ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TANJANT DEMETE METRİK GENİŞLEMELERİNİN BAZI UYGULAMALARI ÜZERİNE

Esra YAĞMUR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ERZURUM
2013

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAY FORMU

TANJANT DEMETE METRİK GENİŞLEMELERİNİN BAZI UYGULAMALARI ÜZERİNE

Doç. Dr. Kürşat AKBULUT danışmanlığında, Esra YAĞMUR tarafından hazırlanan bu çalışma 14/06/2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak **oybirliği/~~oy çokluğu~~** (…/…) ile kabul edilmiştir.

Başkan : Doç. Dr. Kürşat AKBULUT *İmza* :

Üye : Doç. Dr. Aydın GEZER *İmza* :

Üye : Yrd. Doç. Dr. Tevfik İŞLEYEN *İmza* :

Yukarıdaki sonucu onaylıyorum

Prof. Dr. İhsan EFEOĞLU
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

TANJANT DEMETE METRİK GENİŞLEMELERİNİN BAZI UYGULAMALARI ÜZERİNE

Esra YAĞMUR

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Kürşat AKBULUT

Bu tezde, tanjant demete metrik genişlemeleri ve bu genişlemelerin bazı uygulamaları araştırılmıştır. İlk olarak tanjant demete olan metrik genişlemeleri verilmiş ve bu metrikler vasıtasıyla oluşan konneksiyonlar incelenmiştir. Daha sonra bu metriklerin oluşturduğu konneksiyonlar ile tanımlanan infinitesimal afin dönüşümler, infinitesimal izometri gibi bazı uygulamalara yer verilmiştir.

2013, 90 sayfa

Anahtar Kelimeler: Metrik Genişlemeleri, Tanjant Demet, İnfinitesimal Afin Dönüşüm, İnfinitesimal İzometri.

ABSTRACT

Master Thesis

ON SOME APLICATIONS OF METRIC EXTENSIONS IN TANGENT BUNDLE

Esra YAĞMUR

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Doç. Dr. Kürşat AKBULUT

In this thesis, metric extensions in tangent bundle and aplications of these extensions have been investigated. Firstly, metric extensions in tangent bundle have been examined and the connections formed with respect to these metrics have been investigated. Such applications as infinitesimal transformations, characterized by these metrics and their connections and infinitesimal isometry have been included in this thesis.

2013, 90 pages

Keywords: Metric Extensions, Tanjant Bundle, Infinitesimal Affine Transformations, Infinitesimal Isometry.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Çalışmalarımda her türlü desteği sağlayan, hocam Sayın Doç. Dr. Kürşat AKBULUT'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca tezimin hazırlanışında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen Geometri Anabilim Dalındaki Sayın hocalarıma şükranlarımı sunarım.

Çalışmalarım esnasında ailemden ve eşimden görmüş olduğum destek ve teşvikten dolayı kendilerine sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans eğitimim boyunca "Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı" ile tarafıma vermiş olduğu maddi destekten dolayı TÜBİTAK'a teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Esra YAĞMUR
Mayıs 2013

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

C	Tam Lift
${}^{CG}g$	Cheeger-Gromoll Lift Metriği
${}^{D}g,\ \left({}^{S}g\right)$	Sasaki (Diagonal) Lift Metrik
L_X	X Vektör Alanına Göre Lie Türevi
H	Yatay Lift
${}^{H}g$	Horizontal Lift Metrik
${}^{s}g$	Synectic Lift Metriği
$T(M_n)$	M_n Manifoldunun Tanjant Demeti
$T_x(M_n)$	$x \in M_n$ Noktasındaki Tanjant Uzay
$T_q^p(M_n)$	M_n Manifoldu Üzerinde (p,q) Tipli Tensör Demeti
T_{km}^{i}	Afin Deformasyon (Gerilme) Tensörü
π	Tabii İzdüşüm
∇_X	X Vektör Alanına Göre Kovaryant Türev
Γ_{ij}^{h}	Cristoffel Sembolü
R_{ijk}^{h}	Eğrilik Tensörü
S_{ij}^{h}	Burulma Tensörü
V	Dikey Lift

1. GİRİŞ

Diferensiyel geometri, geometrik problemleri çözmek için diferensiyel ve integral hesabını kullanan bir matematik dalıdır. Düzlem, uzay eğrileri ve yüzeyler teorisi 18. ve 19. yüzyıllarda bu alanın temellerini oluşturmuştur. 19. yüzyılın sonlarında ise diferensiyel geometri, daha çok diferensiyellenebilir manifoldlar ve bu manifoldlar üzerine inşa edilen geometrik yapılarla ilgilenmiştir.

Diferensiyel Geometride lift kavramı "genişleme" anlamında kullanılmıştır. Geometrik objelerin tensör demetlere genişlemeleri, diferensiyel geometrinin popüler problemlerinden birisidir. Özel bir tensör demet olan tanjant demette bu problem ilk olarak 1962'de Sasaki tarafından incelenmeye başlanmış ve daha sonra bu çalışmalar Yano ve Kobayashi tarafından devam ettirilmiştir. Yine Yano ve Ishihara'nın 1973'de yapmış olduğu çalışmada, tanjant demette dikey, tam, yatay ve sasaki liftleri ile ilgili önemli sonuçlar elde edilmiştir.

Talantova ve Shirokov'un 1975'de yaptığı çalışmada tanjant demette genişleme anlamında "Synectic Lift" denilen yeni bir lift incelenmiştir.

Ayrıca yine bu demette "Cheeger-Gromoll" adında yeni bir lift kavramı 1973'de Musso ve Tricerri'nin çalışmasıyla ortaya konulmuştur. Daha sonra bu çalışmadan esinlenen bir çok bilim adamı bu lift ile ilgili önemli çalışmalar yapmıştır.

Yüksek lisans tezi olarak sunulan bu tezde ise, tanjant demette tanımlanan metrik genişlemeleri ve bu metrik genişlemelerinin bazı uygulamaları ele alınmıştır.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Diferensiyellenebilir Manifoldlar

Tanım 2.1.1. X Hausdorff uzay olmak üzere herhangi bir $U \subset X$ açık kümesinden $V \subset \Re^n$ kümesine tanımlanan

$$\varphi : U \to V$$

homeomorfizmine X'de n boyutlu koordinat sistemi veya harita, U ya ise φ haritasının koordinat komşuluğu veya koordinat bölgesi denir ve (U,φ) şeklinde gösterilir. Eğer $x \in U$ ise

$$\varphi(x) = \left(x^1, x^2, ..., x^n\right) \in \Re^n$$

olur. Burada $x^1,...,x^n$ reel sayılarına φ haritasında x noktasının koordinatları denir.

Tanım 2.1.2. Eğer X Hausdorff uzayının n-boyutlu φ_α haritalarının U_α bölgeleri bu uzayı örterse, yani

$$X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \,, \quad (\text{ A-indisler kümesi })$$

ise X 'e n-boyutlu topolojik manifold veya sadece n-boyutlu manifold denir.

Tanım 2.1.3. X Hausdorff uzay ve k ise $0 \le k \le \infty$ şartını sağlayan tam sayı olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in A, U_\alpha \subset X\}$ lokal koordinatlar ailesine X üzerinde C^k sınıfından n-boyutlu atlas adı verilir:

1. Lokal haritaların U_α bölgesi *X'* i örter, yani *X*, *n*-boyutlu topolojik manifolddur.

2. Keyfi $\alpha,\beta \in A$ için $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ ise

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha\left(U_\alpha \cap U_\beta\right) \to \varphi_\beta\left(U_\alpha \cap U_\beta\right)$$

dönüşümü C^k sınıfındandır. Bu şarta bazen $\left(U_\alpha, \varphi_\alpha\right)$ ve $\left(U_\beta, \varphi_\beta\right)$ haritalarının C^k uzlaşması şartı da denir.

$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümüne ise koordinatların dönüşümü $\left(u_\beta^i = u_\beta^i\left(u_\alpha^j\right), i, j = 1,...,n\right)$ denir. Burada u_β^i, $\left(U_\beta, \varphi_\beta\right)$ haritasındaki $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ noktasının koordinatları, u_α^j ise $\left(U_\alpha, \varphi_\alpha\right)$ haritasındaki x noktasının koordinatlarıdır.

$U_\alpha \cap U_\beta = \varnothing$ ise bu durumda $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümü tanımlanamaz. Ancak, bu durumda $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümünün C^k sınıfından olduğu kabul edilecektir. 2. şart, $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümlerinin C^k sınıfından difeomorfizmler olmasına denktir. Bu ise, $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ koordinat dönüşümünün Jakobian matrisinin determinantının sıfırdan farklı olması demektir.

Tanım 2.1.4. $\{(\mathrm{U}_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ ve $\{(\mathrm{U}_\beta, \varphi_\beta)\}$, C^k sınıfından herhangi iki atlas olsun. Bu atlasların keyfi $\left(U_\alpha, \varphi_\alpha\right)$ ve $\left(U_\beta, \varphi_\beta\right)$ haritaları C^k uzlaşmış ise yani, $\{(\mathrm{U}_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ ve $\{(\mathrm{U}_\beta, \varphi_\beta)\}$ atlaslarının birleşimi C^k sınıfından atlas ise verilen atlaslara denk atlaslar denir.

Tanım 2.1.5. *X* Hausdorff uzayı üzerinde C^k atlaslarının denklik sınıfına C^k-yapı denir. C^k-yapısının tüm C^k atlaslarının birleşiminin oluşturduğu C^k atlasına maksimal C^k atlas adı verilir.

X üzerindeki C^k atlaslarının her bir denklik sınıfı, kendisinin bir elemanı ile ifade edilir. Yani, C^k-yapısı, onun keyfi C^k atlası yardımıyla oluşturulabilir. Buradan da, X üzerindeki her bir C^k-yapısının bu yapıdan olan bir C^k atlas ile verilebileceği sonucu çıkar.

C^0-yapıya topolojik yapı, C^k $(1 \le k \le \infty)$ yapıya ise düzgün (smooth) yapı denir. Bundan sonra yalnız C^∞-yapılara bakılacaktır.

Tanım 2.1.6. M, sayılabilir baza sahip Hausdorff uzay olsun. Eğer, M üzerinde n-boyutlu C^∞ atlaslarının C^∞ yapısı verilmişse M uzayına n-boyutlu C^∞ sınıfından diferensiyellenebilir manifold veya düzgün manifold denir ve M_n ile gösterilir.

2.2. Tensör

Tanım 2.2.1. B_n, $n-$boyutlu reel vektör uzayı, B_n^* ise onun dual uzayı olsun. $\vec{x}_j \in B_n$, $j = 1,...,q$ ve $\overset{i}{\xi} \in B_n^*$, $i = 1,..., p$ kovektör değişkenlerinin

$$\omega = t\ (\vec{x}_1, \vec{x}_2,..., \vec{x}_q, \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi},..., \overset{p}{\xi})$$

reel değerli fonksiyonunu göz önüne alalım. Eğer bu fonksiyon her bir değişkene göre lineerlik şartını sağlarsa, fonksiyona multilineer fonksiyon denir.

Mesela birinci vektör değişkenine göre lineerlik şartı $\lambda, \mu \in \Re$ olmak üzere

$$\omega = t(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}, \vec{x}_2,..., \vec{x}_q, \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi},..., \overset{p}{\xi}) = \lambda t\ (\vec{x}, \vec{x}_2,..., \vec{x}_q, \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi},..., \overset{p}{\xi}) + \mu t(\vec{y}, \vec{x}_2,..., \vec{x}_q, \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi},..., \overset{p}{\xi})$$

biçiminde gösterilebilir. Bu multilineer fonksiyona karşılık gelen

$$t : \underbrace{B_n \times B_n \times ... \times B_n}_{q} \times \overbrace{B_n^* \times ... \times B_n^*}^{p} \rightarrow \Re$$

operatörüne B_n uzayında p dereceden kontravaryant, q dereceden kovaryant tensör adı verilir ve bu şekildeki tüm tensörlerin uzayı $T_q^p(B_n)$ ile gösterilir. $p \geq 0$, $q \geq 0$ olmak üzere $s = p+q$ sayısına ise tensörün valentliği, (p,q) sembolüne ise tensörün tipi denir. (p,0) tipli tensöre kontravaryant tensörler, (0,q) tipli tensörlere ise kovaryant tensörler denir.

$S_2(B_n)$, $T_2^0(B_n)$ uzayının bütün simetrik tensörlerinin alt uzayı olmak üzere herhangi bir $g \in S_2(B_n)$ tensörünü alalım;

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = 0, \ \forall \vec{y} \in B_n \tag{2.1}$$

şartında $\vec{x} = 0$ olursa, bu taktirde g tensörüne regüler tensör denir.

(2.1) eşitliği koordinatlarla

$$g_{ij} x^i y^j = 0$$

biçiminde yazılır. Bu eşitlik her y^j için sağlandığından

$$g_{ij} x^i = 0, \ j = 1, ..., n$$

bulunur. Bu denklem sisteminin $x^i = 0$ çözümüne sahip olması için

$$Det(g_{ij}) \neq 0$$

olması gerekir. Burada $\left(g_{ij}\right)$, g tensörüne karşılık gelen matristir.

$g \in S_2\left(B_n\right)$ tensörü regüler tensör ise g tensörüne B_n uzayında esas tensör adı verilir.

2.3. Tensör alanları

Tanım 2.3.1. M_n, C^∞ sınıfından bir manifold ve T_p, her $p \in M_n$ noktasındaki tanjant uzayı olsun. M_n manifoldunun her $p \in M_n$ noktasına T_p uzayından bir X_p vektörü karşılık getiren X vektör değerli fonksiyonuna vektör alanı denir (Salimov ve Mağden 2008).

$U \subset M_n$ koordinat komşuluğunu alalım. Bu komşuluktaki bir vektör alanı

$$X = \xi^i \partial_i$$

olarak yazılır. ξ^i ler U daki lokal koordinatlara bağlıdır. Yani,

$$\xi^i = \xi^i\left(x^i, \ldots, x^n\right), \quad i = 1, \ldots, n$$

olur.

Tanım 2.3.2. M_n, C^∞ sınıfından bir manifold ve $T_q^p\left(m\right)$, her $m \in M_n$ noktasındaki (p,q) tipli tensör uzayı olsun. M_n manifoldunun her $m \in M_n$ noktasına $T_q^p\left(m\right)$ tensör uzayından bir $t_q^p\left(m\right)$ tensörü karşılık getiren T fonksiyonuna (p,q) tipli tensör alanı denir (Bishop and Goldberg 1968).

Eğer $p = 1$, $q = 0$ ise vektör alanı elde edilir. Yani, $(1,0)$ tipli tensör alanı bir vektör alanıdır.

Eğer $p = q = 0$ ise her $m \in M_n$ noktasına bir skaler değer karşılık gelir. Bu yüzden $(0,0)$ tipli tensör alanı reel değerli bir fonksiyondur.

Eğer $U \subset M_n$ bölgesinde f fonksiyonu C^∞ sınıfından ise her $x \in U$ için $df\big|_x \in T_1^0(x)$ olur. Böylece f fonksiyonunun diferensiyeli olan df operatörü $(0,1)$ tipli bir tensör alanıdır.

Herhangi bir m noktasındaki T_m tensörü simetrik tensör ise T tensör alanına simetrik tensör alanı denir. Eğer herhangi bir m noktasındaki T_m tensörü antisimetrik tensör ise T tensör alanına antisimetrik tensör alanı denir.

T, (p,q) tipli tensör alanı olsun. $\theta_1,...,\theta_p$ $(0,1)$ tipli tensör alanları ve $X_1,...,X_q$ vektör alanları olmak üzere

$$T(\theta_1,...,\theta_p, X_1,...,X_q)(m) = T_m(\theta_1(m),...,\theta_p(m), X_1(m),...,X_q(m))$$

ifadesi reel değerli fonksiyon tanımlar. Özelikle x^i koordinatlarına göre T tensör alanının bileşenleri

$$T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = T\left(dx^{i_1},...,dx^{i_q}, \partial_{j_1},...,\partial_{j_p}\right)$$

biçiminde reel değerli fonksiyonlardır (Bishop and Goldberg 1968).

T tensör alanının bileşenleri C^∞ sınıfından fonksiyonlar ise T tensör alanına C^∞ sınıfındandır denir. C^∞ sınıfından olan $(0,1)$ tipli tensör alanına 1-form (Pfaffian form) denir.

(p,q) tipli T tensör alanının C^{∞} sınıfından olması için gerek ve yeter şart her bir $\theta_1,...,\theta_p$ 1-formları ve her bir C^{∞} sınıfından $X_1,...,X_q$ vektör alanları için $T(\theta_1,...,\theta_p, X_1,...,X_q)$ fonksiyonunun C^{∞} sınıfından olmasıdır.

2.4. Diferensiyel Manifold Üzerinde Afin Konneksiyon

M_n diferensiyellenebilir manifoldunun $\gamma : u^i = u^i(t)$ eğrisi boyunca konneksiyon tanımlanması eğrinin noktalarına uygulanan vektörler arasında bağlantı oluşturma kuralıdır. Eğer γ eğrisinin herhangi bir noktasındaki v^i vektörü t parametresine bağlı olarak değiştikçe verilen konneksiyona göre başlangıçtaki ile uygun kalırsa, bu durumda bu vektör verilen konneksiyona göre γ eğrisi boyunca paralel kaydırılmış olur. Eğer konneksiyon diferensiyellenebilirse, o zaman paralel kaydırmayı ifade eden $v^i = v^i(t)$ fonksiyonları da diferensiyellenebilir fonksiyonlar olur. Eğer vektörlerin paralel kaydırılması halinde lineer bağımlılık korunursa verilen konneksiyona afin veya lineer konneksiyon adı verilir.

Afin konneksiyonun Kozoul tanımı aşağıdaki gibidir.

Tanım 2.4.1. M_n manifoldu üzerinde $T_0^1(M_n)$ vektör alanlarının modülü olmak üzere

$$\nabla_X Y = \nabla(X,Y) : T_0^1(M_n) \times T_0^1(M_n) \to T_0^1(M_n)$$

dönüşümü

i. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,

ii. $\nabla_Z(fX + gY) = (Zf)X + f\nabla_Z X + (Zg)Y + g\nabla_Z Y$

şartlarını sağlıyorsa ∇ ya afin konneksiyon denir. Burada

$$\nabla_X : T_0^1(M_n) \to T_0^1(M_n)$$

dönüşümüne de X vektör alanı boyunca kovaryant diferensiyellenme denir (Bishop and Goldberg 1968).

2.4.1. Burulma tensörü

Tanım 2.4.1.1. M_n bir C^∞ sınıfından diferensiyellenebilir bir manifold ve M_n üzerinde bir afin konneksiyon ∇ olsun.

$$S : T_0^1(M_n) \times T_0^1(M_n) \to T_0^1(M_n)$$
$$(X,Y) \to S(X,Y)$$
$$S(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlanan vektör değerli S tensöre M_n üzerinde tanımlı ∇ konneksiyonunun burulma (torsiyon) tensörü denir.

2.4.2. Eğrilik Tensörü

Tanım 2.4.2.1. (M_n, g) bir yarı-Riemannian manifold ve üzerindeki Levi-Civita konneksiyonu ∇ olsun.

$$R : T_0^1(M_n) \times T_0^1(M_n) \times T_0^1(M_n) \to T_0^1(M_n)$$

$$(X,Y,Z) \to R(X,Y,Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \tag{2.3}$$

şeklinde tanımlanan $(1,3)$ tipili R tensör alanına M_n üzerinde Riemannian eğrilik tensör alanı denir.

2.5. Riemannian Metriği ve Riemannian Manifoldu

Tanım 2.5.1.

i. $g(X,Y)=g(Y,X), \forall X,Y \in T_0^1(M_n)$

ii. $g(X,X)\geq 0, X \in T_0^1(M_n)$ ve $g(X,X)=0 \Leftrightarrow X=0$

şartlarını sağlayan (0,2) tipli g tensör alanına Riemannian metriği denir. g Riemannian metriğine sahip manifolduna M_n Riemannian manifoldu denir.

M_n' de $\{x^1, x^2, ..., x^n\}$ lokal koordinat sistemi verilmiş olsun. Bu lokal koordinatlara göre, g ' nin g_{ij} bileşenleri

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right), \quad i, j = 1, ..., n$$

ile verilir g_{ij} 'ye g 'nin kovaryant bileşenleri denir. g 'nin, g_{ij} kontravaryant bileşenleri

$$g^{ij} = g\left(dx^i, dx^j\right), \quad i, j = 1, ..., n$$

ile tanımlanır (Kobayashi and Nomizu 1963).

Tanım 2.5.2. M_n bir Riemannian manifoldu ve ∇, M_n üzerinde bir afin konneksiyon olsun. Eğer ;

i. ∇ , C^{∞} sınıfındandır.

ii. M_n' nin bir A bölgesi üzerinde, C^{∞} olan $X, Y \in T_0^1(M_n)$ için,

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

dir.

iii. M_n' nin bir A bölgesi üzerinde, C^{∞} olan $X, Y \in T_0^1(M_n)$ ve $\forall p \in A$ için,

$$X_p g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z)/p + g(Y, \nabla_X Z)/p$$

özelliklerini sağlıyorsa ∇ konneksiyonuna M_n üstünde bir Riemannian konneksiyon yada Levi-Civita konneksiyonu ve ∇_X' e de X' e göre Riemannian anlamında kovaryant türev operatörü denir.

$\nabla_k g_{ij} = 0$ şartını sağlayan burulmasız tek bir $\Gamma_{ij}^k = \begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix}_g$ konneksiyonu vardır. Bu konneksiyona Riemannian konneksiyonu veya Levi-Civita konneksiyonu denir ve

$$\Gamma_{ij}^k = \begin{Bmatrix} k \\ ij \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \tilde{g}^{kr} \left(\partial_i g_{jr} + \partial_j g_{ri} - \partial_r g_{ij} \right)$$

ile gösterilir.

2.6. Lie Parantezi

M_n diferensiyellenebilir bir manifold olsun. M_n üzerindeki (U, φ) lokal koordinat sisteminde X, Y vektör alanları

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} = X^i \partial_i \,,$$

$$Y = Y^i \frac{\partial}{\partial y^i} = Y^i \partial_i$$

şeklindedir. Burada $X^i = X^i(x^i)$ ler U koordinat komşuluğundaki x^i lokal koordinatlarının fonksiyonlarıdır. X^i lere X vektör alanının ∂_i çatısındaki koordinatları denir. M_n üzerindeki (U,φ) koordinat sisteminde $f \in \Im_0^0(M_n)$ fonksiyonu için

$$\begin{aligned} X(f) &= X^i \partial_i f, \quad Y(f) = Y^i \partial_i f \\ XY(f) &= X(Y^i \partial_i f) = X^i(\partial_i Y^j \partial_j f + Y^j \partial^2_{ji} f) \\ YX(f) &= Y(X^i \partial_i f) = Y^j(\partial_j X^i \partial_i f + X^i \partial^2_{ij} f) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan da

$$XY(f) - YX(f) = (X^i \partial_i Y^j - Y^i \partial_i X^j)\partial_j f$$

yazılır. Böylece biz

$$XY - YX = [X,Y]$$

biçiminde tanımlanan yeni bir vektör alanı tanımlamış olduk. Bu vektör alanının ∂_i doğal çatısı cinsinden ifadesi

$$[X,Y] = XY - YX = (X^i \partial_i Y^j - Y^i \partial_i X^j)\partial_j \tag{2.4}$$

biçiminde olur.

(2.4) eşitliği ile tanımlanan $[X,Y]$ vektör alanına X ve Y vektör alanlarının Lie parantezi denir.

Özel olarak $\partial_i = \delta_i^k \partial_k$, $\partial_j = \delta_j^k \partial_k$ vektör alanları alınırsa,

$$[\partial_i, \partial_j] = 0$$

olduğu görülür. (2.4) formülünün yardımıyla Lie parantezinin aşağıdaki özelliklere sahip olduğu gösterilebilir.

1. $[X, Y+Z] = [X,Y] + [X,Z]$,
2. $[X, fY] = X(f)Y + f[X,Y]$,
3. $[X,Y] = -[Y,X]$,
4. $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0.$

2.7. Lie Türevi

Tanım 2.7.1. M_n diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde X vektör verilmiş olsun. Her $X \in T_0^1(M_n)$ için,

i. $L_X(K \otimes K') = L_X K \otimes K' + K \otimes L_X K'$, $\forall K, K' \in T(M_n)$

ii. $L_X f = Xf$, $f \in T_0^0(M_n)$

iii. $L_X df = dL_X f$

iv. $L_X Y = [X,Y]$

şartlarını sağlayan L_X operatörüne Lie türevi denir (Kobayashi and Nomizu 1963).

Burada $\left[X,Y\right]$ Lie parantezidir. $L_X Y$ ' nin lokal koordinatlardaki ifadesi;

$$L_X Y^i = X^k \partial_k Y^i - Y^k \partial_k X^i$$

biçiminde yazılır.

Tanım 2.7.2. M_n manifoldunda ∇ afin konneksiyonu ve $X \in \Im_0^1(M_n)$ vektör alanı verilsin. Her $Y,Z \in \Im_0^1(M_n)$ için X vektör alanının ∇ afin konneksiyonuna göre Lie türevi invaryant formda,

$$(L_X\nabla)(Y,Z) = L_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(L_X Z) - \nabla_{[X,Y]}Z = \left[L_X, \nabla_Y\right]Z - \nabla_{[X,Y]}Z$$

şeklinde tarif edilir.

