ANALİTİK FONKSİYONLAR İÇİN YENİ ÜNİVALENTLİK KRİTERLERİ VE QUASİKONFORM GENİŞLEMELER

Murat ÇAĞLAR

Doktora Tezi
Matematik Ana Bilim Dalı
Prof. Dr. Halit ORHAN
2013

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

ANALİTİK FONKSİYONLAR İÇİN YENİ ÜNİVALENTLİK KRİTERLERİ VE QUASİKONFORM GENİŞLEMELER

Murat ÇAĞLAR

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

ERZURUM
2013

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAY FORMU

ANALİTİK FONKSİYONLAR İÇİN YENİ ÜNİVALENTLİK KRİTERLERİ VE QUASİKONFORM GENİŞLEMELER

Prof. Dr. Halit ORHAN danışmanlığında, Arş. Gör. Murat ÇAĞLAR tarafından hazırlanan bu çalışma 24/10/2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora tezi olarak **oybirliği** ile kabul edilmiştir.

Başkan	: Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ	*İmza*	:
Üye	: Prof. Dr. Halit ORHAN	*İmza*	:
Üye	: Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU	*İmza*	:
Üye	: Prof. Dr. Uğur S. KIRMACI	*İmza*	:
Üye	: Prof. Dr. Murat ÖZDEMİR	*İmza*	:

Yukarıdaki sonucu onaylıyorum

Prof. Dr. İhsan EFEOĞLU
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Doktora Tezi

ANALİTİK FONKSİYONLAR İÇİN YENİ ÜNİVALENTLİK KRİTERLERİ VE QUASİKONFORM GENİŞLEMELER

Murat ÇAĞLAR

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Halit ORHAN

Bu tezde öncelikle Loewner zincirler metodu kullanılarak kompleks düzlemin değişik alt bölgelerinde tanımlı analitik fonksiyonların ve integral operatörlerin ünivalentliği için yeter şart problemi ele alınmıştır. Buradan elde edilen şartlar doğrultusunda, Becker teoremi yardımıyla, Loewner zincirleri ve quasikonform genişleme arasındaki ilişkiyi ifade eden quasikonform genişleme kriterleri elde edilmiştir.

2013, 114 sayfa

Anahtar Kelimeler: Analitik fonksiyon, Ünivalent fonksiyon, Meromorf fonksiyon, Ünivalentlik kriteri, Loewner zinciri, İntegral operatör, Konform dönüşüm, Quasikonform dönüşüm, Quasikonform genişleme.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

NEW UNIVALENCE CRITERIA FOR ANALYTIC FUNCTIONS AND QUASICONFORMAL EXTENSIONS

Murat ÇAĞLAR

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Halit ORHAN

In this thesis, firstly, were studied sufficient condition problems for analytic functions and integral operators defined in different subdomains of complex plane by using Loewner chains method. Based on the conditions obtained here, with the help of Becker theory, quasiconformal extension criteria that describes the relationship between Lowner chains and quasiconformal extension.

2013, 114 pages

Keywords: Analytic function, Univalent function, Meromorphic function, Univalence criterion, Loewner chain, Integral operator, Conformal mapping, Quasiconformal mapping, Quasiconformal extension.

TEŞEKKÜR

Doktora tezi olarak sunduğum bu çalışma Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Bu tez konusunu bana veren ve çalışmalarım boyunca yardımlarını esirgemeyen saygıdeğer hocam

Sayın Prof. Dr. Halit ORHAN'a;

en içten teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Yapıcı eleştirileri ile çalışmama yön veren Sayın Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU'na, Sayın Prof. Dr. Uğur S. KIRMACI'ya ve Sayın Doç. Dr. Erhan DENİZ'e; tezin yazımı sırasında bana yardımcı olan çalışma arkadaşım Arş. Gör. Nihat YAĞMUR'a ve Matematik bölümünde hiçbir zaman yardımlarını esirgemeyen başta bölüm başkanı Sayın Prof. Dr. Abdullah MAĞDEN olmak üzere, anabilim dalımızın değerli öğretim üyelerine sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım boyunca kendilerinden görmüş olduğum destekten dolayı eşime ve aileme teşekkür ederim.

Murat ÇAĞLAR
Eylül 2013

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\mathcal{A}$	:	$\mathbb{U}$ birim diskinde tanımlı $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n$ şeklindeki analitik fonksiyonların sınıfı
$\arg f(z)$	:	$f(z)$ fonksiyonunun argümanı
$\mathbb{C}$	:	Kompleks düzlem
$\overline{\mathbb{C}}$	:	$\left(\mathbb{C}\cup\{\infty\}\right)$ Genişletilmiş kompleks düzlem
$D_f\left(z\right)$	:	Bir fonksiyonun bir z noktasındaki genişlemesi
$\operatorname{Im} f(z)$	:	$f(z)$ fonksiyonunun imajiner kısmı
I	:	İndis kümesi
$L(z,t)$	:	Subordinasyon (veya Loewner) zinciri
$\mathbb{N}$	:	$\mathbb{N}=\{1,2,...\}$ Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	:	$\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$
$\mathcal{P}$	:	Caratheodory fonksiyonlarının sınıfı
$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_+$	:	Pozitif reel sayılar kümesi
$\Re f(z)$	:	$f(z)$ fonksiyonunun reel kısmı
$\mathcal{S}$	:	$\mathcal{A}$ ya ait ünivalent fonksiyonların sınıfı
$S_f(z)$	:	$f(z)$ fonksiyonunun Schwarz türevi
$\mathbb{U}_r$	:	$\{z\in\mathbb{C}:\lvert z\rvert<r<1\}$ şeklindeki açık disk
$\overline{\mathbb{U}}_r$	:	$\{z\in\mathbb{C}:\lvert z\rvert\leq r<1\}$ şeklindeki kapalı disk
$\mathbb{U}$	:	$\{z\in\mathbb{C}:\lvert z\rvert<1\}$ açık birim disk
$\overline{\mathbb{U}}$	:	$\{z\in\mathbb{C}:\lvert z\rvert\leq 1\}$ kapalı birim disk
$\tilde{\mathbb{U}}$	:	$\{z\in\mathbb{C}:0<\lvert z\rvert<1\}$ şeklindeki delinmiş açık birim disk
$\mathbb{U}^*$	:	$\left\{\zeta\in\mathbb{C}:\lvert\zeta\rvert>1\right\}$ şeklindeki kapalı birim diskin dışı
$\overline{\mathbb{U}}^*$	:	$\left\{\zeta\in\mathbb{C}:\lvert\zeta\rvert\geq 1\right\}$ şeklindeki açık birim diskin dışı

Σ	:	$\mathbb{U}^*$ kümesinde tanımlı $f(\zeta)=\zeta+\sum_{k=0}^{\infty}a_k\zeta^{-k}$ şeklindeki meromorf fonksiyonların sınıfı
Σ_0	:	$\mathbb{U}^*$ kümesinde tanımlı $\mathrm{g}(\zeta)=\zeta+\sum_{k=1}^{\infty}b_k\zeta^{-k}$ şeklindeki meromorf fonksiyonların sınıfı
Ω	:	Schwarz fonksiyonların sınıfı
$\prec$	:	Subordinasyon
$f\prec g$	:	f fonksiyonu g fonksiyonuna subordinedir
$\varnothing$	:	Boş küme

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Geometrik Fonksiyonlar Teorisi, 19. yüzyılda başlayıp ve yeni uygulamalarla sürekli gelişen kompleks analizin önemli bir dalıdır. Analitik fonksiyonların geometrik özellikleriyle ilgilenen bu teori, ilk olarak G. Bernard Riemann'ın 1851 yılında kompleks düzlemin basit bağlantılı bir $D \subsetneq \mathbb{C}$ alt bölgesini, D_1 bölgesi üzerine resmeden bir f analitik fonksiyonunun varlığını gösteren ve literatürde "Riemann dönüşüm teoremi" olarak bilinen teoremiyle ortaya çıkmıştır. Fakat bu teorem, 20. yüzyılın başlarına kadar bazı araştırmacılara göre kullanışlı olmadığından bazı araştırmacılara göre de önemi fazla anlaşılamadığından teoride pek fazla uygulama alanı bulamamıştır. Öyle ki, 1907 yılında Koebe'nin bu teoremi analitik ve ünivalent (yalınkat) fonksiyonlar için vermesi, 1914 yılında Gronwall'ın alan teoremini ispatı ve 1916 yılında Bieberbach'ın ortaya koyduğu normalize edilmiş fonksiyonlar için katsayı tahmini ve bu tahminin sonuçları, geometrik fonksiyonlar teorisine veya diğer bir ifade ile ünivalent fonksiyonlar teorisine uygulama alanını başlatmıştır. Bu yıllarda ünivalent fonksiyonların yapısı üzerine kurulan problemler o dönemin popüler araştırma konuları olmuştur.

Bieberbach'ın $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonu için $n = 2,3,...$ olmak üzere $|a_n| \le n$ tahmininin ispatı birçok matematikçi tarafından önemli bir araştırma konusu olmuştur. Alan teoreminin bir sonucu olarak $|a_2| \le 2$ eşitsizliğinin doğruluğu ilk defa 1916 yılında Bieberbach tarafından gösterilmiştir. Daha sonra Loewner 1923 yılında kendi bulduğu ve *parametrik metod* olarak isimlendirdiği bir metotla $|a_3| \le 3$ eşitsizliğini, 1955 yılında Garabedian ve Schiffer, Grunsky eşitsizliklerini kullanarak $|a_4| \le 4$ eşitsizliğini, 1968 yılında Pederson (1969 yılında Ozawa) $|a_6| \le 6$ ve 1972 yılında da Pederson ve Schiffer $|a_5| \le 5$ eşitsizliklerini ispatlamışlardır. Tahminin genel hali uzun yıllar boyunca birçok matematikçi tarafından ispatlanmaya çalışılmış ve nihayet 1985 yılında L. De-Branges, Loewner teorisini kullanarak tüm $n = 2,3,...$ için $|a_n| \le n$ eşitsizliğinin doğruluğunu göstermiş ve bu probleme son noktayı koymuştur. Problemin çözülmüş olması, bu alanda çalışılacak bir şeyin kalmadığı anlamına gelmemiş, aksine teoriyi daha da zenginleştirmiştir. Çağımızın önde gelen matematikçilerini yetmiş yıl uğraştıran bu problemin çözülmüş olması bir takım yeni problemlerin ortaya çıkmasına zemin oluşturmuştur. Bu sahada çalışan matematikçiler problemi ünivalent fonksiyonların değişik alt sınıflarına taşımışlar ve bu alt sınıflar üzerinde çalışmalarını sürdürmüşlerdir.

Ünivalent fonksiyonlar teorisi içinde ele alınan önemli problemlerden birisi verilen bir fonksiyonun ünivalent olup olmadığının araştırılmasıdır. Doğal olarak burada akla gelen ilk soru "$\mathcal{S}$ sınıfı için yeter şart ya da şartlar elde edilebilir mi?" sorusudur. Bu soruya günümüze kadar birçok araştırmacı değişik yöntemler kullanarak cevap aramaya çalışmıştır. Kullanılan yöntemlerin en önemlilerinden birisi Loewner zincirler metodu ya da diğer bir ifade ile subordinasyon zincirler metodudur.

1920'li yıllarda geliştirilen bu metot, ünivalent fonksiyonlar teorisinin çok güçlü tekniklerinden birisidir. Bu teori, elementer yöntemlerle çözülemeyen problemleri çözme imkanı sunmaktadır. S. Li'nin diferensiyel denklemlerle ilgili yarı gruplar üzerine yaptığı çalışma Loewner'e bir ilham kaynağı olmuştur. S. Li'nin amacı, keyfi bir fonksiyonu birim fonksiyondan hareketle $\mathcal{S}$ sınıfının yoğun bir alt kümesi üzerinde zamana bağlı bir akışın limiti olarak açıklamaktı. Bu akış fonksiyonu, Loewner diferensiyel denklemi olan bir diferensiyel denklemi sağlamaktadır. Başlangıçta Loewner metodunun temel uygulamalarından birisi, Bieberbach tahminini ispatlamaktı. Bu metodun L. De-Branges tarafından verilen meşhur Bieberbach tahmininin ispatında merkezi bir rol oynaması hiç de şaşırtıcı olmamıştır. Bununla birlikte $\mathcal{S}$ sınıfı için döndürme teoremi ve yıldızıllık yarıçapı gibi ilginç geometrik sonuçlar Loewner metodu kullanılarak elde edilmiştir. Kuferev ve Goodman'ın yanı sıra özellikle Pommerenke 1965 yılında Loewner zincirler metodunu tanımlayarak teorinin gelişmesine önemli katkılarda bulunmuşlardır. Pommerenke'nin, aynı yıl bir analitik fonksiyonun Loewner zinciri olması için yeterli şartları içeren teoremi vermesiyle teori değişik bir boyut kazanmıştır. Onun bu teoremi verilen bir analitik fonksiyonun ünivalentliği için yeter şart niteliği taşımaktadır.

Pommerenke'nin Loewner zincirleri için vermiş olduğu yeter şart niteliğindeki bu teoremin bir uygulamasını ilk defa 1972 yılında J. Becker vermiştir. Becker, Pommerenke'nin teoremini kullanarak $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonunun $\mathbb{U}$ birim diskinde

$$(1-|z|^2)\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| \le 1$$

eşitsizliğini sağlaması halinde ünivalent olduğunu ispat etmiştir. Daha sonra, Becker'ın bu sonucu, Ahlfors-Becker (1974); Ruscheweyh (1976); Lewandovski (1981) gibi matematikçiler tarafından genelleştirilmiştir. Pascu 1987 yılında, aynı metodu kullanarak bu sonucu integral operatörler için genelleştirmiştir.

Nehari (1949) ve Ozaki and Nunokawa (1972) Schwarzian türevini ayrıca Goluzin (1969) farklı bir metod kullanarak birim diskte analitik olan bir fonksiyonun ünivalentliği için yeter şartlar elde etmişlerdir. Onlar problemi çözmek için her ne kadar Loewner zincirler metodunu kullanmamış olsalar da, günümüzde bu tür problemleri Loewner zincirler metodunu kullanarak kolay bir biçimde çözmek mümkün olabilmektedir.

Ünivalentlik kriterlerinde kullanılan metodların yanı sıra bir önemli etken de fonksiyonların tanım kümeleri olmuştur. Tanım kümesinin birim diskten farklı olarak, kompleks düzlemin değişik alt bölgeleri (yani, birim diskin dışı veya kompleks düzlemin üst yarı kısmı) olması teoriye ayrı bir hava katmıştır. Birim diskin dışında tanımlı meromorf fonksiyonlar için ünivalentlik kriterleri ilk olarak Nehari (1949); Aksent'ev (1958); Becker (1973) tarafından ve kompleks düzlemin üst yarı bölgesi için ünivalentlik kriterleri ise ilk olarak J. Becker ve Ch. Pommerenke, O. Lehto, Th. Betker ve D. Raducanu gibi araştırmacılar tarafından verilmiştir.

Elde edilen bir ünivalentlik kriterinin önemi, kullanılan metoda, tanım kümesinin farklı oluşuna ve uygulanabilirliğine göre değişmektedir. Burada uygulanabilirlikten kasıt, elde edilen ünivalentlik şartını sağlayan fonksiyonların sayısıdır. Diğer bir ifade ile bir f analitik fonksiyonu için yukarıda bahsi geçen temel ünivalentlik kriterleri bu fonksiyonun ünivalentliğini ölçmede yetersiz kalabilmektedir. Örneğin; $f(z) = z + \frac{1}{2}z^2$ fonksiyonu birim diskte ünivalent olmasına rağmen Becker’ın temel kriterini sağlamaz. Yani bu kriter bu fonksiyonun ünivalentliğini ölçmede yeterli değildir. Dolayısıyla, burada doğan bu eksikliği az da olsa giderebilmek için yeni ünivalentlik kriterleri elde etme ya da mevcut temel ünivalentlik kriterlerini genişletme ihtiyacı ortaya çıkmıştır. Keyfi bir analitik fonksiyonun ünivalentliğini test edebilecek genel bir kriter bulma problemi halen açık bir problem olarak çözüm beklemektedir. Bundan dolayı bu alanda çalışan birçok araştırmacının ilgisini çekmiş ve çekmeye devam etmekte olup, bu konu Raducanu (2004, 2007, 2008, 2012); Tudor (2007, 2008, 2012, 2013); Deniz and Orhan (2009-2013) gibi matematikçiler tarafından halen aktif olarak çalışılmaktadır.

Ünivalent fonksiyonlar teorisinde önemli problemlerden birisi de $\mathbb{C}$ kompleks düzlemde quasikonform genişlemeye sahip ünivalent fonksiyonları bulma problemidir. Esas itibariyle quasikonform dönüşümler konform dönüşümlerin bir genelleştirilmesidir. Quasikonform dönüşümlerin önemi, ilk olarak 1930’lu yıllarda Ahlfors ve Teichmüller tarafından fark edilmiştir. Bu terim ilk olarak Ahlfors’un 1935 yılındaki çalışmasında ifade edilmiştir. Ahlfors quasikonform dönüşümleri, kendi geometrik metodunda Nevanlinna’nın değer dağılım teorisi için kullanmıştır. Teichmüller, birbirine denk olmayan iki kompakt Riemann yüzeyleri arasındaki mesafeyi ölçmek için quasikonform dönüşümleri kullanmıştır. Bu düşünce Teichmüller Teorisinin önemini daha da artırmıştır. Ünivalent fonksiyonlar için quasikonform genişleme problemi, quasikonform dönüşümler kullanılarak üst yarı düzlemde tanımlanan Evrensel Teichmüller Uzayı ile direkt olarak bağlantılıdır.

1962 yılında, Ahlfors and Weill, Schwarzian türevi vasıtasıyla birim diskte tanımlı bir ünivalent fonksiyonun quasikonform genişlemeye sahip olması için

$$\left(1-|z|^2\right)^2 \left|S_f(z)\right| \leq 2k \quad (0 \leq k < 1)$$

yeter şartını vermiştir. Bugün bilinen birçok kriter ve ünivalent fonksiyonların alt sınıfları ile ilgili tahminler elde etmek için değişik metodlar geliştirilmiştir. 1972 yılında Becker, Loewner diferensiyel denklem vasıtasıyla quasikonform genişleme için türetilen bazı kriterler, quasikonform genişleme problemi ve Loewner teori arasında yakın ilişkinin olduğunu göstermiş ve aşağıdaki yeter şartı vermiştir:

$$(1-|z|^2)\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| \leq k \quad (0 \leq k < 1).$$

Benzer yeter şart problemleri, Ahlfors (1974); Krzyz (1976); Brown (1984); Tan (1992); Pfaltzgraff (1993); Sugawa (1999, 2007); Yang and Zhou (2004) gibi matematikçiler tarafından çalışılmıştır. Son yıllarda, Sugawa and Hotta (2010, 2011, 2012); Raducanu and Tudor (2012); Deniz and Orhan (2011, 2012, 2013) gibi araştırmacılar tarafından çalışılıyor olması bu konunun halen güncel bir konu olduğunu göstermektedir.

Bizi bu tez çalışmasına yönelten nedenler;

- Mevcut ünivalentlik kriterlerinin verilen bir analitik fonksiyonun veya integral operatörünün ünivalentliğini ölçmede yetersiz kalmasından dolayı burada doğan eksikliği kısmen giderebilmek için yeni ünivalentlik kriterleri elde etme veya mevcut ünivalentlik kriterlerini genişletme ihtiyacının ortaya çıkması.
- Verilen bir analitik fonksiyon hangi şartlar altında quasikonform genişlemeye sahiptir.

Sunulan bu tez genel olarak beş ana başlık altında toplanmıştır.

Tezin giriş kısmında tez konusu ile ilgili geçmişten günümüze yapılan çalışmalar tarihi bir seyir içerisinde sunulmuştur.

Kuramsal temeller olarak adlandırılan ikinci bölümde, tezde geçen temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Materyal ve yöntem olarak adlandırılan üçüncü bölümde, ilk olarak, single-slit dönüşümler, bu dönüşümlerin parametrik (Loewner) temsili ve bu temsilin Loewner diferensiyel denklemi ile arasındaki ilişkiyi anlatan bazı teoremler verilmesinin yanı sıra, tezin temelini oluşturan subordinasyon veya Loewner zincirleri metodu üzerinde durulmuş ve bunlarla alakalı çok iyi bilinen "Pommerenke Teoremi" verilmiştir. İlave olarak, quasikonform dönüşüm ve quasikonform genişleme tanımları örneklerle geometrik olarak incelenmiştir. Son olarak, Loewner zincirleri ve quasikonform genişleme kriteri arasındaki ilişkiyi belirten Becker metodundan bahsedilmiştir.

Araştırma bulguları olarak adlandırılan dördüncü bölümde, analitik ve meromorf fonksiyonlar için Loewner zincirler metodu kullanılarak bazı ünivalentlik kriterleri verilmiştir. Daha sonra elde edilen bu ünivalentlik kriterleri için Becker metodu ile quasikonform genişleme kriterleri elde edilmiştir.

Beşinci bölümde ise, çalışmamızda elde ettiğimiz sonuçlar verilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Genel Kavramlar

Bu bölümde tezde kullanılan bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Tanım 2.1.1 (Komşuluk): $z_0 \in \mathbb{C}$ noktası verilsin. $B(z_0,r)=\{z\in\mathbb{C}:|z-z_0|<r\}$ kümesine z_0 merkezli r yarıçaplı açık disk veya z_0 noktasının r komşuluğu denir. $\overline{B(z_0,r)}=\{z\in\mathbb{C}:|z-z_0|\le r\}$ kümesine z_0 merkezli r yarıçaplı kapalı disk, $\partial B(z_0,r)=\{z\in\mathbb{C}:|z-z_0|=r\}$ kümesine z_0 merkezli r yarıçaplı çember ve $\tilde{B}(z_0,r)=\{z\in\mathbb{C}:0<|z-z_0|<r\}=B(z_0,r)-\{z_0\}$ kümesine de z_0 noktasının delinmiş komşuluğu denir.

Tanım 2.1.2 (İç nokta ve Kapanış noktası): $S\subset\mathbb{C}$ herhangi bir küme ve $z_0\in S$ olsun. z_0 noktasının bir r komşuluğu tamamen S kümesine ait ise yani $B(z_0,r)\subset S$ olacak biçimde bir $r>0$ sayısı varsa z_0 noktasına S kümesinin bir iç noktası denir. Eğer her $B(z_0,r)\subset S$ diski, S kümesinin bir elemanını ihtiva ediyorsa z_0, S kümesinin bir kapanış noktasıdır.

Tanım 2.1.3 (Açık ve Kapalı küme): Her noktası iç nokta olan kümeye açık küme, tümleyeni açık olan kümeye ise kapalı küme denir. $r>0$ olmak üzere $B(z_0,r)$ diski bir açık küme ve $\overline{B(z_0,r)}$ kümesi de kapalı kümedir.

Tanım 2.1.4 (Yakınsaklık): (f_n), $S\subset\mathbb{C}$ olmak üzere $f_n:S\to\mathbb{C}$ fonksiyonlarının bir dizisi olsun.

(i) Her $\varepsilon > 0$ sayısı ve her bir $z \in S$ için $n > n_0$ olduğunda $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ olacak biçimde bir $n_0 = n_0(\varepsilon, z)$ sayısı bulunabiliyorsa, (f_n) dizisi S kümesinde f fonksiyonuna noktasal yakınsıyor denir ve $f_n \to f$ veya $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ ile gösterilir.

(ii) Her $\varepsilon > 0$ sayısı ve her $z \in S$ için $n > n_0$ olduğunda $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ olacak biçimde sadece ε a bağlı bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı varsa, (f_n) dizisi S kümesinde f fonksiyonuna düzgün yakınsıyor denir.

Düzgün yakınsak her dizi aynı zamanda noktasal yakınsaktır. Fakat bunun tersinin her zaman doğru olması gerekmez. Örneğin; genel terimi $f_n(z) = 1/nz$ olan dizi $0 < |z| < 1$ kümesinde noktasal yakınsak fakat düzgün yakınsak değildir.

Tanım 2.1.5 (Bağlantılılık): $S \subset \mathbb{C}$ alt kümesi verilsin. S kümesi boş olmayan, ayrık ve açık iki kümenin birleşimi olarak yazılamıyorsa, S kümesine bağlantılıdır denir. Yani $S \subseteq U \cup V$, $S \cap V \neq \emptyset$ ve $S \cap U \neq \emptyset$, $S \cap U \cap V = \emptyset$ olacak biçimde U ve V gibi boş olmayan iki açık küme bulunamıyor ise S kümesine bağlantılı küme denir. Bağlantılı olmayan kümeye bağlantısız küme denir. Örneğin; $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ kümeleri bağlantılı, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi bağlantısız kümelerdir.

Tanım 2.1.6 (Bölge): Kompleks düzlemde açık ve bağlantılı kümeye bölge denir. Eğer küme kapalı ise özel olarak bu bölgeye kapalı bölge denir.

Tanım 2.1.7 (Basit bağlantılı küme): B, $\mathbb{C}$ de bir bölge olsun. Eğer B bölgesindeki her basit kapalı eğrinin içi tamamen B de kalıyorsa B bölgesine basit bağlantılı bölge denir. Başka bir ifadeyle tümleyeni bağlantılı olan bölgenin kendisi basit bağlantılıdır. Basit bağlantılı olmayan bölgeye ise çok bağlantılı bölge adı verilir.

Tanım 2.1.8 (Örtü): $S \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. $S \subset \{G_i\}_{i\in I}$ olacak şekilde açık kümelerin $\{G_i\}_{i\in I}$ ailesine S kümesinin bir açık örtüsü denir. Eğer $I_0 \subset I$ sonlu ve $S \subset \bigcup_{i\in I_0} G_i$ ise $\{G_i\}_{i\in I_0}$ ailesine S kümesinin sonlu alt örtüsü denir.

Tanım 2.1.9 (Kompaktlık): $S \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. Eğer S kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa, S kümesine kompakt küme denir.

Tanım 2.1.10 (Dizisel kompaktlık): $S \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. S kümesindeki her dizi bu kümede bir noktaya yakınsayan bir alt diziye sahipse, S kümesine dizisel kompakt küme denir. Eğer, S kompakt $\Leftrightarrow$ S dizisel kompakttır.

Tanım 2.1.11 (Süreklilik): $f : S \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve $z_0 \in S$ olsun.

(i) Her $\varepsilon > 0$ sayısı ve $|z - z_0| < \delta$ şartını sağlayan her $z \in S$ için $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon, z_0) > 0$ sayısı varsa, f fonksiyonu z_0 noktasında süreklidir denir.

(ii) Her $\varepsilon > 0$ sayısı ve $|z_1 - z_2| < \delta$ şartını sağlayan her $z_1, z_2 \in S$ için $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$ olacak şekilde sadece ε a bağlı bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa, f fonksiyonu S kümesinde düzgün süreklidir denir.

(iii) Her $r > 0$ sayısı için, f fonksiyonu her $B(z, r) \subset S$ diskinde düzgün sürekli ise f ye S kümesinde yerel düzgün süreklidir denir.

Eğer f fonksiyonu $z_0 \in S$ noktasında sürekli değilse f ye bu noktada süreksizdir denir. $f : S \to \mathbb{C}$ fonksiyonunun $z_0 \in S$ noktasında süreksiz olması için gerekli ve yeterli şart $\forall \delta > 0$ için $\exists \varepsilon > 0$ vardır öyle ki $|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| \geq \varepsilon$ olacak şekilde $\exists z \in S$ olmasıdır.

Tanım 2.1.12 (Lipschitz süreklilik): $S \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $f : S \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon olsun.

(i) $\forall w, z \in S$ için

$$|f(w)-f(z)| \le T|w-z|$$

olacak biçimde bir $T>0$ reel sayısı varsa, f ye S kümesi üzerinde Lipschitz süreklidir denir.

(ii) $\forall r>0$ sayısı için f fonksiyonu $B(z,r)\subset S$ diskinde Lipschitz sürekli ise f ye S kümesinde yerel Lipschitz süreklidir denir.

Tanım 2.1.13 (Sınırlılık): $f:S\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ fonksiyonu verilsin. Her $z\in S$ için $|f(z)|\le M$ olacak şekilde bir $M>0$ sayısı varsa, f ye sınırlı fonksiyon denir.

Önerme 2.1.14: $S\subset\mathbb{C}$ olmak üzere $f:S\to\mathbb{C}$ fonksiyonu verilsin. f fonksiyonu S kümesinde diferensiyellenebilir ve her $z\in S$ için $|f'(z)|\le K$ olacak şekilde $K>0$ sayısı varsa f fonksiyonu S de Lipschitz süreklidir.

Tanım 2.1.15 (Mutlak süreklilik): $[a,b]\subset\mathbb{R}$ olmak üzere $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ fonksiyonu verilsin. $\{(x_k,y_k)\}_k$ ailesi de $[a,b]$ aralığının ayrık ve açık sonlu bir alt ailesi olsun. Her $\varepsilon>0$ ve (x_k,y_k) aralıklarının sonlu her kümesi için

$$\sum_{k=1}^{n}|y_k-x_k|<\delta$$

şartı sağlandığında

$$\sum_{k=1}^{n}|f(y_k)-f(x_k)|<\varepsilon$$

olacak şekilde $\delta>0$ sayısı varsa, f fonksiyonuna $[a,b]$ aralığında mutlak süreklidir denir. Eğer her $r>0$ sayısı ve her $x\in[a,b]$ için, f fonksiyonu $B(x,r)$ komşuluğunda mutlak sürekli ise f ye $[a,b]$ aralığında yerel mutlak süreklidir denir (Heil 2007).

Önerme 2.1.16: Mutlak sürekli her fonksiyon süreklidir. Fakat bu önermenin tersinin doğru olması gerekmez.

Örnek 2.1.17:

(i) $f(x)=\sin x$ ve $f(x)=x+|x|$ fonksiyonları sonlu aralıklarda mutlak süreklidir.

(ii) $f(x)=\begin{cases} 0, & x=0 \text{ ise}, \\ x\sin(\pi/x), & x\neq 0 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonu $[0,1]$ aralığında sürekli ve dolayısıyla düzgün sürekli fakat mutlak sürekli değildir. Bunu göstermek için $\sum_{k=1}^{n} x_k > 1$ olması kaydıyla $x_k=\dfrac{2}{4k+1}$ ve $y_k=\dfrac{2}{4k}$ alalım.

$$\sum_{k=1}^{n}|y_k-x_k|=\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{2}{4k}-\frac{2}{4k+1}\right|<\delta$$

olması için $\delta>0$ sayısı ne olursa olsun, $\varepsilon=1/2$ seçilirse

$$\sum_{k=1}^{n}|f(y_k)-f(x_k)|=\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{2}{4k}\sin\frac{4k\pi}{2}-\frac{2}{4k+1}\sin\frac{(4k+1)\pi}{2}\right|$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{4k+1}=\sum_{k=1}^{n}x_k>1>\varepsilon$$

bulunur. Dolayısıyla f fonksiyonu $[0,1]$ aralığında mutlak sürekli değildir.

Önerme 2.1.18: $S\subset\mathbb{R}$ olmak üzere $f(z,t):\mathbb{U}\times S\to\mathbb{C}$ fonksiyonu verilsin.

(i) Eğer her $z\in\mathbb{U}$ için her $[a,b]\subset S$ kümesinde $\dfrac{\partial f(z,t)}{\partial t}$ sınırlı ise f fonksiyonu S kümesinde yerel mutlak süreklidir.

(ii) Eğer f fonksiyonu her $[a,b]\subset S$ aralığında sürekli diferensiyellenebilir ise f, S kümesinde yerel mutlak süreklidir.

Önerme 2.1.19: Bir f fonksiyonu için aşağıdaki gerektirmeler doğrudur;

$f-$Lipschitz sürekli $\Rightarrow$ $f-$mutlak sürekli $\Rightarrow$ $f-$düzgün sürekli $\Rightarrow$ $f-$süreklidir.

Tanım 2.1.20 (Eğri):

(i) $[a,b]\subset\mathbb{R}$ olmak üzere, $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ sürekli fonksiyonuna $\mathbb{C}$ de bir eğri denir. Burada $\gamma(a)$ ve $\gamma(b)$ noktalarına sırasıyla eğrinin başlangıç ve bitiş noktaları adı verilir.

(ii) Bir γ eğrisi için, $\gamma(a)=\gamma(b)$ ise γ eğrisine kapalı eğri denir.

(iii) Bir γ eğrisi sadece $t_1 = t_2$ için $\gamma(t_1)=\gamma(t_2)$ oluyorsa basit eğridir, denir. Hem basit hem de kapalı eğrilere de basit kapalı eğri veya Jordan eğrisi adı verilir. Jordan eğrisi, düzlemi Jordan eğrisinin içi ve dışı olmak üzere iki bölgeye ayırır. Jordan eğrisinin içine Jordan bölgesi denmektedir.

(iv) γ eğrisi $[a,b]$ kapalı aralığında türevlenebilir bir eğri olsun. Bu aralıkta γ' sürekli ve sıfırdan farklı ise γ eğrisine düzgün eğri denir.

t, a dan b ye artarken, buna karşılık gelen $\gamma(t)$ değerlerinin $\gamma(a)$ dan $\gamma(b)$ ye doğru sıralanması eğrinin yönünü belirtir. Kapalı bir eğrinin yönü pozitif veya negatiftir. Kapalı olmayan eğriler için başlangıç noktasından bitiş noktasına doğru sıralama yön olarak alınır.

2.2. Analitik ve Ünivalent Fonksiyonlar

Bu kısımda analitik ve ünivalent fonksiyon kavramları ile ilgili bazı tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.2.1 (Diferensiyellenebilme): $S \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $f : S \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve z_0, S nin bir iç noktası olsun. Eğer

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti varsa f fonksiyonu z_0 noktasında diferensiyellenebilirdir (veya türevlenebilirdir) denir. Bu limitin değeri $f'(z_0)$ veya $\frac{df}{dz}(z_0)$ ile gösterilir ve buna f fonksiyonunun z_0 noktasındaki türevi adı verilir.

Tanım 2.2.2 (Analitiklik): f fonksiyonu, z_0 noktasında ve bu noktanın uygun bir komşuluğundaki her noktada diferensiyellenebilirse f fonksiyonuna z_0 noktasında analitiktir denir. Bir f fonksiyonu bir $D \subset \mathbb{C}$ bölgesinin her noktasında analitik ise f ye D bölgesinde analitik fonksiyon adı verilir. $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesinde analitik olan fonksiyona ise tam fonksiyon denir.

Tanım 2.2.2 dikkatlice incelenirse, bir noktadaki analitiklik bir noktadaki diferensiyellenebilirlik ile aynı değildir. Bir noktadaki analitiklik bir komşuluk özelliğidir; diğer bir deyişle analitiklik, bir açık küme üzerinde tanımlanmış bir özelliktir. Örneğin; $f(z) = 2xy + i(x^2 + y^2)$ fonksiyonu $z = i$ noktasında diferensiyellenebildiği halde bu noktada analitik değildir. Çünkü f fonksiyonunun diferensiyellenebildiği $z = i$ noktasının bir komşuluğu yoktur. Buna karşılık $f(z) = z^2$ basit polinomu kompleks düzlemin her noktasında diferensiyellenebilirdir, dolayısıyla her yerde analitiktir.

$z = x + iy$ olmak üzere $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ fonksiyonu analitik ise

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \text{ ve } \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$$

biçimindeki Cauchy-Riemann denklemlerini sağlar.

Kompleks fonksiyonlar teorisinde, analitik fonksiyonlar için önemli bir yere sahip olan Cauchy-Türev formülü aşağıdaki gibidir.

Teorem 2.2.3 (Cauchy-Türev Formülü): f, pozitif yönlü basit kapalı γ eğrisi içinde ve üzerinde analitik bir fonksiyon ve z_0 bu eğrinin içinde bir nokta ise $n = 0, 1, 2...$ için

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

dır (Ponnusamy and Silverman 2006).

Cauchy-Türev formülünün en önemli sonuçlarından birisi f nin analitik olduğu bir bölgede her mertebeden türevinin mevcut olması ve bu türevlerin de yine aynı bölgede analitik olmasıdır. Böylece f analitik fonksiyonu z_0 noktasında

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n,\quad a_n=f^{(n)}(z_0)/n! \tag{2.1}$$

şeklinde bir Taylor açılımına sahiptir.

$z=z_0$, f fonksiyonunun tekil noktası ise bu durumda f, z_0 merkezli bir kuvvet serisine elbette açılamaz. Buna rağmen bir $z=z_0$ çıkarılmış tekil nokta civarında f yi $z-z_0$ ın hem pozitif hem de negatif tam sayı kuvvetlerini bulunduran ve Laurent serisi olarak isimlendirilen bir seri ile gösterebiliriz.

Tanım 2.2.4:

(i) f fonksiyonunun analitik olduğu $S(R_1;R_2)=\{z:R_1<|z-z_0|<R_2\}$ halka bölgesindeki

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

serisine, f fonksiyonunun z_0 noktası civarındaki Laurent serisi denir.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}$ serisine Laurent serisinin esas kısmı, $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ ifadesine de analitik kısmı denir.

Tanım 2.2.5:

(i) f fonksiyonu z_0 noktasında analitik değilse z_0 noktasına f fonksiyonunun singüler noktası denir.

(ii) z_0, f fonksiyonunun bir singüler noktası olsun. Eğer f fonksiyonu z_0 noktasının $\tilde{B}(z_0,r)$ delinmiş bir komşuluğunda analitik oluyorsa z_0 noktasına f fonksiyonunun ayrık singüler noktası denir.

