ve (2.1.17) de $Q(t) = min\{q(t), q(\tau(t))\}$ olduğundan

$$[r(t)z'(t)]' + \frac{p_0}{\tau_0}[r(\tau(t))z'(\tau(t))]' + Q(t)z(\sigma(t)) \leq 0 \tag{2.1.21}$$

olup eşitsizliğin t den ∞ a integralini alırsak,

$$r(t)z'(t) + \frac{p_0}{\tau_0}r(\tau(t))z'(\tau(t)) \geq \int_t^\infty Q(s)z(\sigma(s))\,ds \tag{2.1.22}$$

elde edilir. Diğer taraftan $r(t)z'(t)$ azalan ve $\tau(t) \geq t$ olduğundan

$$\left(1 + \frac{p_0}{\tau_0}\right) r(t)z'(t) \geq \int_t^\infty Q(s)z(\sigma(s))\,ds \tag{2.1.23}$$

bulunur. $z(\sigma(t))$ artan olduğundan (2.1.23) ifadesinin t_1 den t ye integralini alırsak,

$$\int_{t_1}^{t} z'(s)ds \geq \frac{\tau_0}{p_0 + \tau_0}\int_{t_1}^{t}\frac{1}{r(u)}\int_u^\infty Q(s)z(\sigma(s))\,dsdu$$

$$z(t) - z(t_1) \geq \frac{\tau_0}{p_0 + \tau_0}\int_{t_1}^{t}\frac{1}{r(u)}\int_u^\infty Q(s)z(\sigma(s))\,dsdu$$

ortalama değer teoreminden,

$$z(t) \geq \frac{\tau_0}{p_0+\tau_0}\int_{t_1}^{t} z(\sigma(u))\frac{1}{r(u)}\int_{u}^{\infty} Q(s)\,dsdu$$

elde edilir. Yani (2.1.17) den

$$z(t) \geq \frac{\tau_0}{p_0+\tau_0}\int_{t_1}^{t} z\big(\sigma(u)\big)Q_1(u)du \tag{2.1.24}$$

yazılabilir. (2.1.24) ifadesinin sağ tarafını w(t) ile gösterelim. Bu durumda

$w(t) > 0$ ve $z(t) \geq w(t)$ olup,

$$w'(t) = \frac{\tau_0}{p_0+\tau_0}Q_1(t)z(\sigma(t)) \geq \frac{\tau_0}{p_0+\tau_0}Q_1(t)w(\sigma(t))$$

elde edilir. Böylece w(t), (E_6) denklemininin pozitif bir çözümüdür. Bu sonuçlar bizim kabullerimizle çelişir ve böylece (E_6) denklemininin pozitif çözümlerinin olmaması (E1) denkleminin salınımı anlamına gelir.

Şimdi, (E_7) nin pozitif çözümlerinin olmamasının (E1) denkleminin salınımını verdiğini gösterelim. (2.1.23) ifadesinin t_1 den t ye integralini alırsak

$$\begin{aligned} z(t) &\geq \frac{\tau_0}{p_0+\tau_0}\int_{t_1}^{t}\frac{1}{r(u)}\int_{u}^{\infty} Q(s)z\big(\sigma(s)\big)dsdu \\ &\geq \frac{\tau_0}{p_0+\tau_0}\int_{t_1}^{t}\frac{1}{r(u)}\int_{u}^{t} Q(s)z\big(\sigma(s)\big)dsdu \\ &= \frac{\tau_0}{p_0+\tau_0}\int_{t_1}^{t} Q(s)z\big(\sigma(s)\big)\int_{t_1}^{s}\frac{1}{r(u)}duds \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (2.1.18) den

$$z(t) \geq \frac{\tau_0}{p_0+\tau_0}\int_{t_1}^{t} Q_2(s)z\big(\sigma(s)\big)ds \tag{2.1.25}$$

olduğu görülür. (2.1.25) eşitsizliğinin sağ tarafını w(t) ile gösterelim. Buradan

$w(t) > 0$ ve $z(t) \geq w(t)$ kullanılarak w(t) nin (E_7) denkleminin bir pozitif çözümü olduğu görülür. Bu ise bir çelişkidir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 2.1.3. $\tau(t) \geq t$ olsun. Kabul edelim ki

$$\liminf_{t\to\infty}\int_{t}^{\sigma(t)} Q_1(s)ds > \frac{\tau_0+p_0}{\tau_0 e} \tag{2.1.26}$$

$$\liminf_{t\to\infty}\int_t^{\sigma(t)} Q_2(s)ds > \frac{\tau_0+p_0}{\tau_0 e} \qquad (2.1.27)$$

koşullarından en az biri sağlansın. Bu durumda (E1) denklemi salınımlıdır.

İspat: Teorem 2.1.1 [12] sırasıyla (2.1.26) ve (2.1.27) şartlarıyla (E_6) ve (E_7) denklemlerin pozitif çözümlerinin olmadığını garanti eder. Bu ise Teorem 2.1.4 den (E1) denkleminin salınımını gösterir.

Şimdi bizim için gerekli olan

$$Q_3(t) = \frac{\tau'(t)}{r(\tau(t))}\int_t^{\infty} Q(s)ds \ , Q_4(t) = Q(t)(R(\tau(t)) - R(t_1)) \qquad (2.1.28)$$

kabulleri yapalım, burada yeterince büyük t_1 için $t \geq t_1$ dir.

Teorem 2.1.5. $\tau(t) \leq t$ olsun. Kabul edelim ki birinci mertebeden

$$w'(t) - \frac{\tau_0}{\tau_0+p_0}Q_3(t)W(\tau^{-1}\sigma(t)) \geq 0 \qquad (E_8)$$

$$w'(t) - \frac{\tau_0}{\tau_0+p_0}Q_4(t)W(\tau^{-1}\sigma(t)) \geq 0 \qquad (E_9)$$

diferensiyel eşitsizliklerden en az biri pozitif bir çözüme sahip değilse, bu durumda (E1) denklemi salınımlıdır.

İspat: Kabul edelim ki x(t), (E1) nin pozitif bir çözümü olsun. Bu durumda z(t) fonksiyonu (2.1.22) şartını sağlar. Diğer taraftan $r(t)z'(t)$ azalan ve $\tau(t) \leq t$ olduğundan , (2.1.22) eşitsizliğinde t yerine $\tau(t)$ yazarsak,

$$r(\tau(t))z'(\tau(t)) + \frac{p_0}{\tau_0}r(\tau(t))z'(\tau(t)) \geq \int_t^{\infty} Q(s)z(\sigma(s))\, ds$$

olur ve buradan

$$(1+\frac{p_0}{\tau_0})\, r(\tau(t))z'(\tau(t)) \geq \int_t^{\infty} Q(s)z(\sigma(s))\, ds \qquad (2.1.29)$$

elde edilir. (2.1.29) eşitsizliğinin her iki tarafı $\frac{\tau'(t)}{r(\tau(t))}$ ile çarpar ve t_1 den t ye integralini alırsak,

$$z(\tau(t)) \geq \frac{\tau_0}{p_0+\tau_0}\int_{t_1}^{t}\frac{\tau'(u)}{r(\tau(u))}\int_u^{\infty} Q(s)z(\sigma(s))\, ds\, du$$

$$\geq \frac{\tau_0}{p_0+\tau_0}\int_{t_1}^{t} z(\sigma(u))\frac{\tau'(u)}{r(\tau(u))}\int_{u}^{\infty} Q(s)\,ds\,du$$

bulunur. Yani

$$z(\tau(t)) \geq \frac{\tau_0}{p_0+\tau_0}\int_{t_1}^{t} Q_3(u)z(\sigma(u))\,du \qquad (2.1.30)$$

şeklindedir. (2.1.30) ifadesinin sağ tarafının w(t) ile gösterelim. Bu durumda

$z(\tau(t)) \geq w(t)$ olduğunu kullanırsak w(t) nin (E_8) in pozitif bir çözümü olduğu görülür. Bu ise bizim kabulümüzle çelişir. Böylece (E_8) in pozitif çözümünün olmaması (E1) denkleminin salınımı anlamına gelir.

Şimdi (E_9) un pozitif çözümlerinin yokluğunun (E1) denkleminin salınımını vereceğini gösterelim. (2.1.29) ifadesinin t_1 den t ye integralini alırsak,

$$z(\tau(t)) \geq \frac{\tau_0}{p_0+\tau_0}\int_{t_1}^{t}\frac{\tau'(u)}{r(\tau(u))}\int_{u}^{\infty} Q(s)z(\sigma(s))\,ds\,du$$

$$\geq \frac{\tau_0}{p_0+\tau_0}\int_{t_1}^{t}\frac{\tau'(u)}{r(\tau(u))}\int_{u}^{t} Q(s)z(\sigma(s))\,ds\,du$$

$$\geq \frac{\tau_0}{p_0+\tau_0}\int_{t_1}^{t} Q(s)z(\sigma(s))\int_{t_1}^{s}\frac{\tau'(u)}{r(\tau(u))}\,du\,ds$$

elde edilir. Yani

$$z(\tau(t)) \geq \frac{\tau_0}{p_0+\tau_0}\int_{t_1}^{t} Q_4(s)z(\sigma(s))ds \qquad (2.1.31)$$

dır. (2.1.31) ifadesinin sağ tarafını w(t) olarak alalım. Bu durumda

$w(t) > 0$ ve $z(\tau(t)) \geq w(t)$ kullanılarak w(t) nin (E_9) denkleminin pozitif bir çözümü olduğunu görülür. Bu bir çelişkidir ve böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 2.1.4. $\tau(t) \leq t$ olsun. Kabul edelim ki aşağıdaki koşullardan en az biri sağlansın, yani

$$\liminf_{t\to\infty}\int_{t}^{\tau^{-1}(\sigma(t))} Q_3(s)ds > \frac{\tau_0+p_0}{\tau_0 e} \qquad (2.1.32)$$

$$\liminf_{t\to\infty}\int_{t}^{\tau^{-1}(\sigma(t))} Q_4(s)ds > \frac{\tau_0+p_0}{\tau_0 e} \qquad (2.1.33)$$

olsun. Bu taktirde (E1) denklemi salınımlıdır.

İspat: [12] numaralı makaledeki Teorem 2.1.1de (2.1.32) ve (2.1.33) şartları sırasıyla (E_8) ve (E_9) denklemlerinin pozitif çözümlerinin yokluğunu garanti eder. İspat, Teorem 2.1.5 e benzer şekilde yapılabilir.

Uyarı 2.1.5. (H_3) hipotezinde bulunan $\tau o \sigma = \sigma o \tau$ şartı $\tau(t)$ ve $\sigma(t)$ gecikme argümanları aynı formda ise geçerlidir. Örneğin $\tau(t) = \alpha t$ ise aynı zamanda

$\sigma(t) = \beta t$ olacak veya $\tau(t) = t^{\alpha}$ iken $\sigma(t) = t^{\beta}$ olmalıdır.

Örnek 2.1.2. İkinci merteben

$$\left(t^{\frac{1}{2}}[x(t) + p_0 x(\tau_0 t)]'\right)' + \frac{a}{t^{\frac{3}{2}}} x(\alpha t) = 0 \qquad (E_{10})$$

neutral diferensiyel denklemi göz önüne alalım, burada $0 \le p_0 < \infty$, $0 < \tau_0 < 1$, $\alpha > 1$ ve $a > 0$ dır. Eğer $\tau_0 \ge 1$ ise $Q(t) = q(\tau(t)) = \frac{a}{(\tau_0 t)^{\frac{3}{2}}}$ dır. Sonuç 2.1.3 deki (2.1.26) ve (2.1.27) şartları gereğince $a ln\alpha > \frac{(\tau_0 + p_0)\sqrt{\tau_0}}{2\tau_0 e}$ şeklini alır. Bu ise, (E_{10}) un salınımını garanti eder. Eğer $\tau_0 \le 1$ için $Q(t) = q(t) = \frac{a}{t^{\frac{3}{2}}}$ dır ve Sonuç 2.1.4 deki (2.1.32) ve (2.1.33) şartları $a ln\frac{\alpha}{\tau_0} > \frac{\tau_0 + p_0}{2\tau_0^{\frac{3}{2}} e}$ eşitsizliğine indirgenir. Bu ise, (E_{10}) denkleminin salınımını garanti eder. Sonuç olarak, $\alpha \in (0, \infty)$ açık aralığında (E_{10}) denklemi salınımlıdır. $\tau(t) = \alpha t$ ileri veya gecikmeli argümandır. Diğer taraftan eğer, $\gamma \in (0, \infty)$ olmak üzere $a = \left(\frac{1}{2} - \gamma\right)\gamma(1 + p_0 \tau_0{}^{\gamma})\alpha^{-\gamma}$ ise, bu durumda mevcut salınım kriterlerinin her ikisi de sağlanmaz ve (E_{10}) denklemi $x(t) = t^{\gamma}$ salınımsız çözümüne sahiptir.

2.2. $[r(t)[z'(t)]^{\gamma}]' + q(t)x^{\beta}(\sigma(t)) = 0$ Diferensiyel Denklemler İçin Salınımlılık Kriterleri

Biz bu kesimde B. Baculíková ve J. Džurina [29] tarafından incelenen

$$[r(t)[z'(t)]^{\gamma}]' + q(t)x^{\beta}(\sigma(t)) = 0 \qquad (E2)$$

şeklindeki ikinci mertebeden neutral diferensiyel denklemleri göz önüne alacağız, burada r, p , q, $\sigma \in C([t_0,\infty))$, $\tau \in C^{'}([t_0,\infty))$ ve

$(\boldsymbol{H_1})$ γ ve β iki tek tamsayı oranı,

$(\boldsymbol{H_2})$ r, p, q pozitif $0 \leq p(t) \leq p_0 < \infty$,

$(\boldsymbol{H_3})$ $\sigma(t) \leq t,\ \sigma(t)$ azalmayan $\lim_{t\to\infty} \tau(t) = \infty$, $\lim_{t\to\infty} \sigma(t) = \infty$,

$\tau^{'}(t) \geq \tau_0 > 0,\ \tau o \sigma = \sigma o \tau$

dir. Ayrıca

$$\int_{t_0}^{\infty} r^{-\frac{1}{\alpha}}(s)\, ds = \infty \tag{2.2.1}$$

olduğunu kabul edelim. Burada $z(t) = x(t) + p(t)x(\tau(t))$ şeklindedir. (E2) denkleminin bir çözümü $T_x \geq t_0$ için $r(t)[z^{'}(t)]^{\gamma} \in C^{'}([T_x,\infty))$ özelliğine sahip bir $x(t) \in C([T_x,\infty))$ fonksiyonudur ve $[T_x,\infty)$ aralığında (E2) denklemini sağlar. Biz (E2) denkleminin x(t) çözümleri olarak sadece her $T \geq T_x$ için $sup\{|x(t)|: t \geq T\}$ özelliğini sağlayan çözümleri göz önüne alacağız. (E2) denkleminin böyle bir çözüme sahip olduğunu kabul edelim. (E2) denkleminin bir çözümü, $[T_x,\infty)$ aralığı üzerinde keyfi çoklukta sıfıra sahipse, salınımlıdır; aksi taktirde salınımsızdır denir. (E2) diferensiyel denkleminin tüm çözümleri salınımlı ise, denkleme salınımlıdır denir. Daha öncede belirtildiği gibi uygulamalı bilim dallarında sıklıkla kullanılması nedeniyle çeşitli tipteki ikinci mertebeden denklemlerin çözümlerinin salınım veya salınımsızlığını göstermek adına yeterli şartları elde etmek için yoğun bir ilgi vardır. Bunun için

[6-8,12,13,15-18,20-28,30-37] çalışmalarına bakılabilir. Örneğin, Grammatikopolis vd.

$$(x(t) + p(t)x(t-\tau))\ '' + q(t)x(t-\sigma) = 0$$

diferensiyel denkleminin $0 \leq p(t) \leq 1$ olmak üzere

$$\int^{\infty} q(s)\big(1 - p(s-\sigma)\big)ds = \infty$$

şartı ile birlikte salınımı olduğunu göstermişlerdir [6].

Aynı denklem için Erbe vd. [7] de $q(t) \geq q_0 > 0$, $p_1 \leq p(t) \leq p_2$ ve p(t) nin belli bir yerden sonra negatif olmaması durumunda gerekli salınım kriterlerini oluşturmuşlardır.

Bu sonuç diğer araştırmacılar tarafından geliştirilmiş ve genelleştirilmiştir. Bunlara örnek olarak aşağıdaki çalışmalar gösterilebilir. Grace ve Lalli, [8] deki çalışmasında

$\frac{f(x)}{x} \geq k$, $\int^{\infty} \frac{ds}{r(s)} = \infty$ ve $\rho(t)$ isteğe bağlı bir fonksiyon olmak üzere

$$\int^{\infty} \rho(s)q(s)\big(1 - p(s-\sigma)\big) - \frac{(\rho'(s))^2 r(s-\sigma)}{4k\rho(s)} ds = \infty$$

şartları altında

$$[r(t)(x(t) + p(t)x(t-\tau))']' + q(t)f(x(t-\sigma)) = 0$$

diferensiyel denkleminin salınımını incelemişlerdir. Xu ve Xia, [28] deki makalelerinde $0 \leq p(t) < \infty$, $q(t) \geq M > 0$ olmak üzere

$$[(x(t) + p(t)x(t-\tau))'' + q(t)f(x(t-\sigma)) = 0$$

diferensiyel denkleminin salınımı üzerinde çalışmışlardır. Baculíková ve Džurina, [30] daki çalışmalarında

$$[r(t)(x(t) + p(t)x(\tau(t)))']' + q(t)x(\sigma(t)) = 0 \qquad (2.2.2)$$

neutral diferensiyel denkleminin salınımı ile ilgilenmişler ve yeni salınım kriterleri oluşturmuşlardır. Li ve Han, [34-36] daki makalelerinde ikinci mertebeden

$$(x(t) + p(t)x(\tau(t))'' + q(t)x\big(\sigma(t)\big) = 0$$

neutral diferensiyel denklemlerin salınımını incelemişlerdir. Ayrıca Liu ve Bai [20] de, Xu ve Meng [23-24] de ve Dong [33] deki çalışmalarında $0 \leq p(t) < 1$ şartı ile birlikte (E2) denkleminin salınımını araştırmışlardır.

Kesim 2.1. de olduğu gibi burada birinci mertebeden diferensiyel denklemleri ikinci mertebeden (E2) diferensiyel denklemlerle mukayese ederek yeni karşılaştırma teoremleri verilecek, yani birinci mertebeden diferensiyel denklemin salınımlı yapısından ikinci mertebeden (E2) denkleminin salınımı elde edilecektir. Burada kullanılan teknik, incelenen neutral diferensiyel denklemin katsayıları üzerindeki bazı kısıtlamaların kaldırılmasına imkan sağlar.

Uyarı 2.2.1. Bu kesimde incelenen bütün fonksiyonel eşitsizliklerin belli bir yerden sonra sağlandığı kabul edilir, yani bunlar yeterince büyük her t için sağlanır.

Uyarı 2.2.2. Genelliği bozmaksızın, bu kesimde sadece (E2) denkleminin pozitif çözümleri göz önüne alınacaktır.

TEMEL SONUÇLAR

Şimdi (2.2.1) şartı altında (E2) diferensiyel denkleminin pozitif çözümleri için sonuçlar vereceğiz. Öncelikle bu sonuçların ispatında kullanacak aşağıdaki lemmaları verelim.

Lemma 2.2.1. Kabul edelim ki $A \geq 0\,, B \geq 0\,, \beta \geq 1$ olsun. Bu durumda

$$(A+B)^{\beta} \leq 2^{\beta-1}(A^{\beta}+B^{\beta}) \tag{2.2.3}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: $0 < A < B$ olsun. $g(u) = u^{\beta}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. $u > 0$ için $g''(u) > 0$ olup g(u) fonksiyonu konveks(dışbukey) bir fonksiyondur. Burada konveks fonksiyon tanımı gereğince

$$g\left(\frac{A+B}{2}\right) \leq \frac{g(A)+g(B)}{2}$$

olduğundan (2.2.3) eşitsizliği sağlanır. Böylece ispat tamamlanır.

Lemma 2.2.2. Kabul edelim ki $A \geq 0\,, B \geq 0$ ve $0 \leq \beta \leq 1$ olsun. Bu durumda

$$(A+B)^{\beta} \leq A^{\beta}+B^{\beta} \tag{2.2.4}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: A=0 ve B=0 için (2.2.4) eşitsizliğinin sağlandığı açıktır. $A \neq 0$ için $x = \frac{B}{A}$ alalım. Bu durumda (2.2.4) şartı $(1+x)^{\beta} \leq 1+x^{\beta}$ şeklini alır, $x > 0$ için doğru olduğu açıktır.

Şimdi (E2) nin pozitif çözümleri ile ilgili lemmayı verelim.

Lemma 2.2.3. x(t), (E2) denkleminin pozitif bir çözümü olmak üzere

$z(t) = x(t) + p(t)x(\tau(t))$ fonksiyonu için

$$z(t) > 0\,, r(t)z'(t) > 0 \; ve \; (r(t)\, z'\,(t))' < 0 \tag{2.2.5}$$

şartları sağlanır.

İspat: Kabul edelim ki x(t), (E2) denkleminin pozitif bir çözümü olsun. (E2) denkleminden

$$[r(t)|z'(t)|^{\alpha-1} z'(t)]' = -q(t)x(\sigma(t)) < 0$$

dır. Bu nedenle $r(t)|z'(t)|^{\alpha-1} z'(t) < 0$ azalan olup burada $t \geq t_1$ için $z'\,(t) < 0$ veya $z'\,(t) > 0$ olur. Kabul edelim ki $z'(t) < 0$ olsun. Bu taktirde sabit bir c sayısı vardır öyle ki, $z'(t) \leq \frac{-c}{r^{\frac{1}{\alpha}}(t)} < 0$ dır ve bu ifadenin her iki tarafının t_1 den t ye integralini alırsak

$$\int_{t_1}^{t} z'(s)ds \leq \int_{t_1}^{t} \frac{-c}{r^{\frac{1}{\alpha}}(s)} ds$$

$$z(t) \leq z(t_1) - c \int_{t_1}^{t} \frac{1}{r^{\frac{1}{\alpha}}(s)} ds \to -\infty, \quad t \to \infty \text{ için}$$

elde edilir. Bu ise z nin pozitifliği ile çelişir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Şimdi aşağıdaki sonuçlarımızın ispatında kullanacağımız Q(t) ve $Q^*(t)$ fonksiyonlarını yeterince büyük t ler için

$$Q(t) = min\{q(t), q(\tau(t))\}\,,\; Q^*(t) = Q(t)(\int_{t_1}^{\sigma(t)} r^{-\frac{1}{\gamma}}(s)ds)^{\beta} \tag{2.2.6}$$

şeklinde tanımlayalım. İlk olarak $0 < \beta \leq 1$ durumunu inceleyelim.

Teorem 2.2.1. $0 < \beta \leq 1$ olsun. Birinci mertebeden

$$\left(w(t) + \frac{{p_0}^{\beta}}{\tau_0} w(\tau(t))\right)' + Q^*(t) w^{\frac{\beta}{\gamma}}(\sigma(t)) \leq 0 \tag{E_1}$$

neutral gecikmeli diferensiyel eşitsizlik pozitif bir çözüme sahip değilse, bu durumda (E2) denklemi salınımlıdır.