2.8. İnfinitesimal Dönüşümler

Tanım 2.8.1. M_n, n- boyutlu bir manifold olmak üzere $X \in \Im_0^1(M_n)$ olsun. $\forall X \in T_0^1\left(M_n\right)$ için $\left(L_X\nabla\right)\left(Y,Z\right) = L_X\left(\nabla_Y Z\right) - \nabla_Y\left(L_X Z\right) - \nabla_{[X,Y]}Z$ şeklinde tanımlanır. Eğer $L_X\nabla = 0$ ise X vektör alanına ∇ afin konneksiyonuna göre infinitesimal afin dönüşüm denir ve koordinatlarla

$$\partial_\gamma \partial_\beta X^\alpha + X^\lambda \partial_\lambda \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha - \Gamma_{\gamma\beta}^\lambda \partial_\lambda X^\alpha + \Gamma_{\lambda\beta}^\alpha \partial_\gamma X^\lambda + \Gamma_{\gamma\lambda}^\alpha \partial_\beta X^\lambda = 0$$

şekilde gösterilir. Burada $\alpha, \beta, ... = 1, ..., n$ dir.

2.9. İnfinitesimal İzometri

Tanım 2.9.1. M_n, g metriğine sahip Riemannian manifold ve $X \in \Im_0^1(M_n)$ olsun. Eğer $L_X g = 0$ ise X vektör alanına infinitesimal izometri (Killing Vektör Alanı) denir.

g_{ij} ler g metriğinin ve X^α lar da X vektör alanının bileşenleri olmak üzere koordinatlarla

$$\begin{aligned} L_X g_{ij} &= X^\alpha \partial_\alpha g_{ij} + g_{\alpha j} \partial_i X^\alpha + g_{i\alpha} \partial_j X^\alpha \\ &= X^\alpha \nabla_\alpha g_{ij} + g_{\alpha j} \nabla_i X^\alpha + g_{i\alpha} \nabla_j X^\alpha \\ &= \nabla_j X_i + \nabla_i X_j = 0 \end{aligned}$$

şartını sağlayan X vektör alanına infinitesimal izometri denir (Yano 1957).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Tanjant Demet

M_n, C^∞ sınıfından *n*- boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold ve M_n manifoldunun p noktasındaki tanjant uzay $T_p(M_n)$ olmak üzere

$$T(M_n) = \bigcup_{p \in M_n} T_p(M_n) \tag{3.1}$$

ile tanımlanan $T(M_n)$ kümesine tanjant demet denir.

$T(M_n)$'nin herhangi bir $\tilde{p}$ noktası, yani $\tilde{p} \in T_p(M_n)$ için M_n manifoldu üzerindeki $T(M_n)$ tabii demet yapısını tanımlayan $\pi : T(M_n) \to M_n$ demet projeksiyonu $\tilde{p} \mapsto p$ karşılık getirir. Yani $\pi(\tilde{p}) = p$ olur. $\pi^{-1}(p) = T(M_n)$ kümesine M_n baz uzayındaki *p* noktasında bulunan fibre denir.

M_n baz uzayının $\{U; x^h\}$ koordinat komşuluklar sistemiyle örtüldüğünü farzedelim. Burada (x^h), U komşuluğunda tanımlı lokal koordinat sistemidir. $\pi^{-1}(U) \subset T(M_n)$ açık kümesi $U \times R^n$ direk çarpımına diferensiyellenebilir homeomorfizmdir. R^n, R reel sayılar kümesi üzerindeki *n*- boyutlu vektör uzayı olur. $\tilde{p} \in T_p(M_n)$, $(p \in U)$ noktası (p, X) sıralı ikilisi ile gösterilir ve $X \in R^n$ vektörünün bileşenleri $T_p(M_n)$ tanjant uzayında $\{\partial_h\}$ $\left(\partial_h = \frac{\partial}{\partial x^h}\right)$ doğal bazına göre $\tilde{p}$ nın $(y^h) = (x^{\bar{h}})$ $\bar{h} = n+1,...,2n$ kartezyen koordinatları ile verilir. U komşuluğunda $p = \pi(\tilde{p})$ nin koordinatları (x^h) $h = 1,..,n$ ile gösterilirse $\tilde{p}$ noktası $(x^h, x^{\bar{h}}) \mapsto \tilde{p} \in \pi^{-1}(U)$ ile tanımlanır.

$\pi^{-1}(U) \subset T(M_n)$ açık kümesinde $\left(x^h, x^{\bar{h}}\right)$, lokal koordinatları göstermektedir. Burada $\left(x^h, x^{\bar{h}}\right)$ ya $\left(x^h\right)$ dan indirgenmiş (elde edilmiş) $\pi^{-1}(U)$ daki koordinatları denir.

M_n manifoldunun $p = \pi(\tilde{p})$ noktasını ihtiva eden diğer bir $\left\{U^{'}, x^{h'}\right\}$ koordinat komşuluğu ise koordinat komşuluğu $\pi^{-1}(U^{'})$ olan $\tilde{p}$ yı ihtiva eder ve $\pi^{-1}(U^{'})$ ya göre $\tilde{p}$ nın indirgenmiş koordinatları $\left(x^{h'}, y^{h'}\right)$ ile gösterilir. Burada

$$\begin{cases} x^{h'} = x^{h'}(x) \\ y^{h'} = \frac{\partial x^{h'}}{\partial x^h} y^h \end{cases} \tag{3.2}$$

ile verilir. $x^{h'}(x)$, p noktasındaki $x^1, x^2, ..., x^n$ değişkenlerinin C^∞ sınıfından olan diferensiyellenebilir fonksiyonlarıdır. $x^{\bar{h}} = y^h, x^{\bar{h}'} = y^{h'}$ ile gösterilirse (3.2) denklemi

$$x^{p'} = x^{p'}(x). \quad p^{'} = 1,...2n \tag{3.3}$$

olarak yazılır. (3.2) denkleminin Jacobian matrisi

$$\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^p} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^{h'}}{\partial x^h} & 0 \\ \frac{\partial^2 x^{h'}}{\partial x^h \partial x^i} y^i & \frac{\partial x^{h'}}{\partial x^h} \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

şeklindedir. (3.2) denkleminin tersi ise

$$\begin{cases} x^h = x^h(x'), \\ y^h = \frac{\partial x^h}{\partial x^{h'}} y^{h'} \end{cases} \tag{3.5}$$

veya

$$x^{p} = x^{p}(x'), \quad p = 1,...,2n \tag{3.6}$$

olarak yazılır. (3.5) denkleminin Jacobian matrisi ise

$$\frac{\partial x^{p}}{\partial x^{p'}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^{h}}{\partial x^{h'}} & 0 \\ \frac{\partial^{2} x^{h}}{\partial x^{h'} \partial x^{i'}} y^{i'} & \frac{\partial x^{h}}{\partial x^{h'}} \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

şeklindedir. (3.4) ve (3.7) denklemlerinden ve

$$Det\left(\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^{p}}\right) \rangle 0 \ , \ (Det\left(\frac{\partial x^{p}}{\partial x^{p'}}\right) \rangle 0)$$

eşitsizliklerinde $T(M_n)$ tanjant demetinin daima yönlendirilebilir olduğu sonucu elde edilir.

M_n manifoldu üzerindeki C^{∞} sınıfında (r,s) tipli tüm tensör alanlarının kümesi $T_s^r(M_n)$ ile ve M_n deki tüm tensör alanlarının kümesi ise $T(M_n) = \sum_{r,s=0}^{\infty} T_s^r(M_n)$ ile gösterilir. Benzer olarak $T(M_n)$ tanjant demetindeki tensör alanlarının kümeleri ise sırasıyla $T_s^r(T(M_n))$ ve $T(T(M_n))$ olarak gösterilir.

3.2. Tanjant Demette Liftler

3.2.1. Vertical (Dikey) lift

Tanım 3.2.1.1. M_n manifoldu üzerinde $f : M_n \to R$ fonksiyonu verilmiş olsun. $\pi : T(M_n) \to M_n$ izdüşümü olmak üzere

$$ {}^{V}f = f \circ \pi \tag{3.8} $$

fonksiyonuna f fonksiyonunun tanjant demette dikey (vertical) lifti denir (Yano and Ishihara 1973).

M_n manifoldunun U koordinat komşuluğunda lokal olarak $\omega = \omega_i dx^i$ ile ω, 1-formu verilmişse tanjant demetde $\pi^{-1}(U)$ koordinat komşuluğunda $\iota\omega$ ile gösterilen

$$ \iota\omega = \omega_i y^i \tag{3.9} $$

fonksiyonu tanımlanır. Bu tanıma göre eğer f, M_n manifoldu üzerinde bir fonksiyon ise $\iota(df)$ fonksiyonu $\pi^{-1}(U)$ koordinat komşuluğunda lokal olarak

$$ \iota(df) = (\partial_i f)y^i \tag{3.10} $$

şeklinde yazılır.

Herhangi $P, Q \in \Im_q^p(M_n)$ için, keyfi (p,q) tipli bir tensörün dikey lifti,

$$ \begin{aligned} {}^{V}(P \otimes Q) &= {}^{V}P \otimes {}^{V}Q, \\ {}^{V}(P + R) &= {}^{V}P + {}^{V}R, \end{aligned} $$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.2.1.2. M_n manifoldu üzerinde herhangi bir $X \in \Im_0^1(M_n)$ vektör alanı verilmiş olsun. $T(M_n)$ uzayında

$$^{V}X(\iota\omega) = {}^{V}(\omega(X)) \tag{3.11}$$

ile tanımlanan ${}^{V}X$ vektör alanına X vektör alanının dikey (vertical) lifti denir (Yano and Ishihara 1973).

(3.11) denkleminden X vektör alanının dikey (vertical) lifti, $T(M_n)$ tanjant demetde indirgenmiş koordinatlara göre bileşenleri

$$^{V}X = \begin{pmatrix} 0 \\ X^{h} \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

şeklindedir. (3.12) eşitliğinden her bir $\pi^{-1}(U)$ açık kümesinde

$$^{V}\left(\frac{\partial}{\partial x^{i}}\right) = {}^{V}(\partial_i) = \frac{\partial}{\partial y^{i}} = \partial_{\bar{i}} \tag{3.13}$$

olarak bulunur. $f \in \Im_0^0(M_n)$ olmak üzere ${}^{V}(df)$ dikey lifti ${}^{V}(df) = d\,{}^{V}f$ şeklinde tanımlanır. $f, g \in \Im_0^0(M_n)$ olmak üzere gdf 1-formunun dikey lifti ise ${}^{V}(gdf) = {}^{V}g\,{}^{V}(df) = {}^{V}g\,d\,{}^{V}f$ şeklindedir.

Tanım 3.2.1.3. M_n manifoldu üzerinde $\omega \in \Im_1^0(M_n)$ 1-formu verilsin. $T(M_n)$ uzayında

$$^{V}\omega = {}^{V}(\omega_i)\,{}^{V}(dx^{i}) \tag{3.14}$$

ile tanımlanan ${}^{V}\omega \in \Im_1^0(T(M_n))$ 1-formuna ω, 1-formunun dikey lifti denir (Yano and Ishihara 1973).

ω, 1-formunun dikey lifti; $T(M_n)$ tanjant demette indirgenmiş koordinatlara göre bileşenleri

$$^{V}\omega = (\omega_i, 0) \tag{3.15}$$

şeklindedir. (3.15) eşitliğinden her bir $\pi^{-1}(U)$ açık kümesinde

$$^{V}\left(dx^h\right) = dx^h \tag{3.16}$$

olarak yazılır.

3.2.2. Complete (Tam) lift

Tanım 3.2.2.1. M_n manifoldu üzerinde $f : M_n \rightarrow R$ fonksiyonu verilmiş olsun. $T(M_n)$ tanjant demette

$$^{C}f = \iota(df) \tag{3.17}$$

ile tanımlanan ^{C}f fonksiyonuna f fonksiyonunun tam(complete) lifti denir (Yano and Ishihara 1973).

Tanım 3.2.2.2. M_n manifoldu üzerinde $X \in \Im_0^1(M_n)$ vektör alanı verilmiş olsun. f, M_n manifoldu üzerinde keyfi bir fonksiyon olmak üzere, $T(M_n)$ uzayında

$$^{C}X\,^{C}f = {}^{C}(Xf) \tag{3.18}$$

ile tanımlanan ${}^{C}X \in \Im_0^1\left(T\left(M_n\right)\right)$ vektör alanına X vektör alanının tam lifti denir (Yano and Ishihara 1973).

(3.18) denkleminden X vektör alanının tam liftinin $T(M_n)$ tanjant demette indirgenmiş koordinatlara göre bileşenleri

$$ {}^{C}X = \begin{pmatrix} X^h \\ y^s \partial_s X^h \end{pmatrix} \tag{3.19} $$

şeklindedir. (3.19) eşitliğinden herbir $\pi^{-1}(U)$ açık kümesinde

$$ {}^{C}(\partial_i) = \partial_i \tag{3.20} $$

olarak bulunur.

Tanım 3.2.2.3. M_n manifoldu üzerinde $\omega \in \Im_1^0\left(M_n\right)$ 1-formu verilmiş olsun. $T(M_n)$ uzayında

$$ {}^{C}\omega\left({}^{C}X\right) = {}^{C}(\omega(X)) \tag{3.21} $$

ile tanımlanan ${}^{C}\omega$, 1-formuna $\omega \in \Im_1^0\left(T\left(M_n\right)\right)$ 1-formunun tam lifti denir (Yano and Ishihara 1973).

(3.21) denkleminden ω, 1-formunun tam lifti $T(M_n)$ tanjant demette indirgenmiş koordinatlara göre bileşenleri,

$$ {}^{C}\omega = \left(y^s \partial_s \omega_i, \omega_i\right) \tag{3.22} $$

şeklindedir. (3.22) eşitliğinden her bir $\pi^{-1}(U)$ açık kümesinde

$$^{C}\left(dx^{h}\right) = dy^{h} = dx^{\bar{h}} \tag{3.23}$$

olarak bulunur.

Herhangi $P, Q, R \in \Im_{q}^{p}\left(M_{n}\right)$ için, keyfi (p,q) tipli bir tensörün tam lifti,

$$\begin{aligned} &^{C}(P \otimes Q) = {}^{C}P \otimes {}^{V}Q + {}^{V}P \otimes {}^{C}Q, \\ &^{C}(P + R) = {}^{C}P + {}^{C}R. \end{aligned} \tag{3.24}$$

ile tanımlanır.

Tanım 3.2.2.4. M_n manifoldu üzerinde $g \in \Im_{2}^{0}\left(M_{n}\right)$ tensör alanının ^{C}g tam lifti $T(M_n)$ tanjant demette indirgenmiş koordinatlara göre;

$$\begin{aligned} ^{C}g &= {}^{C}\left(g_{ji}dx^{j} \otimes dx^{i}\right) = {}^{C}\left(g_{ji}\right)^{V}\left(dx^{j} \otimes dx^{i}\right) + {}^{V}\left(g_{ji}\right)^{C}\left(dx^{j} \otimes dx^{i}\right) \\ &= {}^{C}\left(g_{ji}\right)^{V}\left(dx^{j} \otimes dx^{i}\right) + {}^{V}\left(g_{ji}\right)^{C}\left(dx^{j}\right) \otimes {}^{V}\left(dx^{i}\right) + {}^{V}\left(g_{ji}\right)^{V}\left(dx^{j}\right) \otimes {}^{C}\left(dx^{i}\right) \\ &= y^{s}\partial_{s}g_{ji}dx^{j} \otimes dx^{i} + g_{ji}dx^{\bar{j}} \otimes dx^{i} + g_{ji}dx^{j} \otimes dx^{\bar{i}} \end{aligned} \tag{*}$$

bileşenlerine sahiptir. Ayrıca

$$\begin{aligned} ^{C}g &= {}^{C}g_{JI}dx^{J} \otimes dx^{I} = {}^{C}g_{ji}dx^{j} \otimes dx^{i} + {}^{C}g_{\bar{j}i}dx^{\bar{j}} \otimes dx^{i} \\ &\quad + {}^{C}g_{j\bar{i}}dx^{j} \otimes dx^{\bar{i}} + {}^{C}g_{\bar{j}\bar{i}}dx^{\bar{j}} \otimes dx^{\bar{i}} \end{aligned} \tag{**}$$

şeklinde olup (*) ve (**) eşitliklerinden, ^{C}g metriği koordinatlarla

$$ {}^{C}(g)=\begin{pmatrix} y^{s}\partial_{s}g_{ji} & g_{ji} \\ g_{ji} & 0 \end{pmatrix} $$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.2.2.5. Eğer M_n de g ile verilen Riemannian metriği $ds^2 = g_{ji}dx^j dx^i$ ise, $T(M_n)$ de ${}^{C}g$ Riemannian metriği

$$ {}^{C}g = 2g_{ji}\delta y^j dx^i $$

şeklindedir. Burada $\delta y^j = dy^j + \left\{ {j \atop lk} \right\} dx^l y^k$ olup, $\left\{ {j \atop lk} \right\}$ Christoffel sembolleridir (Yano and Ishihara 1973).

Tanım 3.2.2.6. $T(M_n)$ 'de ∇ konneksiyonun tam lifti,

$$ {}^{C}\nabla_{{}^{C}X}{}^{C}Y = {}^{C}(\nabla_X Y) \tag{3.25} $$

şartını sağlayan tek bir konneksiyondur. Γ_{ij}^{k}, M_n de (x^h) yerel koordinatlara göre ∇ nın bileşenleri olmak üzere, $T(M_n)$ 'de (x^h, y^h) indirgenmiş koordinatlara göre ${}^{C}\nabla$ nin ${}^{C}\Gamma_{ij}^{k}$ bileşenleri

$$ {}^{C}\Gamma_{im}^{j} = \Gamma_{im}^{j}, \quad {}^{C}\Gamma_{\bar{i}m}^{j} = {}^{C}\Gamma_{i\bar{m}}^{j} = {}^{C}\Gamma_{\bar{i}\bar{m}}^{j} = 0 \tag{3.26} $$

$$ {}^{C}\Gamma_{im}^{\bar{j}} = \partial\Gamma_{im}^{j}, \quad {}^{C}\Gamma_{\bar{i}m}^{\bar{j}} = \Gamma_{im}^{j}, \quad {}^{C}\Gamma_{i\bar{m}}^{\bar{j}} = \Gamma_{im}^{j}, \quad {}^{C}\Gamma_{\bar{i}\bar{m}}^{\bar{j}} = 0 \tag{3.27} $$

biçiminde tanımlanır (Yano and Ishihara 1973).

Teorem 3.2.2.7. Herhangi bir $X \in \Im_0^1(M_n)$ ve $f \in \Im_0^0(M_n)$ için

$$
{}^C\nabla_{{}^V X}{}^V f = 0, \qquad {}^C\nabla_{{}^V X}{}^C f = {}^V(\nabla_X f)
$$
$$
{}^C\nabla_{{}^C X}{}^V f = {}^V(\nabla_X f), \qquad {}^C\nabla_{{}^C X}{}^C f = {}^C(\nabla_X f)
$$

şeklindedir (Yano and Ishihara 1973).

Teorem 3.2.2.8. Herhangi bir $X, Y \in \Im_0^1(M_n)$ için

$$
{}^C\nabla_{{}^V X}{}^V Y = 0, \qquad {}^C\nabla_{{}^V X}{}^C Y = {}^V(\nabla_X Y),
$$
$$
{}^C\nabla_{{}^C X}{}^V Y = {}^V(\nabla_X Y), \qquad {}^C\nabla_{{}^C X}{}^C Y = {}^C(\nabla_X Y)
$$

(Yano and Ishihara 1973).

Teorem 3.2.2.9. Herhangi bir $X \in \Im_0^1(M_n)$ ve $\omega \in \Im_1^0(M_n)$ için

$$
{}^C\nabla_{{}^V X}{}^V \omega = 0, \qquad {}^C\nabla_{{}^V X}{}^C \omega = {}^V(\nabla_X \omega),
$$
$$
{}^C\nabla_{{}^C X}{}^V \omega = {}^V(\nabla_X \omega), \qquad {}^C\nabla_{{}^C X}{}^C \omega = {}^C(\nabla_X \omega)
$$

olur (Yano and Ishihara 1973).

Teorem 3.2.2.10. M_n de keyfi tip bir K tensör alanı ve $X \in \Im_0^1(M_n)$ için,

$$
{}^C\nabla_{{}^V X}{}^V K = 0, \qquad {}^C\nabla_{{}^V X}{}^C K = {}^V(\nabla_X K),
$$
$$
{}^C\nabla_{{}^C X}{}^V K = {}^V(\nabla_X K), \qquad {}^C\nabla_{{}^C X}{}^C K = {}^C(\nabla_X K)
$$

ve

$$^{C}\nabla^{V}K={}^{V}(\nabla K),\quad {}^{C}\nabla^{C}K={}^{C}(\nabla K)$$

olur (Yano and Ishihara 1973).

3.2.3. Horizontal (Yatay) lift

Tanım 3.2.3.1. M_n manifoldu üzerinde ∇ afin konneksiyonu verilsin. f fonksiyonunun gradiyenti ∇f ile gösterilir. γ operatörü ∇f gradiyentine uygulanırsa

$$\nabla_{\gamma} f = \gamma(\nabla f)$$

olur. M_n de f nin ^{H}f yatay lifti $T(M_n)$ de

$$^{H}f={}^{C}f-\gamma(\nabla f) \tag{3.28}$$

şeklindedir. Ayrıca ^{C}f nin tanımından tanjant demette fonksiyonun yatay lifti

$$^{H}f=0$$

sıfıra eşittir.

Tanım 3.2.3.2. M_n diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde ∇ afin konneksiyonu verilmiş olsun. Keyfi $X\in\Im_0^1(M_n)$ için

$$^{H}X={}^{C}X-\nabla_{\gamma}X \tag{3.29}$$

ile tanımlanan ${}^{H}X \in \Im^{1}_{0}\left(T\left(M_n\right)\right)$ vektör alanına, X vektör alanının yatay (horizontal) lifti denir. Burada $\nabla_{\gamma} X = \gamma(\nabla X)$ şeklindedir (Yano and Ishihara 1973).

X, X^h lokal bileşenlere ve ∇, $\Gamma^{\,h}_{ji}$ bileşenlerine sahip olmak üzere, $T(M_n)$ de $\left(x^h, y^h\right)$ indirgenmiş koordinatlara göre ${}^{C}X$ ve $\nabla_{\gamma} X$

$$ {}^{C}X = \begin{pmatrix} X^h \\ \partial X^h \end{pmatrix}, \qquad \nabla_{\gamma} X = \begin{pmatrix} 0 \\ y^j \nabla_j X^h \end{pmatrix} $$

lokal bileşenlerine sahiptir ve $\nabla_j X^h = \partial_j X^h + \Gamma^h_{ji} X^i$ şeklinde olup X in ${}^{H}X$ yatay lifti $T(M_n)$ de indirgenmiş koordinatlara göre,

$$ {}^{H}X = \begin{pmatrix} X^h \\ -\,y^s \Gamma^h_{si} X^i \end{pmatrix} \tag{3.30} $$

bileşenlerine sahiptir.

Tanım 3.2.3.3. ∇ afin konneksiyonuna sahip M_n manifoldu üzerinde herhangi bir tensör alanı

$$ S = S^{i\ldots h}_{k\ldots j} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^h} \otimes dx^k \otimes \ldots \otimes dx^j $$

şeklinde verilsin. $T(M_n)$ da bir $\nabla_{\gamma} S$ tensör alanı $\pi^{-1}(U)$ de $\left(x^h, y^h\right)$ indirgenmiş koordinatlara göre

$$ \nabla_{\gamma} S = (y^l \nabla_l S^{i\ldots h}_{k\ldots j}) \frac{\partial}{\partial y^i} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial y^h} \otimes dx^k \otimes \ldots \otimes dx^j $$

şeklinde tanımlanır. $f \in \Im_0^0(M_n)$ için $\nabla_\gamma f = {}^C f$ olup $P,Q \in T(M_n)$ için

$$\nabla_\gamma (P \otimes Q) = (\nabla_\gamma P) \otimes {}^V Q + {}^V P \otimes (\nabla_\gamma Q) \tag{3.31}$$

elde edilir. M_n de keyfi tipli bir S tensör alanının $T(M_n)$ de ${}^H S$ yatay lifti

$${}^H S = {}^C S - \nabla_\gamma S \tag{3.32}$$

şeklindedir. Buradan $\nabla S = 0$ için ${}^H S = {}^C S$ olur. $\nabla S = 0$ olması için gerek ve yeter şart ∇ konneksiyonuna göre S nin paralel olmasıdır. Buna göre (3.31) den,

$${}^H (P \otimes Q) = {}^H P \otimes {}^V Q + {}^V P \otimes {}^H Q \tag{3.33}$$

elde edilir. (3.32) eşitliği kullanılarak M_n de g_{ji} bileşenli (0,2) tipli g tensör alanının ${}^H g$ liftinin bileşenleri $T(M_n)$ de indirgenmiş koordinatlara göre

$${}^H g = \begin{pmatrix} \Gamma_j^t g_{ti} + \Gamma_i^t g_{jt} & g_{ji} \\ g_{ji} & 0 \end{pmatrix} \tag{3.34}$$

şeklindedir.