(iii) z_0, f fonksiyonunun bir singüler noktası olsun. Eğer f fonksiyonu z_0 noktasının her $\tilde{B}(z_0,r)$ delinmiş komşuluğunda en az bir singüler noktaya sahipse z_0 noktasına f fonksiyonunun ayrık olmayan singüler noktası denir.

Ayrık singüler noktaların uygun bir delinmiş komşuluğunda fonksiyon analitik olup Laurent serisine açılabilir. Bu seri göz önüne alınarak ayrık singüler noktalar, kaldırılabilir singüler nokta, kutup noktası ve esas singüler nokta diye sınıflandırılır. Biz burada sadece kutup noktasından bahsedeceğiz.

Tanım 2.2.6 (Kutup noktası): z_0, f fonksiyonunun bir ayrık singüler noktası olsun. Bu noktanın uygun bir delinmiş komşuluğundaki Laurent serisini göz önüne alalım. Bu serinin esas kısmında sonlu sayıda terim varsa z_0 noktasına f fonksiyonunun kutup noktası denir.

Tanım 2.2.7 (Meromorf fonksiyon): Bir f fonksiyonunun bir B bölgesindeki singüler noktaları sadece kutup noktaları ise f fonksiyonuna B bölgesinde meromorf fonksiyon denir.

Örneğin; $f(z)=\dfrac{e^z}{z}$ ve $f(z)=\dfrac{\sin z}{(1-z)^2}$ fonksiyonları $\mathbb{C}$ de meromorf fonksiyonlardır.

Teorem 2.2.8 (Maksimum Prensibi): f, $S\subset\mathbb{C}$ bölgesinde sabit olmayan analitik bir fonksiyon olsun. Bu durumda $|f(z)|$, S bölgesinde maksimum değer alamaz (Ponnusamy and Silverman 2006).

Sonuç 2.2.9: S sınırlı bir bölge ve sabit olmayan f fonksiyonu da bu bölgenin sınırında sürekli ve içinde analitik olsun. Bu durumda $|f(z)|$ maksimum değerini S bölgesinin sınırında alır (Ponnusamy and Silverman 2006).

Maksimum prensibinin önemli sonuçlarından birisi de Schwarz lemmasıdır.

Lemma 2.2.10 (Schwarz lemması): f fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik ve $f(0)=0$ olsun. Eğer $\mathbb{U}$ birim diskinde $|f(z)|\le 1$ ise bu durumda $|f'(0)|\le 1$ ve

$|f(z)| \leq |z|$ dir. Eşitlik sadece $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(z) = e^{i\theta} z$ fonksiyonu ile sağlanır (Ponnusamy and Silverman 2006).

Tanım 2.2.11 (Ünivalent fonksiyon): f, $S \subset \mathbb{C}$ bölgesinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Her $z_1, z_2 \in S$ için $f(z_1) = f(z_2)$ olması sadece $z_1 = z_2$ olmasını gerektiriyorsa (veya $z_1 \neq z_2$ olduğunda $f(z_1) \neq f(z_2)$ gerçekleşiyorsa) f fonksiyonuna S bölgesinde ünivalent (yalınkat veya schlicht) fonksiyon denir (Duren 1983).

Eğer f, z_0 noktasının bir komşuluğunda ünivalent ise f ye yerel ünivalent fonksiyon denir.

Teorem 2.2.12: Analitik bir f fonksiyonunun z_0 noktasında yerel ünivalent olması için gerek ve yeterli şart $f'(z_0) \neq 0$ olmasıdır (Duren 1983).

Ayrıca $f'(z_0) \neq 0$ şartı $f(z)$ fonksiyonunun ünivalentliği için gerekli fakat yeterli değildir. Yani f analitik fonksiyonu ünivalent ise $f'(z_0) \neq 0$ olur. Bu ifadenin tersi her zaman doğru değildir. Bir kümede yerel ünivalent olan analitik fonksiyonların, bu kümede ünivalent olması gerekmez.

Örnek 2.2.13: $f(z) = e^{kz}$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde $|k| > \pi$ için yerel ünivalent fakat ünivalent değildir. Gerçekten $f(z) = e^{kz}$ fonksiyonu, $\mathbb{U}$ da analitik ve $|k| > \pi$ olmak üzere her $z_0 \in \mathbb{U}$ için $f'(z) = ke^{kz} \neq 0$ olduğundan yerel ünivalenttir. Fakat $k = 2\pi$ için

$$f\left(\frac{1}{2}i\right) = f\left(-\frac{1}{2}i\right) = -1$$

olduğundan $f(z) = e^{kz}$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ diskinde ünivalent değildir.

Eğer $S \subset \mathbb{C}$ bölgesinde f analitik fonksiyonu yerel ünivalent ise bu durumda $z \in S$ noktasında $f'(z)$, f nin yerel geometrik davranışını belirler. $|f'(z)|$ uzunluklar için yerel büyüme ve $\arg f'(z)$ ise yerel dönme değerleridir. Buna ilaveten, $f : S \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analitik dönüşümünün Jacobian determinantı $Jf(z) = |f'(z)|^2$ ile verilmektedir. Jacobian determinantının $|f'(z)|^2$ ifadesine eşit olduğu Cauchy-Riemann denklemlerinden kolayca görülür. Böylece Teorem 2.2.12 den analitik fonksiyonlar için Jacobian determinantının sıfırdan farklı olması, yerel ünivalentlik için gerek ve yeter şarttır.

Tanım 2.2.14 (Konform dönüşüm): Eğer bir dönüşüm, belli bir z_0 noktasından geçen iki düzgün eğri arasındaki açının büyüklüğünü ve yönünü koruyorsa, bu dönüşüme z_0 noktasında konformdur denir. Eğer bir f fonksiyonu, bir $S \subset \mathbb{C}$ bölgesinin tüm noktalarında konform ise f fonksiyonu S bölgesinde konformdur.

Teorem 2.2.15: f fonksiyonunun analitik olduğu her z noktasında $f'(z) \neq 0$ şartı sağlanıyorsa, f fonksiyonu konformdur (Duren 1983).

Dolayısıyla bir bölgede analitik ve ünivalent bir fonksiyon konformdur. En önemli konform dönüşümlerden biri Möbius dönüşümüdür. Bu dönüşüm; a, b, c, d kompleks sabitler olmak üzere

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc \neq 0$$

genişletilmiş kompleks düzlemi $\left(\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}\right)$ kendi üzerine konform olarak resmeder.

Tanım 2.2.16 (Normal aile): $\mathcal{F}$, $S \subset \mathbb{C}$ bölgesinde tanımlanan analitik fonksiyonların bir ailesi olsun. Eğer $\mathcal{F}$ ailesindeki her (f_n) dizisi, S nin her kompakt alt kümesinde düzgün yakınsak bir alt diziye sahipse $\mathcal{F}$ ye normal aile denir (Duren 1983).

$\mathcal{F}, \ S \subset \mathbb{C}$ bölgesinde tanımlanan analitik fonksiyonların bir ailesi olsun. $i \in I$ olmak üzere $\mathcal{F}$ nin her f_i üyesi ve her $z \in S$ için $|f_i(z)| \leq M$ olacak şekilde ortak bir $M > 0$ sayısı varsa, $\mathcal{F}$ ailesine düzgün sınırlıdır denir. Eğer $r > 0$ olmak üzere $\mathcal{F}$ ailesi her $B(z,r) \subset S$ diskinde düzgün sınırlı ise $\mathcal{F}$ ye S de yerel düzgün sınırlıdır denir. $\mathcal{F}$ yerel düzgün sınırlı ise aynı zamanda yerel sınırlıdır. Ayrıca yerel düzgün sınırlı ailelerin düzgün sınırlı olması gerekmez. Örneğin; $f_n(z) = 1/(1-z^n)$ fonksiyonlar dizisi $|z| < 1$ de yerel düzgün sınırlı fakat düzgün sınırlı değildir. $\mathcal{F}$ ailesi yerel düzgün sınırlı ise Cauchy-Türev formülü gereğince $\mathcal{F} = \{ f^{(n)} : f \in \mathcal{F}\}$ türev fonksiyonlarının ailesi de aynı zamanda yerel düzgün sınırlıdır. Bu durum önemli bir teorem olan Montel teoreminin ortaya çıkmasına sebep olmuştur.

Lemma 2.2.17: $\mathcal{F}, \ S \subset \mathbb{C}$ bölgesinde tanımlanan analitik fonksiyonların bir ailesi olsun. $\mathcal{F}$ ailesinin S de yerel düzgün sınırlı olması için gerekli ve yeterli şart $\mathcal{F}$ nin S nin her kompakt alt kümesinde düzgün sınırlı olmasıdır (Goodman 1983).

Lemma 2.2.18: Sınırlı fonksiyonların her düzgün yakınsak dizisi aynı zamanda düzgün sınırlıdır (Rudin 1976).

Teorem 2.2.19 (Montel Teoremi): Analitik fonksiyonların her yerel sınırlı ailesi normaldir (Duren 1983).

Örneğin; $\mathcal{F}_1 = \{z^n : z \in \mathbb{U}, \ n = 1, 2...\}$ ve $\mathcal{F}_2 = \{ z/n : z \in \mathbb{C}, \ n = 1, 2...\}$ aileleri normaldir.

Montel teoreminin terside doğrudur, yani her normal aile yerel sınırlıdır. Normal ailedeki fonksiyonlar için her kompakt alt küme üzerinde noktasal yakınsama aynı zamanda düzgün yakınsamadır. Bunu ifade eden en önemli teorem Vitali teoremidir.

Teorem 2.2.20 (Vitali Teoremi): f_n fonksiyonları $S \subset \mathbb{C}$ bölgesinde analitik ve yerel sınırlı olsunlar. Eğer (f_n) dizisi S de bir kapanış noktasına sahip bir kümenin her noktasında yakınsak ise (f_n) dizisi S nin her kompakt alt kümesinde düzgün yakınsaktır (Duren 1983).

Bizi birim diskte çalışmaya sevk eden ve 1851 yılında Riemann tarafından verilen aşağıdaki teoremi ifade edelim.

Teorem 2.2.21 (Riemann Dönüşüm Teoremi): Kompleks düzlemin her $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ $(\mathcal{D} \neq \mathbb{C})$ basit bağlantılı bölgesi konform olarak $\mathbb{U}$ birim diski üzerine resmedilir. Ayrıca, $z_0 \in \mathcal{D}$ olmak üzere $f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$ şartlarını sağlayan ve $\mathcal{D}$ yi $\mathbb{U}$ birim diski üzerine resmeden bir tek konform dönüşüm vardır (Duren 1983).

2.3. Normalize Edilmiş Ünivalent Fonksiyonlar

Analitik olarak, bir ünivalent fonksiyon sıfırdan farklı türeve sahip iken; geometrik olarak da basit eğrileri basit eğrilere dönüştürür. Hem analitik hem de ünivalent fonksiyon ise basit bağlantılı bölgeleri basit bağlantılı bölgelere dönüştürür. Riemann dönüşüm teoremine göre, $\mathbb{C}$ den farklı herhangi iki basit bağlantılı bölge konform olarak denk olduğundan keyfi bölgelerde tanımlı f analitik fonksiyonu yerine $\mathbb{U}$ da tanımlı analitik fonksiyonlarla işlem yapılacaktır. $f(0) = 0,\ \ f'(0) = 1$ şartlarını sağlayan

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \quad (z \in \mathbb{U}) \tag{2.2}$$

biçimindeki fonksiyona normalize edilmiş analitik fonksiyon denir.

Ünivalent fonksiyonlar teorisinde önemli olan ve çalışmamızda kullanacağımız bazı temel fonksiyon sınıfları

$$\mathcal{A} = \left\{ f : \forall z \in \mathbb{U} \text{ için } f - \text{analitik ve } f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n,\ f(0) = f'(0) - 1 = 0 \right\},$$

$$\mathcal{S} = \left\{ f \in \mathcal{A} : \forall z \in \mathbb{U} \text{ için } f - \text{ünivalent} \right\},$$

$$\Sigma = \left\{ f : \forall \zeta \in \mathbb{U}^* \text{ için } f(\zeta) = \zeta + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta^{-k} \text{ meromorf fonksiyon} \right\}$$

$$\Sigma_0 = \left\{ f : \forall \zeta \in \mathbb{U}^* \text{ için } g(\zeta) = \zeta + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \zeta^{-k} \text{ meromorf fonksiyon} \right\}$$

şeklinde sıralanabilir.

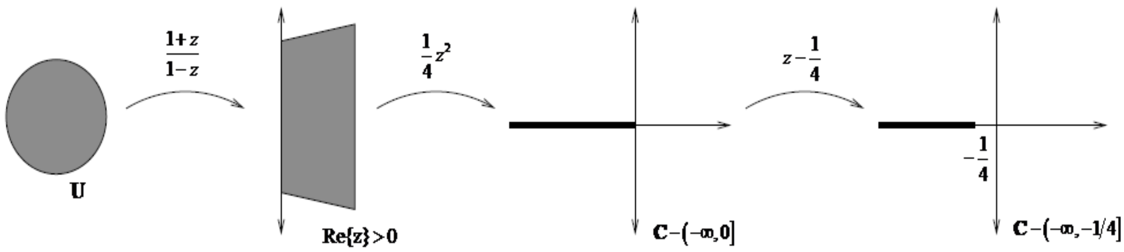
$\mathcal{S}$ ve Σ sınıflarına ait bazı fonksiyon örnekleri aşağıda verilmiştir:

(i) $w = f(z) = z(1-z)^{-1}$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskini $\{w = u + iv : \Re w > -1/2\}$ kümesine resmeder.

(ii) $f(z) = z(1-z^2)^{-1}$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskini $\mathbb{C} - \{(-\infty, -1/2] \cup (1/2, \infty]\}$ bölgesi üzerine resmeder.

(iii) $f(z) = \dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskini $\left\{\dfrac{-\pi}{4} < \operatorname{Im}(z) < \dfrac{\pi}{4}\right\}$ sonsuz şeridi üzerine resmeder.

(iv) $f(z) = z(1-z)^{-2}$ Koebe fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskini $\mathbb{C} - (-\infty, -1/4]$ kümesi üzerine resmeder. Bu, $f(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)^2 - \dfrac{1}{4}$ biçiminde yazılarak ve $\dfrac{1+z}{1-z}$ nin $\mathbb{U}$ birim diskini sağ yarı düzlem üzerine konform olarak resmettiği göz önünde tutularak



Şekil 2.1. Birim diskin Koebe fonksiyonu altındaki görüntüsü

biçiminde geometrik olarak gösterilebilir.

(v) $h(\zeta) = \zeta - 2 + \dfrac{1}{\zeta}$ fonksiyonu $\mathbb{U}^*$ bölgesini $\mathbb{C} - [-4, 0]$ kümesi üzerine resmeder.

$\mathcal{S}$ sınıfı toplama işlemine göre kapalı değildir. Örneğin;

$$f_1(z) = \frac{z}{1-z} \text{ ve } f_2(z) = \frac{z}{1+iz}$$

fonksiyonları $\mathcal{S}$ sınıfına ait olmasına rağmen

$$f_1'(z) = \frac{1}{(1-z)^2} \text{ ve } f_2'(z) = \frac{1}{(1+iz)^2}$$

türevlerinden

$$f_1'(z) + f_2'(z) = \frac{2-2(1-i)z}{(1-z)^2(1+iz)^2}$$

elde edilir. Buradan $z = \frac{1+i}{2} \in \mathbb{U}$ noktasında $f_1'(z) + f_2'(z) = 0$ olduğu görülür. Buda gösterir ki $f + g \notin \mathcal{S}$ dir.

Bununla birlikte $\mathcal{S}$ sınıfındaki birçok özellik bazı dönüşümler altında korunur. Bu dönüşümler aşağıdaki teoremle ifade edilmiştir.

Teorem 2.3.1: $f \in \mathcal{S}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur (Duren 1983):

(i) Eşlenik alma: $g(z) = \overline{f(\overline{z})} = z + \overline{a}_2 z^2 + \ldots$ ise, $g \in \mathcal{S}$ dir.

(ii) Döndürme (Rotasyon): $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$g(z) = e^{-i\theta} f(e^{i\theta} z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n e^{i(n-1)\theta} z^n, \quad (z \in \mathbb{U})$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

(iii) Genişleme (Dilation): $0 < r < 1$ olmak üzere

$$g(z) = r^{-1} f(rz) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n r^{n-1} z^n, \quad (z \in \mathbb{U})$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

(iv) Disk otomorfizmi (Koebe veya Bieberbach dönüşümü): $z_0 \in \mathbb{U}$ olmak üzere

$$g(z) = \frac{f\left(\dfrac{z+z_0}{1+\overline{z}_0 z}\right) - f(z_0)}{(1-|z_0|^2) f'(z_0)}, \quad (z \in \mathbb{U})$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

(v) Değer bölgesi dönüşümü: ψ fonksiyonu $f(\mathbb{U})$ da ünivalent ve $\psi(0)=0$, $\psi'(0)=1$ şartını gerçekleyen bir fonksiyon ise $\psi \circ f \in \mathcal{S}$ dir.

(vi) Çıkarılmış değer dönüşümü: $w \notin f(\mathbb{U})$ olsun. Bu durumda

$$g(z)=\frac{f(z)}{1-f(z)/w}, \quad (z \in \mathbb{U})$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

(vii) n. kök dönüşümü: Eğer $n=2,3,...$ ise

$$g(z)=\sqrt[n]{f(z^n)}=z+\frac{a_2}{n}z^{n+1}+\frac{1}{2n^2}(2na_3-(n-1)a_2^2)z^{2n+1}+..., \quad (z \in \mathbb{U})$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

Tanım 2.3.2: $\mathbb{U}$ birim diskinde $p(0)=1$, $\Re p(z)>0$ şartlarını sağlayan $p(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ şeklindeki fonksiyonların oluşturduğu sınıfa Caratheodory sınıfı veya $\mathcal{P}$ sınıfı denir (Duren 1983).

Örneğin; $p(z)=(1+z)/(1-z), z \in \mathbb{U}$ fonksiyonu $\mathcal{P}$ sınıfına ait olup, $\mathbb{U}$ birim diskini sağ yarı düzlem üzerine resmeden bir konform dönüşümdür. Ayrıca $\mathcal{P}$ sınıfına ait bir fonksiyonun ünivalent olması gerekmez. Örneğin; $f(z)=1+z^n$ fonksiyonu $\mathcal{P}$ sınıfına ait olmasına rağmen $n \in \mathbb{N}_0, n \geq 2$ için ünivalent değildir.

Tanım 2.3.3: $\mathbb{U}$ birim diskinde $\phi(0)=0$ ve $|\phi(z)|<1$ şartlarını sağlayan analitik fonksiyonların oluşturduğu sınıfa Schwarz fonksiyonlarının sınıfı denir ve Ω ile gösterilir (Graham and Kohr 2003).

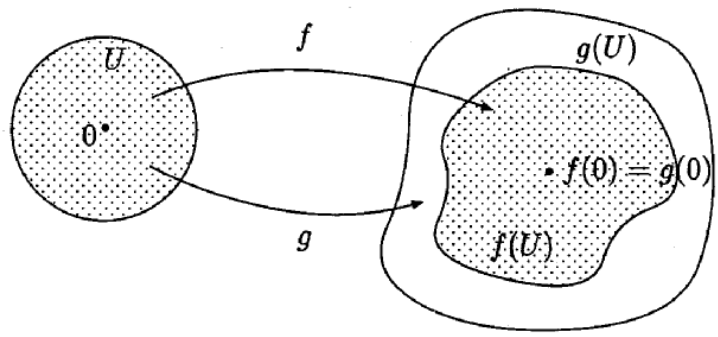
Bunların yanı sıra, $\mathcal{P}$ sınıfı ile Schwarz fonksiyonları arasında aşağıda olduğu gibi önemli bir bağ vardır:

$$p(z) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow p(z)=\frac{1+\phi(z)}{1-\phi(z)}, \quad \phi(z) \in \Omega.$$

Şimdi ünivalent fonksiyonlar teorisinde önemli bir yere sahip olan subordinasyon kavramını verelim.

Tanım 2.3.4: f ve g fonksiyonları $\mathbb{U}$ birim diskinde iki analitik fonksiyon olsun. $\forall z \in \mathbb{U}$ için $f(z) = g(\omega(z))$ olacak şekilde bir $\omega \in \Omega$ fonksiyonu varsa, f fonksiyonu $\mathbb{U}$ da g fonksiyonuna subordinedir denir ve $f \prec g$ ile gösterilir. Eğer g ünivalent ise $f \prec g \;\Leftrightarrow\; f(0) = g(0)$ ve $f(\mathbb{U}) \subseteq g(\mathbb{U})$ olmasıdır (Duren 1983).

f nin g ye subordinasyonundan anlaşılacak şey aşağıdaki şekille izah edilmiştir.

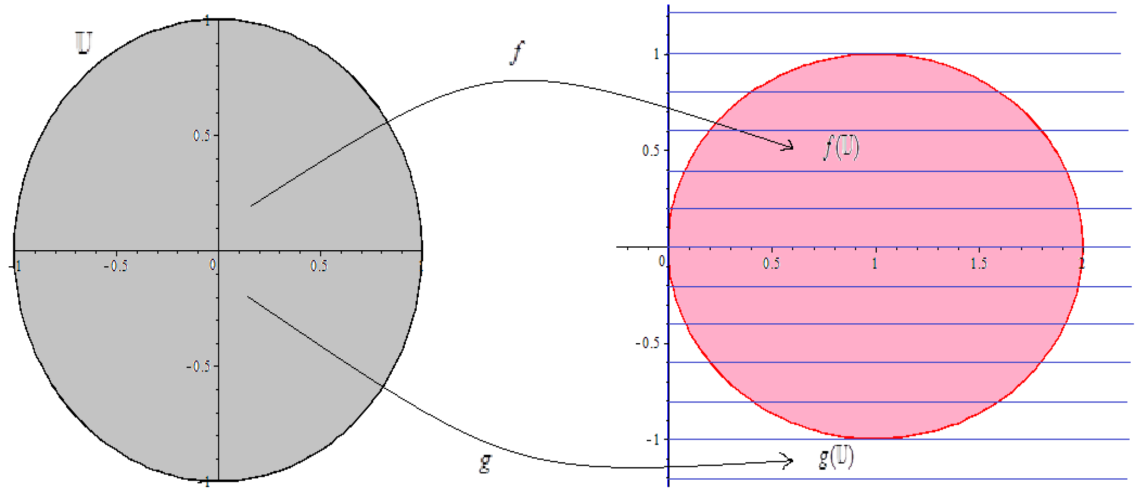


Şekil 2.2. $f \prec g$ Subordinasyonu

Örneğin; $\mathbb{U}$ da analitik olan $f(z) = 1 + z$ ve $g(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$ fonksiyonlarını göz önüne alalım. f nin $\mathbb{U}$ da g ye subordine olması için $\forall z \in \mathbb{U}$ için $f(z) = g(\omega(z))$ olacak şekilde bir $\omega \in \Omega$ fonksiyonunun varlığını göstermeliyiz. Böylece,

$$f(z) = g(\omega(z)) \Rightarrow 1 + z = \frac{1+\omega(z)}{1-\omega(z)} \Rightarrow \omega(z) = \frac{z}{z+2}$$

bulunur. $\omega(0) = 0$ ve $|\omega(z)| = \left|\dfrac{z}{z+2}\right| \leq \dfrac{1}{|z+2|} \leq 1$ olup $\omega \in \Omega$ dır. Dolayısıyla $f \prec g$ dir. Ayrıca g ünivalent olduğundan $f(0) = g(0)$ ve $f(\mathbb{U}) \subseteq g(\mathbb{U})$ dur. Bu durum aşağıdaki şekilde açık olarak görülebilir.



Şekil 2.3. $1+z \prec \dfrac{1+z}{1-z}$

Teorik olarak subordinasyonun buradaki anlamı, özelliklerini bilmediğimiz bir fonksiyonu özelliği bilinen bir fonksiyon yardımıyla incelemektir.

Subordinasyon prensibi: Eğer f fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik ve ünivalent, g fonksiyonu da $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik bir fonksiyon ve ayrıca $g(0)=f(0)$, $g(\mathbb{U})\subset f(\mathbb{U})$ ise bu durumda $\mathbb{U}_r$ diskinde her $r<1$ için $|g'(0)|\leq|f'(0)|$ ve $g(\mathbb{U}_r)\subset f(\mathbb{U}_r)$ dir (Duren 1983).

Özellikle, eğer $f \prec g$ ise

$$\max_{|z|\leq r}|f(z)|\leq \max_{|z|\leq r}|g(z)|, \quad (r\in(0,1))$$

yazılır. Ayrıca

$$p(z)\in\mathcal{P} \Leftrightarrow p(z)\prec\frac{1+z}{1-z}$$

ve

$$\phi(z)\in\Omega \Leftrightarrow \phi(z)\prec z$$

olmasıdır.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu başlık altında tezde kullanılan temel kavramlardan bahsedilmiştir. Bunlardan bahsederken Geometrik Fonksiyonlar Teorisine önemli katkıları olmuş matematikçiler ve onların bu katkılarından söz etmemek haksızlık olur. Bunlardan, hakkında ilk söz edeceğimiz 1893-1968 yılları arasında yaşamış Charles Loewner dir.

Loewner 1923 yılında, düzlemde birim diski bir yayın tümleyeni üzerine dönüştüren fonksiyonlardan yola çıkarak single-slit dönüşümlerin önemini ortaya çıkarmıştır. Single-slit dönüşümlerin tümü $\mathcal{S}$ sınıfında yoğun olduklarından dolayı, Caratheodory yakınsaklık teoreminin, single-slit dönüşümlerde, özellikle bu dönüşümlerin parametrik temsillerinin oluşturulmasında önemli bir rolü vardır. Ayrıca Loewner'in diğer bir önemli çalışması da bütün single-slit dönüşümleri içeren $\mathcal{S}$ nin yoğun bir alt sınıfında bir parametrik temsil ile verilen fonksiyonlar için bir diferensiyel denklem kurması olmuştur. Bu denklem diğer yöntemlerle kolaylıkla elde edilemeyen kesin eşitsizlikleri daha kolay göstermek için önemli bir araçtır. Özellikle 1985 yılında ünlü Bieberbach tahmininin ispatında merkezi bir rol oynadığı da bilinen bir gerçektir. Kullanılan bu metot literatürde Loewner metodu olarak bilinmektedir. Kufarev (1947) Loewner diferensiyel denkleminin daha genel bir halini ve Pommerenke (1965) Loewner zincirler metodunu tanımlayarak verilen bir fonksiyonun ünivalentliğinin incelenmesinde, temel olarak Loewner diferensiyel denklemini içeren önemli bir teorem vermiştir.

3.1. Caratheodory Yakınsaklık Teoremi

$D_1, D_2, ...$ bölgeleri $\mathbb{C}$ kompleks düzlemde orijini içeren $\mathbb{C}$ den farklı basit bağlantılı bölgelerin bir dizisi olsun. Ayrıca $w = f_n(z)$ fonksiyonu $f_n(0) = 0$ ve $f_n'(0) > 0$ olacak biçimde $\mathbb{U}$ birim diskini D_n üzerine konform olarak dönüştürsün. Carathedory yakınsaklık teoremi, f_n fonksiyon dizilerinin analitik davranışı ile bunların D_n değer kümelerinin geometrik davranışı arasında bir bağlantı kurar. Teorem, D_n bölgelerinin oluşturduğu dizinin yakınsaklığı ile alakalıdır. Burada iki durum vardır. İlk olarak, orijinin D_n bölgelerinin arakesitinin bir iç noktası olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\{D_n\}$ dizisinin çekirdeği orijini ihtiva eden en büyük D bölgesidir. Ayrıca D nin her kompakt alt kümesi D_n bölgelerinin sonlu sayıdaki bölgesinde olacaktır. Son olarak, eğer orijin D_n bölgelerinin bir iç noktası değilse $\{D_n\}$ dizisinin çekirdeği $D=\{0\}$ dır. $\{D_n\}$ dizisinin her alt dizisi aynı çekirdeğe sahipse, bu durumda $\{D_n\}$ dizisi bu dizinin çekirdeği olan D ye yakınsaktır denir.

Teorem 3.1.1 (Caratheodory yakınsaklık teoremi): $\{D_n\}$, $n=1,2,...$ için $0 \in D \subset \mathbb{C}\,(D \neq \mathbb{C})$ olacak şekilde basit bağlantılı bölgelerin bir dizisi olsun. f_n fonksiyonları da $f_n(0)=0,\ f_n'(0)>0$ şartları altında $\mathbb{U}$ birim diskini D_n üzerine konform olarak dönüştürsün. Ayrıca D de $\{D_n\}$ dizisinin çekirdeği olsun. Bu durumda $\mathbb{U}$ diskinin her kompakt alt kümesinde $f_n \to f$ yakınsamasının düzgün olması için gerek ve yeterli şart $D_n \to D \neq \mathbb{C}$ olmasıdır. Burada yakınsamanın iki farklı durumu vardır. Eğer $D=\{0\}$ ise bu durumda $f=0$ dır. Eğer $D \neq \{0\}$ ise bu durumda da D basit bağlantılı bir bölgedir. Ayrıca $f:\mathbb{U} \to D$ konform bir dönüşüm ve D nin her kompakt alt kümesinde $f_n^{-1} \to f^{-1}$ yakınsaması düzgündür (Graham and Kohr 2003).

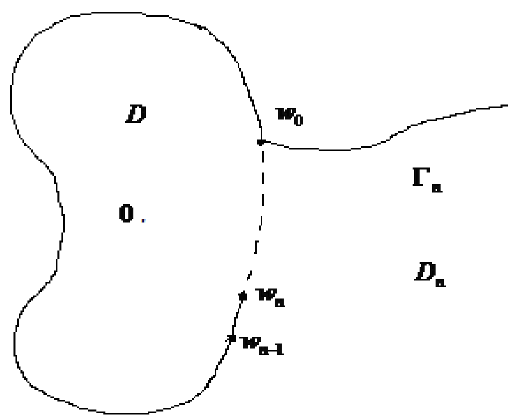
3.2. Slit Dönüşümlerin Parametrik Temsili

Slit dönüşüm, bir bölgeyi Jordan yaylarının bir kümesi çıkarılmış kompleks düzlem üzerine konform olarak resmeden bir dönüşümdür. Single-slit dönüşüm ise görüntü kümesi bir Jordan yayının tümleyeni olan bir slit dönüşümdür. Burada temel olarak $\mathbb{U}$ birim diski üzerinde tanımlanmış single-slit dönüşümlerle ilgilenilecektir. Loewner yöntemi single-slit dönüşümlerin $\mathcal{S}$ sınıfında yoğun olma düşüncesine dayanmaktadır. Başka bir ifadeyle $\mathcal{S}$ sınıfındaki her fonksiyon, single-slit dönüşümlerle $\mathbb{U}$ diskinin kompakt alt kümeleri üzerinde $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonuna düzgün olarak yaklaştırılabilir. Aşağıdaki teorem bu düşünceyi tam olarak ifade eder.

Teorem 3.2.1: Her $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonu için $\mathbb{U}$ nun her kompakt alt kümesinde $f_n \to f$ düzgün yakınsayan $f_n \in \mathcal{S}$ single-slit dönüşümlerin bir dizisi vardır (Duren 1983).

Loewner teoride önemli bir yere sahip olan single-slit dönüşümlerin Loewner (yada parametrik) temsili aşağıdaki gibidir.

$f \in \mathcal{S}$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskini sonlu bir w_0 noktasından sonsuzluğa uzanan Γ Jordan yayının tümleyeni olan D bölgesi üzerine dönüştürsün. $0 \le t < T$ olmak üzere $w = \psi(t)$ fonksiyonu, $s \ne t$ için $\psi(0) = w_0$ ve $\psi(s) \ne \psi(t)$ şartları ile Γ eğrisinin sürekli bir parametrik temsili olsun. Γ_t, Γ nın $\psi(t)$ den ∞ a kadar olan kısmı ve D_t de Γ_t nin tümleyeni olsun. Bu takdirde eğer $s < t$ ise $D_s \subset D_t$ ve $D_0 = D$ olur.



Şekil 3.1. Γ_n Jordan yayı

Diğer bir taraftan

$$g(z,t) = \beta(t)\left\{z + b_2(t)z^2 + b_3(t)z^3 + \ldots\right\},$$

$g(0,t)=0$ ve $g'(0,t)=\beta(t)>0$ şartlarını sağlayan ve $\mathbb{U}$ birim diskini D_t üzerine konform olarak dönüştüren bir fonksiyon olsun. g fonksiyonunun Taylor katsayılarının tümü, Cauchy formülü ve Caratheodory yakınsama teoreminde gösterildiği gibi t nin sürekli fonksiyonlarıdır. Özellikle $\beta(t)$ sürekli bir fonksiyondur. Ayrıca $g(z,0)=f(z)$ olduğundan $\beta(0)=1$ olacağı açıktır. Schwarz teoreminin değişik bir yorumu olan subordinasyon prensibinden $\beta(t)$ nin kesin olarak artan olduğu görülür. Çünkü $s<t$ ise $D_s \subset D_t$ $\left(D_s \neq D_t\right)$ olduğundan subordinasyonun tanımından her $z\in\mathbb{U}$ için $g(z,s)=g(\phi(z),t)$ olacak şekilde bir $\phi(0)=0$ ve $|\phi(z)|<1$ şartlarını sağlayan $\phi:\mathbb{U}\to\mathbb{U}$ fonksiyonu vardır. Burada ϕ bir Schwarz fonksiyonu olduğundan subordinasyon prensibinden $|\phi'(0)|<1$ ve $|\phi(z)|<|z|$ (burada kesin eşitsizliğinin olmasının sebebi $D_s \neq D_t$ olmasından dolayıdır) eşitsizlikleri sağlanır. Böylece

$$\beta(s)=g'(0,s)=\phi'(0)g'(\phi(0),t)=\phi'(0)g'(0,t)<g'(0,t)=\beta(t)$$

elde edilir. Burada $\phi'(0)<1$ olduğu kullanıldı. Çünkü $g'(0,s)=\beta(s)>0$ olduğundan $\phi'(0)>0$ dır. Sonuç olarak $\beta(t)$ nin kesin olarak artan olduğu görülür. Böylece Γ eğrisinin parametrik temsili $0\le t<T$ olmak üzere $\beta(t)=e^t$ olarak yeniden seçilebilir. Bunu görmek için $w=\tilde{\psi}(s)=\psi(\sigma(s))$ ifadesi Γ nın yeni bir parametrizasyonu, $\tilde{\beta}(s)=\beta(\sigma(s))$ verilen bir baş katsayısı olsun. Bu takdirde eğer $\sigma(s)=\beta^{-1}(e^s)$ olarak seçilirse $\tilde{\beta}(s)=e^s$ olur. Parametrik temsilin bu seçimi ile son nokta olan T sonsuz olmalıdır. Bu durum, aşağıdaki ifadeden daha kolay bir biçimde anlaşılabilir. M pozitif bir sayı olsun. Bu takdirde Γ_t, yeteri kadar T ye yakın tüm t değerleri için $|w|=M$ çemberinin tamamıyla dışında kalır. Maksimum modül teoreminden

$$\left|\frac{z}{g(z,t)}\right|\le\frac{1}{M}, \quad (z\in\mathbb{U})$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür. Özellikle T ye yeteri kadar yakın tüm t değerleri için

$$M\le|g'(0,t)|=e^t$$

yazılır. M keyfi olduğundan $t\to T$ iken $e^t\to\infty$ olduğunu gösterir. Böylece $T=\infty$ olur.

Özet olarak, çıkarılmış Γ yayı için $w=\psi(t)$ parametrik temsili

$$g(z,t)=e^{t}\left\{z+\sum_{n=2}^{\infty}b_n(t)z^n\right\},\quad (0\le t<\infty) \tag{3.1}$$

biçiminde seçilir. Buna Γ nın standart parametrizasyonu denir. Burada her $b_n(t)$ katsayısı t nin sürekli bir fonksiyonudur. Şimdi $\mathbb{U}$ birim diskini, $\mathbb{U}-\{\mathbb{U}$ nun sınırından uzanan bir yay$\}$ kümesine konform olarak dönüştüren

$$L(z,t)=g^{-1}(f(z),t)=e^{-t}\left\{z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n(t)z^n\right\},\quad (0\le t<\infty) \tag{3.2}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Ayrıca $L(z,0)=z$ bir özdeşlik fonksiyonudur. Her bir $a_n(t)$ katsayısı, $b_2(t),...,b_n(t)$ nin bir polinom fonksiyonudur. Böylece $a_n(t)$ de sürekli bir fonksiyondur. Dolayısıyla $t\to\infty$ iken

$$e^{t}L(z,t)\to f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+...$$

yakınsamasının $\mathbb{U}$ birim diskinin kompakt her alt kümesi üzerinde düzgün olduğu ve bunun da $a_n(t)\to a_n$ olmasını gerektireceği görülebilir.

Şimdi $\mathcal{S}$ sınıfındaki single-slit dönüşümler için yapısal bir formül sağlayan Loewner yöntemi için temel oluşturan aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 3.2.2: $L\in\mathcal{S}$ ve Γ Jordan yayı çıkarılmış bir single-slit dönüşüm olsun. $0\le t<\infty$ olmak üzere $w=\psi(t)$, Γ nın standart parametrizasyonu ve $L(z,t)$ de (3.2) deki gibi tanımlanmış olsun. Bu takdirde $L(z,t)$ fonksiyonu

$$\frac{\partial L(z,t)}{\partial t}=-L(z,t)\frac{1+\kappa L(z,t)}{1-\kappa L(z,t)} \tag{3.3}$$

diferensiyel denklemini sağlar. Burada $\kappa=\kappa(t)$, $0\le t<\infty$ olmak üzere $|\kappa(t)|=1$ eşitliğini sağlayan kompleks değerli sürekli bir fonksiyondur. Ayrıca, $\mathbb{U}$ birim diskinin kompakt her alt kümesi üzerinde

$$\lim_{t\to\infty}e^{t}L(z,t)=f(z) \tag{3.4}$$

yakınsaması düzgündür (Duren 1983).

