

GRAF POLİNOMLARI ÜZERİNE

Nesrin MANAV

**Yüksek Lisans Tezi
Matematik Ana Bilim Dalı
Doç. Dr. Tamer UĞUR
2013
Her hakkı saklıdır**

**ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GRAF POLİNOMLARI ÜZERİNE

Nesrin MANAV

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

**ERZURUM
2013**

Her hakkı saklıdır



T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



TEZ ONAY FORMU

GRAF POLİNOMLARI ÜZERİNE

Doç. Dr. Tamer UĞUR danışmanlığında, Nesrin MANAV tarafından hazırlanan bu çalışma 15/07/2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Ana Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak oybirliği ile kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Abdullah KOPUZLU

İmza :

Üye : Doç. Dr. Tamer UĞUR

İmza :

Üye : Prof. Dr. M. Emin ÖZDEMİR

İmza :

Yukarıdaki sonucu onaylıyorum.

Prof. Dr. İhsan EFEOĞLU
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GRAF POLİNOMLARI ÜZERİNE

Nesrin MANAV

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Tamer UĞUR

Bu tezde, düğüm ve halkaların polinomlarından ilk olarak parantez polinomu tanıtıldı ve burulma sayısı ile normalize edildi. Normalize edilmiş parantez polinomu ile Jones polinomu arasındaki ilişki verildi. Sonra alterne düğümlerle ilgili bazı tahminler parantez polinomu yardımıyla ispatlandı. Jones polinomu ve onunla ilişkili cebir bu parantez modeli yardımıyla inşa edildi. Bu amaçla Kare parantez polinomu bir düzlemsel graf için Dikromatik polinoma özelleştirildi ve istatistiksel fizikteki Potts modeli ile Dikromatik polinomun ilişkisi verildi. Aynı zamanda Kromatik, Dikromatik ve Tutte polinomları arasındaki ilişkiye ve bu ilişkinin sonucuna değinildi.

2013, 58 sayfa

Anahtar Kelimeler: Parantez Polinomu, Jones Polinomu, Genelleştirilmiş Polinom, Alterne Düğümler, Klasik Düğüm İnvaryantları, Graf, Kromatik Polinom, Dikromatik Polinom, Tutte Polinomu.

ABSTRACT

MS Thesis

ON GRAPH POLYNOMIALS

Nesrin MANAV

Ataturk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Tamer UGUR

In this thesis, at first the brackets polynomial is one of the polynomial invariants of knots and links is introduced and it is normalized by its twist number. The relations between the normalized bracket polynomial and the Jones polynomial are given. Next, some conjectures about alternating knots are proved by using the bracket polynomial. The Jones polynomial and its associated algebra are constructed by this bracket model. For this purpose, the square bracket is specialized the Dichromatic polynomial for a planar graph, and relations between Dichromatic polynomial and Potts model in statistical physics is expressed by using bracket model. At the same time, the relations between Chromatic, Dichromatic and Tutte polynomials and the result of relation is mentioned.

2013, 58 pages

Keywords: Bracket polynomial, Jones polynomial, Generalized polynomial, Alternating knots, Classical knot invariants, Graph, Chromatic polynomial, Dichromatic polynomial, Tutte polynomial.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu alışma, Atatürk Üniversitesi Fen Fakóltesi Matematik Bölümü'nde hazırlanmıştır.

Bu tez konusunu çalışmamı sağlayan, çalışmalarımda ve tezin hazırlanışında yardımlarını esirgemeyen çok değerli hocam Sayın Doç. Dr. Tamer UĞUR'a en içten dileklerle sonsuz teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Tezin hazırlanması sürecinde yardımını esirgemeyen bölümümüzün öğretim üyelerine ve çalışmalarım esnasında kendilerinden görmüş olduğum destek ve sonsuz güvenden dolayı aileme ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Yüksek lisans eğitimim boyunca “Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı” ile tarafıma vermiş olduğu maddi destekten dolayı TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

Nesrin MANAV

Temmuz, 2013

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ.....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	5
2.1. Genel Kavramlar	5
2.2. Reidemeister Hareketleri	9
2.3. Graflar	10
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	16
3.1. Sayısal Düğüm İnvaryantları.....	16
3.2. Bazı Polinom İnvaryantları	19
3.2.1. Parantez polinomu	19
3.3. Normalize Edilmiş Parantez Polinomu	20
3.4. Grafların Polinomları	23
4. ARAŞTIRMA BULGULARI.....	31
4.1. Potts Modeli	31
4.2. Kromatik, Dikromatik ve Tutte Polinomu	35
4.3. W- Aksiyomları (Potts Parantezi)	37
5. TARTIŞMA ve SONUÇ.....	55
KAYNAKLAR	56
EKLER.....	58
EK 1.....	58
ÖZGEÇMİŞ	59

SİMGELER DİZİNİ

D	K düğümünün regüler diyagramı
G	Bir düğümün grafi
G^*	Dual graf
$c(K)$	K düğümünün geçit sayısı
$Lk(\alpha, \beta)$	α ve β bileşenli düğümün halkalanma sayısı
R_i	$i = I, II, III$ için Reidemeister hareketleri
$w(K)$	K düğümünün burulma sayısı
f_K	Normalize edilmiş parantez polinomu
$V_K(t)$	K düğümünün Jones polinomu
S^1	1 – boyutlu küre
S^3	$\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ uzayı
K_i	$i \in \mathbb{N}$ için K düğümünün sınıfı
p	İzdüşüm fonksiyonu
β_i	i – inci Betti sayısı
E	Grafın kenarlar kümesi
V	Grafın köşeler kümesi
$Z_G(q, v)$	Dikromatik polinom
N	Grafın köşe sayısı
P	Parçacık fonksiyonu
$\delta(a, b)$	Kroniker delta fonksiyonu
$K(G)$	Kromatik polinom
$T_G(x, y)$	Tutte polinomu

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Denk düğümler	2
Şekil 2.2. Düğüm örneği	5
Şekil 2.3. Aşık düğüm	6
Şekil 2.4. Vahşi düğüm örneği.....	7
Şekil 2.5. Geçit işaretleri.....	8
Şekil 2.7. Basit graf, multigraf ve yalancı graf.....	11
Şekil 2.8. İşaretli $G(6,8)$ grafi	11
Şekil 3.1. Sekiz şekilli düğüm (4_1).....	16
Şekil 3.2. Bileşen sayısı dört olan halka	17
Şekil 3.3. $Lk(\text{Hopf halkası})=-1$, $Lk(\text{Whitehead halkası})=0$, $Lk(8_1^2)=+4$ olan düğümlerin halkalanma sayıları	18
Şekil 3.4. Halkalanma sayılarının 5_2 ve 6_1 düğümlerinde hesaplanması	18
Şekil 3.5. Skein Diyagramları.....	21
Şekil 3.6. Düzlemsel graflarda köşe boyama.....	26
Şekil 3.7. Düzlemsel graflardan alterne düğüm elde edilişi	26
Şekil 3.8. Aşık düğümün aşık olmayan projeksiyonu	27
Şekil 3.9. Tek köşeli G grafi için ispat	28
Şekil 3.10. Dual graflar.....	28
Şekil 3.11. $L(G)$ trefoil düğüm.....	30
Şekil 4.1. Parçacık durumunun Potts modeli	31
Şekil 4.2. Bağlantılı köşelerin gölgelendirilmesi	37
Şekil 4.3. Kare kafesin düğüme dönüşümü	38
Şekil 4.4. $(4,4)$ Grafının düğüme dönüşümü.....	40
Şekil 4.5. İçten ve dıştan hareketli kenar örnekleri.....	42
Şekil 4.6. Graflar üzerinde Reidemeister hareketleri.....	44

1. GİRİŞ

Düğüm teori 19. yy ortalarında doğmuştur. Carl Friedrich Gauss (1777-1855) ve onun öğrencisi Johann Listing (1808-1882) düğüm teorisi hakkındaki ilk çalışmalara katkıda bulunmuştur. Listing'e ait olan "Vorstudien zur Topologie" ("topoloji" teriminin kullanıldığı ilk çalışmadır), düğümlerin sınıflandırılması problemi hakkında tartışmalar içeriyordu.

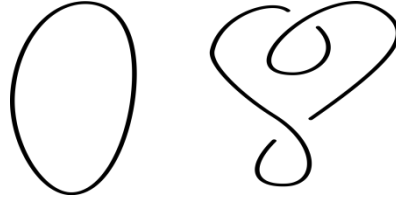
19. yüzyıla gelene kadar bilim adamları uzayın tümüne yayılmış olan eter dedikleri görünmez maddelerin var olduğuna inanıyordu. İskoç fizikçi William Thompson (1824-1907), aynı zamanda Lord Kelvin olarak bilinir, eterin içinde sadece girdap gibi düğümlenmiş atomların olduğunu düşünmüştü (tıpkı bir defada havaya üflenen duman halkalarında olduğu gibi). Her bir farklı düğüm bu düşünceye göre farklı bir elemana karşılık geliyordu.

Thompson'nun varsayımı sonrasında James Clerk Maxwell (1831-1879) ve Peter Guthrie Tait (1831-1901) düğümün özellikleri hakkında çalıştılar ve özellikle Tait farklı düğümleri sınıflandırma konusundaki çalışmaları geliştirdi. Sonunda, düğümlerin listelendirilmesinin elemanların listesiyle ilişkili olmadığı anlaşıldı. Michelson-Morley deneyleri (1887) ile eterin olmadığı gösterildi ve böylece bu atom modeli son nefesini vermiş oldu. Fakat sonra düğümleri sınıflandırmada, sadece matematiksel perspektiften bakıldığında, çok fazla ilerlenmiş olduğu görüldü ve böylece çalışmalar matematik yönünde devam etti.

20. yüzyılın başlarında topoloji çalışmaları gelişmeye devam ederken, matematikçiler düğüm teorisini şekillendirilmeyi sürdürdü. Bundan sonra matematikteki gelişmelerin artması ve bunların düğüm teoriye uygulanmasıyla düğüm teori topolojinin en aktif alanlarından biri haline geldi (Adams 2008).

Son yıllarda düğüm teorisi biyoloji, kimya ve fizik gibi bilim dallarında birçok uygulama sahası bulmuştur. Uygulamaların çoğu topolojiden çok düğümlerin ve halkaların geometrisi ile ilgilidir. Örneğin biyoloji dalındaki çalışmalarda DNA moleküllerinin yapısının bazı düğüm tiplerinin şeklini aldığı görülmüştür (Murasugi 1996).

Düğüm teorideki en temel sorulardan biri iki düğümün hangi koşullarda denk olduğu sorusudur. Çizilen iki düğüm şeklinin birbirine denk olduğunun belirlenip belirlenemeyeceği, düğümler oluşturulduğunda birinin diğerine benzetilip benzetilemeyeceği sorusuna dönüşmüştür (Adams 2008).



Şekil 2.1. Denk düğümler

İki düğümün benzerliği sorusuna cevap ararken bulunan ilk düğüm sabiti örneği J. W. Alexander tarafından çalışılan Alexander polinomudur. Bu polinom düğümün topolojik özellikleri ile yakından bağlantılı olduğunu söyler. Alexander polinomunu hesaplamak için Seifert matrisi gibi metodlar kullanılmaktadır (Gordon ve Luecke 1989).

Düğümlerin denk olup olmadığı ile ilgili ispat invaryant denilen düğüm özellikleri kullanılarak yapılır. İnvaryantlar düğümün şekline değil tipine bağlıdır. Farklı invaryantlara sahip iki düğüm alındığında düğümlerin birbirinden farklı olduğu anlaşılır (Adams 2008).

Graf Teorisi 1736 yılında Euler' in Königsberg Köprü problemi çözmesi ile ortaya atıldı. Sonraki yüzyıl boyunca üzerinde herhangi bir çalışma yapılmayan teori, 1847 yılında G. R. Kirchhoff' un (1824 – 1887) çalışmaları ile yeniden gündeme geldi.

Bundan on yıl kadar sonra A. Cayley (1821 – 1895) çalışmaları sırasında ağaç kavramını keşfetmesi ile graf teoride önemli bir ilerleme gerçekleşti.

Dört renk varsayımı ilk kez A. F. Möbius (1790 – 1868) tarafından 1840 yılında verdiği bir ders sırasında ortaya atılmıştır. Bir harita üzerinde, birbirlerine sınır komşusu olan ülkelerin farklı renklerle boyanarak birbirlerinden ayrılması için dört rengin kullanımının yeterli olduğunu gösteren bu varsayımın, 1879 yılında Cayley' in çalışması sonucu çok bilinen bir problem durumuna gelmesi üzerine bu alanda çok fazla çalışmanın yapılması graf teorisinin gelişmesini sağladı.

Günümüzde de halen yukarıda sözü edilen çözülmüş ya da çözülmemiş problemlerin ifadesi ve çözümüne dair pek çok çalışma yapılmaktadır. Son on yıllık periyotta ise yine graf teorisini kullanarak birçok alanda çalışmalar yapılmaya devam etmekte ve halen teorik matematiksel kavramlar (özellikle cebirsel konular) üzerinde, farklı uygulama alanlarına uyarlamalar yapılmaktadır (Saran 2008).

Bu tezde düğüm invariantlarından bazıları araştırıldı ve açıklanmaya çalışıldı. Jones polinomunun diğer bazı polinomlara genellemeleri üzerinde duruldu. Ayrıca düğüm teorisinin Graf teorisi ve istatistiksel fizik ile ilişkisine bakıldı. Graf polinomlarının invariantları ile düğüm polinomlarının invariantları arasındaki ilişkiler incelendi. Bu sayede düğüm teorisinden graf teorisine ve graf teorisinden düğüm teorisine muhtemel geçiş yolları araştırıldı.

Kuramsal Temeller bölümünde, düğüm ve graf tanıtılarak bunlarla ilgili bazı temel kavramlar ifade edildi. Düğümlerin ve halkaların bazı sayısal invariantları özetlendi.

Materyal ve Yöntemler bölümünde, düğüm ve halka polinomlarının diyagramatik bir yaklaşımı verildi. Bu yolla genel parantez polinomu ve onun özel hali olan kare parantez polinomu açıklandı. Kare parantez polinomu normalize edildi ve onun Jones polinomu ile ilişkisi verildi.