Tanım 3.2.3.4. M_n de bir ∇ afin konneksiyonu verilsin. (3.29) kullanarak Teorem 3.5.4 den herhangi $X, Y \in \Im_0^1(M_n)$ için

$$\begin{aligned} {}^C\nabla_{{}^H X} {}^H Y &= {}^H (\nabla_X Y) + \gamma(R(\quad, X)Y), \\ {}^C\nabla_{{}^C X} {}^H Y &= {}^H (\nabla_X Y) + \gamma(R(\quad, X)Y), \end{aligned} \tag{3.35}$$

$${}^{C}\nabla_{{}^{H}X}{}^{C}Y = {}^{C}(\nabla_X Y) - \gamma((\nabla Y)(\nabla X))$$

elde edilir. Burada $(R(\quad ,X)Y)$, M_n de (1,1) tipli bir tensör alanı; $W(Z) = R(Z,X)Y$, $Z \in \Im_0^1(M_n)$ ve R ise ∇ afin konneksiyonunun eğrilik tensörüdür. Ayrıca herhangi $X,Y \in \Im_0^1(M_n)$ için

$$ {}^{C}\nabla_{{}^{V}X}{}^{V}Y = 0, \quad {}^{C}\nabla_{{}^{V}X}{}^{H}Y = 0 \tag{3.36}$$

$$ {}^{C}\nabla_{{}^{H}X}{}^{V}Y = {}^{V}(\nabla_X Y)$$

şeklindedir (Yano and Ishihara 1973).

Keyfi $X,Y \in \Im_0^1(M_n)$ için $T(M_n)$ de ${}^{H}\nabla$ yatay lifti

$$ {}^{H}\nabla_{{}^{V}X}{}^{V}Y = 0, \quad {}^{H}\nabla_{{}^{V}X}{}^{H}Y = 0, \tag{3.37}$$

$$ {}^{H}\nabla_{{}^{H}X}{}^{V}Y = {}^{V}(\nabla_X Y), \quad {}^{H}\nabla_{{}^{H}X}{}^{H}Y = {}^{H}(\nabla_X Y)$$

şeklinde tanımlanır (Yano and Ishihara 1973).

Bu durumda (3.35), (3.36) ve (3.37) den keyfi $X,Y \in \Im_0^1(M_n)$ için,

$$ {}^{H}\nabla_{{}^{V}X}{}^{V}Y = {}^{C}\nabla_{{}^{V}X}{}^{V}Y = 0, \qquad {}^{H}\nabla_{{}^{V}X}{}^{H}Y = {}^{C}\nabla_{{}^{V}X}{}^{H}Y = 0, \tag{3.38}$$

$$ {}^{H}\nabla_{{}^{H}X}{}^{V}Y = {}^{C}\nabla_{{}^{H}X}{}^{V}Y, \qquad {}^{H}\nabla_{{}^{H}X}{}^{H}Y = {}^{C}\nabla_{{}^{H}X}{}^{H}Y - \gamma(R(\quad ,X)Y)$$

elde edilir. Burada keyfi $\tilde{X},\tilde{Y} \in \Im_0^1(T(M_n))$ için,

$$\tilde{S}(\tilde{X},\tilde{Y}) = {}^{H}\nabla_{\tilde{X}}\tilde{Y} - {}^{C}\nabla_{\tilde{X}}\tilde{Y} \tag{3.39}$$

alınırsa $T(M_n)$ de (1,2) tipli $\tilde{S}$ tensörü

$$\tilde{S}({}^{V}X, {}^{V}Y) = 0, \qquad \tilde{S}({}^{V}X, {}^{H}Y) = 0, \tag{3.40}$$

$$\tilde{S}({}^{H}X, {}^{V}Y) = 0, \qquad \tilde{S}({}^{H}X, {}^{H}Y) = -\gamma(R(\quad , X)Y)$$

eşitliklerini sağlar. Burada

$$\tilde{S}_{ji}^{\bar{h}} = -y^{k} R_{kji}^{h}, \tag{3.41}$$

olup diğer bileşenler sıfırdır. (3.36) , (3.37) , (3.39) ve (3.41) eşitliklerinden ∇ nın ${}^{H}\nabla$ horizontal liftinin bileşenleri $T(M_n)$ de indirgenmiş koordinatlara göre

$${}^{H}\Gamma_{ji}^{h} = \Gamma_{ji}^{h}, \qquad {}^{H}\Gamma_{j\bar{i}}^{h} = 0, \qquad {}^{H}\Gamma_{\bar{j}\bar{i}}^{h} = 0, \qquad {}^{H}\Gamma_{\bar{j}i}^{h} = 0,$$

$${}^{H}\Gamma_{ji}^{\bar{h}} = \partial\Gamma_{ji}^{h} - y^{k} R_{kji}^{h}, \quad {}^{H}\Gamma_{j\bar{i}}^{\bar{h}} = \Gamma_{ji}^{h}, \quad {}^{H}\Gamma_{\bar{j}i}^{\bar{h}} = \Gamma_{ji}^{h}, \quad {}^{H}\Gamma_{\bar{j}\bar{i}}^{\bar{h}} = 0 \tag{3.42}$$

şeklindedir (Yano and Ishihara 1973).

3.3. Adapte Olunmuş Çatı

M_n manifoldu üzerinde ∇ afin konneksiyonu verilmiş olsun. $T(M_n)$'nin $\pi^{-1}(U)$ koordinat komşuluğunda indirgenen bir çatı alanı tanımlayabiliriz.

Her bir $U \subset M$ lokal kart'ında $X_j = \dfrac{\partial}{\partial x^j}$, *j=1,…,n* olsun, (3.8) ve (3.13) den doğal çatıya göre lokal ifadeleri

$${}^{H}X_{(j)} = \delta_j^h \partial_h + \left(-\Gamma_{sj}^{h} x^{s}\right)\partial_{\bar{h}} = \begin{pmatrix} \delta_j^h \\ -\Gamma_j^h \end{pmatrix} = \tilde{e}_j$$

$${}^{V}X_{(j)} = \delta_j^h \partial_{\bar{h}} = \begin{pmatrix} \overset{\circ}{X}{}^{j} \\ \end{pmatrix} = \left(C_{\bar{i}}^{A}\right), \; C_{\bar{i}}^{A} = \tilde{e}_{\bar{j}}$$

şeklinde olan vektör alanları elde edilir. Burada δ_j^h Kronecker deltasıdır. Elde edilen bu 2n sayıdaki vektör alanları lineer bağımsız olup, sırasıyla $T(M_n)$'nin dikey dağılımını ve ∇ nın yatay dağılımını üretir. $\left\{ {}^H X_{(j)}, {}^V X_{(j)} \right\}$ kümesi adapte olmuş çatı olarak adlandırılır.

$$e_j = {}^H X_{(j)},$$
$$e_{\bar{j}} = {}^V X_{(j)},$$

alınırsa, adapte olmuş çatı $\left\{ e_\beta \right\} = \left\{ e_j, e_{\bar{j}} \right\}.\left\{ dx^h, \delta y^h \right\}$ şeklinde yazılır. $\left\{ dx^h, \delta y^h \right\}$ ise $\left\{ e_j, e_{\bar{j}} \right\}$ nin dual bazıdır. Burada $\delta y^h = dy^h + y^b \Gamma_{ba}^h dx^a$ dır. $\tilde{e}_\alpha = A_\alpha^B \partial_B$ olmak üzere,

$$\tilde{e}_i = A_i^h \partial_h + A_i^{\bar{h}} \partial_{\bar{h}}$$
$$\tilde{e}_{\bar{i}} = A_{\bar{i}}^h \partial_h + A_{\bar{i}}^{\bar{h}} \partial_{\bar{h}}$$

alınarak tabii çatıdan adapte olunmuş çatıya geçiş yapılır. Bu formüller matris dilinde yazılırsa,

$$\left(\tilde{e}_i, \tilde{e}_{\bar{i}} \right) = \left(\partial_h, \partial_{\bar{h}} \right) \begin{pmatrix} A_i^h & A_{\bar{i}}^h \\ A_i^{\bar{h}} & A_{\bar{i}}^{\bar{h}} \end{pmatrix}$$

elde edilir. Böylece tabii çatıdan adapte olunmuş çatıya geçiş matrisi,

$$\left(A_\alpha^B \right) = \begin{pmatrix} \delta_i^h & 0 \\ -\Gamma_i^h & \delta_i^h \end{pmatrix} = \left(A_i^B, A_{\bar{i}}^B \right)$$

şeklinde olur. Şimdi bu matrisin tersini $\tilde{A}_\beta^\alpha$ ile gösterelim. Ters matrisin özelliğine göre

$$A_{\alpha}^{B}\tilde{A}_{C}^{\alpha}=\delta_{C}^{B}$$

olup, buradan

$$A_{i}^{B}\tilde{A}_{C}^{i}+A_{\bar{i}}^{B}\tilde{A}_{C}^{\bar{i}}=\delta_{C}^{B}$$

eşitliği yazılır. Buradanda,

$$A_{i}^{h}\tilde{A}_{k}^{i}+A_{\bar{i}}^{h}\tilde{A}_{k}^{\bar{i}}=\delta_{k}^{h}\Rightarrow\delta_{i}^{h}\tilde{A}_{k}^{i}=\delta_{k}^{h}\Rightarrow\tilde{A}_{k}^{h}=\delta_{k}^{h},$$
$$A_{i}^{h}\tilde{A}_{k}^{i}+A_{\bar{i}}^{h}\tilde{A}_{k}^{\bar{i}}=0\Rightarrow-\Gamma_{i}^{h}\delta_{k}^{i}+\delta_{i}^{h}\tilde{A}_{k}^{\bar{i}}=0\Rightarrow-\Gamma_{i}^{h}+\tilde{A}_{k}^{\bar{h}}=0\Rightarrow\tilde{A}_{k}^{\bar{h}}=\Gamma_{k}^{h},$$
$$A_{i}^{h}\tilde{A}_{\bar{k}}^{i}+A_{\bar{i}}^{h}\tilde{A}_{\bar{k}}^{\bar{i}}=0\Rightarrow\delta_{i}^{h}\tilde{A}_{\bar{k}}^{i}=0\Rightarrow\tilde{A}_{\bar{k}}^{h}=0,$$
$$A_{i}^{\bar{h}}\tilde{A}_{\bar{k}}^{i}+A_{\bar{i}}^{\bar{h}}\tilde{A}_{\bar{k}}^{\bar{i}}=\delta_{k}^{h}\Rightarrow-\Gamma_{i}^{h}0+\delta_{i}^{h}\tilde{A}_{\bar{k}}^{\bar{i}}=\delta_{k}^{h}\Rightarrow\tilde{A}_{\bar{k}}^{\bar{i}}=\delta_{k}^{i}$$

olup

$$\tilde{A}_{B}^{\alpha}=\begin{pmatrix}\delta_{k}^{h} & 0\\ \Gamma_{k}^{h} & \delta_{k}^{h}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\tilde{A}_{B}^{h}\\ \tilde{A}_{B}^{\bar{h}}\end{pmatrix}$$

elde edilir. Burada

$$\tilde{A}_{B}^{h}=\left(\delta_{k}^{h},0\right)\ \text{ ile }\ \tilde{A}_{B}^{\bar{h}}=\left(\Gamma_{k}^{h},\delta_{k}^{h}\right)$$

şeklindedir.

3.4. Tanjant Demette Metrikler

M_n , g metriği ile verilen bir Riemannian manifoldu olsun. g metriğinin herhangi bir

U koordinat komşuluğunda bileşenleri g_{ji} ile Christoffel sembolleri Γ_{ji}^{h} ile gösterilir. U, M_n nin bir komşuluğu olmak üzere, eğer $T(M_n)$ nin $\pi^{-1}(U)$ komşuluğunda (x^h, y^h) indirgenmiş koordinatlara göre

$$\delta y^h = dy^h + \Gamma_i^h dx^i$$

alınırsa,

$$I = g_{ji} dx^j dx^i$$
$$II = 2 g_{ji} dx^j \delta y^i$$
$$III = g_{ji} \delta y^j \delta y^i$$

şeklinde $T(M_n)$'de global olarak tanımlanan ikinci dereceden diferensiyel formlar elde edilir. Burada $\Gamma_i^h = y^j \Gamma_{ji}^h$ şeklindedir. Ayrıca,

$$II = 2 g_{ji} dx^j \delta y^i$$
$$I + II = g_{ji} dx^j dx^i + 2 g_{ji} dx^j \delta y^i$$
$$I + III = g_{ji} dx^j dx^i + g_{ji} \delta y^j \delta y^i$$
$$II + III = 2 g_{ji} dx^j \delta y^i + g_{ji} \delta y^j \delta y^i$$

diferensiyel formların hepsi singüler olmayıp $T(M_n)$ üzerinde Riemannian veya pseudo- Riemannian metrikleri olarak dikkate alınabilirler (Yano and Ishihara 1966).

II metriği $T(M_n)$ de indirgenmiş koordinatlara göre

$$II = \begin{pmatrix} \partial g_{ji} & g_{ji} \\ g_{ji} & 0 \end{pmatrix}$$

bileşenlerine sahip olup, Teorem 3.2.2.5 dolayı II metriği ${}^{C}g={}^{H}g$ ile çakışır.

$T(M_n)$ de indirgenmiş koordinatlara göre $I+II$ metriği

$$I + II = \begin{pmatrix} g_{ji} + \partial g_{ji} & g_{ji} \\ g_{ji} & 0 \end{pmatrix}$$

bileşenlerine sahiptir. Ayrıca Teorem 3.2.2.5 den dolayı $I+II$ metriği ${}^{V}g+{}^{C}g$ metriği ile çakışır. Burada $g \in \Im_2^0(M_n)$ dir.

3.4.1. Tanjant demette ${}^{V}g$ metriği

$${}^{V}g = g_{ji} dx^j \otimes dx^i$$

olmak üzere ${}^{V}g$ ye, g nin $T(M_n)$ de dikey lifti denir (Davies,1966).

Bu metrik koordinatlarla

$${}^{V}g = \begin{bmatrix} g_{ij} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır .

3.4.2. Tanjant demette ${}^{C}g$ metriği

M_n, lokal bileşenleri g_{ji} olan g metrikli bir Riemannian manifoldu olsun. Tanjant demette indirgenmiş (X^A), (x^h, y^h) koordinatlarına göre lokal ifadesi

$$\tilde{g}_{CB}dx^C dx^B = 2g_{ji}dx^j \delta y^i$$

şeklinde olan $\tilde{g}$ Riemannian metriği verilsin. Burada

$$\delta y^h = dy^h + \Gamma_i^h dx^i \,,\; \Gamma_i^h = y^k \Gamma_{ki}^h$$

şeklindedir. Γ_{ji}^h ise g_{ji} ile tanımlanan Christoffel sembolleridir. Bu metriğe ${}^C g$ metriği denir. $\tilde{g}_{CB}$ metriğinin koordinatları

$$\left(\tilde{g}_{CB}\right) = \begin{pmatrix} \partial g_{ji} & g_{ji} \\ g_{ji} & 0 \end{pmatrix} \tag{3.43}$$

şeklinde olup, tanjant demette g nin tam liftinin koordinatları ile aynıdır ve kontravaryant bileşenleri ise

$$\left(\tilde{g}^{CB}\right) = \begin{pmatrix} 0 & g^{ji} \\ g^{ji} & \partial g^{ji} \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Burada g^{ji}, M_n manifoldundaki g nin kontravaryant bileşenleri olup

$$g_{ji}g^{ih} = \delta_j^h$$

şeklindedir.

${}^C g$ metriğine göre $T(M_n)$ de tanımlı $\tilde{\nabla}$, Riemannian konneksiyonu

$$\tilde{\nabla}_{{}^C X}\, {}^C Y = {}^C\nabla_{{}^C X}\, {}^C Y = {}^C\left(\nabla_X Y\right) \tag{3.44}$$

şartını sağlayan bir tek konneksiyondur.

$\tilde{\nabla}$ nın $\tilde{\Gamma}_{ij}^{k}$ Christoffel sembolleri

$$\tilde{\nabla}_{{}^{C}X}{}^{C}Y = {}^{C}\left(\nabla_X Y\right)$$

formülü kullanılarak elde edilir. Yukarıdaki formülü açık bir şekilde yazarsak

$$\tilde{X}^{I}\partial_{I}\tilde{Y}^{J} + \tilde{\Gamma}_{IM}^{J}\tilde{Y}^{M}\tilde{X}^{I} = \left(\tilde{\nabla}_X Y\right)^{J}$$

olur. Tam lift alınarak $\tilde{\nabla}$ nın bileşenleri,

$$\tilde{\Gamma}_{im}^{j} = \Gamma_{im}^{j} \ , \ \tilde{\Gamma}_{\bar{i}m}^{j} = \tilde{\Gamma}_{i\bar{m}}^{j} = \tilde{\Gamma}_{\bar{i}\bar{m}}^{j} = 0 \tag{3.45}$$

$$\tilde{\Gamma}_{im}^{\bar{j}} = \partial\Gamma_{im}^{j} \ , \ \tilde{\Gamma}_{i\bar{m}}^{\bar{j}} = \tilde{\Gamma}_{\bar{i}m}^{j} = \Gamma_{im}^{j} \ , \ \tilde{\Gamma}_{\bar{i}\bar{m}}^{\bar{j}} = 0 \tag{3.46}$$

şeklinde bulunur.

3.4.3. Tanjant demette ${}^{H}g$ metriği

M_n de g ile verilen pseudo-Riemannian metriği $ds^2 = g_{ji}dx^j dx^i$ olarak alınırsa, $T\left(M_n\right)$ ' de ${}^{H}g$ ile tanımlanan pseudo-Riemannian metriği $2g_{ji}\delta y^j dx^i$ şeklinde olur

Burada,

$$\delta y^{j} = dy^{i} + \tilde{\Gamma}_{lk}^{j} y^{l} dx^{k}$$

olup, Γ_{lk}^{j} de M_n de ∇ afin konneksiyonun katsayılarıdır (Yano and Ishihara 1973).

(3.29) dan ${}^{H}g$ nin koordinatlarına göre pseudo-Riemannian metriği yazılırsa,

$$ds^2 = {}^{H}g_{JI}dx^J dx^I = \left(y^k \Gamma^t_{kj} g_{ti} + y^k \Gamma^t_{ki} g_{jt} \right) dx^j dx^i + 2 g_{ji} dy^j dx^i$$

elde edilir. Buradan da

$$\begin{aligned} ds^2 = g_{JI}dx^J dx^I &= y^k \Gamma^t_{kj} g_{ti} dx^j dx^i + y^k \Gamma^t_{kj} g_{it} dx^i dx^j + 2 g_{ji} dy^j dx^i \\ &= 2 y^k \Gamma^t_{kj} g_{ti} dx^j dx^i + 2 g_{ji} dy^j dx^i \\ &= 2 y^k \Gamma^j_{kt} g_{ji} dx^t dx^i + 2 g_{ji} dy^j dx^i \\ &= 2 g_{ji} \left(dy^j + \Gamma^j_{kt} y^k dx^t \right) dx^i \\ &= 2 g_{ji} \tilde{\delta} y^i dx^i \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

${}^{H}g$ metriğinin kovaryant bileşenleri için,

$${}^{H}g_{JI} \, {}^{H}g^{IH} = \delta^H_J \tag{3.47}$$

olup, gerekli hesaplamalar yapıldığında

$${}^{H}g^{IH} = \begin{pmatrix} 0 & g^{ih} \\ g^{ih} & -\left(\Gamma^h_j g^{ji} + \Gamma^i_s g^{sh} \right) \end{pmatrix} \tag{3.48}$$

elde edilir.

${}^{H}\Gamma^I_{JK}$, ${}^{H}g$ metriğiyle tanımlanmış Cristoffel sembolünü göstermek üzere,

$$ {}^{H}\Gamma^{I}_{JK} = \frac{1}{2}\,{}^{H}g^{IS}\left(\partial_J\,{}^{H}g_{SK} + \partial_K\,{}^{H}g_{JS} - \partial_S\,{}^{H}g_{JK}\right) $$

şeklinde tanımlanır. Buradan ${}^{H}\Gamma^{I}_{JK}$ katsayıları,

$$ {}^{H}\Gamma^{i}_{jk} = \Gamma^{i}_{jk} + \frac{1}{2} g^{is}\partial_s g_{jk} $$

$$ {}^{H}\Gamma^{i}_{j\bar{k}} = 0 $$

$$ {}^{H}\Gamma^{i}_{\bar{j}k} = 0 $$

$$ {}^{H}\Gamma^{i}_{\bar{j}\bar{k}} = 0 $$

$$ {}^{H}\Gamma^{\bar{i}}_{\bar{j}\bar{k}} = 0 $$

$$ {}^{H}\Gamma^{\bar{i}}_{\bar{j}k} = \Gamma^{i}_{jk} - \frac{1}{2} g^{is}\nabla_j g_{sk} $$

$$ {}^{H}\Gamma^{\bar{i}}_{j\bar{k}} = \Gamma^{i}_{jk} - \frac{1}{2} g^{is}\nabla_k g_{js} \qquad {}^{H}\Gamma^{\bar{i}}_{jk} $$

$$ = y^l\partial_l\Gamma^{i}_{jk} - y^l\left(\nabla_l g^{is}\right) g_{is}\Gamma^{i}_{jk} - \frac{1}{2} g^{is} y^l\left(\partial_j\left(\nabla_l g_{sk}\right) + \partial_k\left(\nabla_l g_{js}\right) - \partial_s\left(\nabla_l g_{jk}\right)\right) $$
$$ + \frac{1}{2} y^l\left(\nabla_l g^{is}\right)\left(\nabla_s g_{jk}\right) + \frac{1}{2} y^l\partial_l g^{is}\nabla_s g_{jk} $$

elde edilir.

Teorem 3.4.3.1. M_n de g pseudo-Riemannian metrik ve ∇ bir afin konneksiyon olmak üzere; eğer $\nabla g = 0$ ise, ${}^{H}\nabla$ ve ${}^{C}\nabla$ birbirine eşittir (Yano and Ishihara 1973).

Teorem 3.4.3.2. M_n de g pseudo-Riemannian metrik ve ∇, metriğiyle tanımlanan Riemannian konneksiyonu olmak üzere, ${}^{H}\nabla$ ve ${}^{C}\nabla$ birbirine eşittir (Yano and Ishihara 1973).

3.4.4. Tanjant demette sasaki (Diagonal lift) metriği

Tanım 3.4.4.1. (M_n, g) bir Riemannian manifold olsun. M_n manifoldu üzerinde tanımlanan tanjant demet üzerindeki Sasaki metriği aşağıdaki üç denklemle tanımlıdır. $\forall X, Y \in C^{\infty}T(M_n)$ olmak üzere

i) $\tilde{g}({}^{H}X, {}^{H}Y) = g\left(X, Y\right)$

ii) $\tilde{g}({}^{V}X, {}^{H}Y) = 0$

iii) $\tilde{g}({}^{V}X, {}^{V}Y) = g\left(X, Y\right)$

g-natural metrikler sınıfından olan Sasaki metriği koordinatlarla aşağıdaki şekilde tanımlanır:

M_n, g_{ji} bileşenlerine sahip g metriğine göre bir Riemannian manifoldu olsun. $\left(x^h, y^h\right)$ indirgenmiş koordinatlarına göre

$$\tilde{g}_{CB}dx^C dx^B = g_{ij}dx^i dx^j + g_{ij}\delta y^i \delta y^j \tag{3.49}$$

Riemannian metriği verilsin. Burada

$$\delta y^h = dy^h + \Gamma^h_{ij} y^i dx^j$$

olup (3.49) metriğini Sasaki metriği (veya g nin ${}^{D}g$ diagonal lifti) olarak adlandıracağız. (3.49) ifadesinden Sasaki metriğinin bileşenleri,

$$\tilde{g}_{CB}dx^C dx^B = g_{ij}dx^i dx^j + g_{ij}\delta y^i \delta y^j$$

$$= g_{ij}dx^i dx^j + g_{ij}\left(dy^i + \Gamma^i_{sm}y^s dx^m\right)\left(dy^j + \Gamma^j_{\ln}y^l dx^n\right)$$

$$= g_{ij}dx^i dx^j + g_{ij}dy^i dy^j + g_{ij}dy^i\Gamma^j_{\ln}y^l dx^n + g_{ij}dy^j\Gamma^i_{sm}y^s dx^m$$

$$+ g_{ij}\Gamma^i_{sm}y^s dx^m\Gamma^j_{\ln}y^l dx^n$$

$$= g_{ij}dx^i dx^j + g_{ij}dy^i dy^j + g_{ji}dy^j\Gamma^i_{\ln}y^l dx^n + g_{mj}dy^j\Gamma^i_{si}y^s dx^i$$

$$+ g_{mn}\Gamma^m_{si}y^s dx^i\Gamma^n_{1j}y^l dx^j$$

$$= g_{ij}dx^i dx^j + g_{ij}dy^i dy^j + g_{jn}dy^j\Gamma^n_{1i}y^l dx^i + g_{mj}dy^j\Gamma^m_{si}y^s dx^m$$

$$+ g_{ij}\Gamma^i_{sm}y^s dx^m\Gamma^j_{\ln}y^l dx^n$$

olup matris dilinde

$$^D g_{AB} = I + III = \begin{pmatrix} g_{ij} + g_{mn}\Gamma^m_i\Gamma^n_j & g_{mj}\Gamma^m_i \\ g_{im}\Gamma^m_j & g_{ij} \end{pmatrix} \tag{3.50}$$

şeklinde yazılır. Bu matrisin tersi ise,

$$^D g_{AB}\,{}^D g^{BC} = \delta^C_A$$

şartını sağlayan $^D g^{BC}$ matrisidir.

$$^D g_{Aj}\,{}^D g^{jC} + {}^D g_{A\bar{j}}\,{}^D g^{\bar{j}C} = \delta^C_A$$

formülünden gerekli hesaplamalar yapılırsa,

$$^D g^{jk} = g^{jk}$$

$$^D g^{\bar{j}k} = -\Gamma^s_j g^{sk}$$

$$^D g^{j\bar{k}} = -g^{is}\Gamma^k_s$$

$$ {}^{D}g^{\overline{jk}} = g^{jk} + g^{ns}\Gamma_n^j\Gamma_s^k $$

elde edilir ve matris dilinde

$$ \left({}^{D}g_{AB}\right) = \begin{pmatrix} g^{jk} & -g^{js}\Gamma_j^n \\ -\Gamma_s^j g^{sk} & g^{jk} + g^{ns}\Gamma_n^j\Gamma_s^k \end{pmatrix} $$

şeklinde olan ters matris yazılır.