Yukarıda verilen (3.3) diferensiyel denklemi Loewner adi diferensiyel denklemi olarak bilinmektedir. Daha sonra Kufarev (1943), (3.3) denklemini daha genel olarak $p \in \mathcal{P}$ olmak üzere

$$\frac{\partial L(z,t)}{\partial t} = -L(z,t)\,p\big(L(z,t),t\big)$$

biçiminde vermiştir.

3.3. Subordinasyon ve Loewner Zincirleri

Bu bölümde ilk olarak Loewner zincirlerini diğer bir ifadeyle ünivalent subordinasyon zincirlerini tanımlayarak, bunların bazı özelliklerini vereceğiz. Bu konuda ilk çalışma 1965 yılında Pommerenke tarafından verilmiştir.

Kompleks analizde önemli çalışmalarıyla tanınan Christian Pommerenke, 17 Aralık 1933 yılında Copenhagen da doğmuştur. 1954-1958 yıllarında Göttingen Üniversitesinde öğrenim görmüş, 1957 yılında doktorasını tamamlamıştır. 1958-1964 yılları arasında asistan, 1961-1962 yılları arasında Michigan Üniversitesinde yardımcı doçent, 1962-1963 yılları arasında Harvard Üniversitesinde misafir öğretim üyesi, 1967 yılından itibaren ise Berlin Teknik Üniversitesinde profesör olarak görev yapmıştır.

Loewner zincirler teorisinde, eğer L fonksiyonu $\mathbb{U}$ da analitik ve aynı zamanda başka bir değişkene de (reel) bağlı bir fonksiyon ise $z \in \mathbb{U}$ olmak üzere $\dfrac{\partial L(z,t)}{\partial z}$ kısmi türevi kısalık olması açısından $L'(z,t)$ olarak gösterilir. Bu tezde de yukarıdaki kısmi türev gösterimi yerine $L'(z,t)$ gösterimi tercih edilmiştir.

Tanım 3.3.1: $L : \mathbb{U} \times [0,\infty) \to \mathbb{C}$ fonksiyonu verilsin. Eğer, $L(z,t)$ fonksiyonu için

(i) $L(z,t)$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ da analitik,

(ii) Her $t \geq 0$ için $L'(0,t)$ $\left(L'(0,t) \neq 0\right)$ sürekli bir fonksiyon, $\left|L'(0,t)\right|$ kesin artan ve $t \to \infty$ iken $L'(0,t) \to \infty$,

(iii) Her $z \in \mathbb{U}$ ve $0 \leq s \leq t < \infty$ için $L(z,s) \prec L(z,t)$

şartları sağlanıyorsa $L(z,t)$ fonksiyonuna subordinasyon zinciri denir (Graham and Kohr 2003).

Burada, $L(z,s) \prec L(z,t),\ 0 \leq s \leq t < \infty$ subordinasyonunun anlamı şudur:

$$L(z,s) = L(\upsilon(z,s,t),t), \quad (z \in \mathbb{U},\ 0 \leq s \leq t < \infty) \tag{3.5}$$

olacak şekilde $\upsilon = \upsilon(z,s,t)$ Schwarz fonksiyonlarının bir ailesinin var olmasıdır. Buradaki $\upsilon = \upsilon(z,s,t)$ fonksiyonuna subordinasyon zinciri için geçiş fonksiyonu denir. Eğer her $t \geq 0$ için $L(z,t)$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ da ünivalent ise bu durumda $L(z,t)$ subordinasyon zincirine **Loewner zinciri** (ünivalent subordinasyon zinciri) denir. Burada $L(0,t) = 0,\ L'(0,t) = e^t,\ t \geq 0$ şartlarına $L(z,t)$ subordinasyon zincirinin normalleştirme şartları denir. Tanım 3.3.1 den açıktır ki $L(z,t)$ fonksiyonu, subordinasyon zinciri olması durumunda $t \geq 0$ için $\mathbb{U}$ da,

$$L(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) z^n = a_0(t) + a_1(t)z + a_2(t)z^2 + \ldots \tag{3.6}$$

şeklinde bir açılımına sahiptir. Bu seri genel subordinasyon zinciri olarak adlandırılır. Ayrıca normalleştirme şartları altında genel subordinasyon zinciri

$$L(z,t) = e^t z + a_2(t) z^2 + \ldots$$

şeklinde olur. Buna standart subordinasyon zinciri denir.

Örneğin; $L(z,t) = \dfrac{e^t z}{(1-z)^2}$ fonksiyonu bir Loewner zinciridir.

$L(z,t)$ Loewner zinciri için, L_t fonksiyonu $L_t = L(z,t)$ şeklinde tanımlanan bir ünivalent fonksiyon olsun. Bu Loewner zincirini, $\mathbb{U}$ da ünivalent fonksiyonların $\{L_t\}_{t \in [0,\infty)}$ parametrelenmiş bir ailesi olarak düşünebiliriz. Burada L_0 ilk eleman ve $t \to \infty$ iken fonksiyonların görüntüleri de kompleks düzleme doğru genişler. Ayrıca $L(z,t)$ bir Loewner zinciri ise $\forall z \in \mathbb{U}$ ve $0 \le s \le t < \infty$ için $L(z,s) = L(\upsilon(z,s,t),t)$ olacak şekilde tek bir $\upsilon = \upsilon(z,s,t)$ Schwarz fonksiyonlarının ailesi vardır. Normalleştirme şartları altında $0 \le s \le t < \infty$ için $\upsilon'(0,s,t) = e^{s-t}$ yazılır. Bunun yanı sıra L_t ve L_s fonksiyonları $\mathbb{U}$ da ünivalent olduklarından, $\upsilon(z,s,t)$ geçiş fonksiyonu da $\mathbb{U}$ da ünivalenttir. Yukarıda verilenlerden $L(z,t)$ subordinasyon zincirinin $\upsilon = \upsilon(z,s,t)$ geçiş fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir:

(i) $\upsilon(z,s,t)$ ünivalent ve $\upsilon(0,s,t) = 0$,

(ii) Her $z \in \mathbb{U}$ için $|\upsilon(z,s,t)| \le |z|$ ve $\upsilon'(0,s,t) = e^{s-t}$,

(iii) Her $z \in \mathbb{U}$ için $\upsilon(z,s,s) = z$,

(iv) Eğer $s \le t \le u$ ise $\forall z \in \mathbb{U}$ için $\upsilon(z,s,u) = \upsilon\big(\upsilon(z,s,t),t,u\big)$.

Aşağıdaki eşitsizlikler, Loewner (normalleştirilmiş) zincirinin, t ye göre yerel Lipschitz sürekli ve z ye göre ise yerel düzgün sürekli olduğunu göstermek açısından oldukça kullanışlıdır.

Lemma 3.3.2: Eğer $L(z,t)$ bir Loewner zinciri ise bu durumda aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır (Graham and Kohr 2003):

$$e^t \frac{|z|}{\left(1+|z|\right)^2} \le |L(z,t)| \le e^t \frac{|z|}{\left(1-|z|\right)^2}, \quad (z \in \mathbb{U}, t \ge 0) \quad \text{(Growth)} \tag{3.7}$$

$$e^t \frac{1-|z|}{\left(1+|z|\right)^3} \le |L'(z,t)| \le e^t \frac{1+|z|}{\left(1-|z|\right)^3}, \quad (z \in \mathbb{U}, t \ge 0) \quad \text{(Distortion)} \tag{3.8}$$

$$|L(z,t) - L(z,s)| \le \frac{8|z|}{\left(1-|z|\right)^4}(e^t - e^s), \quad (z \in \mathbb{U}, 0 \le s \le t < \infty). \tag{3.9}$$

Teorem 3.3.3: $\mathcal{S}$ sınıfındaki her f fonksiyonu için $\mathbb{U}$ diskinde $L(z,0) = f(z)$ olacak şekilde bir Loewner zinciri vardır (Graham and Kohr 2003).

Teorem 3.3.4: Loewner zincirlerinin her $\{L_n(z,t)\}$ dizisinin bir alt dizisi, $t \geq 0$ için $\mathbb{U}$ birim diskinde bir Loewner zincirine yerel düzgün yakınsar (Graham and Kohr 2003).

3.4. Loewner Diferensiyel Denklemi

Bu kesimde Loewner teorisinin ana unsurlarından biri olan Loewner diferensiyel denklemini tanıtacağız. Bu denklemin iki farklı biçimi vardır, bunlardan biri Loewner zincirine diğeri de geçiş fonksiyonuna bağlıdır. Bu denklemlerin her ikiside t parametresine bağlı $\mathcal{P}$ sınıfına ait bir fonksiyonu içerir. Aslında Loewner zinciri bir türlü genişlemeyi temsil eder.

Teorem 3.4.1: $\omega(z,t)$ fonksiyonu $t \in [0,1]$ için $\omega(0,t) = 0$ şartıyla $\mathbb{U}$ da analitik bir fonksiyon olsun. Ayrıca $|z| < 1, 0 \leq t \leq 1$ için $|\omega(z,t)| < 1$ ve $|z| < 1$ için $\omega(z,0) = z$ olduğunu kabul edelim. ρ pozitif bir sayı olmak üzere eğer

$$\omega(z) = \lim_{t \to 0} \left[\frac{\omega(z,t) - z}{zt^{\rho}} \right]$$

limiti var, $\mathbb{U}$ da analitik ve $\Re\omega(0) \neq 0$ ise bu durumda $|z| < 1$ için $\Re\omega(z) < 0$ dır (Graham and Kohr 2003).

Bir sonraki teoreme geçmeden bu teoremde geçen ölçülebilir fonksiyon kavramı hakkında kısaca bilgi verelim. Ψ boş olmayan bir küme ve $\mathcal{B}$ de bu kümenin alt kümelerinin bir ailesi olsun. Eğer $\mathcal{B}$ ailesi için

(i) $\Psi \in \mathcal{B}$

(ii) $B \in \mathcal{B} \Rightarrow B^t \in \mathcal{B}$ (B^t, B nin tümleyeni)

(iii) Her $i \in \mathbb{N}$ için $B_i \in \mathcal{B} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{B}$

şartları sağlanıyorsa, $\mathcal{B}$ ye Ψ üzerinde bir $\sigma-$cebiri denir. $(\Psi, \mathcal{B})$ ikilisine ölçülebilir uzay, $\mathcal{B}$ deki herbir kümeye ise $\sigma-$ölçülebilir (veya kısaca ölçülebilir) küme denir. Ψ

ölçülebilir bir küme ve $f(x)$ de bu kümede tanımlı reel değerli bir fonksiyon olsun. Eğer f yi K gibi bir reel sayıdan büyük yapan x noktasının kümesi ölçülebilirse, yani

$$\{x \in \Psi : f(x) > K\}$$

kümesi ölçülebilirse f ye bu kümede ölçülebilir fonksiyon denir.

Teorem 3.4.2: $p(z,t)$ fonksiyonu her $t \geq 0$ ve her $z \in \mathbb{U}$ için $\mathcal{P}$ sınıfına ait ölçülebilir bir fonksiyon olsun. O halde her $z \in \mathbb{U}$ ve $s \geq 0$ için,

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t} = -\upsilon p(\upsilon,t), \quad t \geq s, \; \upsilon(z,s,s) = z, \tag{3.10}$$

sınır değer problemi, $\upsilon(t) = \upsilon(z,s,t) = e^{s-t}z + ...$ biçiminde tek bir yerel mutlak sürekli çözüme sahiptir. Bunun yanı sıra $z \in \mathbb{U}$ ve $s \geq 0$ için, $\upsilon(z,s,t)$ fonksiyonu z ye göre yerel düzgün sürekli, $t \geq s$ için ise Lipschitz süreklidir. $\upsilon(z,s,t)$ fonksiyonları $0 \leq s \leq t < \infty$ için ünivalent Schwarz fonksiyonlarıdır ve her $s \geq 0$ için $\mathbb{U}$ birim diskinde

$$L(z,s) = \lim_{t\to\infty} e^t \upsilon(z,s,t)$$

yerel düzgün limiti vardır. Ayrıca, $L(z,s)$ ünivalent ve her $z \in \mathbb{U}$, $0 \leq s \leq t < \infty$ için $L(\upsilon(z,s,t),t) = L(z,s)$ dir. Böylece (3.10) ile verilen $L : \mathbb{U} \times [0,\infty) \to \mathbb{C}$ fonksiyonu bir Loewner zinciridir ve her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\frac{\partial L(z,t)}{\partial t} = p(z,t) z L'(z,t), \quad (t \geq 0) \tag{3.11}$$

diferensiyel denklemini sağlar (Graham and Kohr 2003).

Burada (3.11) ile tanımlanan diferensiyel denkleme Loewner kısmi diferensiyel denklemi veya kısaca Loewner diferensiyel denklemi denir.

Teorem 3.4.3: $t \geq 0$ olmak üzere $L : \mathbb{U} \times [0,\infty) \to \mathbb{C}$ fonksiyonu, $L(0,t) = 0$ ve $L'(0,t) = e^t$ şartlarını sağlasın. $L(z,t)$ nin bir Loewner zinciri olması için gerekli ve yeterli şart

(i) Her $t \geq 0$ için $L(z,t)$ fonksiyonu $\mathbb{U}_r$ diskinde analitik, yerel mutlak sürekli; $z \in \mathbb{U}_r$ ye göre yerel düzgün sürekli ve

$$\left|L(z,t)\right| \leq Me^t, \quad \left(|z| < r, t \geq 0\right) \tag{3.12}$$

olacak şekilde $r \in (0,1)$ ile $M > 0$ sabiti vardır.

(ii) $\forall z \in \mathbb{U}$ için $\left[0,\infty\right)$ aralığı üzerinde ölçülebilir ve her $z \in \mathbb{U}_r$ için

$$\frac{\partial L(z,t)}{\partial t} = zL'(z,t)p(z,t), \quad (t \geq 0) \tag{3.13}$$

Loewner diferensiyel denklemini sağlayan her $t \geq 0$ için $p(z,t) \in \mathcal{P}$ olacak şekilde $p(z,t)$ fonksiyonu vardır (Pommerenke 1965, 1975; Graham and Kohr 2003).

Standart subordinasyon zinciri için verilen bu teorem genel subordinasyon zinciri için aşağıdaki biçimdedir.

Teorem 3.4.4 (Pommerenke Teoremi): Her $t \geq 0$ için $L(z,t) = a_1(t)z + a_2(t)z^2 + ...$ fonksiyonu $\mathbb{U}_r$ diskinde bir analitik fonksiyon olsun. Eğer,

(i) $L(z,t)$ fonksiyonu, $t \in [0,\infty)$ da yerel mutlak sürekli, $z \in \mathbb{U}_r$ ye göre yerel düzgün sürekli,

(ii) $a_1(t)$ fonksiyonu $[0,\infty)$ aralığı üzerinde

$$a_1(t) \neq 0, \quad \lim_{t\to\infty}\left|a_1(t)\right| = \infty$$

şartlarını sağlayan kompleks değerli sürekli bir fonksiyon ve $\left\{L(z,t)/a_1(t)\right\}_{t\geq 0}$ ifadesi $\mathbb{U}_r$ de bir normal aile,

(iii) Her $z \in \mathbb{U}_r$ ve $t \geq 0$ için $\Re p(z,t) > 0$ olacak şekilde

$$z\frac{\partial L(z,t)}{\partial z} = p(z,t)\frac{\partial L(z,t)}{\partial t} \tag{3.14}$$

diferensiyel denklemini sağlayan bir $p : \mathbb{U} \times [0,\infty) \to \mathbb{C}$ fonksiyonu var ise bu durumda $t \geq 0$ için $L(z,t)$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde bir analitik ve ünivalent genişlemeye sahiptir (Pommerenke 1965; Graham and Kohr 2003).

3.5. Birim Diskte Temel Ünivalentlik Kriterleri Üzerine Yapılan İlk Çalışmalar

Geçmişten günümüze kadar bu konu üzerine yapılan önemli çalışmalar aşağıda kısaca özetlenmiştir.

Teorem 3.5.1: Eğer f fonksiyonu bir D konveks bölgesinde analitik ve $\Re f'(z) > 0$ ise bu durumda f, D de ünivalenttir (Alexander 1915; Noshiro 1934-1935; Warschawski 1935).

Teorem 3.5.2: $f \in \mathcal{A}$ olsun. Eğer her $z \in \mathbb{U}$ için

$$(1-|z|^2)\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| \le 1$$

eşitsizliği sağlanırsa f fonksiyonu $\mathbb{U}$ da ünivalenttir (Becker 1972).

Teorem 3.5.3: $f \in \mathcal{A}$ olsun. Ayrıca $|c| \le 1, c \ne -1$ şartlarını sağlayan bir $c \in \mathbb{C}$ sayısını göz önüne alalım. Eğer her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\left|c|z|^2 + (1-|z|^2)\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| \le 1$$

eşitsizliği sağlanırsa f fonksiyonu $\mathbb{U}$ da ünivalenttir (Ahlfors 1974).

Teorem 3.5.4: $f \in \mathcal{A}$ olsun. Ayrıca, $c \in \mathbb{C}$ ve $s = a + ib,\ \ a > 0$ olacak şekilde s kompleks sayısı verilsin. Eğer

$$M = \begin{cases} a|s| + (a-1)|s+c|, & a \in (0,1) \\ |s|, & a \ge 1 \end{cases}$$

olacak şekilde her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\left|c|z|^2 + s - a\left(1-|z|^2\right)\left[s\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) + (1-s)\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]\right| \le M$$

eşitsizliği sağlanırsa f fonksiyonu $\mathbb{U}$ da ünivalenttir (Ruscheweyh 1976).

Teorem 3.5.5: $f \in \mathcal{A}$ ve $p \in \mathcal{P}$ fonksiyonları verilsin. Eğer her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\left| \frac{p(z)-1}{p(z)+1}|z|^2 - (1-|z|^2)\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)} + \frac{zp'(z)}{p(z)+1} \right) \right| \leq 1$$

eşitsizliği sağlanırsa f fonksiyonu $\mathbb{U}$ da ünivalenttir (Lewandovski 1981).

İlk defa Pascu (1987) bir integral operatörü için Becker'ın kriterinin genelleştirmesini Loewner metodu (subordinasyon zincirleri) kullanarak aşağıdaki gibi vermiştir.

Teorem 3.5.6: $f \in \mathcal{A}$ ve $\Re(\alpha) > 0$ şartı alında $\alpha \in \mathbb{C}$ sayısı verilsin. Eğer $\forall z \in \mathbb{U}$ için

$$\frac{1-|z|^{2\Re(\alpha)}}{\Re(\alpha)} \left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right| \leq 1$$

eşitsizliği sağlanırsa,

$$F_\alpha(z) = \left(\alpha \int_0^z u^{\alpha-1} f'(u)du \right)^{1/\alpha}$$

şeklinde tanımlanan F_α integral operatörü $\mathbb{U}$ da ünivalenttir (Pascu 1987).

Kompleks analizin temel araçlarından biri de bir analitik fonksiyonun Schwarz türevidir. Schwarz türevi, ilk defa 1876 yılında H. A. Schwarz'ın dairesel yaylar ile sınırlandırılmış çokgenler yardımıyla, konform dönüşümler için Schwarz-Christoffel dönüşümünü genelleştirmek amacıyla yaptığı bir araştırmanın sonucunda ortaya çıkmıştır. Bir analitik ve yerel ünivalent f fonksiyonu için Schwarz türevi

$$S_f(z) = \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2 = \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2$$

biçiminde tanımlanır. Bu operatör Möbius dönüşümlerini karakterize eder. Yani $S_f(z) \equiv 0$ olması için gerekli ve yeterli şart $f = T$ olmasıdır. Burada T,

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc \neq 0$$

biçiminde verilen bir Möbius dönüşümüdür. T herhangi bir Möbius dönüşümü ise $S_{T \circ f}(z) = S_f(z)$ eşitliği yazılır. Burada "$\circ$" bilinen bileşke işlemidir. Eğer g, f ile bileşkesi $f \circ g$ biçiminde verilen herhangi bir yerel ünivalent ve analitik fonksiyon ise bu durumda

$$S_{f \circ g} = \left(S_f \circ g\right)(g')^2 + S_g$$

eşitliği yazılır.

Becker'ın ünivalentlik kriteri kadar önemli bir diğer kriter de yukarıda ifade edilen Schwarz türevini içeren ve ilk defa 1949 yılında Nehari tarafından verilen kriterdir. Onun anısına bu kritere Nehari kriteri denmektedir.

Teorem 3.5.7: $f \in \mathcal{A}$ olsun. Eğer her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\frac{(1-|z|^2)^2}{2}\left|S_f(z)\right| \leq 1$$

eşitsizliği sağlanırsa f fonksiyonu $\mathbb{U}$ da ünivalenttir (Nehari 1949).

Teorem 3.5.8: $f, g \in \mathcal{A}$ fonksiyonları $\mathbb{U}$ birim diskinde yerel ünivalent fonksiyonlar olsunlar. Ayrıca $S_f(z)$ ve $S_g(z)$ de sırasıyla f ve g fonksiyonlarının Schwarz türevleri olmak üzere, eğer her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\left|\frac{1}{2}(1-|z|^2)^2\left(S_f(z) - S_g(z)\right) + (1-|z|^2)\frac{\overline{z}g''(z)}{g'(z)}\right| \leq 1$$

eşitsizliği sağlanırsa f fonksiyonu $\mathbb{U}$ da ünivalenttir (Epstein 1987; Pommerenke 1986).

Teorem 3.5.9: $f, g \in \mathcal{A}$ fonksiyonları $\mathbb{U}$ birim diskinde yerel ünivalent fonksiyonlar olsun. Ayrıca $\mathbb{U}$ da $\Re h(z) \geq 1/2$ şartını sağlayan h analitik fonksiyonu verilsin. Eğer her $z \in \mathbb{U}$ için,

$$\left|\frac{h(z)-1}{h(z)}|z|^2 - (1-|z|^2)\left[\frac{zh'(z)}{h(z)} + \frac{zg''(z)}{g'(z)}\right] - \frac{1}{2}(1-|z|^2)^2\frac{z}{\overline{z}}h(z)\left[S_f(z) - S_g(z)\right]\right| \leq 1$$

eşitsizliği sağlanırsa f fonksiyonu $\mathbb{U}$ da ünivalenttir (Wesolowski 1988).

Teorem 3.5.10: $f \in \mathcal{A}$ ve $\Re(\alpha) \geq 1/2$ olacak şekilde $\alpha \in \mathbb{C}$ olsun. Ayrıca g ve h fonksiyonları da $\mathbb{U}$ birim diskinde sırasıyla $g(z) = 1 + b_1 z + ...$ ve $h(z) = c_0 + c_1 z + ...$ biçiminde tanımlanan analitik fonksiyonlar olsunlar. Eğer her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\left|\left(\frac{1}{\alpha}\frac{f'(z)}{g(z)} - 1\right) - 1\right| < 1$$

ve

$$\left|\left(\frac{1}{\alpha}\frac{f'(z)}{g(z)} - 1\right)|z|^4 + z^2\left(1-|z|^2\right)^2\left[\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\frac{f'(z)h(z)}{f(z)} + \frac{1}{\alpha}\frac{f'(z)h^2(z)}{g(z)} + \frac{g'(z)h(z)}{g(z)} - h'(z)\right]\right.$$

$$\left. + z|z|^2\left(1-|z|^2\right)\left[\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\frac{f'(z)}{f(z)} + \frac{2}{\alpha}\frac{f'(z)h(z)}{g(z)} + \frac{g'(z)}{g(z)}\right]\right| \leq |z|^2$$

eşitsizlikleri sağlanırsa f fonksiyonu $\mathbb{U}$ da ünivalenttir (Tudor 2007).

1972 yılında Ozaki ve Nunokawa yaptıkları çalışmada, temelde Nehari'nin ünivalentlik kriterine ve dolayısıyla Schwarz türevine dayanan ve bu alanda temel teşkil eden teoremlerden biri olan aşağıdaki teoremi vermişlerdir.

Teorem 3.5.11: $f \in \mathcal{A}$ olsun. Eğer her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\left|\frac{z^2 f'(z)}{f^2(z)} - 1\right| \leq 1$$

eşitsizliği sağlanırsa f fonksiyonu $\mathbb{U}$ da ünivalenttir (Ozaki and Nunokawa 1972).

Teorem 3.5.12: $f \in \mathcal{A}$ ve $m \in \mathbb{R}_+$ olsun. Eğer her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\left|\left(\frac{z^2 f'(z)}{f^2(z)} - 1\right) - \frac{m-1}{2}\right| < \frac{m+1}{2}$$

ve

$$\left|\left(\frac{z^2 f'(z)}{f^2(z)} - 1\right) - \frac{m-1}{2}|z|^{m+1}\right| \leq \frac{m+1}{2}|z|^{m+1}$$

eşitsizlikleri sağlanırsa f fonksiyonu $\mathbb{U}$ da ünivalenttir (Răducanu *et al.* 2004).

Teorem 3.5.13: $f \in \mathcal{A}$ ve $\Re(\alpha) > 0$ olacak şekilde $\alpha \in \mathbb{C}$ olsun. Eğer her $z \in \mathbb{U} \backslash \{0\}$ için

$$\left| \frac{z^2 f'(z)}{f^2(z)} - 1 \right| < 1$$

ve

$$\left| \left(\frac{z^2 f'(z)}{f^2(z)} - 1 \right) |z|^{2\alpha} + 2 \frac{1-|z|^{2\alpha}}{\alpha} \left(\frac{z^2 f'(z)}{f^2(z)} - 1 \right) \right.$$

$$\left. + \frac{\left(1-|z|^{2\alpha}\right)^2}{\alpha^2 |z|^{2\alpha}} \left[\left(\frac{z^2 f'(z)}{f^2(z)} - 1 \right) + (1-\alpha) \left(\frac{f(z)}{z} - 1 \right) \right] \right| \leq 1$$

eşitsizlikleri sağlanırsa

$$F_\alpha(z) = \left(\alpha \int_0^z u^{\alpha-1} f'(u) du \right)^{1/\alpha}$$

şeklinde tanımlı F_α integral operatörü $\mathbb{U}$ da ünivalenttir (Tudor 2008).

1969 yılında Goluzin diğerlerinden farklı bir metod izleyerek aşağıdaki kriteri vermiştir.

Teorem 3.5.14: $f \in \mathcal{A}$ olsun. Eğer her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\left| z \frac{d}{dz} \log \left(\frac{z^2 f'(z)}{f^2(z)} \right) \right| \leq \frac{|z|}{1-|z|^2}$$

eşitsizliği sağlanırsa f fonksiyonu $\mathbb{U}$ da ünivalenttir (Goluzin 1969).

Teorem 3.5.15: $f \in \mathcal{A}$ ve $\Re(\alpha) > 1/2$ olacak şekilde $\alpha \in \mathbb{C}$ verilsin. Eğer her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\left| \frac{1-\alpha}{\alpha} \left[1 - (1-|z|^2) \frac{zf'(z)}{f(z)} \right] + (1-|z|^2) z \frac{d}{dz} \log \left(\frac{z^2 f'(z)}{f^2(z)} \right) \right| \leq |z|^2$$

eşitsizliği sağlanırsa f fonksiyonu $\mathbb{U}$ da ünivalenttir (Răducanu 2004).

Teorem 3.5.16: $f \in \mathcal{A}$ olsun. Ayrıca $\alpha, \beta, c \in \mathbb{R}$ ve $m \in \mathbb{R}_+$ olmak üzere $\alpha < 0$, $-1 < c \le m - \alpha(m+1)$, $\left|\beta - \frac{m+1}{2}\right| < \frac{m+1}{2}$ şartları sağlanmış olsun. Eğer her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\Re f'(z) > \frac{m-c}{\alpha(m+1)} |f'(z)|^2, \quad (c \le m)$$

ve

$$\left|(\beta-1)\frac{zf'(z)}{f(z)} + \frac{zf''(z)}{f'(z)-\alpha} - \frac{m-1}{2}\right| \le \frac{m+1}{2}$$

eşitsizlikleri sağlanırsa, f fonksiyonu $\mathbb{U}$ da ünivalenttir (Deniz and Orhan 2011).

Teorem 3.5.17: $f \in \mathcal{A}$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$, $\Re(\alpha) > 0$ olsun. $\mathbb{U}$ birim diskinde $g(z) = 1 + a_1 z + ...$ analitik fonksiyonunu göz önüne alalım. Eğer her $z \in \mathbb{U} \backslash \{0\}$ için

$$\left|\frac{f'(z)}{g(z)} - (\alpha+1)\right| < |\alpha+1|$$

ve

$$\left|\frac{1}{\alpha+1}\left(\frac{f'(z)}{g(z)} - (\alpha+1)\right)|z|^{4\alpha} + \frac{1-|z|^{4\alpha}}{2\alpha}\left(\frac{zg'(z)}{g(z)} - \alpha\right)\right| < 1$$

eşitsizlikleri sağlanırsa

$$F_\alpha(z) = \left(\alpha \int_0^z u^{\alpha-1} f'(u)du\right)^{1/\alpha}$$

integral operatörü $\mathbb{U}$ da analitik ve ünivalenttir (Tudor 2012).

Teorem 3.5.18: $\alpha, \beta, c \in \mathbb{C}$, $\Re(\alpha) > 0$, $|\beta| < \Re(\alpha+\beta)$, $\Re(c) > -1/2$ ve $\left|\frac{\alpha c - \beta}{\alpha(1+c)}\right| \le 1$ olsun. $f \in \mathcal{A}$ için $\mathbb{U}$ birim diskinde $g(z) = 1 + b_1 z + ...$, $h(z) = c_0 + c_1 z + ...$ analitik fonksiyonlarını göz önüne alalım. Eğer her $z \in \mathbb{U} \backslash \{0\}$ için

$$\left|\frac{f'(z)}{(1+c)g(z)} - 1\right| < 1$$

ve

$$\left|\left(\frac{f'(z)}{(1+c)\,g(z)}-1\right)|z|^{2(\alpha+\beta)}+\frac{1-|z|^{2(\alpha+\beta)}}{\alpha+\beta}\left(2\frac{\alpha+\beta}{1+c}\frac{zf'(z)h(z)}{g(z)}+\frac{zg'(z)}{g(z)}-\beta\right)\right.$$

$$\left.+\frac{z^2\left(1-|z|^{2(\alpha+\beta)}\right)^2}{(\alpha+\beta)|z|^{2(\alpha+\beta)}}\left(\frac{\alpha+\beta}{1+c}\frac{f'(z)h^2(z)}{g(z)}+\frac{g'(z)h(z)}{g(z)}+(\alpha-1)\frac{h(z)}{z}-h'(z)\right)\right|\leq 1$$

eşitsizlikleri sağlanırsa $F_\alpha(z)=\left(\alpha\int_0^z u^{\alpha-1}f'(u)du\right)^{1/\alpha}$ integral operatörü $\mathbb{U}$ da analitik ve ünivalenttir (Tudor 2013).

3.6. Meromorf Fonksiyonlar İçin Temel Ünivalentlik Kriterleri Üzerine Yapılan İlk Çalışmalar

$\mathbb{U}$ kümesinde ünivalentlik kriterleri ne kadar önemli ise $\mathbb{U}^*$ kümesinde ünivalentlik kriterleri de o derece önemlidir. Bu konu üzerine yapılan önemli çalışmalar tarihsel seyir içinde aşağıda kısaca özetlenmiştir.

Teorem 3.6.1: $F\in\Sigma$ olsun. Eğer her $\zeta\in\mathbb{U}^*$ için

$$\frac{(|\zeta|^2-1)^2}{2}|S_F(\zeta)|\leq 1$$

eşitsizliği sağlanırsa F fonksiyonu $\mathbb{U}^*$ da ünivalenttir (Nehari 1949).

Teorem 3.6.2: Eğer $F\in\Sigma$ fonksiyonu her $\zeta\in\mathbb{U}^*$ için

$$|F'(\zeta)-1|\leq 1$$

eşitsizliğini sağlıyorsa $\mathbb{U}^*$ da ünivalenttir (Aksent'ev 1958).

Teorem 3.6.3: $F\in\Sigma$ olsun. Eğer her $\zeta\in\mathbb{U}^*$ için

$$(|\zeta|^2-1)\left|\frac{\zeta F''(\zeta)}{F'(\zeta)}\right|\leq 1$$

eşitsizliği sağlanırsa F fonksiyonu $\mathbb{U}^*$ da ünivalenttir (Becker 1973).

Teorem 3.6.4: $F,G\in\Sigma$ fonksiyonları $\mathbb{U}^*$ da yerel ünivalent fonksiyonlar olsunlar. Ayrıca $S_F(\zeta)$ ve $S_G(\zeta)$ de sırasıyla F ve G fonksiyonlarının Schwarz türevleri olmak üzere, eğer her $\zeta\in\mathbb{U}^*$ için

$$\left|\frac{1}{2}(|\zeta|^2-1)^2\frac{\zeta}{\bar{\zeta}}\left(S_F(\zeta)-S_G(\zeta)\right)+(|\zeta|^2-1)\frac{\zeta G''(\zeta)}{G'(\zeta)}\right|\le 1$$

eşitsizliği sağlanırsa F fonksiyonu $\mathbb{U}^*$ da ünivalenttir (Wesolowski 1991).

Teorem 3.6.5: f bir meromorf fonksiyon ve $g\in\Sigma$ olsun. Bu fonksiyonlar $\mathbb{U}^*$ kümesinde yerel ünivalent fonksiyonlar olsunlar. Ayrıca $\mathbb{U}^*$ kümesinde $\Re h(\zeta)>1/2$ şartını sağlayan $h(\zeta)=1+c_2/\zeta^2+\ldots$ analitik fonksiyonu verilsin. Eğer her $\alpha\in\mathbb{C}$ ve $\zeta\in\mathbb{U}^*$ için,

$$\left|\frac{1-h(\zeta)}{h(\zeta)}|\zeta|^2-(|\zeta|^2-1)\left[\frac{\zeta h'(\zeta)}{h(\zeta)}+(1-2\alpha)\frac{\zeta f''(\zeta)}{f'(\zeta)}+2\alpha\frac{\xi g''(\zeta)}{g'(\zeta)}\right]\right.$$
$$\left.+\alpha(|\zeta|^2-1)^2\frac{\zeta}{\bar{\zeta}}h(\zeta)\left[\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}-\frac{g''(\zeta)}{g'(\zeta)}\right)^2+\left(S_f(\zeta)-S_g(\zeta)\right)\right]\right|\le 1$$

eşitsizliği sağlanırsa f fonksiyonu $\mathbb{U}^*$ da ünivalenttir (Deniz and Orhan 2011).

3.7. Quasikonform Dönüşüm ve Quasikonform Genişleme

Düzlemdeki dönüşümlere baktığımızda, en iyi dönüşümler görüntüsü konform olan yani açıyı ve yönü koruyan dönüşümlerdir. Birçok kullanışlı özellikleri olan bu dönüşümler gerçekte kompleks analitik fonksiyonlardır. Bununla birlikte birçok kısıtlamaya da sahiptirler. Örneğin, bir dikdörtgeni başka bir dikdörtgen üzerine köşeleri köşelere dönüştürürken farklı bir açı oranı ile konform olarak dönüştüremeyiz. Buradan kullanışlı özelliklerin bazılarını koruyarak nasıl bir dönüşüm elde edebiliriz sorusu ortaya çıkar. Eğer açıları korumak zorunda olduğumuz dönüşümdeki kısıtlamayı hafifletirsek ve dönüşümün açılarını çok fazla değiştirmek zorunda olmadığımızı belirtirsek, o halde quasikonform dönüşüm olarak adlandırılan bir dönüşüm elde etmiş oluruz. Quasikonform dönüşüm ilk olarak 1928 yılında H. Grötzsch tarafından tanımlanmıştır.

Quasikonform dönüşüm tanımlanmadan önce bazı ön bilgiler verilmiştir.

Tanım 3.7.1 (Homeomorfizm): X ve Y iki topolojik uzay olmak üzere $f : X \to Y$ birebir, örten, sürekli ve terside sürekli ise f fonksiyonuna bir homeomorfizm denir.

Örnek 3.7.2: $\mathbb{R}$ sayılar kümesi $(-1,1)$ aralığına homeomorftur. Gerçekten, $f : \mathbb{R} \to (-1,1)$, $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ fonksiyonu sürekli, 1-1, örten ve f nin tersi $f^{-1} : (-1,1) \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{1-|x|}$ de sürekli olduğundan f bir homeomorfizmdir.

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ olmak üzere f dönüşümünün z ve $\bar{z}$ ye göre kısmi türevleri

$$f_z = \frac{1}{2}(u_x + v_y) + \frac{i}{2}(v_x - u_y)$$

$$f_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(u_x - v_y) + \frac{i}{2}(v_x + u_y)$$

biçimindedir.

