4-BOYUTTA HEMEN HEMEN B-MANİFOLDLAR

Hilmi SARSILMAZ

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Ana Bilim Dalı
Doç. Dr. Murat İŞCAN
2013

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

4-BOYUTTA HEMEN HEMEN B-MANİFOLDLAR

Hilmi SARSILMAZ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

ERZURUM
2013

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAY FORMU

4-BOYUTTA HEMEN HEMEN B-MANİFOLDLAR

Doç. Dr. Murat İŞCAN danışmanlığında, Hilmi SARSILMAZ tarafından hazırlanan bu çalışma 15/07/2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliği **(3/3)** ile kabul edilmiştir.

Başkan	: Doç. Dr. Murat İŞCAN	*İmza*	:
Üye	: Doç. Dr. Aydın GEZER	*İmza*	:
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Levent AKGÜN	*İmza*	:

Yukarıdaki sonucu onaylıyorum

Prof. Dr. İhsan EFEOĞLU
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

4-BOYUTTA HEMEN HEMEN B-MANİFOLDLAR

Hilmi SARSILMAZ

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Murat İŞCAN

Bu tezin amacı, 4-boyutlu nötral manifold üzerinde verilen hemen hemen parakompleks yapı için hemen hemen B-manifoldlar elde etmenin bir yolunu göstermektir. Bunun için, ilk olarak 4-manifold üzerindeki bir nötral metrik hakkında temel bilgiler verilmiştir. Daha sonra, hemen hemen B-manifoldun nasıl oluşturulacağı gösterilmiştir. Son olarak ise, iki farklı bazda Walker 4-manifoldlar üzerinde hemen hemen B-manifoldlara örnekler verilmiştir.

2013, 52 sayfa

Anahtar Kelimeler: B-metrik, Nötral metrik, Walker 4-manifoldlar, Hemen hemen parakompleks yapı.

ABSTRACT

Master Thesis

FOUR DIMENSIONAL ALMOST B-MANIFOLDS

Hilmi SARSILMAZ

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Murat İŞCAN

The purpose of the thesis is to show a way of construction of almost B-manifolds for given almost paracomplex structure on a neutral 4-manifolds. Firstly, for this aim, the basic information about a neutral metric on a 4-manifolds are given. Secondly, how to construct almost B-manifolds are showed. Finally, examples are given to construct almost B-manifolds on a Walker 4-manifold in two different cases.

2013, 52 pages

Keywords: B-metric, Neutral metric, Walker 4-manifolds, Almost paracomplex structure.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Bu tez konusunu çalışmamı sağlayan, her adımda bilgilerini esirgemeyen, çok değerli hocam Sayın Doç. Dr. Murat İŞCAN'a en içten dileklerimle saygılarımı sunarım.

Tezin hazırlanması sürecinde değerli fikirlerinden yararlandığım bölümümüzün öğretim üyelerine sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, çalışmalarım esnasında kendilerinden görmüş olduğum destek ve sonsuz güvenden dolayı aileme, nişanlıma ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Yüksek lisans eğitimimde **"**Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı**"** ile tarafıma vermiş olduğu maddi destekten dolayı TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

Hilmi SARSILMAZ

Temmuz 2013

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

I	Birim Afinor Alanı
S_{ij}^{h}	Burulma Tensörü
Γ_{ij}^{h}	Cristoffel Sembolü
R_{ijk}^{h}	Eğrilik Tensörü
$T_q^p(M_n)$	***M*** $\boldsymbol{M_n}$ Manifoldu Üzerinde ***(p,q)*** Tipli Tensör Demeti
D	Null Dağılım
g	Pseudo-Riemannian Metriği
π	Tabii İzdüşüm
L_X	***X*** Vektör Alanına Göre Lie Türevi
∇_X	***X*** Vektör Alanına Göre Kovaryant Türev
(M, g, D)	Walker Manifoldu

1. GİRİŞ

Manifoldlar üzerindeki yapılar teorisi modern diferensiyel geometrinin en ilgi çekici konularındandır. Bu konulardan biriside parakompleks yapılardır. Böyle yapılara sahip manifoldların diferensiyel geometrik yönleri, Riemannian geometri için çok geniş ve çok verimli alanlardır.

Walker manifoldları (M, g, D) şeklindeki üçlüdür. Burada M n-boyutlu bir manifoldu, g belirsiz (indefinite) bir metriği ve D ise $r \leq \frac{n}{2}$ olmak üzere r-boyutlu paralel sıfır (null) dağılımı ifade eder. Böyle metriklerin kanonik formları Walker (1950) tarafından elde edilmiştir.