Adapte olunmuş çatıda Sasaki metriği ise aşağıdaki biçimde tanımlanır:

$$ g_{i'j'} = A_{i'}^{i} A_{j'}^{j} g_{ij} $$

dönüşüm kanunu adapte olunmuş çatıda

$$ {}^{D}g_{\alpha\beta} = A_{\alpha}^{A} A_{\beta}^{B}\, {}^{D}g_{AB} $$

şeklinde yazılır. Tensör dilinde ise

$$ \left({}^{D}g\right)_{(\tilde{e}_\alpha)} = A^{T} g_{\{\alpha\}} A $$

şeklindedir. Burada,

$$ \begin{aligned} \left({}^{D}g\right)_{(\tilde{e}_\alpha)} &= \begin{pmatrix} \delta_i^h & -\Gamma_i^h \\ 0 & \delta_i^h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{hj} + g_{ts}\Gamma_h^t\Gamma_j^s & A_{jh} \\ \Lambda_{hj} & g_{hj} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_k^j & 0 \\ -\Gamma_k^j & \delta_k^j \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} g_{ij} + g_{ts}\Gamma_i^t\Gamma_j^s - \Gamma_i^h A_{hj} & A_{ji} - \Gamma_i^h g_{hj} \\ \Lambda_{hj} & g_{hj} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_k^j & 0 \\ -\Gamma_k^j & \delta_k^j \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} g_{ik} & 0 \\ 0 & g_{ik} \end{pmatrix} \end{aligned} $$

olarak bulunur. ${}^{D}g_{\alpha\beta}$ nın tersi yazılırsa,

$$ {}^{D}\tilde{g}^{\alpha\beta} = A_A^{\alpha} A_B^{\beta} \, {}^{D}\tilde{g}^{AB} $$

elde edilir. $A = h, B = k$ için

$$ {}^{D}\tilde{g}^{\alpha\beta} = A_h^{\alpha} A_k^{\beta} \, {}^{D}\tilde{g}^{hk} + A_{\bar{h}}^{\alpha} A_k^{\beta} \, {}^{D}\tilde{g}^{\bar{h}k} + A_h^{\alpha} A_{\bar{k}}^{\beta} \, {}^{D}\tilde{g}^{h\bar{k}} + A_{\bar{h}}^{\alpha} A_{\bar{k}}^{\beta} \, {}^{D}\tilde{g}^{\bar{h}\bar{k}}, $$

şeklinde yazılır. Buradan gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$ {}^{D}\tilde{g}^{ij} = g^{ij}, $$

$$ {}^{D}\tilde{g}^{\bar{i}j} = 0, $$

$$ {}^{D}\tilde{g}^{i\bar{j}} = 0, $$

$$ {}^{D}\tilde{g}^{\bar{i}\bar{j}} = g^{ij} $$

şeklindedir. Buradan,

$$ {}^{D}\tilde{g}^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} g^{ij} & 0 \\ 0 & g^{ij} \end{pmatrix} $$

yazılır. Ayrıca

$$ B_i = {}^{H}(\partial_i) = \tilde{e}_i = \left(B_i^B\right) = \left(A_i^B\right) = \begin{pmatrix} A_i^h \\ A_i^{\bar{h}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_i^h \\ -\Gamma_i^h \end{pmatrix}, $$

$$ C_{\bar{i}} = \tilde{e}_{\bar{i}} = \left(C_{\bar{i}}^B\right) = \left(A_{\bar{i}}^B\right) = \begin{pmatrix} A_{\bar{i}}^h \\ A_{\bar{i}}^{\bar{h}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_i^h \end{pmatrix}, $$

ve

$$\left(A_h^i, A_{\bar{h}}^i\right) = \left(\delta_h^i, 0\right) \text{ ve } \left(A_h^{\bar{i}}, A_{\bar{h}}^{\bar{i}}\right) = \left(\Gamma_h^i, \delta_h^i\right)$$

olup,

$$D_\alpha = \tilde{e}_\alpha = \left\{\tilde{e}_i, \tilde{e}_{\bar{i}}\right\} = A_\alpha^B \partial_B$$

şeklinde bir vektör alanı alalım. Bu vektör alanları bir baz oluşturur. Böylece doğal koçatı dx^B olmak üzere $\theta^\alpha = A_B^\alpha dx^B$ şeklinde yeni bir koçatı oluşturulmuş olup D_α lar açık olarak yazılırsa; $\alpha = i, B = h$ için,

$$D_i = A_i^h \partial_h + A_i^{\bar{h}} \partial_{\bar{h}} = \partial_i - \Gamma_i^h \partial_{\bar{h}} ,$$
$$D_{\bar{i}} = A_{\bar{i}}^h \partial_h + A_{\bar{i}}^{\bar{h}} \partial_{\bar{h}} = \partial_{\bar{i}} ,$$

$$\theta^i = A_h^i dx^h + A_{\bar{h}}^i dx^{\bar{h}} = dx^i ,$$
$$\theta^{\bar{i}} = A_h^{\bar{i}} dx^h + A_{\bar{h}}^{\bar{i}} dx^{\bar{h}} = \Gamma_h^i dx^h + dx^{\bar{i}}$$

olur. Holonom olmayan objenin bileşenleri ise,

$$\Omega_{\alpha\beta}^\gamma = \left(D_\alpha A_\beta^C - D_\beta A_\alpha^C\right) A_C^\gamma$$

ifadesinden,

$$\Omega_{ij}^k = 0 ,$$
$$\Omega_{i\bar{j}}^{\bar{k}} = \Gamma_{ji}^k = \Gamma_{ji}^k ,$$
$$\Omega_{\bar{i}j}^{\bar{k}} = -\Gamma_{ij}^k ,$$

ve

$$\Omega_{ij}^{\bar{k}} = -K_{ijh}^k y^h$$

olup buradan,

$$\Omega_{ij}^{\bar{k}} = -\Omega_{ji}^{\bar{k}} = -K_{ijh}^{k} y^{h} ,$$

$$\Omega_{\bar{i}j}^{\bar{k}} = -\Omega_{j\bar{i}}^{\bar{k}} = \Gamma_{ij}^{k}$$

elde edilir. Burada K_{ijh} , g_{ij} metriğine göre eğrilik tensörünün bileşenleri olup,

$$\begin{aligned}
\left[D_{\alpha}, D_{\beta}\right] &= \left[A_{\alpha}^{A}\partial_{A}, A_{\beta}^{B}\partial_{B}\right] \\
&= A_{\alpha}^{A}\partial_{A}\left(A_{\beta}^{B}\partial_{B}\right) - A_{\beta}^{B}\partial_{B}\left(A_{\alpha}^{A}\partial_{A}\right) \\
&= A_{\alpha}^{A}\left(\partial_{A}A_{\beta}^{B}\right)\partial_{B} + A_{\alpha}^{A}A_{\beta}^{B}\partial_{AB}^{2} - A_{\beta}^{B}\left(\partial_{B}A_{\alpha}^{A}\right)\partial_{A} - A_{\beta}^{B}A_{\alpha}^{A}\partial_{BA}^{2} \\
&= \left(A_{\alpha}^{A}\partial_{A}A_{\beta}^{C} - A_{\beta}^{A}\partial_{A}A_{\alpha}^{C}\right)\partial_{C} \\
&= \left(D_{\alpha}A_{\beta}^{C} - D\beta A_{\alpha}^{C}\right)A_{C}^{\gamma}A_{\gamma}^{C}\partial_{C} \\
&= \Omega_{\alpha\beta}^{\gamma}D_{\alpha}
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

$\tilde{\Gamma}_{CB}^{A}$, $\tilde{g}_{CB}$ metriğine göre Christoffel sembolleri olmak üzere, Sasaki metriğine göre tanımlanan $\tilde{\nabla}$ Riemannıan konneksiyonunun bileşenleri adapte olmuş çatıya göre,

$$\tilde{\Gamma}_{\gamma\beta}^{\alpha} = \left(D_{\alpha}A_{\beta}^{A} + \tilde{\Gamma}_{CB}^{A}A_{\gamma}^{C}A_{\beta}^{B}\right)A_{A}^{\alpha}$$

şeklindedir. Burada,

$$\tilde{\Gamma}_{\gamma\beta}^{\alpha} - \tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^{\alpha} = \Omega_{\alpha\beta}^{\gamma}$$

olur. Sasaki metriğinin kovaryant türevinin adapte olmuş çatıya göre bileşenleri,

$$\tilde{\nabla}_{\delta}\tilde{g}_{\gamma\beta}=D_{\delta}\tilde{g}_{\gamma\beta}-\tilde{\Gamma}^{\varepsilon}_{\delta\gamma}\tilde{g}_{\varepsilon\beta}-\tilde{\Gamma}^{\varepsilon}_{\delta\beta}\tilde{g}_{\gamma\varepsilon}$$

şeklindedir. Burada aşağıdaki gibi üç durum mevcuttur.

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{\delta}\tilde{g}_{\gamma\beta}&=D_{\delta}\tilde{g}_{\gamma\beta}-\tilde{\Gamma}^{\varepsilon}_{\delta\gamma}\tilde{g}_{\varepsilon\beta}-\tilde{\Gamma}^{\varepsilon}_{\delta\beta}\tilde{g}_{\gamma\varepsilon}=0\,,\\
\tilde{\nabla}_{\gamma}\tilde{g}_{\beta\delta}&=D_{\gamma}\tilde{g}_{\beta\delta}-\tilde{\Gamma}^{\varepsilon}_{\gamma\beta}\tilde{g}_{\varepsilon\delta}-\tilde{\Gamma}^{\varepsilon}_{\gamma\delta}\tilde{g}_{\beta\varepsilon}=0\,,\\
\tilde{\nabla}_{\beta}\tilde{g}_{\delta\gamma}&=D_{\beta}\tilde{g}_{\delta\gamma}-\tilde{\Gamma}^{\varepsilon}_{\beta\delta}\tilde{g}_{\varepsilon\gamma}-\tilde{\Gamma}^{\varepsilon}_{\beta\gamma}\tilde{g}_{\delta\varepsilon}=0
\end{aligned}$$

Son iki ifade toplanıp birinciden çıkarılırsa,

$$D_{\gamma}\tilde{g}_{\beta\delta}+D_{\beta}\tilde{g}_{\delta\gamma}-D_{\delta}\tilde{g}_{\gamma\beta}-2\tilde{\Gamma}^{\varepsilon}_{\gamma\beta}\tilde{g}_{\varepsilon\delta}+\Omega^{\varepsilon}_{\gamma\beta}\tilde{g}_{\delta\varepsilon}-2\tilde{\Gamma}^{\varepsilon}_{\delta\beta}\tilde{g}_{\varepsilon\gamma}-\Omega^{\varepsilon}_{\beta\delta}\tilde{g}_{\varepsilon\gamma}-\Omega^{\varepsilon}_{\gamma\delta}\tilde{g}_{\beta\varepsilon}=0$$

elde edilir. Burada,

$$\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\gamma\beta}-\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma}=\Omega^{\alpha}_{\gamma\beta}$$

ifadesi kullanılmıştır. Buradan,

$$\tilde{\Gamma}^{\varepsilon}_{\gamma\beta}\tilde{g}_{\varepsilon\delta}=\frac{1}{2}\left(D_{\gamma}\tilde{g}_{\beta\delta}+D_{\beta}\tilde{g}_{\delta\gamma}-D_{\delta}\tilde{g}_{\gamma\beta}\right)+\frac{1}{2}\left(\Omega^{\varepsilon}_{\gamma\beta}\tilde{g}_{\delta\varepsilon}-\Omega^{\varepsilon}_{\beta\delta}\tilde{g}_{\varepsilon\gamma}-\Omega^{\varepsilon}_{\gamma\delta}\tilde{g}_{\beta\varepsilon}\right)$$

yazılır. Bu ifadenin her iki tarafı $\tilde{g}^{\delta\theta}$ ile çarpılırsa,

$$\tilde{\Gamma}^{\theta}_{\gamma\beta}=\frac{1}{2}\tilde{g}^{\delta\theta}\left(D_{\gamma}\tilde{g}_{\beta\delta}+D_{\beta}\tilde{g}_{\delta\gamma}-D_{\delta}\tilde{g}_{\gamma\beta}\right)+\frac{1}{2}\tilde{g}^{\delta\theta}\left(\Omega^{\varepsilon}_{\gamma\beta}\tilde{g}_{\delta\varepsilon}-\Omega^{\varepsilon}_{\beta\delta}\tilde{g}_{\varepsilon\gamma}-\Omega^{\varepsilon}_{\gamma\delta}\tilde{g}_{\beta\varepsilon}\right)$$

olur. Ayrıca

$$-\Omega_{\delta\gamma}^{\varepsilon}=\tilde{\Gamma}_{\gamma\delta}^{\varepsilon}-\tilde{\Gamma}_{\delta\gamma}^{\varepsilon}=\Omega_{\gamma\delta}^{\varepsilon},$$

$$\tilde{\Gamma}_{\gamma\delta}^{\varepsilon}=\tilde{\Gamma}_{\delta\gamma}^{\varepsilon}+\Omega_{\gamma\delta}^{\varepsilon},$$

eşitlikleri kullanılarak,

$$\tilde{\Gamma}_{\gamma\beta}^{\theta}=\frac{1}{2}\tilde{g}^{\delta\theta}\left(D_\gamma\tilde{g}_{\beta\delta}+D_\beta\tilde{g}_{\delta\gamma}-D_\delta\tilde{g}_{\gamma\beta}\right)+\frac{1}{2}\tilde{g}^{\delta\theta}\left(\Omega_{\gamma\beta}^{\varepsilon}\tilde{g}_{\delta\varepsilon}-\Omega_{\beta\delta}^{\varepsilon}\tilde{g}_{\varepsilon\gamma}-\Omega_{\gamma\delta}^{\varepsilon}\tilde{g}_{\beta\varepsilon}\right)$$

elde edilir. Bu eşitlikte

$$\Omega_{\gamma\delta}^{\alpha}=\tilde{g}^{\alpha\varepsilon}\tilde{g}_{\delta\beta}\Omega_{\varepsilon\gamma}^{\delta}$$

olduğu göz önüne alınırsa,

$$\tilde{\Gamma}_{\gamma\beta}^{\theta}=\frac{1}{2}\tilde{g}^{\delta\theta}\left(D_\gamma\tilde{g}_{\beta\delta}+D_\beta\tilde{g}_{\delta\gamma}-D_\delta\tilde{g}_{\gamma\beta}\right)+\frac{1}{2}\left(\Omega_{\gamma\beta}^{\theta}+\Omega_{\gamma\beta}^{\theta}+\Omega_{\beta\gamma}^{\theta}\right)$$

olur. $\tilde{\Gamma}_{\gamma\beta}^{\theta}$ ifadesinde,

$$D_i=\partial_i-\Gamma_i^h\partial_{\bar{h}},\ D_{\bar{i}}=\partial_{\bar{i}}$$

$$\Omega_{ji}^{\bar{h}}=-K_{jik}^{h}y^k,\Omega_{j\bar{i}}^{\bar{h}}=\Gamma_{ji}^{h}$$

şeklindedir.

$\gamma=j,\theta=h,\beta=i,\delta=m$ alındığında,

$$\tilde{\Gamma}_{\gamma\beta}^{\theta}=\frac{1}{2}\tilde{g}^{\delta\theta}\left(D_\gamma\tilde{g}_{\beta\delta}+D_\beta\tilde{g}_{\delta\gamma}-D_\delta\tilde{g}_{\gamma\beta}\right)+\frac{1}{2}\left(\Omega_{\gamma\beta}^{\theta}+\Omega_{\gamma\beta}^{\varepsilon}\tilde{g}^{\delta\theta}\tilde{g}_{\varepsilon\gamma}+\Omega_{\beta\gamma}^{\varepsilon}\tilde{g}^{\delta\theta}\tilde{g}_{\beta\varepsilon}\right)$$

eşitliği kullanılarak,

$$\tilde{\Gamma}_{ji}^{h} = \frac{1}{2}\tilde{g}^{mh}\left(D_j\tilde{g}_{im} + D_i\tilde{g}_{mj} - D_m\tilde{g}_{ji}\right) + \frac{1}{2}\left(\Omega_{ji}^{h} + \Omega_{mi}^{k}\tilde{g}^{mh}\tilde{g}_{kj} + \Omega_{mj}^{k}\tilde{g}^{mh}\tilde{g}_{ik}\right)$$

$$= \frac{1}{2}g^{mh}\left(\partial_j g_{im} + \partial_i g_{mj} - \partial_m g_{ji}\right) = \Gamma_{ji}^{h} \ ,$$

$$\tilde{\Gamma}_{j\bar{i}}^{h} = -\frac{1}{2}y^l K_{jli}^{h} ,$$

$$\tilde{\Gamma}_{\bar{j}\bar{i}}^{\bar{h}} = 0$$

$$\tilde{\Gamma}_{\bar{j}i}^{h} = -\frac{1}{2}y^l K_{ilj}^{h} ,$$

$$\tilde{\Gamma}_{\bar{j}\bar{i}}^{h} = 0 ,$$

$$\tilde{\Gamma}_{ji}^{\bar{h}} = -\frac{1}{2}K_{jik}^{h}y^k ,$$

$$\tilde{\Gamma}_{j\bar{i}}^{\bar{h}} = \Gamma_{ji}^{h} ,$$

$$\tilde{\Gamma}_{\bar{j}i}^{\bar{h}} = 0$$

adapte olmuş çatıya göre $\tilde{\Gamma}_{\gamma\beta}^{\theta}$ nın koordinatları elde edilmiş olur. Burada

$$K_{jki}^{h} = g^{ht}g_{is}K_{tjk}^{s}$$

şeklindedir.

3.4.5. Tanjant demette ${}^{s}g$ (Synectic lift) metriği

M_n , g metriği ile verilen bir Riemannian manifoldu olsun. g metriğinin M_n ’nin bir U koordinat komşuluğunda bileşenleri g_{ji} ve Christoffel sembolleri Γ_{ji}^{h} olmak üzere $T(M_n)$ nin $\pi^{-1}(U)$ komşuluğunda $\pi^{-1}(U) \subset T(M_n)$ de (x^h, y^h) indirgenmiş koordinatlarına göre,

$$\delta y^h = dy^h + \Gamma_i^h dx^i$$

eşitliği yazılır. Burada

$$\Gamma_i^h = y^j \Gamma_{ji}^h$$

şeklindedir.

g Riemannian metriği ile birlikte M_n Riemannian manifoldunun $T(M_n)$ tanjant demetinde,

$$^s\tilde{g}_{CB} dx^C dx^B = a_{ji} dx^j dx^i + 2 g_{ji} dx^j \delta y^i \tag{3.51}$$

ile tanımlı metriğe sinjektik (synectic) metrik denir. Burada a_{ji}, M_n de (0,2) tipli bir simetrik tensör olup,

$$^s g = \left({}^s\tilde{g}_{CB} \right) = \begin{pmatrix} a_{ji} + \partial g_{ji} & g_{ji} \\ g_{ji} & 0 \end{pmatrix} \tag{3.52}$$

bileşenlerine sahiptir (Vishnevsky 1985).

Tanım 3.4.5.1. $a \in \Im_2^0(M_n)$ simetrik tensörü olmak üzere, bu tensörün vertical lifti

$$^V a = {}^V\left(a_{ij} dx^i \otimes dx^j \right) = {}^V\left(a_{ij} \right) {}^V\left(dx^i \right) \otimes {}^V\left(dx^j \right) = a_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

ile tanımlanır. Buradan, $^V a$ nin $(\partial_i, \partial_{\bar{i}})$ çatısındaki koordinatları,

$$^V a = \begin{pmatrix} a_{ij} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

Tanım 3.4.5.2. $H \in \mathrm{T}_2^1(M_n)$ tensörü verilmiş olsun. Bu tensörün ${}^V H$ lifti

$$ {}^V H = H_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^{\bar{k}}} \otimes dx^i \otimes dx^j $$

şeklinde tanımlanır.

Aşağıdaki şekilde tanımlanan

$$ {}^s g' = {}^C g + {}^V g = \begin{pmatrix} x^s \partial_s g_{ji} + g_{ji} & g_{ji} \\ g_{ji} & 0 \end{pmatrix} $$

$$ {}^s g = {}^C g + {}^V a = \begin{pmatrix} x^s \partial_s g_{ji} + a_{ji} & g_{ji} \\ g_{ji} & 0 \end{pmatrix} $$

birinci metrik yani ${}^s g'$ (Yano and Ishıhara1973) çalışmalarında, ikinci metrik yani ${}^s g = {}^C g + {}^V a$ ise (Salimov ve Aras 2002) çalışmalarında incelenmiştir.

Burada,

$$ {}^s g = \left({}^s g_{JI} \right) {}^C g + {}^V a = \begin{pmatrix} x^s \partial_s g_{ji} + a_{ji} & g_{ji} \\ g_{ji} & 0 \end{pmatrix} \tag{3.53} $$

Riemannian metrik tensörünün ${}^s \Gamma_{IJ}^K$ Riemannian konneksiyonu,

$$ {}^s \Gamma_{IJ}^K = \frac{1}{2} \tilde{g}^{KS} \left(\partial_I^S g_{SJ} + \partial_J^S g_{IS} - \partial_S^S g_{IJ} \right), $$

ile tanımlanır. $\tilde{g}^{KS}$, (3.53) tensörünün ters tensörü olup,

$$ {}^{S}g_{IM}\,\tilde{g}^{MJ} = \delta_I^J = \begin{cases} 0, & I \neq J \\ 1, & I = J \end{cases} \tag{3.54} $$

şeklindedir. (3.53) ve (3.54) eşitliklerini kullanarak $\tilde{g}$ tensörünün koordinatları,

$$ \tilde{g} = \tilde{g}^{IJ} = \begin{pmatrix} 0 & g^{ij} \\ g^{ij} & x^s \partial_s g^{ij} - a^{ij}_{..} \end{pmatrix}, g^{it} a_{is} g^{sj} = a^{tj}_{..} \ . \tag{3.55} $$

şeklindedir, (3.53) ve (3.55) eşitlikleri ${}^{s}\Gamma_{IJ}^{K}$ formülünde yerine yazılırsa,

$$ {}^{s}\Gamma_{ij}^{k} = \Gamma_{ij}^{k}, $$

$$ {}^{s}\Gamma_{\bar{i}j}^{\bar{k}} = \Gamma_{ij}^{k} \ , $$

$$ {}^{s}\Gamma_{i\bar{j}}^{\bar{k}} = \Gamma_{ij}^{k} \ , $$

$$ {}^{s}\Gamma_{\bar{i}j}^{k} = {}^{s}\Gamma_{i\bar{j}}^{k} = {}^{s}\Gamma_{\bar{i}\bar{j}}^{k} = {}^{s}\Gamma_{\bar{i}\bar{j}}^{\bar{k}} = 0 \quad , $$

$$ {}^{S}\Gamma_{ij}^{\bar{k}} = x^t \partial_t \Gamma_{ij}^{k} + \frac{1}{2} g^{ks}\left(\nabla_i a_{sj} + \nabla_j a_{is} - \nabla_s a_{ij}\right) = x^t \partial_t \Gamma_{ij}^{k} + H_{ij}^{k} $$

bulunur. Burada $H_{ij}^{k} = \frac{1}{2} g^{ks}\left(\nabla_i a_{sj} + \nabla_j a_{is} - \nabla_s a_{ij}\right)$, şeklinde tanımlanan (1,2) tipli tensördür (Akbulut 2009).

Teorem 3.4.5.3. Eğer $\nabla a = 0$ ise, ${}^{C}\Gamma = {}^{s}\Gamma$ dir. Burada ${}^{C}\Gamma, {}^{C}g$ nin Riemannian konneksiyonudur (Yano and Ishihara1973).

Teorem 3.4.5.4. Eğer $a_{ij} = g_{ij}$ ise, ${}^{C}\Gamma = {}^{s}\Gamma$ olur (Yano and Ishihara1973) .

Teorem 3.4.5.5. ${}^{V}H$, $H \in T_2^1(M_n)$ tensörünün dikey lifti olmak üzere ${}^{s}\Gamma = {}^{C}\Gamma + {}^{V}H$ dir (Yano and Ishihara1973).