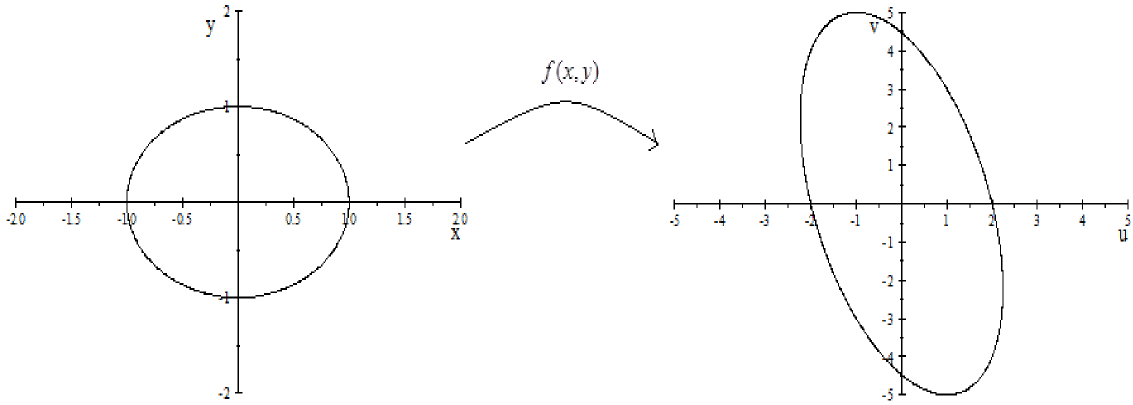
Tanım 3.7.3 (Genişleme): Bir fonksiyonun bir z noktasındaki genişlemesi

$$D_f(z) = \frac{|f_z| + |f_{\bar{z}}|}{|f_z| - |f_{\bar{z}}|} \geq 1$$

biçiminde tanımlanır (Ahlfors 1966).

Geometrik olarak genişleme, f dönüşümü altındaki bir çemberin görüntüsü olan elipsin büyük ekseninin küçük eksenine oranıdır.

Örneğin; $f(x,y) = (x-2y, 3x+4y)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu fonksiyon aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi çemberleri elipslere dönüştürür.



Şekil 3.2. Birim diskin $f(x,y)=(x-2y,3x+4y)$ fonksiyonu altındaki görüntüsü

Şimdi bu fonksiyonun genişlemesini hesaplamak için ilk önce z ve $\overline{z}$ e göre kısmi türevlerini hesaplayalım:

$$|f_z|=\left|\frac{1}{2}\left(u_x+v_y\right)+\frac{i}{2}\left(v_x-u_y\right)\right|=\left|\frac{1}{2}(1+4)+\frac{i}{2}(3+2)\right|=\frac{5}{\sqrt{2}},$$

$$|f_{\overline{z}}|=\left|\frac{1}{2}\left(u_x-v_y\right)+\frac{i}{2}\left(v_x+u_y\right)\right|=\left|\frac{1}{2}(1-4)+\frac{i}{2}(3-2)\right|=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}.$$

Bulduğumuz bu $|f_z|$ ve $|f_{\overline{z}}|$ değerlerini $D_f(z)$ de yerine yazarsak;

$$D_f(z)=\frac{|f_z|+|f_{\overline{z}}|}{|f_z|-|f_{\overline{z}}|}=\frac{5+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}\approx 2.62$$

elde ederiz.

Tanım 3.7.3 e göre bir dönüşümün konform olması için gerek ve yeter şart tüm z ler için $D_f(z)=1$, yani $|f_{\overline{z}}|=0$ olmasıdır.

Tanım 3.7.4 (Quasikonform dönüşüm): $f:\mathbb{U}\to G\subset\mathbb{C}$ fonksiyonu yön koruyan bir homeomorfizm olsun. Eğer D_f sınırlı ise f ye quasikonform dönüşüm denir (Ahlfors 1966).

Tanım 3.7.5 (*K*-Quasikonform dönüşüm): $f:\mathbb{U}\to G\subset\mathbb{C}$ fonksiyonu yön koruyan bir homeomorfizm olsun. Eğer $D_f\leq K$ $\left(1\leq K<\infty\right)$ ise f ye K-quasikonform dönüşüm denir (Ahlfors 1966).

Eğer $K=1$ ise 1-quasikonform dönüşüm konform olur.

Tanım 3.7.6: $f:\mathbb{U}\to G\subset\mathbb{C}$ fonksiyonu yön koruyan bir homeomorfizm olsun. Ayrıca, $k\left(k=\dfrac{K-1}{K+1},0\leq k<1,1\leq K<\infty\right)$ bir sabit, $f_z=\partial f/\partial z,\ f_{\bar z}=\partial f/\partial\bar z$ olmak üzere $|f_{\bar z}|\leq k|f_z|$ ve f koordinat eksenlerine paralel hemen hemen her doğru üzerinde mutlak sürekli ise f ye *k*-quasikonformdur denir.

Tanım 3.7.5 ve Tanım 3.7.6 birbirine denktir.

O halde Tanım 3.7.4 e göre, yukarıdaki örnekte verilen $f(x,y)=(x-2y,3x+4y)$ fonksiyonu bir quasikonform dönüşümdür.

Önerme 3.7.7: Ünivalentlik, konform ve quasikonform dönüşüm arasında aşağıdaki gerektirmeler doğrudur.

$$f-\textit{ünivalent}\Rightarrow f-\textit{konform}\Rightarrow f-\textit{quasikonform}$$

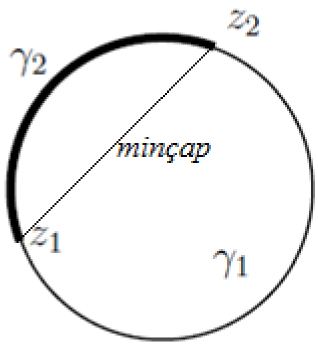
Şimdi, çalışmamızın esasını teşkil eden quasikonform genişleme ve onun geometrik anlamı üzerinde duralım.

Tanım 3.7.8 (Quasikonform genişleme): $f:\mathbb{U}\to\mathbb{C}$ bir quasikonform dönüşüm ve $F:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ herhangi bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall z\in\mathbb{U}$ için $f(z)=F(z)$ oluyorsa bu durumda F ye f nin $\mathbb{C}$ ye quasikonform genişlemesi denir.

Tanım 3.7.9: D kompleks düzlemde basit bağlantılı bir bölge olsun. Her sonlu $z_1, z_2 \in \partial D$ için $\partial D \backslash \{z_1, z_2\}$ de alınan γ_1, γ_2 eğrilerinin minumum çapı

$$\min_{j=1,2} çap(\gamma_j) = |z_1 - z_2|$$

ile tanımlanır.



Teorem 3.7.10 (Üç Nokta Prensibi): D kompleks düzlemde basit bağlantılı bir bölge olsun. γ_1 ve γ_2, $\partial D \backslash \{z_1, z_2\}$ de alınan eğriler olmak üzere $\forall z_1, z_2 \in \partial D \backslash \{\infty\}$ nokta çifti için

$$\min_{j=1,2} çap(\gamma_j) = a|z_1 - z_2|$$

olacak şekilde $a \geq 1$ sabiti varsa D bölgesi üç nokta prensibini sağlar.

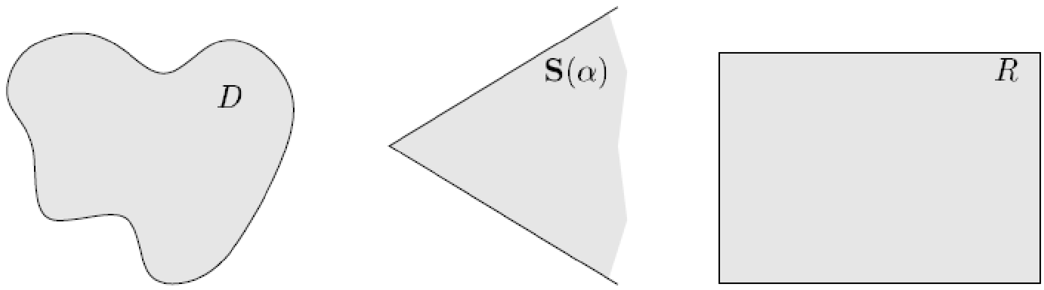
Üç nokta prensibi denilmesinin sebebi; $\partial D \backslash \{z_1, z_2\}$ deki her bir z_3 noktası için minumum çap ile

$$|z_1 - z_3| \leq a|z_1 - z_2|$$

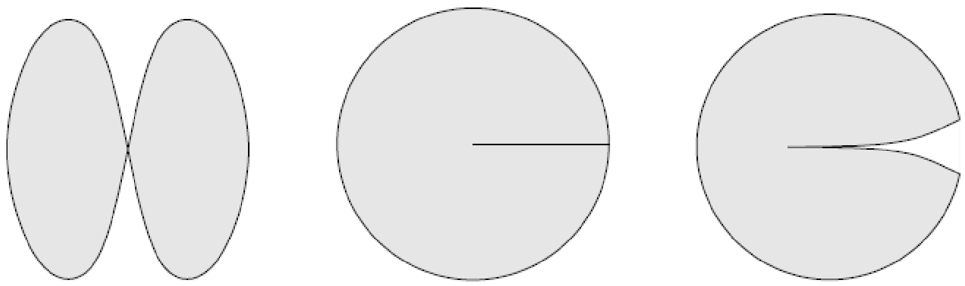
eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

Teorem 3.7.11: $\forall z_1, z_2, z_3 \in \partial f(\mathbb{U})$ için $|z_1 - z_3| \leq a|z_1 - z_2|$ olacak şekilde $a \geq 1$ sayısı varsa, o zaman f fonksiyonu quasikonform genişlemeye sahiptir (Ahlfors 1974).

Tanım 3.7.12 (Quasidisk): Bir D bölgesinin bir K-quasikonform dönüşüm altında görüntüsü bir açık disk veya yarı düzlem ise D ye K-quasidisk denir (Gehring 1982). Aşağıda quasidisk örnekleri verilmiştir.



Şekil 3.3. Quasidisk bölgeler



Şekil 3.4. Quasidisk olmayan bölgeler

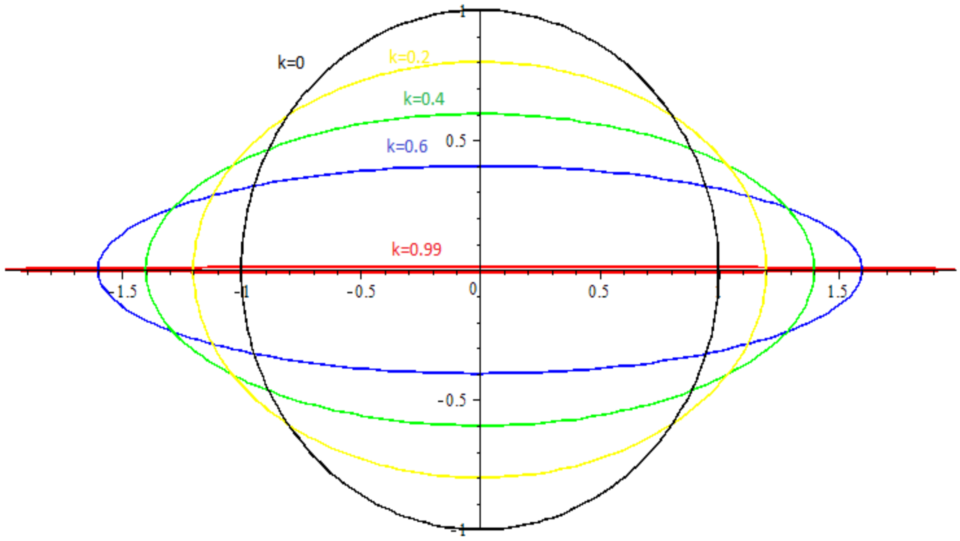
Teorem 3.7.13: Bir bölgenin quasidisk olması için gerek ve yeter şart üç nokta prensibini sağlamasıdır (Ahlfors 1963).

Teorem 3.7.14: Her quasikonform dönüşüm birim diski quasidisklere dönüştürür. Bu teoremin tersi de doğrudur (Ahlfors 1963).

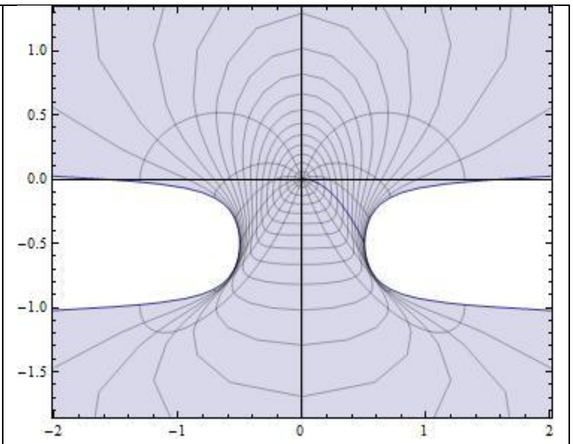
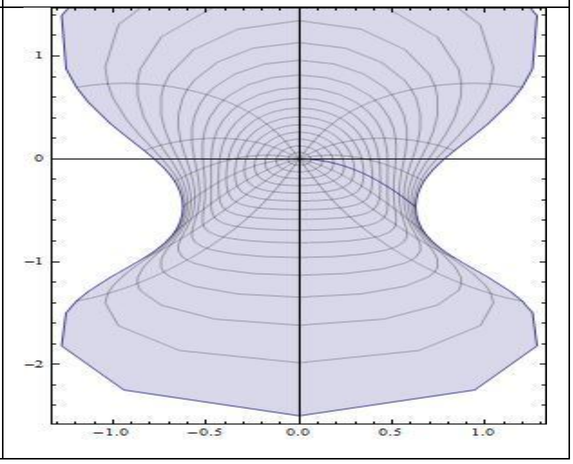
Örnek 3.7.15: $f(z) = z + kz^{-1}$, $k \in [0,1)$ $\mathbb{U}^*$ kümesinde quasikonform genişlemeye sahiptir.

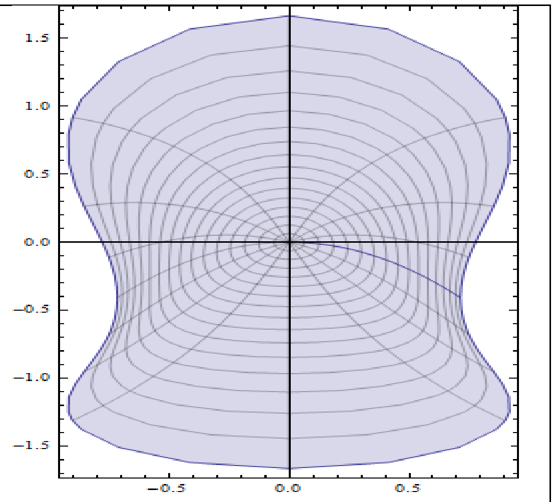
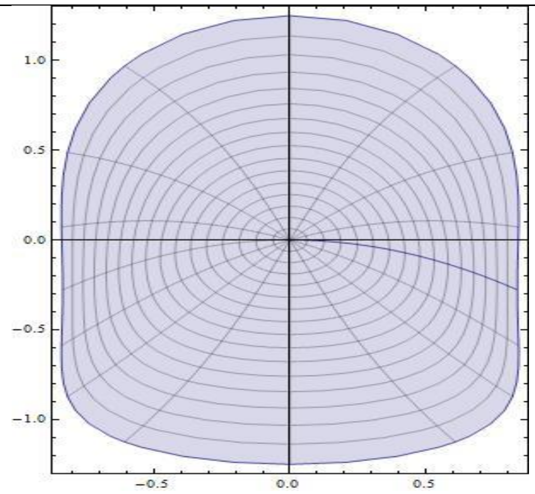
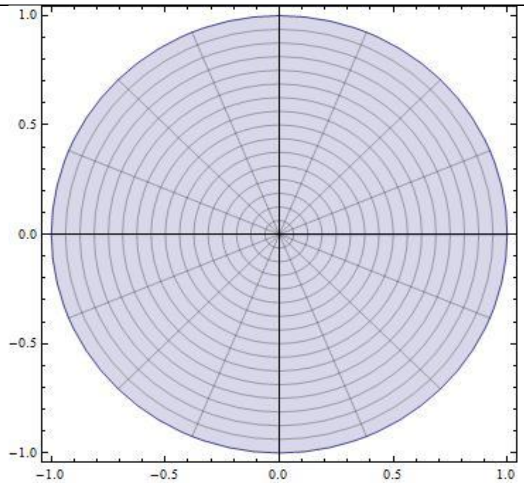
$$F(z) = \begin{cases} z + kz^{-1}, & z \in \mathbb{U}^* \\ z + k\bar{z}, & z \in \overline{\mathbb{U}} \end{cases}$$

fonksiyonlarının quasikonform genişlemesi geometrik olarak MAPLE ve MATHEMATICA programları yardımıyla aşağıdaki şekillerde gösterilmiştir:



Şekil 3.5. Birim diskin $f(z) = z + k\bar{z}$ fonksiyonu altındaki görüntüsü

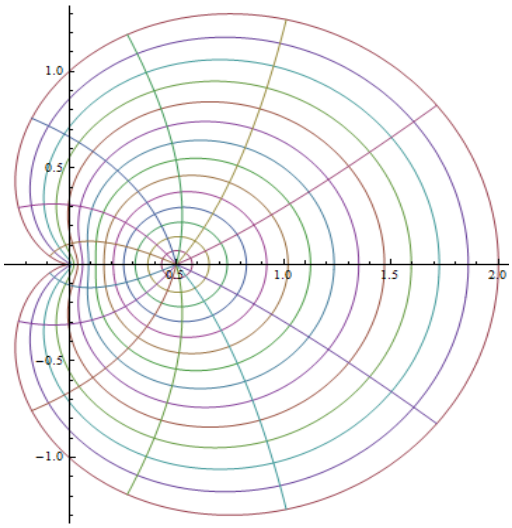
$k = 0.99$ için	
$k = 0.6$ için	

$k = 0.4$ için	
$k = 0.2$ için	
$k = 0$ için	

Şekil 3.6. Birim diskin dışının $f(z) = z + kz^{-1}$ fonksiyonu altındaki görüntüsü

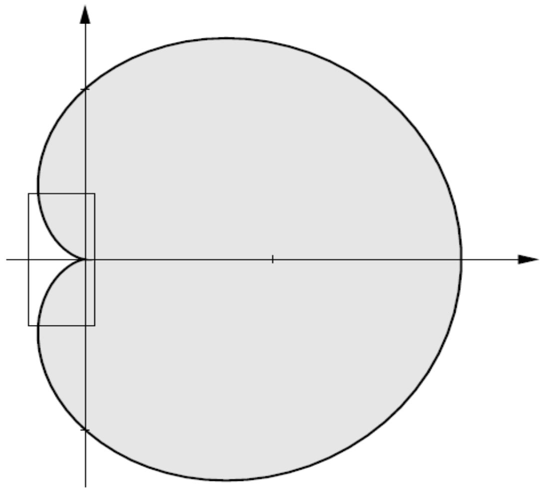
Önerme 3.7.16: Her ünivalent fonksiyon quasikonform genişlemeye sahip olmayabilir. Ama her quasikonform genişlemeye sahip fonksiyon ünivalenttir.

Örneğin; $f(z) = z + \frac{1}{2}(z^2 + 1)$ fonksiyonu birim diskte ünivalent olmasına rağmen quasikonform genişlemeye sahip değildir. Bu durum, birim diskin $f(z) = z + \frac{1}{2}(z^2 + 1)$ fonksiyonu altındaki görüntüsü olan ve quasidisk olmayan aşağıdaki şekilden açık olarak görülebilmektedir.



Şekil 3.7. Birim diskin $f(z) = z + \frac{1}{2}(z^2 + 1)$ fonksiyonu altındaki görüntüsü

Örnek 3.7.17: $D = \left\{ z = re^{i\theta} : r < \cos\theta - 1 \right\}$ kümesini göz önüne alalım. Bu küme aşağıdaki şekilden de görüldüğü gibi orijinin sol tarafındaki içe doğru sivri girintiden dolayı bir quasidisk değildir.



Şekil 3.8. $D=\left\{z=re^{i\theta}: r<\cos\theta-1\right\}$

D kümesinin üç nokta prensibi yardımıyla quasidisk olmadığını gösterelim. $-\pi\le t<\pi$ olmak kaydıyla D bölgesinin sınırı

$$\begin{aligned} x(t)&=(\cos t-1)\cos t\\ y(t)&=(\cos t-1)\sin t \end{aligned} \tag{3.15}$$

ifadeleriyle parametrize edilebilir. $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ olmak üzere (3.15) ile verilen ifade de sırasıyla $t=\alpha$ ve $t=-\alpha$ yazarak z_1 ve z_2 noktaları

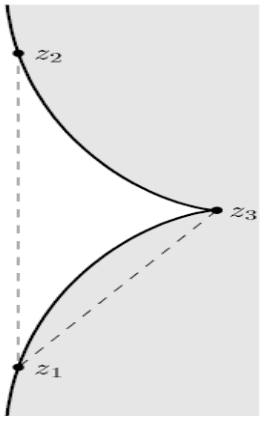
$$z_1(\alpha)=x(\alpha)+iy(\alpha)=\left(\cos\alpha-1\right)\cos\alpha+i\left[\left(\cos\alpha-1\right)\sin\alpha\right]$$

$$\begin{aligned} z_2(-\alpha)=x(-\alpha)+iy(-\alpha)&=\left(\cos(-\alpha)-1\right)\cos(-\alpha)+i\left[\left(\cos(-\alpha)-1\right)\sin(-\alpha)\right]\\ &=\left(\cos\alpha-1\right)\cos\alpha-i\left[\left(\cos\alpha-1\right)\sin\alpha\right] \end{aligned} \tag{3.16}$$

biçiminde ifade edilir. Böylece $z_3=0$ noktası en kısa z_1z_2 yayı üzerinde olup

$$\frac{\min çap(\gamma_j)}{|z_1-z_2|}\ge\frac{|z_1-z_3|}{|z_1-z_2|} \tag{3.17}$$

eşitsizliği yazılır.



Şekil 3.9. D bölgesinin sol tarafı

Eğer D bir quasidisk ise $\frac{|z_1 - z_3|}{|z_1 - z_2|}$ ifadesinin sınırlı olması gerekir. Şimdi göreceğiz ki bu ifade sınırlı değildir. Şekil 3.9 ve (3.16) dan

$$|z_1 - z_3| = \sqrt{x^2(\alpha) + y^2(\alpha)} = \cos\alpha - 1$$

$$|z_1 - z_2| = 2y(\alpha) = 2(\cos\alpha - 1)\sin\alpha$$

elde edilir. Böylece

$$\frac{|z_1 - z_3|}{|z_1 - z_2|} = \frac{1}{2\sin\alpha}$$

ifadesinde $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{1}{2\sin\alpha} = \infty$ olması $\frac{|z_1 - z_3|}{|z_1 - z_2|}$ oranının hiçbir zaman sınırlanamayacağı anlamına gelmektedir.

Yukarıdaki örnekte görüldüğü üzere verilen bir fonksiyonun quasikonform genişlemeye sahip olduğunu elementer yöntemlerle göstermek zordur. Bu durumu kolaylaştırmak açısından 1972 yılında Becker, quasikonform genişleme problemi ve Loewner teori arasındaki ilişkiyi ifade eden ve bu konunun ana teoremlerden biri olan aşağıdaki teoremi vermiştir.

Teorem 3.7.18: $L(z,t)$ bir Loewner zinciri olsun. (3.14) denkleminde ifade edilen $p(z,t)$ fonksiyonu her $z \in \mathbb{U}$ ve $t \geq 0$ için

$$\left|\frac{p(z,t)-1}{p(z,t)+1}\right| \le k < 1,\ (0 \le k < 1) \tag{3.18}$$

veya

$$\left|p(z,t)-\frac{1+k^2}{1-k^2}\right| \le \frac{2k}{1-k^2},\ (0 \le k < 1)$$

şartını sağlasın. O halde $L(z,t)$ her $t \ge 0$ için $\overline{\mathbb{U}}$ ya bir sürekli genişlemeye sahiptir ve

$$F(z,\overline{z}) = \begin{cases} L(z,0) & |z|<1 \\ L\left(\dfrac{z}{|z|},\log|z|\right) & |z|\ge 1 \end{cases} \tag{3.19}$$

biçiminde tanımlanan $F(z,\overline{z})$ fonksiyonu $L(z,0)$ ın $\mathbb{C}$ kompleks düzleme *k*-quasikonform genişlemesidir.

İspat: $0<\rho<1$ olmak üzere $L_\rho(z,t)=\rho^{-1}L(\rho z,t)$ olsun ve $F_\rho(z)$

$$F_\rho(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{\rho}L(\rho z,0), & |z|<1 \\ \dfrac{1}{\rho}L\left(\rho\dfrac{z}{|z|},\log|z|\right), & |z|\ge 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

$L(\mathbb{U},t_1) \underset{\neq}{\subset} L(\mathbb{U},t_2)$ $(0 \le t_1 \le t_2)$ kapsamından Schwarz lemmasına göre $L(\overline{\mathbb{U}}_\rho,t_1) \subset L(\mathbb{U}_\rho,t_2)$ $\left(\mathbb{U}_\rho=\{z:|z|<\rho\},\ \overline{\mathbb{U}}_\rho=\{z:|z|\le\rho\},\ \rho<1\right)$ olur. Ayrıca $L(\partial\mathbb{U}_\rho,t_1) \cap L(\partial\mathbb{U}_\rho,t_2)=\varnothing$ dir. Böylece F_ρ birebir olup $\overline{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ kümesinde sürekli olduğundan bir homeomorfizimdir. Eğer kompleks genişleme hesaplanacak olursa, $r \ge 1$ $\left(z=re^{i\varphi}\right)$ için

$$\left|\frac{\partial F_\rho}{\partial \overline{z}} \Big/ \frac{\partial F_\rho}{\partial z}\right| = \left|\frac{\dfrac{\partial L_\rho(e^{i\varphi},\log r)}{\partial t} - e^{i\varphi}\dfrac{\partial L_\rho(e^{i\varphi},\log r)}{\partial z}}{\dfrac{\partial L_\rho(e^{i\varphi},\log r)}{\partial t} + e^{i\varphi}\dfrac{\partial L_\rho(e^{i\varphi},\log r)}{\partial z}}\right|$$

$$= \left|\frac{p(\rho e^{i\varphi},\log r)-1}{p(\rho e^{i\varphi},\log r)+1}\right| \le k$$

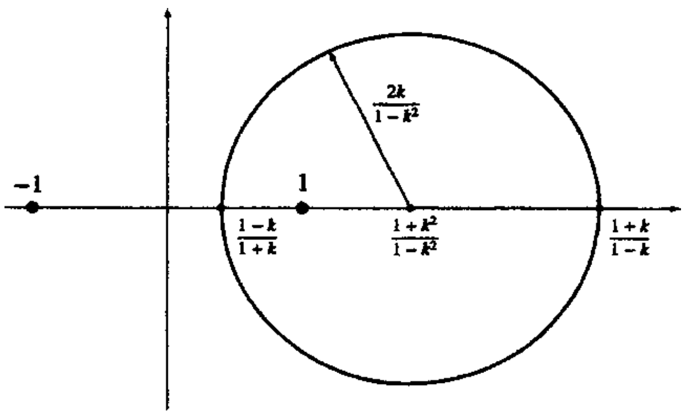
eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla F_ρ bir K-quasikonform dönüşümdür.

Hemen hemen her ρ için herhangi bir durumda $\lim\limits_{\rho\to 1} L\left(\rho e^{i\varphi},t\right)$ var olduğundan, $\mathbb{C}$ nin yoğun bir alt kümesinde $\lim\limits_{\rho\to 1} F_\rho(z)$ vardır. Buradan da anlaşılacağı gibi $\mathbb{C}$ de $F(z)=\lim\limits_{\rho\to 1} F_\rho(z)$ olup buda $L(z,0)$ ın bir K-quasikonform genişlemeye sahip olduğunu gösterir. F_ρ nin tanımından $r\ge 1$ için

$$F\left(re^{i\varphi}\right)=\lim_{\rho\to 1} L\left(\rho e^{i\varphi},\log r\right)=L\left(e^{i\varphi},\log r\right)$$

φ ye göre düzgündür. Bu nedenle her $t\ge 0$ için $L(\mathbb{U},t)$ bir K-quasidiski ile sınırlı bir Jordan bölgesidir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

(3.18) şartına göre $p(z,t)$ fonksiyonu her $t\in[0,\infty)$ ve her $z\in\mathbb{U}$ için sağ yarı düzlemin bir kompakt alt kümesinde içerilmelidir (Şekil 3.10). Bu nedenle Teorem 3.7.18 Loewner zincirlerine uygulanabilir.



Şekil 3.10. $\left|p(z,t)-\dfrac{1+k^2}{1-k^2}\right|\le \dfrac{2k}{1-k^2},\ (0\le k<1)$

3.8. Quasikonform Genişleme Kriteri Üzerine Yapılan İlk Çalışmalar

Geçmişten günümüze kadar $\mathbb{U}$ ve $\mathbb{U}^*$ kümelerinde bu konu üzerine yapılan önemli çalışmalardan bazıları aşağıda verilmiştir.

Teorem 3.8.1: $f \in \Sigma_0$ fonksiyonu $\mathbb{U}^*$ kümesinde analitik ve $|c| \le 1,\ c \ne -1,\ k \in [0,1)$ olsun. Eğer her $\zeta \in \mathbb{U}^*$ için

$$\left(|\zeta|^2 - 1\right)^2 \frac{1}{2}\left|S_f(\zeta)\right| \le k$$

eşitsizliği sağlanırsa f fonksiyonu $\mathbb{C}$ de k-quasikonform genişlemeye sahiptir (Ahlfors and Weill 1962).

Teorem 3.8.2: $f \in \mathcal{A}$, $k \in [0,1)$ olsun. Eğer her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\left(1 - |z|^2\right)\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| \le k$$

eşitsizliği sağlanırsa f fonksiyonu $\mathbb{C}$ de k-quasikonform genişlemeye sahiptir (Becker 1972).

Teorem 3.8.3: $f \in \mathcal{A}$, $k \in [0,1)$, $c \in \mathbb{C}$ ve $|c| \le k$ olsun. Eğer her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\left|c|z|^2 + \left(1 - |z|^2\right)\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| \le k$$

eşitsizliği sağlanırsa f fonksiyonu $\mathbb{C}$ de k-quasikonform genişlemeye sahiptir (Ahlfors 1974).

Teorem 3.8.4: $f \in \Sigma_0$ fonksiyonu $\mathbb{U}^*$ kümesinde analitik ve $k \in [0,1)$ olsun. Eğer her $\zeta \in \mathbb{U}^*$ için

$$\left|\zeta^2\left(f'(\zeta) - 1\right)\right| \le k$$

eşitsizliği sağlanırsa f fonksiyonu $\mathbb{C}$ de k-quasikonform genişlemeye sahiptir (Krzyz 1976).

Teorem 3.8.5: $\mathbb{U}$ kümesinde $f(z)$ ve $g(z)$ analitik fonksiyonlarını göz önüne alalım. $f'(z) \ne 0$ ve $c \ne 0$ olsun. Eğer $z \in \mathbb{U}$ için

$$\left|\left(\overline{z}-z\right)g\left(z\right)+cf'\left(z\right)e^{-\int g(z)dz}-1\right|\leq k$$

eşitsizliği sağlanırsa f fonksiyonu $\mathbb{C}$ de k-quasikonform genişlemeye sahiptir (Tan 1992).

Teorem 3.8.6: $f\in\mathcal{A}$, $s=a+ib$, $b\in\mathbb{R}$ ve $k\in[0,1)$ olsun. $c\in\mathbb{C}$ ve her $z\in\mathbb{U}$ için

$$\left|c|z|^2+s-a\left(1-|z|^2\right)\left\{s\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)+\left(1-s\right)\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}\right|\leq M$$

$$M=\begin{cases} ak|s|+\left(a-1\right)|s+c|, & 0<a\leq 1\\ k|s|, & 1<a\end{cases}$$

eşitsizliği sağlanırsa f fonksiyonu $\mathbb{C}$ de

$$l_k\left(a\right)=\frac{2ka+\left(1-k^2\right)|b|}{\left(1+k^2\right)a+\left(1-k^2\right)|s|}<1$$

biçiminde bir quasikonform genişlemeye sahiptir (Hotta 2010).

Teorem 3.8.7: $f\in\mathcal{A}$ ve $k\in[0,1)$ olsun. Eğer her $z\in\mathbb{U}$ için

$$\left|\left(1-|z|^{m+1}\right)z\frac{d}{dz}\left(\log\frac{z^2f'(z)}{f^2(z)}\right)-\frac{m-1}{2}|z|^{m+1}\right|\leq k\frac{m+1}{2}|z|^{m+1}$$

eşitsizliği sağlanırsa f fonksiyonu $\mathbb{C}$ de

$$l_k\left(a\right)=\frac{\left(1-a\right)^2+k\left|1-a^2\right|}{\left|1-a^2\right|+k\left(1-a\right)^2},\ (a>0)$$

biçiminde bir quasikonform genişlemeye sahiptir (Raducanu and Tudor 2012).

Teorem 3.8.8: $f\in\Sigma$, $f'\left(\zeta\right)\neq 0$, $m\in\mathbb{R}_+$, $s=\alpha+i\beta$, $\alpha>0$, $\beta\in\mathbb{R}$, $\frac{1}{2}<m\leq\alpha$ ve $k\in[0,1)$ olsun. $\mathbb{U}^*$ kümesinde $g\left(\zeta\right)=1+c_2\zeta^2+...$ analitik fonksiyonunu göz önüne alalım. Eğer her $\zeta\in\mathbb{U}^*$ için

$$\left|\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)g(\zeta)}+\frac{ms}{\alpha}\right|<\frac{km|s|}{\alpha}$$

ve

$$\left|\frac{1}{|\zeta|^{2m/\alpha}}\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)g(\zeta)}-\left(\frac{1-|\zeta|^{2m/\alpha}}{|\zeta|^{2m/\alpha}}\right)\left[\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}+s\frac{\zeta g'(\zeta)}{g(\zeta)}\right]+\frac{ms}{\alpha}\right|\leq k\frac{m|s|}{\alpha}$$

eşitsizlikleri sağlanırsa f fonksiyonu $\mathbb{C}$ de

$$l_k(s)=\frac{|s-1|^2+k\left|(\bar{s})^2-1\right|}{\left|(\bar{s})^2-1\right|+k|s-1|^2}<1$$

biçiminde bir quasikonform genişlemeye sahiptir (Deniz 2012).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde, çalışmamızda elde edilen bulgulara yer verilmiştir.

İlk olarak Pommerenke teoremi olarak bilinen Teorem 3.4.4 yardımıyla $\mathbb{U}$ ve $\mathbb{U}^*$ kümelerinde tanımlı analitik fonksiyonların ünivalentliği için yeter şartlar verilmiştir. Daha sonra verilen bu şartlar için Becker metodu olarak bilinen Teorem 3.7.18 yardımıyla quasikonform genişleme kriterleri elde edilmiştir.

4.1. Birim diskte ünivalentlik kriterleri

Çalışmamız boyunca $[f(e^{-t}z)]' = f'(e^{-t}z)$ ve bir kompleks fonksiyonun kompleks kuvveti olan $(\varphi(z))^{\eta}$ için esas dal göz önüne alınmıştır.

Teorem 4.1.1: $f \in \mathcal{A}$ olsun ve $m > 1,\ \alpha \in \mathbb{C}$ olmak üzere $\Re\alpha > 1/m$ şartı sağlansın. Ayrıca, $\mathbb{U}$ birim diskinde $g(z) = 1 + b_1 z + \ldots$ ve $h(z) = d_1 z + d_2 z^2 + \ldots$ biçimindeki analitik fonksiyonları göz önüne alalım. Eğer her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\left| \frac{f'(z)}{\alpha g(z)} - \frac{m}{2} \right| < \frac{m}{2} \tag{4.1}$$

ve

$$\begin{aligned} &\left| |z|^m \frac{f'(z)}{\alpha g(z)} + \frac{z(1-|z|^m)^2}{2|z|^2} \left\{ \left(\frac{(1-\alpha)}{\alpha} \frac{zf'(z)}{f(z)} + 1 \right) \frac{h(z)}{g(z)} + \frac{zh'(z)}{g(z)} \right\} \right. \\ &\left. + (1-|z|^m) \left\{ 1 + \frac{(1-\alpha)}{\alpha} \frac{zf'(z)}{f(z)} + \frac{zg'(z)}{g(z)} \right\} - \left(1 + \frac{z(1-|z|^{2m})}{2|z|^2} \frac{h(z)}{g(z)} \right) \frac{m}{2} \right| \\ &\le \left| \frac{z(1-|z|^m)^2}{2|z|^2} \frac{h(z)}{g(z)} + \left(1 + \frac{z(1-|z|^{2m})}{2|z|^2} \frac{h(z)}{g(z)} \right) \frac{m}{2} \right| \end{aligned} \tag{4.2}$$

eşitsizlikleri sağlanırsa, f fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde ünivalenttir (Çağlar and Orhan 2013a).

İspat: $m>1$ ve $r\in(0,1]$ olmak üzere her $t\in[0,\infty)$ için

$$L(z,t)=f^{1-\alpha}(e^{-t}z)\left[f(e^{-t}z)+(e^{mt}-1)e^{-t}zg(e^{-t}z)+\frac{(e^{mt}-1)^2}{2}e^{-mt}z^2h(e^{-t}z)\right]^{\alpha} \tag{4.3}$$

şeklinde tanımlanan $L:\mathbb{U}_r\times[0,\infty)\to\mathbb{C}$ fonksiyonu $\mathbb{U}_r$ diskinde analitiktir.

Çünkü her $z\in\mathbb{U}\setminus\{0\}$ için $f(z)\neq 0$ olduğundan

$$\varphi_1(z,t)=(e^{mt}-1)e^{-t}z\frac{g(e^{-t}z)}{f(e^{-t}z)}+\frac{(e^{mt}-1)^2}{2}e^{-mt}z^2\frac{h(e^{-t}z)}{f(e^{-t}z)} \tag{4.4}$$

fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde analitiktir. Diğer taraftan

$$\varphi_2(z,t)=\varphi_1(z,t)+1 \tag{4.5}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Böylece, $0<r_1\leq 1$ olmak üzere her $z\in\mathbb{U}_{r_1}$ ve her $t\in[0,\infty)$ için $\varphi_2(0,t)=e^{mt}$, $\varphi_2(z,t)\neq 0$ olacak şekilde bir $\mathbb{U}_{r_1}$ diski vardır ve φ_2 bu $\mathbb{U}_{r_1}$ diskinde analitiktir. Dolayısıyla bu diskte

$$\varphi_3(z,t)=[\varphi_2(z,t)]^{\alpha} \tag{4.6}$$

ile tanımlayacağımız $[\varphi_2(z,t)]^{\alpha}$ nın uygun bir dalını seçebiliriz.