İspat: Kabul edelim ki x(t), (E2) denkleminin pozitif bir çözümü olsun. Bu durumda

$z(t) = x(t) + p(t)x(\tau(t))$ fonksiyonu

$$0 = [r(t)[z'(t)]^{\gamma}]' + q(t)x^{\beta}(\sigma(t)) \tag{2.2.7}$$

denklemini sağlar. (2.2.7) denkleminde t yerine $\tau(t)$ yazıp

$$0 = \frac{1}{\tau'(t)}[r(\tau(t))[z'(\tau(t))]^{\gamma}]' + q(\tau(t))x^{\beta}(\sigma(\tau(t)))$$

her iki tarafı ${p_0}^{\beta}$ ile çarparsak ve (H_1) , (H_3) şartı kullanılırsa

$$0 = \frac{{p_0}^{\beta}}{\tau'(t)}[r(\tau(t))[z'(\tau(t))]^{\gamma}]' + {p_0}^{\beta}q(\tau(t))x^{\beta}(\sigma(\tau(t)))$$

$$\geq \frac{{p_0}^{\beta}}{\tau_0}[r(\tau(t))[z'(\tau(t))]^{\gamma}]' + {p_0}^{\beta}q(\tau(t))x^{\beta}(\sigma(\tau(t))) \tag{2.2.8}$$

elde edilir. (2.2.7) ve (2.2.8) birleştirilirse,

$$[r(t)[z'(t)]^{\gamma}]' + \frac{{p_0}^{\beta}}{\tau_0}[[r(\tau(t))z'(\tau(t))]^{\gamma}]'$$

$$+q(t)x^{\beta}(\sigma(t)) + {p_0}^{\beta}q(\tau(t))x^{\beta}(\sigma(\tau(t))) \leq 0$$

bulunur. Buradan

$$[r(t)[z'(t)]^{\gamma}]' + \frac{{p_0}^{\beta}}{\tau_0}[r(\tau(t))[z'(\tau(t))]^{\gamma}]' + Q(t)[x^{\beta}(\sigma(t)) + {p_0}^{\beta}x^{\beta}(\sigma(\tau(t)))] \leq 0$$

(2.2.9)

elde edilir. Diğer taraftan

$z(\sigma(t)) = x(\sigma(t)) + p(\sigma(t))x(\sigma(\tau(t)))$ ve $0 \leq p(t) \leq p_0 < \infty$ olduğundan

Lemma 2.2.2 ye göre

$$z^{\beta}(\sigma(t)) = (x(\sigma(t)) + p(\sigma(t))x\left(\sigma(\tau(t))\right))^{\beta}$$

$$\leq x^{\beta}(\sigma(t)) + {p_0}^{\beta}x^{\beta}\left(\sigma(\tau(t))\right) \tag{2.2.10}$$

bulunur. Burada (H_2) ve (H_3) şartlarını kullanılmıştır. (2.2.10) ifadesini (2.2.9) eşitsizliğinde yerine koyarsak

$$[r(t)[z'(t)]^{\gamma}]' + \frac{p_0{}^{\beta}}{\tau_0}[r(\tau(t))[z'(\tau(t))]^{\gamma}]' + Q(t)\left[z^{\beta}(\sigma(t))\right] \leq 0 \qquad (2.2.11)$$

bulunur. Ayrıca Lemma 2.2.3 e göre w(t)=$r(t)[z'(t)]^{\gamma} > 0$ azalan olduğundan

$$(z'(t))^{\gamma} = \frac{(z'(t))^{\gamma} r(t)}{r(t)}$$

$$z'(t) = ((z'(t)^{\gamma})^{\frac{1}{\gamma}} r(t))^{\frac{1}{\gamma}} r^{-\frac{1}{\gamma}}$$

olup her iki tarafın t_1 den t ye integralini alırsak,

$$\int_{t_1}^{t} z'(s)\, ds = \int_{t_1}^{t} \left(r(s)(z'(s)\right)^{\gamma})^{\frac{1}{\gamma}} r^{-\frac{1}{\gamma}} ds$$

$$z(t) - z(t_1) = \int_{t_1}^{t} \left(r(s)(z'(s)\right)^{\gamma})^{\frac{1}{\gamma}} r^{-\frac{1}{\gamma}} ds$$

$$z(t) \geq \int_{t_1}^{t} W^{\frac{1}{\gamma}}(s) r^{-\frac{1}{\gamma}} ds \geq W^{\frac{1}{\gamma}}(t) \int_{t_1}^{t} r^{-\frac{1}{\gamma}} ds \qquad (2.2.12)$$

bulunur. Burada (2.2.12) ifadesini (2.2.11) eşitsizliğinde kullanırsak ,

$$(w(t) + \frac{p_0{}^{\beta}}{\tau_0} w(\tau(t)))' + Q(t) w^{\frac{\beta}{\gamma}}(\sigma(t)) \left(\int_{t_1}^{t} r^{-\frac{1}{\gamma}} ds\right)^{\beta} \leq 0$$

bulunur ve buradan w(t) nin (E_1) in pozitif bir çözümü olduğunu görülür. Bu ise (E_1) in özellikleri ile çelişir ve ispat tamamlanır.

Şimdi (E2) denkleminin pozitif çözümlerinin salınımını elde etmek için (E_1) üzerine yeni kriterler verelim. Burada τ nun ileri veya gecikmeli bir argüman olduğu her iki durumu da ele alacağız.

Öncelikle bundan sonraki teoremlerin ispatında kullanılacak olan [34] makalesindeki Teorem 1 in ifadesini edelim.

Teorem1 [34] . y fonksiyonu

$$y(t) \geq \int_t^{\infty} \frac{(s-t)^{n-1}}{(n-1)!} f\big(s; y\big(\sigma_1(s)\big), \dots, y(\sigma_n(s))\big) ds$$

integral eşitsizliğini sağlayan pozitif ve azalan bir çözüm ise, bu durumda

$$(-1)^k [r_{k-1}(t)[r_{k-2}(t)[\dots[r_1(t)x'(t)]'\dots]']']' = f(t; x[\sigma_1(t)], \dots, x[\sigma_m(t)]$$

diferensiyel denkleminin

$\lim_{t\to\infty} x^i(t) = 0$ (i=0,1,2,…,n-1)

ve yeterince büyük her t için $x(t) \leq y(t)$ olacak şekilde pozitif bir x çözümü vardır.

Teorem 2.2.2. $0 < \beta \leq 1$ ve $\tau(t) \geq t$ olsun. Birinci mertebeden

$$y'(t) + \frac{\tau_0^{\frac{\beta}{\gamma}}}{(\tau_0 + p_0{}^{\beta})^{\frac{\beta}{\gamma}}} Q^*(t) y^{\frac{\beta}{\gamma}}\big(\sigma(t)\big) = 0 \qquad (E_2)$$

delay diferensiyel denklem salınımlı ise, bu taktirde (E2) denklemi de salınımlıdır.

İspat: Kabul edelim ki x(t) , (E2) denkleminin pozitif bir çözümü olsun. Burada

Teorem 2.2.1 in ispatından w(t)=$r(t)[z'(t)]^{\gamma} > 0$ azalandır ve (E_1) denklemini sağlar. Burada

$$y(t) = w(t) + \frac{p_0{}^{\beta}}{\tau_0} w(\tau(t)) \qquad (2.2.13)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. $\tau(t) \geq t$ olduğundan

$$y(t) \leq (1 + \frac{p_0{}^{\beta}}{\tau_0}) w(t)$$

elde edilir. (E_1) denkleminde yerine yazarsak, w fonksiyonunun

$$y'(t) + Q^*(t) \frac{\tau_0^{\frac{\beta}{\gamma}}}{(\tau_0 + p_0{}^{\beta})^{\frac{\beta}{\gamma}}} y^{\frac{\beta}{\gamma}}\big(\sigma(t)\big) \leq 0 \qquad (2.2.14)$$

diferensiyel eşitsizliğin pozitif bir çözümü olduğu görülür. Buradan [34] deki Teorem1 gereğince y(t), (E_2) diferensiyel denkleminin pozitif bir çözümüdür. Bu ise (E_2) nin salınımlılığı ile çelişir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 2.2.3. $0 < \beta \leq 1$ ve $\sigma(t) \leq \tau(t) \leq t$ olsun. Birinci mertebeden

$$y'(t) + \frac{\tau_0^{\frac{\beta}{\gamma}}}{(\tau_0+p_0{}^{\beta})^{\frac{\beta}{\gamma}}} Q^*(t) y^{\frac{\beta}{\gamma}}(\tau^{-1}(\sigma(t))) = 0 \qquad (E_3)$$

gecikmeli diferensiyel denklem salınımlı ise, (E2) denklemi de salınımlıdır.

İspat: Kabul edelim ki x, (E2) nin pozitif bir çözümü olsun. $\tau(t) \leq t$ olduğundan (2.2.13) den

$$y(t) \leq (1 + \frac{p_0{}^{\beta}}{\tau_0}) w(\tau(t)) \qquad (2.2.15)$$

olur. Ayrıca $\sigma(t) \leq \tau(t) \leq t$ olduğundan τ^{-1} ile bileşkeye tabii tutarsak,

$$\tau^{-1} o \sigma(t) \leq \tau^{-1} o \tau(t) \leq \tau^{-1}(t)$$

$$\tau^{-1} o \sigma(t) \leq t \leq \tau^{-1}(t)$$

elde edilir. (2.2.15) da t yerine $\tau^{-1} o \sigma(t)$ yazarsak

$$\left(\frac{\tau_0}{\tau_0+p_0{}^{\beta}}\right) y(t) \leq w(\tau(t))$$

$$\left(\frac{\tau_0}{\tau_0+p_0{}^{\beta}}\right) y(\tau^{-1} o \sigma(t)) \leq w(\tau^{-1} o \sigma(t)) \qquad (2.2.16)$$

olur. (2.2.16) ifadesini (E_1) denkleminde yerine yazarsak

$$y'(t) + Q^*(t) \frac{\tau_0^{\frac{\beta}{\gamma}}}{(\tau_0 + p_0{}^{\beta})^{\frac{\beta}{\gamma}}} y^{\frac{\beta}{\gamma}}(\tau^{-1} o \sigma(t)) \leq 0$$

olur ve böylece w'nın diferensiyel eşitsizliğin pozitif bir çözümü olduğu görülür. Buradan [34] deki teorem1 gereğince y(t), (E_3) diferensiyel denkleminin pozitif bir çözümüdür. Bu ise (E_3) nin salınımlılığı ile çelişir.

2.3. $[r(t)[z'(t)]^{\alpha}]' + q(t)f(x(\sigma(t))) = 0$ Diferensiyel Denklemleri İçin Salınım Teoremleri

Biz bu kesimde Qi Li, Rui Wong, Feng Chen, Tongxing Li [38] tarafından incelenen

$$[r(t)[z'(t)]^{\alpha}]' + q(t)f(x(\sigma(t))) = 0 \,, \; t \geq t_0 > 0 \qquad (2.3.1)$$

şeklindeki ikinci mertebeden lineer olmayan diferensiyel denklemleri göz önüne alacağız, burada $z(t) = x(t) - p(t)x(\tau(t))$ şeklindedir ve $\alpha > 0$ iki tek tamsayının oranıdır.

Bu kesim boyunca aşağıdaki hipotezlerin sağlandığını kabul edelim.

$(\boldsymbol{H_1})$ $r, p, q \in C([t_0, \infty), R)$, $r(t) > 0$, $0 \leq p(t) \leq p_0 < 1$, $q(t) \geq 0$ ve q yeterince büyük t ler için özdeş olarak sıfırdan farklı bir fonksiyondur,

$(\boldsymbol{H_2})$ $\tau \in C([t_0, \infty), R)$,$\tau(t) \leq t$ ve $\lim_{t\to\infty} \tau(t) = \infty$,

$(\boldsymbol{H_3})$ $\sigma \in C^1([t_0, \infty), R)$, $\sigma'(t) > 0$, $\sigma(t) \leq t$ ve $\lim_{t\to\infty} \sigma(t) = \infty$,

$(\boldsymbol{H_4})$ $f \in C(R, R)$, her $u \neq 0$ için $uf(u) > 0$ dır ve $u \neq 0$ için $\frac{f(u)}{u^\alpha} \geq k$ olacak şekilde pozitif bir k sabit sayısı vardır.

(2.3.1) denkleminin bir çözümü $T_x \geq t_0$ için $r(z')^\alpha \in C'([T_x, \infty), R)$ özelliğine sahip bir $x(t) \in C([T_x, \infty), R)$ fonksiyonudur ve $[T_x, \infty)$ aralığında (2.3.1) denklemini sağlar. Biz (2.3.1) denkleminin x(t) çözümleri olarak sadece her $T \geq T_x$ için

$sup\{|x(t)|: t \geq T\}$ özelliğini sağlayan çözümleri göz önüne alacağız. Kabul edelim ki (2.3.1) denkleminin böyle bir çözümü olsun. Alışıla geldiği üzere (2.3.1) diferensiyel denkleminin bir çözümüne, $[T_x, \infty)$ aralığında keyfi çoklukta sıfıra sahipse, salınımlıdır; aksi taktirde salınımsızdır denir. (2.3.1) diferensiyel denkleminin bütün çözümleri salınımlı ise, denkleme salınımlıdır denir.

Son yıllarda, doğal bilimler ve mühendislikte birçok uygulama alanı olması nedeniyle, farklı sınıflardaki (yapıdaki) diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımı üzerindeki çalışmalara ilgi artmıştır. Bunlara örnek olarak Hale [39] ve Wong [40] un çalışmaları gösterilebilir. Özellikle ikinci mertebeden ve üçüncü mertebeden gecikmeli-ileri diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımı ile ilgili birçok çalışmaya

[5,17,29,40-50] örnek olarak gösterilebilir. (2.3.1) diferensiyel denkleminin ve bu denklemin özel durumları ile ilgili araştırmalar [5,29,40,41,44-47,49,50] çalışmalarında görülmektedir.

Genel olarak $-1 < p(t) \leq 0$ varsayımının kullanılmasına rağmen çeşitli araştırmacılar (2.3.1) denkleminin salınımı için $-\infty < -p_0 \leq p(t) \leq 0$ şartını kullanarak çalışmışlardır. Ayrıca, Wong [40] da ve Yong vd. [50] de

$$0 \leq p(t) \leq p_0 < 1 \tag{2.3.2}$$

ve

$$\tau(t) = t - \tau_0 \leq t \text{ ve } \sigma(t) = t - \sigma_0 \leq t \tag{2.3.3}$$

varsayımları altında (2.3.1) denklemi için çeşitli salınım kriteri elde etmişler ve aynı zamanda [49] deki çalışmalarında Qin vd. [50] deki çalışmasında bazı hatalar olduğunu ifade etmişlerdir. Baculíková ve Džurina [42] de

$$\int_{t_0}^{\infty} r^{-\frac{1}{\alpha}}(t)dt = \infty \tag{2.3.4}$$

şartı altında üçüncü mertebeden

$$[r(t)(\left(x(t) \pm p(t)x\big(\delta(t)\big)\right)^{''})^{\gamma}]' + q(t)x^{\gamma}(\tau(t)) = 0$$

neutral diferensiyel denkleminin asimptotik özelliklerini araştırmışlardır. [42] deki çalışmasından yararlanarak, (2.3.1) denklemi için yeni salınım kriterleri oluşturulmuştur. Bunu takiben bütün fonksiyonel eşitsizliklerin yeterince büyük t için sağlandığı kabul edilmiştir. Genelliği bozmaksızın (2.3.1) denkleminin pozitif çözümleri ile ilgilenilmiştir.

Şimdi (2.3.1) denklemi için salınım kriterleri elde etmek için kullanılacak lemmalar verelim.

Lemma 2.3.1. Kabul edelim ki $(H_1) - (H_4)$ kriterleri ve (2.3.4) sağlansın ve x(t), (2.3.1) denkleminin pozitif bir çözümü olsun. Bu durumda z, $t \geq t_1$ için

$$(C_1)\ \ z(t) > 0, z'(t) > 0, (r(t)(z'(t))^{\alpha})' \leq 0$$

$$(C_2)\ z(t) < 0, z'(t) > 0, (r(t)(z'(t))^{\alpha})' \leq 0,$$

durumlarından birini sağlar, burada $t_1 \geq t_0$ yeterince büyüktür.

İspat: Kabul edelim ki $t \geq t_1$ için $x(t) > 0$, $x(\tau(t)) > 0$ ve

$x(\sigma(t)) > 0$ olacak şekilde $t_1 \geq t_0$ vardır. (2.3.1) denkleminde (H_4) şartının kullanılması ile,

$$(r(t)(z'(t))^{\alpha})' \leq -kq(t)x^{\alpha}(\sigma(t)) \leq 0 \tag{2.3.5}$$

elde edilir. Böylece $r(z')^{\alpha}$ artmayandır ve tek işaretlidir. Yani $t \geq t_2$ için $z'(t) > 0$ ve $z'(t) < 0$ olacak şekilde $t_2 \geq t_1$ vardır. Eğer $t \geq t_2$için $z'(t) > 0$ ise, bu durumda (C_1) veya (C_2) elde edilir. Şimdi $z'(t) < 0$ olamayacağını ispat edeceğiz. Eğer

$t \geq t_2$ için $z'(t) < 0$ ise, bu durumda $t \geq t_2$ için $r(t)\left(z'(t)\right)^{\alpha} \leq -c < 0$ dır. Burada

$c = r(t_2)(z'(t_2))^{\alpha} > 0$ dır. Burada $z'(t) \leq -c^{\frac{1}{\alpha}} r^{\frac{-1}{\alpha}}(t)$ olup her iki tarafın t_2 den t ye integralini alırsak

$$\int_{t_2}^{t} z'(s)ds \leq \int_{t_2}^{t} -c^{\frac{1}{\alpha}} r^{\frac{-1}{\alpha}}(s)ds$$

olur. Böylece

$$z(t) \leq z(t_2) - c^{\frac{1}{\alpha}} \int_{t_2}^{t} r^{\frac{-1}{\alpha}}(s)ds$$

sonucu elde edilir. Burada (2.3.4) şartından, $\lim_{t\to\infty} z(t) = -\infty$ dır. Şimdi aşağıdaki iki durumu ayrı ayrı ele alalım.

Durum 1. Eğer x sınırsız ise, $\lim_{k\to\infty} x(t_k) = \infty$ olacak şekilde bir $\{t_k\}$ dizisi vardır, burada $\lim_{k\to\infty} t_k = \infty$ ve $x(t_k) = max\{x(s); t_0 \leq s \leq t_k\}$ dır. Böylece

$\lim_{t\to\infty} \tau(t) = \infty$ olduğundan yeteri kadar büyük her k için $\tau(t_k) > t_0$ dır.

$\tau(t) \leq t$ olduğundan

$x(\tau(t_k)) = max\{x(s); t_0 \leq s \leq \tau(t_k)\} \leq max\{x(s); t_0 \leq s \leq t_k\} = x(t_k)$

dır, yani $x(\tau(t_k)) \leq x(t_k)$ dır. Böylece yeterince büyük her k için

$$z(t_k) = x(t_k) - p(t_k)x(\tau(t_k)) \geq (1 - p(t_k))x(t_k) > 0$$

elde edilir. Bu ise $\lim_{t\to\infty} z(t) = -\infty$ gerçeği ile çelişir.

Durum 2. Eğer x sınırlı ise, bu durumda z de sınırlıdır, bu ise $\lim_{t\to\infty} z(t) = -\infty$ olması gerçeği ile çelişir. Bu durumda z, (C_1) veya (C_2) durumlarından birini sağlar. Böylece ispat tamamlanır.

Lemma 2.3.2. Kabul edelim ki x, (2.3.1) denkleminin pozitif bir çözümü olsun ve z, (C_2) şartını sağlasın. Bu durumda $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ dır.

İspat: $z < 0$ ve $z' > 0$ olduğundan $\lim_{t\to\infty} z(t) = l \leq 0$ olup, burada l sonlu bir sabittir. Yani z sınırlıdır. Lemma 2.3.1 de Durum1 in ispatında olduğu gibi x aynı zamanda sınırlıdır. x in sınırlı olduğu kullanılarak, $0 \leq a < \infty$ için $\limsup_{t\to\infty} x(t) = a$ elde edilir.

İddia ediyoruz ki $a = 0$ dır. Eğer $a > 0$ olsaydı $\lim_{m\to\infty} t_m = \infty$ ve $\lim_{m\to\infty} x(t_m) = a$ olacak şekilde bir $\{t_m\}$ dizisi vardır. Burada $\varepsilon = \frac{a(1-p_0)}{2p_0}$ olsun. Bu durumda her m için,

$$x(\tau(t_m)) < a + \varepsilon \text{ ve}$$

$$0 \geq \lim_{m\to\infty} z(t_m) \geq \lim_{m\to\infty} x(t_m) - p_0(a+\varepsilon) = \frac{a(1-p_0)}{2} > 0$$

dır. Bu ise bir çelişkidir. Böylece $a = 0$ ve $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ dır. Bu da ispatı tamamlar.

TEMEL SONUÇLAR

Aşağıdaki teoremlerde kullanılmak üzere yeterince büyük $t_1 \geq t_0$ için

$$\xi(t) = r^{\frac{1}{\alpha}}(t) \int_{t_1}^{t} r^{\frac{-1}{\alpha}}(s) ds$$

alalım.

Teorem 2.3.1. Kabul edelim ki (H_1) -(H_4) şartları ve (2.3.4) sağlansın. Eğer yeterince büyük her $t_1 \geq t_0$ için

$$\int^{\infty} \left[k\rho(t)q(t) - \frac{\rho_+'(t) r(\sigma(t))}{\xi^{\alpha}(\sigma(t))} \right] dt = \infty \tag{2.3.6}$$

olacak şekilde bir $\rho \in C^1([t_0,\infty), R)$ pozitif fonksiyonu var ise bu durumda (2.3.1) denkleminin her x çözümü ya salınımlıdır ya da $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ dır, burada

$\rho'_{+}(t) = max\{0, \rho'(t)\}$ dır.

İspat: Genelliği bozmaksızın, kabul edelim ki $t > t_1$ için $x(t) > 0, x(\tau(t)) > 0$ ve $x(\sigma(t)) > 0$ olacak şekilde $t_1 \geq t_0$ vardır. Bu durumda (2.3.5) sağlanır. Lemma 2.3.1. den (C_1) ve (C_2) durumlarından birini sağlar. Her iki durumu ayrı ayrı göz önüne alalım.