3.4.6. Tanjant demette Cheeger-Gromoll metriği

M_n manifoldunun $U \subset M_n$ komşuluğunda $X = X^i \partial_i$ vektör alanı ve $g_X = \left(g_{ij} X^i dx^j\right)$ kovektör alanı verilsin. Buradan, $\pi^{-1}(U) \subset T(M_n)$ de $\left(x^i, x^{\bar{i}}\right)$ indirgenmiş koordinatlarına göre $\gamma g_X = x^{\bar{j}} g_{ij} X^i$ şeklinde $\gamma g_X \in T_0^0(M_n)$ fonksiyonu tanımlansın. $\pi^{-1}(U)$ kümesi üzerinde tanımlanan γg_X fonksiyonu $T(M_n)$ de global bir fonksiyondur. r , $y = \left(y^i\right) = \left(x^{\bar{i}}\right)$ vektörünün

$$r^2 = g_{ij} x^{\bar{i}} x^{\bar{j}}$$

şeklinde tanımlanan norm vektörü olsun. $T(M_n)$ de her $X, Y \in T_0^1(M_n)$ vektör alanı için ${}^{CG}g$ Cheeger-Gromoll metriği,

i) ${}^{CG}g\left({}^{H}X, {}^{H}Y\right) = {}^{V}\left(g(X,Y)\right)$,

ii) ${}^{CG}g\left({}^{H}X, {}^{V}Y\right) = 0$,

iii) ${}^{CG}g\left({}^{V}X, {}^{V}Y\right) = \dfrac{1}{1+r^2}\left[{}^{V}\left(g(X,Y)\right) + (\gamma g_X)(\gamma g_Y)\right]$

biçiminde tanımlanır (Salimov and Akbulut 2009). Burada, ${}^{V}\left(g(X,Y)\right) = g(X,Y) \circ \pi$ şeklindedir.

(i) - (iii) eşitliklerinden $\left(e_\beta\right)$ adapte olmuş çatısına göre Cheeger-Gromoll metriği lokal olarak

$$\left({}^{CG}\tilde{g}_{\beta\gamma}\right)=\begin{pmatrix} {}^{CG}g_{jl} & {}^{CG}g_{j\bar{l}} \\ {}^{CG}g_{\bar{j}l} & {}^{CG}g_{\bar{j}\bar{l}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} g_{jl} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+r^2}\left(g_{jl}+g_{js}g_{lt}x^{\bar{s}}x^{\bar{t}}\right) \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.4.6.1. (M_n, g) **,** bir Riemannian manifoldu ve $T(M_n)$' de ${}^{CG}g$ Cheeger-Gromoll metriğinin Levi-Civita konneksiyonu ${}^{CG}\nabla$, olmak üzere $\forall X, Y \in T_0^1(M_n)$ için;

$$\text{i)}\quad {}^{CG}\nabla_{{}^{H}X}^{{}^{H}Y} = {}^{H}\left(\nabla_X^Y\right)-\frac{1}{2}\left(R(X,Y)\,y\right),$$

$$\text{ii)}\quad {}^{CG}\nabla_{{}^{H}X}^{{}^{V}Y} = \frac{1}{2\alpha}\,{}^{H}\left(R(y,Y)X\right)+{}^{V}\left(\nabla_X Y\right),$$

$$\text{iii)}\quad {}^{CG}\nabla_{{}^{V}X}^{{}^{H}Y} = \frac{1}{2\alpha}\,{}^{H}\left(R(y,Y)X\right) \tag{3.56}$$

$$\text{iv)}\quad {}^{CG}\nabla_{{}^{V}X}^{{}^{V}Y} = -\frac{1}{\alpha}\left({}^{CG}g\left({}^{V}X,\gamma\delta\right){}^{V}Y+{}^{CG}g\left({}^{V}Y,\gamma\delta\right){}^{V}X\right)$$
$$+\frac{1+\alpha}{\alpha}\,{}^{CG}g\left({}^{V}X,{}^{V}Y\right)\gamma\delta-\frac{1}{\alpha}\,{}^{CG}g\left({}^{V}Y,\gamma\delta\right){}^{CG}g\left({}^{V}Y,\gamma\delta\right)\gamma\delta$$

eşitliklerini sağlar. Burada R ve $\gamma\delta$ sırasıyla ∇ nın eğrilik tensörüdür ve $T(M_n)$ deki kanonik vertikal vektör alanın bileşenleri

$$\gamma\delta=\begin{pmatrix} 0 \\ x^{\bar{i}}\delta_i^h \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ x^{\bar{j}} \end{pmatrix}=x^{\bar{j}}\partial_{\bar{j}}=x^{\bar{j}}e_{(\bar{j})}$$

şeklindedir.

$T(M_n)$ de $\{e_\beta\}$ adapte olmuş çatıya göre ${}^{CG}g$ Cheeger-Gromoll metriği tarafından kurulan ${}^{CG}\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$ Christoffel sembolleri ${}^{CG}\nabla_{e_\alpha}e_\beta={}^{CG}\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}e_\gamma$ şeklindedir. Adapte olmuş çatıya göre ${}^{CG}\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$ nın koordinatları (3.56) denklemleri vasıtasıyla

$$\begin{cases} {}^{CG}\Gamma_{ji}^{h} = \Gamma_{ji}^{h}, & {}^{CG}\Gamma_{ji}^{\bar{h}} = -\dfrac{1}{2} R_{jik}^{h} x^{\bar{k}}, \\ {}^{CG}\Gamma_{j\bar{i}}^{h} = -\dfrac{1}{2\alpha} R_{\bullet jki}^{h\bullet} x^{\bar{k}}, & {}^{CG}\Gamma_{j\bar{i}}^{\bar{h}} = \Gamma_{ji}^{h}, \\ {}^{CG}\Gamma_{\bar{j}i}^{h} = -\dfrac{1}{2\alpha} R_{\bullet ikj}^{h\bullet} x^{\bar{k}}, & {}^{CG}\Gamma_{\bar{j}i}^{\bar{h}} = {}^{CG}\Gamma_{\bar{j}\bar{i}}^{h} = 0, \\ {}^{CG}\Gamma_{\bar{j}\bar{i}}^{\bar{h}} = -\dfrac{1}{\alpha}\left(x_{\bar{j}} \delta_i^h + x_{\bar{i}} \delta_j^h \right) + \dfrac{1+\alpha}{\alpha} g_{ji} x^{\bar{h}} - \dfrac{1}{\alpha} x_{\bar{j}} x_{\bar{i}} x^{\bar{h}} & \end{cases} \tag{3.57}$$

şeklinde elde edilir. Burada $x_{\bar{j}} = g_{ji} x^{\bar{i}}$, $R_{\bullet ikj}^{h\bullet} = g^{th} g_{js} R_{tik}^{h}$ dir (Sekizawa 1991; Gudmundsson and Kappos 2002).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

4.1. Tanjant Demette ${}^{H}g$ Metriğinin Bazı Uygulamaları

4.1.1. Tanjant demette ${}^{H}\nabla$ konneksiyonuna göre infinitesimal afin dönüşümler

M_n de g metriği ile tanımlanan ∇ Riemannian konneksiyonu ve konneksiyon katsayıları ise Γ_{ij}^{k} olsun. Ayrıca $T(M_n)$ de $\tilde{X} = \tilde{X}^{i}\partial_i + \tilde{X}^{\bar{i}}\partial_{\bar{i}}$ vektör alanı verilmiş olsun. Burada $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$, $\partial_{\bar{i}} = \dfrac{\partial}{\partial y^i} = \dfrac{\partial}{\partial x^{\bar{i}}}$, $\bar{i} = n+1,...,2n$, şeklindedir.

$$ {}^{H}\Gamma_{ij}^{k} = \Gamma_{ij}^{k}\,,\ {}^{H}\Gamma_{i\bar{j}}^{k} = {}^{H}\Gamma_{\bar{i}j}^{k} = {}^{H}\Gamma_{\bar{i}\bar{j}}^{k} = \ {}^{H}\Gamma_{\bar{i}\bar{j}}^{\bar{k}} = \ 0, \quad {}^{H}\Gamma_{ij}^{\bar{k}} = y^s\partial_s\Gamma_{ij}^{k} - y^s R_{sij}{}^{k}\,, \quad {}^{H}\Gamma_{\bar{i}j}^{\bar{k}} = {}^{H}\Gamma_{i\bar{j}}^{\bar{k}} = \Gamma_{ij}^{k}\,, $$

eşitlikleri ile $L_X\nabla = 0$ olduğu dikkate alınırsa, $\tilde{X} = \tilde{X}^{\alpha}\partial_{\alpha} \in \Im_0^1(T(M_n))$ vektör alanının ${}^{H}\nabla$ konneksiyonuna göre $T(M_n)$ de bir infinitesimal afin dönüşüm olması için (4.1)-(4.8) şartlarını sağlaması gerek ve yeter şarttır.

$$ \partial_j\partial_i\tilde{X}^{h} + \tilde{X}^{k}\partial_k\Gamma_{ji}^{h} - (\Gamma_{ji}^{k}\partial_k\tilde{X}^{h} + \partial\Gamma_{ji}^{k}\partial_{\bar{k}}\tilde{X}^{h}) + \Gamma_{ki}^{h}\partial_j\tilde{X}^{k} + \Gamma_{jk}^{h}\partial_i\tilde{X}^{k} + y^s R_{sji}^{k}\partial_{\bar{k}}\tilde{X}^{h} = 0\,, \quad (4.1) $$

$$ \partial_j\partial_{\bar{i}}\tilde{X}^{h} - \Gamma_{ji}^{k}\partial_{\bar{k}}\tilde{X}^{h} + \Gamma_{jk}^{h}\partial_{\bar{i}}\tilde{X}^{k} = 0\,, \quad (4.2) $$

$$ \partial_{\bar{j}}\partial_i\tilde{X}^{h} - \Gamma_{ji}^{k}\partial_{\bar{k}}\tilde{X}^{h} + \Gamma_{ki}^{h}\partial_{\bar{j}}\tilde{X}^{k} = 0\,, \quad (4.3) $$

$$ \partial_{\bar{j}}\partial_{\bar{i}}\tilde{X}^{h} = 0\ , \quad (4.4) $$

$$ \partial_j\partial_i\tilde{X}^{\bar{h}} + (\tilde{X}^{k}\partial_k\partial\Gamma_{ji}^{h} + \tilde{X}^{\bar{k}}\partial_k\Gamma_{ji}^{h}) - (\Gamma_{ji}^{k}\partial_k\tilde{X}^{\bar{h}} + \partial\Gamma_{ji}^{k}\partial_{\bar{k}}\tilde{X}^{\bar{h}}) + (\partial\Gamma_{ki}^{h}\partial_j\tilde{X}^{k} + \Gamma_{ki}^{h}\partial_j\tilde{X}^{\bar{k}}) \quad (4.5) $$

$$ +(\partial\Gamma_{jk}^{h}\partial_i\tilde{X}^{k} + \Gamma_{jk}^{h}\partial_i\tilde{X}^{\bar{k}}) - \tilde{X}^{\bar{k}}R_{kji}^{h} - y^s\tilde{X}^{k}\partial_k R_{sji}^{h} + y^s R_{sji}^{k}\partial_{\bar{k}}\tilde{X}^{\bar{h}} - y^s R_{ski}^{h}\partial_j\tilde{X}^{k} - y^s R_{sjk}^{h}\partial_i\tilde{X}^{k} = 0 $$

$$ \partial_j\partial_{\bar{i}}\tilde{X}^{\bar{h}} + \tilde{X}^{k}\partial_k\Gamma_{ji}^{h} - \Gamma_{ji}^{k}\partial_{\bar{k}}\tilde{X}^{\bar{h}} + \Gamma_{ki}^{h}\partial_j\tilde{X}^{k} + (\partial\Gamma_{jk}^{h}\partial_{\bar{i}}\tilde{X}^{k} + \Gamma_{jk}^{h}\partial_{\bar{i}}\tilde{X}^{\bar{k}}) - y^s R_{sjk}^{h}\partial_{\bar{i}}\tilde{X}^{k} = 0, \quad (4.6) $$

$$ \partial_{\bar{j}}\partial_i\tilde{X}^{\bar{h}} + \tilde{X}^{k}\partial_k\Gamma_{ji}^{h} - \Gamma_{ji}^{k}\partial_{\bar{k}}\tilde{X}^{\bar{h}} + (\partial\Gamma_{ki}^{h}\partial_{\bar{j}}\tilde{X}^{k} + \Gamma_{ki}^{h}\partial_{\bar{j}}\tilde{X}^{\bar{k}}) + \Gamma_{jk}^{h}\partial_i\tilde{X}^{k} - y^s R_{ski}^{h}\partial_{\bar{j}}\tilde{X}^{k} = 0, \quad (4.7) $$

$$ \partial_{\bar{j}}\partial_{\bar{i}}\tilde{X}^{\bar{h}} - \Gamma_{ki}^{h}\partial_{\bar{j}}\tilde{X}^{k} + \Gamma_{jk}^{h}\partial_{\bar{i}}\tilde{X}^{k} = 0\,, \quad (4.8) $$

$\tilde{X}$, $T(M_n)$ de bir dikey infinitesimal afin dönüşüm olsun. Bu durumda indirgenmiş koordinatlara göre $\tilde{X}$ nın bileşenleri $\begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{X}^{\bar{h}} \end{pmatrix}$ olup, (4.8) denkleminden $\partial_{\bar{j}}\partial_{\bar{i}}\tilde{X}^{\bar{h}}=0$ bulunur. Buradan

$$\tilde{X}^{\bar{h}} = C_i^h y^i + D^h \tag{4.9}$$

yazılır. Buradaki C_i^h ve D^h bileşenleri sadece $\tilde{X}^h$ değişkenlerine bağlıdır. $\tilde{X}$, $T(M_n)$ de bir vektör alanı olduğundan $C = C_i^h \partial_h \otimes dx^i$ ve $D = D^h \partial_h$, sırasıyla, $\Im_1^1(M_n)$ ve $\Im_0^1(M_n)$ nin elemanlarıdır.

Teorem 4.1.1.1. Eğer $\tilde{X}$, $T(M_n)$ de ${}^H\nabla$ konneksiyonuna göre bir dikey infinitesimal afin dönüşüm ise, bu durumda

a) $L_D\nabla + C(D\otimes R) = 0$, $D = \partial^h \dfrac{\partial}{\partial x^h}$, $D \in \Im_0^1(M_n)$ ve $C(D\otimes R) = D^k R_{kji}{}^h$ dir.

b) C , ∇ ya göre paraleldir, yani $\nabla C = 0$ dır.

c) ∇ nın T torsion tensörü C ye göre pürdür.

Her $Y, Z \in \Im_0^1(M_n)$ için $C(T(Y,Z)) = T(CY,Z) = T(Y,CZ)$.

d) Her $Y, Z, W \in \Im_0^1(M_n)$ için $C(\nabla_Z T)(Y,W) = (\nabla_{CZ} T)(Y,W)$.

olup, tersine, eğer C ve D (a) , (b) , (c) ve (d) şartlarını sağlıyor ise

$$\tilde{X} = (C_i^h y^i + D^h)\frac{\partial}{\partial y^h} = \gamma C + {}^vD$$

vektör alanı, ${}^{H}\nabla$ konneksiyonuna göre $T(M_n)$de bir infinitesimal afin dönüşümdür, burada $\gamma C = \begin{pmatrix} 0 \\ y^i C_i^h \end{pmatrix}$ vektör alanı dikey vektör alanıdır (Gezer and Akbulut 2006).

İspat: **(a)** (4.9) denkleminden ve $\tilde{X}^h = 0$ eşitliğinin (4.5) denkleminde kullanılmasıyla,

$$\partial_j \partial_i C_s^h + C_s^k \partial_k \Gamma_{ji}^h - \Gamma_{ji}^k \partial_k C_s^h - \partial_s \Gamma_{ji}^k C_k^h + \Gamma_{ki}^h \partial_j C_s^k + \Gamma_{jk}^h \partial_i C_s^k - C_s^k R_{kji}^h + R_{sji}^k C_k^h = 0, \quad (4.10)$$

ve

$$L_D \nabla + \mathcal{C}(D \otimes R) = 0$$

yani koordinatlarla

$$\partial_j \partial_i D^h + D^k \partial_k \Gamma_{ji}^h - \Gamma_{ji}^k \partial_k D^h + \Gamma_{ki}^h \partial_j D^k + \Gamma_{jk}^h \partial_i D^k - D^k R_{kji}^h = 0 \ , \quad (4.11)$$

elde edilir.

(b) (4.9) denkleminden ve $\tilde{X}^h = 0$ eşitliğinin (4.7) denkleminde kullanılmasıyla,

$$\partial_i C_j^h - \Gamma_{ji}^k C_k^h + \Gamma_{ki}^h C_j^k = 0, \quad (4.12)$$

(4.9) denkleminden ve $\tilde{X}^h = 0$ eşitliğinin (4.7) denkleminde kullanılmasıyla,

$$\partial_j C_i^h - \Gamma_{ji}^k C_k^h + \Gamma_{jk}^h C_i^k = 0, \quad (4.13)$$

olur buda, bu da C nin M_n de paralel olduğunu gösterir.

(c) (4.13) denkleminde i ve j, indislerinin yerleri değiştirilirse,

$$\partial_i C_j^h - \Gamma_{ij}^k C_k^h + \Gamma_{ik}^h C_j^k = 0\,,$$

ve (4.12) eşitliğinden çıkarılırsa,

$$T_{ji}^k C_k^h = T_{ki}^h C_j^k \;\;, \qquad (4.14)$$

elde edilir. Burada her $Y, Z \in \Im_0^1(M_n)$ için

$$C(T(Y,Z)) = T(CY,Z) \qquad (4.15)$$

(4.14) denkleminden

$$T(Y,CZ)) = -T(CZ,X) = C(T(Z,Y)) = C(T(Y,Z))$$

ve

$$C(T(Y,Z)) = T(CY,Z) = T(Y,CZ)$$

eşitlikleri elde edilir.

(d) (4.12) ve (4.13) denklemlerindeki kısmi türevleri (4.10) denkleminde yerine yazılırsa, C_j^h nin tüm kısmi türevleri yok olur. Böylece keyfi $X, Y, Z \in \Im_0^1(M)$ için

$$C_k^h \nabla_j T_{li}^k = \nabla_k T_{li}^h C_j^k \;\;, \qquad (4.16)$$

denklemi elde edilir. Burada T , C ye göre ϕ - tensörüdür.

Tersine, eğer (a), (b), (c) ve (d) şartları sağlanırsa, $\tilde{X}$ in bir infinitesimal afin dönüşüm olduğu görülür. Böylece Teorem 4.1.1.1 ispatlanmış olur.

4.1.2. Tanjant demette ${}^{H}\nabla$ konneksiyonuna göre fibreyi-koruyan infinitesimal afin dönüşümler

$T(M_n)$ nin her bir fibresini yine bir fibreye dönüştüren dönüşüme fibre-koruyan dönüşüm denir. Ayrıca, $T(M_n)$ deki bir infinitesimal afin dönüşüm fibre-koruyan dönüşümlerin bir lokal parametreli grubunu üretiyorsa, yine bu dönüşüme fibre-koruyan infinitesimal afin dönüşüm denir. Başka bir ifadeyle,

$\begin{pmatrix} \tilde{X}^{h} \\ \tilde{X}^{\bar{h}} \end{pmatrix}$ bileşenlerine sahip bir $\tilde{X}$ infinitesimal dönüşümünün fibre-koruyan olması için gerek ve yeter şart $\tilde{X}^{h}(h=1,2,...,n)$ bileşenlerinin sadece $T(M_n)$ deki (x^h, y^h) indirgenmiş koordinatlara göre $x^1,...,x^n$ değişkenlerine bağlı olmasıdır (Yano and Ishihara 1973).

Teorem 4.1.2.1. Eğer $\tilde{X}$, ${}^{H}\nabla$ konneksiyonuna göre $T(M_n)$ de fibre koruyan infinitesimal afin dönüşümü ise $\tilde{X}$ den M_n üzerine indirgenen X infinitesimal dönüşümü de ∇ konneksiyonuna göre afin dönüşümdür (Gezer and Akbulut 2007).

İspat:

$$\begin{cases} x^{h'} = x^{h} + \tilde{X}^{h}(x^1,...,x^n)\Delta t \\ x^{\bar{h}'} = x^{\bar{h}} + \tilde{X}^{\bar{h}}(x^1,...,x^n,x^{n+1},...,x^{2n})\Delta t \end{cases}$$

ifadesinden görülür ki, $\begin{pmatrix} \tilde{X}^{h} \\ \tilde{X}^{\bar{h}} \end{pmatrix}$ bileşenlerine sahip bir $\tilde{X}$ fibre-koruyan infinitesimal dönüşüm M_n baz uzayında $\tilde{X}^{h}$ bileşenli bir X infinitesimal dönüşüm indirger. Ayrıca (4.1) denkleminde $\partial\Gamma^{k}_{ji}\partial_{\bar{k}}\tilde{X}^{h}$ =0 ve $y^{s}R^{k}_{sji}\partial_{\bar{k}}\tilde{X}^{h}=0$, olduğundan teorem ispatlanmış olur.

Teorem 4.1.2.2. ∇, M_n de bir Riemannian konneksiyonu olmak üzere her $X \in \Im_0^1(M_n)$ için,

$$(L_{^C X}{}^H\nabla)(^C Y, {}^C Z) = {}^C(L_X\nabla)(^C Y, {}^C Z) + \gamma(L_X R)(\ \ , Y, Z)$$

şeklindedir (Gezer and Akbulut 2007).

İspat: $(L_{^C X}{}^H\nabla)(^C Y, {}^C Z) = L_{^C X}(^H\nabla_{^C Y}{}^C Z) - {}^H\nabla_{^C Y}(L_{^C X}{}^C Z) - {}^H\nabla_{[^C X, {}^C Y]}{}^C Z$

$$= L_{^C X}[^C(\nabla_Y Z) - \gamma(R(\ \ , Y)Z)] - {}^H\nabla_{^C Y}{}^C(L_X Z) - {}^H\nabla_{^C[X,Y]}{}^C Z$$

$$= [^C X, {}^C\nabla_X Y] - [^C X, \gamma(R(\ \ , Y)Z)] - {}^C(\nabla_Y(L_X Z)) + \gamma(R(\ \ , Y)L_X Z)$$

$$- {}^C(\nabla_{[X,Y]}Z) + \gamma R([X, Y]Z)]$$

$$= {}^C(L_X\nabla_X Y) - {}^C(\nabla_Y(L_X Z)) - {}^C(\nabla_{[X,Y]}Z) - \gamma(L_X R(\ \ , Y)Z)$$

$$+\gamma(R(\ \ , Y)L_X Z) + \gamma(R(\ \ , L_X Y)Z)$$

$$= {}^C(L_X\nabla)(^C Y, {}^C Z) + \gamma(-L_X R(\ \ , Y)Z + R(\ \ , Y)L_X Z + R(\ \ , L_X Y)Z)$$

$$= {}^C(L_X\nabla)(^C Y, {}^C Z) + \gamma(L_X R)(\ \ , Y, Z).$$

Burada $R(\ \ , X)Y$ her $Z \in \Im_0^1(M_n)$ için $W(Z) = R(Z, X)Y$ şeklinde olan (1,1) tipli W tensörü tanımlar.

Teorem 4.1.2.3. Eğer $\tilde{X}$, $^H\nabla$ konneksiyonuna göre $T(M_n)$ de bir fibre-koruyan infinitesimal afin dönüşüm ve W ' ye göre infinitesimal automorphism ise bu durumda $\tilde{X} = {}^c X + {}^v D + \gamma C$ Teorem 4.1.1.1 deki (a), (b) ve (c) şartlarını sağlar. Burada D ve C, sırasıyla, (1,0) ve (1,1) tipli tensörlerdir (Gezer and Akbulut 2007).

İspat: $\tilde{X}$ ve X, Teorem 4.1.2.1'de tanımlanan vektör alanları olmak üzere Teorem 4.1.2.2 den, eğer X, W göre infinitesimal automorphism ise ${}^{c}X$, ${}^{H}\nabla$ konneksiyonuna göre $T(M_n)$ de bir infinitesimal afin dönüşümdür. ${}^{c}X$ nin bileşenleri $\begin{pmatrix} X^h \\ \partial X^h \end{pmatrix}$ olduğundan $\tilde{X} - {}^{c}X$ nin, ${}^{H}\nabla$ konneksiyonuna göre $T(M_n)$ de bir dikey infinitesimal afin dönüşüm olduğu görülür. Buradan aşağıdaki teorem elde edilir.

4.1.3. ${}^{H}g$ Metriği ile tanımlanan infinitesimal izometri

Teorem 4.1.3.1. M_n deki bir X vektör alanının ${}^{s}g$ metriğine sahip $T(M_n)$' ye

a) ${}^{V}X \in \Im_0^1(T(M_n))$ dikey

b) ${}^{c}X \in \Im_0^1(T(M_n))$ tam

c) ${}^{H}X \in \Im_0^1(T(M_n))$ yatay

liftlerinin yine $T(M_n)$ de Killing vektör alanı olması için gerek ve yeter şart, sırasıyla,

a) X in M_n de Killing vektör alanı olması,

b) X in M_n de kovaryant türevi sıfır olan Killing vektör alanı olması,

c) X in M_n de kovaryant türevi sıfır olan Killing vektör alanı olmasıdır (Kobayashi and Nomizu 1963).