Yukarıdaki ifadelerle birlikte

$$L(z,t)=f(e^{-t}z)\varphi_3(z,t)=a_1(t)z+\ldots \tag{4.7}$$

fonksiyonunun her $t\in[0,\infty)$ için $\mathbb{U}_{r_1}$ diskinde analitik olduğu açıktır. (4.7) eşitliğinden

$$L(z,t)=e^{(\alpha m-1)t}z+\ldots \tag{4.8}$$

açılımı vardır. (4.8) ifadesi (4.7) ile karşılaştırıldığında

$$a_1(t)=e^{(\alpha m-1)t} \tag{4.9}$$

bulunur. Teoremin hipotezindeki (4.1) eşitsizliğinde $z=0$ alınırsa ve $m>1$ için

$$\lim_{t\to\infty}|a_1(t)|=\infty$$

elde edilir. Ayrıca her $t\in[0,\infty)$ için $a_1(t)\neq 0$ dır.

Böylece (4.3) ve (4.9) dan

$$\frac{L(z,t)}{a_1(t)}=e^{t}f(e^{-t}z)$$

$$\times\left[e^{-mt}+(1-e^{-mt})e^{-t}z\frac{g(e^{-t}z)}{f(e^{-t}z)}+\frac{1}{2}\frac{z^2h(e^{-t}z)}{f(e^{-t}z)}-\frac{e^{-mt}z^2}{2}\frac{h(e^{-t}z)}{f(e^{-t}z)}+\frac{e^{-2mt}z^2}{2}\frac{h(e^{-t}z)}{f(e^{-t}z)}\right]^{\alpha}$$

elde edilir. Son eşitlikte $\left|e^{-t}z\right| \le \left|e^{-t}\right| < 1$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\left|\frac{L(z,t)}{a_1(t)}\right| < K$$

olacak şekilde $\mathbb{U}_{r_2}$ $(0 < r_2 < r_1)$ diski ve bir $K > 0$ sayısı vardır. Böylece Lemma 2.2.17 den ve Montel teoreminden $\left\{\frac{L(z,t)}{a_1(t)}\right\}_{t\in[0,\infty)}$ ailesi $\mathbb{U}_{r_2}$ de analitik fonksiyonların bir normal ailesini oluşturur. Diğer taraftan $L(z,t)$ nin kısmi türevleri;

$$z\frac{\partial L(z,t)}{\partial z} = e^{-t}zf'(e^{-t}z)\varphi_3(z,t) + zf(e^{-t}z)\frac{\partial \varphi_3(z,t)}{\partial z}, \tag{4.10}$$

$$\frac{\partial L(z,t)}{\partial t} = -e^{-t}zf'(e^{-t}z)\varphi_3(z,t) + f(e^{-t}z)\frac{\partial \varphi_3(z,t)}{\partial t} \tag{4.11}$$

olarak hesaplanır. f, φ_3 ve $L(z,t)$ fonksiyonları analitik olduğundan (4.11) den $\frac{\partial L(z,t)}{\partial t}$ fonksiyonu da $\mathbb{U}_{r_2}$ diskinde analitik olur. Böylece $T > 0$ ve $0 < r_3 < r_2$ olacak şekilde her $t \in [0,T]$ ve her $z \in \mathbb{U}_{r_3}$ için

$$\left|\frac{\partial L(z,t)}{\partial t}\right| < K_1$$

eşitsizliğini sağlayan $K_1 = K_1(T, r_3) > 0$ sayısı mevcuttur. Dolayısıyla Önerme 2.1.18 in (i) şıkkından, $L(z,t)$ fonksiyonu $t \in [0,\infty)$ için yerel mutlak sürekli ve $z \in \mathbb{U}_{r_3}$ e göre yerel düzgün süreklidir.

Son olarak $0 < r < r_3$ için $p : \mathbb{U}_r \times [0,\infty) \to \mathbb{C}$,

$$p(z,t) = z\frac{\partial L(z,t)}{\partial z} \bigg/ \frac{\partial L(z,t)}{\partial t}$$

biçiminde tanımlı bir fonksiyon olsun. $p(z,t)$ fonksiyonunun birim diskte reel kısmı pozitif olan analitik bir genişlemeye sahip olduğunu göstermek için, her $z \in \mathbb{U}$ ve her $t \in [0,\infty)$ için

$$w(z,t) = \frac{p(z,t)-1}{p(z,t)+1} = \frac{\frac{z\partial L(z,t)}{\partial z} - \frac{\partial L(z,t)}{\partial t}}{\frac{z\partial L(z,t)}{\partial z} + \frac{\partial L(z,t)}{\partial t}} \tag{4.12}$$

fonksiyonunun $\mathbb{U}\times[0,\infty)$ kümesinde analitik ve $|w(z,t)|<1$ eşitsizliğini sağladığını göstermek yeterli olacaktır. Burada (4.12) eşitliğinden her $z\in\mathbb{U}$ ve her $t\in[0,\infty)$ için

$$\begin{aligned} w(z,t)=\Bigg[&\frac{f'(e^{-t}z)}{\alpha g(e^{-t}z)}e^{-mt}+(1-e^{-mt})\left\{1+\frac{(1-\alpha)}{\alpha}\frac{e^{-t}zf'(e^{-t}z)}{f(e^{-t}z)}+\frac{e^{-t}zg'(e^{-t}z)}{g(e^{-t}z)}\right\}\\ &+\frac{(e^{mt}-1)^2e^{-2mt}z}{2}\left\{\left(\frac{(1-\alpha)}{\alpha}\frac{zf'(e^{-t}z)}{f(e^{-t}z)}+e^{t}\right)\frac{h(e^{-t}z)}{g(e^{-t}z)}+\frac{zh'(e^{-t}z)}{g(e^{-t}z)}\right\}\\ &-\left(1+\frac{(e^{2mt}-1)e^{-(2m-1)t}}{2}\frac{zh(e^{-t}z)}{g(e^{-t}z)}\right)\frac{m}{2}\Bigg]\\ &/\left[\frac{(e^{mt}-1)^2e^{-(2m-1)t}}{2}\frac{zh(e^{-t}z)}{g(e^{-t}z)}+\left(1+\frac{(e^{2mt}-1)e^{-(2m-1)t}}{2}\frac{zh(e^{-t}z)}{g(e^{-t}z)}\right)\frac{m}{2}\right]\end{aligned}\tag{4.13}$$

olduğunu görmek zor değildir. Buradan sırasıyla $z=0$ ve $t=0$ için

$$|w(0,t)|=\left|\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)e^{-mt}+1-\frac{m}{2}\right|<\frac{m}{2}\tag{4.14}$$

ve

$$|w(z,0)|=\left|\frac{f'(z)}{\alpha g(z)}-\frac{m}{2}\right|<\frac{m}{2}\tag{4.15}$$

elde edilir. Şimdi kabul edelim ki $t>0,\ z\in\mathbb{U}$ ve $z\neq 0$ olsun. Her $z\in\overline{\mathbb{U}}$ için $|e^{-t}z|\le e^{-t}<1$ olduğundan $w(z,t)$ fonksiyonu $\overline{\mathbb{U}}$ kümesinde analitiktir. Maksimum modül prensibinden her sabit $t>0$ için

$$|w(z,t)|<\max_{|z|=1}|w(z,t)|=|w(e^{i\theta},t)|$$

olacak şekilde $\theta\in\mathbb{R}$ sayısı vardır. $\theta\in\mathbb{R}$ ve $t>0$ olmak üzere $u=e^{-t}e^{i\theta}$ alalım. Buradan $|u|=e^{-t}<1,\ e^{-mt}=|u|^m$ elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} w(e^{i\theta},t)=\Bigg|\Bigg[&\frac{f'(u)}{\alpha g(u)}|u|^m+(1-|u|^m)\left\{1+\frac{(1-\alpha)}{\alpha}\frac{zf'(u)}{f(u)}+\frac{zg'(u)}{g(u)}\right\}\\ &+\frac{u(1-|u|^m)^2}{2|u|^2}\left\{\left(\frac{(1-\alpha)}{\alpha}\frac{uf'(u)}{f(u)}+1\right)\frac{h(u)}{g(u)}+\frac{uh'(u)}{g(u)}\right\}\\ &-\left(1+\frac{(1-|u|^{2m})}{2|u|^2}\frac{uh(u)}{g(u)}\right)\frac{m}{2}\Bigg]\end{aligned}$$

$$/\left[\frac{u(1-|u|^m)^2}{2|u|^2}\frac{h(u)}{g(u)}+\left(1+\frac{(1-|u|^{2m})}{2|u|^2}\frac{uh(u)}{g(u)}\right)\frac{m}{2}\right]\Bigg|$$

bulunur. Teoremin hipotezindeki (4.2) eşitsizliğinden

$$\left|w(e^{i\theta},t)\right|\leq 1 \tag{4.16}$$

yazılır. Böylece (4.14), (4.15) ve (4.16) ifadelerinden, her $z\in\mathbb{U}$ ve $t\geq 0$ için $|w(z,t)|<1$ olur. Dolayısıyla her $t\geq 0$ için $p(z,t)$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ da analitik ver her $z\in\mathbb{U}$ için $\Re p(z,t)>0$ dır.

Tüm bu durumlar göz önüne alındığında Teorem 3.4.4 ün bütün şartları sağlandığından $L(z,t)$ fonksiyonunun her $t\in[0,\infty)$ için $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik ve ünivalent bir genişlemeye sahip olduğu görülür. Eğer $L(z,t)$ fonksiyonunda $t=0$ alınırsa her $z\in\mathbb{U}$ için $L(z,0)=f(z)$ elde edilir. Dolayısıyla $f(z)$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ diskinde analitik ve ünivalenttir.

Eğer Teorem 4.1.1 de $g(z)=f'(z)$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.2: $f\in\mathcal{A}$ olsun ve $m>1$, $\alpha\in\mathbb{C}$ olmak üzere $\Re\alpha>1/m$ şartı sağlansın. Ayrıca, $\mathbb{U}$ birim diskinde $h(z)=d_1z+d_2z^2+...$ analitik fonksiyonunu göz önüne alalım. Eğer her $z\in\mathbb{U}$ için

$$\begin{aligned}&\left|\frac{|z|^m}{\alpha}+\frac{z(1-|z|^m)^2}{2|z|^2}\left\{\left(\frac{(1-\alpha)}{\alpha}\frac{zf'(z)}{f(z)}+1\right)\frac{h(z)}{f'(z)}+\frac{zh'(z)}{f'(z)}\right\}\right.\\&\left.+(1-|z|^m)\left\{1+\frac{(1-\alpha)}{\alpha}\frac{zf'(z)}{f(z)}+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}-\left(1+\frac{z(1-|z|^{2m})}{2|z|^2}\frac{h(z)}{f'(z)}\right)\frac{m}{2}\right|\\&\leq\left|\frac{z(1-|z|^m)^2}{2|z|^2}\frac{h(z)}{f'(z)}+\left(1+\frac{z(1-|z|^{2m})}{2|z|^2}\frac{h(z)}{f'(z)}\right)\frac{m}{2}\right|\end{aligned} \tag{4.17}$$

eşitsizliği sağlanırsa, f fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde ünivalenttir.

Sonuç 4.1.3: $f\in\mathcal{A}$ ve $m>1$ olsun. Ayrıca, $\mathbb{U}$ birim diskinde $h(z)=d_1z+d_2z^2+...$ analitik fonksiyonunu göz önüne alalım. Eğer her $z\in\mathbb{U}$ için

$$\left| |z|^m + \frac{z(1-|z|^m)^2}{2|z|^2}\left\{\frac{h(z)}{f'(z)}+\frac{zh'(z)}{f'(z)}\right\}+(1-|z|^m)\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}-\left(1+\frac{z(1-|z|^{2m})}{2|z|^2}\frac{h(z)}{f'(z)}\right)\frac{m}{2}\right|$$

$$\leq \left|\frac{z(1-|z|^m)^2}{2|z|^2}\frac{h(z)}{f'(z)}+\left(1+\frac{z(1-|z|^{2m})}{2|z|^2}\frac{h(z)}{f'(z)}\right)\frac{m}{2}\right| \tag{4.18}$$

eşitsizliği sağlanırsa, f fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde ünivalenttir.

İspat: Sonuç 4.1.2 de $\alpha=1$ alındığında istenen sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.4: $f\in\mathcal{A}$ olsun ve $m>1,\ \alpha\in\mathbb{C}$ olmak üzere $\Re\alpha>1/m$ şartı sağlansın. Eğer her $z\in\mathbb{U}$ için

$$\left|\frac{|z|^m}{\alpha}+\left(1-|z|^m\right)\left\{1+\frac{(1-\alpha)}{\alpha}\frac{zf'(z)}{f(z)}+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}-\frac{m}{2}\right|\leq\frac{m}{2} \tag{4.19}$$

eşitsizliği sağlanırsa, f fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde ünivalenttir.

İspat: Teorem 4.1.1 de $g(z)=f'(z)$ ve $h(z)=0$ alındığında istenen sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.4 de $\alpha=1$ yazılırsa aşağıdaki sonuç gelir.

Sonuç 4.1.5: $f\in\mathcal{A}$ ve $m>1$ olsun. Eğer her $z\in\mathbb{U}$ için

$$\left||z|^m+\left(1-|z|^m\right)\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)-\frac{m}{2}\right|\leq\frac{m}{2} \tag{4.20}$$

eşitsizliği sağlanırsa, f fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde ünivalenttir.

Teorem 4.1.6: $f\in\mathcal{A}$ ve $\beta\in\mathbb{C}$ olsun. α, A ve B kompleks sayılar olmak üzere $\Re\alpha>1/2,\ A+B\neq 0,\ |A-B|<2,\ |A|\leq 1$ ve $|B|\leq 1$ şartları sağlansın. Ayrıca, $\mathbb{U}$ birim diskinde $g(z)=1+b_1z+...$ analitik fonksiyonunu göz önüne alalım. Eğer her $z\in\mathbb{U}$ için

$$\left|\frac{1}{\alpha}\left(\frac{f'(z)}{g(z)-\beta}-1\right)\right|<\frac{|A+B|}{2-|A-B|} \tag{4.21}$$

ve

$$\left|\left(\frac{f'(z)}{g(z)-\beta}-1\right)|z|^2+\left(1-|z|^2\right)\left[\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\frac{zf'(z)}{f(z)}+\frac{zg'(z)}{g(z)-\beta}\right]-\frac{\left(\bar{A}-\bar{B}\right)\left(A+B\right)}{4-|A-B|^2}\right| \le \frac{2|A+B|}{4-|A-B|^2} \tag{4.22}$$

eşitsizlikleri sağlanırsa, f fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde ünivalenttir (Çağlar and Orhan 2013b).

İspat: $r \in (0,1]$ olmak üzere her $t \in [0,\infty)$ için

$$L(z,t) = f^{1-\alpha}(e^{-t}z)\left[f(e^{-t}z)+\left(e^{t}z-e^{-t}z\right)\left(g(e^{-t}z)-\beta\right)\right]^{\alpha} \tag{4.23}$$

şeklinde tanımlanan $L:\mathbb{U}_r \times [0,\infty) \to \mathbb{C}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Teorem 4.1.1 in ispatındaki yol izlenerek bu fonksiyonun $\mathbb{U}_r$ diskinde analitik olduğu görülür. İspatın bundan sonraki kısmı olan $L(z,t)$ nin bir Loewner zinciri olduğunu göstermek için de sırasıyla Teorem 4.1.1 in ispatındaki kalan adımları izlemek ve (4.12) deki $w(z,t)$ yerine

$$w(z,t) = \frac{p(z,t)-1}{A+Bp(z,t)} = \frac{\frac{z\partial L(z,t)}{\partial z}-\frac{\partial L(z,t)}{\partial t}}{A\frac{z\partial L(z,t)}{\partial z}+B\frac{\partial L(z,t)}{\partial t}}$$

almak yeterlidir.

Eğer Teorem 4.1.6 da $A = B$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.7: $f \in \mathcal{A}$ ve $\beta \in \mathbb{C}$ olsun. α ve A kompleks sayılar olmak üzere $\Re\alpha > 1/2$, $A \neq 0$, $|A| \le 1$ şartları sağlansın. Ayrıca, $\mathbb{U}$ birim diskinde $g(z) = 1 + b_1 z + ...$ analitik fonksiyonunu göz önüne alalım. Eğer her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\left|\frac{1}{\alpha}\left(\frac{f'(z)}{g(z)-\beta}-1\right)\right| < |A| \tag{4.24}$$

ve

$$\left|\left(\frac{f'(z)}{g(z)-\beta}-1\right)|z|^2+\left(1-|z|^2\right)\left[\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\frac{zf'(z)}{f(z)}+\frac{zg'(z)}{g(z)-\beta}\right]\right|\le|A| \tag{4.25}$$

eşitsizlikleri sağlanırsa, f fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde ünivalenttir.

Teorem 4.1.6 da $\alpha=1$ seçilirse aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.8: $f\in\mathcal{A}$ ve $\beta\in\mathbb{C}$ olsun. A ve B kompleks sayılar olmak üzere $A+B\neq 0$, $|A-B|<2$, $|A|\le 1$ ve $|B|\le 1$ şartları sağlansın. Ayrıca, $\mathbb{U}$ birim diskinde $g(z)=1+b_1z+\ldots$ analitik fonksiyonunu göz önüne alalım. Eğer her $z\in\mathbb{U}$ için

$$\left|\frac{f'(z)}{g(z)-\beta}-1\right|<\frac{|A+B|}{2-|A-B|} \tag{4.26}$$

ve

$$\left|\left(\frac{f'(z)}{g(z)-\beta}-1\right)|z|^2+\left(1-|z|^2\right)\frac{zg'(z)}{g(z)-\beta}-\frac{\left(\bar{A}-\bar{B}\right)\left(A+B\right)}{4-|A-B|^2}\right|\le\frac{2|A+B|}{4-|A-B|^2} \tag{4.27}$$

eşitsizlikleri sağlanırsa, f fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde ünivalenttir.

Sonuç 4.1.9: $f\in\mathcal{A}$ olsun. A ve B kompleks sayılar olmak üzere $A+B\neq 0$, $|A-B|<2$, $|A|\le 1$ ve $|B|\le 1$ şartları sağlansın. Ayrıca, $\mathbb{U}$ birim diskinde $g(z)=1+b_1z+\ldots$ analitik fonksiyonunu göz önüne alalım. Eğer her $z\in\mathbb{U}$ için

$$\left|\frac{f'(z)}{g(z)}-1\right|<\frac{|A+B|}{2-|A-B|} \tag{4.28}$$

ve

$$\left|\left(\frac{f'(z)}{g(z)}-1\right)|z|^2+\left(1-|z|^2\right)\frac{zg'(z)}{g(z)}-\frac{\left(\bar{A}-\bar{B}\right)\left(A+B\right)}{4-|A-B|^2}\right|\le\frac{2|A+B|}{4-|A-B|^2} \tag{4.29}$$

eşitsizlikleri sağlanırsa, f fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde ünivalenttir.

İspat: Sonuç 4.1.8 de $\beta=0$ alınırsa istenen sonuç elde edilir.

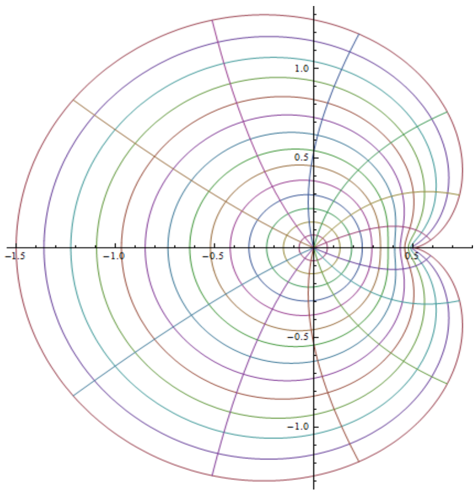
Örnek 4.1.10: $f(z)=z-\frac{1}{2}z^2$ fonksiyonunun $\mathbb{U}$ birim diskinde ünivalent olduğu bilinmektedir. Eğer $f(z)$ fonksiyonu için Becker'ın ünivalentlik kriteri uygulanırsa

$$\left(1-|z|^2\right)\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right|=\left(1-|z|^2\right)\left|\frac{-z}{1-z}\right|\leq|z|\left(1+|z|\right)<2\not\leq 1$$

elde edilir. Buradan görülür ki Becker'ın ünivalentlik kriteri fonksiyonun ünivalentliğini test etmede yetersiz kalmıştır. Halbuki, Sonuç 4.1.9 da $A=B=1$ ve $g(z)=1-\frac{1}{2}z$ alınırsa

$$\left|\left(\frac{1-z}{1-\frac{1}{2}z}-1\right)|z|^2+z\left(1-|z|^2\right)\frac{-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}z}\right|=\left|\frac{-z}{2-z}\right|\leq\frac{|z|}{2-|z|}\leq 1$$

eşitsizliği bulunur. Dolayısıyla Sonuç 4.1.9 un tüm şartları sağlanır. Yani $f(z)$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde ünivalenttir. Ayrıca MATHEMATICA programı kullanılarak çizilen, $\mathbb{U}$ birim diskinin $f(z)$ fonksiyonu altındaki görüntüsü bu iddiayı doğrulamaktadır.



Şekil 4.1. Birim diskin $f(z)=z-\frac{1}{2}z^2$ fonksiyonu altındaki görüntüsü

Sonuç 4.1.9 da $g(z)=f'(z)$ alınırsa aşağıdaki ünivalentlik kriteri elde edilir.

Sonuç 4.1.11: $f \in \mathcal{A}$ olsun. A ve B kompleks sayılar olmak üzere $A+B \neq 0$, $|A-B|<2$, $|A| \leq 1$ ve $|B| \leq 1$ şartları sağlansın. Eğer her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\left|\left(1-|z|^2\right)\frac{zf''(z)}{f'(z)}-\frac{\left(\bar{A}-\bar{B}\right)\left(A+B\right)}{4-|A-B|^2}\right| \leq \frac{2|A+B|}{4-|A-B|^2} \tag{4.30}$$

eşitsizliği sağlanırsa, f fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde ünivalenttir.

Sonuç 4.1.12: $f \in \mathcal{A}$ ve $\beta \in \mathbb{C}$ olsun. A ve B kompleks sayılar olmak üzere $A+B \neq 0$, $|A-B|<2$, $|A| \leq 1$ ve $|B| \leq 1$ şartları sağlansın. Eğer her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\left|\frac{\beta}{f'(z)-\beta}\right| < \frac{|A+B|}{2-|A-B|} \tag{4.31}$$

ve

$$\left|\frac{\beta|z|^2+\left(1-|z|^2\right)zf''(z)}{f'(z)-\beta}-\frac{\left(\bar{A}-\bar{B}\right)\left(A+B\right)}{4-|A-B|^2}\right| \leq \frac{2|A+B|}{4-|A-B|^2} \tag{4.32}$$

eşitsizlikleri sağlanırsa, f fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde ünivalenttir.

İspat: Sonuç 4.1.8 de $g(z)=f'(z)$ alınırsa ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.1.13: Sonuç 4.1.12 de β yı reel sayı olarak göz önüne alalım ve $\beta<0$ olsun. Bazı elementer işlemlerden sonra $A=B=1$ için (4.31) eşitsizliğinden

$$\Re f'(z) > \frac{1}{2\beta}\left|f'(z)\right|^2, \quad z \in \mathbb{U} \tag{4.33}$$

ve (4.33) eşitsizliğinden $\beta \to -\infty$ için

$$\Re f'(z) > 0$$

elde edilir.

Burada Sonuç 4.1.12 nin bir limit durumunda Alexander-Noshiro-Warshawski ünivalentlik kriteri (Teorem 3.5.1) sonucuna varılır.

4.2. İntegral operatörler için ünivalentlik kriterleri

Bu kısımda ilk olarak, $\mathcal{F}_{\alpha,\beta,\gamma}(z)=\left[\gamma\int\limits_0^z u^{\gamma-1}\left(f'(u)\right)^{\alpha}\left(\frac{g(u)}{\phi(u)}\right)^{\beta}du\right]^{1/\gamma}$ integral operatörünün ünivalentliği için yeter şartlar verilmiştir.

Teorem 4.2.1: $g(z)\neq 0$ ve $\phi(z)\neq 0$ olmak üzere $f,g,\phi\in\mathcal{A}$ olsun. Ayrıca $m\in\mathbb{R}_+$ ve $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{C}$ olsun. Eğer her $z\in\mathbb{U}$ için

$$\left|\frac{\left(1-|z|^{(m+1)\gamma}\right)}{\gamma}\left[\alpha\frac{zf''(z)}{f'(z)}+\beta\left(\frac{zg'(z)}{g(z)}-\frac{z\phi'(z)}{\phi(z)}\right)\right]-\frac{m-1}{2}\right|\leq\frac{m+1}{2} \tag{4.34}$$

eşitsizliği sağlanırsa

$$\mathcal{F}_{\alpha,\beta,\gamma}(z)=\left[\gamma\int\limits_0^z u^{\gamma-1}\left(f'(u)\right)^{\alpha}\left(\frac{g(u)}{\phi(u)}\right)^{\beta}du\right]^{1/\gamma} \tag{4.35}$$

şeklinde tanımlanan $\mathcal{F}_{\alpha,\beta,\gamma}$ integral operatörü $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik ve ünivalenttir (Orhan, Raducanu and Çağlar 2013).

İspat: a pozitif bir reel sayı olsun. $r\in(0,1]$ olmak üzere her $t\in[0,\infty)$ için

$$\begin{aligned}L(z,t)=\Bigg\{&\gamma\int\limits_0^{e^{-at}z}u^{\gamma-1}\left(f'(u)\right)^{\alpha}\left(\frac{g(u)}{\phi(u)}\right)^{\beta}du\\&+\left(e^{mat\gamma}-e^{-at\gamma}\right)z^{\gamma}\left(f'(e^{-at}z)\right)^{\alpha}\left(\frac{g(e^{-at}z)}{\phi(e^{-at}z)}\right)^{\beta}\Bigg\}^{1/\gamma}\end{aligned} \tag{4.36}$$

şeklinde tanımlanan $L:\mathbb{U}_r\times[0,\infty)\to\mathbb{C}$ fonksiyonu $\mathbb{U}_r$ diskinde analitiktir. Çünkü $f,g,\phi\in\mathcal{A}$ olduğundan

$$h(z)=\left(f'(z)\right)^{\alpha}\left(\frac{g(z)}{\phi(z)}\right)^{\beta}$$

fonksiyonu birim diskte analitiktir. Böylece $r_1\in(0,r]$ olmak üzere her $z\in\mathbb{U}_{r_1}$ için bir $\mathbb{U}_{r_1}$ diski mevcuttur. Öte yandan

$$h_1(z,t)=\gamma\int_0^{e^{-at}z} u^{\gamma-1}h(u)du$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Burada $\mathbb{U}_{r_1}$ diskinde analitik olan h_2 fonksiyonu için

$$h_1(z,t)=z^{\gamma}h_2(z,t)$$

eşitliği yazılır. Böylece

$$h_3(z,t)=h_2(z,t)+\left(e^{mat\gamma}-e^{-at\gamma}\right)h\left(e^{-at}z\right)$$

$\mathbb{U}_{r_1}$ diskinde analitik ve $z=0$ değeri için

$$h_3(0,t)=e^{mat\gamma}$$

olur. Bu yüzden her $t\in[0,\infty)$ için $h_3(0,0)=1,\ h_3(z,t)\neq 0$ ve $\lim_{t\to\infty}\left|h_3(z,t)\right|=\infty$ olduğundan dolayı $r_2\in\left(0,r_1\right]$ için $\mathbb{U}_{r_2}$ diski vardır ve bu diskte analitik olan ve $h_4(z,t)$ ile göstereceğimiz $\left[h_3(z)\right]^{1/\gamma}$ nın özel bir dalını seçebiliriz. Böylece (4.36) ifadesinden

$$L(z,t)=zh_4(z,t)=a_1(t)+a_2(t)z^2+... \qquad (4.37)$$

yazılır ve $L(z,t)$ fonksiyonunun her $t\in[0,\infty)$ için $\mathbb{U}_{r_2}$ diskinde analitik olduğu görülür. Dolayısıyla $L(z,t)$ fonksiyonu, her $z\in\mathbb{U}_{r_2}$ için $[0,\infty)$ kümesi üzerinde sürekli diferensiyellenebilirdir.

Diğer taraftan yukarıdaki adımlar göz önünde bulundurulursa,

$$a_1(t)=e^{mat\gamma}$$

yazılır. Buradan

$$\lim_{t\to\infty}\left|a_1(t)\right|=\infty$$

elde edilir. Ayrıca her $t\in[0,\infty)$ için $a_1(t)\neq 0$ dır.

$r_3\in(0,r_2]$ ve $K=\left\{z\in\mathbb{C}:\left|z\right|\leq r_3\right\}$ olsun. $L(z,t)$, $\mathbb{U}_{r_2}$ diskinde analitik olduğundan her $t\in[0,\infty)$ için

$$\left|\frac{L(z,t)}{a_1(t)}\right|\leq K \qquad \left(z\in\mathbb{U}_{r_2}\right)$$

olacak şekilde $K>0$ sayısı vardır. Böylece $\left\{\dfrac{L(z,t)}{a_1(t)}\right\}_{t\in[0,\infty)}$ $\mathbb{U}_{r_2}$ diskinde analitik fonksiyonların bir normal ailesidir.

(4.37) den $\left\{\dfrac{\partial L(z,t)}{\partial t}\right\}$ nin $\mathbb{U}_{r_2}$ diskinde analitik olduğu kolaylıkla görülür. Her $T>0$ ve $z\in\mathbb{U}_{r_2}$ için $\left|\dfrac{\partial L(z,t)}{\partial t}\right|$, $[0,T]$ aralığında sınırlıdır. Böylece Önerme 2.1.18 in (ii) şıkkından $L(z,t)$ fonksiyonu, $[0,\infty)$ kümesinde yerel mutlak sürekli, $\mathbb{U}_{r_2}$ diskine göre de yerel düzgün süreklidir.

Son olarak $0<r\le r_2$ ve $t\ge 0$ için $p:\mathbb{U}_r\times[0,\infty)\to\mathbb{C}$ fonksiyonu

$$p(z,t)=z\frac{\partial L(z,t)}{\partial z}\bigg/\frac{\partial L(z,t)}{\partial t}$$

biçiminde tanımlansın. Birim diskte $p(z,t)$ fonksiyonunun reel kısmı pozitif olacak şekilde analitik bir genişlemeye sahip olduğunu göstermek için, her $z\in\mathbb{U}$ ve her $t\in[0,\infty)$ için

$$w(z,t)=\frac{p(z,t)-1}{p(z,t)+1}=\frac{\dfrac{z\partial L(z,t)}{\partial z}-\dfrac{\partial L(z,t)}{\partial t}}{\dfrac{z\partial L(z,t)}{\partial z}+\dfrac{\partial L(z,t)}{\partial t}} \tag{4.38}$$

fonksiyonunun $\mathbb{U}\times[0,\infty)$ kümesinde analitik ve $|w(z,t)|<1$ eşitsizliğini sağladığını göstermek yeterli olacaktır. Burada (4.38) eşitliğinden her $z\in\mathbb{U}$ ve her $t\in[0,\infty)$ için

$$\mathcal{G}(z,t)=\frac{1}{\gamma}\left[\alpha\frac{e^{-at}zf''(e^{-at}z)}{f'(e^{-at}z)}+\beta\left(\frac{e^{-at}zg'(e^{-at}z)}{g(e^{-at}z)}-\frac{e^{-at}z\phi'(e^{-at}z)}{\phi(e^{-at}z)}\right)\right]\left(1-e^{-(m+1)at\gamma}\right) \tag{4.39}$$

olmak üzere

$$w(z,t)=\frac{(1+a)\mathcal{G}(z,t)+1-ma}{(1-a)\mathcal{G}(z,t)+1+ma} \tag{4.40}$$

yazılır. Her $z\in\mathbb{U}$ ve her $t\in[0,\infty)$ için (4.40) ile tanımlanan $w(z,t)$ fonksiyonu için $|w(z,t)|<1$ ifadesi,

$$\left|\mathcal{G}(z,t)-\frac{m-1}{2}\right|<\frac{m+1}{2} \tag{4.41}$$

biçimindeki eşitsizliğe denktir. İşlemlerin kolaylığı açısından

$$\mathcal{H}(z,t)=\mathcal{G}(z,t)-\frac{m-1}{2},\quad \forall z\in\mathbb{U},\ t\in[0,\infty)$$

fonksiyonunu tanımlayalım.

Diğer taraftan her $z \in \overline{\mathbb{U}} = \{ z \in \mathbb{C} : |z| \le 1 \}$ ve $t > 0$ için $|e^{-at} z| \le |e^{-at}| = e^{-at} < 1$ olduğundan $\mathcal{H}(z,t)$ fonksiyonu $\overline{\mathbb{U}}$ kapalı birim diskinde analitiktir. Maksimum modül prensibinden her $z \in \mathbb{U}$ ve keyfi olarak seçilen her $t > 0$ sayısı için

$$|\mathcal{H}(z,t)| < \max_{|z|=1} |\mathcal{H}(z,t)| = |\mathcal{H}(e^{i\theta},t)| \tag{4.42}$$

olacak şekilde $\theta = \theta(t) \in \mathbb{R}$ mevcuttur. Ayrıca $u = e^{-at} e^{i\theta}$ olsun. Buradan $|u| = e^{-at}$, $e^{-(m+1)at} = (e^{-at})^{(m+1)} = |u|^{m+1}$ ve (4.39) eşitliklerinden

$$|\mathcal{H}(e^{i\theta},t)| = \left| \frac{\left(1-|u|^{(m+1)\gamma}\right)}{\gamma} \left[\alpha \frac{uf''(u)}{f'(u)} + \beta \left(\frac{ug'(u)}{g(u)} - \frac{u\phi'(u)}{\phi(u)} \right) \right] - \frac{m-1}{2} \right|$$

elde edilir. Dolayısıyla $u \in \mathbb{U}$ olduğu için (4.34) ifadesinden

$$|\mathcal{H}(e^{i\theta},t)| \le \frac{m+1}{2} \tag{4.43}$$

eşitsizliği bulunur. Sonuç olarak (4.42) ve (4.44) ifadelerinden, her $z \in \mathbb{U}$ ve her $t \in [0,\infty)$ için (4.41) eşitsizliği sağlanır. Böylece her $z \in \mathbb{U}$ ve her $t \in [0,\infty)$ için $|w(z,t)| < 1$ olur.

Tüm bu durumlar göz önüne alındığında, Teorem 3.4.4 ün bütün şartları sağlanacağından $L(z,t)$ fonksiyonunun her $t \in [0,\infty)$ için $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik ve ünivalent bir genişlemeye sahip olduğu görülür. Eğer $L(z,t)$ fonksiyonunda $t = 0$ alınırsa her $z \in \mathbb{U}$ için $L(z,0) = \mathcal{F}_{\alpha,\beta,\gamma}(z)$ elde edilir. Dolayısıyla $\mathcal{F}_{\alpha,\beta,\gamma}$ integral operatörü $\mathbb{U}$ diskinde analitik ve ünivalenttir.

Teorem 4.2.1 kullanılarak $\mathcal{F}_{\alpha,\beta,\gamma}$ integral operatörü için aşağıdaki ünivalentlik kriteri verilmiştir.

Teorem 4.2.2: $g(z) \ne 0$ ve $\phi(z) \ne 0$ olmak üzere $f, g, \phi \in \mathcal{A}$ olsun. Ayrıca $m \in \mathbb{R}_+$, $m \ge 1$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ ve $\Re\gamma > 0$ olsun. Eğer her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\frac{1-|z|^{(m+1)\Re\gamma}}{\Re\gamma} \left| \alpha \frac{zf''(z)}{f'(z)} + \beta \left(\frac{zg'(z)}{g(z)} - \frac{z\phi'(z)}{\phi(z)} \right) \right| \le 1$$

eşitsizliği sağlanırsa, (4.35) ile tanımlanan $\mathcal{F}_{\alpha,\beta,\gamma}$ integral operatörü $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik ve ünivalenttir.

İspat: $z\in\mathbb{U}\setminus\{0\}$, $\Re\gamma>0$ ve $m\in\mathbb{R}_+$ için

$$\left|\frac{1-|z|^{(m+1)\gamma}}{\gamma}\right|\le\frac{1-|z|^{(m+1)\Re\gamma}}{\Re\gamma}$$

dır. $m\ge1$ için

$$\left|\frac{1-|z|^{(m+1)\gamma}}{\gamma}\left[\alpha\frac{zf''(z)}{f'(z)}+\beta\left(\frac{zg'(z)}{g(z)}-\frac{z\phi'(z)}{\phi(z)}\right)\right]-\frac{m-1}{2}\right|$$

$$\le\left|\frac{1-|z|^{(m+1)\gamma}}{\gamma}\left[\alpha\frac{zf''(z)}{f'(z)}+\beta\left(\frac{zg'(z)}{g(z)}-\frac{z\phi'(z)}{\phi(z)}\right)\right]\right|+\frac{m-1}{2}$$

$$\le\frac{1-|z|^{(m+1)\Re\gamma}}{\Re\gamma}\left|\alpha\frac{zf''(z)}{f'(z)}+\beta\left(\frac{zg'(z)}{g(z)}-\frac{z\phi'(z)}{\phi(z)}\right)\right|+\frac{m-1}{2}$$

$$\le1+\frac{m-1}{2}=\frac{m+1}{2}$$

elde edilir. Teorem 4.2.1 kullanılarak (4.34) eşitsizliği sağlandığından $\mathcal{F}_{\alpha,\beta,\gamma}$ integral operatörü $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik ve ünivalenttir.