İlk olarak kabul edelim ki (C_1) durumu sağlansın. Burada z nin tanımından

$$x(t) = z(t) + p(t)x(\tau(t)) \geq z(t) \tag{2.3.7}$$

yazılabilir. Burada (2.3.5) ve $\sigma(t) \leq t$ şartı kullanılarak

$$r(t)(z'(t))^{\alpha} \leq r(\sigma(t))(z'(\sigma(t)))^{\alpha} \tag{2.3.8}$$

olduğu sonucuna ulaşılır. Şimdi $z'(t) = \frac{([z'(t)]^{\alpha} r(t))^{\frac{1}{\alpha}}}{r^{\frac{1}{\alpha}}(t)}$ olup her iki tarafın t_1 den t ye integralini alırsak,

$$\int_{t_1}^{t} z'(s)ds = \int_{t_1}^{t} \frac{([z'(s)]^{\alpha} r(s))^{\frac{1}{\alpha}}}{r^{\frac{1}{\alpha}}(s)} ds$$

$$z(t) = z(t_1) + \int_{t_1}^{t} \frac{(r(s)(z'(s))^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}}{r^{\frac{1}{\alpha}}(s)} ds \geq z'(t) r^{\frac{1}{\alpha}}(t) \int_{t_1}^{t} r^{-\frac{1}{\alpha}}(s)ds = \xi(t)z'(t) \tag{2.3.9}$$

eşitsizlik elde edilir. Burada w(t) fonksiyonunu $t \geq t_1$ için

$$w(t) = \rho(t)\frac{r(t)(z'(t))^{\alpha}}{z^{\alpha}(\sigma(t))}$$

olacak şekilde tanımlayalım. Burada $t \geq t_1$ için $w(t) > 0$ dır ve türevini alırsak

$$w'(t) = \rho'(t)\frac{r(t)\left(z'(t)\right)^{\alpha}}{z^{\alpha}(\sigma(t))} + \rho(t)\left[\frac{(r(t)(z'(t))^{\alpha})' z^{\alpha}(\sigma(t))}{z^{2\alpha}(\sigma(t))} - \frac{\alpha(r(t)(z'(t))^{\alpha}) z^{\alpha-1}(\sigma(t)) z'(\sigma(t))\sigma'(t)}{z^{2\alpha}(\sigma(t))}\right]$$

$$w'(t) = \rho'(t)\frac{r(t)\left(z'(t)\right)^{\alpha}}{z^{\alpha}(\sigma(t))} + \rho(t)\frac{(r(t)(z'(t))^{\alpha})'}{z^{\alpha}(\sigma(t))} - \rho(t)\frac{\alpha r(t)(z'(t))^{\alpha} z'(\sigma(t))\sigma'(t)}{z^{\alpha+1}(\sigma(t))} \tag{2.3.10}$$

olur. (2.3.5) ve (2.3.7)-(2.3.10) şartlarını kullanırsak

$$w'(t) \leq \rho'(t)\frac{r(t)\left(z'(t)\right)^{\alpha}}{z^{\alpha}\left(\sigma(t)\right)} + \rho(t)\frac{(r(t)(z'(t))^{\alpha})'}{z^{\alpha}\left(\sigma(t)\right)}$$

elde edilir. Ayrıca (2.3.9) dan

$$\frac{z^{\alpha}(t)}{(z'(t))^{\alpha}} \geq \xi^{\alpha}(t) \tag{2.3.11}$$

olup ayrıca (2.3.8) den ve $z(t) = x(t) - p(t)x(\tau(t))$ olduğundan $z(t) \leq x(t)$ dır. Buna göre $z(\sigma(t)) \leq x(\sigma(t))$ den

$$z^{\alpha}(\sigma(t)) \leq x^{\alpha}(\sigma(t)) \tag{2.3.12}$$

elde edilir. (2.3.11) ve (2.3.12) ile birlikte (2.3.10) eşitsizliğinde kullanılırsa,

$$w'(t) \leq \rho'(t)\frac{r(t)\left(z'(t)\right)^{\alpha}}{z^{\alpha}\left(\sigma(t)\right)} + \rho(t)\frac{(r(t)(z'(t))^{\alpha})'}{z^{\alpha}\left(\sigma(t)\right)}$$

$$\leq \rho'(t)\frac{r\left(\sigma(t)\right)\left(z'\left(\sigma(t)\right)\right)^{\alpha}}{z^{\alpha}\left(\sigma(t)\right)} + \rho(t)\left(\frac{-kq(t)x^{\alpha}(\sigma(t))}{x^{\alpha}\left(\sigma(t)\right)}\right)$$

$$w'(t) \leq \rho'_{+}(t)\frac{r\left(\sigma(t)\right)}{\xi^{\alpha}\left(\sigma(t)\right)} - \rho(t)\frac{kq(t)x^{\alpha}\left(\sigma(t)\right)}{x^{\alpha}\left(\sigma(t)\right)} \tag{2.3.13}$$

olur yani buradan (2.3.13) eşitsizliğinin $t_2 > t_1$ için t_2 den t ye integralini alırsak,

$$\int_{t_2}^{t} w'(s)ds \leq \int_{t_2}^{t}\left[\rho'_{+}(s)\frac{r\left(\sigma(s)\right)}{\xi^{\alpha}\left(\sigma(s)\right)} - k\rho(s)q(s)\right]ds$$

$$w(t) - w(t_2) \leq \int_{t_2}^{t}\left[\rho'_{+}(s)\frac{r\left(\sigma(s)\right)}{\xi^{\alpha}\left(\sigma(s)\right)} - k\rho(s)q(s)\right]ds$$

$$w(t_2) \geq -\int_{t_2}^{t}\left[\rho'_{+}(s)\frac{r\left(\sigma(s)\right)}{\xi^{\alpha}\left(\sigma(s)\right)} - k\rho(s)q(s)\right]ds$$

dır. Yani

$$\int_{t_2}^{t}\left[k\rho(s)q(s) - \frac{\rho'_{+}(s)r(\sigma(s))}{\xi^{\alpha}(\sigma(s))}\right]ds \leq w(t_2)$$

elde edilir. Bu ise, (2.3.6) ile çelişmektedir. Böylece ispat tamamlanır.

Eğer z, (C_2) şartını sağlıyorsa Lemma 2.3.2 den dolayı $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ dır. Böylece ispat tamamlanır.

$\rho(t) = 1$ olsun. Teorem 2.3.1 i kullanarak (2.3.1) denklemi için aşağıdaki kriterin sağladığını görebiliriz.

Sonuç 2.3.1. Kabul edelim ki (H_1) -(H_4) şartları ve (2.3.4) sağlansın. Eğer

$$\int^{\infty} q(t)dt = \infty$$

ise, Teorem 2.3.1 sonucu aynen geçerlidir.

Teorem 2.3.2. Kabul edelim ki $\alpha \geq 1$ ve (H_1) -(H_4) şartları ve (2.3.4) sağlansın. Eğer

yeterince büyük $t \geq t_1$ için

$$\int^{\infty} \left[k\rho(t)q(t) - \frac{(\rho_+'(t))^2 r(\sigma(t))}{4\alpha\rho(t)\sigma'(t)\xi^{\alpha-1}(\sigma(t))}\right] dt = \infty \qquad (2.3.14)$$

eşitsizliğini sağlayan $\rho \in C^1([t_0, \infty), R)$ pozitif fonksiyonu varsa, bu durumda

Teorem 2.3.1 in sonucu aynen kalır, burada $\rho_+'(t) = max\{0, \rho'(t)\}$ şeklindedir.

İspat: Yukarıda olduğu gibi x(t), (2.3.1) denkleminin pozitif bir çözümü olsun.

Lemma 2.3.1 den z, (C_1) ve (C_2) durumlarından birini sağlar. Ayrı ayrı iki durumu ele alalım. İlk olarak kabul edelim ki (C_1) durumu sağlansın. Buradan (2.3.8) ve (2.3.9) elde edilir. Şimdi w fonksiyonunu Teorem 2.3.1 de olduğu gibi tanımlayalım. Burada

$$w'(t) = \rho'(t)\frac{r(t)\left(z'(t)\right)^{\alpha}}{z^{\alpha}(\sigma(t))} + \rho(t)\frac{(r(t)(z'(t))^{\alpha})'}{z^{2\alpha}(\sigma(t))} - \rho(t)\frac{\alpha r(t)(z'(t))^{\alpha} z^{\alpha-1}(\sigma(t)) z'(\sigma(t))\sigma'(t)}{z^{2\alpha}(\sigma(t))}$$

$$\frac{w(t)}{\rho(t)} = \frac{r(t)(z'(t))^{\alpha}}{z^{\alpha}(\sigma(t))} \quad \text{ve} \quad max\{0, \rho(t)\} = \rho_+{}'(t) \qquad (2.3.15)$$

olup (2.3.13) ve (2.3.5) ile birlikte gerekli sadeleştirmeleri yaparsak $w(t) > 0$ ve

$$w'(t) \leq -k\rho(t)q(t) + \frac{\rho_+{}'(t)}{\rho(t)} w(t) - \alpha\rho(t)\sigma'(t)\frac{r(t)(z'(t))^{\alpha}}{z^{\alpha}(\sigma(t))}\frac{z'(\sigma(t))}{z(\sigma(t))} \qquad (2.3.16)$$

elde edilir. Diğer taraftan (2.3.8) ve (2.3.9) den

$$\frac{z'(\sigma(t))}{z(\sigma(t))} = \frac{1}{r(\sigma(t))}\frac{r(\sigma(t))(z'(\sigma(t)))^{\alpha}}{z^{\alpha}(\sigma(t))}\left(\frac{z(\sigma(t))}{z'(\sigma(t))}\right)^{\alpha-1} \geq \frac{\xi^{\alpha-1}(\sigma(t))}{r(\sigma(t))}\frac{r(t)(z'(t))^{\alpha}}{z^{\alpha}(\sigma(t))} \qquad (2.3.17)$$

dır. (2.3.17) yi (2.3.16) da yerine koyarsak

$$w'(t) \le -k\rho(t)q(t) + \frac{\rho_+{}'(t)}{\rho(t)}w(t) - \alpha\sigma'(t)\frac{\xi^{\alpha-1}(\sigma(t))}{\rho(t)r(\sigma(t))}w^2(t)$$

$$\le -k\rho(t)q(t) + \frac{(\rho_+'(t))^2 r(\sigma(t))}{4\alpha\rho(t)\sigma'(t)\xi^{\alpha-1}(\sigma(t))} \qquad (2.3.18)$$

elde edilir. (2.3.19) durumunun $t_2 > t$ için t_2 den t ye integralini alırsak

$$\int_{t_2}^{t}\left[k\rho(t)q(t) - \frac{(\rho_+'(t))^2 r(\sigma(t))}{4\alpha\rho(t)\sigma'(t)\xi^{\alpha-1}(\sigma(t))}\right]dt \le w(t_2)$$

elde edilir. Bu ise, (2.3.14) ile çelişmektedir.

Eğer z, (C_2) durumunu sağlıyorsa, Lemma 2.3.2 kullanılarak $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Örnek 2.3.1. $t \ge 1$ için

$$\left[x(t) - \frac{1}{2}x\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right]'' + 8x\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad (2.3.19)$$

ikinci mertebeden neutral diferensiyel denklemi göz önüne alalım. Sonuç 2.3.1 den (2.3.19) denkleminin her x çözümü ya salınımlıdır ya da $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ şartlarının sağlandığı görülür. Örneğin $x(t) = sin4t$ çözümü denklemin salınımlı bir çözümüdür. Yani

$$r(t) = 1,\ \ p(t) = -\frac{1}{2}\ ,\ \ \tau(t) = t - \frac{\pi}{2}\ ,\ q(t) = 8\ ,\ \ \sigma(t) = t - \frac{\pi}{2}\ ,\ \ \alpha = 1$$

olmak üzere Sonuç 2.3.1 den $\int_{t_0}^{\infty} 8dt = \infty$ ve (2.3.4) den $\int_{t_0}^{\infty} 1^{-\frac{1}{1}}dt = \infty$ elde edilir.

Örnek 2.3.2. $t \ge 1$ için

$$(t^2(z'(t))^3)' + \gamma t^{-2}x^3\left(\frac{t}{2}\right) = 0 \qquad (2.3.20)$$

ikinci mertebeden lineer olmayan neutral diferensiyel denklemi ele alalım. Burada

$z(t) = x(t) - \frac{x\left(\frac{t}{3}\right)}{2}$ ve $\gamma > 0$ bir sabittir. $\alpha = 3$, $r(t) = t^2$, $q(t) = t^{-2}$, $\sigma(t) = \frac{t}{2}$,

$k = \gamma$ ve $\rho(t) = t$ olsun ve belirtelim ki her $k_0 = (0,1)$ için $\xi(t) = 3k_0 t$ olur.

Teorem 2.3.2 den dolayı bazı $k_0 \in (0,1)$ için eğer $\delta > \frac{2}{54{k_0}^3}$ ise (2.3.20) denkleminin her x çözümü ya salınımlıdır ya da $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ dır. Bununla birlikte Teorem 2.3.1 den dolayı bazı $k_0 \in (0,1)$ için eğer $\delta > \frac{2}{27{k_0}^3}$ ise (2.3.20) denkleminin her x çözümü ya salınımlıdır ya da $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ dır. Belirtelim ki her $k_0 \in (0,1)$ için $\frac{2}{27{k_0}^3} > \frac{2}{54{k_0}^3}$ dır. Bu nedenle Teorem 2.3.2 bazı durumlarda Teorem 2.3.1 in geliştirilmiş halidir. Fakat Teorem 2.3.1, $0 < \alpha < 1$ olduğu durumlarda (2.3.1) denklemine uygulanamaz. [40,49,50] de elde edilen sonuçlar (2.3.3) şartı sağlanmadığından (2.3.20) denklemine uygulanamaz.

3.BÖLÜM

İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN İKİNCİ YANLI DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN SALINIMLILIK KRİTERİ

Bu bölümde özel tipteki diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımı ile ilgili yapılan çalışmalar aşağıdaki kesimlerde ele alınıp incelenecektir.

3.1.

$$\boldsymbol{\left(r(t)\left|x'(t)\right|^{\alpha-1}x'(t)\right)' + p(t)|x(t)|^{\alpha-1}x(t)}$$

$$\boldsymbol{+\sum_{j=1}^{m} q_j(t)|x(t)|^{\beta_j-1}x(t) = e(t)}$$

Diferensiyel Denklemleri İçin Salınım Kriterleri

Biz bu kesimde Zhaowen Zheng, Xiao Wang, Hongmei Han [51]tarafından incelenen

$$\left(r(t)\left|x'(t)\right|^{\alpha-1}x'(t)\right)' + p(t)|x(t)|^{\alpha-1}x(t) + \sum_{j=1}^{m} q_j(t)|x(t)|^{\beta_j-1}y(t) = e(t), t \geq t_0 \tag{3.1.1}$$

şeklindeki ikinci mertebeden lineer olmayan ikinci yanlı diferensiyel denklemleri göz önüne alacağız, burada $r,\ p,\ q_j(1 \leq j \leq m),\ e \in C([t_0,\infty),R),\ r(t) > 0$ ve

$0 < \alpha < \beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_m$ reel sayılar, $p,\ q_j\ (1 \leq j \leq m)$ ve e(t) fonksiyonlarının işaretlerinin değişebilir olduğunu kabul edelim.

İkinci bölümde belirtildiği gibi (3.1.1) denkleminin bir çözümü $T_x \geq t_0$ için $r(t)|x'(t)|^{\alpha-1}x'(t) \in C'([T_x,\infty))$ özelliğine sahip bir $x(t) \in C'([T_x,\infty),R)$

fonksiyonudur ve $[T_x, \infty)$ aralığında (3.1.1) denklemini sağlar. Biz (3.1.1) denkleminin x(t) çözümleri olarak sadece $T \geq T_x$ için $sup\{|x(t)|: t \geq T\}$ özelliğini sağlayan aşikâr olmayan çözümleri göz önüne alacağız. (3.1.1) denkleminin aşikâr olmayan çözümü keyfi çoklukta sıfıra sahipse, salınımlıdır; aksi halde salınımsızdır denir. Eğer (3.1.1) denkleminin tüm aşikâr olmayan çözümleri salınımlı ise, (3.1.1) denklemine salınımlıdır denir.

Burada belirtelim ki (3.1.1) denklemi $q_j(t) \equiv 0,\ 1 \leq j \leq m$ için

$$(r(t)|x'(t)|^{\alpha-1}x'(t))' + p(t)|x(t)|^{\alpha-1}x(t) = e(t), \qquad t \geq t_0 \tag{3.1.2}$$

yarı lineer diferensiyel denklemine dönüşür. (3.1.1) denklemi $p(t) \equiv 0$ ve m=1 olduğu zaman

$$(p(t)|x'(t)|^{\alpha-1}x'(t))' + q(t)|x(t)|^{\beta-1}x(t) = e(t), \quad t \geq t_0 \tag{3.1.3}$$

yarı lineer diferensiyel denkleme indirgenir.(3.1.2) (veya (3.1.3) denklemi için) ve (3.1.2) nin özel durumu olan (ikinci yansız)

$$(r(t)|x'(t)|^{\alpha-1}x'(t))' + p(t)|x(t)|^{\alpha-1}x(t) = 0, \quad t \geq t_0 \tag{3.1.4}$$

denklemleri için salınım kriterleri Elbert [61] in çalışması esas alınarak birçok araştırmacı tarafından geniş ölçüde çalışılmıştır [43,55-69]. Bu sonuçların çoğu ya Winter [64] yada Kamanev [43] tarafından lineer diferensiyel denklemler için verilen kriterleri içerir. Öte yandan yarı-lineer diferansiyel denklemler (3.1.4) lineer diferensiyel denklemlerin benzer özelliklerine sahiptir. Örneğin, Sturm karşılaştırma ve ayırma teoremi (3.1.4) denklemi için de geçerlidir. (Daha detaylı olarak Elbert [61], Li ve Yeh [67] çalışmalarında görülebilir.)

Özel olarak

$$w' + p(t) + \alpha r^{-\frac{1}{\alpha}}(t)|w|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} = 0 \tag{3.1.5}$$

Ricatti tipi denklem ve $(\alpha + 1)$ inci dereceden

$$R(x) \coloneqq \int_a^b [p(t)|x|^{\alpha+1} - r(t)|x'|^{\alpha+1}]dt \tag{3.1.6}$$

fonksiyonu, lineer salınım teorisindeki klasik Ricatti denklemi ve quadratik (ikinci derece) fonksiyonu ile aynı rolü oynar. Burada (3.1.4) diferensiyel denkleminde $w = \frac{r|x'|^{\alpha-1}x'}{|x|^{\alpha-1}x}$ dönüşümü uygulandığında (3.1.5) Ricatti denklemi elde edilir. Yani w ifadesinin her iki tarafının türevi alınırsa,

$$w' = \frac{(r|x'|^{\alpha-1}x')'}{|x|^{\alpha-1}x} - \frac{(r|x'|^{\alpha-1}x').\alpha.x'}{|x|^{\alpha+1}}$$

veya

$$w' + \frac{(r|x'|^{\alpha-1}x').\alpha.x'}{|x|^{\alpha+1}} = \frac{(r|x'|^{\alpha-1}x')'}{|x|^{\alpha-1}x}$$

elde edilir. Şimdi(3.1.4) diferensiyel denkleminin her iki tarafı $|x(t)|^{\alpha-1}x(t)$ ile bölünür ve w nın türevi kullanılırsa,

$$w' + \frac{(r|x'|^{\alpha-1}x').\alpha.x'}{|x|^{\alpha+1}} + p(t) = 0$$

elde edilir. Buradan

$$w' + \frac{r^{\frac{1}{\alpha}}(r|x'|^{\alpha-1}x').\alpha.x'}{r^{\frac{1}{\alpha}}|x|^{\alpha+1}} + p(t) = 0$$

olmak üzere (3.1.5) denklemi elde edilir.

((3.1.4),(3.1.5) ve (3.1.6) arasındaki ilişkinin ispatı son zamanlarda oluşturulan Picone özdeşliğine dayanmaktadır [62].)

$\alpha = 1$ için (3.1.2) denklemi

$$(r(t)x'(t))' + p(t)x(t) = e(t), \quad t \geq t_0 \tag{3.1.7}$$

lineer diferensiyel denkleme indirgenir.

Wong [52], (3.1.7) denklemi ile ilgili aşağıdaki sonucu elde etmiştir.

Teorem 3.1.1. Kabul edelim ki herhangi bir $T \geq t_0$ için $t \in [s_1, t_1]$ için $e(t) \leq 0$ ve

$t \in [s_2, t_2]$ için $e(t) \geq 0$ olacak şekilde $T \leq s_1 \leq t_1 \leq s_2 \leq t_2$ vardır.

$i = 1,2$ için $\quad D(s_i, t_i) = \{u \in C'[s_i, t_i] : u(t) \neq 0, t \in (s_i, t_i),\ u(s_i) = u(t_i) = 0\}$ olsun. Eğer $i = 1,2$ için

$$R_i(u) \coloneqq \int_{s_i}^{t_i} [p(t)u^2(t) - r(t)(u'(t))^2]dt > 0 \qquad (3.1.8)$$

olacak şekilde $u \in D(s_i, t_i)$ mevcut ise, bu durumda (3.1.7) denklemi salınımlıdır.

Bu sonuç, e(t) nin ‘’salınımlılık aralığını’’ ve (3.1.7) denklemi için LeightonVaryasyon prensibini içerir. Son zamanlarda benzer bir metot kullanılarak, Wong’un sonucu pozitif ve azalmayan $\varphi \in C'([t_0, \infty), R)$ fonksiyonu için Lie ve Cheng tarafından (3.1.2) denklemine genelleştirilmiştir. Burada Lie ve Cheng [53] temel sonucu verelim.

Teorem 3.1.2. Kabul edelim ki herhangi bir $T \geq t_0$ için $t \in [s_1, t_1]$ için $e(t) \leq 0$ ve $t \in [s_2, t_2]$ için $e(t) \geq 0$ olacak şekilde $T \leq s_1 \leq t_1 \leq s_2 \leq t_2$ vardır. $i = 1,2$ için

$$D(s_i, t_i) \coloneqq \{u \in C'[s_i, t_i]: u(t) \neq 0, t \in (s_i, t_i), u(s_i) = u(t_i) = 0\}$$

olsun. Eğer $H \in D(s_i, t_i)$ fonksiyonu ve $i = 1,2$ için

$$\int_{s_i}^{t_i} H^2(t)\varphi(t)p(t)dt > \left(\frac{1}{\alpha+1}\right)^{\alpha+1} \int_{s_i}^{t_i} \frac{r(t)\varphi(t)}{|H(t)|^{\alpha-1}} (2|H'(t)| + |H(t)| \frac{\varphi'}{\varphi})^{\alpha+1} dt \qquad (3.1.9)$$

olacak şekilde bir pozitif, azalmayan $\varphi \in C'([t_0, \infty), R)$ fonksiyonu mevcut ise, bu durumda (3.1.2) denklemi salınımlıdır.

Bununla birlikte belirtelim ki (3.1.9) eşitsizliğinin (3.1.6) daki $(\alpha + 1)$ dereceli fonksiyonu ile bir ilişkisi yoktur ve Teorem 3.1.2, $\alpha > 1$ için uygulanamaz, çünkü $|H(t)|^{\alpha-1}$, (3.1.7) nin sağ tarafındaki integral üzerinde kesrin bölenidir ve H($s_i) = H(t_i) = 0$ dır. Üstelik belirtilen şart [52,53] çalışmalarında doğrudan görülemez. Yani seçilen aralıkta $p(t) \geq 0$ olmalıdır. Bu hipotez olmadan salınımlılık kriteri hakkında bilgi edinilemez.

Burada (3.1.1) diferensiyel denklemi için incelenmiş yeni salınım kriterleri verilecektir. Bu salınım kriterleri yukarıda verilen sonuçların iyileştirilip genelleştirilmesi adına (3.1.6) daki $(\alpha + 1)$ dereceli fonksiyon ile yakından ilişkilidir. Ayrıca temel sonuçları gösteren örnekler verilecektir.

TEMEL SONUÇLAR

İlk olarak Young's Eşitsizliğinin dönüşümü olan bir eşitsizliği verelim.

Lemma 3.1.1 [70].

Kabul edelim ki X ve Y negatif olmasın, bu durumda

$$\gamma XY^{\gamma-1} - X^{\gamma} \le (\gamma - 1)Y^{\gamma}\,, \gamma > 1 \tag{3.1.10}$$

dır. Burada eşitliğin olması için gerek ve yeter şart $X = Y$ olmasıdır.

Şimdi temel sonuçlarımızı verelim.