Araştırma Bulguları bölümünde, parantez polinomu tekniği ile ilgili bazı uygulamalar verildi ve alterne düğümlerin ve halkaların bazı özellikleri incelendi. Parantez polinomu tekniği graflarda ve istatistiksel fizikte incelendi. Ayrıca Tutte polinomundan bahsedildi. Bu teknikler yardımıyla graf teori ve düğüm teorisinin ortak konuları incelendi.

Tartışma ve Sonuç bölümünde, çalışmadan elde edilen bazı sonuçlar verildi.

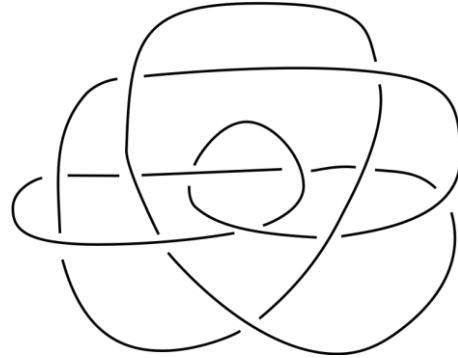
2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Genel Kavramlar

Bu bölümde bazı temel tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1.1 (Gömülme): X ve Y Hausdorff uzaylar olsun. Eğer $f : X \rightarrow f(X)$ bir homeomorfizm ise, tanımlanan $f : X \rightarrow Y$ dönüşümüne gömülme (embedding) denir (Burde 2003).

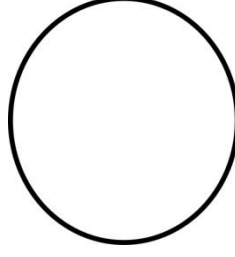
Tanım 2.1.2 (Düğüm): Matematiksel olarak bir S^1 yayının \mathbb{R}^3 Öklid uzayına ya da S^3 küresine gömülmesine düğüm denir (Burde 2003).



Şekil 2.2. Düğüm örneği

Yani düğüm, uzayda basit kapalı bir eğridir. Diğer bir deyişle düğüm, birim çemberin uzay içinde bir konumudur.

Düğümlememiş olan düğüm de vardır. Böyle düğümlere ise aşık düğüm denir.



Şekil 2.3. Aşıkâr düğüm

Tanım 2.1.3 (Halka): S^3 üzerinde ayrık, düzgün, yönlendirilmiş kapalı eğrilerin sonlu ailesine halka denir (Birman 1974).

Halkalar, düzlemde diyagramlarla gösterilmektedir. Düğüm bir bileşenli bir halkadır.

Tanım 2.1.4 (Poligonal Düğüm): K , S^3 içinde bir düğüm olsun. Eğer K sonlu sayıda doğru parçalarından oluşuyor ise K ya poligonal düğüm denir (Adams 2008).

Tanım 2.1.5 (Regüler İzdüşüm): \mathbb{R}^3 de poligona denk olduğu zaman K düğümü düzlemde aşağıdaki koşulları sağlayan bir ortogonal izdüşümü vardır. Bu durumda π izdüşüm fonksiyonu için:

1. $\pi(K)$ görüntüsü çift katlı noktaların sonlu sayısından daha fazla katlı nokta içermez.
2. $\pi(K)$ izdüşümünde K nın köşelerinin projeksiyonu çift katlı değildir.

özellikleri sağlanır. Bu projeksiyon regüler düğüm projeksiyonu olarak adlandırılır (Iyanaga and Kawada 1980).

Tanım 2.1.6 (Homotopi): $f: X \rightarrow Y$ ve $g: X \rightarrow Y$ iki sürekli fonksiyon olsun ve $I = [0,1]$ olmak üzere $F: X \times I \rightarrow Y$, $(x, t) \rightarrow F(x, t)$ fonksiyonu $F(x, 0) = f(x)$ ve $F(x, 1) = g(x)$ olacak biçimde sürekli bir fonksiyon ise $F(x, t)$ fonksiyonuna

homotopi denir. Burada t değişkeni 0 dan 1 e değişirken F de f den g ye dönüşmektedir.

Tanım 2.1.7 (İzotopi): $F: X \times I \rightarrow Y$ homotopisi alındığında eğer $F|_{X \times \{t\}}$ I daki tüm t ler için homeomorfizm oluyorsa o zaman $F: X \times I \rightarrow Y$ ye izotopi denir (Adams 2008).

Tanım 2.1.8 (Kuşıatan İzotopi): Eğer $f: X \rightarrow Y$ ve $g: X \rightarrow Y$, Y nin X içine bir gömülmesi ise f ve g ye kuşıatan izotopiktir denir. Burada $F: X \times I \rightarrow Y$, $F(x, 0) = x$, $x \in X$ ve $F(f(y), 1) = g(y)$, $y \in Y$ olacak biçimde sürekli bir fonksiyondur ve t değişkeni 0 dan 1 e değişirken F de f den g ye dönüşmektedir. Ayrıca, X e kuşıatan uzay ve F ye kuşıatan izotopi denir (Adams 2008).

$S^1 \rightarrow S^3$ topolojik gömülmeleri, Şekil 2.4 de gösterildiği gibi beklenmedik bir görünüme sahip olabilir. Vahşı düğüm olarak adlandırılan bu düğümlerde bir L limit noktasına yakınsayan benzer ağların bir sonsuz dizisi vardır. R. H. Fox (1949) tarafından bulunan bu düğüm örneği bu düğümlerin gerçekten de aşikar düğümlerden farklı özelliklerde olduğunu gösterilmiştir.



Şekil 2.4. Vahşı düğüm örneği

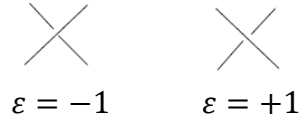
Tanım 2.1.9 (Uslu düğümler): Bir K düğümü eğer \mathbb{R}^3 (veya S^3) de basit kapalı bir poligona kuşıatan izotop ise uslu düğüm olarak adlandırılır. Uslu olmayan düğüme vahşı düğüm denir (Burde 2003).

Tanım 2.1.10 (n-katlı Nokta ve Geçit Noktası): K , S^3 içinde bir düğüm ve π , izdüşüm fonksiyonu olsun. $\alpha \in \pi(K)$ için $\pi^{-1}(\alpha) \cap K$, n tane ($n > 1$) noktadan ibaret ise, α ya $\pi(K)$ nın bir n -katlı noktası denir. Eğer $n = 2$ ise, α noktasına geçit noktası (kavşak noktası, çift katlı nokta) denir (Kauffman 1988).

Tanım 2.1.11 (Regüler Diyagram): Regüler bir K düğümü ile bir $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. K nın her alt geçit noktasından uzaklığı ε dan küçük olan noktaların kümesi A ise, $\pi(K - A)$ kümesine K düğümünün normal diyagramı ya da kısaca düğüm diyagramı denir (Kauffman 1988).

Böylece K düğümünün normal diyagramı ayrık yay parçalarından (veya doğru parçalarından) oluşur demektir.

Tanım 2.1.12 (Yönlendirilmiş Halka): Eğer bir halkanın her bir bileşeni üzerine bir ok konularak yön verilmişse halkaya yönlendirilmiştir denir. Yönlendirilmiş geçitlere ± 1 işaretleri verilir (Kauffman 1988).



Şekil 2.5. Geçit işaretleri

Tanım 2.1.13 (Ayna Görüntüsü): Bir düğüm diyagramının geçitlerini alt üst ederek veya işaretini değiştirerek elde edilen diyagrama düğümün ayna görüntüsü denir (Kauffman 1988).

Tanım 2.1.14 (Alterne Diyagram): Geçit işaretleri ardışık olarak işaret değiştiren düğüm diyagramına alterne diyagram denir (Kauffman 1988).

Düğüm teorisinde S^1 çemberinin \mathbb{R}^3 içine çok çeşitli gömülmeleri vardır. Bu durumda iki farklı düğümün denliğini söylemek için birini diğerine dönüştürülebilmesini sağlayacak bir kural vermek gerekir.

Tanım 2.1.15: $f, g : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ düğümleri kuşatan izotop iseler bu düğümlere denk düğümler denir. Denk düğümlerin ailesine düğüm tipi denir.

$H: \mathbb{R}^3 \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$ verilen $f, g: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gömülmelerinin düğümleri arasındaki kuşatan izotopi olsun. $H(x, 0) = x$ anlamı H in başlangıçta birim dönüşüm olduğudur. $H(f(x), 1) = g(x)$ zaman içinde f nin g ye dönüşmüş olduğu anlamına gelir (Adams 2008).

Bu denklik aslında diyagram hareketlerinin (Reidemeister hareketleri) esas üç tipi ile üretilir.

2.2. Reidemeister Hareketleri

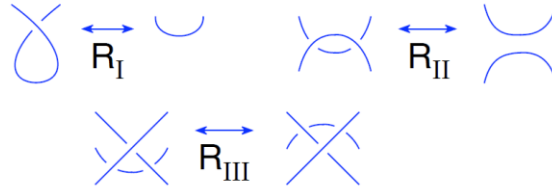
Düğümlerin denliğini göstermek için iki düğüm projeksiyonu alınsın. Birinci izdüşümden ikinci izdüşüme geçerken kuşatan izotopi kullanılmalıdır. Ancak izotopinin var olup olmadığını tanımlamak oldukça güçtür. 1927 de Kurt Reidemeister (1893-1971) bir düğümden diğerine kuşatan izotopi ile tanımlanan denliği, kendi adıyla bilinen hareketler yardımıyla daha basit araştırılabilir hale getirdi. Reidemeister hareketlerinin üç tipi bulunmaktadır (Adams 2008).

Tanım 2.2.1 (Reidemeister hareketleri): I. Tip hareket; bir burulmuş eğri ekleyerek ya da çıkararak, II. Tip hareket; iki ardışık alttan veya üstten geçidi çıkararak ya da ekleyerek ve III. Tip hareket; üçgen hareketi olarak elde edilir (Kauffman 1988).

Teorem 2.2.2 (Reidemeister Teoremi): İki düğümden ya da halkadan birinin diğerine denk olması (kuşatan izotop olması) için gerek ve yeter şart onların diyagramlarından

birinin diğere Reidemeister hareketleriyle dönüşmesidir ve sonlu dizi oluşturan düzlemsel izotopinin var olmasıdır (Adams 2008).

Yani sonlu sayıda Reidemeister hareketlerinin uygulanmasıyla diyagramları birbirine dönüşebilen düğümler denktir.



Şekil 2.6. Reidemeister hareketleri

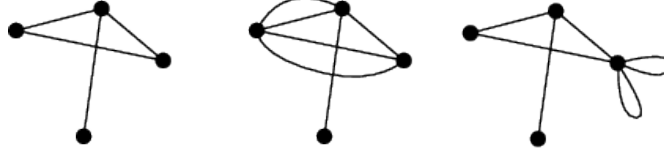
Tanım 2.2.3. II. ve III. Reidemeister hareketleri ile üretilen denklik bağıntısına regüler izotopi denir (Kauffman 1988), (Kauffman 1988).

Tanım 2.2.4. Reidemeister hareketlerinin üçü ile üretilen diyagramlar üzerindeki denklik bağıntısına kuşatan izotopi denir.

Böylece II. ve III. hareketler regüler izotopi invariantı; I. II. III. hareketler kuşatan izotopi invariantıdır (Kauffman 1988).

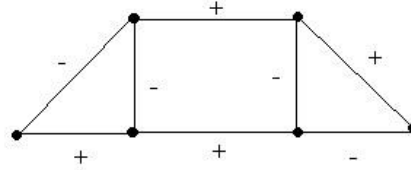
2.3. Graflar

Graf, düğümleri köşe olarak adlandırılan ve her biri bu köşeleri veya sadece köşenin kendisini bağlayan ayrıt olarak isimlendirilen çizgiler topluluğudur. Boş olmayan sonlu düğümler (köşeler) kümesini $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ve sonlu ayrıtlar kümesini $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ ile gösterilirse G grafi $G(V, E)$ ile gösterilir. $|V| = n$ sayısına grafın derecesi, $|E| = m$ sayısına grafın boyutu denir. n dereceli, m boyutlu bir graf $G(n, m)$ ile gösterilir. Aşağıda $G(4,4)$ ve $G(4,6)$ grafları gösterilmiştir.



Şekil 2.7. Basit graf, multigraf ve yalancı graf

Tanım 2.3.1. G bir graf ve $V(G)$ ve $E(G)$ sırasıyla G grafının köşelerinin ve kenarlarının sonlu kümeleri olsun. Yani, G grafi sonlu olsun. Her bir kenarı $+1$ veya -1 ile işaretlenmiş bir G grafına işaretlenmiş graf denir. Daha genel olarak eğer G , bir $f_G : E(G) \rightarrow \{-1, +1\}$ işaret fonksiyonuna sahip bir graf ise G (veya (G, f_G)) ye bir işaretli graf denir. Eğer $f_G(e) = +1$ ise e kenarı pozitif, aksi durumda negatiftir (Diestel 2000).



Şekil 2.8. İşaretli $G(6,8)$ grafi

Bir pozitif graf işaretlenmemiş bir graf olarak göz önünde bulundurulabileceğinden bulunan sonuçlar sonlu yönlendirilmemiş graflar içinde uygulanabilir.

Tanım 2.3.2 (İlmek): Grafın bir ayrıtının uçları sayısı 1 ise buna ilmek denir (Diestel 2000).

Tanım 2.3.3 (Katlı Ayrıt): Eğer iki ya da daha çok ayrıt, aynı uçlara sahip ise bu ayrıtlar katlı ya da çok katlı ayrıt olarak adlandırılır (Diestel 2000).

Graflar ilmek ya da katlı ayrıt bulundurup bulundurmamasına göre adlandırılır.

Tanım 2.3.4. İlmek ve katlı ayırıt bulundurmeyen graflara basit graf, yalnız katlı ayırıt bulunduran graflara çoğul graf (multigraf), ilmek ya da katlı ayırıt bulunduran graflara yalancı (pseudo) graf denir (Chartrand and Lesniak 1996).

Tanım 2.3.5 (Geren Alt Graf): G nin bir H alt grafı, $f_H = f_G \setminus E(H)$ oluşmuş işaret fonksiyonuna sahiptir. Eğer $V(H) = V(G)$ ise, H alt grafına bir geren alt graftır denir.

Özel olarak sadece köşelerden ibaret bir geren alt grafa geren köşe graf denir ve V_G ile gösterilir (Diestel 2000).