Bieberbach tahminin ispatında hipergeometrik fonksiyonların kullanılması, geometrik fonksiyonlar teorisinde bu fonksiyonların önem sırasını üst sıralara taşımıştır.

$a,b,c\in\mathbb{C}$ olmak üzere, $c\neq0,-1,-2,-3,...$ ve $|z|<1$ için

$${}_2F_1(a,b;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!}$$

kuvvet serisine hipergeometrik fonksiyon denir. Burada $n\in\mathbb{N}_0$, $q\in\mathbb{C}$ ve $q\neq0$ olmak üzere $(q)_n$,

$$(q)_n=\begin{cases}1, & n=0\\ q(q+1)...(q+n-1), & n>0\end{cases}$$

ile tanımlanan Pochhammer sembolüdür.

Örnek 4.2.3: $\Re\gamma > 0$ ve $\Re\gamma \geq |\alpha| + |\beta|$ şartları altında $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ olsun. O halde

$$\mathcal{F}_{\alpha,\beta,\gamma}(z) = z\left[{}_2F_1\left(\gamma, -(\alpha+\beta); 1+\gamma; -\frac{z}{2}\right)\right]^{1/\gamma}$$

fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde ünivalenttir.

Çözüm: Teorem 4.2.2 de $z \in \mathbb{U}$ olmak üzere $f(z) = z + \dfrac{z^2}{4}$, $g(z) = z + \dfrac{z^2}{2}$ ve $\phi(z) = z$ olarak alalım. Üçgen eşitsizliğinden,

$$\frac{1-|z|^{(m+1)\Re\gamma}}{\Re\gamma}\left|\alpha\frac{zf''(z)}{f'(z)} + \beta\left(\frac{zg'(z)}{g(z)} - \frac{z\phi'(z)}{\phi(z)}\right)\right| = \frac{1-|z|^{(m+1)\Re\gamma}}{\Re\gamma}\left|\alpha\frac{z}{z+2} + \beta\left(\frac{2z+2}{z+2} - 1\right)\right|$$
$$\leq \frac{1-|z|^{(m+1)\Re\gamma}}{\Re\gamma}\frac{|z|}{2-|z|}\left(|\alpha| + |\beta|\right) < \frac{1}{\Re\gamma}\left(|\alpha| + |\beta|\right) \leq 1$$

elde edilir. Son eşitsizlikte $z \in \mathbb{U}$ olmak üzere $1-|z|^{(m+1)\Re\gamma} < 1$, $\dfrac{|z|}{2-|z|} < 1$ eşitsizlikleri ve hipotezdeki $\Re\gamma \geq |\alpha| + |\beta|$ şartı kullanılmıştır. Teorem 4.2.2 nin tüm şartları sağlandığından

$$\mathcal{F}_{\alpha,\beta,\gamma}(z) = \left[\gamma\int_0^z u^{\gamma-1}\left(1+\frac{u}{2}\right)^{\alpha}\left(1+\frac{u}{2}\right)^{\beta} du\right]^{1/\gamma} \tag{4.44}$$

integral operatörü $\mathbb{U}$ birim diskinde ünivalenttir. (4.44) eşitliğinde $u = tz$ alınırsa,

$$\mathcal{F}_{\alpha,\beta,\gamma}(z) = \left[\gamma\int_0^1 t^{\gamma-1}\left(1+t\frac{z}{2}\right)^{\alpha+\beta} dt\right]^{1/\gamma} = z\left[{}_2F_1\left(\gamma, -(\alpha+\beta); 1+\gamma; -\frac{z}{2}\right)\right]^{1/\gamma}$$

elde edelir.

Teorem 4.2.1 de $\alpha = \beta$, $g(z) = z$ ve $\phi(z) = f(z)$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2.4: $f \in \mathcal{A}$ ve $m \in \mathbb{R}_+$ olsun. Eğer $z \in \mathbb{U}$ için

$$\left| \alpha \frac{\left(1-|z|^{(m+1)\gamma}\right)}{\gamma}\left[1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}-\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]-\frac{m-1}{2}\right| \leq \frac{m+1}{2}$$

eşitsizliği sağlanırsa

$$\mathcal{F}_{\alpha,\gamma}(z)=\left[\gamma\int_0^z u^{\gamma-1}\left(\frac{uf'(u)}{f(u)}\right)^{\alpha} du\right]^{1/\gamma}$$

şeklinde tanımlanan $\mathcal{F}_{\alpha,\gamma}$ integral operatörü $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik ve ünivalenttir.

Son olarak, $\mathcal{F}_{\beta}(z)=\left[\beta\int_0^z u^{\beta-1}f'(u)du\right]^{1/\beta}$ integral operatörü için ünivalentlik kriterleri verilmiştir.

Teorem 4.2.5: $f\in\mathcal{A}$ ve $m\in\mathbb{R}_+$ olsun. α ve β birer kompleks sayılar olmak üzere $\Re\alpha<1/2$ ve $\Re\beta>0$ şartları sağlansın. Ayrıca, $\mathbb{U}$ birim diskinde $g(z)=1+b_1z+...$ ve $h(z)=c_0+c_1z+...$ analitik fonksiyonlarını göz önüne alalım. Eğer her $z\in\mathbb{U}$ için

$$\left|\frac{f'(z)}{g(z)-\alpha}-\frac{m+1}{2}\right|<\frac{m+1}{2} \tag{4.45}$$

ve

$$\left|\left(\frac{f'(z)}{g(z)-\alpha}-1\right)|z|^{\beta(m+1)}+\left(1-|z|^{\beta(m+1)}\right)\left[2z^{\beta}\frac{f'(z)h(z)}{g(z)-\alpha}+\frac{1}{\beta}\frac{zg'(z)}{g(z)-\alpha}\right]\right.$$
$$\left.+\frac{z^{\beta+1}\left(1-|z|^{\beta(m+1)}\right)^2}{|z|^{\beta(m+1)}}\left[\frac{z^{\beta-1}f'(z)h^2(z)}{g(z)-\alpha}+\frac{1}{\beta}\left(\frac{g'(z)h(z)}{g(z)-\alpha}-h'(z)\right)\right]-\frac{m-1}{2}\right| \tag{4.46}$$
$$\leq\frac{m+1}{2}$$

eşitsizlikleri sağlanırsa

$$\mathcal{F}_{\beta}(z)=\left[\beta\int_0^z u^{\beta-1}f'(u)du\right]^{1/\beta} \tag{4.47}$$

şeklinde tanımlanan $\mathcal{F}_{\beta}$ integral operatörü $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik ve ünivalenttir (Çağlar and Orhan 2013c).

İspat: $r \in (0,1]$ olmak üzere her $t \in [0,\infty)$ için

$$L(z,t)=\left\{\beta\int_0^{e^{-t}z} u^{\beta-1}f'(u)du+\frac{\left(e^{\beta mt}-e^{-\beta t}\right)z^{\beta}\left(g(e^{-t}z)-\alpha\right)}{1+\left(e^{\beta mt}-e^{-\beta t}\right)z^{\beta}h(e^{-t}z)}\right\}^{1/\gamma} \tag{4.48}$$

şeklinde tanımlanan $L:\mathbb{U}_r\times[0,\infty)\to\mathbb{C}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu fonksiyon $\mathbb{U}_r$ diskinde analitiktir. İspatın bundan sonraki kısmı olan $L(z,t)$ nin Loewner zinciri olduğunu göstermek için sırasıyla Teorem 4.2.1 in ispatındaki adımları izlemek yeterlidir.

Teorem 4.2.5 de $g(z)=f'(z)$ alınırsa aşağıdaki ünivalentlik kriteri elde edilir.

Sonuç 4.2.6: $f\in\mathcal{A}$ ve $m\in\mathbb{R}_+$ olsun. α ve β kompleks sayılar olmak üzere $\Re\alpha<1/2$ ve $\Re\beta>0$ şartları sağlansın. Ayrıca, $\mathbb{U}$ birim diskinde $h(z)=c_0+c_1z+...$ analitik fonksiyonunu göz önüne alalım. Eğer her $z\in\mathbb{U}$ için

$$\left|\frac{f'(z)}{f'(z)-\alpha}-\frac{m+1}{2}\right|<\frac{m+1}{2} \tag{4.49}$$

ve

$$\left|\left(\frac{f'(z)}{f'(z)-\alpha}-1\right)|z|^{\beta(m+1)}+\left(1-|z|^{\beta(m+1)}\right)\left[2z^{\beta}\frac{f'(z)h(z)}{f'(z)-\alpha}+\frac{1}{\beta}\frac{zf''(z)}{f'(z)-\alpha}\right]\right.$$
$$\left.+\frac{z^{\beta+1}\left(1-|z|^{\beta(m+1)}\right)^2}{|z|^{\beta(m+1)}}\left[\frac{z^{\beta-1}f'(z)h^2(z)}{f'(z)-\alpha}+\frac{1}{\beta}\left(\frac{f''(z)h(z)}{f'(z)-\alpha}-h'(z)\right)\right]-\frac{m-1}{2}\right| \tag{4.50}$$
$$\leq\frac{m+1}{2}$$

eşitsizlikleri sağlanırsa (4.47) ile tanımlanan $\mathcal{F}_{\beta}$ integral operatörü $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik ve ünivalenttir.

Eğer Sonuç 4.2.6 da $h(z)=f''(z)$ alınırsa aşağıdaki ünivalentlik kriteri elde edilir.

Sonuç 4.2.7: $f \in \mathcal{A}$ ve $m \in \mathbb{R}_+$ olsun. α ve β kompleks sayılar olmak üzere $\Re\alpha < 1/2$ ve $\Re\beta > 0$ şartları sağlansın. Eğer her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\left| \frac{f'(z)}{f'(z)-\alpha} - \frac{m+1}{2} \right| < \frac{m+1}{2} \tag{4.51}$$

ve

$$\begin{aligned} &\left| \left(\frac{f'(z)}{f'(z)-\alpha} - 1 \right) |z|^{\beta(m+1)} + z\left(1-|z|^{\beta(m+1)}\right) \left[\frac{f''(z)}{f'(z)-\alpha} \left(2z^{\beta-1} f'(z) + \frac{1}{\beta} \right) \right] \right. \\ &\left. + \frac{z^{\beta+1}\left(1-|z|^{\beta(m+1)}\right)^2}{|z|^{\beta(m+1)}} \left[\frac{\left(f''(z)\right)^2}{f'(z)-\alpha} \left(z^{\beta-1} f'(z) + \frac{1}{\beta} \right) - \frac{1}{\beta} f'''(z) \right] - \frac{m-1}{2} \right| \\ &\le \frac{m+1}{2} \end{aligned} \tag{4.52}$$

eşitsizlikleri sağlanırsa (4.47) ile tanımlanan $\mathcal{F}_\beta$ integral operatörü $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik ve ünivalenttir.

Sonuç 4.2.8: $f \in \mathcal{A}$ ve $m \in \mathbb{R}_+$ olsun. α ve β kompleks sayılar olmak üzere $\Re\alpha < 1/2$ ve $\Re\beta > 0$ şartları sağlansın. Eğer her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\left| \frac{f'(z)}{f'(z)-\alpha} - \frac{m+1}{2} \right| < \frac{m+1}{2} \tag{4.53}$$

ve

$$\left| \left(\frac{f'(z)}{f'(z)-\alpha} - 1 \right) |z|^{\beta(m+1)} + \left(1-|z|^{\beta(m+1)}\right) \left[\frac{1}{\beta} \frac{zf''(z)}{f'(z)-\alpha} \right] - \frac{m-1}{2} \right| \le \frac{m+1}{2} \tag{4.54}$$

eşitsizlikleri sağlanırsa (4.47) ile tanımlanan $\mathcal{F}_\beta$ integral operatörü $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik ve ünivalenttir.

İspat: Sonuç 4.2.6 da $g(z) = f'(z)$ ve $h(z) = 0$ alınırsa istenen sonuç elde edilir.

Teorem 4.2.5 de $g(z) = f'(z)$, $h(z) = -\frac{1}{2}\frac{f''(z)}{f'(z)}$, $\alpha = 0$ ve $\beta = 1$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2.9: $f \in \mathcal{A}$ ve $m \in \mathbb{R}_{+}$ olsun. Eğer her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\left| \frac{z^2 \left(1-|z|^{m+1}\right)^2}{|z|^{m+1}} \left(\frac{1}{2} S_f(z) \right) - \frac{m-1}{2} \right| < \frac{m+1}{2} \tag{4.55}$$

eşitsizliği sağlanırsa f fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik ve ünivalenttir.

Sonuç 4.2.10: $f \in \mathcal{A}$ ve $m \in \mathbb{R}_{+}$ olsun. β bir kompleks sayı olmak üzere $\Re\beta > 0$ şartı sağlansın. Eğer her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\left| \frac{\left(1-|z|^{\beta(m+1)}\right)}{\beta} \left(\frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) - \frac{m-1}{2} \right| \leq \frac{m+1}{2} \tag{4.56}$$

eşitsizliği sağlanırsa (4.47) ile tanımlanan $\mathcal{F}_{\beta}$ integral operatörü $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik ve ünivalenttir.

İspat: Sonuç 4.2.8 de $\alpha = 0$ alınırsa ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.2.5 de $g(z) = \left(\dfrac{f(z)}{z} \right)^2$, $h(z) = 0,$ $\alpha = 0$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2.11: $f \in \mathcal{A}$ ve $m \in \mathbb{R}_{+}$ olsun. β bir kompleks sayı olmak üzere $\Re\beta > 0$ şartı sağlansın. Eğer her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\left| \frac{z^2 f'(z)}{f^2(z)} - \frac{m+1}{2} \right| < \frac{m+1}{2} \tag{4.57}$$

ve

$$\left| \left(\frac{z^2 f'(z)}{f^2(z)} - 1 \right) |z|^{\beta(m+1)} + \frac{2\left(1-|z|^{\beta(m+1)}\right)}{\beta} \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right) - \frac{m-1}{2} \right| \leq \frac{m+1}{2} \tag{4.58}$$

eşitsizlikleri sağlanırsa (4.47) ile tanımlanan $\mathcal{F}_{\beta}$ integral operatörü $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik ve ünivalenttir.

Örnek 4.2.12: $\mathcal{F}_2(z)=\left(2\int_0^z uf'(u)du\right)^{1/2}$ integral operatörünün $\mathbb{U}$ birim diskinde ünivalentliğini göstermek için $f(z)=\dfrac{z}{1-\dfrac{z^2}{2}}$ fonksiyonunu göz önüne alalım.

Buradan,

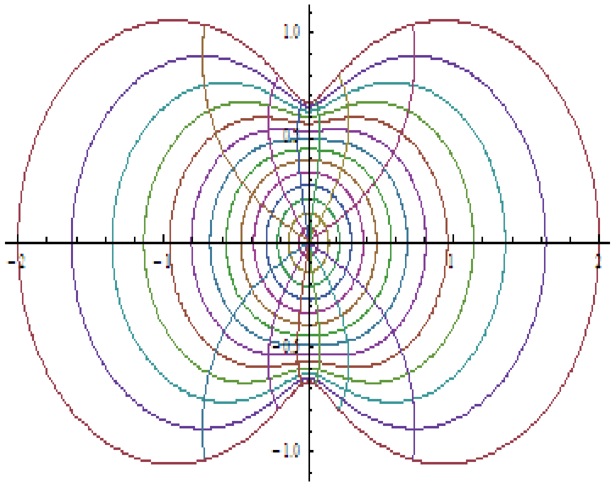
$$\frac{z^2 f'(z)}{f^2(z)}-1=\frac{z^2}{2},\quad \frac{zf'(z)}{f(z)}-1=\frac{2z^2}{2-z^2} \tag{4.59}$$

yazılır. (4.59) eşitlikleri, $m=1,\ \beta=2$ için (4.58) eşitsizliğinde dikkate alınırsa,

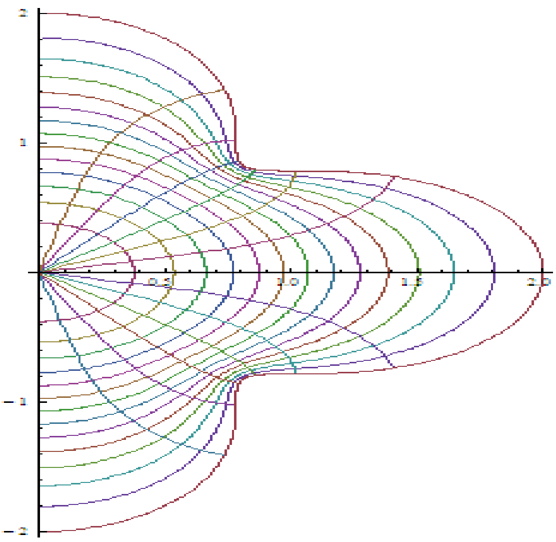
$$\begin{aligned}\left|\frac{z^2}{2}|z|^4+\left(1-|z|^4\right)\frac{2z^2}{2-z^2}\right| &\leq \frac{|z|^6}{2}+2(1-|z|^4)|z|^2\\ &=\frac{1}{2}\left(4|z|^2-3|z|^6\right)<1\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Çünkü, $x\in[0,1]$ için $g(x)=4x^2-3x^6$ fonksiyonu en büyük değerini $x=\sqrt{2/3}$ noktasında alır ve $g\left(\sqrt{2/3}\right)=24/27$ dir. Buda gösterilmek istenen sonuçtur.

$f(z)=\dfrac{z}{1-\dfrac{z^2}{2}}$ ve $\mathcal{F}_2(z)=\left(2\int_0^z uf'(u)du\right)^{1/2}$ fonksiyonları altında birim diskin görüntüleri MATHEMATICA programı yardımıyla aşağıda verilmiştir.



Şekil 4.2. Birim diskin $f(z)=\dfrac{z}{1-\dfrac{z^2}{2}}$ fonksiyonu altındaki görüntüsü



Şekil 4.3. Birim diskin $\mathcal{F}_2(z)=\left(4\displaystyle\int_0^z \frac{2+u^2}{\left(2-u^2\right)^2}du\right)^{1/2}$ fonksiyonu altındaki görüntüsü

4.3. Meromorf fonksiyonlar için ünivalentlik kriterleri

Bu bölümde birim diskin dışı olan $\mathbb{U}^*=\{\zeta\in\mathbb{C}:|\zeta|>1\}$ kümesinde tanımlı fonksiyonlar için yeni ünivalentlik kriterleri verilmiştir.

Teorem 4.3.1: $f \in \Sigma$, $f'(\zeta) \neq 0$ ve $\mathbb{U}^*$ da $g(\zeta) = 1 + c_2\zeta^{-2} + ...$ analitik fonksiyonu verilsin. Ayrıca $s = \alpha + i\beta$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ ve $m \in \mathbb{R}_+$ olmak üzere $1/2 < m \leq \alpha$ şartı sağlansın. Eğer her $\zeta \in \mathbb{U}^*$ için

$$\left| \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)g(\zeta)} - \frac{ms}{\alpha} \right| < \frac{m|s|}{\alpha} \tag{4.60}$$

ve

$$\left| \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)g(\zeta)} - \left(2\ln|\zeta| \frac{\zeta g'(\zeta)}{g(\zeta)} + 1 \right) \frac{ms}{\alpha} \right| \leq \frac{m|s|}{\alpha} \tag{4.61}$$

eşitsizlikleri sağlanırsa, f fonksiyonu $\mathbb{U}^*$ kümesinde ünivalenttir (Çağlar and Orhan 2013d).

İspat: İlk olarak $r \in (0,1]$ sayısı için $L : \mathbb{U}_r \times [0,\infty) \to \mathbb{C}$,

$$L(z,t) = \frac{1}{f\left(e^{st}/z\right)} \left\{ e^{-2mtg\left(e^{st}/z\right)} \right\}^{-s} = a_1(t)z + a_2(t)z^2 + ... \tag{4.62}$$

şeklinde tanımlı $L(z,t)$ fonksiyonunun her $t \in [0,\infty)$ için $\mathbb{U}_r$ diskinde analitik olduğunu gösterelim. Burada her $\zeta \in \mathbb{U}^*$ için

$$\begin{aligned} f(e^{st}\zeta) &= e^{st}\zeta + b_0 + b_1 e^{-st}\zeta^{-1} + ..., \\ g(e^{st}\zeta) &= 1 + c_2 e^{-2st}\zeta^{-2} + ... \end{aligned} \tag{4.63}$$

dir. Şimdi $\phi_1 : \mathbb{U} \times [0,\infty) \to \mathbb{C}$

$$\phi_1(z,t) = e^{-2mtg\left(e^{st}/z\right)}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Her $t \in [0,\infty)$ ve $z \in \mathbb{U}$ için g fonksiyonu analitik olduğundan $\phi_1(z,t)$ fonksiyonu da analitik ve $\phi_1(0,t) = e^{-2mt} \neq 0$ dır. Dolayısıyla $\phi_1(z,t) \neq 0$ olacak şekilde bir $\mathbb{U}_{r_1}$ $(0 < r_1 < 1)$ diski vardır. Bu diskte $\phi_2(z,t)$ ile tanımlayacağımız $\left(\phi_1(z,t)\right)^{-s}$ nin uygun bir dalını seçebiliriz. Buradan her $t \in [0,\infty)$ ve $z \in \mathbb{U}_{r_1}$ için $\phi_2(z,t)$ analitik, $\phi_2(0,t) = e^{2mst}$ ve $\phi_2(z,t) \neq 0$ olduğu kolayca görülür. Yukarıdaki ifadeler ile birlikte

$$L(z,t) = \frac{\phi_2(z,t)}{f(e^{st}/z)} = a_1(t)z + a_2(t)z^2 + ... \tag{4.64}$$

fonksiyonunun her $t \in [0,\infty)$ için $\mathbb{U}_{r_1}$ diskinde analitik olduğu açıktır. (4.64) eşitliğinden

$$L(z,t) = e^{s(2m-1)t}z + ... \tag{4.65}$$

açılımına sahiptir. (4.65) serisi (4.62) serisi ile karşılaştırıldığında,

$$a_1(t) = e^{s(2m-1)t} \tag{4.66}$$

kat sayısı bulunur ve her $t \in [0,\infty)$ için $a_1(t) \neq 0$ dır. Teoremin hipotezinden $\alpha > 0$ ve $1/2 < m \leq \alpha$ olduğundan

$$\lim_{t\to\infty}|a_1(t)| = \lim_{t\to\infty}\left|e^{s(2m-1)t}\right| = \lim_{t\to\infty}e^{\alpha(2m-1)t} = \infty$$

olur. Ayrıca (4.62), (4.63) ve (4.66) dan

$$\frac{L(z,t)}{a_1(t)} = \frac{z}{e^{s(2m-1)t}\left(e^{st} + b_0 z + b_1 e^{-st}z^2 + ...\right)}\phi_2(z,t)$$

$$= \frac{z}{\left(1 + b_0 e^{-st}z + b_1 e^{-2st}z^2 + ...\right)e^{-2mst\left(c_1 e^{-2st}z^2 + ...\right)}}$$

elde edilir ve son eşitlikte $t \to \infty$ için her iki tarafın limiti alınırsa

$$\lim_{t\to\infty}\frac{L(z,t)}{a_1(t)} = z$$

bulunur. Bu yakınsama aynı zamanda düzgün olduğundan, Lemma 2.2.18 den $t \in [0,\infty)$ için $0 < r_2 < r_1$ olacak şekilde $\mathbb{U}_{r_2}$ kapalı diski vardır ki, bu diskte $\{L(z,t)/a_1(t)\}$ düzgün sınırlı, yani

$$\left|\frac{L(z,t)}{a_1(t)}\right| < K$$

olacak biçimde bir $K = K(r_2) > 0$ sayısı mevcuttur. Dolayısıyla Lemma 2.2.17 den $\{L(z,t)/a_1(t)\}$ ailesi $\mathbb{U}_{r_2}$ diskinde yerel düzgün sınırlıdır. Böylece Montel teoreminden

$$\left\{\frac{L(z,t)}{a_1(t)}\right\}_{t\in[0,\infty)}$$ ailesi $\mathbb{U}_{r_2}$ kümesinde bir normal ailedir.

Diğer taraftan $L(z,t)$ nin kısmi türevleri

$$z\frac{\partial L(z,t)}{\partial z}=\frac{e^{st}}{z}\frac{f'(e^{st}/z)}{f^2(e^{st}/z)}\left[\phi_2(z,t)\right]-2mst\frac{e^{st}}{z}\frac{g'(e^{st}/z)}{f^2(e^{st}/z)}\left[\phi_2(z,t)\right]^{(1+s)/s} \tag{4.67}$$

ve

$$\begin{aligned}\frac{\partial L(z,t)}{\partial t}&=-s\frac{e^{st}}{z}\frac{f'(e^{st}/z)}{f^2(e^{st}/z)}\left[\phi_2(z,t)\right]\\&+s\left[2m\frac{g(e^{st}/z)}{f(e^{st}/z)}+2mts\frac{e^{st}}{z}\frac{g'(e^{st}/z)}{f(e^{st}/z)}\right]\left[\phi_2(z,t)\right]^{(1+s)/s}\end{aligned} \tag{4.68}$$

olarak hesaplanır.

ϕ_2, g ve $L(z,t)$ fonksiyonları analitik olduklarından dolayı (4.68) den $\dfrac{\partial L(z,t)}{\partial t}$ fonksiyonu da $\mathbb{U}_{r_2}$ diskinde analitik olur. Böylece $T>0$ ve $0<r_3<r_2$ olacak şekilde her $t\in[0,T]$ ve her $z\in\mathbb{U}_{r_3}$ için

$$\left|\frac{\partial L(z,t)}{\partial t}\right|<K$$

eşitsizliğini sağlayan $K=K(T,r_3)>0$ sayısı mevcuttur. Dolayısıyla Önerme 2.1.18 in (i) şıkkından, $L(z,t)$ fonksiyonu $t\in[0,\infty)$ için yerel mutlak sürekli ve $z\in\mathbb{U}_{r_3}$ e göre yerel düzgün süreklidir.

$$p(z,t)=z\frac{\partial L(z,t)}{\partial z}\bigg/\frac{\partial L(z,t)}{\partial t}$$

şeklinde tanımlanan $p(z,t)$ fonksiyonu her $t\geq 0$ için $\mathbb{U}_r$ diskinde analitiktir. Son olarak $p(z,t)$ fonksiyonunun birim diskte analitik bir genişlemesinin olduğunu ve her $t\geq 0$ için $\Re p(z,t)>0$ eşitsizliğinin sağlandığını göstermek için

$$w(z,t)=\frac{p(z,t)-1}{p(z,t)+1},\quad (z\in\mathbb{U}_r,\ t\geq 0) \tag{4.69}$$

şeklinde tanımlanan $w(z,t)$ fonksiyonunun birim diskte analitik bir genişlemesinin ve her $z\in\mathbb{U}$, $t\geq 0$ için $|w(z,t)|<1$ olduğunu göstermek yeterlidir. Burada (4.69) eşitliğinde (4.67), (4.68) ifadeleri ve z yerine de $\zeta\in\mathbb{U}^*$ yazılırsa, her $\zeta\in\mathbb{U}^*$ ve her $t\in[0,\infty)$ için

$$w(\zeta,t)=\frac{(1+s)\mathcal{G}(\zeta,t)-2}{(1-s)\mathcal{G}(\zeta,t)+2} \tag{4.70}$$

elde edilir. Burada her $\zeta \in \mathbb{U}^*$ için

$$\mathcal{G}(\zeta,t) = \frac{1}{ms}\frac{e^{st}\zeta f'(e^{st}\zeta)}{f(e^{st}\zeta)g(e^{st}\zeta)} - 2t\frac{e^{st}\zeta g'(e^{st}\zeta)}{g(e^{st}\zeta)} \tag{4.71}$$

dır. Her $\zeta \in \mathbb{U}^*$ ve $t \in [0,\infty)$ için (4.70) ile tanımlanan $w(\zeta,t)$ fonksiyonu için $|w(\zeta,t)| < 1$ eşitsizliği

$$\left|\mathcal{G}(\zeta,t) - \frac{1}{\alpha}\right| < \frac{1}{\alpha}, \quad (\zeta \in \mathbb{U}^*,\ t \in [0,\infty),\ \alpha = \Re(s)) \tag{4.72}$$

biçimindeki eşitsizliğe denktir. İşlemlerin kolaylığı açısından

$$\mathcal{H}(\zeta,t) = \mathcal{G}(\zeta,t) - \frac{1}{\alpha}, \quad (\zeta \in \mathbb{U}^*, t \in [0,\infty), \alpha = \Re(s))$$

fonksiyonunu tanımlayalım. (4.60), (4.71) ve (4.72) ifadelerinden $t = 0$ için

$$|\mathcal{H}(\zeta,0)| = \left|\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)g(\zeta)} - \frac{ms}{\alpha}\right| < \frac{m|s|}{\alpha} \tag{4.73}$$

bulunur. Diğer bir yandan her $\zeta \in \overline{\mathbb{U}}$ ve $t > 0$ için $\left|\frac{e^{st}}{\zeta}\right| \geq \left|e^{st}\right| = e^{\alpha t} > 1$ olduğundan $\mathcal{H}(\zeta,t)$ fonksiyonu $\overline{\mathbb{U}^*}$ kümesinde analitik bir fonksiyondur. Maksimum modül prensibini kullanarak her $\zeta \in \mathbb{U}^*$ ve keyfi sabit her $t > 0$ için

$$|\mathcal{H}(\zeta,t)| < \max_{|\zeta|=1} |\mathcal{H}(\zeta,t)| = |\mathcal{H}(e^{i\theta},t)| \tag{4.74}$$

olacak şekilde $\theta = \theta(t) \in \mathbb{R}$ mevcuttur. Ayrıca $u = e^{st}e^{-i\theta}$ olsun. Buradan $|u| = e^{\alpha t}$ $(\alpha = \Re(s))$ ve (4.71) eşitliklerinden

$$|\mathcal{H}(e^{i\theta},t)| = \left|\frac{uf'(u)}{f(u)g(u)} - \left(2\ln|u|\frac{ug'(u)}{g(u)} + 1\right)\frac{ms}{\alpha}\right|$$

elde edilir. Dolayısıyla $u \in \mathbb{U}^*$ olduğu için (4.61) eşitsizliğinden

$$|\mathcal{H}(e^{i\theta},t)| \leq \frac{m|s|}{\alpha} \tag{4.75}$$

eşitsizliği bulunur ve sonuç olarak (4.73) ve (4.75) eşitsizliklerinden, her $\zeta \in \mathbb{U}^*$ ve her $t \in [0,\infty)$ için (4.74) eşitsizliğinin gösterdiği

$$|\mathcal{H}(\zeta,t)| = \left|\mathcal{G}(\zeta,t) - \frac{1}{\alpha}\right| < \frac{1}{\alpha}$$

sağlanır. Böylece her $z \in \mathbb{U}$ ve her $t \in [0,\infty)$ için $|w(z,t)| < 1$ olur.

Tüm bu durumlar göz önüne alındığında Teorem 3.4.4 ün bütün şartları sağlanır ve $L(z,t)$ fonksiyonu her $t \in [0,\infty)$ için $\mathbb{U}$ birim diskinde bir Loewner zinciridir. Özel olarak $t = 0$ alınırsa $z \in \mathbb{U}$ için

$$L(z,0) = 1/f(z^{-1}) \qquad \left(f \in \Sigma \Leftrightarrow 1/f(z^{-1}) \in \mathcal{S}\right)$$

yazılır. Böylece $f(\zeta)$ fonksiyonu $\mathbb{U}^*$ da ünivalenttir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Eğer Teorem 4.3.1 de $g(\zeta) = \dfrac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.3.2: $f \in \Sigma$, $f'(\zeta) \neq 0$ verilsin. Ayrıca $s = \alpha + i\beta$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ ve $m \in \mathbb{R}_+$ olmak üzere $1/2 < m \leq \alpha$ şartı sağlansın. Eğer her $\zeta \in \mathbb{U}^*$ için

$$\left|1 - \left\{2\ln|\zeta|\left(1 + \frac{\zeta f''(\zeta)}{f'(\zeta)} - \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}\right) + 1\right\}\frac{ms}{\alpha}\right| \leq \frac{m|s|}{\alpha} \tag{4.76}$$

eşitsizliği sağlanırsa, f fonksiyonu $\mathbb{U}^*$ kümesinde ünivalenttir.

Sonuç 4.3.3: $f \in \Sigma$, $f'(\zeta) \neq 0$ verilsin. Ayrıca $s = \alpha + i\beta$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ ve $m \in \mathbb{R}_+$ olmak üzere $1/2 < m \leq \alpha$ şartı sağlansın. Eğer her $\zeta \in \mathbb{U}^*$ için

$$\left|f'(\zeta) - \frac{ms}{\alpha}\right| < \frac{m|s|}{\alpha} \tag{4.77}$$

ve

$$\left|f'(\zeta) - \left\{2\ln|\zeta|\left(1 - \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}\right) + 1\right\}\frac{ms}{\alpha}\right| \leq \frac{m|s|}{\alpha} \tag{4.78}$$

eşitsizlikleri sağlanırsa, f fonksiyonu $\mathbb{U}^*$ kümesinde ünivalenttir.

İspat: Teorem 4.3.1 de $g(\zeta) = \dfrac{\zeta}{f(\zeta)}$ alınırsa istenen sonuç elde edilir.

Eğer Teorem 4.3.1 de $g(\zeta)=1$ alınırsa aşağıdaki basit ünivalentlik şartı elde edilir.

Sonuç 4.3.4: $f\in\Sigma,\ \ f'(\zeta)\neq 0$ verilsin. Ayrıca $s=\alpha+i\beta,\ \alpha>0,\ \ \beta\in\mathbb{R}$ ve $m\in\mathbb{R}_+$ olmak üzere $1/2<m\leq\alpha$ şartı sağlansın. Eğer her $\zeta\in\mathbb{U}^*$ için

$$\left|\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}-\frac{ms}{\alpha}\right|<\frac{m|s|}{\alpha} \tag{4.79}$$

eşitsizliği sağlanırsa, f fonksiyonu $\mathbb{U}^*$ kümesinde ünivalenttir.

Bu bölümde ise 4.1-4.3 kısımlarda elde edilen ünivalentlik kriterleri için Teorem 3.7.18 yardımıyla quasikonform genişleme kriterleri verilmiştir.

4.4. Birim diskte quasikonform genişleme kriterleri

Teorem 4.4.1: $f\in\mathcal{A}$ ve $k\in[0,1)$ olsun. $m>1$ ve $\alpha\in\mathbb{C}$ olmak üzere $\Re\alpha>1/m$ şartı sağlansın. Ayrıca, $\mathbb{U}$ birim diskinde $g(z)=1+b_1z+\ldots$ ve $h(z)=d_1z+d_2z^2+\ldots$ analitik fonksiyonlarını göz önüne alalım. Eğer her $z\in\mathbb{U}$ için

$$\left|\frac{f'(z)}{\alpha g(z)}-\frac{m}{2}\right|<k\frac{m}{2} \tag{4.80}$$

ve

$$\begin{aligned}&\left||z|^m\frac{f'(z)}{\alpha g(z)}+\frac{z(1-|z|^m)^2}{2|z|^2}\left\{\left(\frac{(1-\alpha)}{\alpha}\frac{zf'(z)}{f(z)}+1\right)\frac{h(z)}{g(z)}+\frac{zh'(z)}{g(z)}\right\}\right.\\&\left.+(1-|z|^m)\left\{1+\frac{(1-\alpha)}{\alpha}\frac{zf'(z)}{f(z)}+\frac{zg'(z)}{g(z)}\right\}-\left(1+\frac{z(1-|z|^{2m})}{2|z|^2}\frac{h(z)}{g(z)}\right)\frac{m}{2}\right|\\&\leq k\left|\frac{z(1-|z|^m)^2}{2|z|^2}\frac{h(z)}{g(z)}+\left(1+\frac{z(1-|z|^{2m})}{2|z|^2}\frac{h(z)}{g(z)}\right)\frac{m}{2}\right|\end{aligned} \tag{4.81}$$

eşitsizlikleri sağlanırsa f fonksiyonu $\mathbb{C}$ de k-quasikonform genişlemeye sahiptir (Çağlar and Orhan 2013a).