İspat: $\tilde{X}$ vektör alanı $T(M_n)$ de indirgenmiş koordinatlara göre bileşenleri $(\tilde{X}^A) = \begin{pmatrix} \tilde{X}^h \\ \tilde{X}^{\bar{h}} \end{pmatrix}$ olan bir vektör alanı olsun. Bu durumda ${}^{H}\nabla\tilde{X}$ in kovaryant türevi, indirgenmiş koordinatlara göre,

$$ {}^{H}\nabla_I \tilde{X}^J = \partial_I X^J + {}^{H}\Gamma_{IM}^{J} \tilde{X}^M \qquad (4.17) $$

bileşenlerine sahiptir, burada ${}^{H}\Gamma^{J}_{IM}$ ler ${}^{H}\nabla$ konneksiyonunun katsayılarıdır.

$\Gamma^h_i x^i = y^s \Gamma^h_{si} x^i$ olmak üzere $T\left(M_n\right)$ deki indirgenmiş koordinatlara göre bir $X \in \Im^1_0(M_n)$ vektör alanının ${}^{V}X \in \Im^1_0(T(M_n))$ dikey lifti, ${}^{C}X \in \Im^1_0(T(M_n))$ tam lifti ve ${}^{H}X \in \Im^1_0(T(M_n))$ yatay liftinin bileşenleri, sırasıyla,

$$ {}^{V}X = \begin{pmatrix} 0 \\ x^h \end{pmatrix}, \qquad {}^{C}X = \begin{pmatrix} x^h \\ \partial x^h \end{pmatrix}, \qquad {}^{H}X = \begin{pmatrix} x^h \\ -\Gamma^h_i x^i \end{pmatrix} \tag{4.18} $$

şeklindedir.

Şimdi ${}^{V}X$, ${}^{C}X$ ve ${}^{H}X$ vektör alanlarının ${}^{H}g$ metriğine göre Lie türevleri, (4.18) denklemi ve ${}^{H}\nabla$ konneksiyonunun katsayıları kullanılarak,

$$ \begin{cases} L_{{}^{V}X}\,{}^{H}g = ({}^{H}\nabla_I\,{}^{V}X^J + {}^{H}\nabla_J\,{}^{V}X^I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \nabla_j X^i + \nabla_i X^j & 0 \end{pmatrix} \\ L_{{}^{c}X}\,{}^{H}g = ({}^{H}\nabla_I\,{}^{c}X^J + {}^{H}\nabla_J\,{}^{c}X^I) = \begin{pmatrix} \nabla_i X^j + \nabla_j X^i & 0 \\ y^s\partial_s(\nabla_j X^i + \nabla_i X^j) - y^s(R_{sik}{}^j + R_{sjk}{}^i)X^k & \nabla_i X^j + \nabla_j X^i \end{pmatrix} \\ L_{{}^{H}X}\,{}^{H}g = ({}^{H}\nabla_I\,{}^{H}X^J + {}^{H}\nabla_J\,{}^{H}X^I) = \begin{pmatrix} \nabla_i X^j + \nabla_j X^i & 0 \\ -\Gamma^j_h \nabla_i X^h - \Gamma^i_h \nabla_j X^h & \nabla_i X^j + \nabla_j X^i \end{pmatrix} \end{cases} \tag{4.19} $$

şeklinde tanımlanır. Buradan

$\nabla_i X^k = 0$ olduğu dikkate alınırsa $R_{sik}{}^j X^k = 0$ ve $R_{sjk}{}^i X^k = 0$ olur. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Tanım 4.1.3.2. Eğer X ve Y , M_n de Killing vektör alanları ise Killing vektörün tanımından

$$L_{[x,y]}g = L_X(L_Y g) - L_Y(L_X g) = 0, \tag{4.20}$$

olup, $[X,Y]$, M_n de Killing vektör alanıdır (Kobayashi and Nomizu 1963).

Tanım 4.1.3.3. $X, Y \in \Im_0^1(M_n)$ için $(1,1)$ tipinden $A_X Y$ tensör alanını

$$(A_X Y)Z = (L_X \nabla)(Y,Z) = [L_X, \nabla_Y]Z - \nabla_{[X,Y]}Z, \ \forall Z \in \Im_0^1(M_n) \tag{4.21}$$

olarak tanımlanır.

Teorem 4.1.3.4. M_n deki $[X,Y]$ vektör alanının dikey ve tam liftlerinin $T(M_n)$ de ${}^H g$ metriğine göre Killing vektör alanı olması için yeter şart X ve Y vektör alanlarının M_n de kovaryant türevleri sıfır olan Killing vektör alanları olmasıdır (Gezer and Akbulut 2007).

İspat:

$$\left[{}^V X, {}^c Y\right] = {}^V[X,Y], \qquad \left[{}^c X, {}^c Y\right] = {}^c[X,Y], \qquad \left[{}^c X, {}^H Y\right] = {}^H[X,Y] - \gamma(A_X Y)$$

(4.22)

şeklinde yazılır, burada $\gamma(A_X Y) \in \Im_0^1(M_n)$ nın bileşenleri $\begin{pmatrix} 0 \\ y^s (A_X Y)_s^h \end{pmatrix}$ dır.

Bir $X \in \Im_0^1(M_n)$ vektör alanı verilmiş olsun. Eğer X vektör alanı $L_X \nabla = 0$ şartını sağlıyor ise X vektör alanına ∇ afin konneksiyonuna göre infinitesimal dönüşüm denir. Buna göre (4.21) ve (4.22) den

$$\left[{}^c X, {}^H Y\right] = {}^H[X,Y] \tag{4.23}$$

eşitliği yazılır. ${}^{H}g$ metriğinin ${}^{V}[X,Y]$ ve ${}^{c}[X,Y]$ ye göre Lie türevleri hesaplanırsa

$$L_{{}^{V}[X,Y]}{}^{H}g = L_{\left[{}^{V}X,{}^{c}Y\right]}{}^{H}g = L_{{}^{V}X}(L_{{}^{c}Y}{}^{H}g) - L_{{}^{c}Y}(L_{{}^{V}X}{}^{H}g)$$
$$L_{{}^{c}[X,Y]}{}^{H}g = L_{\left[{}^{c}X,{}^{c}Y\right]}{}^{H}g = L_{{}^{c}X}(L_{{}^{c}Y}{}^{H}g) - L_{{}^{c}Y}(L_{{}^{c}X}{}^{H}g) \qquad (4.24)$$

olur. Böylece (4.19) ve (4.24) den teorem elde edilir.

Teorem 4.1.3.5. M_n deki $[X,Y]$ vektör alanının yatay liftinin $T(M_n)$ de ${}^{H}g$ metriğine göre Killing vektör alanı olması için yeter şart X ve Y vektör alanlarının M_n de kovaryant türevleri sıfır olan Killing vektör alanları olmasıdır (Gezer and Akbulut 2007).

M_n de X bir infinitesimal afin dönüşüm olsun. (4.20) ve (4.24) den

$$L_{{}^{H}[X,Y]}{}^{H}g = L_{\left[{}^{c}X,{}^{H}Y\right]}{}^{H}g = L_{{}^{c}X}(L_{{}^{H}Y}{}^{H}g) - L_{{}^{H}Y}(L_{{}^{c}X}{}^{H}g) \qquad (4.25)$$

yazılır.

4.2. Tanjant Demette ${}^{C}g$ Metriğinin Bazı Uygulamaları

4.2.1. Tanjant demette ${}^{C}\nabla$ konneksiyonuna göre infinitesimal dönüşümler

M_n de g metriği ile tanımlanan ∇ Riemannian konneksiyonu ve konneksiyon katsayıları ise Γ_{ij}^{k} olsun. Ayrıca $T(M_n)$ de $\tilde{X} = \tilde{X}^{i}\partial_i + \tilde{X}^{\bar{i}}\partial_{\bar{i}}$ vektör alanı verilmiş olsun. Burada $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $\partial_{\bar{i}} = \frac{\partial}{\partial y^i} = \frac{\partial}{\partial x^{\bar{i}}}$, $\bar{i} = n+1,...,2n$, şeklindedir. Buradaki

${}^C\Gamma_{ji}^k = \Gamma_{ji}^k$, ${}^C\Gamma_{j\bar{i}}^k = {}^C\Gamma_{\bar{j}i}^k = {}^C\Gamma_{\bar{j}\bar{i}}^k = {}^C\Gamma_{\bar{j}\bar{i}}^{\bar{k}} = 0$, ${}^C\Gamma_{ji}^{\bar{k}} = \partial\Gamma_{ji}^k$, ${}^C\Gamma_{j\bar{i}}^{\bar{k}} = {}^C\Gamma_{\bar{j}i}^{\bar{k}} = \Gamma_{ji}^k$ eşitlikleri ve X vektör alanının n-boyutlu M_n manifoldunda bir infinitesimal afin dönüşüm olması şartı dikkate alınırsa, $\tilde{X} = \tilde{X}^\alpha \partial_\alpha \in \Im_0^1(T(M_n))$ vektör alanının ${}^C\nabla$ konneksiyonuna göre $T(M_n)$ de bir infinitesimal afin dönüşüm olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki (4.26)- (4.33) şartlarını sağlamasıdır:

$$\partial_j \partial_i \tilde{X}^h + \tilde{X}^k \partial_k \Gamma_{ji}^h - \left(\Gamma_{ji}^k \partial_k \tilde{X}^h + \partial\Gamma_{ji}^k \partial_{\bar{k}} \tilde{X}^h \right) - \Gamma_{ki}^h \partial_j \tilde{X}^k + \Gamma_{jk}^h \partial_i \tilde{X}^k = 0, \tag{4.26}$$

$$\partial_j \partial_{\bar{i}} \tilde{X}^h - \Gamma_{ji}^k \partial_{\bar{k}} \tilde{X}^h + \Gamma_{jk}^h \partial_{\bar{i}} \tilde{X}^k = 0, \tag{4.27}$$

$$\partial_{\bar{j}} \partial_i \tilde{X}^h - \Gamma_{ji}^k \partial_{\bar{k}} \tilde{X}^h + \Gamma_{ki}^h \partial_{\bar{j}} \tilde{X}^k = 0, \tag{4.28}$$

$$\partial_{\bar{j}} \partial_{\bar{i}} \tilde{X}^h = 0 \ , \tag{4.29}$$

$$\partial_j \partial_i \tilde{X}^{\bar{h}} + \left(\tilde{X}^k \partial_k \partial\Gamma_{ji}^h + \tilde{X}^{\bar{k}} \partial_k \Gamma_{ji}^h \right) - \left(\Gamma_{ji}^k \partial_k \tilde{X}^{\bar{h}} + \partial\Gamma_{ji}^k \partial_{\bar{k}} \tilde{X}^{\bar{h}} \right) + \left(\partial\Gamma_{ki}^h \partial_j \tilde{X}^k + \Gamma_{ki}^h \partial_j \tilde{X}^{\bar{k}} \right)$$

$$+ \left(\partial\Gamma_{jk}^h \partial_i \tilde{X}^k + \Gamma_{jk}^h \partial_i \tilde{X}^{\bar{k}} \right) = 0 \quad , \tag{4.30}$$

$$\partial_j \partial_{\bar{i}} \tilde{X}^{\bar{h}} + \tilde{X}^k \partial_k \Gamma_{ji}^h - \Gamma_{ji}^k \partial_{\bar{k}} \tilde{X}^{\bar{h}} + \Gamma_{ki}^h \partial_j \tilde{X}^k + \left(\partial\Gamma_{jk}^h \partial_{\bar{i}} \tilde{X}^k + \Gamma_{jk}^h \partial_{\bar{i}} \tilde{X}^{\bar{k}} \right) = 0, \tag{4.31}$$

$$\partial_{\bar{j}} \partial_i \tilde{X}^{\bar{h}} + \tilde{X}^k \partial_k \Gamma_{ji}^h - \Gamma_{ji}^k \partial_{\bar{k}} \tilde{X}^{\bar{h}} + \Gamma_{jk}^h \partial_i \tilde{X}^k + \left(\partial\Gamma_{ki}^h \partial_{\bar{j}} \tilde{X}^k + \Gamma_{ki}^h \partial_{\bar{j}} \tilde{X}^{\bar{k}} \right) = 0, \tag{4.32}$$

$$\partial_j \partial_{\bar{i}} \tilde{X}^{\bar{h}} + \Gamma_{ki}^h \partial_{\bar{j}} \tilde{X}^k + \Gamma_{jk}^h \partial_{\bar{i}} \tilde{X}^k = 0. \tag{4.33}$$

$\tilde{X}$, $T(M_n)$ de bir dikey infinitesimal afin dönüşüm olsun. Bu durumda indirgenmiş koordinatlara göre $\tilde{X}$ nın bileşenleri $\begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{X}^{\bar{h}} \end{pmatrix}$ olup, (4.33) denkleminden $\partial_{\bar{j}} \partial_{\bar{i}} \tilde{X}^{\bar{h}}$ =0 bulunur. Buradan

$$\tilde{X}^{\bar{h}} = C_i^h y^i + D^h \tag{4.34}$$

yazılır. Buradaki C_i^h ve D^h bileşenleri sadece $\tilde{X}^h$ değişkenlerine bağlıdır. $\tilde{X}$, $T(M_n)$ de bir vektör alanı olduğundan $C = C_i^h \dfrac{\partial}{\partial x^h} \otimes \partial x^i$ ve $D = \dfrac{\partial}{\partial x^h}$, sırasıyla, $\Im_1^1(M_n)$ ve

$\Im_0^1(M_n)$ nin elemanlarıdır.

4.2.2. Tanjant demette ${}^C\nabla$ konneksiyonuna göre fibreyi-koruyan infinitesimal afin dönüşümler

Teorem 4.2.2.1: Eğer $\tilde{X}$, ${}^C\nabla$ konneksiyonuna göre $T(M_n)$ de fibre koruyan infinitesimal afin dönüşümü ise $\tilde{X}$ den M_n üzerine indirgenen X infinitesimal dönüşümü de ∇ konneksiyonuna göre afin dönüşümdür.

$\tilde{X}$ ve X, Teorem 4.2.2.1. ki gibi tanımlı olmak üzere, ${}^cX$ ${}^C\nabla$ konneksiyonuna göre $T(M_n)$ de bir infinitesimal afin dönüşümdür. ${}^cX$ nin bileşenleri $\begin{pmatrix} X^h \\ \partial X^h \end{pmatrix}$ olduğundan $\tilde{X} - {}^cX$ nin, ${}^C\nabla$ konneksiyonuna göre $T(M_n)$ de bir dikey infinitesimal afin dönüşüm olduğu görülür. Buradan aşağıdaki teorem elde edilir (Yano and Kobayashi 1966).

Teorem 4.2.2.2. Eğer $\tilde{X}$, ${}^C\nabla$ konneksiyonuna göre $T(M_n)$ de bir fibre-koruyan infinitesimal afin dönüşüm ise bu durumda $\tilde{X} = {}^cX + {}^vD + \gamma C$ şartını sağlar. Burada X ve D, ∇ ile M nin infinitesimal dönüşümleri ve C ise Teorem 4.1.1.1 deki (b), (c) ve (d) şartlarını sağlayan (1,1) tipli parallel tensor alanıdır (Yano and Kobayashi 1966).

4.2.3. ${}^Cg$ Metriği ile tanımlanan infinitesimal izometri

g metriğine sahip bir M_n pseudo-Riemannian manifoldunda bir $X \in \Im_0^1(M_n)$ vektör alanı için eğer $L_X g = 0$ ise bu vektör alanına infinitesimal izometri veya Killing vektör alanı denir (Yano and Davies 1971). X in bir Killing vektör alanı olması için gerek ve yeter şart

$$L_X g_{ij} = X^\alpha \partial_\alpha g_{ij} + g_{i\alpha}\partial_j X^\alpha + g_{\alpha j}\partial_i X^\alpha = \nabla_j X_i + \nabla_i X_j \tag{4.35}$$

olmasıdır. Burada X in bileşenleri X^{α} ve g nin bileşenleri g_{ij} dir.

$\tilde{X}$ vektör alanın $T(M_n)$ de indirgenmiş koordinatlara göre bileşenleri $(\tilde{X}^{A}) = \begin{pmatrix} \tilde{X}^{h} \\ \tilde{X}^{\bar{h}} \end{pmatrix}$

olsun. Bu durumda (4.35) denkleminde (3.43) ifadesi kullanılırsa, $\tilde{X}$ vektör alanının $T(M_n)$ de infinitesimal izometri olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki gibi olur.

$$\left(\tilde{X}^{k}\partial_{k}\partial g_{ji} + \tilde{X}^{\bar{k}}\partial_{k}\partial g_{ji}\right) + \left(\partial g_{jk}\partial_{i}\tilde{X}^{k} + g_{jk}\partial_{i}\tilde{X}^{\bar{k}}\right) + \left(\partial g_{ki}\partial_{j}\tilde{X}^{k} + g_{ki}\partial_{j}\tilde{X}^{\bar{k}}\right) = 0 \quad (4.36)$$

$$\tilde{X}^{k}\partial_{k} g_{ji} + g_{jk}\partial_{i}\tilde{X}^{k} + \left(\partial g_{ki}\partial_{\bar{j}}\tilde{X}^{k} + g_{ki}\partial_{\bar{j}}\tilde{X}^{\bar{k}}\right) = 0 \quad (4.37)$$

$$g_{jk}\partial_{\bar{i}}\tilde{X}^{k} + g_{ki}\partial_{\bar{j}}\tilde{X}^{k} = 0 \quad (4.38)$$

4.3. Tanjant Demette Sasaki Metriğinin Bazı Uygulamaları

$T(M_n)$ de $\tilde{X}$, adapte olmuş çatıya göre bileşenleri,

$$\left(\tilde{X}^{\alpha}\right) = \begin{pmatrix} \tilde{X}^{h} \\ \tilde{X}^{\bar{h}} \end{pmatrix}$$

şeklinde olan bir vektör alanı olmak üzere, $\tilde{\nabla}\tilde{X}$ kovaryant türevinin

$$\left(\tilde{\nabla}\tilde{X}\right)_{A}^{B} = \tilde{\nabla}_{A} X^{B} = \partial_{A} X^{B} + \Gamma_{AC}^{B} X^{C}$$

eşitliğinden,

$$A_{\alpha}^{A} A_{B}^{\beta}\left(\tilde{\nabla}\tilde{X}\right)_{A}^{B} = A_{\alpha}^{A} A_{B}^{\beta}\left(\partial_{A} X^{B} + \Gamma_{AC}^{B} X^{C}\right) \quad (4.39)$$

$$= A_{\alpha}^{A} A_{B}^{\beta}\partial_{A} X^{B} + A_{\alpha}^{A}\left(\partial_{A} A_{B}^{\beta}\right) X^{B}$$

$$-A_\alpha^A\left(\partial_A A_B^\beta\right)X^B + A_\alpha^A A_B^\beta \Gamma_{AC}^B X^C$$

elde edilir. Adapte olmuş çatıda

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma = A_\alpha^A A_B^\beta A_C^\gamma \Gamma_{AB}^C + \left(D_\alpha A_\beta^C\right)A_C^\gamma$$

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha\gamma}^\beta = A_\alpha^A A_\gamma^C A_B^\beta \Gamma_{AC}^B + \left(D_\alpha A_\gamma^C\right)A_C^\beta$$

olup bu ifadenin her iki tarafı X^γ ile çarpılırsa,

$$X^\gamma \tilde{\Gamma}_{\alpha\gamma}^\beta = A_\alpha^A A_\gamma^C A_B^\beta \Gamma_{AC}^B X^\gamma + \left(D_\alpha A_\gamma^C\right)A_C^\beta X^\gamma$$

elde edilir. Ayrıca,

$$A_\alpha^A A_B^\beta \Gamma_{AC}^B$$

ifadesi $A_\gamma^C X^\gamma$ ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned} A_\alpha^A A_B^\beta \Gamma_{AC}^B A_\gamma^C X^\gamma &= X^\gamma \tilde{\Gamma}_{\alpha\gamma}^\beta - \left(D_\alpha A_\gamma^C\right)A_C^\beta X^\gamma \\ &= A_\gamma^C\left(D_\alpha A_C^\beta\right)X^\gamma \\ &= D_\alpha\left(A_\gamma^C A_C^\beta\right) \\ &= D_\alpha \delta_\gamma^\beta \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre (3.15) ifadesi,

$$\begin{aligned} A_\alpha^A A_B^\beta\left(\tilde{\nabla}X\right)^B &= D_\alpha X^\beta + \tilde{\Gamma}_{\alpha\gamma}^\beta X^\gamma - \left(D_\alpha A_\gamma^C\right)A_C^\beta X^\gamma - A_\alpha^A A_B^\beta X^\beta \\ &= D_\alpha X^\beta + \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta X^\gamma \end{aligned}$$

şeklinde olup,

$$\tilde{\nabla}_\alpha X^\beta = D_\alpha \tilde{X}^\beta + \tilde{\Gamma}^\beta_{\alpha\gamma} X^\gamma$$

eşitliği elde edilir.

M_n de bir X vektör alanını düşünelim. Buna göre X in ${}^V X$ dikey lifti, ${}^C X$ tam lifti ve ${}^H X$ yatay lifti

$$\left({}' X^A\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ X^h \end{pmatrix}, \left(\tilde{X}^A\right) = \begin{pmatrix} X^h \\ \partial X^h \end{pmatrix}, \left(\bar{X}^A\right) = \begin{pmatrix} X^h \\ -\Gamma^h_i X^h \end{pmatrix}$$

şeklindeki bileşenlere sahiptir. Adapte olmuş çatıya göre,

$${}' X^\alpha = A^A_\alpha \, {}' X^A, \tilde{X}^\alpha = A^A_\alpha \tilde{X}^A, \bar{X}^\alpha = A^A_\alpha \bar{X}^A$$

olmak üzere

$$\left({}' X^\alpha\right) = A^A_\alpha \, {}' X^A = \begin{pmatrix} \delta^h_k & 0 \\ \Gamma^h_i & \delta^h_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ X^h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta^h_k X^h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ X^h \end{pmatrix},$$

$$\left(\tilde{X}^\alpha\right) = A^A_\alpha \tilde{X}^A = \begin{pmatrix} \delta^h_k & 0 \\ \Gamma^h_i & \delta^h_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^h \\ \partial X^h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta^h_k X^h \\ X^h \Gamma^h_i + \delta^h_k X^h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^h \\ \nabla X^h \end{pmatrix},$$

$$\left(\bar{X}^\alpha\right) = A^A_\alpha \bar{X}^A = \begin{pmatrix} \delta^h_k & 0 \\ \Gamma^h_i & \delta^h_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^h \\ -\Gamma^h_k X^h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^h \\ X^h \Gamma^h_k - \Gamma^h_k X^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^h \\ 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde bulunur. Bu liftlerin $\tilde{\nabla}^V X, \tilde{\nabla}^C X$ ve $\tilde{\nabla}^H X$ kovaryant türevleri adapte olmuş çatıya göre,

$$\left(\tilde{\nabla}_\beta \, {}' X^\alpha\right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} K^h_{jki} y^k X^i & 0 \\ \nabla_j X^h & 0 \end{pmatrix} \tag{4.40}$$

$$\left(\tilde{\nabla}_{\beta}\tilde{X}^{\alpha}\right)=\begin{pmatrix} \nabla_j X^h-\frac{1}{2}K^h_{jki}y^k\nabla_l X^i y^l & -\frac{1}{2}K^h_{ikj}y^k X^i \\ \nabla_j\nabla_l X^h-\frac{1}{2}K^h_{jik}y^k X^i & \nabla_j X^h \end{pmatrix} \tag{4.41}$$

$$\left(\tilde{\nabla}_{\beta}\bar{X}^{\alpha}\right)=\begin{pmatrix} \nabla_j X^h & -\frac{1}{2}K^h_{ikj}y^k X^i \\ -\frac{1}{2}K^h_{jik}y^k X^i & 0 \end{pmatrix} \tag{4.42}$$

şeklindeki bileşenlere sahiptir.

Teorem 4.3.1. Sasaki metriğine göre M_n de herhangi bir vektör alanının dikey, tam ve yatay liftlerinin paralel olması için gerek ve yeter şart verilen vektör alanının M_n de paralel olmasıdır (Yano and Davies 1963)

İspat: (4.40), (4.41) ve (4.42) ifadelerinden,

$$\tilde{\nabla}_{\beta}{}'X^{\alpha}=0,\tilde{\nabla}_{\beta}\tilde{X}^{\alpha}=2\nabla_i X^i,\tilde{\nabla}_{\beta}\bar{X}^{\alpha}=\nabla_i X^i$$

yazılır.