Tanım 2.3.6 (Betti sayısı): Eğer n –boyutlu K kompleksinin sayısı α_p ve l_p değme matrisinin rankı r_p ise p . Betti sayısı b_p , $p = 1, 2, \dots, n$ için

$$b_0 = \alpha_0 - r_0, b_p = \alpha_p - r_p - r_{p-1}$$

ile verilir (Uğur 2002).

Bu çalışmada graf ile sık sık $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ içinde bir sonlu 1 –boyutlu $C - W$ kompleksi olarak grafın geometrik yorumu kastedilecektir. Bir X kümesi için $|X|$ ile X in kardinalitesini, $\beta_i(G)$, 1 – komplekste olduğu gibi bir G grafının i –nci Betti sayısını gösterebilir. Graf teoride $p_0(G)$ ve $p_1(G)$ nin yerine, $\beta_0(G)$ ve $\beta_1(G)$ kullanılır. $p_0(G)$, G nin bağlantılı bileşenlerinin sayısını gösterir ve $p_1(G)$, G nin devir sayısıdır. H ve K nin her ikisi de en azından bir kenara sahip olan iki graf olsun. O zaman H ve K nin tek nokta bileşeni $H * K$ ile gösterilecektir. $V \subset V(G)$ ve $E \subset E(G)$ için, E deki kenarları ve V deki köşeleri içermeyen G nin en büyük alt grafı $G - (V, E)$ ile gösterilir. Özel olarak $G - e$, G nin bütün köşelerini ve kenarlarını içeren fakat e yi içermeyen G nin alt grafıdır. Bu yüzden $G - e$, e nin çıkarılması ile G den elde edilen alt graftır. Bir v köşesi için $G - v$, bütün köşeleri içeren fakat v yi içermeyen bir alt graftır ve bir v köşesi için $G - v$, G nin v köşesi ve v köşesine bağlı kenarlar hariç diğer bütün köşe ve kenarlardan oluşan bir alt graftır (Diestel 2000).

Tanım 2.3.7 (Ayrılabilirlik): G bir graf olsun. Eğer $G = H \cup K$ ve $H \cap K = \{v_0\}$ olacak şekilde H ve K alt grafları varsa G ye ayrılabilir denir. Burada H ve K nin her ikisinin de en az bir kenarı vardır ve v_0 bir köşedir. Aksi durumda G ayrılamazdır denir. Burada v_0 köşesi bir ayırma köşesi olarak adlandırılır (Bondy and Murty 1982).

Eğer G ilmeğe sahip değilse, o zaman bir v köşesi için $\beta_0(G) < \beta_0(G - v)$ olduğu zaman G ayrılabilir. Bir blok, G nin bir maksimum ayrılamayan bağlantılı alt grafıdır. Bir bağlantılı graf sonlu çoklukta bloklara ayrılabilir.

Tanım 2.3.8 (Blok Toplamı): Eğer $G_1, G_2, G_3, \dots, G_k$, G nin blokları ise

$$G = G_1 * G_2 * G_3 * \dots * G_k$$

olarak yazılabilir. Bu durumda $G; G_1, G_2, G_3, \dots, G_k$ nin blok toplamı olarak adlandırılır (Diestel 2000).

Tanım 2.3.9 (İndirgenibilme): Eğer G hem ilmeğe hem de $\beta_0(G) < \beta_0(G - e)$ kenarına sahip değilse G ye indirgenir graf denir (Diestel 2000).

Tanım 2.3.10 (Singüler Kenar): Diğer yandan eğer iki farklı köşe bir tek e kenarı ile birleştirilirse o zaman e ye, G nin bir singüler kenarı denir (Diestel 2000).

Bir ilmek bir singüler kenar değildir.

Tanım 2.3.11 (Katlı Kenar Graf): Eğer bütün kenarlar ortak uçlara sahip ve $|E(G)| \geq 2$ (veya $|E(G)| = 1$) ise bir G iki köşeli grafi bir katlı kenar graf (veya bir tek kenarlı graf) olarak adlandırılır (Diestel 2000).

G bir graf ve v , G nin bir köşesi olsun. *Star* v , v yi ve v ye ait olan G nin tüm kenarlarını içeren minimum alt graftır. Eğer X , G nin bağlantılı alt kümesi ise o zaman

G/X , X deki bütün noktaların bir nokta ile özdeşlenmesiyle G den elde edilen alt graf olarak tanımlanır. Bir G grafının K ve H alt grafları için $H/(H \cap K)$ yı kolaylık olsun diye H/K ile göstereceğiz. Eğer $H \cap K = \emptyset$ ise o zaman H/K , H in kendisi olur. Bir e kenarı için $G/(e)$, e kısıtlama olarak adlandırılan e nin uçlarının özdeşlenmesi ile $G - e$ den inşa edilir. Eğer e bir ilmek ise o zaman $G - e = G/(e)$ dir (Diestel 2000).

Tanım 2.3.12 (Zincir): Eğer $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ için v_i ve v_{i+1} , e_{i+1} kenarının uçları ise e_i kenarları ve v_i köşelerinin bir alterne dizisi olan $C : v_0 e_1 v_1 \dots v_{n-1} e_n v_n$ boş olmayan sonlu dizisine G de bir zincir denir (Bondy and Murty 1982).

Zincirin uzunluğu n dir. Eğer $v_n = v_0$ ise bir C zinciri bir devir olarak adlandırılır. C nin uzunluğu $|C|$ ile gösterilir ve n e eşittir. Eğer $v_n = v_0$ durumu hariç herhangi i ve j için $i \neq j$ olmak üzere $v_i \neq v_j$ ve $e_i \neq e_j$ ise bir zincir veya bir devir, basit zincir (devir) n uzunluğunda bir devire basitçe bir $n -$ devir denir.

Bütün kenarları ayıran bir zincir (veya bir devir) bir trail (veya bir kapalı trail) olarak adlandırılır.

Tanım 2.3.13 (Çift Graf): Eğer G nin herhangi bir deviri çift uzunluğa sahipse bir G grafı iki parçalıdır denir. İki parçalı bir graf bir ilmeğe sahip değildir. Her bir köşe bir çift değerliğe sahipse bir graf, çift graf olarak adlandırılır (Diestel 2000).

Değeri 1 olan bir köşe bir stump olarak adlandırılır. 2 değerlikli bir köşe twig olarak adlandırılır.

Eğer G , 1 –kompleks olarak $S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ içine yerleştirilebilir ise G grafına düzlemseldir denir. Eğer G , \mathbb{R}^2 ye yerleştirilmiş bir graf ise o zaman G bir düzlem graftır. Eğer G bağlantılı bir düzlem graf ise, G^* dual grafı şu şekilde tanımlanır;

$S^2 - G$ içindeki bölgelerin $F(G)$ kümesi, $V(G^*)$ ile birebir karşılık gelir. $E(G^*)$ ile $E(G)$ birebir öyle karşılık gelir ki, $e^* \in E(G^*)$ ve onun eşi köşe noktası olmayan ortak bir noktaya sahiptir. e^* nin işaretini onun eşinin zıttı gibi tanımlayabiliriz. Eğer G bağlantısız bir düzlem graf ise o zaman G^* , G nin bağlantılı bileşenlerinin duali olan grafların ayrık bir birleşimidir (Diestel 2000).

Tanım 2.3.14 (Grafın İnvaryantı): Tıpkı düğümlerin invaryantlarında olduğu gibi, iki izomorf graf için aynı değere sahip çokluğa grafın invaryantı denir (Diestel 2000).

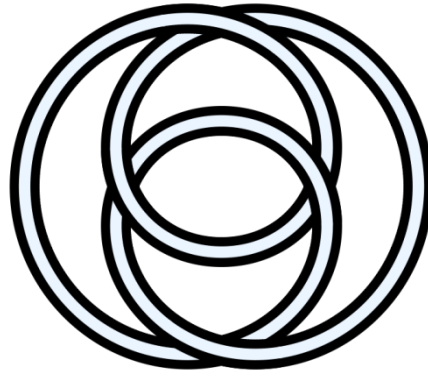
Örneğin, bir grafın köşelerinin sayısı, kenarlarının sayısı, en iyi aşık ar invaryantlardır.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Sayısal Düğüm İnvaryantları

Tanım 3.1.1 (Geçit Sayısı): Bir K düğümünün herhangi bir diyagramındaki geçitlerinin minimum sayısına K nın geçit sayısı denir ve $c(K)$ ile gösterilir (Kauffman 1988).

Geçit sayısının düğümün bir invaryantı olduğu açıktır. Örneğin sekiz şekilli düğümün geçit sayısı dörttür.



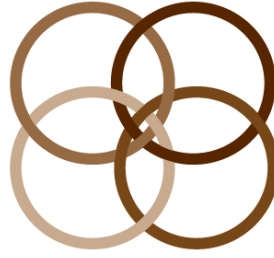
Şekil 3.1. Sekiz şekilli düğüm (4_1)

Tanım 3.1.2 (Bileşen Sayısı): Bir halka diyagramının bir yayı üzerinde bir nokta seçildiğinde ve daha sonra diyagram etrafında dolanıp o noktalara tekrar dönüldüğünde geçiş noktalarının geçit haline gelmesi ile oluşan devire bileşen denir. Bileşenlerin adedi bileşen sayısını verir. Her bir bileşen bu yolla elde edilen bir tam devirdir (Kauffman 1988).

Gerçekte denklik ile değişen bileşen sayısının Reidemeister hareketlerinin bir dizisinin sonucu olduğuna dikkat edilmelidir. Bileşen sayısı çok güçlü bir invaryant değildir.

Örnek 3.1.3. $\bigcirc\bigcirc$ ve $\bigcirc\bigcirc$ diyagramlarının her biri iki bileşene sahiptir. Ama gerçekte bu diyagramlar denk değildirler (Kauffman 1988).

Bu tanıma göre tek bileşenli halkaya düğüm denilebilir.



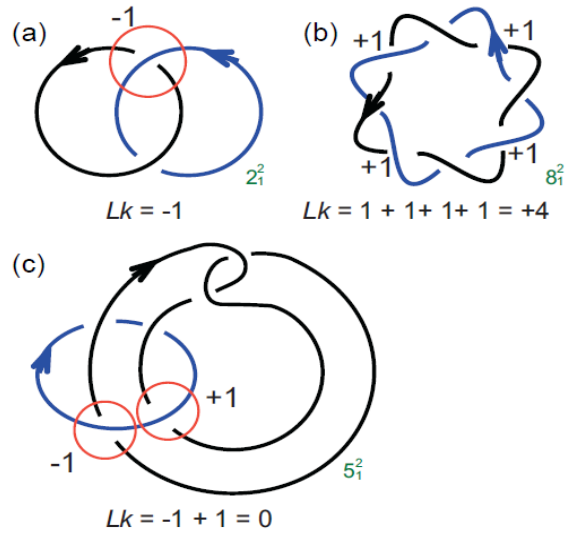
Şekil 3.2. Bileşen sayısı dört olan halka

Tanım 3.1.4 (Halkalanma Sayısı): Bileşenleri α ve β olan iki bileşenli bir halka verildiğinde $\alpha \cap \beta$, α bileşeni ile β bileşeninin geçit kümesini gösterebilir (Böylece $\alpha \cap \beta$, α nın ya da β nın kendi geçitlerini içermez). Bu durumda α ile β nın halkalanma sayısı

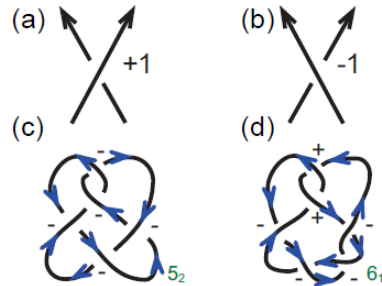
$$Lk(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \sum_{p \in \alpha \cap \beta} \varepsilon(p)$$

şeklinde tanımlanır.

Diğer bir deyişle, halkalanma sayısı bir eğri ile diğerinin geçit işaretlerinin toplamının yarısıdır. Burada $\varepsilon(p)$, p ile gösterilen geçitin işaretidir ve toplam bütün p geçitleri üzerinde alınmıştır (Kauffman 1988).



Şekil 3.3. $Lk(\text{Hopf halkası})=-1$, $Lk(\text{Whitehead halkası})=0$, $Lk(8_1^2)=+4$ olan düğümlerin halkalanma sayıları



Şekil 3.4. Halkalanma sayılarının (c) 5_2 ve (d) 6_1 düğümlerinde hesaplanması

Halkalanma sayısının invaryantlığı Reidemeister hareketlerinden çıkar. I.Tip hareketler halkalanma sayısına katkıda bulunmaz. II.Tip hareketlerde halkalanma sayısına +1 ve -1 eklenir ya da çıkarılır. III.Tip hareketler toplamları etkilemez (Kauffman 1988).

Tanım 3.1.4 (Burulma Sayısı): K herhangi bir yönlendirilmiş halka diyagramı olsun. $c(K)$, K diyagramındaki geçitlerin kümesi olmak üzere K nın burulma sayısı

$$w(K) = \sum_{p \in c(K)} \varepsilon(p)$$

ile tanımlanır. Burada toplam, K diyagramının bütün geçitleri üzerindedir ve $\varepsilon(p)$ ise p geçidinin işaretidir (Kauffman 1988).

Dikkat edilirse, $w(K)$ nın bir regüler izotopi invaryantı olduğu görülür. Geçit işaretleri I.Tip hareket altında ± 1 ile değiştiği için $w(K)$ nın, K nın invaryantı olması gerekmez .

3.2. Bazı Polinom İnvaryantları

3.2.1. Parantez Polinomu

Tanım 3.2.1.1. Yönlendirilmemiş bir K halka diyagramı verilsin. $[K] \in Z[A, B, d]$ değişmeli A, B ve d cebirsel değişkenlerine karşılık gelen ve K halkasını temsil eden bir polinomu gösterebilirsin. Parantez polinomu adı verilen bu polinom aşağıdaki aksiyomları sağlar .

Kural 1 : $[O] = d$

Kural 2 : $[O \cup K] = d[K]$

Kural 3 : $[\text{><}] = A[\text{><}] + B[\text{<>}]$, $[\text{<>}] = B[\text{><}] + A[\text{<>}]$

Burada O , sıfır geçidi olan aşık düğümü gösterir (Kauffman 1988).

3. kuralda; bir yönlendirilmemiş geçit, aynı köşede buluşan dört bölgeden ikisini dışa doğru ayırır. Bu üstten geçit çizgisinin saatin dönüş yönünün tersine döndürülmesi ve taranan iki bölgenin seçilmesiyle yapılabilir.