Teorem 3.1.3. Kabul edelim ki herhangi bir $T \ge t_0$ için $t \in [s_1, t_1] \cup [s_2, t_2]$ için

$q_j(t) \ge 0\ \ (1 \le j \le m)$ ve

$$\text{e(t)=}\begin{cases} \le 0, & t \in [s_1, t_1] \\ \ge 0, & t \in [s_2, t_2] \end{cases} \tag{3.1.11}$$

olacak şekilde $T \le s_1 \le t_1 \le s_2 \le t_2$ eşitsizliği vardır. $i = 1,2$ için

$D(s_i, t_i) \coloneqq \{u \in C^{'}[s_i, t_i]: u^{\alpha+1}(t) > 0,\ t \in (s_i, t_i), u(s_i) = u(t_i) = 0\}$ olsun. Eğer $i = 1,2$ için

$$\int_{s_i}^{t_i} \varphi(t)\left[\left(p(t) + \sum_{j=1}^{m} Q_j(t)\right)H^{\alpha+1}(t) - r(t)\left(\left|H^{'}(t)\right| + \frac{|H(t)\varphi^{'}(t)|}{(\alpha+1)\varphi(t)}\right)^{\alpha+1}\right]dt > 0 \tag{3.1.12}$$

olacak şekilde $H \in D(s_i, t_i)$ ve bir pozitif $\varphi \in C^{'}([t_0, \infty), R)$ fonksiyonu mevcut ise, bu taktirde (3.1.1) denklemi salınımlıdır. Burada $0^0 \equiv 1$ kabulü ile birlikte

$$Q_j(t) = \alpha^{\frac{-\alpha}{\beta_j}}\beta_j\left[m(\beta_j - \alpha)\right]^{\frac{\alpha-\beta_j}{\beta_j}}\left[q_j(t)\right]^{\frac{\alpha}{\beta_j}}|e(t)|^{\frac{\alpha-\beta_j}{\beta_j}},\ \ 1 \le j \le m \tag{3.1.13}$$

şeklindedir.

İspat: Tersine aşikâr olmayan salınımsız bir çözümün olduğunu kabul edelim. Bazı $T_0 \ge t_0$için $[T_0, \infty)$ aralığı üzerinde $x(t) > 0$ olduğunu varsayalım. $t \ge T_0$için

$$w(t) = \varphi(t)\frac{r(t)|x'(t)|^{\alpha-1}x'(t)}{|x(t)|^{\alpha-1}x(t)} \tag{3.1.14}$$

şeklinde tanımlayalım. (3.1.14) ün türevini alıp (3.1.1) denkleminde kullanırsak her $t \geq T_0$ için

$$w'(t) = \varphi'(t)\frac{r(t)|x'(t)|^{\alpha-1}x'(t)}{|x(t)|^{\alpha-1}x(t)} + \varphi(t)\left[\frac{r(t)|x'(t)|^{\alpha-1}x'(t)}{|x(t)|^{\alpha-1}x(t)}\right]'$$

$$w'(t) = \frac{\varphi'(t)\varphi(t)}{\varphi(t)}\frac{r(t)|x'(t)|^{\alpha-1}x'(t)}{|x(t)|^{\alpha-1}x(t)}$$

$$+\varphi(t)\left[\frac{\left(r(t)|x'(t)|^{\alpha-1}x'(t)\right)'}{|x(t)|^{\alpha-1}x(t)} - \frac{r(t)|x'(t)|^{\alpha-1}x'(t)\left(|x(t)|^{\alpha-1}x(t)\right)'}{\left(|x(t)|^{\alpha-1}x(t)\right)^2}\right]$$

$$w'(t) = \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}w(t) - \alpha\frac{r(t)|x'(t)|^{\alpha-1}\left(x'(t)\right)^2\varphi^{\frac{1}{\alpha}}(t)r^{\frac{1}{\alpha}}(t)}{(x(t))^{\alpha+1}\varphi^{\frac{1}{\alpha}}(t)r^{\frac{1}{\alpha}}(t)} + \varphi(t)\frac{\left(r(t)|x'(t)|^{\alpha-1}x'(t)\right)'}{|x(t)|^{\alpha-1}x(t)}$$

$$w'(t) = \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}w(t) - \alpha\frac{\left|w^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\right|}{(\varphi(t)r(t))^{\frac{1}{\alpha}}} - \varphi(t)\left[p(t) + \sum_{j=1}^{m} q_j(t)|x|^{\beta_j-\alpha} - \frac{e(t)}{|x(t)|^{\alpha-1}x(t)}\right] \tag{3.1.15}$$

elde edilir. Bu varsayıma göre $I_1 = [s_1, t_1]$ aralığında $e(t) < 0$ olsun diye $t_1 > s_1 \geq T_0$ seçebiliriz. Verilen $t \in I_1$ için

$F_j(y) = q_j(t)y^{\beta_j-\alpha} - \frac{e(t)}{my^{\alpha}}$, $1 \leq j \leq m$ alınırsa $F_j'(y_j^*) = 0$, $F_j''(y_j^*) > 0$ dır, burada

$$F_j'(y) = (\beta_j - \alpha)q_j(t)y^{\beta_j-\alpha-1} + \frac{\alpha e(t)}{my^{\alpha+1}}$$

olmak üzere

$$F_j'(y_j^*) = (\beta_j - \alpha)q_j(t)(y_j^*)^{\beta_j-\alpha-1} + \frac{\alpha e(t)}{m(y_j^*)^{\alpha+1}} = 0$$

$$(y_j^*)^{\beta_j} = \frac{-\alpha e(t)}{m(\beta_j-\alpha)q_j(t)}$$

veya

$$y_j{}^* = \left[\frac{-\alpha e(t)}{m(\beta_j-\alpha)q_j(t)}\right]^{\frac{1}{\beta_j}}$$

elde edilir.

$F_j(y)$, $y_j{}^*$noktasında minimum değerine sahiptir, yani

$$F_j(y) \geq F_j\left(y_j{}^*\right) = Q_j(t) \tag{3.1.16}$$

elde edilir. Böylece (3.1.15) ve (3.1.16) ifade eder ki w(t)

$$\varphi(t)\left[p(t) + \sum_{j=1}^{m} Q_j(t)\right] \leq -w'(t) + \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} w(t) - \alpha \frac{\left|w^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\right|}{\left(\varphi(t)r(t)\right)^{\frac{1}{\alpha}}} \tag{3.1.17}$$

eşitsizliğini sağlar. (3.1.17) nin $s_1$den t_1 e integralini alınırsa

$$\int_{s_1}^{t_1} \varphi(t)\left[p(t) + \sum_{j=1}^{m} Q_j(t)\right] H^{\alpha+1}(t)dt$$

$$\leq \int_{s_1}^{t_1} H^{\alpha+1}(t)\left(-w'(t) + \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} w(t) - \alpha \frac{\left|w^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\right|}{\left(\varphi(t)r(t)\right)^{\frac{1}{\alpha}}}\right)dt$$

elde edilir. Burada kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\int_{s_1}^{t_1} \varphi(t)\left[p(t) + \sum_{j=1}^{m} Q_j(t)\right] H^{\alpha+1}(t)dt$$

$$= -\left(H^{\alpha+1}(t_1)w'(t_1) + H^{\alpha+1}(s_1)w'(s_1)\right) + \int_{s_1}^{t_1} (\alpha+1)H^{\alpha}(t)H'(t)w(t)dt$$

$$+ \int_{s_1}^{t_1} H^{\alpha+1}(t)\left\{\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} w(t) - \alpha \frac{\left|w^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\right|}{\left(\varphi(t)r(t)\right)^{\frac{1}{\alpha}}}\right\}dt$$

elde edilir. $H(s_1) = H(t_1) = 0$ olduğundan

$$\int_{s_1}^{t_1} \varphi(t)\left[p(t) + \sum_{j=1}^{m} Q_j(t)\right] H^{\alpha+1}(t)dt$$

$$= \int_{s_1}^{t_1} (\alpha+1)H^{\alpha}(t)\left[H'(t) + \frac{H(t)\varphi'(t)}{(\alpha+1)\varphi(t)}\right] w(t) - \alpha \int_{s_1}^{t_1} H^{\alpha+1}(t) \frac{|w(t)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}{\left(\varphi(t)r(t)\right)^{\frac{1}{\alpha}}} dt$$

$$\leq \int_{s_1}^{t_1} (\alpha+1)|H^{\alpha}(t)| \left[\left|H'(t)\right| + \frac{|H(t)\varphi'(t)|}{(\alpha+1)\varphi(t)} \right] w(t)dt - \alpha \int_{s_1}^{t_1} \frac{|w(t)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}{(\varphi(t)r(t))^{\frac{1}{\alpha}}} H^{\alpha+1}(t)dt$$

(3.1.18)

elde edilir. Burada

$$X = \left[\frac{\alpha}{(\varphi(t)r(t))^{\frac{1}{\alpha}}} \right]^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} |H^{\alpha}(t)w(t)|\ , \gamma = 1 + \frac{1}{\alpha}$$

$$Y = (\alpha Q(t)r(t))^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \left[\left|H'(t)\right| + \frac{|H(t)\varphi'(t)|}{(\alpha+1)\varphi(t)} \right]^{\alpha}$$

olsun. Lemma 3.1.1 ve (3.1.18) eşitsizliğini kullanırsak

$$\int_{s_1}^{t_1} \varphi(t)\left[p(t) + \sum_{j=1}^{m} Q_j(t)\right] H^{\alpha+1}(t)dt$$

$$\leq \int_{s_1}^{t_1} \varphi(t)r(t) \left[\left|H'(t)\right| + \frac{|H(t)\varphi'(t)|}{(\alpha+1)\varphi(t)} \right]^{\alpha+1} dt$$

elde edilir ki bu da $i = 1$ için (3.1.12) şartı ile çelişir. Diğer taraftan x(t), $t \geq \tau_0 > t_0$ negatif bir çözüm ise Ricatti dönüşümünü (3.1.14) deki gibi tanımlanır, aynı zamanda (3.1.15) elde edilir. Bu durumda $I_2 = [s_2, t_2]$ aralığında $e(t) \geq 0$ olacak şekilde $t_2 > s_2 \geq \tau_0$ seçeriz. Verilen $t \in I_2$ için $y(t) = -x(t)$ ve

$F_j(y) = q_j(t)y^{\beta_j - \alpha} - \frac{e(t)}{my^{\alpha}}$, $1 \leq j \leq m$ ise, $F_j(y) \geq F_j(y_j{}^*) = Q_j(t)$ elde edilir.

$i = 2$ için teoremin kalan kısım benzerdir ve (3.1.12) ile bir çelişki elde edilir. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Sonuç 3.1.1. Eğer Teorem 3.1.3 de $\varphi(t) \equiv 1$ alınır ve (3.1.12) eşitsizliğin $i = 1,2$ için

$$R_i(H) := \int_{s_i}^{t_i} \left[\left(p(t) + \sum_{j=1}^{m} Q_j(t)\right) H^{(\alpha+1)}(t) - r(t)\left|H'(t)\right|^{\alpha+1} \right] dt > 0 \qquad (3.1.19)$$

eşitsizliği ile değiştirilirse, bu durumda (3.1.1) denklemi salınımlıdır.

Eğer $\varphi(t) \equiv 1$ ve $q_j(t) \equiv 0$, $1 \leq j \leq m$ ise, (3.1.2) denklemi için aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.2. Kabul edelim ki herhangi bir $T \geq t_0$ için $t \in [s_1, t_1] \cup [s_2, t_2]$ için $p(t) \geq 0$ olacak şekilde $T \leq s < t_1 \leq s_2$ vardır ve e(t), (3.1.11) şeklinde olsun. D(s_i, t_i), Teorem 3.1.3 deki gibi tanımlı olsun. Eğer $i = 1,2$ için

$$R_i(H) \coloneqq \int_{s_i}^{t_i} \left[p(t)H^{(\alpha+1)}(t) - r(t)\left|H'(t)\right|^{\alpha+1}\right] dt > 0 \tag{3.1.20}$$

olacak şekilde $H \in$ D(s_i, t_i) fonksiyonu varsa bu durumda (3.1.2) denklemi salınımlıdır.

Uyarı 3.1.1. Sonuç 3.1.2 (3.1.6) daki $(\alpha + 1)$ dereceli fonksiyonu ile yakından ilişkilidir. Bu yüzden Teorem 3.1.3, Sonuç 3.1.1 ve 3.1.2 ve Teorem 3.1.1 in iyileştirilmiş halidir ve böylece Teorem 3.1.2, Sonuç 3.1.1 ve 3.1.2 de α pozitif sabiti $(0, \infty)$ da herhangi bir sayı seçilebilir.

Uyarı 3.1.2. Teorem 3.1.3 , Sonuç 3.1.1 ve 3.1.2 deki (3.1.11) hipotezi aşağıdaki

$$\text{e(t)}=\begin{cases} \geq 0, & t \in [s_1, t_1] \\ \leq 0, & t \in [s_2, t_2] \end{cases} \tag{3.1.21}$$

şartı ile yer değiştirilebilir. Sonuçlar bu durumlar içinde geçerlidir.

Uyarı 3.1.3. Seçilen aralıklar üzerinde p(t) işareti hakkında kısıtlama yoktur fakat p(t) negatif olmamalıdır. Bununla ilgili şart

$$p(t) + \sum_{j=1}^{m} Q_j(t) \geq 0$$

dır.

Uyarı 3.1.4. Li ve Cheng [53] makalesinde olduğu gibi $\rho'(t) \geq 0$ kabul etmiyoruz.

Örnek 3.1.1. İkinci mertebeden Duffing denklemini

$$x'' + x + \varepsilon x^3 = \varepsilon sin^3 t\,, t \geq 0 \tag{3.1.22}$$

göz önüne alalım. Belirtelim ki (3.1.22) denklemi $\alpha = 1,\ \beta = 3$ ve $r = p \equiv 1$,

$q \equiv \varepsilon,\ e(t) = \varepsilon sin^3 t$ için (3.1.1) denkleminin özel bir durumudur. Denklem yapısı uymadığından Teorem 3.1.1 ve Teorem 3.1.2 bu denklem için uygulanamaz. Bununla birlikte $H(t) = sint$ ve $\varphi(t) \equiv 1$ ile birlikte (3.1.22) denklemi için salınım elde edebiliriz. Herhangi bir $T \geq 0$ için yeterince büyük n seçilebilir öyle ki $n\pi = 2k\pi \geq T$ ve $s_1 = 2k\pi$ ve $t_1 = (2k+1)\pi$ dir. Burada

$$Q(t) = 3\sqrt[3]{|\varepsilon|/4}sin^2t$$

$$R_1(H) := \int_{s_1}^{t_1} \left[(p(t) + Q(t))H^{(\alpha+1)}(t) - r(t)\left|H^{'}(t)\right|^{\alpha+1}\right] dt$$

$$= \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \left[\left(1 + 3\sqrt[3]{\frac{|\varepsilon|}{4}} sin^2t\right) sin^2t - cos^2t\right] dt$$

$$= \int_0^{\pi} 3\sqrt[3]{|\varepsilon|/4} sin^4t dt > 0$$

olduğu görülebilir. Böylece $R_1(H) > 0$ elde edilir. Benzer olarak $s_2 = (2k+1)\pi$ için ve $t_2 = (2k+2)\pi$ için $R_2(H) > 0$ olduğunu görürüz. Böylece (3.1.22) denklemi Sonuç 3.1.1 ve Uyarı 3.1.2 den salınımlıdır. Üstelik belirtelim ki $x = sint$, (3.1.22) denkleminin salınımlı bir çözümüdür.

Örnek 3.1.2. $t \geq 1$ için

$$\left[(2 + cost)\left|x^{'}(t)\right|^{\alpha-1}x^{'}(t)\right]^{'} + K_1|x(t)|^{\alpha-1}x(t) + K_2x(t) = -sint \qquad (3.1.23)$$

forced yarı lineer diferensiyel denklemi göz önüne alalım. Burada $\alpha = \frac{1}{3}$ tür.

$H(t) = sint$ ve $\varphi(t) \equiv 1$ ile birlikte $K_2 \equiv 0$ iken Li ve Cheng [53] tarafından

$K_1 \geq 5(\frac{3}{2})^{\frac{4}{3}} = 8{,}585$ iken (3.1.23) denklemi için salınımlılık elde edilir. Bununla birlikte bu çalışma (3.1.23) diferensiyel denklemine uygulanamaz. Sonuç 3.1.1 kullanılarak $K_1 > 2$ iken (3.1.23) denkleminin salınımı elde edilir. Aslında

$Q(t) = 3\sqrt[3]{|K_2|/4}sin^{\frac{2}{3}}t$ elde edilir. Her $T \geq 1$ için yeterince büyük n seçilir öyle ki $n\pi = 2k\pi \geq T$ ve $s_1 = 2k\pi$ ve $t_1 = (2k+1)\pi$ dir. Burada

$$R_1(H) := \int_{s_1}^{t_1} \left[(p(t) + Q(t))H^{(\alpha+1)}(t) - r(t)\left|H^{'}(t)\right|^{\alpha+1}\right] dt$$

$$= \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \left[\left(K_1 + 3\sqrt[3]{|K_2|/4}sin^{\frac{2}{3}}t\right) sin^{\frac{4}{3}}t - (2 + cost)|cost|^{\frac{4}{3}}\right] dt$$

$$= \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \left[(K_1 - 2) sin^{\frac{4}{3}} t + 3\sqrt[3]{|K_2|/4} sin^2 t \right] dt > 0 \ \ , K_1 > 2 \text{ için}$$

olduğu görülür. Benzer olarak $s_2 = (2k+1)\pi$ için ve $t_2 = (2k+2)\pi$ için

$R_2(H) > 0$ olduğu gösterilebilir. Böylece (3.1.23) denklemi $K > 2$ için Sonuç 3.1.1 den salınımlıdır.

3.2.

$$\boldsymbol{\left(r(t)|x'(t) + px'(t-\sigma)|^{\alpha-1}\left(x'(t) + px'(t-\sigma)\right)\right)' + q_0(t)\left|x\left(\tau_0(t)\right)\right|^{\alpha-1} x\left(\tau_0(t)\right)}$$

$$\boldsymbol{+ \sum_{i=1}^{n} q_i(t)\left|x\left(\tau_i(t)\right)\right|^{\beta_i - 1} x\left(\tau_i(t)\right) = e(t) sgn(x(t))}$$

Diferensiyel Denklemleri İçin Salınım Teoremleri

Bu kesimde Jichao Zhong, Zigen Ouyang , Shuliang Zou [71] tarafından incelenen

$$\left(r(t)|x'(t) + px'(t-\sigma)|^{\alpha-1}\left(x'(t) + px'(t-\sigma)\right)\right)' + q_0(t)\left|x\left(\tau_0(t)\right)\right|^{\alpha-1} x\left(\tau_0(t)\right)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} q_i(t)\left|x\left(\tau_i(t)\right)\right|^{\beta_i - 1} x\left(\tau_i(t)\right) = e(t) sgn(x(t)), \quad t \geq t_0 \text{ için} \tag{3.2.1}$$

şeklindeki ikinci mertebeden lineer olmayan ikinci yanlı (forced) neutral gecikmeli karma diferensiyel denklemleri göz önüne alacağız, burada $\alpha \leq \beta_i (i = 0,1, \dots, n)$ pozitif sabitler, $r(t) \in C^1([t_0, \infty); R^+)$, $r'(t) \geq 0$, $q_i(t) \geq 0$ $(i = 0,1, \dots, n)$,

$e(t) \leq 0$, $p \geq 0$ ve $\sigma \geq 0$ olsun. Ayrıca bu kesim boyunca $t \in [t_0, \infty)$ için

$\tau(t) \leq \tau_i(t) (i = 0,1,2, \dots, n)$, $\tau(t) \leq t - \sigma$, $\lim_{t\to\infty} \tau(t) = \infty$ ve $\tau'(t) > 0$ olacak şekilde $\tau(t) \in C^1([t_0, \infty); R^+)$ olduğunu kabul edelim. (3.2.1) denkleminin özel durumlarında incelenmiş aşağıdaki çalışmalardan bahsedebiliriz.

Lie ve Cheng [80], (3.2.1) diferensiyel denkleminin bir özel durumu olan

$$\left(r(t)|x'(t)|^{\alpha-1}x'(t)\right)' + p(t)|x(t)|^{\alpha-1}x(t) = e(t) \tag{3.2.2}$$

diferensiyel denklemi için salınım kriteri elde etmişlerdir. Daha sonra Zheng ve Wong [51], (3.2.2) denkleminden daha genel olan

$$\left(r(t)|x'(t)|^{\alpha-1}x'(t)\right)' + p(t)|x(t)|^{\alpha-1}x(t) + \sum_{i=1}^{n} q_i(t)|x(t)|^{\beta_i-1}x(t) = e(t) \tag{3.2.3}$$

diferensiyel denklemi için bazı benzer özellikler incelemişlerdir. Bununla birlikte, yukarıdaki ikinci mertebeden forced (ikinci yanlı) neutral gecikmeli diferensiyel denklem formu üzerinde çok az çalışma bulunmaktadır. Burada (3.2.1) denkleminin salınımlılığı araştırılmıştır; biz $[t_x, \infty)$ aralığı üzerinde mevcut ve herhangi $T \geq t_x$ için $sup\{|x(t)|: t \geq T\}$ özelliğini sağlayan (3.2.1) diferensiyel denkleminin x(t) çözümlerini göz önüne alacağız. Daha önceden de belirtildiği gibi (3.2.1) denkleminin x(t) çözümü keyfi çoklukta sıfıra sahipse, salınımlıdır; aksi halde salınımsızdır denir. Eğer çözüm salınımsız ise, bu durumda çözüm belli bir yerden sonra ya hep pozitif ya da hep negatiftir. Eğer (3.2.1) denklemi salınımlıdır gerek ve yeter şart (3.2.1) denkleminin bütün çözümleri salınımlıdır.

Verilen sonuçları elde etmek için kullanılan aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 3.2.1 [81]. $f, g: [t_0, \infty) \to R$ fonksiyonları $t \geq t_0 + max\{0, c\}$ için

$f(t) = g(t) + pg(t - c)$ olacak şekilde tanımlı olsun, burada $p, c \in R$ ve $p \neq 1$ dir.

Kabul edelim ki $\lim_{t\to\infty} f(t) \equiv l \in R$ mevcut olsun. Bu durumda

1) Eğer $\liminf_{t\to\infty} g(t) \equiv a \in R$ ise, $l = (1 + p)a$

2) Eğer $\limsup_{t\to\infty} g(t) \equiv b \in R$ ise, $l = (1 + p)b$

ifadeleri sağlanır.

TEMEL SONUÇLAR

Teorem 3.2.1. Kabul edelim ki $0 \leq p < \infty$, $p \neq 1$ olsun. Eğer

$$\lim_{t\to\infty} R(t) = \infty \tag{3.2.4}$$

ve

$$\int_{t_0}^{\infty}\left[\frac{(1-\varepsilon)^{\alpha}}{\left(1+p(1+\varepsilon)\right)^{\alpha}}\rho(t)Q(t)-\frac{1}{(\alpha+1)^{(\alpha+1)}}\frac{\left(\rho'_{+}(t)\right)^{\alpha+1}r(\tau(t))}{\rho^{\alpha}(t)(\tau'(t))^{\alpha}}\right]dt=\infty \tag{3.2.5}$$

olacak şekilde $\varepsilon(0<\varepsilon<1)$ ve pozitif sürekli bir $\rho(t)$ fonksiyonu varsa, bu durumda (3.2.1) denklemi salınımlıdır, burada

$$R(t)=\int_{t_0}^{t}\frac{1}{r^{\frac{1}{\alpha}}(s)}ds \tag{3.2.6}$$

$$Q(t)=q_0(t)+\sum_{i=1}^{n}Q_i(t)$$

$$=q_0(t)+\sum_{i=1}^{n}\alpha^{-\frac{\alpha}{\beta_i}}\beta_i[n(\beta_i-\alpha)]^{\frac{(\alpha-\beta_i)}{\beta_i}}(q_i(t))^{\frac{\alpha}{\beta_i}}|e(t)|^{\frac{(\beta_i-\alpha)}{\beta_i}} \tag{3.2.7}$$

$$\rho'_{+}(t)=max\{0,\rho'(t)\}, \tag{3.2.8}$$

şeklindedir.