M_n de X^h bileşenler ile verilen bir vektör alanının Sasaki metriğine göre yatay, tam ve dikey liftleri adapte olmuş çatıya göre,

$$\left({}'X_{\beta}\right)=\left(0,X_i\right),\left(\tilde{X}_{\beta}\right)=\left(X_i,\nabla X_i\right),\left(\bar{X}_{\beta}\right)=\left(X_i,0\right)$$

şeklindedir. Burada $X_i=g_{ih}X^h$ olup; ${}^H X$, ${}^C X$ ve ${}^V X$ liftlerinin rotasyonlarının bileşenleri adapte olmuş çatıya göre,

$$\left(\tilde{\nabla}_\beta{}' X_\alpha - \tilde{\nabla}_\beta{}' X_\alpha\right) = \begin{pmatrix} -K^h_{jik} y^k X_h & -\nabla_i X_j \\ \nabla_i X_j & 0 \end{pmatrix} \tag{4.43}$$

$$\left(\tilde{\nabla}_\beta \tilde{X}_\alpha - \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{X}_\beta\right) = \begin{pmatrix} \left(\nabla_j X_i - \nabla_i X_j\right) - \left(K^h_{jik} \nabla_t X_h\right) y^k y^l & -y^k \nabla_i \nabla_k X_j \\ y^k \nabla_j \nabla_k X_i & \nabla_j X_i - \nabla_i X_j \end{pmatrix}$$

$$\left(\tilde{\nabla}_\beta \bar{X}_\alpha - \tilde{\nabla}_\alpha \bar{X}_\beta\right) = \begin{pmatrix} \nabla_j X_i - \nabla_i X_j & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.44}$$

şeklindedir. (4.44) matrisindeki $\nabla_j X_i - \nabla_i X_j$ bileşeni, eğer X^* ın tam lifti $T(M_n)$ de kapalı ise

$$\nabla_j X_i - \nabla_i X_j = 0\,,\ \nabla_j \nabla_i X_n = 0 \tag{4.45}$$

olduğu görülür. Ayrıca (4.45) eşitlikleri yerine yazılırsa

$$\left(K^h_{jik} \nabla_l X_h\right) y^k y^l = 0$$

elde edilir. Buradan, eğer X^* kapalı ve X in ikinci türevi M_n de sıfır ise X^* in tam liftinin $T(M_n)$ de kapalı olduğu ve (4.44) ifadesinden, X^* in yatay liftinin $T(M_n)$ de kapalı olması için gerek ve yeter şartın X^* in kapalı olması gerektiği elde edilir.

Teorem 4.3.2. M_n de bir X vektör alanının Sasaki metriğine göre

i. Dikey liftinin $T(M_n)$ de harmonik olması için gerek ve yeter şart M_n de verilen X vektör alanının paralel olmasıdır,

ii. Tam liftinin $T(M_n)$ de harmonik olması için gerek ve yeter şart M_n de verilen X vektör alanının harmonik ve ikinci kovaryant türevinin sıfır olmasıdır,

iii. Yatay liftinin $T(M_n)$ de harmonik olması için gerek ve yeter şart M_n de verilen X vektör alanının harmonik olmasıdır (Yano and Davies 1963).

Şimdi Sasaki metriğinin Lie türevlerini

$$\left({}'X_\beta\right)=\left(0,X_i\right),\left(\tilde{X}_\beta\right)=\left(X_i,\nabla X_i\right),\left(\bar{X}_\beta\right)=\left(X_i,0\right)$$

eşitliklerini kullanarak ${}^{V}X$, ${}^{C}X$ ve ${}^{H}X$ liftlerine göre hesaplayalım. $T(M_n)$ de adapte olmuş çatıya göre Lie türevlerinin bileşenleri,

$$\left(\tilde{\nabla}_\beta{}'X_\alpha-\tilde{\nabla}_\alpha{}'X_\beta\right)=\begin{pmatrix}0 & \nabla_j X_i\\ \nabla_j X_i & 0\end{pmatrix}, \tag{4.46}$$

$$\left(\tilde{\nabla}_\beta\tilde{X}_\alpha-\tilde{\nabla}_\alpha\tilde{X}_\beta\right)=\begin{pmatrix}\left(\nabla_j X_i-\nabla_i X_j\right) & \left(\nabla_i\nabla_k X_j+K_{hikj}^{h}X^h\right)y^k\\ \left(\nabla_j\nabla_k X_i+K_{hjki}^{h}X^h\right)y^k & \nabla_j X_i-\nabla_i X_j\end{pmatrix},$$

$$\left(\tilde{\nabla}_\beta\bar{X}_\alpha-\tilde{\nabla}_\alpha\bar{X}_\beta\right)=\begin{pmatrix}\nabla_j X_i-\nabla_i X_j & K_{jki}^{h}y^k X_h\\ K_{ikj}^{h}y^k X_h & 0\end{pmatrix}$$

şeklindedir. Burada, $\nabla_j X_i+\nabla_i X_j=0$ ve $K_{jki}^{h}X_h=0$ olması X in ikinci kovaryant türevinin sıfır olması anlamına gelir.

Teorem 4.3.3. M_n de bir X vektör alanının Sasaki metriğine göre,

i. Dikey liftinin $T(M_n)$ de bir Killing vektör alanı olması için gerek ve yeter şart X in M_n de ikinci kovaryant türevi sıfır olan bir Killing vektör alanı olmasıdır.
ii. Tam liftinin $T(M_n)$ de bir Killing vektör alanı olması için gerek ve yeter şart X in M_n de bir Killing vektör alanı olmasıdır.
iii. Yatay liftinin $T(M_n)$ de bir Killing vektör alanı olması için gerek ve yeter şart X in M_n de paralel olmasıdır (Yano and Davies 1963).

Teorem 4.3.4. M_n de bir X vektör alanının Sasaki metriğine göre,

i. Dikey liftinin bir infinitesimal konform dönüşüm olması için gerek ve yeter şart X in M_n de ikinci kovaryant türevi sıfır olan bir Killing vektör alanı olmasıdır.

ii. Tam liftinin bir infinitesimal konform dönüşüm olması için gerek ve yeter şart X in bir infinitesimal homothetik dönüşüm yani c sabitine göre $L_X g = cg$ olmasıdır.

iii. Yatay liftinin bir infinitesimal konform dönüşüm olması için gerek ve yeter şart X in M_n de paralel olmasıdır (Davies 1966).

$T(M_n)$'nin adapte olmuş çatıya göre $\tilde{K}\left\{\bar{X}_{(\alpha)}\right\}$ ile ifade edilen $\tilde{K}$ eğrilik tensörünün bileşenleri Sasaki metriğine göre

$$\tilde{K}\left(\tilde{X}_{(\delta)}, \tilde{X}_{(\gamma)}\right)\tilde{X}_{(\beta)} = \tilde{\nabla}_{\delta}\tilde{\nabla}_{\gamma}\tilde{X}_{(\beta)} - \tilde{\nabla}_{\gamma}\tilde{\nabla}_{\delta}\tilde{X}_{(\beta)} - \Omega_{\gamma\delta}^{\varepsilon}\tilde{\nabla}_{\varepsilon}\tilde{X}_{(\beta)} \tag{4.47}$$

olup, burada

$$\tilde{\nabla}_{\alpha} = \tilde{\nabla}_{\tilde{X}_{(\alpha)}}$$

şeklindedir. Ayrıca,

$$\tilde{\nabla}_{\gamma}\tilde{X}_{(\beta)} = \tilde{\Gamma}_{\gamma\beta}^{\alpha}\tilde{X}_{(\alpha)} \tag{4.48}$$

eşitliği elde edilir. Burada $\tilde{\Gamma}_{\gamma\beta}^{\alpha}$, adapte edilmiş çatıya göre $\tilde{\nabla}$ nın bileşenleri (3.23) olup (3.24) ifadelerinden,

$$\tilde{K}_{\delta\gamma\beta}^{\alpha} = D_{\delta}\tilde{\Gamma}_{\gamma\beta}^{\alpha} - D_{\gamma}\tilde{\Gamma}_{\delta\beta}^{\alpha} + \Gamma_{\delta\varepsilon}^{\alpha}\tilde{\Gamma}_{\gamma\beta}^{\varepsilon} - \Gamma_{\delta\varepsilon}^{\alpha}\tilde{\Gamma}_{\delta\beta}^{\varepsilon} - \Omega_{\delta\gamma}^{\varepsilon}\tilde{\Gamma}_{\varepsilon\beta}^{\alpha} \tag{4.49}$$

elde edilir. Buradan adapte olmuş çatıya göre,

$$\tilde{K}_{kji}^{h} = K_{kji}^{h} + \frac{1}{4}\left(K_{atk}^{h}K_{jis}^{a} - K_{atj}^{h}K_{kis}^{a}\right)y^{t}y^{s} - \frac{1}{2}\left(K_{kjt}^{a}K_{isa}^{h}\right)y^{t}y^{s},$$

$$\tilde{K}_{kji}^{\bar{h}} = -\frac{1}{2}\left(\nabla_k K_{jis}^{h} - \nabla_j K_{kis}^{h}\right) y^s ,$$

$$\tilde{K}_{kj\bar{i}}^{\bar{h}} = K_{kji}^{h} + \frac{1}{4}\left(K_{kat}^{h} K_{isj}^{a} - K_{jat}^{h} K_{isk}^{a}\right) y^t y^s ,$$

$$\tilde{K}_{\bar{k}\bar{j}i}^{h} = K_{kji}^{h} + \frac{1}{4}\left(K_{kta}^{h} K_{jis}^{a} - K_{jta}^{h} K_{ksi}^{a}\right) y^t y^s ,$$

$$\tilde{K}_{\bar{k}\bar{j}i}^{\bar{h}} = 0, \tilde{K}_{\bar{k}\bar{j}\bar{i}}^{\bar{h}} = 0, \tilde{K}_{k\bar{j}i}^{h} = -\frac{1}{2}\left(\nabla_k K_{jsi}^{h}\right) y^s ,$$

$$\tilde{K}_{k\bar{j}i}^{\bar{h}} = \frac{1}{2} K_{kji}^{h} + \frac{1}{4}\left(K_{kat}^{h} K_{jsi}^{a}\right) y^t y^s , \tilde{K}_{k\bar{j}\bar{i}}^{\bar{h}} = 0$$

yazılır.

4.4. Tanjant Demette Synectic Lift Metriğinin Bazı Uygulamaları

4.4.1. Tanjant demette ${}^{S}\nabla$ konneksiyonuna göre infinitesimal afin dönüşümler

M_n de g metriği ile tanımlanan ∇ Riemannian konneksiyonu ve konneksiyon katsayıları ise Γ_{ij}^{k} olsun. Ayrıca $T(M_n)$ de $\tilde{X} = \tilde{X}^{i}\partial_i + \tilde{X}^{\bar{i}}\partial_{\bar{i}}$ vektör alanı verilmiş olsun. Burada $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $\partial_{\bar{i}} = \frac{\partial}{\partial y^i} = \frac{\partial}{\partial x^{\bar{i}}}$, $\bar{i} = n+1,...,2n$, şeklindedir. Buradaki

$${}^{s}\Gamma_{ij}^{k} = \Gamma_{ij}^{k} \quad , \quad {}^{s}\Gamma_{i\bar{j}}^{k} = {}^{s}\Gamma_{\bar{i}j}^{k} = {}^{s}\Gamma_{\bar{i}\bar{j}}^{k} = {}^{s}\Gamma_{\bar{i}\bar{j}}^{\bar{k}} = 0 \quad , \quad {}^{s}\Gamma_{ij}^{\bar{k}} = \partial^{s} y^{s}\Gamma_{ij}^{k} + H_{ij}^{k} , \quad {}^{s}\Gamma_{\bar{i}j}^{\bar{k}} = {}^{s}\Gamma_{i\bar{j}}^{\bar{k}} = \Gamma_{ij}^{k}$$

eşitlikleri ve X vektör alanının n-boyutlu M_n manifoldunda bir infinitesimal afin dönüşüm olması şartı dikkate alınırsa, $\tilde{X} = \tilde{X}^{\alpha}\partial_{\alpha} \in \Im_0^1(T(M_n))$ vektör alanının ${}^{s}\nabla$ konneksiyonuna göre $T(M_n)$ de bir infinitesimal afin dönüşüm olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki (4.50)- (4.57) şartlarını sağlamasıdır:

$$\partial_j\partial_i\tilde{X}^{h} + \tilde{X}^{k}\partial_k\Gamma_{ji}^{h} - (\Gamma_{ji}^{k}\partial_k\tilde{X}^{h} + \partial\Gamma_{ji}^{k}\partial_{\bar{k}}\tilde{X}^{h}) - H_{ji}^{k}\partial_{\bar{k}}\tilde{X}^{h} + \Gamma_{ki}^{h}\partial_j\tilde{X}^{k} + \Gamma_{jk}^{h}\partial_i\tilde{X}^{k} = 0 , \quad (4.50)$$

$$\partial_j \partial_{\bar{i}} \tilde{X}^h - \Gamma_{ji}^k \partial_{\bar{k}} \tilde{X}^h + \Gamma_{jk}^h \partial_{\bar{i}} \tilde{X}^k = 0, \tag{4.51}$$

$$\partial_{\bar{j}} \partial_i \tilde{X}^h - \Gamma_{ji}^k \partial_{\bar{k}} \tilde{X}^h + \Gamma_{ki}^h \partial_{\bar{j}} \tilde{X}^k = 0, \tag{4.52}$$

$$\partial_{\bar{j}} \partial_{\bar{i}} \tilde{X}^h = 0 , \tag{4.53}$$

$$\begin{aligned} &\partial_j \partial_i \tilde{X}^{\bar{h}} + (\tilde{X}^k \partial_k \partial \Gamma_{ji}^h + \tilde{X}^{\bar{k}} \partial_k \Gamma_{ji}^h) - (\Gamma_{ji}^k \partial_k \tilde{X}^{\bar{h}} + \partial \Gamma_{ji}^k \partial_{\bar{k}} \tilde{X}^{\bar{h}}) + (\partial \Gamma_{ki}^h \partial_j \tilde{X}^k + \Gamma_{ki}^h \partial_j \tilde{X}^{\bar{k}}) \\ &\quad + (\partial \Gamma_{jk}^h \partial_i \tilde{X}^k + \Gamma_{jk}^h \partial_i \tilde{X}^{\bar{k}}) + \tilde{X}^k \partial_k H_{ji}^h - H_{ji}^k \partial_{\bar{k}} \tilde{X}^{\bar{h}} + H_{jk}^h \partial_i \tilde{X}^k + H_{ki}^h \partial_j \tilde{X}^k = 0 \end{aligned} ,\tag{4.54}$$

$$\partial_j \partial_{\bar{i}} \tilde{X}^{\bar{h}} + \tilde{X}^k \partial_k \Gamma_{ji}^h - \Gamma_{ji}^k \partial_{\bar{k}} \tilde{X}^{\bar{h}} + \Gamma_{ki}^h \partial_j \tilde{X}^k + (\partial \Gamma_{jk}^h \partial_{\bar{i}} \tilde{X}^k + \Gamma_{jk}^h \partial_{\bar{i}} \tilde{X}^{\bar{k}}) + H_{jk}^h \partial_{\bar{i}} \tilde{X}^k = 0, \tag{4.55}$$

$$\partial_{\bar{j}} \partial_i \tilde{X}^{\bar{h}} + \tilde{X}^k \partial_k \Gamma_{ji}^h - \Gamma_{ji}^k \partial_{\bar{k}} \tilde{X}^{\bar{h}} + (\partial \Gamma_{ki}^h \partial_{\bar{j}} \tilde{X}^k + \Gamma_{ki}^h \partial_{\bar{j}} \tilde{X}^{\bar{k}}) + \Gamma_{jk}^h \partial_i \tilde{X}^k + H_{ki}^h \partial_{\bar{j}} \tilde{X}^k = 0, \tag{4.56}$$

$$\partial_{\bar{j}} \partial_{\bar{i}} \tilde{X}^{\bar{h}} - \Gamma_{ki}^h \partial_{\bar{j}} \tilde{X}^k + \Gamma_{jk}^h \partial_{\bar{i}} \tilde{X}^k = 0. \tag{4.57}$$

Teorem 4.4.1.1. Eğer $\tilde{X}$, $T(M_n)$ de ${}^s\nabla$ konneksiyonuna göre bir dikey infinitesimal afin dönüşüm ise, bu durumda

a) $X, Y \in \Im_0^1(M)$ ve $(C \circ H)(X,Y) = C(H(X,Y))$ için $L_D \nabla = C \circ H$ dır.

b) C, ∇ ya göre paraleldir, yani $\nabla C = 0$ dır.

c) ∇ nın R eğrilik tensörü C ye göre pürdür ve her $X, Y, Z \in \Im_0^1(M)$ için

$C : CR(X,Y)Z = R(CX,Y)Z = R(X,CY)Z = R(X,Y)Z$ şeklindedir.

Tersine, eğer C ve D (a) , (b) ve (c) şartlarını sağlıyor ise

$$\tilde{X} = (C_i^h y^i + D^h)\frac{\partial}{\partial y^h} = \gamma C + {}^v D$$

vektör alanı, ${}^s\nabla$ konneksiyonuna göre $T(M_n)$ de bir infinitesimal afin dönüşümdür, burada $\gamma C = \begin{pmatrix} 0 \\ y^i C_i^h \end{pmatrix}$ bir dikey vektör alanıdır (Akbulut 2009).

İspat: $\tilde{X}$, $T(M_n)$ de bir dikey infinitesimal afin dönüşüm olsun. Bu durumda indirgenmiş koordinatlara göre $\tilde{X}$ nın bileşenleri $\begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{X}^{\bar{h}} \end{pmatrix}$ dır. Buradan (4.57) denklemi kullanılarak, $\partial_{\bar{j}}\partial_{\bar{i}}\tilde{X}^{\bar{h}}$ =0 bulunur. Ayrıca,

$$\tilde{X}^{\bar{h}} = C_i^h y^i + D^h \tag{4.58}$$

yazılır. Burada C_i^h ve D^h bileşenleri sadece $\tilde{X}^h$ değişkenlerine bağlıdır. $\tilde{X}$, $T(M_n)$ de bir vektör alanı olduğundan $C = C_i^h \partial_h \otimes dx^i$ ve $D = D^h \partial_h$, sırasıyla, $\Im_1^1(M_n)$ ve $\Im_0^1(M_n)$ nin elemanlarıdır.

(a) (4.58) denkleminden ve $\tilde{X}^h = 0$ eşitliğinin (4.54) denkleminde kullanılmasıyla,

$$\partial_j \partial_i C_s^h + C_s^k \partial_k \Gamma_{ji}^h - \Gamma_{ji}^k \partial_k C_s^h - \partial_s \Gamma_{ji}^k C_k^h + \Gamma_{ki}^h \partial_j C_s^k + \Gamma_{jk}^h \partial_i C_s^k = 0 \tag{4.59}$$

ve koordinatlarla ifadesi

$$\partial_j \partial_i D^h + D^k \partial_k \Gamma_{ji}^h - \Gamma_{ji}^k \partial_k D^h + \Gamma_{ki}^h \partial_j D^k + \Gamma_{jk}^h \partial_i D^k - H_{ji}^k C_k^h = 0 \tag{4.60}$$

şeklinde olan $L_D \nabla = C \circ H$ eşitliği bulunur.

(b) (4.58) denkleminden ve $\tilde{X}^h = 0$ eşitliğinin (4.56) denkleminde kullanılmasıyla

$$\partial_i C_j^h - \Gamma_{ji}^k C_k^h + \Gamma_{ki}^h C_j^k = 0 \tag{4.61}$$

elde edilir.

(4.67) denkleminde $\tilde{X}^h = 0$ alınması ve (4.49) denkleminin kullanılmasıyla,

$$\partial_j C_i^h - \Gamma_{ji}^k C_k^h + \Gamma_{jk}^h C_i^k = 0 \tag{4.62}$$

bulunur, bu da C nin M_n de paralel olduğunu gösterir.

(4.61) ve (4.62) denklemlerindeki kısmi türevleri (4.59) denkleminde yerine yazarsak, C_j^h nin tüm kısmi türevleri yok olur. Böylece keyfi $X, Y, Z \in \Im_0^1(M)$ için $C_l^h R_{kji}^l = R_{kli}^h C_j^l$ veya $CR(X,Y)Z = R(X,CY)Z$ elde edilir. $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$ eşitliği dikkate alınırsa

$$CR(X,Y)Z = -CR(Y,X)Z = -R(Y,CX)Z = R(CX,Y)Z$$

eşitliği elde edilir. $\nabla C = 0$ ve ∇ burulmasız olduğundan Ricci formülüne göre

$$CR(X,Y)Z = R(X,Y)CZ \tag{4.63}$$

yazılır. Böylece (c) şartı sağlanır.

Tersine, eğer (a), (b) ve (c) şartları mevcut ise, $\tilde{X}$ in bir infinitesimal afin dönüşüm olduğu görülür. Böylece Teorem 4.4.1.1 ispatlanmış olur.

4.4.2. Tanjant demette ${}^s\nabla$ konneksiyonuna göre fibre-koruyan infinitesimal afin dönüşümler

Teorem 4.4.2.1. Eğer $\tilde{X}$, ${}^s\nabla$ konneksiyonuna göre $T(M_n)$ de fibre koruyan infinitesimal afin dönüşümü ise $\tilde{X}$ den M_n üzerine indirgenen X infinitesimal dönüşümü de ∇ konneksiyonuna göre afin dönüşümdür (Akbulut and Salimov 2006).

İspat:

$$\begin{cases} x^{h'} = x^h + \tilde{X}^h(x^1,...,x^h)\Delta t \\ x^{\bar{h}'} = x^{\bar{h}} + \tilde{X}^{\bar{h}}(x^1,...,x^h,x^{h+1},...,x^{2h})\Delta t \end{cases} \tag{4.64}$$

ifadesinden, $\begin{pmatrix} \tilde{X}^h \\ \tilde{X}^{\bar{h}} \end{pmatrix}$ bileşenlerine sahip bir $\tilde{X}$ fibre-koruyan infinitesimal dönüşüm M_n baz uzayında $\tilde{X}^h$ bileşenli bir X infinitesimal dönüşüm indirgediği görülür.

Ayrıca

$\partial\Gamma^k_{ji}\partial_{\bar{k}}\tilde{X}^h = 0$ ve $H^k_{ji}\partial_{\bar{k}}\tilde{X}^h = 0$ olduğundan ve (4.50) den teorem ispatlanmış olur.

Teorem 4.4.2.2. ∇, M_n de bir Riemannian konneksiyonu olmak üzere her $X \in \Im^1_0(M_n)$ için $L_{^cX}{}^s\nabla = {}^c(L_X\nabla) + {}^v(L_X H)$ *dir* ((Akbulut and Salimov 2006).

İspat: Her $Y, Z \in \Im^1_0(M_n)$ için,

$$\begin{aligned}
(L_{^cX}{}^s\nabla)({}^cY,{}^cZ) &= L_{^cX}({}^s\nabla_{^cY}{}^cZ) - {}^s\nabla_{^cY}(L_{^cX}{}^cZ) - {}^s\nabla_{[^cX,^cY]}{}^cZ \\
&= L_{^cX}({}^c\nabla_{^cY}{}^cZ + {}^vH({}^cY,{}^cZ)) - {}^s\nabla_{^cY}{}^c[X,Z] - {}^s\nabla_{^c[X,Y]}{}^cZ \\
&= L_{^cX}{}^c\nabla_{^cY}{}^cZ + L_{^cX}{}^vH({}^cY,{}^cZ) - {}^c\nabla_{^cY}{}^c[X,Z] \\
&\quad - {}^vH({}^cY,{}^c[X,Z]) - {}^c\nabla_{^c[X,Y]}{}^cZ - {}^vH({}^c[X,Y],{}^cZ) \\
&= {}^c(L_X\nabla)({}^cY,{}^cZ) + L_{^cX}{}^v(H(Y,Z)) \\
&= {}^v(L_X H(Y,Z)) - {}^v(H(Y,[X,Z])) - {}^v(H([X,Y],Z)) \\
&= {}^c(L_X\nabla)({}^cY,{}^cZ) + {}^v((L_X H)(Y,Z)) \\
&= {}^c(L_X\nabla)({}^cY,{}^cZ) + {}^v(L_X H)({}^cY,{}^cZ) \\
&= ({}^c(L_X\nabla) + {}^v(L_X H))({}^cY,{}^cZ).
\end{aligned}$$

Buradan $\tilde{X}$ ve X , Teorem 4.4.2.1 te verildiği gibi olmak üzere, Teorem 4.4.2.2 den eğer, $L_X H = 0$ ise ${}^cX$, ${}^s\nabla$ konneksiyonuna göre $T(M_n)$ de bir infinitesimal afin dönüşümdür. ${}^cX$ nin bileşenleri $\begin{pmatrix} X^h \\ \partial X^h \end{pmatrix}$ olduğundan $\tilde{X} - {}^cX$ nin, ${}^s\nabla$ konneksiyonuna göre $T(M_n)$ de bir dikey infinitesimal afin dönüşüm olduğu görülür.

Teorem 4.4.2.3. Eğer $\tilde{X}$, ${}^s\nabla$ konneksiyonuna göre $T(M_n)$ de bir fibre-koruyan infinitesimal afin dönüşüm ve $L_X H = 0$ ise bu durumda $\tilde{X} = {}^cX + {}^vD + \gamma C$ vektör alanı, Teorem 4.1.1.1 deki (a), (b) ve (c) şartlarını sağlar. Burada D ve C, sırasıyla, (1,0) ve (1,1) tipli tensörlerdir (Akbulut and Salimov 2006).