Örnek 3.2.1. Yonca yaprağı düğümü için bu eşitlik aşağıdaki gibi verilir.

$$\left[\text{Yonca yaprağı} \right] = A \left[\text{Yonca yaprağı (A)} \right] + B \left[\text{Yonca yaprağı (B)} \right]$$

2. kural, hiç bir geçit noktası olmayan aşıkâr düğümün (çemberin) parantez değerinin d olduğunu ve 1. kural halka diyagramının herhangi bir yerinde bulunan bir çember ile halkanın ayrık bileşiminin parantez değeri, halkanın parantez değerinin d ile çarpılmasını ifade eder.

Hangi şartlar altında parantez polinomu düğüm ve halkaların bir topolojik invariyanı olur, sorusunu cevaplandırmak için bu polinomun $AB = 1$ ve $d = -A^2 - B^2$ için Reidemeister hareketleri altındaki davranışlarına bu polinom için bir invariyan olduğu görülür (Kauffman 1988).

3.3. Normalize Edilmiş Parantez Polinomu

Tanım 3.3.1. K bir halka diyagramı, $\langle K \rangle$, K nın regüler izotopi invariyanı olan parantez polinomu ve $w(K)$, K nın burulma sayısı olsun.

$$f_K = \alpha^{-w(K)} \langle K \rangle$$

polinomuna normalize edilmiş parantez polinomu denir (Kauffman 1988).

Önerme 3.3.2. Normalize edilmiş f_K polinomu, yönlendirilmiş K halka diyagramları için ambient izotopinin bir invariyanıdır (Kauffman 1988).

İspat: f_K nın yalnızca I.Tip hareket altındaki davranışını incelemek yeterlidir. Çünkü $\langle K \rangle$ ve $w(K)$ regüler izotopinin invariyanları olduklarından onların çarpımı şeklinde olan f_K polinomu da regüler izotopinin bir invariyanıdır.

$w(\text{çember}) = 1 + w(\text{halka})$ ve $w(\text{çember}) = -1 + w(\text{halka})$ olduğundan

$$f_{\text{çember}} = \alpha^{-w(\text{çember})} \langle \text{çember} \rangle = (-A^3)^{-w(\text{halka})} \langle \text{halka} \rangle = f_{\text{halka}}$$

bulunur. ■

Aslında normalize edilmiş parantez polinomu orjinal Jones polinomunun bir versiyonudur .

Tanım 3.3.3: K bir yönlendirilmiş halka olsun. Aşağıdaki aksiyomları sağlayan \sqrt{t} değişkenli Laurent polinomuna Jones polinomu denir ve $V_K(t)$ ile gösterilir (Kauffman 1988).

Kural 1 : $V_K(t)$ bir ambient izotopi invariantıdır.

Kural 2 : $V_O(t) = 1$

Kural 3 : $\frac{1}{t}V_{\searrow} - tV_{\swarrow} = \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)V_{\sphericalangle}$

Teorem 3.3.4: $V_K(t)$, K nın Jones polinomu ve $f_K(A)$, K nın normalize edilmiş parantez polinomu olsun. Bu durumda $f_K(t^{-1/4}) = V_K(t)$ olur (Kauffman 1988).

İspat. $\langle \searrow \rangle = A\langle \rangle + A^{-1}\langle \swarrow \rangle, \langle \swarrow \rangle = A^{-1}\langle \rangle + A\langle \searrow \rangle$ eşitliklerinden

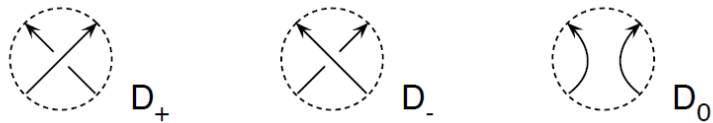
$$A\langle \searrow \rangle - A^{-1}\langle \searrow \rangle = (A^2 - A^{-2})\langle \searrow \rangle$$

$$A\alpha\langle \searrow \rangle\alpha^{-w(\searrow)} - A^{-1}\alpha^{-1}\langle \searrow \rangle\alpha^{-w(\searrow)} = (A^2 - A^{-2})\langle \searrow \rangle\alpha^{-w(\searrow)}$$

$$A\alpha f_{\searrow} - A^{-1}\alpha^{-1}f_{\searrow} = (A^2 - A^{-2})f_{\searrow}$$

$$-A^4 f_{\searrow} - A^{-4} f_{\searrow} = (A^2 - A^{-2})f_{\searrow}$$

elde edilir. $A = t^{-1/4}$ alınırsa iddia gerçekleşmiş olur.



Şekil 3.5. Skein Diyagramları

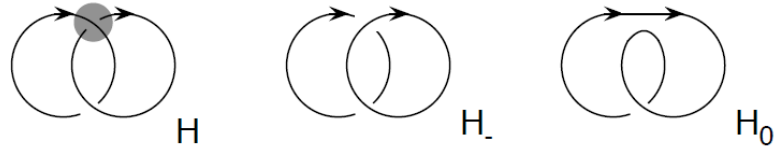
$$V_{D_+}(t) = t^2 V_{D_-}(t) + tz V_{D_0}(t)$$

$$V_{D_-}(t) = t^{-2} V_{D_+}(t) - t^{-1} z V_{D_0}(t)$$

$$z = \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right)$$

Skein Diyagramları ile Jones polinomunun ifadesi yukarıdaki gibidir (Jones 2005).

Örnek 3.3.5.



$$V_H(t) = t^2 V_{H_+}(t) - tz V_{H_0}(t)$$

$$\begin{aligned} &= t^2(-1) \left(\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}} \right) + tz \\ &= -t^{2.5} - t^{1.5} + t \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) \\ &= -t^{0.5} - t^{2.5} \end{aligned}$$

(Godsil and Royle 2005).

Örnek 3.3.6.



$$V_T(t) = t^2 V_{T_+}(t) - tz V_{T_-}(t)$$

$$= t^2 + t \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) (-t^{0.5} - t^{2.5})$$

$$= t + t^3 - t^4$$

(Godsil and Royle 2005).

3.4. Grafların Polinomları

Polinomlar, düğüm ve halka teori söz konusu olduğunda oldukça kullanışlıdır. Grafların bazı polinomlarının hesaplanması için çeşitli yöntemler vardır. Dikromatik polinom denilen iki değişkenli $Z_G(q, v)$ polinomu teorik graf teoride kullanılan bir polinomdur. Dolayısıyla bu polinom 3-boyutlu uzayda gömülmüş graflara bağlı değildir, ancak grafların izomorfizm tipine bağlıdır. Bu anlamda, düğüm ve halka polinomlarından farklıdır. Bu deyişle aynı bitiş noktasını paylaşan birden fazla kenar ve aynı köşede biten ve başlayan kenarlar da kastedilmektedir.

Tanım 3.4.1. Bir dikromatik polinom şu üç formül yardımıyla tanımlanır:

1. $Z(\cdot) = q$
2. $Z(\cdot G) = qZ(G)$
3. $Z(\rightarrow \leftarrow) = Z(\rightarrow \leftarrow) + vZ(\times)$

Burada ilk gösterimde bir tek düğüm noktasının polinom eşitinin q olduğu, ikinci şartta bir grafa yeni bir düğüm noktası eklenmesiyle, kenar eklenerek değil, elde edilen polinom grafin q katı olduğu, son şartta ise; çok kenarlı bir köşeye sahip graf için kenarın silinmesiyle elde edilen polinom ve kenarın bir tek köşeye kısıtlanmasıyla elde edilen polinomun v katının toplamına eşit olduğu gösterilmektedir. Aşağıda örnekleri gösterilmektedir (Adams 1994).

Örnek 3.4.2. $Z(\rightarrow \infty) = Z(\rightarrow) + vZ(\rightarrow) = (1 + v)Z(\rightarrow)$

Örnek 3.4.3. $Z(\rightarrow \leftarrow) = Z(\cdot) + vZ(\cdot) = q^2 + vq$

Örnek 3.4.4. $Z(\triangle) = q^3 + 3vq^2 + 3v^2q + v^3q$

$$\begin{aligned}
Z(\triangle) &= Z(\blacktriangleright) + vZ(\blacklozenge) \\
&= \left(Z(\blackrightarrow) + vZ(\blackleftarrow) \right) + v \left(Z(\blackleftarrow) + vZ(\blacklozenge) \right) \\
&= qZ(\blackleftarrow) + vZ(\blackleftarrow) + v \left(Z(\blackleftarrow) + v(Z(\blackrightarrow) + vZ(\blackleftarrow)) \right) \\
&= (q + 2v)Z(\blackleftarrow) + (v^2 + v^3)Z(\blackrightarrow) \\
&= (q + 2v)(q^2 + vq) + (v^2 + v^3)q \\
&= q^3 + 3vq^2 + 3v^2q + v^3q
\end{aligned}$$

Ancak burada yazılı kurallar polinomun iyi tanımlı olmasını garanti etmez. Grafın farklı kenarlarını seçmek farklı bir polinom ortaya çıkarır mı, sorusu akla gelir (Adams 1994).

$v = -1$ için dikromatik polinom, kromatik polinoma özelleşir. Yani, $Z_G(q, -1) = K_G(q)$ dir. Böylece, iki bitişik köşenin aynı renk olmaması için q renkleri ile G grafının köşe renklerine olan yolların sayısı ifade edilmiş olur. Bu, $K(\blackrightarrow \blackleftarrow)$ iki köşenin aynı rengi aldığı yerdeki durumlara karşılık gelirken $K(\blackrightarrow \blackleftarrow)$, bu iki köşenin bütün ihtimallerini hesaba kattığı için yukarıdaki bağıntıdan kolayca görülür (Kauffman 1988).

Tanım 3.4.5 (Köşe Boyama): Her komşu köşesi diğerinden farklı renkte olacak biçimde, belirli bir grafın her bir köşesini renklendirmek için, kullanılabilir olacak olası renk sayısı q 'dur. Buna köşe boyama (vertex coloring) denir (Adams 1994).

Grafın dikromatik polinomunda $v = -1$ alırsak, grafın ayrı köşelerinin boyama sayısını buluruz.

Örnek 3.4.6. Üçgen grafın dikromatik polinomuna bakalım:

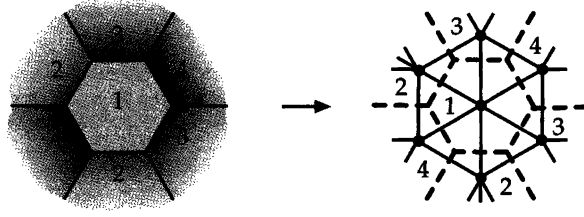
$$q^3 + 3(-1)q^2 + 3(-1)^2q + (-1)^3q = q^3 - 3q^2 + 2q$$

Yani; bir üçgen ve onun köşelerini boyamak için q tane renk alınır, ilk köşe q tane renge boyanabilir. Bu köşe ile bağlantılı olan ikinci köşe $q - 1$ renge, ilk iki köşe ile bağlantılı olan üçüncü köşe de $q - 2$ renge boyanırsa komşu köşelerin aynı renk olmaması için kullanılacak yolların sayısı $q(q - 1)(q - 2) = q^3 - 3q^2 + 2q$ olur. Bu dikromatik polinomda $v = -1$ yazılmasıyla elde edilen sonuçla aynıdır (Adams 1994).

Kenarsız graflar için bu durum kolayca ispatlanabilir.

G , $m + 1$ tane kenarı olan herhangi bir graf olsun. E , A ve B ayrık köşeleri ile bağlantılı G nin bir kenarı ve $v = -1$ olarak alınır. 3. Kurala göre ; $Z(\rightarrow \leftarrow) = Z(\rightarrow \leftarrow) - Z(\times)$ dikromatik polinomu elde edilir. Bu eşitlik G' ve G'' m tane kenara sahip yeni graflar tanımlanarak gösterilebilir. G' nün köşe boyama sayısını $Z(\rightarrow \leftarrow)$ verirken , $Z(\times)$ de G'' nün köşe boyama sayısını versin. Fakat G nin köşe boyama sayısı G' nün köşe boyama sayısından A ve B nin aynı renkteki boyamalarının sayısı çıkarılarak elde edilir. Ama tam olarak G'' nün köşe boyama sayısında olduğu gibi A ve B aynı renk olduğunda G' nin köşe boyama sayısı ifade edilmiş olur. Bu nedenle, $Z(G') - Z(G'')$ ifadesi G nin köşe boyama sayısını verir. Denklem göre bu $Z(G) = Z(G') - Z(G'')$ olduğundan G nin köşe boyama sayısı $Z(G)$ dir (Adams 1994).

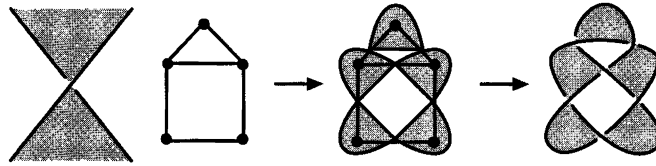
Dört-Renk problemi olarak bilinen problem de bir haritadaki komşu ülkeleri dual graf olarak alındığında bu problem Şekil 3.6 daki gibi bir düzlemsel grafa aynı kenarı paylaşan iki köşenin aynı renkte olmaması problemine dönüşür. Ancak düzlemsel G grafının dört renkle gösterilmesi için gerek ve yeter şart $q = 4$ ve $v = -1$ olduğunda $Z(G) \neq 0$ olmasıdır (Adams 1994).



Şekil 3.6. Düzlemsel graflarda köşe boyama (4 renk)

Dikromatik polinom, düğümler ve halkalardaki diğer polinomlarla da ilişkilidir. Bir düzlemsel graf daima bir düğüm olarak yorumlanabilir (Kauffman 1988).

Grafın her bir kenarı halkanın geçitlerini oluşturur ve iki durum söz konusudur. Gölgeleme yöntemiyle düzlemsel bir graf alterne düğüme dönüşür. Burada $L(G)$ alterne düğümün belirttiği graf G olur.