İspat: Kabul edelim ki (3.2.1) denkleminin salınımsız bir çözümü x(t) olsun. Genelliği bozmaksızın x(t) belli bir yerden sonra pozitif bir çözüm olsun. (Belli bir yerden sonra negatif çözüm olması durumundaki ispat benzer şekildedir.) Burada y(t) fonksiyonunu

$$y(t)=x(t)+px(t-\sigma) \tag{3.2.9}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda (3.2.1) denklemi

$$\left(r(t)\left|y'(t)\right|^{\alpha-1}y'(t)\right)'+q_0(t)\left|x\left(\tau_0(t)\right)\right|^{\alpha-1}x\left(\tau_0(t)\right)$$

$$+\sum_{i=1}^{n}q_i(t)\left|x\left(\tau_i(t)\right)\right|^{\beta_i-1}x\left(\tau_i(t)\right)=e(t) \tag{3.2.10}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Açıktır ki $x(t)>0$, $y(t)>0$ olacak şekilde $t_1\geq t_0$ değeri mevcuttur. (3.2.10) dan görülür ki $r(t)\left|y'(t)\right|^{\alpha-1}y'(t)$ belli bir yerden sonra azalan olup bu da $y'(t)$ nin belli bir yerden sonra pozitif veya negatif olması demektir.

Şimdi iddia ediyoruz ki $y'(t)>0$ olsun. Aksi halde $y'(t)\leq 0$ dır. x(t) belli bir yerden sonra pozitif olduğundan ve (3.2.10) kullanılırsa,

$$[r(t)(-y'(t))^{\alpha}]'=\left[r(t)\left|-y'(t)\right|^{\alpha-1}(-y'(t))\right]'\geq 0$$

olduğu kolaylıkla görülebilir. Çünkü $r(t)\left(-y'(t)\right)^{\alpha}$ belli bir yerden sonra pozitif olduğundan burada $M > 0$ ve $t \geq t_2$ için $r(t)\left(-y'(t)\right)^{\alpha} \geq M$ olacak şekilde

$t_2 \geq t_1{}^*$ vardır, yani $t \geq t_2$ için $-y'(t) \geq M^{\frac{1}{\alpha}} \frac{1}{r(t)^{\frac{1}{\alpha}}}$ dir.

Yukarıdaki eşitsizlik integre edilir ve $t \to \infty$ için limitini alınır ve (3.2.4) ve (3.2.6) kullanılırsa, $\lim_{t\to\infty} y(t) \leq -\infty$ elde ederiz ki bu ise y(t) nin belli bir yerden sonra pozitif olması ile çelişir. Böylece $t > t_3$ için$x(t) > 0, y(t) > 0, y'(t) > 0$,

$[r(t)(-y'(t))^{\alpha}]' \leq 0$ elde edilir ve buradan $t \geq t_3$ için

$r(t)(y'(t))^{\alpha} \leq r(\tau(t))(y'(\tau(t)))^{\alpha}$ olduğu görülür, bu da $t \geq t_3$ için

$$\frac{y'(\tau(t))}{y'(t)} \leq \frac{r(t)^{\frac{1}{\alpha}}}{r(\tau(t))^{\frac{1}{\alpha}}} \tag{3.2.11}$$

olmasını gerektirir. $t \geq t_3$ için

$$u(t) = \rho(t)\frac{r(t)(y'(t))^{\alpha}}{(y(\tau(t)))^{\alpha}} \tag{3.2.12}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu durumda $u(t) > 0$dır. $y'(t) > 0$ ve

$[r(t)(y'(t))^{\alpha}]' \leq 0$ olduğundan bu demektir ki $r(t)(y'(t))^{\alpha}$ monoton azalan bir fonksiyondur. Çünkü r(t) artan olduğundan y'(t) de azalandır. Böylece

$\lim_{t\to\infty} y'(t) = b \geq 0$ dır. Kolaylıkla gösterilebilir ki x'(t) sınırlıdır. Lemma 3.2.1 den

$\liminf_{t\to\infty} x'(t) = \limsup_{t\to\infty} x'(t) = \lim_{t\to\infty} x'(t) = a$ ve $a = \frac{b}{1+p} \geq 0$ elde edilir. Burada aşağıdaki iki durumu göz önüne alalım.

Durum1. $\lim_{t\to\infty} x'(t) = a > 0$ olsun. Bu durumda $t > t_3$ için $x'(t) > 0$ olacak şekilde bir $t_3 > t_2$ değeri vardır. (3.2.12) den ve $x'(t) > 0$ olduğu dikkate alınırsa,

$$u'(t) = \rho'(t)\frac{r(t)\left(y'(t)\right)^{\alpha}}{\left(y(\tau(t))\right)^{\alpha}} + \rho(t)\left[\frac{r(t)\left(y'(t)\right)^{\alpha}}{\left(y(\tau(t))\right)^{\alpha}}\right]'$$

$$= \frac{\rho'(t)\rho(t)}{\rho(t)} \frac{r(t)\left(y'(t)\right)^{\alpha}}{\left(y(\tau(t))\right)^{\alpha}} + \rho(t)\left[\frac{(r(t)\left(y'(t)\right)^{\alpha})'}{\left(y(\tau(t))\right)^{\alpha}} - \frac{r(t)\left(y'(t)\right)^{\alpha}\alpha\left(y(\tau(t))\right)^{\alpha-1}\tau'(t)y'(\tau(t))}{(y(\tau(t)))^{2\alpha}}\right]$$

$$= \frac{\rho'(t)}{\rho(t)}u(t) - \alpha\rho(t)\frac{r(t)\left(y'(t)\right)^{\alpha}}{\left(y(\tau(t))\right)^{\alpha+1}}y'\big(\tau(t)\big)\tau'(t) + \rho(t)\frac{\left(r(t)\left(y'(t)\right)^{\alpha}\right)'}{\left(y(\tau(t))\right)^{\alpha}}$$

$$= \frac{\rho'(t)}{\rho(t)}u(t) - \alpha\rho(t)\frac{r(t)\left(y'(t)\right)^{\alpha}\rho^{\frac{1}{\alpha}}(t)r^{\frac{1}{\alpha}}(\tau(t))}{\left(y(\tau(t))\right)^{\alpha+1}\rho^{\frac{1}{\alpha}}(t)r^{\frac{1}{\alpha}}(\tau(t))}y'\big(\tau(t)\big)\tau'(t) \ + \rho(t)\frac{\left(r(t)\left(y'(t)\right)^{\alpha}\right)'}{\left(y(\tau(t))\right)^{\alpha}}$$

$$= \frac{\rho'(t)}{\rho(t)}u(t) - \frac{\alpha\tau'(t)}{\left(\rho(t)r(\tau(t))\right)^{\frac{1}{\alpha}}}u^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(t) + \rho(t)\frac{\left(r(t)\left(y'(t)\right)^{\alpha}\right)'}{\left(y(\tau(t))\right)^{\alpha}}$$

elde edilir. (3.2.10) diferensiyel denkleminden

$$u'(t) = \frac{\rho'(t)}{\rho(t)}u(t) - \frac{\alpha\tau'(t)}{\left(\rho(t)r(\tau(t))\right)^{\frac{1}{\alpha}}}u^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(t) - \rho(t)\left[\frac{q_0(t)x^{\alpha}(\tau_0(t)) + \sum_{i=1}^{n} q_i(t)x^{\beta_i}(\tau_i(t)) - e(t)}{(x(\tau(t)) + px(\tau(t)-\sigma))^{\alpha}}\right]$$

bulunur. Burada $y(t) = x(t) + px(t-\sigma)$ da t yerine $\tau(t)$ alınır ve

$\rho_+'(t) = max\{0, \rho'(t)\}$ kullanılırsa $t \geq t_3$ için

$$u'(t) \leq \frac{\rho_+{}'(t)}{\rho(t)}u(t) - \frac{\alpha\tau'(t)}{\left(\rho(t)r(\tau(t))\right)^{\frac{1}{\alpha}}}u^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(t)$$

$$- \frac{1}{(1+p)^{\alpha}}\rho(t)\left\{q_0(t) + \sum_{i=1}^{n} q_i(t)x^{\beta_i-\alpha}\big(\tau(t)\big) - \frac{e(t)}{(x(\tau(t)))^{\alpha}}\right\} \tag{3.2.13}$$

elde edilir. Burada $s > 0$ için $F(s) = \frac{\rho_+{}'(t)}{\rho(t)}s - \frac{\alpha\tau'(t)}{\left(\rho(t)r(\tau(t))\right)^{\frac{1}{\alpha}}}s^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}$ fonksiyonunu tanımlayalım. Şimdi, F(s) in maksimum olduğu bir nokta bulalım. Yani

$F'(s_0) = 0, F''(s_0) < 0$ olacak şekilde bir s_0 noktası vardır. Kolaylıkla gösterilebilir ki $s_0 = \frac{1}{(1+\alpha)^{\alpha}}\frac{(\rho_+'(t))^{\alpha}}{\rho^{\alpha}(t)}\frac{r(\tau(t))}{(\tau'(t))^{\alpha}}$ dır. Yani $F'(s) = \frac{\rho_+{}'(t)}{\rho(t)} - \frac{(\alpha+1)\tau'(t)}{\left(\rho(t)r(\tau(t))\right)^{\frac{1}{\alpha}}}s^{\frac{1}{\alpha}}$ olmak üzere

$F'(s_0) = 0$ dan $\frac{\rho_+{}'(t)}{\rho(t)} = \frac{(\alpha+1)\tau'(t)}{\left(\rho(t)r(\tau(t))\right)^{\frac{1}{\alpha}}}s_0^{\frac{1}{\alpha}} = 0$ ve buradan $s_0 = \frac{1}{(1+\alpha)^{\alpha}}\frac{(\rho_+'(t))^{\alpha}}{\rho^{\alpha}(t)}\frac{r(\tau(t))}{(\tau'(t))^{\alpha}}$

elde edilir. Böylece F(s), s_0 noktasında maksimuma sahiptir. F(s) fonksiyonunda s yerine s_0 değeri yazılırsa, yani

$$F(s_0) = \frac{1}{(1+\alpha)^{\alpha+1}} \frac{(\rho_+'(t))^{\alpha+1}}{\rho^\alpha(t)} \frac{r(\tau(t))}{(\tau'(t))^\alpha}$$

bulunur ve böylece

$$F(s) \le F(s_0) = \frac{1}{(1+\alpha)^{\alpha+1}} \frac{(\rho_+'(t))^{\alpha+1}}{\rho^\alpha(t)} \frac{r(\tau(t))}{(\tau'(t))^\alpha} \tag{3.2.14}$$

elde edilir. Burada $1 \le i \le n$ için $F_i(x) = q_i(t)x^{\beta_i-\alpha} - \frac{e(t)}{nx^\alpha}$ alalım. Şimdi $F_i(x)$ in minimum noktası bulunur yani $F_i'(x_i^*) = 0$, $F_i''(x_i^*) > 0$ olacak şekilde bir x_i^* noktası vardır. Görülür ki $x_i^* = \left[\frac{-\alpha e(t)}{n(\beta_i-\alpha)q_i(t)}\right]^{\frac{1}{\beta_i}}$ şeklindedir. Yani

$F_i'(x) = (\beta_i - \alpha)q_i(t)x^{\beta_i-\alpha-1} + \frac{\alpha e(t)}{nx^{\alpha+1}}$ olmak üzere $F_i'(x_i^*) = 0$ dan

$(\beta_i - \alpha)q_i(t)(x_i^*)^{\beta_i-\alpha-1} + \frac{\alpha e(t)}{n(x_i^*)^{\alpha+1}} = 0$ ise, $x_i^* = \left[\frac{-\alpha e(t)}{m(\beta_i-\alpha)q_i(t)}\right]^{\frac{1}{\beta_i}}$ elde edilir. Böylece $F_i(x)$, x_i^* da minimuma sahiptir ve

$$F_i(x) \ge F_i(x_i^*) = Q_i(t) \tag{3.2.15}$$

dır. (3.2.13)-(3.2.15) birlikte göz önüne alınırsa $t > t_3$ için,

$$u'(t) \le \frac{1}{(1+\alpha)^{\alpha+1}} \frac{\left(\rho_+'(t)\right)^{\alpha+1}}{\rho^\alpha(t)} \frac{r(\tau(t))}{\left(\tau'(t)\right)^\alpha} - \frac{1}{(1+p)^\alpha}\rho(t)Q(t) \tag{3.2.16}$$

bulunur, burada Q(t), (3.2.7) deki gibi tanımlıdır. Yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafının t_3 den t ye integralini alırsak

$$\int_{t_3}^t u'(s)ds \le \int_{t_3}^t \left[\frac{1}{(1+\alpha)^{\alpha+1}} \frac{\left(\rho_+'(s)\right)^{\alpha+1}}{\rho^\alpha(s)} \frac{r(\tau(s))}{\left(\tau'(s)\right)^\alpha} - \frac{1}{(1+p)^\alpha}\rho(s)Q(s)\right]ds$$

$$u(t) - u(t_3) \le -\int_{t_3}^t \left[\frac{1}{(1+p)^\alpha}\rho(s)Q(s) - \frac{1}{(1+\alpha)^{\alpha+1}} \frac{\left(\rho_+'(s)\right)^{\alpha+1}}{\rho^\alpha(s)} \frac{r(\tau(s))}{\left(\tau'(s)\right)^\alpha}\right]ds$$

$$0 < u(t) \le u(t_3) - \int_{t_3}^t \left[\frac{1}{(1+p)^\alpha}\rho(s)Q(s) - \frac{1}{(1+\alpha)^{\alpha+1}} \frac{\left(\rho_+'(s)\right)^{\alpha+1}}{\rho^\alpha(s)} \frac{r(\tau(s))}{\left(\tau'(s)\right)^\alpha}\right]ds$$

$$u(t) \leq u(t_3) - \int_{t_3}^{t} \left[\frac{(1-\varepsilon)^\alpha}{(1+p(1+\varepsilon))^\alpha} \rho(s) Q(s) - \frac{1}{(1+\alpha)^{\alpha+1}} \frac{\left(\rho_+'(s)\right)^{\alpha+1}}{\rho^\alpha(s)} \frac{r(\tau(s))}{\left(\tau'(s)\right)^\alpha} \right] ds \qquad (3.2.17)$$

elde edilir. (3.2.17) nin $t \to \infty$ için limitini alır ve (3.2.5) i kullanırsak

$0 < \lim_{t\to\infty} u(t) \leq -\infty$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir.

Durum2. $\lim_{t\to\infty} x'(t) = a = 0$ olsun. Çünkü $y(t) > 0$ ve $y'(t) > 0$,

$\lim_{t\to\infty} y(t) = b > 0$ ve $\lim_{t\to\infty} x(t) = \bar{a} = \frac{\bar{b}}{1+p} > 0$ olduğundan $\lim_{t\to\infty} \frac{x(\tau_i(t))}{x(\tau(t))} = 1$,

$\lim_{t\to\infty} \frac{x(\tau(t)-\sigma)}{x(\tau(t))} = 1$ dir, ki bu da herhangi $\varepsilon' < \varepsilon$ pozitif sayısı için

$t > T$ olmak üzere vardır öyle ki $1 - \varepsilon' = \frac{x(\tau_i(t))}{x(\tau(t))}$, $\frac{x(\tau(t)-\sigma)}{x(\tau(t))} < 1 + \varepsilon'$

$i = 0,1,2,\dots,n$ olacak şekilde bir $T > t_3$ değerinin var olması demektir.

Böylece (3.2.13) den $t > T$ için

$$u'(t) \leq \frac{\rho'(t)}{\rho(t)} u(t) - \frac{\alpha\tau'(t)}{\left(\rho(t) r(\tau(t))\right)^{\frac{1}{\alpha}}} u^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(t)$$

$$- \frac{(1-\varepsilon')^\alpha}{(1+p(1+\varepsilon'))^\alpha} \rho(t) \left\{ q_0(t) + \sum_{i=1}^{n} q_i(t) x^{\beta_i - \alpha}(\tau(t)) - \frac{e(t)}{(x(\tau(t)))^\alpha} \right\}$$

yazılabilir. Durum 1 e benzer metot uygulanarak ,

$$0 < u(t) \leq u(T) - \int_{T}^{t} \left[\frac{(1-\varepsilon')^\alpha}{(1+p(1+\varepsilon'))^\alpha} \rho(s) Q(s) - \frac{1}{(1+\alpha)^{\alpha+1}} \frac{\left(\rho_+'(s)\right)^{\alpha+1}}{\rho^\alpha(s)} \frac{r(\tau(s))}{\left(\tau'(s)\right)^\alpha} \right] ds$$

$$\leq u(T) - \int_{T}^{t} \left[\frac{(1-\varepsilon)^\alpha}{(1+p(1+\varepsilon))^\alpha} \rho(s) Q(s) - \frac{1}{(1+\alpha)^{\alpha+1}} \frac{\left(\rho_+'(s)\right)^{\alpha+1}}{\rho^\alpha(s)} \frac{r(\tau(s))}{\left(\tau'(s)\right)^\alpha} \right] ds$$

eşitsizliğin $t \to \infty$ için limitini alır ve (3.2.5) i kullanırsak $0 < \lim_{t\to\infty} u(t) \leq -\infty$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Böylece ispat tamamlanır.

Uyarı 3.2.1. Eğer biz $\rho(t) = R^\alpha(\tau(t))$ seçersek, bu durumda (3.2.5)

$$\int_{t_0}^{\infty} \left[\frac{(1-\varepsilon)^\alpha}{\left(1+p(1+\varepsilon)\right)^\alpha} R^\alpha(\tau(t)) Q(t) - \left(\frac{\alpha}{(\alpha+1)}\right)^{(\alpha+1)} \frac{\tau'(t)}{R(\tau(t))} r^{\frac{1}{\alpha}}(\tau(t)) \right] dt = \infty$$

şekline indirgenir.

Örnek 3.2.1. $t \geq t_0$için

$$((2+cost)\left|x'(t)+\frac{1}{2}x'(t-\pi)\right|^{\frac{-2}{3}}\left(x'(t)+\frac{1}{2}x'(t-\pi)\right)'+3x(t-\pi)$$

$$=-cos^2 tsgn\big(x(t)\big) \tag{3.2.18}$$

denklemini göz önüne alalım. Burada

$\alpha=\frac{1}{3}$, $\beta=1$, $p=\frac{1}{2}$, $\tau(t)=t-\pi$, $r(t)=2+cost$ ve $e(t)=cos^2 t$ dir.

$\lim_{t\to\infty} R(t)=\int_{t_0}^{\infty}\frac{1}{r^{\frac{1}{\alpha}}(t)}dt=\int_{t_0}^{\infty}\frac{1}{(2+cost)^3}dt=\infty$ olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

$\rho(t)=t$ alalım, bu durumda $\rho'(t)=1$ dir. Herhangi $0<\varepsilon<1$ için

$$Q(t)=\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{2}{3}}(3)^{\frac{1}{3}}(cos^2 t)^{\frac{2}{3}}=(3)^{\frac{4}{3}}(4)^{-\frac{1}{3}}cos^{\frac{4}{3}}t$$

$$r\big(\tau(t)\big)=2+cos(t-\pi)=2-cost$$

olduğundan

$$\int_{t_0}^{\infty}\left[\frac{(1-\varepsilon)^{\alpha}}{\big(1+p(1+\varepsilon)\big)^{\alpha}}\rho(t)Q(t)-\frac{1}{(\alpha+1)^{(\alpha+1)}}\frac{\big(\rho_+'(t)\big)^{\alpha+1}r(\tau(t))}{\rho^{\alpha}(t)(\tau'(t))^{\alpha}}\right]dt$$

$$=\int_{t_0}^{\infty}\left[\frac{(1-\varepsilon)^{\alpha}}{\left(1+\frac{1}{2}(1+\varepsilon)\right)^{\alpha}}t(3)^{\frac{4}{3}}(4)^{-\frac{1}{3}}cos^{\frac{4}{3}}t-\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{4}{3}}\frac{(2-cost)}{t^{\frac{1}{3}}}\right]dt$$

$$\geq\int_{t_0}^{\infty}\left[\frac{(1-\varepsilon)^{\alpha}}{\left(1+\frac{1}{2}(1+\varepsilon)\right)^{\alpha}}t(3)^{\frac{4}{3}}(4)^{-\frac{1}{3}}cos^{\frac{4}{3}}t-\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{4}{3}}3t^{-\frac{1}{3}}\right]dt \tag{3.2.19}$$

elde edilir. Burada

$$a=\frac{(1-\varepsilon)^{\alpha}}{\left(1+\frac{1}{2}(1+\varepsilon)\right)^{\alpha}}(3)^{\frac{4}{3}}(4)^{-\frac{1}{3}}\ ,\quad b=\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{4}{3}}3 \tag{3.2.20}$$

olsun. $\int_0^{\pi} cos^{\frac{4}{3}}tdt > 0$ olduğundan yeterince büyük N pozitif sayısı vardır öyle ki $n \geq N$ için

$$b\pi\left(\frac{1}{n\pi}\right)^{\frac{1}{3}} < \frac{1}{2}an\pi\int_0^{\pi} cos^{\frac{4}{3}}tdt \tag{3.2.21}$$

eşitsizliği vardır ve görülür ki $n \geq N$ için

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} bt^{-\frac{1}{3}}dt < b\pi\left(\frac{1}{n\pi}\right)^{\frac{1}{3}} < \frac{1}{2}an\pi\int_0^{\pi} cos^{\frac{4}{3}}tdt$$

$$= \frac{1}{2}an\pi\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} cos^{\frac{4}{3}}tdt \leq \frac{1}{2}a\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} tcos^{\frac{4}{3}}tdt \tag{3.2.22}$$

bulunur. $t_0 = N\pi$ alalım. (3.2.22) ve (3.2.19) da yerine yazarsak (3.2.20) ile birlikte,

$$\int_{t_0}^{\infty}\left[\frac{(1-\varepsilon)^{\alpha}}{\left(1+p(1+\varepsilon)\right)^{\alpha}}\rho(t)Q(t) - \frac{1}{(\alpha+1)^{(\alpha+1)}}\frac{\left(\rho'_{+}(t)\right)^{\alpha+1}r(\tau(t))}{\rho^{\alpha}(t)(\tau'(t))^{\alpha}}\right]dt$$

$$\geq \sum_{n=N}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\left[atcos^{\frac{4}{3}}t - bt^{-\frac{1}{3}}\right]dt$$

$$\geq \frac{1}{2}\sum_{n=N}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} atcos^{\frac{4}{3}}tdt$$

$$\geq \frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi} cos^{\frac{4}{3}}tdt\right)\sum_{n=N}^{\infty} an\pi = \infty$$

elde edilir.

Böylece Teorem 3.2.1 in tüm şartları sağlanır. Buradan (3.2.18) in her çözümü salınımlıdır.