İspat: $m>1$ ve $r\in(0,1]$ olmak üzere her $t\in[0,\infty)$ için

$$L(z,t)=f^{1-\alpha}(e^{-t}z)\left[f(e^{-t}z)+(e^{mt}-1)e^{-t}zg(e^{-t}z)+\frac{(e^{mt}-1)^2}{2}e^{-mt}z^2h(e^{-t}z)\right]^{\alpha} \tag{4.82}$$

şeklinde tanımlanan $L:\mathbb{U}_r\times[0,\infty)\to\mathbb{C}$ fonksiyonunun $\mathbb{U}$ da bir Loewner zinciri olduğu Teorem 4.1.1 in ispatında gösterilmişti. O halde,

$$\begin{aligned}\left|\frac{p(z,t)-1}{p(z,t)+1}\right| &= \left[\frac{f'(e^{-t}z)}{\alpha g(e^{-t}z)}e^{-mt}+(1-e^{-mt})\left\{1+\frac{(1-\alpha)}{\alpha}\frac{e^{-t}zf'(e^{-t}z)}{f(e^{-t}z)}+\frac{e^{-t}zg'(e^{-t}z)}{g(e^{-t}z)}\right\}\right.\\ &\quad+\frac{(e^{mt}-1)^2e^{-2mt}z}{2}\left\{\left(\frac{(1-\alpha)}{\alpha}\frac{zf'(e^{-t}z)}{f(e^{-t}z)}+e^{t}\right)\frac{h(e^{-t}z)}{g(e^{-t}z)}+\frac{zh'(e^{-t}z)}{g(e^{-t}z)}\right\}\\ &\quad\left.-\left(1+\frac{(e^{2mt}-1)e^{-(2m-1)t}}{2}\frac{zh(e^{-t}z)}{g(e^{-t}z)}\right)\frac{m}{2}\right]\\ &\quad/\left[\frac{(e^{mt}-1)^2e^{-(2m-1)t}}{2}\frac{zh(e^{-t}z)}{g(e^{-t}z)}+\left(1+\frac{(e^{2mt}-1)e^{-(2m-1)t}}{2}\frac{zh(e^{-t}z)}{g(e^{-t}z)}\right)\frac{m}{2}\right]\\ &\le k\end{aligned} \tag{4.83}$$

elde edilir.

Böylece (4.81) den, (4.83) eşitsizliğinin sağ tarafı k dan küçük veya eşit olduğu görülür. Bu nedenle Teorem 3.4.4 ve Teorem 3.7.18 den f fonksiyonu $\mathbb{C}$ de k-quasikonform genişlemeye sahiptir.

Eğer Teorem 4.4.1 de $g(z)=f'(z)$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.4.2: $f\in\mathcal{A}$ ve $k\in[0,1)$ olsun. $m>1$ ve $\alpha\in\mathbb{C}$ olmak üzere $\Re\alpha>1/m$ şartı sağlansın. Ayrıca, $\mathbb{U}$ birim diskinde $h(z)=d_1z+d_2z^2+...$ analitik fonksiyonunu göz önüne alalım. Eğer her $z\in\mathbb{U}$ için

$$\left|\frac{|z|^m}{\alpha}+\frac{z(1-|z|^m)^2}{2|z|^2}\left\{\left(\frac{(1-\alpha)}{\alpha}\frac{zf'(z)}{f(z)}+1\right)\frac{h(z)}{f'(z)}+\frac{zh'(z)}{f'(z)}\right\}\right.$$
$$\left.+(1-|z|^m)\left\{1+\frac{(1-\alpha)}{\alpha}\frac{zf'(z)}{f(z)}+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}-\left(1+\frac{z(1-|z|^{2m})}{2|z|^2}\frac{h(z)}{f'(z)}\right)\frac{m}{2}\right| \tag{4.84}$$
$$\leq k\left|\frac{z(1-|z|^m)^2}{2|z|^2}\frac{h(z)}{f'(z)}+\left(1+\frac{z(1-|z|^{2m})}{2|z|^2}\frac{h(z)}{f'(z)}\right)\frac{m}{2}\right|$$

eşitsizliği sağlanırsa f fonksiyonu $\mathbb{C}$ de k-quasikonform genişlemeye sahiptir.

Sonuç 4.4.3: $f\in\mathcal{A}$, $m>1$ ve $k\in[0,1)$ olsun. Ayrıca, $\mathbb{U}$ birim diskinde $h(z)=d_1z+d_2z^2+...$ analitik fonksiyonunu göz önüne alalım. Eğer her $z\in\mathbb{U}$ için

$$\left||z|^m+\frac{z(1-|z|^m)^2}{2|z|^2}\left\{\frac{h(z)}{f'(z)}+\frac{zh'(z)}{f'(z)}\right\}+(1-|z|^m)\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}-\left(1+\frac{z(1-|z|^{2m})}{2|z|^2}\frac{h(z)}{f'(z)}\right)\frac{m}{2}\right|$$
$$\leq k\left|\frac{z(1-|z|^m)^2}{2|z|^2}\frac{h(z)}{f'(z)}+\left(1+\frac{z(1-|z|^{2m})}{2|z|^2}\frac{h(z)}{f'(z)}\right)\frac{m}{2}\right| \tag{4.85}$$

eşitsizliği sağlanırsa f fonksiyonu $\mathbb{C}$ de k-quasikonform genişlemeye sahiptir.

İspat: Sonuç 4.4.2 de $\alpha=1$ alındığında istenen sonuç elde edilir.

Sonuç 4.4.4: $f\in\mathcal{A}$ ve $k\in[0,1)$ olsun. $m>1$ ve $\alpha\in\mathbb{C}$ olmak üzere $\Re\alpha>1/m$ şartı sağlansın. Eğer her $z\in\mathbb{U}$ için

$$\left|\frac{|z|^m}{\alpha}+\left(1-|z|^m\right)\left\{1+\frac{(1-\alpha)}{\alpha}\frac{zf'(z)}{f(z)}+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}-\frac{m}{2}\right|\leq k\frac{m}{2} \tag{4.86}$$

eşitsizliği sağlanırsa f fonksiyonu $\mathbb{C}$ de k-quasikonform genişlemeye sahiptir.

İspat: Teorem 4.4.1 de $g(z)=f'(z)$ ve $h(z)=0$ alındığında istenen sonuç elde edilir.

Sonuç 4.4.4 de $\alpha=1$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.4.5: $f \in \mathcal{A}$, $m > 1$ ve $k \in [0,1)$ olsun. Eğer her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\left| |z|^m + \left(1 - |z|^m\right)\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) - \frac{m}{2} \right| \le k\frac{m}{2} \tag{4.87}$$

eşitsizliği sağlanırsa f fonksiyonu $\mathbb{C}$ de k-quasikonform genişlemeye sahiptir.

Teorem 4.4.6: $f \in \mathcal{A}$, $\beta \in \mathbb{C}$ ve $k \in [0,1)$ olsun. α, A ve B kompleks sayılar olmak üzere $\Re\alpha > 1/2$, $A + B \ne 0$, $|A - B| < 2$, $|A| \le 1$ ve $|B| \le 1$ şartları sağlansın. Ayrıca, $\mathbb{U}$ birim diskinde $g(z) = 1 + b_1 z + \ldots$ analitik fonksiyonunu göz önüne alalım. Eğer her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\left| \frac{1}{\alpha}\left(\frac{f'(z)}{g(z) - \beta} - 1 \right) \right| < \frac{k|A + B|}{2 - k|A - B|} \tag{4.88}$$

ve

$$\begin{aligned} &\left| \left(\frac{f'(z)}{g(z) - \beta} - 1 \right)|z|^2 + \left(1 - |z|^2\right)\left[\left(\frac{1 - \alpha}{\alpha} \right)\frac{zf'(z)}{f(z)} + \frac{zg'(z)}{g(z) - \beta} \right] - \frac{k^2\left(\bar{A} - \bar{B}\right)\left(A + B\right)}{4 - k^2|A - B|^2} \right| \\ &\le \frac{2k|A + B|}{4 - k^2|A - B|^2} \end{aligned} \tag{4.89}$$

eşitsizlikleri sağlanırsa f fonksiyonu $\mathbb{C}$ de k-quasikonform genişlemeye sahiptir (Çağlar and Orhan 2013b).

İspat: $r \in (0,1]$ olmak üzere her $t \in [0,\infty)$ için

$$L(z,t) = f^{1-\alpha}(e^{-t}z)\left[f(e^{-t}z) + \left(e^t z - e^{-t}z\right)\left(g(e^{-t}z) - \beta\right) \right]^{\alpha} \tag{4.90}$$

şeklinde tanımlanan $L : \mathbb{U}_r \times [0,\infty) \to \mathbb{C}$ fonksiyonunun $\mathbb{U}$ da bir Loewner zinciri olduğu Teorem 4.1.6 nın ispatında gösterilmişti. O halde, her $z \in \mathbb{U}$ ve her $t \in [0,\infty)$ için

$$w(z,t) = \frac{p(z,t) - 1}{A + Bp(z,t)} = \frac{\dfrac{z\partial L(z,t)}{\partial z} - \dfrac{\partial L(z,t)}{\partial t}}{A\dfrac{z\partial L(z,t)}{\partial z} + B\dfrac{\partial L(z,t)}{\partial t}}$$

olmak üzere

$$w(z,t)=\frac{-2\phi(z,t)}{\left(A-B\right)\phi(z,t)+A+B} \tag{4.91}$$

$$\phi(z,t)=\left(\frac{1}{\alpha}\frac{f'\left(e^{-t}z\right)}{g\left(e^{-t}z\right)-\beta}-1\right)e^{-2t}+\left(1-e^{-2t}\right)\left[\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\frac{e^{-t}zf'\left(e^{-t}z\right)}{f\left(e^{-t}z\right)}+\frac{e^{-t}zg'\left(e^{-t}z\right)}{g\left(e^{-t}z\right)-\beta}\right] \tag{4.92}$$

elde edilir. (4.91) ile verilen $w(z,t)$ fonksiyonu için Teorem 3.7.18 uygulanırsa,

$$\left|w(z,t)\right|=\left|\frac{-2\phi(z,t)}{\left(A-B\right)\phi(z,t)+A+B}\right|\le k,\ \ z\in\mathbb{U}, t\ge 0, k\in\left[0,1\right) \tag{4.93}$$

eşitsizliği elde edilir.

Bazı elementer hesaplamalardan sonra (4.93) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}&\left|\left(\frac{1}{\alpha}\frac{f'\left(e^{-t}z\right)}{g\left(e^{-t}z\right)-\beta}-1\right)e^{-2t}+\left(1-e^{-2t}\right)\left[\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\frac{e^{-t}zf'\left(e^{-t}z\right)}{f\left(e^{-t}z\right)}+\frac{e^{-t}zg'\left(e^{-t}z\right)}{g\left(e^{-t}z\right)-\beta}\right]\right.\\&\left.-\frac{k^2\left(\bar{A}-\bar{B}\right)\left(A+B\right)}{4-k^2\left|A-B\right|^2}\right|\le\frac{2k\left|A+B\right|}{4-k^2\left|A-B\right|^2}\end{aligned} \tag{4.94}$$

elde edilir.

Böylece, (4.94) eşitsizliği, f fonksiyonunun $\mathbb{C}$ de k-quasikonform genişlemesini gösterir.

Eğer Teorem 4.4.6 da $A=B$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.4.7: $f\in\mathcal{A}$, $\beta\in\mathbb{C}$ ve $k\in\left[0,1\right)$ olsun. α ve A kompleks sayılar olmak üzere $\Re\alpha>1/2$, $A\neq 0$ ve $\left|A\right|\le 1$ şartları sağlansın. Ayrıca, $\mathbb{U}$ birim diskinde $g(z)=1+b_1z+...$ analitik fonksiyonunu göz önüne alalım. Eğer her $z\in\mathbb{U}$ için

$$\left|\frac{1}{\alpha}\left(\frac{f'(z)}{g(z)-\beta}-1\right)\right|<k\left|A\right| \tag{4.95}$$

ve

$$\left|\left(\frac{f'(z)}{g(z)-\beta}-1\right)\left|z\right|^2+\left(1-\left|z\right|^2\right)\left[\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\frac{zf'(z)}{f(z)}+\frac{zg'(z)}{g(z)-\beta}\right]\right|\le k\left|A\right| \tag{4.96}$$

eşitsizlikleri sağlanırsa f fonksiyonu $\mathbb{C}$ de k-quasikonform genişlemeye sahiptir.

Teorem 4.4.6 da $\alpha = 1$ seçilirse aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.4.8: $f \in \mathcal{A}$, $\beta \in \mathbb{C}$ ve $k \in [0,1)$ olsun. A ve B kompleks sayılar olmak üzere $A+B \neq 0$, $|A-B| < 2$, $|A| \leq 1$ ve $|B| \leq 1$ şartları sağlansın. Ayrıca, $\mathbb{U}$ birim diskinde $g(z) = 1 + b_1 z + \ldots$ analitik fonksiyonunu göz önüne alalım. Eğer her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\left| \frac{f'(z)}{g(z)-\beta} - 1 \right| < \frac{k|A+B|}{2-k|A-B|} \tag{4.97}$$

ve

$$\left| \left(\frac{f'(z)}{g(z)-\beta} - 1 \right) |z|^2 + \left(1-|z|^2\right) \frac{zg'(z)}{g(z)-\beta} - \frac{k^2\left(\bar{A}-\bar{B}\right)(A+B)}{4-k^2|A-B|^2} \right| \leq \frac{2k|A+B|}{4-k^2|A-B|^2} \tag{4.98}$$

eşitsizlikleri sağlanırsa f fonksiyonu $\mathbb{C}$ de k-quasikonform genişlemeye sahiptir.

Sonuç 4.4.9: $f \in \mathcal{A}$ ve $k \in [0,1)$ olsun. A ve B kompleks sayılar olmak üzere $A+B \neq 0$, $|A-B| < 2$, $|A| \leq 1$ ve $|B| \leq 1$ şartları sağlansın. Ayrıca, $\mathbb{U}$ birim diskinde $g(z) = 1 + b_1 z + \ldots$ analitik fonksiyonunu göz önüne alalım. Eğer her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\left| \frac{f'(z)}{g(z)} - 1 \right| < \frac{k|A+B|}{2-k|A-B|} \tag{4.99}$$

ve

$$\left| \left(\frac{f'(z)}{g(z)} - 1 \right) |z|^2 + \left(1-|z|^2\right) \frac{zg'(z)}{g(z)} - \frac{k^2\left(\bar{A}-\bar{B}\right)(A+B)}{4-k^2|A-B|^2} \right| \leq \frac{2k|A+B|}{4-k^2|A-B|^2} \tag{4.100}$$

eşitsizlikleri sağlanırsa f fonksiyonu $\mathbb{C}$ de k-quasikonform genişlemeye sahiptir.

İspat: Sonuç 4.4.8 de $\beta = 0$ alınırsa istenen sonuç elde edilir.

Sonuç 4.4.9 da $g(z) = f'(z)$ alınırsa aşağıdaki quasikonform genişleme kriteri elde edilir.

Sonuç 4.4.10: $f \in \mathcal{A}$ ve $k \in [0,1)$ olsun. A ve B kompleks sayılar olmak üzere $A+B \neq 0,\ |A-B|<2,\ |A| \leq 1$ ve $|B| \leq 1$ şartları sağlansın. Eğer her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\left| \left(1-|z|^2\right)\frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{k^2\left(\bar{A}-\bar{B}\right)(A+B)}{4-k^2|A-B|^2} \right| \leq \frac{2k|A+B|}{4-k^2|A-B|^2} \tag{4.101}$$

eşitsizliği sağlanırsa f fonksiyonu $\mathbb{C}$ de k-quasikonform genişlemeye sahiptir.

Sonuç 4.4.11: $f \in \mathcal{A}$, $\beta \in \mathbb{C}$ ve $k \in [0,1)$ olsun. A ve B kompleks sayılar olmak üzere $A+B \neq 0,\ |A-B|<2,\ |A| \leq 1$ ve $|B| \leq 1$ şartları sağlansın. Eğer her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\left| \frac{\beta}{f'(z)-\beta} \right| < \frac{k|A+B|}{2-k|A-B|} \tag{4.102}$$

ve

$$\left| \frac{\beta|z|^2+\left(1-|z|^2\right)zf''(z)}{f'(z)-\beta} - \frac{k^2\left(\bar{A}-\bar{B}\right)(A+B)}{4-k^2|A-B|^2} \right| \leq \frac{2k|A+B|}{4-k^2|A-B|^2} \tag{4.103}$$

eşitsizlikleri sağlanırsa f fonksiyonu $\mathbb{C}$ de k-quasikonform genişlemeye sahiptir.

İspat: Sonuç 4.4.8 de $g(z)=f'(z)$ alınırsa ispat tamamlanmış olur.

4.5. İntegral operatörleri için quasikonform genişleme kriterleri

Bu kısımda ilk olarak, $\mathcal{F}_{\alpha,\beta,\gamma}(z)=\left[\gamma\int_0^z u^{\gamma-1}\left(f'(u)\right)^{\alpha}\left(\frac{g(u)}{\phi(u)}\right)^{\beta}du\right]^{1/\gamma}$ integral operatörü için quasikonform genişleme kriterleri verilmiştir.

Teorem 4.5.1: $g(z) \neq 0$ ve $\phi(z) \neq 0$ olmak üzere $f, g, \phi \in \mathcal{A}$ olsun. Ayrıca $m \in \mathbb{R}_+$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ ve $k \in [0,1)$ olsun. Eğer her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\left| \frac{\left(1-|z|^{(m+1)\gamma}\right)}{\gamma}\left[\alpha\frac{zf''(z)}{f'(z)}+\beta\left(\frac{zg'(z)}{g(z)}-\frac{z\phi'(z)}{\phi(z)}\right)\right]-\frac{m-1}{2}\right| \le k\frac{m+1}{2} \tag{4.104}$$

eşitsizliği sağlanırsa

$$\mathcal{F}_{\alpha,\beta,\gamma}(z)=\left[\gamma\int_0^z u^{\gamma-1}\left(f'(u)\right)^{\alpha}\left(\frac{g(u)}{\phi(u)}\right)^{\beta}du\right]^{1/\gamma} \tag{4.105}$$

şeklinde tanımlanan $\mathcal{F}_{\alpha,\beta,\gamma}$ integral operatörü $\mathbb{C}$ de

$$l_k\left(a\right)=\begin{cases}\dfrac{\left(1-a\right)^2+k\left|1-a^2\right|}{\left|1-a^2\right|+k\left(1-a\right)^2}, & a\in\left(0,\infty\right)\setminus\left\{1\right\}\\ k, & a=1\end{cases}$$

biçiminde bir quasikonform genişlemeye sahiptir (Orhan, Raducanu and Çağlar 2013).

İspat: a pozitif bir reel sayı olsun. $r\in(0,1]$ olmak üzere her $t\in[0,\infty)$ için

$$\begin{aligned}L(z,t)=\Bigg\{&\gamma\int_0^{e^{-at}z}u^{\gamma-1}\left(f'(u)\right)^{\alpha}\left(\frac{g(u)}{\phi(u)}\right)^{\beta}du\\ &+\left(e^{mat\gamma}-e^{-at\gamma}\right)z^{\gamma}\left(f'(e^{-at}z)\right)^{\alpha}\left(\frac{g(e^{-at}z)}{\phi(e^{-at}z)}\right)^{\beta}\Bigg\}^{1/\gamma}\end{aligned} \tag{4.106}$$

şeklinde tanımlanan $L:\mathbb{U}_r\times[0,\infty)\to\mathbb{C}$ fonksiyonunun $\mathbb{U}$ da bir Loewner zinciri olduğu Teorem 4.2.1 in ispatında gösterilmişti. O halde, her $z\in\mathbb{U}$ ve her $t\in[0,\infty)$ için

$$w(z,t)=\frac{p(z,t)-1}{p(z,t)+1}=\frac{\dfrac{z\partial L(z,t)}{\partial z}-\dfrac{\partial L(z,t)}{\partial t}}{\dfrac{z\partial L(z,t)}{\partial z}+\dfrac{\partial L(z,t)}{\partial t}}$$

olmak üzere

$$w(z,t)=\frac{(1+a)\mathcal{G}(z,t)+1-ma}{(1-a)\mathcal{G}(z,t)+1+ma} \tag{4.107}$$

$$\mathcal{G}(z,t)=\frac{1}{\gamma}\left[\alpha\frac{e^{-at}zf''(e^{-at}z)}{f'(e^{-at}z)}+\beta\left(\frac{e^{-at}zg'(e^{-at}z)}{g(e^{-at}z)}-\frac{e^{-at}z\phi'(e^{-at}z)}{\phi(e^{-at}z)}\right)\right]\left(1-e^{-(m+1)at\gamma}\right) \tag{4.108}$$

yazılır. (4.107) ile verilen $w(z,t)$ fonksiyonu için Teorem 3.7.18 uygulanırsa

$$\left|\frac{(1+a)\mathcal{G}(z,t)+1-ma}{(1-a)\mathcal{G}(z,t)+1+ma}\right|<l,\ \ z\in\mathbb{U}, t\geq 0, l\in[0,1) \tag{4.109}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece (4.109) dan $\mathcal{F}_{\alpha,\beta,\gamma}$ integral operatörü l-quasikonform genişlemeye sahiptir.

Basit hesaplamalardan sonra (4.109) eşitsizliğinin

$$\left|\mathcal{G}(z,t)-\frac{a\left(1+l^2\right)(m-1)+\left(1-l^2\right)\left(ma^2-1\right)}{2a\left(1+l^2\right)+\left(1-l^2\right)\left(1+a^2\right)}\right|\leq\frac{2al(1+m)}{2a\left(1+l^2\right)+\left(1-l^2\right)\left(1+a^2\right)} \tag{4.110}$$

eşitsizliğine denk olduğu görülür.

(4.104) eşitsizliğinden kolaylıkla görülür ki

$$\left|\mathcal{G}(z,t)-\frac{m-1}{2}\right|<k\frac{m+1}{2} \tag{4.111}$$

dir.

$\mathcal{G}(z,t)$ yi bir ξ kompleks değişkeni olarak düşünüp, (4.110) ve (4.111) ile tanımlanan sırasıyla Δ ve Δ' disklerini göz önüne alalım. $\Delta'\subset\Delta$ olacak şekilde en küçük $l\in[0,1)$ bulunduğunda teoremin ispatı tamamlanmış olur. Bu durum, ancak ve ancak merkezler arasındaki mesafe ile en küçük yarıçapın toplamı, en fazla, en büyük yarıçapa eşit olduğunda mümkün olacaktır. Böylece bu durum

$$\left|\frac{a\left(1+l^2\right)(m-1)+\left(1-l^2\right)\left(ma^2-1\right)}{2a\left(1+l^2\right)+\left(1-l^2\right)\left(1+a^2\right)}-\frac{m-1}{2}\right|+k\frac{m+1}{2}\leq\frac{2al(1+m)}{2a\left(1+l^2\right)+\left(1-l^2\right)\left(1+a^2\right)}$$

veya buna denk olarak

$$\frac{2al}{2a\left(1+l^2\right)+\left(1-l^2\right)\left(1+a^2\right)}-\frac{k}{2}\geq 0 \tag{4.112}$$

şartı altında

$$\frac{\left(1-l^2\right)\left|1-a^2\right|}{2\left[2a\left(1+l^2\right)+\left(1-l^2\right)\left(1+a^2\right)\right]}\leq\frac{2al}{2a\left(1+l^2\right)+\left(1-l^2\right)\left(1+a^2\right)}-\frac{k}{2} \tag{4.113}$$

eşitsizliğini sağlaması demektir.

İlk olarak, (4.112) ve (4.113) eşitsizlikleri $1-a^2>0$ için çözülecektir. Benzer yolla da $1-a^2<0$ için çözülebilir.

(4.111) den elde edilen kuadratik denklemin çözümleri

$$L_1 = \frac{(1-a)^2 + k(1-a^2)}{1-a^2 + k(1-a)^2}, \quad L_2 = -\frac{(1+a)^2 + k(1-a^2)}{1-a^2 + k(1-a)^2}.$$

biçimindedir. Bu nedenle (4.113) eşitsizliğinin çözümü $L_1 \le l$ ve $l \le L_2$ dir. $L_2 < 0$ olduğundan dolayı çözüm $L_1 \le l$ dir.

Basit hesaplamalardan sonra, (4.112) eşitsizliğinden $l \le \mathcal{L}_2$ ve $\mathcal{L}_1 \le l$ ifadeleri elde edilir. Burada;

$$\mathcal{L}_1 = \frac{-2a + \sqrt{4a^2 + (1-a^2)^2 k^2}}{k(1-a)^2}, \qquad \mathcal{L}_2 = \frac{-2a - \sqrt{4a^2 + (1-a^2)^2 k^2}}{k(1-a)^2}$$

dir. $\mathcal{L}_2 < 0$ olduğunda çözüm için $\mathcal{L}_1 \le l$ dikkate alınır.

MATHEMATICA programı kullanılarak $\mathcal{L}_1 \le L_1$ ve böylece $L_1 \le l < 1$ olduğu kontrol edilebilir. Eğer $a = 1$ ise, (4.112) ve (4.113) eşitsizliklerinin her ikisi $k \le l$ eşitsizliğine indirgenir.

Sonuç olarak, (4.104) eşitsizliğinin $\mathbb{C}$ de $\mathcal{F}_{\alpha,\beta,\gamma}$ integral operatörünün

$$l_k(a) = \begin{cases} \dfrac{(1-a)^2 + k\left|1-a^2\right|}{\left|1-a^2\right| + k(1-a)^2}, & a \in (0,\infty) \setminus \{1\} \\ k, & a = 1 \end{cases}$$

biçiminde bir quasikonform genişlemesi olduğu ispatlanmış olur.

Teorem 4.5.2: $g(z) \ne 0$ ve $\phi(z) \ne 0$ olmak üzere $f, g, \phi \in \mathcal{A}$ olsun. Ayrıca $m \in \mathbb{R}_+$, $m \ge 1$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, $\Re\gamma > 0$ ve $k \in [0,1)$ olsun. Eğer her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\frac{1-|z|^{(m+1)\Re\gamma}}{\Re\gamma} \left| \alpha \frac{zf''(z)}{f'(z)} + \beta \left(\frac{zg'(z)}{g(z)} - \frac{z\phi'(z)}{\phi(z)} \right) \right| \le k$$

eşitsizliği sağlanırsa, (4.35) ile tanımlanan $\mathcal{F}_{\alpha,\beta,\gamma}$ integral operatörü $\mathbb{C}$ de $k-$ quasikonform genişlemeye sahiptir.

İspat: $z \in \mathbb{U} \setminus \{0\}$, $\Re\gamma > 0$ ve $m \in \mathbb{R}_+$ için

$$\left|\frac{1-|z|^{(m+1)\gamma}}{\gamma}\right| \leq \frac{1-|z|^{(m+1)\Re\gamma}}{\Re\gamma}$$

dır. $m \geq 1$ ve $k \in [0,1)$ için

$$\left|\frac{1-|z|^{(m+1)\gamma}}{\gamma}\left[\alpha\frac{zf''(z)}{f'(z)}+\beta\left(\frac{zg'(z)}{g(z)}-\frac{z\phi'(z)}{\phi(z)}\right)\right]-k\frac{m-1}{2}\right|$$

$$\leq \left|\frac{1-|z|^{(m+1)\gamma}}{\gamma}\left[\alpha\frac{zf''(z)}{f'(z)}+\beta\left(\frac{zg'(z)}{g(z)}-\frac{z\phi'(z)}{\phi(z)}\right)\right]\right|+k\frac{m-1}{2}$$

$$\leq \frac{1-|z|^{(m+1)\Re\gamma}}{\Re\gamma}\left|\alpha\frac{zf''(z)}{f'(z)}+\beta\left(\frac{zg'(z)}{g(z)}-\frac{z\phi'(z)}{\phi(z)}\right)\right|+k\frac{m-1}{2}$$

$$\leq k+k\frac{m-1}{2}=k\frac{m+1}{2}$$

elde edilir. Teorem 4.5.1 kullanılarak (4.104) eşitsizliği sağlandığından $\mathcal{F}_{\alpha,\beta,\gamma}$ integral operatörü $\mathbb{C}$ de $k-$quasikonform genişlemeye sahiptir.

Teorem 4.5.1 de $\alpha=\beta$, $g(z)=z$ ve $\phi(z)=f(z)$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.5.3: $f \in \mathcal{A}$, $m \in \mathbb{R}_+$ ve $k \in [0,1)$ olsun. Eğer her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\left|\alpha\frac{\left(1-|z|^{(m+1)\gamma}\right)}{\gamma}\left[1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}-\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]-\frac{m-1}{2}\right| \leq k\frac{m+1}{2}$$

eşitsizliği sağlanırsa

$$\mathcal{F}_{\alpha,\gamma}(z)=\left[\gamma\int_0^z u^{\gamma-1}\left(\frac{uf'(u)}{f(u)}\right)^{\alpha}du\right]^{1/\gamma}$$

şeklinde tanımlanan $\mathcal{F}_{\alpha,\gamma}$ integral operatörü $\mathbb{C}$ de

$$l_k(a)=\begin{cases}\dfrac{(1-a)^2+k\left|1-a^2\right|}{\left|1-a^2\right|+k(1-a)^2}, & a \in (0,\infty)\setminus\{1\}\\ k, & a=1\end{cases}$$

biçiminde bir quasikonform genişlemeye sahiptir.

Son olarak, $\mathcal{F}_\beta(z)=\left[\beta\int_0^z u^{\beta-1}f'(u)du\right]^{1/\beta}$ integral operatörü için quasikonform genişleme kriterleri verilmiştir.

Teorem 4.5.4: $f\in\mathcal{A}$, $k\in[0,1)$ ve $m\in\mathbb{R}_+$ olsun. α ve β kompleks sayılar olmak üzere $\Re\alpha<1/2$ ve $\Re\beta>0$ şartları sağlansın. Ayrıca, $\mathbb{U}$ birim diskinde $g(z)=1+b_1z+...$ ve $h(z)=c_0+c_1z+...$ analitik fonksiyonlarını göz önüne alalım. Eğer her $z\in\mathbb{U}$ için

$$\left|\frac{f'(z)}{g(z)-\alpha}-\frac{m+1}{2}\right|<k\frac{m+1}{2} \tag{4.114}$$

ve

$$\begin{aligned}&\left|\left(\frac{f'(z)}{g(z)-\alpha}-1\right)|z|^{\beta(m+1)}+\left(1-|z|^{\beta(m+1)}\right)\left[2z^\beta\frac{f'(z)h(z)}{g(z)-\alpha}+\frac{1}{\beta}\frac{zg'(z)}{g(z)-\alpha}\right]\right.\\&\left.+\frac{z^{\beta+1}\left(1-|z|^{\beta(m+1)}\right)^2}{|z|^{\beta(m+1)}}\left[\frac{z^{\beta-1}f'(z)h^2(z)}{g(z)-\alpha}+\frac{1}{\beta}\left(\frac{g'(z)h(z)}{g(z)-\alpha}-h'(z)\right)\right]-\frac{m-1}{2}\right|\\&\leq k\frac{m+1}{2}\end{aligned} \tag{4.115}$$

eşitsizlikleri sağlanırsa

$$\mathcal{F}_\beta(z)=\left[\beta\int_0^z u^{\beta-1}f'(u)du\right]^{1/\beta} \tag{4.116}$$

şeklinde tanımlanan $\mathcal{F}_\beta$ integral operatörü $\mathbb{C}$ de k-quasikonform genişlemeye sahiptir (Çağlar and Orhan 2013c).

İspat: $r\in(0,1]$ olmak üzere her $t\in[0,\infty)$ için

$$L(z,t)=\left\{\beta\int_0^{e^{-t}z}u^{\beta-1}f'(u)du+\frac{\left(e^{\beta mt}-e^{-\beta t}\right)z^\beta\left(g(e^{-t}z)-\alpha\right)}{1+\left(e^{\beta mt}-e^{-\beta t}\right)z^\beta h(e^{-t}z)}\right\}^{1/\gamma} \tag{4.117}$$

şeklinde tanımlanan $L:\mathbb{U}_r\times[0,\infty)\to\mathbb{C}$ fonksiyonunun $\mathbb{U}$ da bir Loewner zinciri olduğu Teorem 4.2.5 in ispatında gösterilmişti. O halde,

$$\left|\frac{p(z,t)-1}{p(z,t)+1}\right| = \left|\frac{2}{m+1}\left\{e^{-\beta(m+1)t}\left(\frac{f'(e^{-t}z)}{g(e^{-t}z)-\alpha}-1\right)\right.\right.$$
$$+\left(1-e^{-\beta(m+1)t}\right)\left[2e^{-\beta t}z^{\beta}\frac{f'(e^{-t}z)h(e^{-t}z)}{g(e^{-t}z)-\alpha}\right.$$
$$\left.+\frac{e^{-t}z}{\beta}\frac{g'\left(e^{-t}z\right)}{g(e^{-t}z)-\alpha}\right]+\frac{e^{-\beta t}z^{\beta}\left(1-e^{-\beta(m+1)t}\right)^2}{e^{-\beta(m+1)t}}\left[e^{-\beta t}z^{\beta}\frac{f'(e^{-t}z)h^2(e^{-t}z)}{g(e^{-t}z)-\alpha}\right. \tag{4.118}$$
$$\left.\left.\left.+\frac{e^{-t}z}{\beta}\left(\frac{h(e^{-t}z)g'\left(e^{-t}z\right)}{g(e^{-t}z)-\alpha}-h'(e^{-t}z)\right)\right]\right\}-\frac{m-1}{m+1}\right|\le k$$

elde edilir.

Böylece (4.115) den, (4.118) eşitsizliğinin sağ tarafı k dan küçük veya eşit olduğu görülür. Bu nedenle Teorem 3.4.4 ve Teorem 3.7.18 den $\mathcal{F}_{\beta}$ integral operatörü $\mathbb{C}$ de k-quasikonform genişlemeye sahiptir.

Teorem 4.5.4 de $g(z)=f'(z)$ alınırsa aşağıdaki quasikonform genişleme kriteri elde edilir.

Sonuç 4.5.5: $f\in\mathcal{A}$, $k\in[0,1)$ ve $m\in\mathbb{R}_+$ olsun. α ve β kompleks sayılar olmak üzere $\Re\alpha<1/2$ ve $\Re\beta>0$ şartları sağlansın. Ayrıca, $\mathbb{U}$ birim diskinde $h(z)=c_0+c_1z+...$ analitik fonksiyonunu göz önüne alalım. Eğer her $z\in\mathbb{U}$ için

$$\left|\frac{f'(z)}{f'(z)-\alpha}-\frac{m+1}{2}\right|<k\frac{m+1}{2} \tag{4.119}$$

ve

$$\left|\left(\frac{f'(z)}{f'(z)-\alpha}-1\right)|z|^{\beta(m+1)}+\left(1-|z|^{\beta(m+1)}\right)\left[2z^{\beta}\frac{f'(z)h(z)}{f'(z)-\alpha}+\frac{1}{\beta}\frac{zf''(z)}{f'(z)-\alpha}\right]\right.$$
$$\left.+\frac{z^{\beta+1}\left(1-|z|^{\beta(m+1)}\right)^2}{|z|^{\beta(m+1)}}\left[\frac{z^{\beta-1}f'(z)h^2(z)}{f'(z)-\alpha}+\frac{1}{\beta}\left(\frac{f''(z)h(z)}{f'(z)-\alpha}-h'(z)\right)\right]-\frac{m-1}{2}\right| \tag{4.120}$$
$$\le k\frac{m+1}{2}$$

eşitsizlikleri sağlanırsa (4.47) ile tanımlanan $\mathcal{F}_\beta$ integral operatörü $\mathbb{C}$ de k-quasikonform genişlemeye sahiptir.

Eğer Sonuç 4.5.5 de $h(z)=f''(z)$ alınırsa aşağıdaki quasikonform genişleme kriteri elde edilir.

Sonuç 4.5.6: $f\in\mathcal{A}$, $k\in[0,1)$ ve $m\in\mathbb{R}_+$ olsun. α ve β kompleks sayılar olmak üzere $\Re\alpha<1/2$ ve $\Re\beta>0$ şartları sağlansın. Eğer her $z\in\mathbb{U}$ için

$$\left|\frac{f'(z)}{f'(z)-\alpha}-\frac{m+1}{2}\right|<k\frac{m+1}{2} \tag{4.121}$$

ve

$$\left|\left(\frac{f'(z)}{f'(z)-\alpha}-1\right)|z|^{\beta(m+1)}+z\left(1-|z|^{\beta(m+1)}\right)\left[\frac{f''(z)}{f'(z)-\alpha}\left(2z^{\beta-1}f'(z)+\frac{1}{\beta}\right)\right]\right.$$
$$\left.+\frac{z^{\beta+1}\left(1-|z|^{\beta(m+1)}\right)^2}{|z|^{\beta(m+1)}}\left[\frac{\left(f''(z)\right)^2}{f'(z)-\alpha}\left(z^{\beta-1}f'(z)+\frac{1}{\beta}\right)-\frac{1}{\beta}f'''(z)\right]-\frac{m-1}{2}\right| \tag{4.122}$$
$$\leq k\frac{m+1}{2}$$

eşitsizlikleri sağlanırsa (4.47) ile tanımlanan $\mathcal{F}_\beta$ integral operatörü $\mathbb{C}$ de k-quasikonform genişlemeye sahiptir.

Sonuç 4.5.7: $f\in\mathcal{A}$, $k\in[0,1)$ ve $m\in\mathbb{R}_+$ olsun. α ve β birer kompleks sayı olmak üzere $\Re\alpha<1/2$ ve $\Re\beta>0$ şartları sağlansın. Eğer her $z\in\mathbb{U}$ için

$$\left|\frac{f'(z)}{f'(z)-\alpha}-\frac{m+1}{2}\right|<k\frac{m+1}{2} \tag{4.123}$$

ve

$$\left|\left(\frac{f'(z)}{f'(z)-\alpha}-1\right)|z|^{\beta(m+1)}+\left(1-|z|^{\beta(m+1)}\right)\left[\frac{1}{\beta}\frac{zf''(z)}{f'(z)-\alpha}\right]-\frac{m-1}{2}\right|\leq k\frac{m+1}{2} \tag{4.124}$$

eşitsizlikleri sağlanırsa (4.47) ile tanımlanan $\mathcal{F}_\beta$ integral operatörü $\mathbb{C}$ de k-quasikonform genişlemeye sahiptir.

İspat: Sonuç 4.5.5 de $g(z) = f'(z)$ ve $h(z) = 0$ yazılırsa istenen sonuç elde edilir.