Şekil 3.7. Düzlemsel graflardan alterne düğüm elde edilişi

Tanım 3.4.7. G düzlemsel grafının dikromatik polinomu $L(G)$, alterne düğümü karşılığı “parantez” polinomu olduğu gibi elde edilebilir. Parantez polinomu düğüm ve halkaların projeksiyonunda şu eşitliklerle tanımlanır (Kauffman 1988):

$$\text{Kural 1 : } \langle \emptyset \rangle = 1$$

$$\text{Kural 2 : } \langle L \cup O \rangle = -(A^{-2} + A^2)\langle L \rangle$$

$$\text{Kural 3 : } \langle \times \rangle = A\langle \rangle + A^{-1}\langle \rangle$$

Tanım 3.4.8. Farklı katsayılarla yukarıdakine benzer kare parantez polinomu q ve v değişkenleriyle tanımlanır:

Kural 1 : $[O] = q^{1/2}$

Kural 2 : $[L \cup O] = q^{1/2}[L]$

Kural 3 : $[\times] = q^{-1/2}v[><] + [\times]$

(Adams 1994).

Örnek 3.4.9. $[\mathbf{8}] = q^{-\frac{1}{2}}v[\mathbf{8}] + [\mathbf{8}]$

$$= q^{-\frac{1}{2}}vq^{\frac{1}{2}} + q^{\frac{1}{2}}[O]$$

$$= v + q^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}$$

$$= v + q$$



Şekil 3.8. Aşıkâr düğümün aşıkâr olmayan projeksiyonu

Kare parantez polinomu düğümler ve halkalar için invaryant olmak zorunda değildir. Bir düğüm ya da halkanın projeksiyonu verildiğinde kare parantez polinomu hesaplanabilir. Düğümler ve halkaların projeksiyonu Şekil 3.8 de görüldüğü gibi sonucu değiştirebilir.

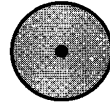
Teorem 3.4.10. N , G grafının köşe sayısı olmak üzere, $Z_G(q, v) = q^{N/2}[L(G)]$ dir (Adams 1994).

İspat: İspatı tümevarım yöntemi ile yapalım. Tek bir köşeden oluşan graf için ispat son derece kolaydır (Şekil 3.9). Aşıkâr düğümün aşıkâr projeksiyonu olan $L(G)$ için kare parantez polinomu ilk kurala göre $q^{1/2}$ ' dir.

Yukarıdaki Kural 1 de aşıkâr düğümün kare parantez değeri $q^{1/2}$ olur ve $N = 1$ alındığında,

$$Z_G(q, v) = q^{1/2}[L(G)] = q$$

$q^{N/2}$ ile $L(G)$ nin çarpımının sonucu q dur. İşte bu tam olarak tek bir köşe içeren grafin dikromatik polinomudur. Böylece tek köşeli G grafi için ispat biter.



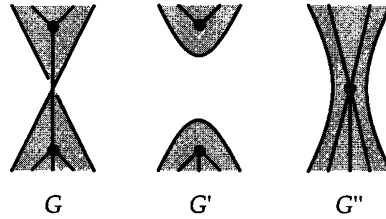
Şekil 3.9. Tek köşeli G grafi için ispat

Daha az sayıda kenara sahip graflar için teorem doğru olsun, herhangi bir G grafi için de doğru olduğu gösterilebilir.

G grafinin köşe sayısı N olsun . G' ve G'' , G den daha az sayıda kenara sahip iki graf olsun ve buradan aşağıdaki denklem ve şekillerle gösterilsin.

$$Z(G') = q^{N/2}[L(G')]$$

$$Z(G'') = q^{(N-1)/2}[L(G'')]$$



Şekil 3.10. Dual graflar

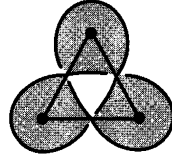
Verilen kare parantez polinomun üç kuralına göre dikromatik polinomun hesaplanması aşağıdaki gibi olduğundan: $Z(G) = q^{N/2}[L(G)]$ 'dir.

$$\begin{aligned}
Z(G) &= Z(G') + vZ(G'') \\
&= q^{\frac{N}{2}}[L(G')] + vq^{\frac{N-1}{2}}[L(G'')] \\
&= q^{\frac{N}{2}}([L(G')] + vq^{-1/2}[L(G'')]) \\
&= q^{N/2}[L(G)]
\end{aligned}$$

olur. Böylece ispat biter. ■

Örnek 3.4.11. Üçgen G grafi trefoil düğümünden elde edilir. Şöyle hesaplanır (Adams 1994).

$$\begin{aligned}
q^{\frac{N}{2}}[\text{Trefoil}] &= q^{\frac{3}{2}}[\text{Trefoil}] = q^{\frac{3}{2}}(q^{-\frac{1}{2}}[\text{Cross}] + [\text{Cross}]) \\
&= q^{\frac{3}{2}}(q^{-\frac{1}{2}}v(q^{-\frac{1}{2}}v[\text{Cross}] + [\text{Cross}]) + (q^{-\frac{1}{2}}v[\text{Cross}] + [\text{Cross}])) \\
&= q^{\frac{3}{2}}(q^{-\frac{1}{2}}v(q^{-\frac{1}{2}}v(q^{-\frac{1}{2}}v[\text{Cross}] + [\text{Cross}]) + (q^{-\frac{1}{2}}v[\text{Cross}] + [\text{Cross}])) + (q^{-\frac{1}{2}}v(q^{-\frac{1}{2}}v[\text{Cross}] + [\text{Cross}]) + (q^{-\frac{1}{2}}v[\text{Cross}] + [\text{Cross}])))) \\
&= q^{\frac{3}{2}}(q^{-\frac{1}{2}}v(q^{-\frac{1}{2}}v(q^{-\frac{1}{2}}v(q^{-\frac{1}{2}}vq + q^{\frac{1}{2}}) + q) + (q^{-\frac{1}{2}}vq^{\frac{1}{2}} + q)) + (q^{-\frac{1}{2}}v(q^{-\frac{1}{2}}vq^{\frac{1}{2}} + q) + (q^{-\frac{1}{2}}vq + q^{\frac{3}{2}}))) \\
&= q^3 + 3vq^2 + 3v^2q + v^3q
\end{aligned}$$



Şekil 3.11. $L(G)$ trefoil düğüm

Üçgen grafın dikromatik polinomu başta hesaplanmıştı.

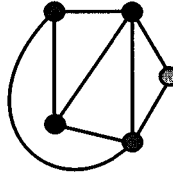
4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Potts Modeli

“Parantez” ilişkisi için seçilen katsayılara bağlı olarak graflar veya düğümler için hesaplamalar yapılabilir. İstatistiksel fizikte dahi bu ilişki uygulama alanı bulmuştur.

Burada bahsedilen Potts modeli Ising modelinin geliştirilmiş halidir (Adams 1994).

Bu modele göre düzlemsel grafin her bir köşesi dikromatik polinom için bahsedilen iki durumdan birine sahip olmalıdır. Her bir köşe bu modele göre bir parçacık olarak düşünülebilir ve sadece iki durum yerine her bir köşe için q (q pozitif tamsayı) tane durum mevcut olabilir. Burada her bir parçacık q tane renkten birine sahip olabilir şeklinde de düşünülebilir (Adams 1994).



Şekil 4.1. Parçacık durumunun Potts modeli

Tanım 4.1.1. Düzlemsel grafin dikromatik polinomunu hesaplarken ve v değişkeni için sağdaki yer değiştirme grafin dikromatik polinomunun Potts modelinin tam olarak parçacık fonksiyonu olduğu anlamına gelir. Parçacık fonksiyonu şöyle tanımlanır (Adams 1994):

$$P = \sum e^{-E(S)/kT}$$

Burada sistemin tüm mümkün durumlarının toplamı vardır. k Boltzmann sabiti ve T sistemin sıcaklığıdır. $E(S)$ ile verilen sistemde S durumundaki parçacığın enerjisidir. Kenarların etkileşim enerjisinin toplamı olan bu enerji şöyle hesaplanır:

$$E(S) = \sum E(S_i, S_j)$$

Burada grafin kenarları ile bağlantılı köşe çiftlerinin toplamı verilmiştir. S durumu köşelerin tek durumlarından elde edilir, bu yüzden $S = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ ile gösterilir. Parçacık modeline göre, kenarların yalnız enerji etkileşimleri $E(s_i, s_j) = \delta(s_i, s_j)$ olarak seçilebilir. Burada δ Kroniker delta fonksiyonu şöyle tanımlanır:

$$\delta(a, b) = \begin{cases} 1, & a = b \text{ ise} \\ 0, & a \neq b \text{ ise} \end{cases}$$

Sadece iki bitiş noktası olan köşe aynı duruma sahip olduğu zaman, grafin bir kenarı parçacık durumunun enerjisine katkıda bulunur (Bu köşelerin aynı renk olması anlamına gelir) (Adams 1994).

Teorem 4.1.2. $v = e^{-(1/kT)} - 1$ olsun. O zaman G düzlemsel grafi için dikromatik $Z_G(q, v)$ polinomu G grafinde Potts modelinin parçacık fonksiyonuna dönüşür. q değişkeni her bir köşenin olası durumu için polinomda verilen sayıdır (Adams 1994).

İspat: Dikromatik polinomun yeniden yazılışını göstermek için parçacık fonksiyonu alınsın:

$$\begin{aligned} P &= \sum e^{-\frac{E(S)}{kT}} \\ &= \sum e^{-\frac{\sum \delta(s_i, s_j)}{kT}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum \prod e^{-\left(\frac{1}{kT}\right) \delta(s_i, s_j)} \\
&= \sum \prod (1 + v \delta(s_i, s_j))
\end{aligned}$$

Son satırda bir önceki fonksiyon değeri için iki olasılık vardır ($\delta = 0$ ya da $\delta = 1$) ve her iki durumda da eşitlik bu iki ifade arasındadır. $\sum \prod (1 + v \delta(s_i, s_j))$ ifadesi q ve v de dikromatik polinomdur. Dikromatik polinomun hesaplanması için verilen üç kuralın yerine bu polinom geçer. Dikromatik polinom iyi tanımlıdır ve aynı küme için tanımlanan kurallar kümesinin kendisi için dikromatik polinom olmalıdır.

G grafi tek bir köşe içeriyor ve kenar içermiyorsa bunun için verilen P parçacık fonksiyonu:

$$\sum \prod (1 + v \delta(s_i, s_j)) = \sum 1$$

olur. s , burada tüm durumların toplamıdır. q tane durumun köşe için alınabildiği zaman $P(\cdot) = \sum 1 = q$ olur. Bu yüzden parçacık fonksiyonu dikromatik polinomun ilk kuralına karşılık gelir. İkinci kural için parçacık fonksiyonu alınan kenardan bağımsız bir kenar daha almayı gerektirir:

$$P(\cdot G) = qP(G)$$

Son olarak üçüncü kural için ise parçacık fonksiyonundaki şu durum verilmelidir:

$$P(\rightarrow \leftarrow) = P(\rightarrow \leftarrow) + vP(\times)$$

G grafinin tüm köşeleri $\{1, 2, \dots, n\}$ sayıları ile gösterilsin. e kenarı ile bağlantılı a ve b köşe sayıları G grafinde alınsın. Dual grafların verildiği Şekil 3.10 da olduğu gibi G' , G de e nin silinmesiyle elde edilen graf ve G'' , G de e nin birleştirilmesiyle elde edilen graf olsun. Bu durumda :

$$P(G) = P(G') + vP(G'')$$

elde edilir. Fakat,

$$P(G) = \sum \prod (1 + v\delta(s_i, s_j))$$

dır.

Tüm grafin verilen s durumu için bu toplamdaki terim s ye aşağıdaki gibi karşılık gelir:

$$\begin{aligned} \prod (1 + v\delta(s_i, s_j)) &= (1 + v\delta(s_a, s_b)) \prod_{(i,j) \neq (a,b)} (1 + v\delta(s_i, s_j)) \\ &= \underbrace{\prod_{(i,j) \neq (a,b)} (1 + v\delta(s_i, s_j))}_{1.terim} + v\delta(s_a, s_b) \underbrace{\prod_{(i,j) \neq (a,b)} (1 + v\delta(s_i, s_j))}_{2.terim} \end{aligned}$$

Eşitlikteki ilk terim G' nün parçacık fonksiyonundaki s durumuna karşılık gelen terimidir. İkinci terim için; a ve b köşeleri s durumunda aynı renktir, yani $\delta(s_a, s_b) = 1$ dir. G'' nün parçacık fonksiyonundaki s durumuna karşılık gelen teriminin v katıdır. a ve b köşeleri s durumunda farklı renk olduğu zaman $\delta(s_a, s_b) = 0$ olur ve ikinci terim yok olur. Fakat G'' için bu duruma karşılık gelmediğinden iki köşe bire iner ve farklı renk söz konusu değildir.

Bu tüm mümkün durumların toplamı için $P(G) = P(G') + vP(G'')$ olduğu gösterildi. Bu yüzden, P dikromatik polinomun hesaplanması için verilen kurallara karşılık geldiğinde dikromatik polinom yukarıda hesaplandığı gibi olmuştur. Grafların alterne düğümlere karşılık skein ilişkileri kullanarak hesaplanabilen dikromatik polinomunun, aslında istatistiksel fizikte Potts modeli olarak bilinen parçacık fonksiyonu olduğu görülmüştür (Adams 1994).

4.2. Kromatik, Dikromatik ve Tutte Polinomu

Tanım 4.2.1. $K(G) \in Z[x]$ polinomu herhangi bir G grafının x renkleri ile köşelerinin boyama sayısının $K(G)(x)$ olduğunu söyleyen polinomdur. Bu $K(G)(x)$ polinomuna kromatik polinom denir. Bazı uygulamalar aşağıda verilmiştir (Kauffman 2001).

Örnekler 4.2.2.

$$K(\cdot) = x$$

$$K(\text{---}) = x(x - 1) = x^2 - x$$

$$K(\emptyset) = 0$$

$$K(\triangle) = x(x - 1)(x - 2) = x^3 - 3x^2 + 2x$$

Tanım 4.2.3. $K(G)$ için ayırma formülü aşağıdadır:

$$K(\text{---}) = K(\text{---}) - K(\text{---})$$

$$K(G) = K(G - a) - K(G/a)$$

Bu formülde G nin renklerinin sayısı seçilen bir a kenarının renkleri sayısının durumudur: $(G - a)$, a kenarının silinmesiyle, $\binom{G}{a}$ sayısı a kenarının birbirine bağladığı farklı köşelerin birleştirilmesiyle elde edilmiştir (Kauffman 2001).

$$\begin{aligned} \text{Örnek 4.2.4. } K(\triangle) &= K(\text{---}) - K(\text{---}) = K(\text{---}) - K(\text{---}) - (K(\text{---}) - K(\text{---})) \\ &= K(\text{---}) - K(\text{---}) - K(\text{---}) + K(\text{---}) - K(\text{---}) + K(\text{---}) - \\ &K(\text{---}) + K(\text{---}) \\ &= x^3 - x^2 - x^2 + x - x^2 + x - x + x = x^3 - 3x^2 + 2x \\ \therefore K(\triangle) &= x(x - 1)(x - 2) \end{aligned}$$

(Kauffman 2001).