3.3. $(rx')'(t) + q_0(t)x(\tau_0(t)) + \sum_{i=1}^{n} q_i(t)\left|x\left(\tau_i(t)\right)\right|^{\beta_i-1} x\left(\tau_i(t)\right)$

$= e(t)sgn(x(t))$

Diferensiyel Denklemleri İçin Salınım Kriterleri

Bu kesimde Yongfang Wang, Tonxing Li, Ethiraju Thandapani [82] tarafından incelenen

$$(rx')'(t) + q_0(t)x\left(\tau_0(t)\right) + \sum_{i=1}^{n} q_i(t)|x(\tau_i(t))|^{\beta_i-1}x(\tau_i(t)) = e(t)sgn(x(t)) \tag{3.3.1}$$

şeklindeki ikinci mertebeden lineer olmayan forced(ikinci yanlı) karma diferensiyel denklemleri göz önüne alacağız, burada $t \geq t_0 > 0, n \geq 1$ bir doğal sayı

$\beta_i \geq 1$ $(i = 1,2,3, \dots, n)$ sabitler, $r \in C'([t_0, \infty), R),\ q_i, \tau_j,\ e \in C([t_0, \infty), R),\ r(t) > 0,$

$r'(t) \geq 0,\ q_j(t) \geq 0$ $(j = 0,1,2, \dots, n), e(t) \leq 0$ dır. Aynı zamanda $\tau(t) \leq \tau_j(t)$ $(j = 0,1,2, \dots, n), \tau(t) \leq t$ ve $\lim_{t\to\infty} \tau(t) = \infty$ ve $\tau'(t) > 0$ olacak şekilde bir $\tau \in C'([t_0, \infty), R)$ fonksiyonu vardır. Biz (3.3.1) diferensiyel denkleminin her $T \geq t_0$ için $sup\{|x(t)|: t \geq T\} > 0$ şartını sağlayan x çözümlerini göz önüne alalım. Kabul edelim ki (3.3.1) diferensiyel denklemi böyle çözümlere sahip olsun. Alışılageldiği üzere (3.3.1) diferensiyel denkleminin bir çözümü $[t_0, \infty)$ aralığında keyfi çoklukta sıfıra sahipse salınımlıdır, aksi halde salınımsızdır denir. Eğer bütün çözümleri salınımlı ise (3.3.1) denkleminin salınımlı olduğunu söyleyebiliriz.

Verilen diferensiyel denklemin daha özel durumlarıyla ilgili sonuçlar aşağıda kısaca verilebilir. Örneğin, Li ve Cheng [53]

$$\left(r|x'|^{\alpha-1}x'\right)'(t) + q(t)|x(t)|^{\alpha-1}x(t) = e(t)$$

diferensiyel denklemi üzerine çalışmışlardır. Zheng vd. [51]

$$\left(r|x'|^{\alpha-1}x'\right)'(t) + q_0(t)|x(t)|^{\alpha-1}x(t) + \sum_{i=1}^{n} q_i(t)|x(t)|^{\beta_i-1}x(t) = e(t)$$

denklemini incelemişlerdir. Ayrıca Zheng vd. [71] , (3.3.1) denklemi üzerine çalışmışlar ve aşağıdaki salınım teoremini kurmuşlardır.

Teorem 3.3.1 ([71] teorem3.1). Kabul edelim ki

$$\int_{t_0}^{\infty} r^{-1}(t)dt = \infty \tag{3.3.2}$$

ve

$$\int_{t_0}^{\infty}\left[\rho(t)Q(t) - \frac{r(\tau(t))\left(\rho_+{'}(t)\right)^2}{4\rho(t)\tau'(t)}\right]dt = \infty \tag{3.3.3}$$

olacak şekilde $\rho \in C'([t_0,\infty),(0,\infty))$ fonksiyonu vardır öyle ki bu durumda (3.3.1) denklemi salınımlıdır, burada

$$Q(t) \coloneqq q_0(t) + \sum_{i=1}^{n} \beta_i[n(\beta_i - 1)]^{\frac{1-\beta_i}{\beta_i}} (q_i(t))^{\frac{1}{\beta_i}} |e(t)|^{\frac{\beta_i - 1}{\beta_i}}$$

ve

$$\rho'_+(t) \coloneqq max\{0, \rho'(t)\} \tag{3.3.4}$$

şeklindedir.

Bu kesimde (3.3.2) integralinin sonlu olduğu bazı durumlarda Teorem 3.3.1 i düzenleyip (3.3.1) denkleminin çözümlerinin salınımlılık davranışı ile ilgili sonuçlar verilecektir.

TEMEL SONUÇLAR

Burada fonksiyonel eşitsizliklerin belli bir yerden sonra sağlandığını kabul edelim yani yeterince büyük her t için sağlandığını kabul edelim. Temel sonuçları belirtmeden önce aşağıdaki lemmayı ifade edelim.

Lemma 3.3.1 (Bernoulli Eşitsizliği).

$y \geq -1$ ve $\gamma \geq 1$ için $(1 + y)^{\gamma} \geq 1 + \gamma y$

dir.

Teorem 3.3.2. Kabul edelim ki (3.3.2) durumu sağlansın ve

$$\sum_{i=1}^{n}(1-\beta_i)q_i(t)-e(t)\geq 0 \qquad (3.3.5)$$

olsun. Sabit $M>0$ sayısı için

$$\limsup_{t\to\infty}\int_{t_0}^{t}\left[\rho(s)\left(q_0(s)+\sum_{i=1}^{n}\beta_i q_i(s)+\frac{\sum_{i=1}^{n}(1-\beta_i)q_i(s)-e(s)}{M\tau(s)}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{(\rho_+{}'(s))^2 r(\tau(s))}{4\rho(s)\tau'(s)}\right]ds=\infty \qquad (3.3.6)$$

olacak şekilde $\rho\in C'([t_0,\infty),(0,\infty))$ fonksiyonu varsa, bu durumda (3.3.1) denklemi salınımlıdır. Burada $\rho_+{}'$, (3.3.4) deki gibi tanımlıdır.

İspat: Kabul edelim ki (3.3.1) denklemi salınımsız bir x çözümüne sahip olsun. Genelliği bozmaksızın x in belli bir yerden sonra pozitif bir çözüm olduğunu kabul edebiliriz. $t\geq t_1$ için $x(t)>0$ olacak şekilde $t_1\geq t_0$ değeri vardır. (3.3.1) denkleminden

$$(rx')'(t)=-q_0(t)x\big(\tau_0(t)\big)-\sum_{i=1}^{n}q_i(t)x^{\beta_i}(\tau_i(t))+e(t)\leq 0 \qquad (3.3.7)$$

elde edilir. Kesim 3.2. deki Teorem 3.2.1 in ispatına benzer şekilde

$$x(t)>0,\ x'(t)>0,\ x''(t)\leq 0,\ (rx')'(t)\leq 0 \qquad (3.3.8)$$

olduğu sonucuna ulaşılabilir. $t\geq t_1$için

$$u(t):=\rho(t)\frac{r(t)x'(t)}{x(\tau(t))} \qquad (3.3.9)$$

fonksiyonu tanımlayalım. Bu durumda $t\geq t_1$ için $u(t)>0$ dır. (3.3.7) ve (3.3.8) den

$x'(\tau(t))\geq\frac{r(t)x'(t)}{r(\tau(t))}$ elde edilir ve aynı zamanda (3.3.9) in türevinde kullanılırsa

$$u'(t)=\rho'(t)\frac{r(t)x'(t)}{x(\tau(t))}+\rho(t)\left[\frac{r(t)x'(t)}{x(\tau(t))}\right]'$$

$$u'(t)=\rho'(t)\frac{\rho(t)r(t)x'(t)}{\rho(t)x(\tau(t))}+\rho(t)\left[\frac{\big(r(t)x'(t)\big)'x\big(\tau(t)\big)-r(t)x'(t)x'\big(\tau(t)\big)\tau'(t)}{(x(\tau(t)))^2}\right]$$

$$=\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}u(t)-\rho(t)\frac{r(t)x'(t)}{(x(\tau(t)))^2}x'\big(\tau(t)\big)\tau'(t)+\rho(t)\frac{\big(r(t)x'(t)\big)'}{x(\tau(t))}$$

elde edilir. Ayrıca (3.3.1) denkleminden ve $x(t) > 0$ olduğundan, yani

$$(rx')'(t) = e(t) - q_0(t)x(\tau_0(t)) - \sum_{i=1}^{n} q_i(t)\left(x(\tau_i(t))\right)^{\beta_i}$$

ifadesinden

$$u'(t) = \frac{\rho'(t)}{\rho(t)}u(t) - \rho(t)\frac{r(t)x'(t)}{\left(x(\tau(t))\right)^2}x'(\tau(t))\tau'(t)$$

$$+\rho(t)\left(\frac{-q_0(t)x(\tau_0(t)) - \sum_{i=1}^{n} q_i(t)|x(\tau_i(t))|^{\beta_i - 1}x(\tau_i(t)) + e(t)}{x(\tau(t))}\right)$$

$$u'(t) = \frac{\rho'(t)}{\rho(t)}u(t) - \rho(t)\frac{\rho(t)r(t)x'(t)}{\rho(t)\left(x(\tau(t))\right)^2}x'(\tau(t))\tau'(t)$$

$$-\rho(t)\frac{q_0(t)x(\tau_0(t))}{x(\tau(t))} - \rho(t)\frac{\sum_{i=1}^{n} q_i(t)\left(x(\tau_i(t))\right)^{\beta_i} - e(t)}{x(\tau(t))}$$

$$u'(t) \leq \frac{\rho'_+(t)}{\rho(t)}u(t) - \frac{\tau'(t)u^2(t)}{\rho(t)r(\tau(t))} - \rho(t)\left[q_0(t) + \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i(t)\left(x(\tau_i(t))\right)^{\beta_i} - e(t)}{x(\tau(t))}\right] \qquad (3.3.10)$$

elde edilir. $y := x(\tau_i(t)) - 1$ olsun. Lemma 3.3.1 den

$$x^{\beta_i}(\tau_i(t)) \geq \beta_i x(\tau_i(t)) + 1 - \beta_i \qquad (3.3.11)$$

elde edilir. Böylece

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} q_i(t)\left(x(\tau_i(t))\right)^{\beta_i} - e(t)}{x(\tau(t))} \geq \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i(t)[\beta_i x(\tau_i(t)) + (1-\beta_i)] - e(t)}{x(\tau(t))}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{q_i(t)\left(\beta_i x(\tau_i(t))\right)}{x(\tau(t))} + \frac{(1-\beta_i)q_i(t) - e(t)}{x(\tau(t))}\right]$$

ve $\tau(t) \leq \tau_j(t)$ olduğundan

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} q_i(t)\left(x(\tau_i(t))\right)^{\beta_i} - e(t)}{x(\tau(t))} \geq \sum_{i=1}^{n}\beta_i q_i(t) + \frac{\sum_{i=1}^{n}(1-\beta_i)q_i(t) - e(t)}{x(\tau(t))} \qquad (3.3.12)$$

olduğu görülür. (3.3.8) den $x(t) \leq Mt$ olacak şekilde $M > 0$ sabiti vardır. Böylece (3.3.12) den

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} q_i(t)x^{\beta_i}(\tau_i(t)) - e(t)}{x(\tau(t))} \geq \sum_{i=1}^{n}\beta_i q_i(t) + \frac{\sum_{i=1}^{n}(1-\beta_i)q_i(t) - e(t)}{M\tau(t)} \qquad (3.3.13)$$

elde edilir. (3.3.10) eşitsizliğinde (3.3.13) yerine yazılırsa,

$$u'(t) \leq u(t)\frac{\rho'(t)}{\rho(t)} - \frac{\tau'(t)u^2(t)}{\rho(t)r(\tau(t))} - \rho(t)\left[q_0(t) + \sum_{i=1}^{n} q_i(t)\beta_i + \frac{\sum_{i=1}^{n}(1-\beta_i)q_i(t) - e(t)}{M\tau(t)}\right]$$

$$\leq \frac{r(\tau(t))(\rho_+'(t))^2}{4\rho(t)\tau'(t)} - \rho(t)\left[q_0(t) + \sum_{i=1}^{n} q_i(t)\beta_i + \frac{\sum_{i=1}^{n}(1-\beta_i)q_i(t) - e(t)}{M\tau(t)}\right]$$

elde edilir. Eşitsizliğin her iki tarafının t_1 den t ye kadar integralini alırsak

$$u(t) - u(t_1)$$

$$\leq \int_{t_1}^{t}\left[\frac{r(\tau(s))(\rho_+'(s))^2}{4\rho(s)\tau'(s)} - \rho(s)\left(q_0(s) + \sum_{i=1}^{n} q_i(s)\beta_i + \frac{\sum_{i=1}^{n}(1-\beta_i)q_i(s) - e(s)}{M\tau(s)}\right)\right]ds$$

şeklinde olup

$$\int_{t_1}^{t}\left[\rho(s)\left(q_0(s) + \sum_{i=1}^{n} q_i(s)\beta_i + \frac{\sum_{i=1}^{n}(1-\beta_i)q_i(s) - e(s)}{M\tau(s)}\right) - \frac{r(\tau(s))(\rho_+'(s))^2}{4\rho(s)\tau'(s)}\right]ds \leq u(t_1)$$

sonucu elde edilir. Bu ise, (3.3.6) ile çelişir, böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.3.2 esas alınarak, (3.3.5) şartından dolayı aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 3.3.1. Kabul edelim ki (3.3.2) ve (3.3.5) koşulları sağlansın.

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t}\left[\rho(s)(q_0(s) + \sum_{i=1}^{n}\beta_i q_i(s)) - \frac{(\rho_+'(s))^2 r(\tau(s))}{4\rho(s)\tau'(s)}\right]ds = \infty$$

olacak şekilde $\rho \in C'([t_0,\infty),(0,\infty))$ fonksiyonu varsa, bu durumda (3.3.1) denklemi salınımlıdır. Burada $\rho_+{}'$, (3.3.4) deki gibi tanımlıdır.

Sonuç 3.3.1 de $\rho(t) = t$ yi kullanırsak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.3.2. Kabul edelim ki (3.3.2) ve (3.3.5) koşulları sağlansın. Eğer

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t}\left[s(q_0(s) + \sum_{i=1}^{n}\beta_i q_i(s)) - \frac{r(\tau(s))}{4s\tau'(s)}\right]dt = \infty$$

şartı sağlanıyorsa, bu durumda (3.3.1) denklemi salınımlıdır.

Şimdi

$$\int_{t_0}^{\infty} r^{-1}(t)dt < \infty \tag{3.3.14}$$

durumu için (3.3.1) denkleminin bazı salınım kriterleri verelim.

Teorem 3.3.3. Kabul edelim ki (3.3.5) ve (3.3.14) şartları sağlansın ve

$\tau_j(t) \leq t(j = 0,1,2,\dots,n)$ olsun. Aynı zamanda (3.3.6) sağlanacak şekilde bir

$\rho \in C'([t_0,\infty),(0,\infty))$ fonksiyonunun mevcut olduğunu kabul edelim. Eğer her

$K > 0$ sabit için

$$\int_{t_1}^{t}\left[\delta(s)\left[q_0(s) + \sum_{i=1}^{n} q_i(s)\beta_i + \frac{\sum_{i=1}^{n}(1-\beta_i)q_i(s) - e(s)}{K}\right] - \frac{1}{4r(s)\delta(s)}\right]ds = \infty \tag{3.3.15}$$

sağlanıyorsa, bu durumda (3.3.1) denklemi salınımlıdır. Burada

$$\delta(t) := \int_t^{\infty} r^{-1}(s)ds \tag{3.3.16}$$

şeklindedir.

İspat: Kabul edelim ki (3.3.1) denklemi salınımsız bir x çözümüne sahip olsun. Yukarıda olduğu gibi $t \geq t_1$ için x(t)$>$ 0 olacak şekilde bir $t_1 \geq t_0$ değerinin var olduğunu varsayalım. (3.3.1) diferensiyel denkleminden (3.3.7) elde edilir. Bu durumda iki durum vardır, yani $x'(t) > 0$ veya

$$x'(t) < 0 \tag{3.3.17}$$

dır. İlk olarak kabul edelim ki $x'(t) > 0$ olsun. Buradan (3.3.8) i elde edilir. İspat

Teorem 3.3.2 nin devamı gibi olup (3.3.6) da bir çelişki elde edilir. Şimdi kabul edelim ki (3.3.17) sağlansın. $t \geq t_1$için

$$w(t) := \frac{r(t)x'(t)}{x(t)} \tag{3.3.18}$$

şeklinde bir w fonksiyonu tanımlayalım. Burada $w(t) < 0$ ($t \geq t_1$ için) ve

$$w'(t) = \frac{(rx')'(t)x(t) - r(t)x'(t)x'(t)}{x^2(t)}$$

veya

$$w'(t) = \frac{(rx')'(t)}{x(t)} - \frac{r(t)\left(x'(t)\right)^2 r(t)}{x^2(t)r(t)}$$

olup (3.3.1) den

$$w'(t) = \frac{e(t) - q_0(t)x(\tau_0(t)) - \sum_{i=1}^{n} q_i(t)\left(x(\tau_i(t))\right)^{\beta_i}}{x(t)} - \frac{w^2(t)}{r(t)} \tag{3.3.19}$$

elde edilir. Diğer taraftan (3.3.11) den ve $\tau_i(t) \leq t(i = 1,2, \dots, n)$ olduğundan

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} q_i(t)\left(x(\tau_i(t))\right)^{\beta_i} - e(t)}{x(t)} \geq \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i(t)[\beta_i x(\tau_i(t)) + (1-\beta_i)] - e(t)}{x(t)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{q_i(t)\left(\beta_i x(\tau_i(t))\right)}{x(t)} + \frac{(1-\beta_i)q_i(t) - e(t)}{x(t)}\right]$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} q_i(t)\left(x(\tau_i(t))\right)^{\beta_i} - e(t)}{x(t)} \geq \sum_{i=1}^{n} q_i(t)\beta_i + \frac{\sum_{i=1}^{n}(1-\beta_i)q_i(t) - e(t)}{x(t)} \tag{3.3.20}$$

elde edilir. (3.3.17) den $x(t) \leq K$ olacak şekilde bir $K > 0$ sabiti vardır. Böylece (3.3.20) den

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} q_i(t)(x(\tau_i(t)))^{\beta_i} - e(t)}{x(t)} \geq \sum_{i=1}^{n} q_i(t)\beta_i + \frac{\sum_{i=1}^{n}(1-\beta_i)q_i(t) - e(t)}{K} \tag{3.3.21}$$

bulunur. Şimdi (3.3.19), (3.3.21) ve $\tau_0(t) \leq t$ den

$$w'(t) \leq -q_0(t) - \sum_{i=1}^{n} q_i(t)\beta_i - \frac{\sum_{i=1}^{n}(1-\beta_i)q_i(t) - e(t)}{K} - \frac{w^2(t)}{r(t)} \tag{3.3.22}$$

elde edilir. $(rx')' < 0$ şartı kullanılarak bir $s \geq t$ için

$x'(s) \leq \frac{r(t)x'(t)}{r(s)}$ elde edilir. Her iki tarafın t den l ya integralini alırsak, ortalama değer teoreminden

$$x(I) - x(t) \leq r(t)x'(t) \int_t^l r^{-1}(s)ds$$

olduğu görülür. Eşitsizliğin her iki tarafının $l \to \infty$ için limitini alırsak

$-x(t) \leq r(t)x'(t)\delta(t)$ olur, buradan $\frac{r(t)x'(t)}{x(t)}\delta(t) \geq 1$ yani

$$w(t)\delta(t) \geq -1 \tag{3.3.23}$$

bulunur. (3.3.22) de $\delta(t)$ ile çarpılır ve t_1 den t ye integralini alırsak

$$\int_{t_1}^{t} w'(s)\delta(s)ds = \int_{t_1}^{t} \delta(s)\left[-q_0(s) - \sum_{i=1}^{n} q_i(s)\beta_i - \frac{\sum_{i=1}^{n}(1-\beta_i)q_i(s)-e(s)}{K} - \frac{w^2(s)}{r(s)}\right] ds$$

olmak üzere

$$w(t)\delta(t) - w(t_1)\delta(t_1) + \int_{t_1}^{t} \delta(s)\left[q_0(s) + \sum_{i=1}^{n} q_i(s)\beta_i + \frac{\sum_{i=1}^{n}(1-\beta_i)q_i(s)-e(s)}{K}\right]$$

$$+\int_{t_1}^{t} \frac{w(s)}{r(s)} ds + \int_{t_1}^{t} \frac{w^2(s)\delta(s)}{r(s)} ds \leq 0$$

elde edilir. Böylece (3.3.23) den

$$\int_{t_1}^{t} \left[\delta(s)\left(q_0(s) + \sum_{i=1}^{n} \beta_i q_i(s) + \frac{\sum_{i=1}^{n}(1-\beta_i)q_i(s)-e(s)}{K}\right) - \frac{1}{4r(s)\delta(s)}\right] ds \leq 1 + w(t_1)\delta(t_1)$$

bulunur. Bu durum (3.3.15) ile çelişir. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.3.4. Kabul edelim ki (3.3.5) ve (3.3.14) şartları sağlansın ve

$\tau_j(t) \geq t$ $(j = 0,1,2,\dots,n)$ olsun. Ayrıca kabul edelim ki (3.3.6) yi sağlayacak şekilde $\rho \in C'([t_0,\infty),(0,\infty))$ fonksiyonu mevcut olsun. Eğer tüm $K > 0$ sabiti için

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} \left[\delta(s)\left(q_0(s)\frac{\delta(\tau_0(s))}{\delta(s)} + \sum_{i=1}^{n} \beta_i q_i(s)\frac{\delta(\tau_i(s))}{\delta(s)}\right)\right.$$

$$\left. +\delta(s)\frac{\sum_{i=1}^{n}(1-\beta_i)q_i(s)-e(s)}{K} - \frac{1}{4r(s)\delta(s)}\right] ds = \infty \tag{3.3.24}$$

şartı sağlanıyorsa, bu durumda (3.3.1) salınımlıdır. Burada δ, (3.3.16) da olduğu gibi tanımlıdır.

İspat: Yine kabul edelim ki $t_1 \geq t_0$ olacak şekilde $t \geq t_1$ için x(t)> 0 bulunsun. (3.3.1) denkleminden (3.3.7) sağlanır. Bu durumda söz konusu olan iki durum vardır. Yani $x'(t) > 0$ veya (3.3.17) dır. Teorem 3.3.2 deki aynı yol izlenirse (3.3.6) ile bir çelişki elde edilir. Şimdi kabul edelim ki (3.3.17) sağlansın.(3.3.18) deki gibi bir w fonksiyonu tanımlı olsun. $t \geq t_1$ için $w(t) < 0$ ve (3.3.19) vardır. Diğer taraftan Teorem 3.3.2 ve Teorem 3.3.3 de oluşturulduğu gibi (3.3.11) ve (3.3.23) eşitsizlikleri sağlanır. (3.3.23) den, $\left(\frac{x}{\delta}\right)'(t) \geq 0$ dır. Son eşitsizlikten, $\tau_j(t) \geq t(j = 0,1,2,\dots,n)$ ve (3.3.11) den

$$\frac{x(\tau_0(t))}{x(t)} \geq \frac{\delta(\tau_0(t))}{\delta(t)} \tag{3.3.25}$$

ve

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} q_i(t)\left(x(\tau_i(t))\right)^{\beta_i} - e(t)}{x(t)} \geq \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i(t)[\beta_i x(\tau_i(t)) + (1-\beta_i)] - e(t)}{x(t)}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} q_i(t)\left(x(\tau_i(t))\right)^{\beta_i} - e(t)}{x(t)} \geq \sum_{i=1}^{n} \beta_i q_i(t) \frac{\delta(\tau_i(t))}{\delta(t)} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(1-\beta_i) q_i(t) - e(t)}{x(t)} \qquad (3.3.26)$$

eşitsizlikleri elde edilir. x'(t)<0 olduğundan, $x(t) \leq K$ olacak şekilde bir $K > 0$ sabiti vardır. Böylece (3.3.26) den

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} q_i(t)\left(x(\tau_i(t))\right)^{\beta_i} - e(t)}{x(t)} \geq \sum_{i=1}^{n} \beta_i q_i(t) \frac{\delta(\tau_i(t))}{\delta(t)} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(1-\beta_i) q_i(t) - e(t)}{K} \qquad (3.3.27)$$

elde edilir. (3.3.19),(3.3.25) ve (3.3.27) yi kullanırsak

$$w'(t) \leq -q_0(t) \frac{\delta(\tau_0(t))}{\delta(t)} - \sum_{i=1}^{n} \beta_i q_i(t) \frac{\delta(\tau_i(t))}{\delta(t)} - \frac{\sum_{i=1}^{n}(1-\beta_i) q_i(t) - e(t)}{K} - \frac{w^2(t)}{r(t)} \qquad (3.3.28)$$

elde edilir. İspatın geri kalan kısmı Teorem 3.3.3 in ispatına benzerdir, bu yüzden ihmal edilmiştir. Böylece ispat tamamlanır.