Teorem 4.5.4 de $g(z) = f'(z),\ h(z) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{f''(z)}{f'(z)},\ \alpha = 0$ ve $\beta = 1$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.5.8: $f \in \mathcal{A}$, $m \in \mathbb{R}_+$ ve $k \in [0,1)$ olsun. Eğer her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\left| \frac{z^2\left(1-|z|^{m+1}\right)^2}{|z|^{m+1}} \left(\frac{1}{2} S_f(z) \right) - \frac{m-1}{2} \right| < k\frac{m+1}{2} \tag{4.125}$$

eşitsizliği sağlanırsa f fonksiyonu $\mathbb{C}$ de k-quasikonform genişlemeye sahiptir.

Sonuç 4.5.9: $f \in \mathcal{A}$, $k \in [0,1)$ ve $m \in \mathbb{R}_+$ olsun. β kompleks sayı olmak üzere $\Re\beta > 0$ şartı sağlansın. Eğer her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\left| \frac{\left(1-|z|^{\beta(m+1)}\right)}{\beta} \left(\frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) - \frac{m-1}{2} \right| \le k\frac{m+1}{2} \tag{4.126}$$

eşitsizliği sağlanırsa (4.47) ile tanımlanan $\mathcal{F}_\beta$ integral operatörü $\mathbb{C}$ de k-quasikonform genişlemeye sahiptir.

İspat: Sonuç 4.5.7 de $\alpha = 0$ alınırsa ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.5.4 de $g(z) = \left(\dfrac{f(z)}{z}\right)^2, h(z) = 0, \alpha = 0$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.5.10: $f \in \mathcal{A}$, $k \in [0,1)$ ve $m \in \mathbb{R}_+$ olsun. β kompleks sayı olmak üzere $\Re\beta > 0$ şartı sağlansın. Eğer her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\left| \frac{z^2 f'(z)}{f^2(z)} - \frac{m+1}{2} \right| < k \frac{m+1}{2} \tag{4.127}$$

ve

$$\left| \left(\frac{z^2 f'(z)}{f^2(z)} - 1 \right) |z|^{\beta(m+1)} + \frac{2\left(1-|z|^{\beta(m+1)}\right)}{\beta} \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right) - \frac{m-1}{2} \right| \le k \frac{m+1}{2} \tag{4.128}$$

eşitsizlikleri sağlanırsa (4.47) ile tanımlanan $\mathcal{F}_\beta$ integral operatörü $\mathbb{C}$ de k-quasikonform genişlemeye sahiptir.

4.6. Meromorf fonksiyonlar için quasikonform genişleme kriterleri

Teorem 4.6.1: $f \in \Sigma$, $f'(\zeta) \neq 0$ ve $\mathbb{U}^*$ da $g(\zeta) = 1 + c_2\zeta^{-2} + ...$ analitik fonksiyonu verilsin. Ayrıca $s = \alpha + i\beta$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ ve $m \in \mathbb{R}_+$ olmak üzere $1/2 < m \le \alpha$ şartı sağlansın. $k \in [0,1)$ olsun. Bu durumda eğer $\zeta \in \mathbb{U}^*$ için

$$\left| \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta) g(\zeta)} - \frac{ms}{\alpha} \right| < k \frac{m|s|}{\alpha} \tag{4.129}$$

ve

$$\left| \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta) g(\zeta)} - \left(2\ln|\zeta| \frac{\zeta g'(\zeta)}{g(\zeta)} + 1 \right) \frac{ms}{\alpha} \right| \le k \frac{m|s|}{\alpha} \tag{4.130}$$

eşitsizlikleri sağlanırsa, f fonksiyonu $\mathbb{C}$ de

$$l_k(s) = \frac{|s-1|^2 + k\left|(\bar{s})^2 - 1\right|}{\left|(\bar{s})^2 - 1\right| + k|s-1|^2} < 1$$

biçiminde bir quasikonform genişlemeye sahiptir (Çağlar and Orhan 2013d).

İspat: $r \in (0,1]$ sayısı için $L : \mathbb{U}_r \times [0,\infty) \to \mathbb{C}$,

$$L(z,t)=\frac{1}{f\left(e^{st}/z\right)}\left\{e^{-2mtg\left(e^{st}/z\right)}\right\}^{-s}=a_1(t)z+a_2(t)z^2+... \tag{4.131}$$

şeklinde tanımlı $L(z,t)$ fonksiyonunun her $t\in[0,\infty)$ için $\mathbb{U}^*$ da bir Loewner zinciri olduğu Teorem 4.3.1 in ispatında gösterilmişti. O halde, her $\zeta\in\mathbb{U}^*$ ve her $t\in[0,\infty)$ için

$$w(\zeta,t)=\frac{(1+s)\mathcal{G}(\zeta,t)-2}{(1-s)\mathcal{G}(\zeta,t)+2} \tag{4.132}$$

$$\mathcal{G}(\zeta,t)=\frac{1}{ms}\frac{e^{st}\zeta f'\left(e^{st}\zeta\right)}{f\left(e^{st}\zeta\right)g\left(e^{st}\zeta\right)}-2t\frac{e^{st}\zeta g'\left(e^{st}\zeta\right)}{g\left(e^{st}\zeta\right)} \tag{4.133}$$

elde edilir. (4.132) ile verilen $w(z,t)$ fonksiyonu için Teorem 3.7.18 uygulanırsa, aşağıdaki eşitsizlik yazılır.

$$\left|\frac{(1+s)\mathcal{G}(\zeta,t)-2}{(1-s)\mathcal{G}(\zeta,t)+2}\right|<l,\ \ \zeta\in\mathbb{U}^*,\, t\geq 0,\, l\in[0,1) \tag{4.134}$$

(4.134) eşitsizliği f fonksiyonunun l-quasikonform genişlemeye sahip olduğunu ifade eder.

Basit hesaplamalardan sonra (4.134) eşitsizliğinin aşağıdaki eşitsizliğe denk olduğu görülür.

$$\left|\mathcal{G}(\zeta,t)-\frac{2\left(\left(1+l^2\right)+\alpha\left(1-l^2\right)\right)-2\beta\left(1-l^2\right)i}{2\alpha\left(1+l^2\right)+\left(1-l^2\right)\left(1+|s|^2\right)}-\frac{1}{\alpha}\right|\leq\frac{4l}{2\alpha\left(1+l^2\right)+\left(1-l^2\right)\left(1+|s|^2\right)} \quad 4.135)$$

(4.129) ve (4.130) eşitsizliklerinden

$$\left|\mathcal{G}(\zeta,t)-\frac{1}{\alpha}\right|<\frac{k}{\alpha} \tag{4.136}$$

eşitsizliği yazılır.

$\mathcal{G}(\zeta,t)$ yi bir ω kompleks değişkeni olarak düşünüp, (4.135) ve (4.136) ile tanımlanan sırasıyla Δ ve Δ' disklerini göz önüne alalım. $\Delta'\subset\Delta$ şekilde en küçük $l\in[0,1)$ bulunduğunda teoremin ispatı tamamlanmış olacak. Bu durum, ancak ve ancak merkezler arasındaki mesafe ile en küçük yarıçapın toplamı, en fazla, en büyük yarıçapa eşit olduğunda mümkün olacaktır. Böylece,

$$\left|\frac{2\left(\left(1+l^2\right)+\alpha\left(1-l^2\right)\right)-2\beta\left(1-l^2\right)i}{2\alpha\left(1+l^2\right)+\left(1-l^2\right)\left(1+|s|^2\right)}-\frac{1}{\alpha}\right|+\frac{k}{\alpha}\leq\frac{4l}{2\alpha\left(1+l^2\right)+\left(1-l^2\right)\left(1+|s|^2\right)}$$

veya buna denk olarak

$$\frac{2l}{2\alpha\left(1+l^2\right)+\left(1-l^2\right)\left(1+|s|^2\right)}-\frac{k}{2\alpha}\geq 0 \tag{4.137}$$

şartı altında

$$\frac{\left(1-l^2\right)\left|\left(\bar{s}\right)^2-1\right|}{2\alpha\left[2\alpha\left(1+l^2\right)+\left(1-l^2\right)\left(1+|s|^2\right)\right]}\leq\frac{2l}{2\alpha\left(1+l^2\right)+\left(1-l^2\right)\left(1+|s|^2\right)}-\frac{k}{2\alpha} \tag{4.138}$$

olduğunun ispatlanması gerekir.

Eğer (4.138) eşitsizliği eşitlik gibi düşünülüp MATHEMATICA programı yardımıyla hesaplanırsa aşağıdaki iki çözüm elde edilir:

$$L_1=\frac{|s-1|^2+k\left|\left(\bar{s}\right)^2-1\right|}{\left|\left(\bar{s}\right)^2-1\right|+k|s-1|^2},\quad L_2=-\frac{|s+1|^2+k\left|\left(\bar{s}\right)^2-1\right|}{\left|\left(\bar{s}\right)^2-1\right|+k|s-1|^2}.$$

Bu nedenle (4.138) eşitsizliğinin çözümü $L_1\leq l$ ve $l\leq L_2$ dir. $L_2<0$ olduğundan dolayı çözüm $L_1\leq l$ dir.

Basit hesaplamalardan sonra, (4.137) eşitsizliğinden

$$\mathcal{L}1=\frac{-2\alpha+\sqrt{4\alpha^2+\left|\left(\bar{s}\right)^2-1\right|^2k^2}}{k|s-1|^2},\qquad \mathcal{L}2=\frac{-2\alpha-\sqrt{4\alpha^2+\left|\left(\bar{s}\right)^2-1\right|^2k^2}}{k|s-1|^2}$$

olmak üzere $l\leq\mathcal{L}2$ ve $\mathcal{L}1\leq l$ ifadeleri elde edilir. Burada $\mathcal{L}2<0$ olduğundan çözüm için $\mathcal{L}1\leq l$ dikkate alınır.

MATHEMATICA programı kullanılarak $\mathcal{L}1\leq L_1$ ve böylece $L_1\leq l<1$ olduğu kontrol edilebilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Eğer Teorem 4.6.1 de $g(\zeta)=\dfrac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.6.2: $f \in \Sigma,\ \ f'(\zeta) \neq 0$ verilsin. Ayrıca $s = \alpha + i\beta,\ \alpha > 0,\ \beta \in \mathbb{R}$ ve $m \in \mathbb{R}_+$ olmak üzere $1/2 < m \leq \alpha$ şartı sağlansın. $k \in [0,1)$ olsun. Eğer her $\zeta \in \mathbb{U}^*$ için

$$\left|1 - \left\{2\ln|\zeta|\left(1 + \frac{\zeta f''(\zeta)}{f'(\zeta)} - \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}\right) + 1\right\}\frac{ms}{\alpha}\right| \leq k\frac{m|s|}{\alpha} \tag{4.139}$$

eşitsizliği sağlanırsa, f fonksiyonu $\mathbb{C}$ de

$$l_k(s) = \frac{|s-1|^2 + k\left|(\bar{s})^2 - 1\right|}{\left|(\bar{s})^2 - 1\right| + k|s-1|^2} < 1$$

biçiminde bir quasikonform genişlemeye sahiptir.

Sonuç 4.6.3: $f \in \Sigma,\ \ f'(\zeta) \neq 0$ verilsin. Ayrıca $s = \alpha + i\beta,\ \alpha > 0,\ \beta \in \mathbb{R}$ ve $m \in \mathbb{R}_+$ olmak üzere $1/2 < m \leq \alpha$ şartı sağlansın. $k \in [0,1)$ olsun. Eğer her $\zeta \in \mathbb{U}^*$ için

$$\left|f'(\zeta) - \frac{ms}{\alpha}\right| < k\frac{m|s|}{\alpha} \tag{4.140}$$

ve

$$\left|f'(\zeta) - \left\{2\ln|\zeta|\left(1 - \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}\right) + 1\right\}\frac{ms}{\alpha}\right| \leq k\frac{m|s|}{\alpha} \tag{4.141}$$

eşitsizlikleri sağlanırsa, f fonksiyonu $\mathbb{C}$ de

$$l(k) = \frac{|s-1|^2 + k\left|(\bar{s})^2 - 1\right|}{\left|(\bar{s})^2 - 1\right| + k|s-1|^2} < 1$$

biçiminde bir quasikonform genişlemeye sahiptir.

İspat: Eğer Teorem 4.6.1 de $g(\zeta) = \dfrac{\zeta}{f(\zeta)}$ alınırsa istenen gelir.

Eğer Teorem 4.6.1 de $g(\zeta) = 1$ alınırsa aşağıdaki basit quasikonform genişleme şartı elde edilir.

Sonuç 4.6.4: $f \in \Sigma$, $f'(\zeta) \neq 0$ verilsin. Ayrıca $s = \alpha + i\beta$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ ve $m \in \mathbb{R}_+$ olmak üzere $1/2 < m \leq \alpha$ şartı sağlansın. $k \in [0,1)$ olsun. Eğer her $\zeta \in \mathbb{U}^*$ için

$$\left| \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)} - \frac{ms}{\alpha} \right| < k \frac{m|s|}{\alpha} \tag{4.142}$$

eşitsizlikleri sağlanırsa, f fonksiyonu $\mathbb{C}$ de

$$l_k(s) = \frac{|s-1|^2 + k\left|(\overline{s})^2 - 1\right|}{\left|(\overline{s})^2 - 1\right| + k|s-1|^2} < 1$$

biçiminde bir quasikonform genişlemeye sahiptir.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu bölüm, tezde elde edilen sonuçları içermektedir. İlk olarak, Loewner zincirler metodu kullanılarak $\mathbb{U}$ ve $\mathbb{U}^*$ kümelerinde tanımlı fonksiyonların ünivalentliği için yeter şartlar verilmiş ve daha sonra elde edilen bu şartlar için Becker ın metoduyla quasikonform genişleme kriterleri elde edilmiştir.

Sonuç 5.1: $f \in \mathcal{A}$ olsun ve $m>1,\ \alpha \in \mathbb{C}$ olmak üzere $\Re\alpha > 1/m$ şartı sağlansın. Ayrıca, $\mathbb{U}$ birim diskinde $g(z)=1+b_1 z+...$ ve $h(z)=d_1 z+d_2 z^2+...$ analitik fonksiyonlarını göz önüne alalım. Eğer her $z\in\mathbb{U}$ için

$$\left|\frac{f'(z)}{\alpha g(z)}-\frac{m}{2}\right|<\frac{m}{2}$$

ve

$$\left||z|^m\frac{f'(z)}{\alpha g(z)}+\frac{z(1-|z|^m)^2}{2|z|^2}\left\{\left(\frac{(1-\alpha)}{\alpha}\frac{zf'(z)}{f(z)}+1\right)\frac{h(z)}{g(z)}+\frac{zh'(z)}{g(z)}\right\}\right.$$
$$\left.+(1-|z|^m)\left\{1+\frac{(1-\alpha)}{\alpha}\frac{zf'(z)}{f(z)}+\frac{zg'(z)}{g(z)}\right\}-\left(1+\frac{z(1-|z|^{2m})}{2|z|^2}\frac{h(z)}{g(z)}\right)\frac{m}{2}\right|$$
$$\leq\left|\frac{z(1-|z|^m)^2}{2|z|^2}\frac{h(z)}{g(z)}+\left(1+\frac{z(1-|z|^{2m})}{2|z|^2}\frac{h(z)}{g(z)}\right)\frac{m}{2}\right|$$

eşitsizlikleri sağlanırsa f fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde ünivalenttir.

Sonuç 5.2: $f \in \mathcal{A}$ ve $\beta\in\mathbb{C}$ olsun. α, A ve B kompleks sayılar olmak üzere $\Re\alpha>1/2,\ A+B\neq 0,\ |A-B|<2,\ |A|\leq 1$ ve $|B|\leq 1$ şartları sağlansın. Ayrıca, $\mathbb{U}$ birim diskinde $g(z)=1+b_1 z+...$ analitik fonksiyonunu göz önüne alalım. Eğer her $z\in\mathbb{U}$ için

$$\left|\frac{1}{\alpha}\left(\frac{f'(z)}{g(z)-\beta}-1\right)\right|<\frac{|A+B|}{2-|A-B|}$$

ve

$$\left|\left(\frac{f'(z)}{g(z)-\beta}-1\right)|z|^2+\left(1-|z|^2\right)\left[\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\frac{zf'(z)}{f(z)}+\frac{zg'(z)}{g(z)-\beta}\right]-\frac{\left(\overline{A}-\overline{B}\right)(A+B)}{4-|A-B|^2}\right|$$
$$\leq\frac{2|A+B|}{4-|A-B|^2}$$

eşitsizlikleri sağlanırsa f fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde ünivalenttir.

Sonuç 5.3: $f,g,\phi\in\mathcal{A},\ g(z)\neq 0$ ve $\phi(z)\neq 0$ olsun. Ayrıca $m\in\mathbb{R}_+$ ve $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{C}$ olsun. Eğer her $z\in\mathbb{U}$ için

$$\left|\frac{\left(1-|z|^{(m+1)\gamma}\right)}{\gamma}\left[\alpha\frac{zf''(z)}{f'(z)}+\beta\left(\frac{zg'(z)}{g(z)}-\frac{z\phi'(z)}{\phi(z)}\right)\right]-\frac{m-1}{2}\right|\leq\frac{m+1}{2}$$

eşitsizliği sağlanırsa,

$$\mathcal{F}_{\alpha,\beta,\gamma}(z)=\left[\gamma\int_0^z u^{\gamma-1}\left(f'(u)\right)^{\alpha}\left(\frac{g(u)}{\phi(u)}\right)^{\beta}du\right]^{1/\gamma}$$

şeklinde tanımlanan $\mathcal{F}_{\alpha,\beta,\gamma}$ integral operatörü $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik ve ünivalenttir.

Sonuç 5.4: $f\in\mathcal{A}$ ve $m\in\mathbb{R}_+$ olsun. α ve β birer kompleks sayı olmak üzere bu sayılar için $\Re\alpha<1/2$ ve $\Re\beta>0$ şartları gerçeklensin. Ayrıca, $\mathbb{U}$ birim diskinde $g(z)=1+b_1z+...$ ve $h(z)=c_0+c_1z+...$ analitik fonksiyonlarını göz önüne alalım. Eğer her $z\in\mathbb{U}$ için

$$\left|\frac{f'(z)}{g(z)-\alpha}-\frac{m+1}{2}\right|<\frac{m+1}{2}$$

ve

$$\left|\left(\frac{f'(z)}{g(z)-\alpha}-1\right)|z|^{\beta(m+1)}+\left(1-|z|^{\beta(m+1)}\right)\left[2z^{\beta}\frac{f'(z)h(z)}{g(z)-\alpha}+\frac{1}{\beta}\frac{zg'(z)}{g(z)-\alpha}\right]\right.$$
$$\left.+\frac{z^{\beta+1}\left(1-|z|^{\beta(m+1)}\right)^2}{|z|^{\beta(m+1)}}\left[\frac{z^{\beta-1}f'(z)h^2(z)}{g(z)-\alpha}+\frac{1}{\beta}\left(\frac{g'(z)h(z)}{g(z)-\alpha}-h'(z)\right)\right]-\frac{m-1}{2}\right|$$
$$\leq\frac{m+1}{2}$$

eşitsizlikleri sağlanırsa

$$\mathcal{F}_\beta(z)=\left[\beta\int_0^z u^{\beta-1}f'(u)du\right]^{1/\beta}$$

şeklinde tanımlanan $\mathcal{F}_\beta$ integral operatörü $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik ve ünivalenttir.

Sonuç 5.1-5.4 Becker (1972), Ahlfors (1974), Pascu (1986), Goluzin (1969), Nehari (1949), Ozaki and Nunokawa (1972), Raducanu (2004), Tudor (2008), Deniz and Orhan (2011) tarafından verilen sonuçların bir genelleştirilmesidir.

Sonuç 5.5: $f\in\Sigma,\ f'(\zeta)\neq 0$ ve $\mathbb{U}^*$ da $g(\zeta)=1+c_2\zeta^{-2}+\ldots$ analitik fonksiyonu verilsin. Ayrıca $s=\alpha+i\beta,\ m\in\mathbb{R}_+,\ \beta\in\mathbb{R}$ ve $\alpha>0$ olmak üzere $1/2<m\leq\alpha$ şartı sağlansın. Eğer her $\zeta\in\mathbb{U}^*$ için

$$\left|\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)g(\zeta)}-\frac{ms}{\alpha}\right|<\frac{m|s|}{\alpha}$$

ve

$$\left|\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)g(\zeta)}-\left(2\ln|\zeta|\frac{\zeta g'(\zeta)}{g(\zeta)}+1\right)\frac{ms}{\alpha}\right|\leq\frac{m|s|}{\alpha}$$

eşitsizlikleri sağlanırsa f fonksiyonu $\mathbb{U}^*$ kümesinde ünivalenttir.

Sonuç 5.6: $f\in\mathcal{A}$ ve $k\in[0,1)$ olsun. $m>1,\ \alpha\in\mathbb{C}$ olmak üzere $\Re\alpha>1/m$ şartı sağlansın. Ayrıca, $\mathbb{U}$ birim diskinde $g(z)=1+b_1z+\ldots$ ve $h(z)=d_1z+d_2z^2+\ldots$ analitik fonksiyonlarını göz önüne alalım. Eğer her $z\in\mathbb{U}$ için

$$\left|\frac{f'(z)}{\alpha g(z)}-\frac{m}{2}\right|<k\frac{m}{2}$$

ve

$$\left| |z|^m \frac{f'(z)}{\alpha g(z)} + \frac{z(1-|z|^m)^2}{2|z|^2} \left\{ \left(\frac{(1-\alpha)}{\alpha} \frac{zf'(z)}{f(z)} + 1 \right) \frac{h(z)}{g(z)} + \frac{zh'(z)}{g(z)} \right\} \right.$$
$$\left. +(1-|z|^m) \left\{ 1 + \frac{(1-\alpha)}{\alpha} \frac{zf'(z)}{f(z)} + \frac{zg'(z)}{g(z)} \right\} - \left(1 + \frac{z(1-|z|^{2m})}{2|z|^2} \frac{h(z)}{g(z)} \right) \frac{m}{2} \right|$$
$$\leq k \left| \frac{z(1-|z|^m)^2}{2|z|^2} \frac{h(z)}{g(z)} + \left(1 + \frac{z(1-|z|^{2m})}{2|z|^2} \frac{h(z)}{g(z)} \right) \frac{m}{2} \right|$$

eşitsizlikleri sağlanırsa f fonksiyonu $\mathbb{C}$ de k-quasikonform genişlemeye sahiptir.

Sonuç 5.7: $f \in \mathcal{A}$, $k \in [0,1)$ ve $\beta \in \mathbb{C}$ olsun. α, A ve B kompleks sayılar olmak üzere $\Re\alpha > 1/2$, $A+B \neq 0$, $|A-B| < 2$, $|A| \leq 1$ ve $|B| \leq 1$ şartları sağlansın. Ayrıca, $\mathbb{U}$ birim diskinde $g(z) = 1 + b_1 z + \ldots$ analitik fonksiyonunu göz önüne alalım. Eğer her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\left| \frac{1}{\alpha} \left(\frac{f'(z)}{g(z)-\beta} - 1 \right) \right| < \frac{k|A+B|}{2-k|A-B|}$$

ve

$$\left| \left(\frac{f'(z)}{g(z)-\beta} - 1 \right) |z|^2 + \left(1-|z|^2\right) \left[\left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right) \frac{zf'(z)}{f(z)} + \frac{zg'(z)}{g(z)-\beta} \right] - \frac{k^2 \left(\bar{A}-\bar{B}\right)\left(A+B\right)}{4-k^2|A-B|^2} \right|$$
$$\leq \frac{2k|A+B|}{4-k^2|A-B|^2}$$

eşitsizlikleri sağlanırsa f fonksiyonu $\mathbb{C}$ de k-quasikonform genişlemeye sahiptir.

Sonuç 5.8: $f, g, \phi \in \mathcal{A}$, $g(z) \neq 0$ ve $\phi(z) \neq 0$ olsun. Ayrıca $m \in \mathbb{R}_+$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ ve $k \in [0,1)$ olsun. Eğer her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\left| \frac{\left(1-|z|^{(m+1)\gamma}\right)}{\gamma} \left[\alpha \frac{zf''(z)}{f'(z)} + \beta \left(\frac{zg'(z)}{g(z)} - \frac{z\phi'(z)}{\phi(z)} \right) \right] - \frac{m-1}{2} \right| \leq k \frac{m+1}{2}$$

eşitsizliği sağlanırsa

$$\mathcal{F}_{\alpha,\beta,\gamma}(z) = \left[\gamma \int_0^z u^{\gamma-1} \left(f'(u) \right)^{\alpha} \left(\frac{g(u)}{\phi(u)} \right)^{\beta} du \right]^{1/\gamma}$$

şeklinde tanımlanan $\mathcal{F}_{\alpha,\beta,\gamma}$ integral operatörü $\mathbb{C}$ de

$$l_k(a) = \begin{cases} \dfrac{(1-a)^2 + k\left|1-a^2\right|}{\left|1-a^2\right| + k(1-a)^2}, & a \in (0,\infty) \setminus \{1\} \\ k, & a = 1 \end{cases}$$

biçiminde bir quasikonform genişlemeye sahiptir.

Sonuç 5.9: $f \in \mathcal{A}$, $k \in [0,1)$ ve $m \in \mathbb{R}_+$ olsun. α ve β birer kompleks sayılar olmak üzere bu sayılar $\Re\alpha < 1/2$ ve $\Re\beta > 0$ şartlarını sağlasın. Ayrıca, $\mathbb{U}$ birim diskinde $g(z) = 1 + b_1 z + ...$ ve $h(z) = c_0 + c_1 z + ...$ analitik fonksiyonlarını göz önüne alalım. Eğer her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\left| \frac{f'(z)}{g(z)-\alpha} - \frac{m+1}{2} \right| < k\frac{m+1}{2}$$

ve

$$\left| \left(\frac{f'(z)}{g(z)-\alpha} - 1 \right) |z|^{\beta(m+1)} + \left(1 - |z|^{\beta(m+1)}\right) \left[2z^{\beta} \frac{f'(z)h(z)}{g(z)-\alpha} + \frac{1}{\beta} \frac{zg'(z)}{g(z)-\alpha} \right] \right.$$
$$\left. + \frac{z^{\beta+1}\left(1-|z|^{\beta(m+1)}\right)^2}{|z|^{\beta(m+1)}} \left[\frac{z^{\beta-1} f'(z)h^2(z)}{g(z)-\alpha} + \frac{1}{\beta}\left(\frac{g'(z)h(z)}{g(z)-\alpha} - h'(z) \right) \right] - \frac{m-1}{2} \right|$$
$$\leq k\frac{m+1}{2}$$

eşitsizlikleri sağlanırsa

$$\mathcal{F}_{\beta}(z) = \left[\beta \int_0^z u^{\beta-1} f'(u)\,du \right]^{1/\beta}$$

şeklinde tanımlanan $\mathcal{F}_{\beta}$ integral operatörü $\mathbb{C}$ de k-quasikonform genişlemeye sahiptir.

Sonuç 5.10: $f \in \Sigma$, $f'(\zeta) \neq 0$ olmak üzere $\mathbb{U}^*$ da $g(\zeta) = 1 + c_2\zeta^{-2} + ...$ analitik fonksiyonu verilsin. Ayrıca $\beta \in \mathbb{R}$ ve $m \in \mathbb{R}_+$, $s = \alpha + i\beta$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ ve $m \in \mathbb{R}_+$ olmak kaydıyla $1/2 < m \leq \alpha$ şartı sağlansın. $k \in [0,1)$ olsun. Bu durumda $\zeta \in \mathbb{U}^*$ için

$$\left|\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)g(\zeta)} - \frac{ms}{\alpha}\right| < k\,\frac{m|s|}{\alpha}$$

ve

$$\left|\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)g(\zeta)} - \left(2\ln|\zeta|\frac{\zeta g'(\zeta)}{g(\zeta)} + 1\right)\frac{ms}{\alpha}\right| \leq k\,\frac{m|s|}{\alpha}$$

eşitsizlikleri sağlanırsa, f fonksiyonu $\mathbb{C}$ de

$$l_k(s) = \frac{|s-1|^2 + k\left|(\bar{s})^2 - 1\right|}{\left|(\bar{s})^2 - 1\right| + k|s-1|^2} < 1$$

biçiminde bir quasikonform genişlemeye sahiptir.

KAYNAKLAR

Ahlfors, L. V., 1963. Quasiconformal reflections. Harvard University, Cambridge, Mass., U.S.A, 291-301.

Ahlfors, L. V., 1966. Lectures on quasiconformal mappings. Second ed., University Lecture Series, vol. 38, American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.

Ahlfors, L. V., 1974. Sufficient conditions for quasiconformal extension. Ann. Math. Studies 79, 23-29.

Ahlfors, L. V. and Weill, G., 1962. A uniqueness theorem for Beltrami equations. Proc. Amer. Math. Soc., 13, 975-978.

Alexander, J. W., 1915. Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions, Annals of Mathematics, 17(1), 12-22.

Becker, J., 1972. Löwnersche differentialgleichung und quasikonformfortsetzbare schlichte funktionen. J. Reine. Angew. Math., 255, 23-43.

Becker, J., 1980. Conformal mappings with quasiconformal extensions, Aspects of contemporary complex analysis. Acedemic Press, London, pp. 37-77.

Becker, J. and Pommerenke, Ch., 1984. Schlichtheitskriterien und Jordangebiete. J. Reine Angew. Math. 354, 74-94.

Betker, Th., 1991. Univalence criteria and Loewner chains. Bull. London Math. Soc., 23, 563-567.

Betker, Th., 1992. Lowner chains and quasiconformal extensions. Complex Variables Theory Appl. 20, no. 1-4, 107–111.

Brown, J. E., 1984. Quasiconformal extensions for some geometric subclasses of univalent functions. Internat. J. Math. Math. Sci. 7 (1984), no. 1, 187–195.

Çağlar M. and Orhan, H., 2013a. Sufficient conditions for univalence and quasiconformal extensions, (submitted).

Çağlar M. and Orhan, H., 2013b. Univalence criteria and quasiconformal extensions, (submitted).

Çağlar M. and Orhan, H., 2013c. Some generalizations on the univalence of an integral operator and quasiconformal extensions. Miskolc Math. Notes, 14(1), 49-62.

Çağlar M. and Orhan, H., 2013d. Univalence criteria for meromorphic functions and quasiconformal extensions. Journal of Inequalities and Applications, 112, 1-9.

Deiermann, P., 1992. Univalent functions with quasiconformal extensions. Complex Variables Theory Appl. 19, No. 4, 243-257.

Deniz, E. and Orhan, H., 2009. Univalence criterion for analytic functions. General Mathematics, 17(4), 211–220.

Deniz, E. Raducanu, D. Orhan, H., 2010. On an improvement of an univalence criterion. Mathematica Balkanica (N.S.), 24(1-2), 33-39.

Deniz, E. and Orhan, H., 2010. An extension of the univalence criterion for a family of integral operators. Annales Universitatis Mariae Curie-Skodowska Sectio A Mathematica, 64(2), 29-35.

Deniz, E., 2011. Kompleks Düzlemin Bazı Alt Bölgelerinde Tanımlı Analitik Fonksiyonlar İçin Ünivalentlik Kriterleri. Doktora tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Blimleri Enstitüsü, Erzurum.

Deniz, E. and Orhan, H., 2011. Some notes on extensions of basic univalence criteria. J. Korean Math. Soc., 48(1), 179-189.

Deniz, E. and Orhan, H., 2011. Univalence criterion for meromorphic functions and Loewner chains. Appl. Math. Comput., 218(6), 751--755.

Deniz, E., 2012. Sufficient conditions for the univalence and quasiconformal extensions of meromorphic functions. Georgian Math. J., 19 (4), 639–653.

Duren, P. L., 1983. Univalent functions. Springer-Verlag, New York.

Epstein, C. L., 1987. Univalence criteria and surfaces in hyperbolic space. J. Reine. Angew. Math., 380, 196-214.

Fait, M. Krzyz, J. G. and Zygmunt, J., 1976. Explicit quasiconformal extensions for some classes of univalent functions. Comment. Math. Helv. 51, no. 2, 279–285.

Gehring, F. W., 1982. Characteristic properties of quasidisks. University of Michigan.

Grunsky, H., 1939. Koe_zientenbedingungen fur schlicht abbildende meromorphe Functionen. Math. Z., 45, 29-61.

Graham, J. and Kohr, G., 2003. Geometric function theory in one and higher dimensions. Marcel Dekker, Inc.

Hjelle, G. A., 2002. Quasidisks-Examples and counterexamples. Diploma thesis, Norwegian University of Science and Technology, Norwegian.

Hotta, I., 2011. Loewner chains with complex leading coefficient. Monatsh Math., 163 315-325.

Hotta, I., 2009. Explicit quasiconformal extensions and Loewner chains. Proc. Japan Acad. Ser. A., 85, 108-111.

Hotta, I., 2010. Loewner chains and quasiconformal extension of univalent functions. Dissertation, Tohoku University.

Hotta, I., 2010. Ruscheweyh's univalent criterion and quasiconformal extensions. Kodai Math. J. 33, no. 3, 446--456.

Krzyz, J. G., 1976. Convolution and quasiconformal extension. Comm. Math. Helv. 51, 99-104.

Krzyz, J. G., 1987. Quasiconformal extensions of some special univalent functions. Colloq. Math. 51, 189–193.

Lehto, O., 1977. Domain constants associated with the Schwarzian derivative. Comment. Math. Helv. 52, 603-610.

Lehto, O., 1987. Univalent functions and Teichmüller spaces, Graduate Texts in Mathematics. vol. 109, Springer-Verlag, New-York.

Lewandowski, Z., 1981. On a univalence criterion. Bull. Acad. Polon. Sci. Math., 29, 123–126.

Mocanu, P. T., 1981. Sufficient conditions of univalence for complex functions in the class. Rev. Anal. Numer. Theor. Approx., 10 (1), 75-79.

Nehari, Z., 1949. The Schwarzian derivative and schlicht functions. Bull. Amer. Math. Soc., 55, 545-551

Noshiro, K., 1934–35. On the theory of schlicht functions. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., 2, 129–155.

Orhan, H. Raducanu, D. and Çağlar, M., 2013. Some sufficient conditions for the univalence of an integral operator, (submitted).

Ozaki, S., 1934. Some remarks on the univalency and multivalency of functions. Sci. Rep. Tokyo, Bunrika Daigaku, 2, 41-55.

Ozaki, S. and Nunokawa, M., 1972. The schwarzian derivative and univalent functions. Proc. Amer. Math. Soc., 33 (2) 392-394.

Pascu, N. N., 1995. Loewner chains and univalence criteria. Mathematica (Cluj), 37 (60), 215–217.
Pascu, N. N., 1996. Method of Loewner chains for constracting univalency criteria. J. Anal., 4, 35-40.
Pascu, N. N., 1987. An improvement of Becker's univalence criterion. Proc. of the Comm. Sess. S. Stoilov, Preprint, 15-20.
Pascu, N. N. Raducanu, D. and Owa, S., 2003. Subordination chains and univalence cirteria. Bull. Korean Math. Soc. 40 (4), 671-675.
Pfaltzgraff, J. A., 1993. k-quasiconformal extension criteria in the disk. Complex Variables, 21, 293-301.
Pommerenke, Ch., 1975. Univalent functions. Vandenhoech and Ruprecht, Göttingen.
Pommerenke, Ch., 1965. Über die Subordination analytischer Funktionen. J. Reine Angew. Math., 218, 159-173.
Raducanu, D. Orhan, H. and Deniz, E., 2010. On some sufficient conditions for univalence. An. Stiint Univ. Ovidius Constant a Ser. Mat., 18(2), 217-222.
Raducanu, D., 1996. Some sufficient conditions for univalence in the upper half plane. Studia Univ. Babeş-Bolyai Math., 41 (1), 47-50.
Raducanu, D. Tudor, H., 2012. A generalization of Goluzin's univalence criterion. Studia Univ. Babeş-Bolyai Math., 57 (2), 261-267.
Ruscheweyh, St., 1976. An extension of Becker's univalence condition. Math. Ann., 220, 285-290.
Sugawa, T., 1999. Holomorphic motions and quasiconformal extensions. Ann. Univ. Mariae Curie-SkAlodowska Sect. A 53, 239–252.
Sugawa, T., 2007. The universal Teichmüller space and related topics, Quasiconformal mappings and their applications. Narosa, New Delhi, pp. 261–289.
Tan, D., 1992. Quasiconformal extension and univalency criteria. Michigan Math. J. 39, 163-172.
Tudor, Horiana., 2012. Some criteria for univalent functions. Bulletin of the Transilvania University of Brasov., Vol 5 (54), No.2, Series III: Mathematics, Informatics, Physics, 113-116.
Tudor, Horiana., 2013. A connection between basic univalence criteria. Abstract and Applied Analysis. Vol. 2013. Hindawi Publishing Corporation, 7 pages.
Warshawski, S.E., 1935. On the higher derivatives at the boundary in conformal mapping. Trans. Amer. Math. Soc., 38, 310-340.
Yang, Z. and Zhou, Z., 2004. On quasiconformal extensions of a class of univalent functions. Journal of Fudan University (Natural Science), Vol. 43 No. 3, 356-360.

ÖZGEÇMİŞ

1983 yılında Erzurum'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Erzurum'da tamamladı. 2003 yılında girdiği Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2007 yılında mezun oldu. 2007–2009 yılları arasında Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde Matematiksel Analiz Bilim dalında yüksek lisans öğrenimini tamamladı. 2009 yılında Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak göreve başladı. Aynı yıl YÖK 2547 sayılı kanunun 35. maddesi ile Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Fonksiyonel Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim dalında doktora öğrenimine başladı.

Halen Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak çalışmakta olup, evli ve bir çocuk babasıdır.