Kenarı yok edip noktaların birleşirildiğini göstermek için bir işaret konursa kenarın üstüne:

$$K(\text{---}) = K(\text{---}) - K(\text{---})$$

olur.

Buradaki hesaplamalar gösterir ki; K nın değerlerinin toplamında G den seçilen her bir kenarı silmek ya da işaretlemek ile elde edilen işaretli grafa bu ayırmanın sonucudur (Kauffman 2001).

Tanım 4.2.6. Herhangi bir G grafi için G nin B işaretli durumu demek her bir seçimde kenarı silmek ya da işaretlemek demektir. $\|B\|$ ile B bileşenlerinin sayısı ve $i(B)$ ile işaret sayısı gösterilsin (Kauffman 2001).

Örnek 4.2.5.  ile işaretli olarak verilen B durumu  na aittir, ve $\|B\| = 2$, $i(B) = 2$ dir (Kauffman 2001).

Tanım 4.2.7. Kromatik polinomun genel formülü:

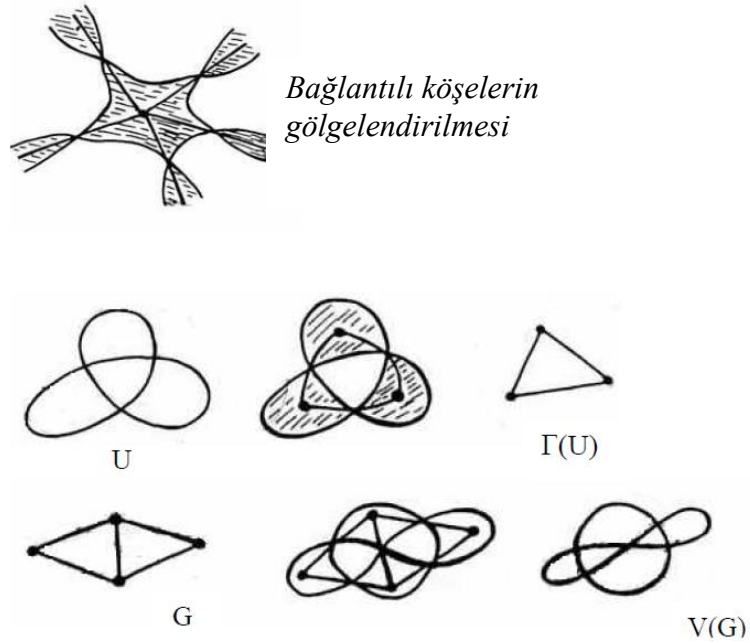
$$K(G) = \sum_B (-1)^{i(B)} x^{\|B\|}$$

dir (Kauffman 2001).

Teorem 4.2.8. Düğüm evrenleri düzlemsel graflara bire bir karşılık gelir (Kauffman 1988).

İspat: Sınırla belirlenmemiş bölge gölgelenmeyecek şekilde keyfi bir evren alınsın. Bu U evreninden $\Gamma(U)$ grafi aşağıdaki şekilde elde edilir. $\Gamma(U)$ nun graf köşeleri U nun

gölgelendirilmiş bölgelerine karşılık gelirse, gölgelendirilmiş bölgeyi gölgelendirilmiş bölgeye bağlayan ve geçitlerden geçen ve aynı zamanda köşeleri birbirine bağlayan eğriler $\Gamma(U)$ nun kenarlarını gösterecektir. Bu şekilde elde edilen grafa $\Gamma(U)$ grafi denir. Bir G grafi verildiğinde G nin her bir kenarı üstüne $\text{---}\times\text{---}$ formunda bir geçiş yerleştirilirse ve Şekil 4.2 de gösterildiği gibi her bir köşeye bu kavşaklar bağlanırsa G grafi bir $V(G)$ evrenine birleştirilmiş olur. Dolayısıyla $\Gamma(V(G)) = G$ ve $V(\Gamma(U)) = U$ olduğu doğrulanmış olur. ■



Şekil 4.2. Bağlantılı köşelerin gölgelendirilmesi (Kauffman 1988)

4.3. W - Aksiyomları (Potts Parantezi)

Tanım 4.3.1 (W - Aksiyomları): K bir düğüm veya halka diyagramı olsun. $W(K) \in \mathbb{Z}[q^{1/2}, q^{-1/2}, v]$ ifadesi q ve v nin fonksiyonları ile iyi tanımlanmış olsun.

$$1. W(\text{---}\times\text{---}) = \left(q^{-\frac{1}{2}}v\right) W(\text{---}\times\text{---}) + W(\text{---}\times\text{---})$$

$$W(\text{---}\times\text{---}) = \left(q^{-\frac{1}{2}}v\right) W(\text{---}\times\text{---}) + W(\text{---}\times\text{---})$$

2. $W(\text{link}) = (q^{-\frac{1}{2}v})W(\text{link}) + W(\text{link})$ şeklinde gösterildiği için;

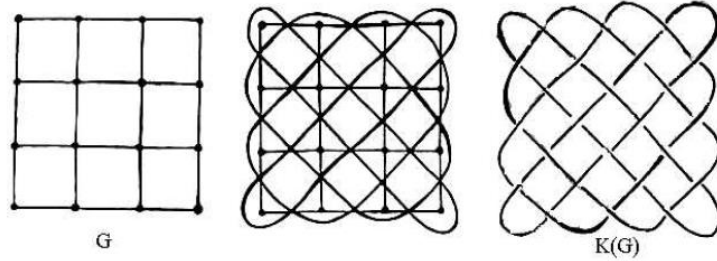
$$W(O \cup K) = \left(q^{\frac{1}{2}}\right)W(K)$$

3. $W(O) = q^{\frac{1}{2}}$

ve $Z(K) = q^{\frac{N}{2}}W(K)$ olarak Z tanımlanır, burada N , K daki gölgelendirilmiş bölgelerin sayısıdır (Kauffman 2001).

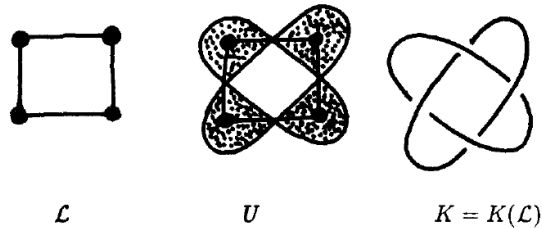
Dikromatik polinom Potts parçacık fonksiyonundan dolayı bir L kafesi için onun $K(L)$ halka diyagramından ilk önce elde edilen L nin medial grafi yardımıyla hesaplanabilir. Belirlenen kurallar yardımıyla gölgelendirilmiş bir U evreninden alınan L düğümü için $K(L)$ düğüm diyagramı yapısı kurulabilir ve dikromatik polinomu hesaplanabilir.

Örnek 4.3.2. (Kauffman 2001).



Şekil 4.3. Kare kafesin düğüme dönüşümü

Örnek 4.3.3. (Kauffman 2001).



Şekil 4.4. (4,1) grafının düğüme dönüşümü

(a) $Z(L) = Z_1$ direk olarak hesaplanır:

$$\begin{aligned}
Z_1(\square) &= Z_1(\lrcorner) + vZ_1(\triangle) \\
&= Z_1(\cdot\lrcorner) + vZ_1(\lrcorner) + vZ_1(\rhd) + v^2Z_1(\circlearrowleft) \\
&= (q+v)Z_1(\lrcorner) + vZ_1(\rhd) + v^2Z_1(\circlearrowleft) \\
&= (q+v)(q+v)^2q + v(q+v)^2q + v^2(q+v)q \\
&= (q+v)^3q + (q+v)^2vq + (q+v)v^2q \\
&= q(q^3 + 3q^2v + 3qv^2 + v^3) + (q^2 + 2qv + v^2)vq + q^2v^2 \\
&\quad + qv^3 \\
&= q^4 + 3q^3v + 3q^2v^2 + qv^3 + q^3v + 2q^2v^2 + qv^3 + q^2v^2 \\
&\quad + qv^3 \\
\therefore Z(\square) &= q^4 + 4q^3v + 6q^2v^2 + 3qv^3
\end{aligned}$$

(b) Önce $W(K)$ 'yi hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
W(\times) &= xW(\times) + W(><) \\
W(O \cup L) &= yW(L), W(O) = y
\end{aligned}$$

Kuralları yardımıyla W 'yi hesaplayalım. Burada $x = q^{-1/2}v$, $y = q^{1/2}$ olarak alınırsa;

$$\begin{aligned}
W(\dagger) &= W(\mathcal{V}) + xW(\overline{\mathcal{O}}) = W(\sim) + xyW(\sim) \\
\therefore W(\dagger) &= (1+v)W(\sim) = (1+xy)W(\sim) \\
W(\mathcal{O}) &= xW(\mathcal{V}) + W(\overline{\mathcal{O}}) = xW(\sim) + yW(\sim) \\
\therefore W(\dagger) &= (q^{1/2} + q^{-1/2}v)W(\sim) = (x+y)W(\sim)
\end{aligned}$$

olduğundan;

$$W(\mathcal{O}) = W(\mathcal{V}) + xW(\mathcal{O})$$

$$\begin{aligned}
&= (x+y)^3 W(\bigcirc) + x \left[W(\text{⌚}) + x W(\text{⌚}) \right] \\
&= (x+y)^3 y + x(x+y)^2 y + x^2 W(\text{⌚}) \\
&= (x+y)^3 y + x(x+y)^2 y + x^2 \left(W(\text{⌚}) + x W(\text{⊙}) \right) \\
\therefore W(\text{⌚}) &= (x+y)^3 y + (x+y)^2 xy + (x+y)(x^2 y + xy)
\end{aligned}$$

olur. Buradan $Z(L) = q^{\frac{N}{2}} W(K(L))$ olduğu görülür (Kauffman 2001).

Açıkça görülmektedir ki; dikromatik polinomun düğüm diyagramlarını kullanarak yapılan hesaplamalara çevirisi kolay değildir. Bu aynı zamanda dikromatik polinomun Potts modeli aracılığıyla Temperly-Lieb cebir ile alakalı olduğunu da göstermektedir.

Düzlemsel graflarda dikromatik polinomu vermek için parantez polinomunun nasıl kullanıldığı gösterildi. Yukarıda genel parantez fonksiyonu, durum genişletme formülü şeklinde yeniden ifade edilecektir. Bu durum sadece bir bileşenli durumlarda hesaplanır. Yeniden formül şeklinde ifade etme işlemi Morwen Thistlethwaite çalışmasını Tutte (1989) geneller. Parantez ve Jones polinomu için bunun nasıl yapıldığı Tutte (1989) 'de gösterildi. Buradaki fikir, Tutte polinomu olarak bilinen dikromatik polinomun bir genellemesini yapmaktır (Tutte 1989). Tutte polinomu aşağıdaki gibi tekrarlı olarak tanımlanır.

Tanım 4.3.4. Her bir G grafi bir $T_G(x, y) \in Z[x, y]$ polinomu ile ilişkilendirilsin. Eğer G , yalnız kaldırılabilir geçitler ve ilmeklerden oluşuyorsa bu takdirde $T_G = x^i y^l$ olur. Burada i , kaldırılabilir geçitlerin sayısı ve l , ilmeklerin sayısıdır. Bu polinom

$$T_G = T_{G'} + T_{G''}$$

tekrarlama bağıntısını sağlar. Burada G' ve G'' grafları ne bir ilmek ne de bir kaldırılabilir geçiti olmayan kenarın çıkarılıp kısıtlanmasıyla elde edilen graflardır.

Burada $T_G(x, y)$ ye Tutte polinomu denir. Aşağıda bazı durumları verilmiştir (Kauffman 1988).

Örnek 4.3.5.

$$T \text{---} = x$$

$$T \text{ } \circlearrowleft = y$$

$$T \text{---} \text{---} = x^2 y$$

$$T \triangle = T \nabla + T \text{ } \circlearrowleft = T \nabla + T \text{---} + T \text{ } \circlearrowleft = x^2 + x + y$$

Önerme 4.3.6. $Z_G(q, v)$ dikromatik polinomu ve $T_G(x, y)$ Tutte polinomunu gösterebilir. Bu iki polinom arasındaki ilişki ;

$$i. Z_G(q, v) = qv^{N-1} T_G(1 + qv^{-1}, 1 + v)$$

$$ii. T_G(x, y) = \frac{1}{(x-1)(y-1)^N} Z_G((x-1)(y-1), (y-1))$$

formülleri ile verilir. Burada N, G nin köşelerinin sayısıdır (Kauffman 1988).

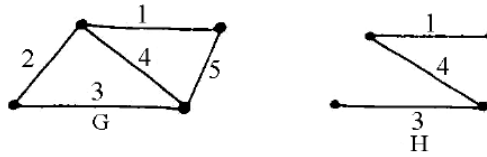
Örnek 4.3.7. $qv \left(1 + \frac{q}{v}\right) = qv + q^2 = Z \text{---} \text{---}$ ve $q(1 + v) = q + qv = Z \text{ } \circlearrowleft$ eşitlikleri (i) formülünün bir ilmek ve kaldırılabilir geçit noktası için doğru olduğunu gösterir (Kauffman 1988).

Aslında Tutte polinomu G grafının maksimal ağaçlarına iliştilen ağırlıklardan hesaplanır. Bu ağırlıklar G nin kenarlarının bir sıralanışına bağlıdır. Ancak özel bir sıralamadan bağımsızdır.

Tanım 4.3.8. G , kenarları $1, 2, 3, \dots, n$ ile numaralandırılan bir graf olsun. $H \subset G$ olacak şekilde G içinde bir maksimal ağaç olsun. $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$, H nin bir kenarını gösterebilir.

H_i , $H - (i. \text{kenarı})$ belirtsin. H bir maksimal ağaç olduğu için H_i iki bileşene sahiptir (Kauffman 1988).