Örnek 3.3.1: $t \geq 1$ için

$$x''(t) + \frac{\gamma}{t^2} x\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{t^2}\left|x\left(\frac{t}{5}\right)\right| x\left(\frac{t}{5}\right) + \frac{1}{t^2} x^3\left(\frac{t}{40}\right) = -\frac{3}{t^2} sgn(x(t)) \qquad (3.3.29)$$

ikinci mertebeden diferensiyel denklemi göz önüne alalım. Burada $\gamma > 0$ sabittir.

$n = 2,\ r(t) = 1,\ q_0(t) = \frac{\gamma}{t^2},\ q_1(t) = q_2(t) = \frac{1}{t^2},\ \tau_0(t) = \frac{t}{2},\ \tau_1(t) = \frac{t}{5},$

$\tau(t) = \tau_2(t) = \frac{t}{40},\ e(t) = -\frac{3}{t^2},\ \beta_1 = 2,\ \beta_2 = 3$ olsun. Bu durumda

$\sum_{i=1}^{n}(1-\beta_i) q_i(s) - e(s) = 0$ ve $\gamma > 5$ olmak üzere

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} \left[s\left(q_0(s) + \sum_{i=1}^{n} \beta_i q_i(s)\right) - \frac{r(\tau(s))}{4s\tau'(s)}\right] ds = (\gamma - 5) \limsup_{t\to\infty} \int_{1}^{t} \frac{ds}{s} = \infty$$

elde edilir. Böylece Sonuç 3.3.2 den (3.3.29) denklemi herhangi $\gamma > 5$ için salınımlıdır. Burada Q, Teorem 3.3.1 deki gibi tanımlıdır. Bu durumda

$$Q(t) \coloneqq q_0(t) + \sum_{i=1}^{n} \beta_i [n(\beta_i - 1)]^{\frac{1-\beta_i}{\beta_i}} (q_i(t))^{\frac{1}{\beta_i}} |e(t)|^{\frac{\beta_i - 1}{\beta_i}}$$

$$= \frac{1}{t^2}\left[\gamma + \sum_{i=1}^{2} \beta_i \left(\frac{2(\beta_i - 1)}{3}\right)^{\frac{1-\beta_i}{\beta_i}}\right]$$

$$= \frac{1}{t^2}\left[\gamma + 2\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + 3\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}\right] < \frac{1}{t^2}[\gamma + 2.45 + 2.477]$$

$$= \frac{1}{t^2}[\gamma + 4.927]$$

olarak bulunur. (3.3.1) de son eşitsizlik ve $\rho(t) = t$ kullanılırsa, Teorem 3.3.1 den (5,5.073] aralığında (3.3.29) denkleminin salınımlılığı garanti edilemediği görülür. Bu nedenle Sonuç 3.3.2, Teorem 3.3.1 in iyileştirilmiş halidir.

BÖLÜM 4

İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER OLMAYAN NEUTRAL DELAY DİFERENSİYEL DENKLEMLERİ İÇİN SALINIMLILIK KRİTERİ

Bu bölümde Tongxing Li ve Yuriy V. Rogovchenko [91]tarafından incelenen

$$\left(r(t)|z'(t)|^{\alpha-1}z'(t)\right)' + q(t)f\left(x\big(\sigma(t)\big)\right) = 0 \tag{4.1.1}$$

şeklindeki ikinci mertebeden neutral gecikmeli diferensiyel denklemleri göz önüne alacağız, burada $t \in I \coloneqq [t_0, \infty)$, $t_0 > 0$, $z(t) \coloneqq x(t) + p(t)x(\tau(t))$ ve $\alpha > 0$ sabittir. Aşağıdaki şartların sağlandığını kabul edelim.

$(\boldsymbol{A_1})$ $r,\ p,\ q \in C(I, R)$, $r(t) > 0$, $p(t) \geq 0$, $q(t) \geq 0$ ve q(t) yeterince büyük t için

özdeş olarak sıfır olmayan bir fonksiyon,

$(\boldsymbol{A_2})$ $f \in C(R, R)$, $u \neq 0$ için $uf(u) > 0$ ve

$$\frac{f(u)}{|u|^{\alpha-1}u} \geq k \tag{4.1.2}$$

olacak şekilde pozitif bir k sabiti vardır,

$(\boldsymbol{A_3})$ $\sigma \in C(I, R), \sigma(t) \leq t$ ve $\lim_{t\to\infty} \sigma(t) = \infty$

$(\boldsymbol{A_4})$ $\tau \in C'(I, R), \tau(t) \leq t$ ve $\lim_{t\to\infty} \tau(t) = \infty$

$(\boldsymbol{A_5})$ $\tau'(t) \geq \tau_0 > 0$ ve $\tau o \sigma = \sigma o \tau$.

(4.1.1) denkleminin bir çözümü $T_x \geq t_0$ için $r|z'|^{\alpha-1}z' \in C'([T_x, \infty), R)$ özelliğine sahip bir $x \in C([T_x, \infty), R)$ fonksiyonudur ve x, $[T_x, \infty)$ aralığında (4.1) denklemini sağlar. Biz (4.1.1) denkleminin x(t) çözümleri olarak sadece her $T \geq T_x$ için $sup\{|x(t)|: t \geq T\} > 0$ özelliğini sağlayan çözümleri göz önüne alacağız. (4.1.1) denkleminin böyle bir çözüme sahip olduğunu kabul edelim. Daha önceden de belirtildiği gibi genel olarak (4.1.1) denkleminin çözümü $[T_x,\infty)$ aralığında keyfi çoklukta sıfıra sahipse salınımlıdır, aksi halde salınımsızdır denir. Eğer (4.1.1) denkleminin bütün çözümleri salınımlı ise denklem salınımlıdır denir.

Şimdi salınım kriterlerini vermeden önce, (4.1.1) ve özel durumları ile yakından ilgili bazı sonuçları kısaca verelim. Burada

$$f_+(t) = max\{0, f(t)\},\ Q(t) = min\{q(t), q(\tau(t))\} \tag{4.1.3}$$

gösterimi sıklıkla kullanılmaktadır. Grace ve Lalli [8]

$$[r(t)(x(t) + p(t)x(t-\tau))']' + q(t)f(x(t-\sigma)) = 0 \tag{4.1.4}$$

ikinci mertebeden lineer olmayan neutral diferensiyel denklemini

$$0 \le p(t) < 1\ ,\ \frac{f(u)}{u} \ge k > 0\ ,\ \forall u \neq 0,\ \int_{t_0}^{\infty} r^{-1}(t)dt = \infty \tag{4.1.5}$$

koşulları bağlı olarak incelemişlerdir. Eğer

$$\int_{t_0}^{\infty} \left[\rho(t)q(t)\big(1 - p(t-\sigma)\big) - \frac{(\rho^{'}(t))^2 r(t-\sigma)}{4k\rho(t)}\right] dt = \infty \tag{4.1.6}$$

olacak şekilde $\rho \in C'(I,(0,\infty))$ fonksiyonu varsa (4.1.4) denkleminin salınımlı olduğunu ispatlamışlardır. Hasanbulli ve Roqovchenko [21], $0 \le p(t) < 1$ olmak üzere

$$r(t)\Big(\big(x(t) + p(t)x(t-\tau)\big)'\Big)' + q(t)f\big(x(t), x(\sigma(t))\big) = 0 \tag{4.1.7}$$

lineer olmayan neutral diferensiyel denklemi için çeşitli salınım kriterleri elde etmişlerdir.

Ye ve Xu [99, Teorem 2.1] , (4.1.1) denklemi için aşağıdaki sonucu ispatlamışlardır.

Teorem 4.1. Kabul edelim ki $0 \le p(t) < 1, \sigma \in C^{'}(I,R)$ ve $\sigma^{'}(t) > 0$ olsun. Aynı zamanda kabul edelim ki $(A_1) - (A_4)$ şartları ve

$$\int_{t_0}^{\infty} r^{-\frac{1}{\alpha}}(t)dt = \infty \tag{4.1.8}$$

sağlansın. Eğer

$$\int_{t_0}^{\infty}\left[\rho(t)q(t)(1-p(\sigma(t)))^{\alpha}-\frac{1}{k(\alpha+1)^{(\alpha+1)}}\frac{(\rho'_{+}(t))^{\alpha+1}r(\sigma(t))}{\left(\rho(t)\sigma'(t)\right)^{\alpha}}\right]dt=\infty \qquad (4.1.9)$$

olacak şekilde $\rho \in C'(I,(0,\infty))$ fonksiyonu varsa, bu durumda (4.1.1) denklemi salınımlıdır.

$f(u) \coloneqq |u|^{\alpha-1}u$ özel durumunda, (4.1.1) denklemi

$$\left(r(t)\left|z'(t)\right|^{\alpha-1}z'(t)\right)'+q(t)\left|x\left(\sigma(t)\right)\right|^{\alpha-1}x\left(\sigma(t)\right)=0 \qquad (4.1.10)$$

yarı lineer neutral diferensiyel denkleme dönüşür. (4.1.10) denklemi için Sun vd. [17] ve Zhong vd. [71] çalışmışlardır ve aşağıdaki sonuçları elde etmişlerdir.

Teorem 4.2 ([98, Teorem3.4]). Kabul edelim ki $\alpha \geq 1$, $\sigma(t) \geq \tau(t)$ ve

$0 \leq p(t) \leq p_0 < \infty$ olsun. Aynı zamanda $(A_1),(A_3)-(A_5)$ şartları ve (4.1.8) şartı sağlansın. Eğer

$$\int_{t_0}^{\infty}\left[\frac{\rho(t)Q(t)}{2^{\alpha-1}}-\frac{1+\left(\frac{p_0{}^{\alpha}}{\tau_0}\right)}{(\alpha+1)^{(\alpha+1)}}\frac{(\rho'_{+}(t))^{\alpha+1}r(\tau(t))}{(\tau_0\rho(t))^{\alpha}}\right]dt=\infty \qquad (4.1.11)$$

olacak şekilde $\rho \in C'(I,(0,\infty))$ fonksiyonu varsa, bu durumda (4.1.10) denklemi salınımlıdır.

Teorem 4.3 ([71, Teorem3.1]). Kabul edelim ki $r'(t) \geq 0$,

$\tau(t)=t-\tau \leq t$, $0 \leq p(t)=p_0<\infty$, $p_0 \neq 1$, $\sigma \in c'(I,R)$ ve $\sigma'(t)>0$ olsun. Aynı zamanda $(A_1),(A_3)$ şartları ve (4.1.8) şartı sağlansın. Eğer

$$\int_{t_0}^{\infty}\left[\frac{(1-\varepsilon)^{\alpha}}{\left(1+p_0(1+\varepsilon)\right)^{\alpha}}\rho(t)q(t)-\frac{1}{(\alpha+1)^{(\alpha+1)}}\frac{(\rho'_{+}(t))^{\alpha+1}r(\sigma(t))}{\left(\rho(t)\sigma'(t)\right)^{\alpha}}\right]dt=\infty \qquad (4.1.12)$$

olacak şekilde $\varepsilon \in (0,1)$ ve $\rho \in C'(I,(0,\infty))$ fonksiyonu varsa, bu durumda (4.1.10) denklemi salınımlıdır.

Biz burada yukarıdaki üç teoremin daha genelleştirilmiş ve iyileştirilmiş hali olan Tongxing Li ve Yuriy V. Rogovchenko [91] nun çalışmasını inceleyeceğiz. Aşağıda, tüm fonksiyonel eşitsizliklerin yeterince büyük t ler için sağlandığı kabul edilir. Genelliği bozmaksızın (4.1.1) denkleminin pozitif çözümlerini ele alacağız.

TEMEL SONUÇLAR

Verilecek sonuçların daha kolay gösterimi için

$$R(l,t) := \left(\int_l^{\sigma(t)} r^{-\frac{1}{\alpha}}(s)ds\right)\left(\int_l^{t} r^{-\frac{1}{\alpha}}(s)ds\right)^{-1} \tag{4.1.13}$$

notasyonunu kullanacağız.

Teorem 4.4. $0 < \alpha \leq 1$ ve $0 \leq p(t) \leq p_0 < \infty$ olsun. Yine kabul edelim ki $(A_1) - (A_5)$ şartları ve (4.8) sağlansın. Eğer

$$\int_{t_{**}}^{\infty}\left[\rho(t)Q(t)R^{\alpha}(t_*,t) - \frac{(\rho'_+(t))^{\alpha+1}}{k(\alpha+1)^{(\alpha+1)}\rho^{\alpha}(t)}\left(r(t) + \frac{p_0{}^{\alpha} r(\tau(t))}{\tau_0{}^{\alpha+1}}\right)\right]dt = \infty \tag{4.1.14}$$

olacak şekilde yeterince büyük t_* ve bazı $t_{**} \geq t_* \geq t_0$ için $\rho \in C'(I,(0,\infty))$ fonksiyonu varsa, bu durumda (4.1.1) salınımlıdır.

İspat: x(t), (4.1.1) denkleminin salınımsız bir çözümü olsun ve belli bir yerden sonra pozitif olduğunu kabul edelim. Bu durumda her $t \geq t_1$ için $x(t) > 0$, $x(\tau(t)) > 0$ ve $x(\sigma(t)) > 0$ olacak şekilde $t_1 \geq t_0$ değeri vardır. (4.1.1) denkleminden her $t \geq t_1$ için

$$\left(r(t)\left|z'(t)\right|^{\alpha-1}z'(t)\right)' \leq -kq(t)x^{\alpha}(\sigma(t)) \leq 0 \tag{4.1.15}$$

dir. (4.1.8) koşulunu kullanırsak, her $t \geq t_2$ için $z'(t) > 0$ olacak şekilde $t_2 \geq t_1$değeri vardır. Böylece her $t \geq t_2$ için (4.1.15) eşitsizliğinden

$$(r(t)(z'(t))^{\alpha})' \leq -kq(t)x^{\alpha}(\sigma(t)) \leq 0 \tag{4.1.16}$$

eşitsizliğine indirgenir ve her $t \geq t_3$ için

$$p_0{}^{\alpha}\frac{\left(r(\tau(t))(z'(\tau(t)))^{\alpha}\right)'}{\tau'(t)} \leq -kp_0{}^{\alpha}q(\tau(t))x^{\alpha}(\sigma(\tau(t))) \tag{4.1.17}$$

olacak şekilde bir $t_3 \geq t_2$vardır. $\tau'(t) \geq \tau_0 > 0$ varsayımını kullanırsak her $t \geq t_3$ için

$$\frac{p_0{}^{\alpha}}{\tau_0}(r(\tau(t))(z'(\tau(t)))^{\alpha})' \leq -kp_0{}^{\alpha}q(\tau(t))x^{\alpha}(\sigma(\tau(t))) \tag{4.1.18}$$

elde edilir. (4.1.16) ve (4.1.18) eşitsizliklerini birleştirip, $\tau o \sigma = \sigma o \tau$ şartını kullanırsak ve Baculikova ve Dzurina [29, Lemma2] dan her $t \geq t_3$ için

$$\left(r(t)(z'(t)^{\alpha}\right)' + \frac{p_0{}^{\alpha}}{\tau_0}\left(r\big(\tau(t)\big)\left(z'\big(\tau(t)\big)\right)^{\alpha}\right)'$$

$$\leq -k\left[q(t)x^{\alpha}\big(\sigma(t)\big) + p_0{}^{\alpha}q\big(\tau(t)\big)x^{\alpha}(\tau\big(\sigma(t)\big))\right]$$

$$\leq -kmin\{q(t), q(\tau(t))\}\left[x^{\alpha}\big(\sigma(t)\big) + p_0{}^{\alpha}x^{\alpha}(\tau\big(\sigma(t)\big))\right]$$

$$\leq -kQ(t)z^{\alpha}(\sigma(t)) \tag{4.1.19}$$

elde edilir. Yeni bir

$$w(t) = \rho(t)\frac{r(t)\big(z'(t)\big)^{\alpha}}{z^{\alpha}(t)} \tag{4.1.20}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Burada her $t \geq t_3$ için $w(t) > 0$ dır. (4.1.20) nin türevini alırsak,

$$w'(t) = \rho'(t)\frac{r(t)\big(z'(t)\big)^{\alpha}}{z^{\alpha}(t)} + \rho(t)\frac{\left(r(t)\big(z'(t)\big)^{\alpha}\right)'}{z^{\alpha}(t)} - \alpha\rho(t)\frac{r(t)\big(z'(t)\big)^{\alpha+1}}{z^{\alpha+1}(t)}$$

$$\leq \rho(t)\frac{r(t)\big(z'(t)\big)^{\alpha}}{z^{\alpha}(t)} + \frac{\rho'_{+}(t)}{\rho(t)}w(t) - \frac{\alpha}{\big(\rho(t)r(t)\big)^{\frac{1}{\alpha}}}w^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(t) \tag{4.1.21}$$

bulunur. $u = w(t)$ olmak üzere

$$A = \frac{\rho'_{+}(t)}{\rho(t)}, B = \frac{\alpha}{\big(\rho(t)r(t)\big)^{\frac{1}{\alpha}}} \tag{4.1.22}$$

olsun. Aşağıdaki

$$Au - Bu^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \leq \frac{\alpha^{\alpha}}{(\alpha+1)^{(\alpha+1)}}\frac{A^{\alpha+1}}{B^{\alpha}}, \quad B > 0 \tag{4.1.23}$$

eşitsizlikte kullanırsa, (4.1.21) den

$$w'(t) \leq \rho(t)\frac{\left(r(t)\big(z'(t)\big)^{\alpha}\right)'}{z^{\alpha}(t)} + \frac{1}{(\alpha+1)^{(\alpha+1)}}\frac{\big(\rho'_{+}(t)\big)^{\alpha+1}r(t)}{\rho^{\alpha}(t)} \tag{4.1.24}$$

elde edilir. Diğer bir

$$v(t) = \rho(t)\frac{r(\tau(t))\big(z'(\tau(t))\big)^{\alpha}}{z^{\alpha}(\tau(t))} \tag{4.1.25}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Her $t \geq t_3$ için $v(t) > 0$ olduğu görülür. (4.1.25) in türevini alırsak

$$v'(t) = \rho'(t)\frac{r(\tau(t))\left(z'(\tau(t))\right)^{\alpha}}{z^{\alpha}(\tau(t))} + \rho(t)\frac{\left(r(\tau(t))\left(z'(\tau(t))\right)^{\alpha}\right)'}{z^{\alpha}(\tau(t))} - \alpha\rho(t)\frac{r(\tau(t))\left(z'(\tau(t))\right)^{\alpha}z'(\tau(t))\tau'(t)}{z^{\alpha+1}(\tau(t))}$$

$$\leq \rho(t)\frac{\left(r(\tau(t))\left(z'(\tau(t))\right)^{\alpha}\right)'}{z^{\alpha}(\tau(t))} + \frac{\rho'_+(t)}{\rho(t)}v(t) - \frac{\alpha\tau'(t)}{\left(\rho(t)r(t)\right)^{\frac{1}{\alpha}}}v^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(t) \qquad (4.1.26)$$

elde edilir. Burada $u \coloneqq v(t)$ olmak üzere

$$A \coloneqq \frac{\rho'_+(t)}{\rho(t)}, B \coloneqq \frac{\alpha\tau'(t)}{\left(\rho(t)r(t)\right)^{\frac{1}{\alpha}}} \qquad (4.1.27)$$

olsun. $z'(t) > 0$ gerçeği ile birlikte (4.1.23) ve (4.1.26) eşitsizlikleri birlikte kullanılırsa

$$v'(t) \leq \rho(t)\frac{\left(r(\tau(t))\left(z'(\tau(t))\right)^{\alpha}\right)'}{z^{\alpha}(t)} + \frac{1}{(\alpha+1)^{(\alpha+1)}}\frac{\left(\rho'_+(t)\right)^{\alpha+1}r(\tau(t))}{\left(\rho(t)\tau'(t)\right)^{\alpha}} \qquad (4.1.28)$$

bulunur. (4.1.24) ve (4.1.28) i birleştirir ve bunu (4.1.19) eşitsizliğinde kullanırsak

$$w'(t) + \frac{{p_0}^{\alpha}}{\tau_0}v'(t) \leq \rho(t)\frac{\left(r(t)\left(z'(t)\right)^{\alpha}\right)' + \frac{{p_0}^{\alpha}}{\tau_0}\left(r(\tau(t))\left(z'(\tau(t))\right)^{\alpha}\right)'}{z^{\alpha}(t)}$$

$$+ \frac{\left(\rho'_+(t)\right)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{(\alpha+1)}\rho^{\alpha}(t)}\left(r(t) + \frac{{p_0}^{\alpha}r(\tau(t))}{{\tau_0}^{\alpha+1}}\right)$$

$$\leq -k\rho(t)Q(t)\frac{z^{\alpha}(\sigma(t))}{z^{\alpha}(t)} + \frac{\left(\rho'_+(t)\right)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{(\alpha+1)}\rho^{\alpha}(t)}\left(r(t) + \frac{{p_0}^{\alpha}r(\tau(t))}{{\tau_0}^{\alpha+1}}\right) \qquad (4.1.29)$$

elde edilir. $\left(r(t)\left(z'(t)\right)^{\alpha}\right)' \leq 0$ olduğundan

$$z(t) \geq r^{\frac{1}{\alpha}}(t)z'(t)\int_{t_2}^{t} r^{\frac{-1}{\alpha}}(s)ds \qquad (4.1.30)$$

bulunur ve böylece

$$\left(\frac{z(t)}{\int_{t_2}^{t} r^{\frac{-1}{\alpha}}(s)ds}\right)' \leq 0 \qquad (4.1.31)$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\frac{z^{\alpha}(\sigma(t))}{z^{\alpha}(t)} \geq R^{\alpha}(t_2, t) \tag{4.1.32}$$

olur. (4.1.32) yi (4.1.29) da yerine koyarsak,

$$w'(t) + \frac{p_0{}^{\alpha}}{\tau_0} v'(t) \leq -k\rho(t)Q(t)R^{\alpha}(t_2, t)$$

$$+\frac{\left(\rho_+'(t)\right)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{(\alpha+1)}\rho^{\alpha}(t)}\left(r(t) + \frac{p_0{}^{\alpha} r(\tau(t))}{\tau_0{}^{\alpha+1}}\right) \tag{4.1.33}$$

elde edilir. (4.1.33) ün t_3 den t ye integralini alırsak,

$$\int_{t_3}^{t}\left[\rho(s)Q(s)R^{\alpha}(t_2, s) + \frac{\left(\rho_+'(s)\right)^{\alpha+1}}{k(\alpha+1)^{(\alpha+1)}\rho^{\alpha}(s)}\left(r(s) + \frac{p_0{}^{\alpha} r(\tau(s))}{\tau_0{}^{\alpha+1}}\right)\right] \leq \frac{w(t_3)}{k} + \frac{p_0{}^{\alpha}}{k\tau_0} v(t_3) \tag{4.1.34}$$

elde edilir. (4.1.34) ün $t \to \infty$ için limitini alırsak (4.1.14) şartı ile ilgili çelişki elde edilir. Böylece (4.1.1) denklemi salınımlıdır.