İspat: ${}^sX$, $X \in \Im_0^1(M_n)$ nin sinjektik lifti ve a , M_n de keyfi bir vektör alanı olmak üzere ${}^sX = {}^cX + {}^va$ olsun. Bu durumda

$$(L_{{}^sX}{}^s\nabla)({}^cY, {}^cZ) = L_{{}^sX}({}^s\nabla_{{}^cY}{}^cZ) - {}^s\nabla_{{}^cY}(L_{{}^sX}{}^cZ) - {}^s\nabla_{[{}^sX, {}^cY]}{}^cZ$$

$$= L_{{}^sX}({}^c\nabla_{{}^cY}{}^cZ + {}^vH({}^cY, {}^cZ)) - {}^s\nabla_{{}^cY}[{}^sX, {}^cZ] - {}^s\nabla_{[{}^sX, {}^cY]}{}^cZ$$

$$= L_{{}^sX}({}^c\nabla_{{}^cY}{}^cZ) + L_{{}^sX}({}^vH({}^cY, {}^cZ)) - {}^s\nabla_{{}^cY}([{}^cX, {}^cZ] + [{}^va, {}^cZ]) - {}^s\nabla_{[{}^cX, {}^cY] + [{}^va, {}^cY]}{}^cZ$$

$$= L_{{}^sX}{}^c(\nabla_Y Z) + L_{{}^sX}{}^v(H(Y,Z)) - {}^s\nabla_{{}^cY}{}^c[X,Z] - {}^s\nabla_{{}^cY}{}^v[a,Z] - {}^s\nabla_{{}^c[X,Y]}{}^cZ - {}^s\nabla_{{}^v[a,Y]}{}^cZ$$

$$= [{}^cX + {}^va, {}^c(\nabla_Y Z)] + [{}^cX + {}^va, {}^v(H(Y,Z))] - {}^c\nabla_{{}^cY}{}^c[X,Z] - {}^vH({}^cY, {}^c[X,Z])$$

$$- {}^c\nabla_{{}^cY}{}^v[a,Z] - {}^vH({}^cY, {}^v[a,Z]) - {}^c\nabla_{{}^c[X,Y]}{}^cZ - {}^vH({}^c[X,Y], {}^cZ) - {}^c\nabla_{{}^v[a,Y]}{}^cZ - {}^vH({}^v[a,Y], {}^cZ)$$

$$= {}^c[X, (\nabla_Y Z)] + {}^v[X, H(Y,Z)] - {}^c(\nabla_Y[X,Z]) - {}^v(H(Y,[X,Z]))$$

$$- {}^c(\nabla_{[X,Y]}Z) - {}^v(H([X,Y],Z)) + [{}^va, {}^c(\nabla_Y Z)] + [{}^va, {}^v(H(Y,Z))]$$

$$- {}^c\nabla_{{}^cY}{}^v[a,Z] - {}^vH({}^cY, {}^v[a,Z]) - {}^c\nabla_{{}^v[a,Y]}{}^cZ - {}^vH({}^v[a,Y], {}^cZ)$$

$$= {}^c[X, (\nabla_Y Z)] + {}^v[X, H(Y,Z)] - {}^c(\nabla_Y[X,Z]) - {}^v(H(Y,[X,Z]))$$

$$- {}^c(\nabla_{[X,Y]}Z) - {}^v(H([X,Y],Z)) + {}^v[a, \nabla_Y Z] - {}^v(\nabla_Y[a,Z]) - {}^v(\nabla_{[a,Y]}Z)$$

$$= {}^c(L_X\nabla_Y Z - \nabla_Y L_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z) + {}^c((L_X H)(Y,Z)) + {}^v(L_a\nabla_Y Z - \nabla_Y L_a Z - \nabla_{[a,Y]}Z)$$

$$= {}^{c}(L_X\nabla)({}^{c}Y, {}^{c}Z) + {}^{v}(L_X H)({}^{c}Y, {}^{c}Z) + {}^{v}(L_a\nabla)({}^{c}Y, {}^{c}Z)$$

$$= ({}^{c}(L_X\nabla) + {}^{v}(L_X H) + {}^{v}(L_a\nabla))({}^{c}Y, {}^{c}Z)$$

olur. Buradan

$$L_{{}^{s}X}{}^{s}\nabla = {}^{c}(L_X\nabla) + {}^{v}(L_X H) + {}^{v}(L_a\nabla) \tag{4.65}$$

eşitliği yazılır.

Teorem 4.4.2.4. ∇ konneksiyonuna göre bir infinitesimal afin dönüşüm a olsun. Eğer ${}^{s}\nabla$ konneksiyonuna göre $T(M_n)$ de bir fibre koruyan infinitesimal afin dönüşüm $\tilde{X}$ ve $L_X H$ =0 ise bu durumda $\tilde{X} = {}^{s}X + {}^{v}D + \gamma C = {}^{c}X + {}^{v}a + {}^{v}D + \gamma C$ dir. Burada X ve D, ∇ konneksiyonuna göre M_n de infinitesimal afin dönüşümler ve C, Teorem 4.1.1.2 deki (a), (b) ve (c) şartlarını sağlayan (1,1) tipli bir parallel tensör alanıdır (Akbulut and Salimov 2006).

4.4.3. ${}^{s}g$ Metriği ile tanımlanan infinitesimal izometri

Teorem 4.4.3.1. M_n deki bir X vektör alanının ${}^{s}g$ metriğine sahip $T(M_n)$ ye

a) ${}^{V}X \in \Im_0^1(T(M_n))$ dikey

b) ${}^{c}X \in \Im_0^1(T(M_n))$ tam

c) ${}^{H}X \in \Im_0^1(T(M_n))$ yatay

liftlerinin yine $T(M_n)$ de Killing vektör alanı olması için gerek ve yeter şart sırasıyla;

a) X in M_n de Killing vektör alanı olması,

b) X in Killing vektör alanı ve (0,2) tipli simetrik tensörünün kovaryant türevinin sıfır olması,

c) X in M_n de kovaryant türevi sıfır olan Killing vektör alanı ve (0,2) tipli simetrik tensörünün kovaryant türevinin sıfır olmasıdır (Gezer and Akbulut 2006).

İspat: $\tilde{X}$ vektör alanı $T(M_n)$ de indirgenmiş koordinatlara göre bileşenleri $(\tilde{X}^A) = \begin{pmatrix} \tilde{X}^h \\ \tilde{X}^{\bar{h}} \end{pmatrix}$ olan bir vektör alanı olsun. Bu durumda ${}^s\nabla\tilde{X}$ in kovaryant türevi, indirgenmiş koordinatlara göre,

$$ {}^s\nabla_I \tilde{X}^J = \partial_I X^J + {}^s\Gamma^J_{IM}\tilde{X}^M \tag{4.66}$$

bileşenlerine sahiptir, burada ${}^s\Gamma^J_{IM}$ ler ${}^s\Gamma^K_{IJ} = {}^c\Gamma^K_{IJ} + {}^vH^K_{IJ}$ şeklindedir.

$\Gamma^h_i x^i = y^s \Gamma^h_{si} x^i$ olmak üzere $T(M_n)$ deki indirgenmiş koordinatlara göre bir $X \in \Im^1_0(M_n)$ vektör alanının ${}^V X \in \Im^1_0(T(M_n))$ dikey lifti, ${}^C X \in \Im^1_0(T(M_n))$ tam lifti ve ${}^H X \in \Im^1_0(T(M_n))$ yatay liftinin bileşenleri sırasıyla;

$$ {}^V X = \begin{pmatrix} 0 \\ x^h \end{pmatrix}, \qquad {}^C X = \begin{pmatrix} x^h \\ \partial x^h \end{pmatrix}, \qquad {}^H X = \begin{pmatrix} x^h \\ -\Gamma^h_i x^i \end{pmatrix} \tag{4.67}$$

şeklindedir.

Şimdi ${}^V X$, ${}^C X$ ve ${}^H X$ vektör alanlarının ${}^s g$ metriğine göre Lie türevleri, (4.58) denklemi kullanılarak hesaplanırsa sırasıyla,

$$ L_{{}^V X}\,{}^s g = ({}^s\nabla_I\,{}^V X^J + {}^s\nabla_J\,{}^V X^I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \nabla_j X^i + \nabla_i X^j & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_{{}^cX}{}^s g = ({}^s\nabla_I{}^cX^J + {}^s\nabla_J{}^cX^I)$$
$$= \begin{pmatrix} \nabla_i X^j + \nabla_j X^i & 0 \\ y^s\partial_s(\nabla_j X^i + \nabla_i X^j) + (H^i_{jh} + H^j_{ih})X^h & \nabla_i X^j + \nabla_j X^i \end{pmatrix} \qquad (4.68)$$
$$L_{{}^HX}{}^s g = ({}^s\nabla_I{}^HX^J + {}^s\nabla_J{}^HX^I)$$
$$= \begin{pmatrix} \nabla_i X^j + \nabla_j X^i & 0 \\ -\Gamma^j_h\nabla_i X^h - \Gamma^i_h\nabla_j X^h + (R_{kih}{}^j + R_{kjh}{}^i)y^k x^h + (H^i_{jh} + H^j_{ih})X^h & 0 \end{pmatrix}$$

denklemleri elde edilir. $\nabla_i X^h = 0$ olduğu dikkate alınırsa $R^j_{kih}X^h = 0$ ve $R^i_{kjh}X^h = 0$ olur. Ayrıca eğer (0,2) tipli simetrik a tensörünün kovaryant türevi sıfır, yani $\nabla a = 0$, ise $(H^i_{jh} + H^j_{ih})X^h = 0$ olur.

Teorem 4.4.3.2. M_n deki $[X,Y]$ vektör alanının dikey ve tam liftlerinin $T(M_n)$ de ${}^s g$ metriğine göre Killing vektör alanı olması için yeter şart X ve Y vektör alanlarının M_n de Killing vektör alanları olması ve (0,2) tipli simetrik a tensörünün kovaryant türevinin sıfır, yani $\nabla a = 0$, olmasıdır (Gezer and Akbulut 2006).

İspat: Eğer X ve Y, M_n de Killing vektör alanları ise Killing vektörün tanımından

$$L_{[x,y]}g = L_X(L_Y g) - L_Y(L_X g) = 0\,, \qquad (4.69)$$

Yani $[X,Y]$ de, M_n de Killing vektör alanıdır (Kobayashi and Nomizu 1963).

Keyfi $X, Y \in \Im^1_0(M_n)$ için $(1,1)$ tipinden $A_X Y$ tensör alanı

$$(A_X Y)Z = (L_X\nabla)(Y,Z) = [L_X, \nabla_Y]Z - \nabla_{[X,Y]}Z\,,\ \forall Z \in \Im^1_0(M_n) \qquad (4.70)$$

olarak tanımlanır. Bu durumda

$$\left[{}^{V}X,{}^{c}Y\right]={}^{V}\left[X,Y\right],\ \left[{}^{c}X,{}^{c}Y\right]={}^{c}\left[X,Y\right],\ \left[{}^{c}X,{}^{H}Y\right]={}^{H}\left[X,Y\right]-\gamma(A_X Y) \qquad (4.71)$$

şeklinde yazılır, burada $\gamma(A_X Y)\in \Im_0^1(M_n)$ nın bileşenleri $\begin{pmatrix} 0 \\ y^s (A_X Y)_s^h \end{pmatrix}$ dır.

Bir $X\in \Im_0^1(M_n)$ vektör alanı verilmiş olsun. Eğer X vektör alanı $L_X\nabla=0$ şartını sağlıyor ise X vektör alanına ∇ afin konneksiyonuna göre infinitesimal dönüşüm denir. Buna göre (4.70) ve (4.71) den,

$$\left[{}^{c}X,{}^{H}Y\right]={}^{H}\left[X,Y\right] \qquad (4.72)$$

eşitliği yazılır. ${}^{s}g$ metriğinin ${}^{V}\left[X,Y\right]$ ve ${}^{c}\left[X,Y\right]$ ye göre Lie türevleri hesaplanırsa

$$\begin{aligned} L_{{}^{V}[X,Y]}{}^{s}g &= L_{\left[{}^{V}X,{}^{c}Y\right]}{}^{s}g = L_{{}^{V}X}(L_{{}^{c}Y}{}^{s}g)-L_{{}^{c}Y}(L_{{}^{V}X}{}^{s}g) \\ L_{{}^{c}[X,Y]}{}^{s}g &= L_{\left[{}^{c}X,{}^{c}Y\right]}{}^{s}g = L_{{}^{c}X}(L_{{}^{c}Y}{}^{s}g)-L_{{}^{c}Y}(L_{{}^{c}X}{}^{s}g) \end{aligned} \qquad (4.73)$$

elde edilir. Böylece (4.59) ve (4.73) den aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.4.3.3. M_n deki $\left[X,Y\right]$ vektör alanının yatay liftinin $T(M_n)$ de ${}^{s}g$ metriğine göre Killing vektör alanı olması için yeter şart X ve Y vektör alanlarının M_n de Killing vektör alanları olması, Y vektör alanının kovaryant türevinin sıfır, yani $\nabla_i Y^h=0$ ve (0,2) tipli simetrik a tensörünün kovaryant türevinin sıfır, yani $\nabla a=0$, olmasıdır (Gezer and Akbulut 2006).

İspat: M_n de X bir infinitesimal afin dönüşüm olsun**.** (4.3.4) ve (4.3.8) den

$$L_{{}^{H}[X,Y]}{}^{s}g = L_{\left[{}^{c}X,{}^{H}Y\right]}{}^{s}g = L_{{}^{c}X}(L_{{}^{H}Y}{}^{s}g)-L_{{}^{H}Y}(L_{{}^{c}X}{}^{s}g) \qquad (4.74)$$

yazılır.

4.5. Tanjant Demette Cheeger-Gromoll Metriğinin Bazı Uygulamaları

4.5.1. Tanjant demette Cheeger-Gromoll metriğinin geodezikleri

$\tilde{C}:[0,1]\to T(M_n)$, $T(M_n)$ de lokal olarak $x^A = x^A(t)$ şeklinde tanımlanan bir eğri olsun. $\tilde{C}$ eğrisi için, $\pi^{-1}(U)\subset T(M_n)$ de $(x^h, x^{\bar{h}})$ indirgenmiş koordinat sistemine göre $x^h = x^h(t)$, $x^{\bar{h}} = x^{\bar{h}}(t)$ yazılır. Burada t parametredir. Bu durumda M_n de $C=\pi\circ\tilde{C}$ şeklinde tanımlanan C eğrisine, $\tilde{C}$ eğrisinin projeksiyonu denir ve $\pi\tilde{C}$ ile gösterilir. $X^h(t)$, C eğrisi boyunca bir vektör alanı olsun. Buradan $T(M_n)$ de $\tilde{C}$ eğrisi

$$\begin{cases} x^h = x^h(t) \\ x^{\bar{h}} = X^h(t) \end{cases} \tag{4.75}$$

eşitlikleri ile tanımlanır.

(4.75) eğrisi tüm noktalarda

$$\frac{\delta X^h}{dt} = \frac{dX^h}{dt} + \Gamma^h_{ji}\frac{dx^j}{dt}X^i = 0 \tag{4.76}$$

eşitliğini sağlıyorsa $\tilde{C}$ eğrisine C nin yatay lifti denir ve ${}^{H}C$ ile gösterilir (Yano and Ishihara 1973). Eğer X^h, C de $\frac{dx^h}{dt}$ şeklinde tanımlanabilir tanjant vektör alanı ise (4.75) ile verilen $\tilde{C}$ eğrisine C nin natural (doğal) lifti denir ve C^* ile gösterilir.

$T(M_n)$ de $(x^h, x^{\bar{h}})$ indirgenmiş koordinat sistemine göre ${}^{CG}\nabla$ konneksiyonunun geodezikleri

$$\frac{\delta^2 x^A}{dt^2} = \frac{d^2 x^A}{dt^2} + {}^{CG}\Gamma^A_{CB} \frac{dx^C}{dt} \frac{dx^B}{dt} = 0 \tag{4.77}$$

diferensiyel denklemi ile tanımlanır. Burada t eğrinin uzunluğudur. (3.58) ve (3.59) dan $e_\beta = A_B{}^H \partial_H$ çatı değişimin matrisi koordinatlarla

$$A = \left(A^B_\beta\right) = \begin{pmatrix} \delta^k_j & 0 \\ -\Gamma^h_{sj} x^{\bar{s}} & \delta^k_j \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

A matrisinin tersi ise

$$\tilde{A} = \left(\tilde{A}^\alpha_A\right) = \begin{pmatrix} \delta^h_i & 0 \\ \Gamma^h_{si} x^{\bar{s}} & \delta^h_i \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

$\tilde{A}$ matrisi kullanılarak

$$\theta^\alpha = \tilde{A}^\alpha_A dx^A$$

yazılır. Buradan $\alpha = h$ için,

$$\theta^h = \tilde{A}^h_A dx^A = \delta^h_i dx^i = dx^h ,$$

$\alpha = \bar{h}$ için

$$\theta^{\bar{h}} = \tilde{A}^{\bar{h}}_A dx^A = \Gamma^h_{si} x^{\bar{s}} dx^i + \delta^h_i dx^{\bar{i}} = dy^h + \Gamma^h_{si} y^s dx^i = \delta y^h$$

olur. $T(M_n)$ de $x^A = x^A(t)$ eğrisi boyunca

$$\frac{\theta^h}{dt} = A_A^h \frac{dx^A}{dt} = \frac{dx^h}{dt},$$

$$\frac{\theta^{\bar{h}}}{dt} = A_A^{\bar{h}} \frac{dx^A}{dt} = \frac{\delta y^h}{dt}$$

yazılır.

(4.77) ifadesine denk olan

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\theta^a}{dt}\right) + {}^{GC}\Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha} \frac{\theta^\gamma}{dt} \frac{\theta^\beta}{dt} = 0$$

eşitliği ve (3.68) deki ifadeler kullanılırsa

$$\begin{cases} \dfrac{\delta^2 x^h}{dt^2} + \dfrac{1}{\alpha} R_{kji}^h y^k \dfrac{\delta y^i}{dt} \dfrac{dx^i}{dt} = 0 \\ \dfrac{\delta^2 y^h}{dt^2} + \left[-\dfrac{1}{\alpha}\left(y_j \delta_i^h + y_i \delta_j^h \right) + \dfrac{1+\alpha}{\alpha} g_{ji} y^h - \dfrac{1}{\alpha} y_j y_i y^h \right] \dfrac{\delta y^j}{dt} \dfrac{\delta y^i}{dt} = 0 \end{cases} \tag{4.78}$$

elde edilir. Burada $y^i = x^{\bar{i}}$ dir (Salimov and Kazimova 2009).

Teorem 4.5.1.1. $\tilde{C}$, $\pi^{-1}(U) \subset T(M_n)$ koordinat komşuluğunda indirgenmiş koordinatlara göre lokal olarak $x^h = x^h(t)$, $x^{\bar{h}} = x^{\bar{h}}(t)$ şeklinde tanımlanan bir eğri olsun. Eğer $\tilde{C}$ eğrisi (4.78) eşitliklerini sağlıyorsa $\tilde{C}$ ye ${}^{CG}g$ nin bir geodeziğidir.

Eğer (4.78) eşitliklerini sağlayan bir $\tilde{C}$ eğrisi, $x^h = const$ fibresi üzerinde ise $\dfrac{dx^h}{dt} = 0$ ve $\dfrac{\delta y^h}{dt} = \dfrac{dy^h}{dt} + \Gamma_{ij}^h \dfrac{dx^i}{dt} y^j = \dfrac{dy^h}{dt}$ den, (4.78) eşitliği

$$\frac{\delta^2 y^h}{dt^2} + \left[-\frac{1}{\alpha}\left(y_j \delta_i^h + y_i \delta_j^h \right) + \frac{1+\alpha}{\alpha} g_{ji} y^h - \frac{1}{\alpha} y_j y_i y^h \right] \frac{\delta y^j}{dt} \frac{\delta y^i}{dt} = 0 \tag{4.79}$$

şeklinde yazılır (Salimov and Kazimova 2009). Buradan aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.5.1.2. $T(M_n)$ nin bir fibresi üzerinde ${}^{CG}g$ metriği ile tanımlanan bir geodesik varsa bu geodesik (4.79) eşitliği ile ifade edilir.

$C = \pi \circ C^H$, M_n de ∇ nın bir geodeziği olsun. Buradan $\dfrac{\delta^2 x^h}{dt^2} = 0$ dır (Salimov and Kazimova 2009).

$\dfrac{\delta^2 x^h}{dt^2} = 0$ ve $\dfrac{\delta y^i}{dt} = \dfrac{\delta x^h}{dt} = 0$ eşitliklerinden aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.5.1.3. M_n de bir geodeziğin yatay lifti her zaman $T(M_n)$ de ${}^{CG}g$ metriği ile tanımlanan geodeziktir.

$C = \pi \circ C^*$, M_n de, ∇ nın $\dfrac{\delta^2 x^h}{dt^2} = \dfrac{\delta}{\delta t}\left(\dfrac{dx^h}{dt}\right) = 0$ bir geodeziği olsun. Diğer taraftan eğrinin doğal liftinin tanımından

$$\frac{\delta y^h}{dt} = \frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{dx^h}{dt}\right) = 0 \qquad (4.80)$$

elde edilir.

(4.78) ve (4.80) den M_n de $x^h = x^h(t)$ ile tanımlanan bir eğrinin doğal lifti, $T(M_n)$ de ${}^{CG}g$ metriği ile tanımlanan bir geodeziktir (Salimov and Kazimova 2009).

Böylece aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.5.1.4. M_n de bir geodeziğin C^* doğal lifti, ${}^{CG}g$ metriği ile $T(M_n)$ üzerinde geodeziktir (Salimov and Kazimova 2009).

5. SONUÇ

Sunulan bu tezde tanjant demete olan metrik genişlemeleri ve bu genişlemelerin bazı uygulamaları araştırılmıştır.

Bunun için ilk olarak tanjant demette var olan bazı metrik genişlemeleri ve bu metrik genişlemeleri vasıtasıyla tanımlanan konneksiyonlar araştırılmıştır.

Sonrasında bu metriklerin bazı uygulamalarına bakılmıştır.

KAYNAKLAR

Akbulut, K., 2009. Tanjant Demette İnfinitesimal Dönüşümler, Atatürk Üniversitesi, Doktora Tezi, Erzurum.

Akbulut, K. and Saimov A.A., 2006. Infinitesimal Affine Transformations in a Tangent Bundle of a Riemannian Manifold with Affine connection ${}^S\nabla = {}^C\nabla + {}^V H$. Journal of Quality Measurement and Analysis Jurnal Pengukuran Kualiti dan Analisis, 2(1), 29-35.

Aras, M., 2005. ${}^S g = {}^C g + {}^V a$ Metrikli Riemannian Manifoldu, Atatürk Üniversitesi, Doktora Tezi, Erzurum.

Bishop, R.L. and Goldberg, S.I., 1968. Tensor Analysis on Manifolds. The Mcmillan Company, New York, 19-135.

Davies, E.T., 1966. Some Applications of the Theory of Parallel Distributions, Hlavaty Testscript, 80-90.

Gezer, A. and Akbulut, K.,2006. Infinitesimal Affine Transformations in the Tangent Bundle of a Riemannian Manifold with respect to the Horizontal Lift of Affine connection. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 35(2), 155-159.

Gezer, A. and Akbulut, K.,2006. Geodesics and Killing Vector Fields in a Tangent Bundle. Journal of Quality Measurement and Analysis Jurnal Pengukuran Kualiti dan Analisis, 2(1), 115-121.

Gezer, A. and Akbulut, K.,2007. Infinitesimal Automorphism in the Tangent Bundle of a Riemannian Manifold with Horizontal Lift of Affine connection. Chiang Mai Journal of Science, 34(2),151-159.

Kobayashi, S., and Nomızu, K., 1963. Foundations of Differential Geometry. Interscience Publishers.

Salimov, A. A. and Akbulut, K., 2009. A note on a paraholomorphic Cheeger-Gromoll metric. Proceedings of Indian Academy of Sciences (Mathematical Sciences), 119 (2), 187-195.

Salimov, A. A. ve Aras, M., 2002. 15. Mersin Ulusal Matematik Sempozyumu Bildiri Kitabı, Mersin.

Salimov, A. A. and Kazımova, S., 2009. Geodesics of the Cheeger-Gromoll Metric, Turkish Journal of Mathematics, 33, 99-105.

Sekizawa, M., 1991. Curvatures of Tangent Bundles with Cheeger-Gromoll Metric. Tokyo Journal of Mathematics, 14, 407-417.

Talantova, N. V. and Shirokov, A.P., 1975. A Note on a Metric in the Tangent Bundle. Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika, 6, 143-146.

Vishnevskii, V.V., Shirokov, A.P. and Shurygin, V.V., 1985. Spaces over algebras. Kazan Gosudarstvennyi University, Kazan, Russian.

Yano, K., 1957. The Theory of Lie Derivatives and Its Applications, Amsterdam.

Yano, K. and Davies, E.T., 1963. On the Tangent Bundles of Finsler and Riemannian Manifolds. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 12, 211-228.

Yano, K. and Davies, E.T., 1971. Metrics and Connections in the Tangent Bundle. Kodai Mathematical Seminar Reports, 23, 493-504.

Yano, K. and Kobayashi, S., 1966. Prolongations of Tensor fields and Connections to Tangent Bundles I. General Theory. Journal of Mathematical Society of Japan, 18, 194-210, 236-246.

Yano, K. and Ishahara, S., 1966. Differential Geometry in Tangent Bundle. Kodai Mathematical Seminar Reports, 18, 271-292

Yano, K. and Ishihara, S., 1973. Tangent and Cotangent Bundles. Marcel Dekker Inc, New York.

ÖZGEÇMİŞ

1988 yılında Sivas'ın Yıldızeli ilçeside doğdu. İlk öğrenimini Sivas, ortaöğrenim ve liseyi Erzurumda tamamladı. 2005 yılında girdiği Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünden 2009 yılında mezun oldu. Aynı yıl Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Matematik Bölümü'nde tezsiz yüksek lisans öğrenimine başlayıp 2010 yılında mezun oldu. 2010 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsüne bağlı olarak Matematik Anabilim Dalı Geometri Bilim Dalı'nda tezli yüksek lisans öğrenimine başladı. 2011 yılında matematik öğretmenliği yapmaya başladı ve bu görevine Erzincan Kazım Karabekir Lisesinde devam etmektedir.