Eğer $G - H$ deki her j kenarı ve H_i nin her iki bileşeninin uç noktaları için $i < j$ ise i ye içten hareketli denir. $i \in G - H$ bir dış kenar olsun. Eğer i nin bir uç noktasından diğer uç noktasına genişleyen H içinde bulunan bütün devirler üzerinde j kenarları için $i < j$ ise i ye dıştan hareketli denir. Burada 1 ile numaralandırılan kenar içten hareketli, 2 ile numaralandırılan ise dıştan hareketlidir (Kauffman 1988).

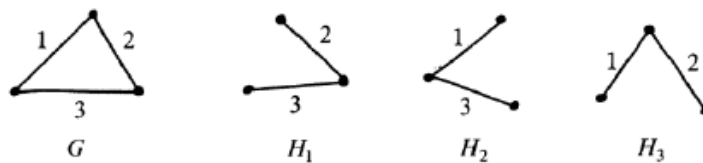


Şekil 4.5. İçten ve dıştan hareketli kenar örnekleri

Teorem 4.3.9 (Tutte): \mathcal{K} , bir G grafi içindeki maksimal ağaçların sınıfını, $i(H)$ verilen bir ağacına göre G içindeki içten hareketli kenarların sayısını ve $e(H)$, G içindeki dıştan hareketli kenarların sayısını gösterebilir. Bu takdirde Tutte polinomu şu formülle verilir (Kauffman 1988):

$$T_G(x, y) = \sum_{H \in \mathcal{K}} x^{i(H)} y^{e(H)}$$

Örnek 4.3.10.



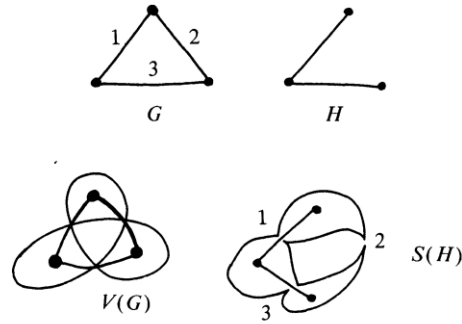
$$T_G = y + x + x^2$$

(Kauffman 1988).

İçten ve dıştan hareketliliğin tanımları bu kavramların farklı olduğunu gösterir. Gerçekte düzlemsel graflar için bir simetri tanımı vardır. Bu simetritlerden yararlanarak Tutte ağırlıkları evrenler ve düğüm teorisi ile ilişkilendirilir.

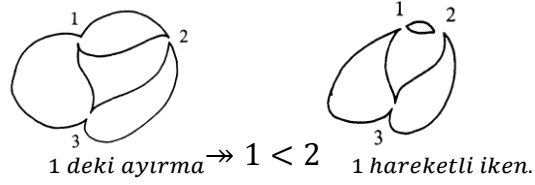
Bu simetri bir düzlemsel G grafi ile ilişkili $V(G)$ evreni göz önüne alındığında anlaşılır. Her bir maksimal $H \subset G$ ağacı bir bileşenli $V(G)$ nin bir $S = S(H)$ durumunu belirler. Bu durum $V(G)$ nin, H nin kenarları boyunca ayrılmasıyla ve diğer bütün geçitlerin ayrılmasıyla elde edilir $\left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right]$ (Kauffman 1988).

Örnek 4.3.11.



G nin numaralandırılan bir kenarı $V(G)$ nin aynı sayı ile numaralandırılan bir köşesi olur. $S(H)$ nin köşelerine (geçitlerine), $S(H)$ Jordan izinin içe ya da dışa doğru ayrılmasına göre iç ya da dış köşe denir. Böylece yukarıdaki örnekte 1 ve 3 iç, 2 dış köşedir (Kauffman 1988).

Tanım 4.3.12. Köşeleri (kenarları) $1,2,3,\dots,n$ ile numaralandırılan bir S Jordan iz evreninde ($|S| = 1$ olan bir evren) eğer i köşesinde S nin ayrılmasından sonuçlanan iki bileşenli bütün j bölgeleri için $i < j$ ise i bölgesine i hareketlidir denir (Kauffman 1988).

Örnek 4.3.13.

Eğer bir iz üzerindeki bir kenar iç ve hareketli ise bu kenar içten hareketlidir. Eğer bir kenar dış ve hareketli ise bu kenar dıştan hareketlidir. $V(G)$ üzerindeki Jordan izleri yardımıyla ağaçların tekrar G içine yerine koyulmasıyla $T_G(x, y)$ nin bir simetrik tanımı elde edilir (Kauffman 1988).

Bu düzenlemeden kolayca görülebilir ki $T_G(x, y) = T_{\bar{G}}(y, x)$ 'dir. Burada \bar{G} , düzlemsel G grafına düzlemsel dual graftır. Her bir Jordan izi, bir G için ve bir \bar{G} için maksimal ağaçların bir çiftini verir (Kauffman 1988).

Tutte ağırlıklarını kullanarak halka diyagramları için $[K]$, parantez polinomunun nasıl hesaplanacağı açıklanabilir. $[K]$ parantez polinomunun A, B, d cebirsel değişkenlerine ve

$$[\times] = A[\asymp] + B[><]$$

$$[OK] = d[K]$$

$$[\mathcal{D}] = (Ad + B)[\text{---}]$$

$$[\overline{\mathcal{D}}] = (A + Bd)[\text{---}]$$

bağıntılarına sahip olduğu daha önce verilmişti.

$\alpha = Ad + B$, $\bar{\alpha} = A + Bd$ olarak alınsın. K verilen bir diyagram ve S , K diyagramının bir bileşenli ($|S| = 1$) bir durumu olsun. δ , bir bileşenli bütün S durumlarının sınıfını göstere. K nin geçitleri $1, 2, 3, \dots, n$ ile numaralandırılsın. K nin her bir geçidi S nin

karşılık gelen bölgedeki bir yerel dağılımını belirleyecektir. Eğer bölge hareketli değilse genel parantez dağılımı;

$$[\times | \times] = A$$

$$[\times | > <] = B$$

şeklindedir. Eğer bölge hareketli ise;

$$[\times | \times] = \bar{\alpha}$$

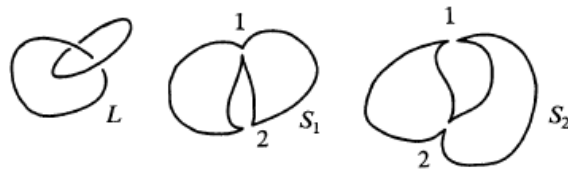
$$[\times | > <] = \alpha$$

şeklinde alınır. Bu takdirde $[K|S]$ bu yerel dağılımların hepsinin çarpımıdır ve $[K]$,

$$[K] = \sum_{\delta \in \varphi} [K|S]$$

formülü ile verilir. Bu durumlar aşağıda örneklendirilmiştir (Kauffman 1988):

Örnek 4.3.14.



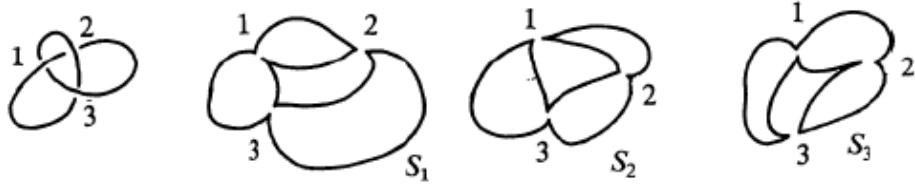
$[L] = \sum_{\delta \in \varphi} [L|S] = \alpha A + \bar{\alpha} B$ (1, S_1 içinde hareketli ayrıca S_2 içinde de hareketlidir).

Bu örnek uzun yolla yapılırsa;

$$\left[\text{Yonca} \right] = A \left[\text{Yonca} \right] + B \left[\text{Yonca} \right] = A(Ad + B) + B(A + Bd) = A\alpha + B\bar{\alpha}$$

elde edilir.

Örnek 4.3.15.



$$[K] = \sum_{\delta} [K | S] = \alpha A^2 + \bar{\alpha} BA + \bar{\alpha}^2 B$$

Yonca yaprağı düğümünün parantez değerinin $\langle K \rangle = -A^{-3} - A^5 + A^{-7}$ olması için $\alpha = -A^3, \bar{\alpha} = -A^{-3}, B = A^{-1}$ dir.

Örnek 4.3.16.

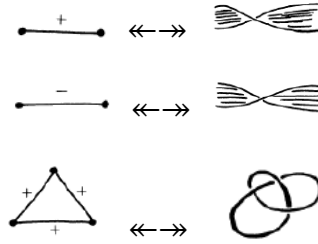
$$[\infty] = [\infty | \infty] = \bar{\alpha}$$

$$[\text{Yonca}] = [\text{Yonca} | \text{Yonca}] = \alpha$$

Bunlar kaldırılabılır geçit ve ilmek için temel dağılımlara grafiksel olarak karşılık gelir. Bununla birlikte eğer geçit değiştirilirse, bu durumda dağılımlar kıvrıma (flip) karşılık gelir (Kauffman 1988).

Uyarı 4.3.17. Çemberin parantez polinomu yeni duruma uygundur: $[0] = 1$ (Kauffman 1988).

Örnek 4.3.18. Düğümlerin ve halkaların diyagramlarının işaretli düzlemsel graflara birebire karşılık geldiğine göre burada (+), bir $A -$ kanalına, (-) de bir $B -$ kanalına karşılık gelecek şekilde işaretler grafin kenarları üzerine yerleştirilir.



Bu gerçekte bir yeni formüllendirilmesidir. Genelleştirilmiş parantezin bu yeni Tutte formüllendirilmesi, işaretli graflar için aşağıdaki şartları sağlayan bir genelleştirilmiş Tutte polinomunu verir.

1. Eğer G , i_+ pozitif kaldırılabilir geçitlere, i_- negatif kaldırılabilir geçitlere, l_+ pozitif ilmeklere, l_- negatif ilmeklere karşılık getirilirse bu durumda;

$$T_G = X^{i_+ + l_-} Y^{i_- + l_+}$$

olur.

2. Eğer işaretlenmiş bir kenar bir kaldırılabilir geçit ya da ilmek değilse bu durumda;

$$T \xrightarrow{+} \text{---} = BT \xrightarrow{-} \text{---} + AT \xrightarrow{+} \text{---}$$

$$T \xrightarrow{-} \text{---} = AT \xrightarrow{-} \text{---} + BT \xrightarrow{+} \text{---}$$

olur.

Böylece $T_G(A, B, x, y)$ kare parantezin bir teorik graf versiyonudur (Önceki gösterimde $x = \alpha, y = \bar{\alpha}$ dır) (Kauffman 1988).

Bu, geren ağaçlar teriminde $Ax + B^2 = A^2 + By$ şeklinde bir Tutte ifadesine sahiptir.

Örnek 4.3.19.

$$\begin{array}{l}
 \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right. \right] = A \\
 \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right. \right] = B \\
 \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right. \right] = \bar{\alpha} \\
 \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right. \right] = \alpha
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{hareketli olmayan bölge} \\ \\ \text{hareketli bölge} \end{array}$$

formlarını alırlar. Bu formlardan $B = A^{-1}$, $\alpha = -A^3$, $\bar{\alpha} = -A^{-3}$ iken parantez hakkında bazı özellikler kolayca görülebilir. $\alpha = -A^4(A^{-1})$, $\bar{\alpha} = -A^{-4}(A)$ olduğuna dikkat edilirse bu durumda K alterne diyagramı için

$$\langle K \rangle = A^{I-E} T_{G(K)}(-A^{-4}, -A^4)$$

olur. Burada T bir Tutte polinomu, I bir iz üzerindeki iç bölgelerin sayısı, E de bir iz üzerindeki dış bölgelerin sayısıdır. $I - E$ verilen bir iz seçiminden bağımsız bir sabittir.

f_K kuşatan izotopi invariantının

$$f_K = a^{-w(K)} \langle K \rangle = (-A^{-3})^{w(K)} \langle K \rangle$$

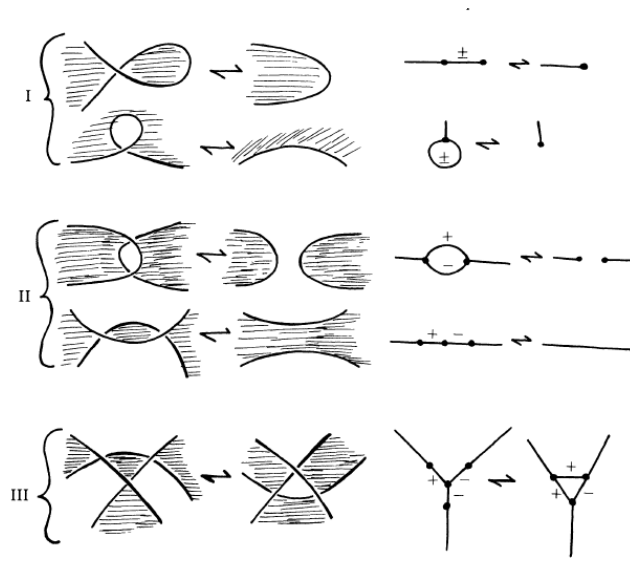
formülü ile ve $V_K(t)$ Jones Polinomunun

$$V_K(t) = f_K(t^{-1/4})$$

formülü ile verildiği göz önüne alınırsa aşağıdaki teorem ifade edilebilir (Kauffman 1988).

Teorem 4.3.20 (Thistlethwaite): K bir alterne diyagram, ve $G(K)$, K ya karşılık gelen düzlemsel graf olsun. Bu durumda $V_K(t)$ Jones polinomu t nin kuvvet ve işareti farkıyla $T_{G(K)}(-t, -t^{-1})$ Tutte polinomuna eşittir.

Bu önemli gözlemden bazı durumlar ortaya kolayca çıkar. Örneğin bir alterne halkanın Jones polinomunun katsayılarının işareti, derecenin paritesine göre alternedir. Yani bir alterne halkanın Jones polinomu bir alterne polinomdur (Thistlethwaite 1987).



Şekil 4.6. Graflar üzerinde Reidemeister hareketleri

Bu bölümde, graf teorisinden parantez polinomunun ve dolayısıyla Jones polinomunun nasıl ortaya çıktığı sorusunun cevabı araştırıldı.

Bu polinomların yeniden yapılandırılması işaretli graflar için genelleştirilmiş Tutte polinomu sayesinde graf teorisinde mümkün olmuştur.