Teorem 4.4 ün ispatı ve Baculíková ve Džurina [29, Lemma 1] sonucunu kullanırsak $\alpha \geq 1$ olmak üzere (4.1.1) denklemi için aşağıdaki salınımlılık kriteri elde edilir.

Teorem 4.5. Kabul edelim ki $\alpha \geq 1$ ve $0 \leq p(t) \leq p_0 < \infty$ olsun. Aynı zamanda $(A_1) - (A_5)$ şartları ve (4.1.8) sağlansın. Eğer

$$\int_{t_{**}}^{\infty}\left[2^{1-\alpha}\rho(t)Q(t)R^{\alpha}(t_*, t) - \frac{(\rho_+'(t))^{\alpha+1}}{k(\alpha+1)^{(\alpha+1)}\rho^{\alpha}(t)}\left(r(t) + \frac{p_0{}^{\alpha} r(\tau(t))}{\tau_0{}^{\alpha+1}}\right)\right] dt = \infty \tag{4.1.35}$$

olacak şekilde yeterince büyük t_* ve bazı $t_{**} \geq t_* \geq t_0$ için $\rho \in C'(I, (0, \infty))$ fonksiyonu varsa, bu durumda (4.1.1) denklemi salınımlıdır.

Örnek 4.1. $t \geq 1$ için

$$\left(x(t) + \frac{1}{3}x(t-2)\right)'' + \frac{\gamma}{t^2}x(t) = 0 \tag{4.1.36}$$

ikinci mertebeden neutral diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Burada $\gamma > 0$ sabittir. $\alpha = 1,\ r(t) = 1,\ \rho(t) = p_0 = \frac{1}{3},\ \tau(t) = t - 2,\ q(t) = \frac{\gamma}{t^2},$

$\sigma(t) = t,\ \ f(u) = u$ ve $k = 1$ dır. $\rho(t) = t$ seçelim ve (4.14) ün sol tarafını $\psi(t_{**})$ ile gösterelim. Bu durumda $\gamma > \frac{1}{3}$ olmak üzere

$$\psi(t_{**}) = \left(\gamma - \tfrac{1}{3}\right) \int_{t_{**}}^{\infty} \frac{dt}{t} = \infty \tag{4.1.37}$$

dır. Böylece (4.1.36) herhangi $\gamma > \frac{1}{3}$ için Teorem 4.4 den salınımlıdır. Diğer taraftan Teorem 4.1 in uygulanması $\gamma > \frac{8}{3}$ için (4.1.36) denkleminin salınımlılığını verir, halbuki Teorem4.3 den bazı $\varepsilon \in (0,1)$ için eğer $\gamma > \frac{(4+\varepsilon)}{3(4-4\varepsilon)}$ ise, (4.1.36) denkleminin salınımlılığını verir. Bu nedenle Teorem 4.4 ün Teorem 4.1 ve 4.3 ün geliştirilmiş hali olduğunu görürüz.

Örnek 4.2. $t \geq 1$ için

$$\left(x(t) + \tfrac{1}{3}x\left(\tfrac{t}{3}\right)\right)'' + \frac{\gamma}{t^2}x(t) = 0 \tag{4.1.38}$$

ikinci mertebeden neutral diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Burada $\gamma > 0$ sabittir. Buna göre $\alpha = 1,\ \ r(t) = 1,\ \ \rho(t) = p_0 = \frac{1}{3},\ \ \tau(t) = \frac{t}{3},\ \ q(t) = \frac{\gamma}{t^2},$

$\sigma(t) = t,\ \ f(u) = u$ ve $k = 1$ dır. $\rho(t) = t$ ve ψ , Örnek 4.1 deki gibi tanımlı olsun. Bu durumda $\gamma > 1$ için

$$\psi(t_{**}) = (\gamma - 1) \int_{t_{**}}^{\infty} \frac{dt}{t} = \infty \tag{4.1.39}$$

olur. Böylece Teorem 4.4 den herhangi $\gamma > 1$ için (4.1.38) denklemi salınımlıdır. Halbuki Teorem 4.2 nin uygulanması $\gamma > \frac{3}{2}$ için (4.1.38) denkleminin salınımlılığını verir. Böylece Teorem 4.4 , Teorem 4.2 nin geliştirilmiş halidir.

KAYNAKLAR

[1] Fite, W. B. , ‘’Concerning zeros of the solutions of certain differential equations’’, **Trans. Amer. Math. Soc.** , **117**:341-352 (1918).

[2] Wintner, A., “A criterion of oscillatory stability”, ***Quart. Appl. Math.***, **7**: 115-117 (1949).

[3] Leighton, W., “The detection of oscillation of solutions of second-order differential equations”, ***Duke Math.*****17**: 57-62 (1950).

[4] Leighton, W. , A first course in ordinary differential equations (1981), **Wadsworth**.

[5] Baculíková B., Džurina J., ‘’Oscillation theorems for second order neutral differential equations,’’ **Computers and Mathematics with Applications**, **vol. 61**, no. 1, pp. 94-99, 2011.

[6] Grammatikopoulos, Ladas, M.K., Meımarıdou, A., Oscilation of second order neutral delay equation, **Rad. Math. 1** (1985), 267-274.

[7] Erbe, L.H. – Kong, Q.- Zhang, B.G., Oscillation Theory for Functional Differential Equations. **Marcel Dekker**, New York, 1994. Zbl 0821.34067.

[8] Grace, S.R., Lalli, B.S., Oscillation of nonlinear second order delay differential equations, **Rad. Math. 3** (1987), 77-84. Zbl 0642.34059.

[9] Xu, R., Xıa, Y., A note on the oscillation of second-order nonlinear neutral functional differential equations, **J. Contemp. Math. Sci. 3** (2008), 1441-1450. Zbl 1176.34078.

[10] Li, T., Han, Z., Zhang, Ch. Sun S., Oscillation theorems for second- order neutral functional differential equations, **J. Appl. Anal. (in pres)**.

[11] Bastinec,J. , Berezansky, L.,Diblik,J., Smarda, Z. ,On the critical case in oscillation for differential equations with a single delay and with several delays, **Abstr. Appl. Anal.** (2010) doi:10, 1155/2010/417869. Zbl pre05791620.

[12] Ladde, G.S. , Lakshmikantham, V. , Zhang, B.G. , Oscillation Theory of Differential Equations with Deviating Arguments, **Marcel Dekker,** New York, 1987,Zbl 0832.34071.

[13] Bainov, D.D., Mishev, D.P. , Oscillation Theory for Nonlinear Differential Equations with Delay, **Adam Hilger, Bristol, Philadelphia**, New York, 1991. Zbl 0747.34037.

[14] Agarwal, R. P., Grace, S. R. , Oscillation theorems for certain neutral functional differential equations, **Comput. Math. Appl. 38** (1999), 1-11. Zbl 0981.34059.

[15] Baculíková, B. , Oscillation criteria for second order nonlinear differential equations, **Arch. Math. (Brno) 42** (2006), 141-149. Zbl 1164.34499.

[16] Baculíková, B., Lackova, D., Oscillstion criteria for second-order retarded differential equations, **Stud. Univ. Zilina, Math. Ser. 20** (2006), 11-18. Zbl pre05375291.

[17] Džurina, J., Stavroulakıs, I.P. , Oscillation criteria for second order delay differential equations, **Appl. Math. Comput. 140** (2003), 445-453. Zbl 1043.34071.

[18] Kıguradze, I.T., Chaturıa, T.A. , Asymptotic Properties of Solutions of Nonautonomous Ordinary Differential Equations. **Kluwer Acad. Publ., Dordrecht**, **1993**. Zbl 0782.34002.

[19] Lın, X., Tang, X. H., Osciiation of solution of neutral differential equations with superlinear neutral term, **Appl. Math. Lett. 20** (2007), 1016-1022. Zbl 1152.34364.

[20] Lıu, L. H. , Baı, Z., New oscillation criteria for second order nonlinear neutral delay differential equations, **J. Comput. Appl. Math. 231** (2009), 657-663. Zbl 1175.34087.

[21] Hasanbulli, M., Rogovchenko, Y., Oscillation criteria for second order nonlinear neutral differential equations, **Appl. Math. Comp. 215** (2010), 4392-4399. Zbl pre05688917.

[22] Rogovchenko, Y., Tuncay, F., Oscillation criteria for second order nonlinear differential equations with damping, **Nonlinear Anal. 69** (2008), 208-221. Zbl 1147.34026.

[23] Xu, R., Meng, F., Some new oscillation criteria for second order quasi-linear neutral delay differential equations, **Appl. Math. Comput. 182** (2006), 797-803. Zbl 1115.34341.

[24] Xu, R.- Meng, F., Oscillation criteria for second order quasi- linear neutral delay differential equations, **Appl. Math. Comput. 192** (2007), 216-222. Zbl 1131.34319.

[25] Džurina, J., Oscillation Theorems for Second Order Advanced Neutral Differential Equations, **Tatra Mt. Math. Publ. 48** (2011), 61-71.

[26] Baculíková, B. , Oscillation theorems for third order neutral differential equations, **Tatra Mt. Math. Publ.** , **2011** (to apear).

[27] Li, T., Han, Z., Zhang, CH., Sun, S., Oscillation theorems for second-order neutral functional differential equations, **J. Appl. Anal.** (to appear).

[28] Xu, R., Xia, Y., A note on the oscillation of second-order nonlinear neutral functional differential equations, **J. Contemp. Math. Sci. 3** (2008), 1441-1450.

[29] Baculíková, B., Džurina, J., Oscillation theorems for second-order nonlinear neutral differential equations, **Computers and Mathematics with Applications 62** (2011), 4472-4478.

[30] Baculíková, B., Džurina, J., Oscillation theorems for second order neutral differential equations, **Comput. Math. Appl. 61** (2011) 94-99. Zbl 1207.34081

[31] Džurina, J., Hudakova, D., Oscillation of second order neutral delay differential equations, **Math. Bohem. 134** (2009) 31-38. Zbl pre05782627.

[32] Şahiner, Y., On oscillation of second order neutral type delay differential equations, **Appl. Math. Comput. 150** (2007) 697-706. Zbl 1045.34038.

[33] Dong, J.G., Oscillation behavior of second order nonlinear neutral differential equations with deviating arguments, **Comput. Math. Appl. 59** (2010) 3710-3717. Zbl pre05813878.

[34] Philos, Ch.G., On the existence of nonoscillatory solutions tending to zero at ∞ for differential equations with positive delay, **Arch. Math. 36** (1981) 167-178. Zbl 0463.34050.

[35] Li, T., Han, Z., Zhao, P., Sun, S., Oscillation of even-order neutral delay differential equations, **Adv. Difference Equ. 2010** (2010) 1-9. Zbl pre05726167.

[36] Han, Z., Li, T., Sun, S., Chen, W., On the oscillation of second-order neutral delay differential equations, **Adv. Difference Equ. 2010** (2010) 1-8. Zbl 1192.34074

[37] Han, Z., Li, T., Sun, S., Chen, W., Oscillation criteria for second-order nonlinear neutral delay equations, **Adv. Difference Equ. 2010** (2010) 1-23. Zbl pre05791587.

[38] Li, Q., Wang, R., Chen, F., Li, T., Oscillation of second-order nonlinear delay differential equations with nonpositive neutral coefficientts, **Adv. Difference Equ.** (2015) 2015:35.

[39] Hale, JK., Theory of Functional Differential Equations. **Springer**, New York (1977)

[40] Wong, JSW., Necessary and sufficients conditions for oscillation of second order neutral differential equations. **J. Math. Anal. Appl. 252**, 342-352 (2000).

[41]Agarwal, RP., Bohner, M., Li, T., Zhang, C., A new approach in the study of oscillatory behavior of even-order neutral delay equations. **Appl. Math. Comput. 225**, 787-794 (2013)

[42] Baculíková, B., Džurina, J., Oscillation of third-order neutral differential equations. **Math. Comput. Model. 52**, 215-226 (2010)

[43]Kamanew, IV., An integral criterion for oscillation of linear differential equations of second order. **Math. Zametki 23**, 249-251 (1978)

[44]Li, T., Rogovchenko, YuV., Asymptotic behavior of higher-order quasilinear neutral differential equations. **Abstr. Appl. Anal. 2014**, Article ID 594190 (2014). doi: 1155/2014/395368.

[45]Li, T., Rogovchenko, YuV., Oscillation theorems for second- order nonlinear neutral delay differential equations. **Abstr. Appl. Anal. 2014**, Article ID 594190 (2014). doi:10.1155/2014/594190.

[46]Li, T., Rogovchenko, YuV., Oscillatory behavior of second- order nonlinear neutral differential equations. **Abstr. Appl. Anal. 2014**, Article ID 143614 (2014). doi:10.1155/2014/143614.

[47]Li, T., Rogovchenko, YuV., Zhang, Oscillation results for second-order nonlinear neutral diferential equations. **Adv. Differ. Equ. 2013**, 336 (2013).

[48]Philos, ChG., Oscillation theorems for linear differential equations of second order. **Arch. Math. 53**, 482-492 (1989).

[49]Qin, H., Shang, N., Lu, Y., A note on oscillation criteria of second order nonlinear neutral delay differential equations. **Comput. Math. Appl. 56**, 2987-2992 (2008).

[50]Yang, Q., Yang, L., Zhu, S., İnterval criteria for oscillation of second-order nonlinear neutral differential equations. **Comput. Math. Appl. 46**, 903-918 (2003).

[51] Zheng, Z. W., Wang, X., Han, H. M., Oscillation criteria for forced second order differential equations with mixed nonlinearities, **Appl. Math. Lett. 22** (2009) 1096-1101.

[52] Wong, J.S.W., Oscillation criteria for a second-order linear differential equation, J. **Math. Anal. Appl. 231** (1999) 235-240.

[53] Li, W. T., Cheng, S.S., An oscillation criterion for nonhomogeneous half- linear defferential equations, **Appl. Math. Lett. 15** (2002) 259-263.

[54] Zheng, Z., Meng, F., Oscillation criteria for forced second order Quasi-linear differential equations, **Math. Comput. Modelling 45** (2007) 215-220.

[55] Çakmak, D., Tiryaki, A., Oscillation criteria for certain forced second- order nonlinear differential equations, **Appl. Math. Lett. 17** (2004) 275-279.

[56] Wang, Q.R., Oscillation and asymptotics for second- order half- linear differential equations, **Appl. Math. Comput. 122** (2001) 253-266.

[57] Wang, Q.R., Yang Q.G., İnterval criteria for oscillation of second- order half-linear differential equations, **J. Math. Anal. Appl. 291** (2004) 224-236.

[58] Wang, Q.R., İnterval criteria for oscillation of certain second order nonlinear differential equations, **Dyn. Contin. Discrete İmpuls. Syst. 12** (2005) 769-781.

[59] Wang, Q.R., İnterval criteria for oscillation of second order nonlinear differential equations, **J. Comput. Appl. Math. 205** (2007) 231-238.

[60] Shen, C.X., Zhang, H.K., İnterval criteria for oscillation of forced second- order half-linear differential equations, **Chinese Quart. J. Math. 20** (2005) 411-417.

[61] Albert, A., A half-linear second order differential equation, in: **Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai: Qualitative Theory of Differential Equations,** Szeged 1979, pp. 153-180.

[62] Jaros, J., Kusano, T., A Picone type identity for second order half-linear differential equations, **Acta Math. Univ. Comenian. 68** (1) (1999) 137-151.

[63] Jaros, J., Kusano, T., Yoshida, N., Generalized Picone's Formula and forced oscillation for in quasilinear differential equations of the second order, **Arch. Math. (Bero) 38** (2002) 53-59.

[64] Winter, A criterion of oscillatory stability, **Quart. Appl. Math. 7** (1949) 115-117.

[65] Leighton, W., Comparison theorems for linear differential equations of second order, **Proc. Amer. Math. Soc. 13** (1962) 603-610.

[66] Kong, Q., İnterval criteria for oscillation of second-order linear differential equation, **J.Math. Anal. Appl. 258** (2001) 244-257.

[67] Li, H.J., Yeh, C.C., Sturm comparison theorem for half-linear second order differential equations, **Proc. Roy. Edinburg A125** (1995) 1193-1240.

[68] Hong, L., Lian, W.C., Yeh, C.C., The oscillation of half-linear differential equations with an oscillatory coefficient, **Math. Comput. Modelling 24** (1996) 77-86.

[69] Manojlovic, J.V., Oscillation criteria for second-order half-linear differential equations, **Math. Comput. Modelling 30** (1999) 109-119.

[70] Hardy, G.H., Littlewood, J.E., Polya, G., İnequalities, 2nd edition, **Cambridge University Press,** Cambridge, 1988.

[71] Zhong, J., Ouyang, Z., Zou, S., An oscillation theorem for a class of second-order forced neutral delay differential equations with mixed nonlinearities, **Appl. Math. Lett. 24** (2011) 1449-1454.

[72] Agarwal, R.P., Shang, S.L., Yeh, C.C., Oscillation criteria for second-order retarded differential equation, **Math. Comput. Modelling 26** (1997) 1-11.

[73] Chern, J.L., Lian, W.C., Yeh, C.C., Oscillation criteria for second-order half-linear differential equations with functional arguments, **Publ. Math. Debrecen 48** (1996) 209-216.

[74] Kusano, T., Naito, Y., Oscillation and nonoscillation criteria for second-order quasilinear differential equations, **Acta Math. Hungar**. **76** (1997) 81-99.

[75] Kusano, T., Naito, Y., Ogata, A., Strong oscillationand nonoscillation of quasilinear differential equations of second order, **Differential Equations Dynam. Systems 2** (1994) 1-10.

[76] Kusano, T., Naito, Y., Nonoscillation theorems for a class of quasilinear differential equations of second order, **J. Math. Anal. Appl. 189** (1995) 115-127.

[77] Çakmak, D., Tiryaki, A., Oscillation criteria for certain forced second- order nonlinear differential equations, **Appl. Math. Lett. 17** (2004) 275-279.

[78] Yang, X., Oscillation theorems for second order linear differential equations with damping, **Appl. Math. Comput. 136** (2003) 549-557.

[79] Wang, Q.X., İnterval criteria for oscillation of second- order nonlinear differential equations, **J. Math. Anal. Appl. 205** (2007) 231- 238.

[80] Li, W.T., Cheng, S.S., An oscillation criteria for nonhomogeneous half- linear differential equations, **Appl. Math. Lett. 15** (2002) 259-263.

[81] Gyori, I., Ladas, G., Oscillation Theory of Delay Differential Equations with Applications, **Clarendon Press, Oxford 1991**.

[82] Wang, Y., Li, T., Thandapani, E., Forced oscillation of second-order differential equations with mixed nonlinearities, **J. Math. Anal Appl. 2014**, 2014:520.

[83]Agarwal, R.P., Anderson, D.R., Zafer, A., İnterval oscillation criteria for second-order forced delay dynamic equations with mixed nonlinearities. **Comput. Math. Appl. 59**, 977-993 (2010).

[84] Agarwal, R.P., Grace, S.R., O' Regan, D., Oscillation Theory for Difference and Functional Differential Equations. **Kluwer Academic, Dordrecht** (2000).

[85] Agarwal, R.P., Grace, S.R., O' Regan, D., Oscillation Theory for Second Order Linear, Half-Linear, Superlinear and Sublinear Dynamic Equations. **Kluwer Academic, Dordrecht (2002).**

[86] Agarwal, R.P., Grace, S.R., O' Regan, D., Oscillation criteria for certain n th order differential equations with deviating arguments. **J. Math. Anal. Appl. 262**, 601-622 (2001).

[87] Agarwal, R.P., Grace, S.R., O' Regan, D., The oscillation of certain higher-order functional differential equations. **Math. Comput. Model. 37**, 705-728 (2003).

[88] Agarwal, R.P., Zafer, A., Oscillation criteria for second-order forced dynamic equations with mixed nonlinearities. **Adv. Differ. Equ. 2009**, 938706 (2009).

[89] Hassan, T.S., Erbe, L., Peterson, A., Forced oscillation of second order differential equations with mixed nonlinearities, **Acta Math. Scl. 31**, 613-626 (2011).

[90] Sun, Y.G., Wong, J.S.W., Oscillation criteria for second order forced ordinary differential equations with mixed nonlinearities. **J.Math. Anal. Appl. 334**, 549-560 (2007).

[91] Li, T., Rogovchenko, Y. V., Oscillation theorems for second-order nonlinear neutral delay differential equations, **Hindawi Publ. Corp. Vol: 2014** Article ID 594190

[92] Baculíková, B., Džurina, J., ‘’ Oscillation theorems for higher order neutral differential equations,’’ **Applied Mathematics and Computation**, **vol.219**, no. 8, pp. 3769-3778, 2012.

[93] Baculíková, B., Džurina, J., Li, T., ‘’ Oscillation results for even-order quasilinear neutral functional differential equations,’’ **Electronic Journal of Differential Equations**, **vol. 2011**, pp. 1-9, 2011.

[94] Li, T., Agarwal, R.P., Bohner, M., ‘’ Some oscillation results for second-order neutral differential equations,’’ **The Journal of the İndian Mathematical Society**, **vol. 79**, no. 1-4, pp. 97-106, 2012.

[95] Li, T., Agarwal, R.P., Bohner, M., ‘’ Some oscillation results for second-order neutral dynamic equations,’’ **Hacettepe Journal of Mathematics and Statistic**, **Vol.41**, no. 5 , pp. 715-721, 2012.

[96] Li, T., Han, Z., Zhao, P., Sun, S., ‘’ Oscillation of even-order nonlinear neutral delay differential equations,’’ **Advances in Difference Equations**, **vol. 2010**, pp. 1-9, 2010.

[97] Li, T., Rogovchenko, Yu. V., Zhang, C., ‘’Oscillation of second-order neutral differential equations,’’ **Funkcialaj Ekvacioj**, **vol. 56**, no. 1, pp. 111-120, 2013.

[98] Sun, S., Li, T., Han, Z., Li, H., ‘’ Oscillation theorems for second-order quasilinear neutral functional differential equations,’’ **Abstract and Applied Analysis**, **vol. 2012**, Article ID 819342, 17 pages, 2012.

[99] Ye L., Xu, Z.,'' Oscillation criteria for second order quasilinear neutral delay differential equations,'' **Applied Mathematics and Computation. vol. 207**, no. 2, pp. 388-396, 2009.

[100] Zhong, C., Agarwal, R.P., Bohner, M., Li, T., '' New oscillation results for second-order neutral delay dynamic equations,'' **Advances in Difference Equations**, **vol. 2012**, Article 227, 2012.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı, Soyadı: Neslihan HALICI
Uyruğu: Türkiye (TC)
Doğum Tarihi ve Yeri: 1 Ağustos 1988
Medeni Durumu: Evli
Tel: 05063949258
email: yildiz_88neslihan@hotmail.com
Yazışma Adresi: Aşağı nohutlu mahallesi ülkü 1 sokak güney yamaç evleri kat:3 no:5 Merkez/Yozgat

EĞİTİM

Derece	**Kurum**	**Mezuniyet Tarihi**
Yüksek Lisans	EÜ Fen Bilimler Enstitüsü	-----
Lisans	EÜ Fen Fakültesi Matematik	2011
Lise	75. Yıl Cumhuriyet Lisesi	2005

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görev**
2013- Halen	MEB	Öğretmen

YABANCI DİL

İngilizce