Düğüm ve halkalar işaretli graflarla kodlandığı için bunun, Tutte polinomunun özelleştirilmesinin bir invaryantını verdiğini görmek mümkündür. Bu yeniden yapılandırmayı test etmek için ilk önce Reidemeister hareketlerinin bir graf teorik versiyonu incelenmelidir. Bunun için Şekil 4.6'ya bakınız.

Taranmış bölgeler ışığında graflara geçiş olduğundan II. Tip hareketin iki versiyonu ve III. Tip hareketin iki versiyonu vardır. I. Tip hareket bir kol ya da ilmeğin eklenmesi ya da çıkarılmasını gerektiriyorken II. Tip hareketin iki versiyonu çıkarma ve kısıtlama formlarında işaretlenir. Bu ilişkilerden bir invaryant elde etmek için Tutte polinomu çalışılır (Kauffman 1988).

Bunun için bir önceki bölümdeki Örnek 4.3.19 de açıklanan işaretli graflar için genelleştirilmiş Tutte polinomu ile başlansın. Yani herhangi bir işaretli G grafına bir $T_G(A, B, x, y)$ polinomu ilişkilendirilsin. Bu polinom aşağıdaki kurallarla karakterize edilir ($x = Ad + B, y = A + Bd$) (Kauffman 1988):

1. Eğer G yalnız ilmeklere ve kaldırılabilir geçitlere sahip ise bu durumda $T_G = x^{i_+ + l_-} y^{i_- + l_+}$ dir. Burada i_+ pozitif kaldırılabilir geçitlerin sayısı, i_- negatif kaldırılabilir geçitlerin sayısı, l_+ pozitif ilmeklerin sayısı, l_- de negatif ilmeklerin sayısıdır.

$$2. \quad \begin{aligned} T \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} &= BT \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array} + AT \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \\ T \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array} &= AT \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array} + BT \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \end{aligned}$$

Bu polinomun II. Tip hareket altındaki davranışı aşağıdaki önermede verilmiştir.

Önerme 4.3.21. $T_G(A, B, x, y)$ nin ikinci hareket altında invaryant olması için gerek ve yeter şart $B = A^{-1}$, $x = -A^{-3}$, $y = -A^3$ olmasıdır (Kauffman 1988).

İspat:

$$\begin{aligned} T \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} &= AT \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array} + BT \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \\ &= A(BT \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array} + AT \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array}) + ByT \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \\ &= ABT \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array} + (A^2 + By)T \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T \text{---} \textcircled{+} \text{---} &= AT \text{---} \textcircled{-} \text{---} + BT \text{---} \textcircled{-} \text{---} \\
&= B(BT \text{---} \bullet \text{---} + AT \text{---} \bullet \text{---}) + AxT \text{---} \bullet \text{---} \\
&= ABT \text{---} \bullet \text{---} + (B^2 + Ax)T \text{---} \bullet \text{---}
\end{aligned}$$

ispatın geri kalanı bu özdeşlikler yardımıyla yapılır.

Parantez için yapılan işlemler burada da yapılırsa, $B = A^{-1}$, $y = -A^3$, $x = -A^{-3}$ ile T_G polinomu keyfi graflar için II. Tip ve III. Tip hareketlerin bir invariantı olur. ■

Tanım 4.3.22. Herhangi bir bağlantılı G grafi için

$$\Omega_G = T_G(A, A^{-1}, -A^{-3}, -A^3)$$

şeklindeki $\Omega \in Z[A, A^{-1}]$ polinomuna Laurent polinomu denir (Kauffman 1988).

Önerme 4.3.20 den Ω_G II. Tip grafiksel hareketin bir invariantıdır. III. Tip invariantlık aşağıdaki önermede verildi.

Önerme 4.3.23. Eğer G ve G' , III. Tip hareket altında birbirine ilişkili iki işaretli graf ise bu durumda

$$\Omega_G = \Omega_{G'}$$

dır (Kauffman 1988).

İspat:

$$\begin{aligned}
 \Omega &= A\Omega + B\Omega \\
 &= A\Omega + B\Omega \quad \text{II. tip} \\
 &= A\Omega + B\Omega \quad \text{III. tip} \\
 &= \Omega
 \end{aligned}$$

Uyarı 4.3.24. Graf bağlantısız olsa bile II. Tip hareket altındaki invariyantlık sağlanabilir. Bu durumda sadece $T_{G \sqcup G'}$ için bir formüle ihtiyaç vardır. Burada \sqcup ayrık birleşimi göstermek üzere; $T_{\bigcirc^+} = Ax + By$ olduğuna dikkat edilmelidir.

$$T_{G \sqcup G'} = Ax + ByT_G T_{G'}$$

ile tanımlansın. Bu durumda bu hareket için Ω nın sağ invariyant özelliklerine sahip olduğunu görmek kolaydır. Dikkat edilirse $B = A^{-1}, y = -A^3, x = -A^{-3}$ için d parantez çarpanına karşılık gelen $Ax + By = -A^{-2} - A^2 = d$ ifadesi elde edilir (Kauffman 1988).

Bu bölüm graf-teorik formüle etmenin bir taslağı olarak görülebilir. Keyfi işaretli graflar (düzlemsel olması gerekmez) için Ω_G , II. ve III. Tip hareketlerin bir invariyantıdır. Buna, düğüm teorisinin bu dönüşümleri içeren ağlara genişletilmesi olarak bakılabilir. Ω_G , I. Tip hareket altında x ya da y ile çarpılır. Soyut graf teoride burulma sayısının tamamen aynısı yoktur. O halde geriye bu üç hareketin bir

invariantını elde etmek için Ω_G nın normalize edilemeyeceği kalır. Graf teorisinden düğüm teorisine geçisi aşağıdaki teorem tamamlar.

Teorem 4.3.25. G bir işaretli düzlemsel graf ve $K(G)$, G ye karşılık gelen düğüm veya halka diyagramı olsun. Bu durumda

$$\langle K(G) \rangle = \Omega_G$$

olur. Yani düğümler ve halkalar için parantez polinomu, işaretli graflar için genelleştirilmiş Tutte polinomunun bir özel halidir (Tutte 1954).

Son olarak, işaretli G grafları için $T_G(A, B, x, y)$ genelleştirilmiş Tutte polinomu tekrar ele alındığında onun geren bir ağaç ifadesine sahip olduğu görülür. G nin kenarlarının bir sıralanışı ve bir maksimal $H \subset G$ ağacı verilsin. Dağılımlar, G nin kenarlarından aşağıdaki gibi tanımlansın.

İçten hareketli, +: x	İçten hareketsiz, +: A
Dıştan hareketli, -: x	Dıştan hareketsiz, -: A
İçten hareketli, -: y	İçten hareketsiz, -: B
Dıştan hareketli, +: y	Dıştan hareketsiz, +: B

Sonuç olarak, $G(H)$, H için hareketli olan G nin kenarlarının dağılımlarının çarpımını gösterebilir. Bu durumda;

$$T_G = \sum_H G(H)$$

olur. Burada toplam, G içindeki bütün maksimal ağaçlar üzerindedir (Kauffman 1988).

Uyarı 4.3.26: T_G nin iyi tanımlı olması için $Ax + B^2 = A^2 + By$ olması gerekli ve yeterlidir. Bu, topolojik durum için kesin olarak sağlanır. Genel durumda, kare parantezde olduğu gibi bir d değişkeni ortaya çıkarılarak ve $x = A + Bd, y = Ad + B$ alınarak iyi tanımlılık ispatlanabilir. Bu gösterir ki kare parantez, keyfi işaretli graflara

$$T_G(A, B, x, y) = T_G(A, B, d)$$

ile doğrudan genelleştirilir (Kauffman 1988).

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu bölümde, çalışmada elde edilen bazı sonuçlar verilecektir.

Düğüm polinomları, düğümleri ve halkaları sınıflandıran önemli invaryantlardandır. Literatürde çeşitli düğüm polinomları ve bu polinomların genellemeleri vardır. Bu polinomları hesaplamının da değişik yöntemleri vardır. Düğüm teorisi ile matematiğin diğer dalları ve fiziğin bazı konuları arasında bazı ilişkiler olduğu gösterilmiştir.

Bu çalışmada Parantez polinomu diyagramatik bir yöntemle incelendi. Bu polinom yardımıyla ve bu yöntemle bilinen bütün düğüm polinomları kısaca tanıtıldı. Düğüm teorisindeki bazı klasik tahminlerin ispatları, normalize edilmiş parantez polinomu ve onun bir başka versiyonu olan Jones polinomu yardımıyla verildi. Graf teorisindeki bazı polinomların hesaplanması parantez polinomu ve bu polinomda kullanılan teknikler yardımıyla yapıldı. Ayrıca diyagram cebiri ve istatistiksel fizikteki Potts modeline parantez teknikleri uygulandı.

Buradaki polinomlar farklı uzaylara genelleştirilerek yeni çalışmalar yapılabilir.

KAYNAKLAR

- Adams, C. C., 1994. *The Knot Book: An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots*. New York: W. H. Freeman, pp. 280-286.
- Adams, C., 1991. Hildebrand, M.; and Weeks, J. "Hyperbolic Invariants of Knots and Links." *Trans. Amer. Math. Soc.* 1, 1-56.
- Adams C.C., 2008. *Introduction to Topology-Pure and Applied*, s.358-359
- Alexander, J. W. and Briggs, 1927. G. B. "On Types of Knotted Curves." *Ann. Math.* 28, 562-586.
- Aneziris, C. N. , 1999. *The Mystery of Knots: Computer Programming for Knot Tabulation*. Singapore: World Scientific.
- Bar-Natan, D. "The Rolfsen Knot Table." <http://www.math.toronto.edu/~drorbn/KAtlas/Knots/>.
- Birman, J., 1974. *Braids, links and mapping class groups*, *Annals of Mathematics Studies*, 323s , Princeton University Press.
- Bondy, J.A. and Murty, U. S. R., *Graph Theory and Its Application*, Elsevier Science Publishing Co., Fifth Printing, 1982.
- Burde, G., Zieschang, H. ,2003. *Knots*. Walter de gruyter 401 s, Berlin-Newyork
- Cha, J. C. and Livingston, C. "KnotInfo: Table of Knot Invariants." <http://www.indiana.edu/~knotinfo/>.
- Chartrand, G. and Lesniak, L., *Graph and Digraph*, CRC Press, LLC, 1996.
- Conway, J. H. , 1970. "An Enumeration of Knots and Links." In *Computational Problems in Abstract Algebra* (Ed. J. Leech). Oxford, England: Pergamon Press, pp. 329-358.
- Diestel, R. ,1997. *Graph Theory*, Springer-Verlag, 322s, Newyork.
- Diestel, R. ,2000. *Graph Theory Electronic Edition*, Springer-Verlag, 322s, Newyork.
- Eppstein, D. "Knot Theory." <http://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/knot.html>.
- Erdener, K.; Candy, C.; and Wu, D. "Verification and Extension of Topological Knot Tables." <ftp://chs.cusd.claremont.edu/pub/knot/FinalReport.sit.hqx>.
- ERP Productions. "Ropers Knot Pages, Real Knots: Knotting, Bends and Hitches." <http://www.realknots.com/>.
- Godsil, C. And Royle, G., *Extracted from Chapters 16,17 of Algebraic Graph Theory*, 2005.
- Gordon, C. McA. ve Luecke, J., *Knots are Determined by Their Complements*, Amer. Math. Society, 1989.
- GANG. "GANG Knot Library." <http://www.gang.umass.edu/library/knots/>.
- Iyanaga, S. and Kawada, Y. , 1980 .(Eds.). *Encyclopedic Dictionary of Mathematics*. Cambridge, MA: MIT Press, p. 735.
- Kauffman, L. , 1988. *New Invariants in The Theory of Knots*. *American Mathematical Monthly*, Volume 95, Issue 3, 195-242.
- Kauffman, L. , 1995. *Knots and Applications*. River Edge, NJ: World Scientific.
- Kauffman, L. , 1991. *Knots and Physics*. Teaneck, NJ: World Scientific.
- Kauffman, L. , 2001. *Knots and Physics*, 3rd Edition, Teaneck, NJ: World Scientific.
- Lickorish, W. B. R. and Millett, B. R. , 1988. "The New Polynomial Invariants of Knots and Links." *Math. Mag.* 61, 1-23.

- Livingston, C. Knot Theory, 1993. Washington, DC: Math. Assoc. Amer.
- Murasugi, K., 1996. Knot Theory and Its Applications. Birkhauser Verlag, 337s, Boston.
- Reidemeister, K. , 1932.Knotentheorie. Berlin: Springer-Verlag.
- Rolfsen, D. , 1976. "Table of Knots and Links." Appendix C in Knots and Links. Wilmington, DE: Publish or Perish Press, pp. 280-287.
- Saran ,M. S., 2008. Graf Teorisinin Bazı Mühendislik Uygulamaları,Yükseklisans Tezi, Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı
- Suber, O. "Knots on the Web." <http://www.earlham.edu/~peters/knotlink.html>.
- Şayakdokuyan, E.,2004. Döğüm Teorisinde Yeni İnvaryantlar , Niğde Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı
- Şenaydın, G. ,2011. Döğüm ve Graf Teorinin Kimyaya Uygulamaları Üzerine, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilimdalı Yüksekklisans Tezi.
- Şimşek, H.,2001.Pozitif Conway Polinomuna Sahip Pozitif Döğümler, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Doktora Tezi
- Tait, P. G. , 1898. "On Knots I, II, and III." Scientific Papers, Vol. 1. Cambridge, England: University Press, pp. 273-347.
- Thistlethwaite, M. B. ftp://chs.cusd.claremont.edu/pub/knot/Thistlethwaite_Tables/.
- Thistlethwaite, M. B. "Morwen's Home Page." <http://www.math.utk.edu/~morwen/>.
- Uğur, T. ,2002. Döğüm Grafları. Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilimdalı Doktora Tezi.
- Weisstein, E. W. "Books about Knot Theory."
<http://www.ericweisstein.com/encyclopedias/books/KnotTheory.html>.

ÖZGEÇMİŞ

1988 yılında Muğla ilinde doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Ortaca'da tamamladı. 2005 yılında girdiği Cumhuriyet Üniversitesi Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği Bölümünden 2010 yılında dereceyle mezun oldu. 2011 yılında Atatürk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde yüksek lisans eğitimine başladı. Halen lisansüstü eğitimine devam etmektedir.