Walker manifoldu üzerindeki en yoğun çalışmalar 2004 yılından sonra başlamıştır. Matsushita (2004) Walker 4-manifoldlar için uygun hemen hemen kompleks yapılar inşa etmiştir. Chaici (2005) 4-boyutlu Walker metriklerinin eğrilik özelliklerini araştırmıştır. Davidov (2006) Almost Kahler-Walker 4-manifoldları ve (2007) Hermitian-Walker 4-manifoldları incelemiş, Salimov (2010) Norden-Walker metriklerinin bazı özelliklerini ve Iscan (2011) 8-boyutta Walker manifoldunun eğrilik tensörünün özelliklerini araştırmıştır.

Sunulan bu tezde, 4-boyutta hemen hemen B-manifoldlar araştırılmıştır. Bu amaçla, yapılan bu çalışmanın anlaşılabilmesi için ikinci bölümde ilgili özellikler ve tanımlar, kuramsal temeller adı altında verilmiştir.

Üçüncü bölümde, diferensiyel geometrik cebirsel yapılar ve paralel null-dağılımı hakkında bilgi verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise ilk olarak, 4-manifold üzerindeki bir nötral metrik hakkında temel bilgiler verilmiştir. Daha sonra, nötral metriğe göre 4-boyutta hemen hemen B-manifoldun nasıl oluşturulacağı gösterilmiştir. Son olarak ise, iki farklı bazda Walker 4-manifoldlar üzerinde hemen hemen B-manifoldlara örnekler verilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Diferensiyellenebilir Manifoldlar

Tanım 2.1.1: X Hausdorff topolojik uzay olmak üzere herhangi bir $U \subset X$ açık kümesinin $V \subset \mathbb{R}^n$ bölgesine

$$\varphi : U \to V$$

homeomorfizmine X de n boyutlu harita veya n boyutlu koordinat sistemi, U ya ise φ haritasının koordinat komşuluğu veya koordinat bölgesi denir. Bazen harita (U, φ) şeklinde de gösterilir.

Eğer $x \in U$ ise

$$\varphi ⍰ (x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$$

olur. $x^1, \dots, x^n$ reel sayılarına φ haritasında x noktasının koordinatları denir.

Tanım 2.1.2: Eğer X Hausdorff topolojik uzayının n boyutlu φ_α haritalarının U_α bölgeleri bu uzayı örterse, yani

$$X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \ , \quad (\text{ A-indisler kümesi })$$

ise X e n boyutlu topolojik manifold veya sadece n boyutlu manifold denir.

Tanım 2.1.3: X topolojik Hausdorff uzay ve k ise $0 \le k \le \infty$ şartını sağlayan tam sayı olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in A, U_\alpha \subset X\}$ lokal koordinatlar ailesine X üzerinde C^k sınıfından n boyutlu atlas adı verilir:

1. Lokal haritaların U_α bölgesi X i örter ($X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$), yani X, n boyutlu topolojik manifolddur.

2. Keyfi $\alpha, \beta \in A$ için $U_\alpha \cap U_\beta \ne \phi$ ise

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \tag{2.1}$$

dönüşümü C^k sınıfındandır. Bu şarta bazen $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ve (U_β, φ_β) haritalarının C^k uzlaşması şartı da denir.

$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümüne ise koordinatların dönüşümü $\left(u_\beta^i = u_\beta^i\left(u_\alpha^j\right),\ i, j = 1, \ldots, n\right)$ denir. Burada u_β^i, (U_β, φ_β) haritasındaki $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ noktasının koordinatları, u_α^j ise $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ haritasındaki x noktasının koordinatlarıdır.

$U_\alpha \cap U_\beta = \phi$ ise $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümü tayin edilemez. Bu durumda $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümünün C^k sınıfından olduğu kabul edilecektir. (2.1) de verilen dönüşüm, $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümlerinin C^k sınıfından difeomorfizmler olmasına denktir. Bu ise, $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ koordinat dönüşümünün Jakobiyen matrisinin determinantının sıfırdan farklı olması demektir.

Tanım 2.1.4: $\{(\mathrm{U}_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ ve $\{(\mathrm{U}_\beta, \varphi_\beta)\}$, C^k sınıfından herhangi iki atlas olsun. Bu atlasların keyfi $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ve (U_β, φ_β) haritaları C^k uzlaşan ise yani, $\{(\mathrm{U}_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ ve

$\{(\mathrm{U}_\beta, \varphi_\beta)\}$ atlaslarının birleşimi C^k sınıfından atlas ise verilen atlaslara denk atlaslar denir.

Tanım 2.1.5: X Hausdorff uzay üzerinde C^k atlaslarının denklik sınıfına C^k-yapı denir. C^k-yapısının tüm C^k atlaslarının birleşimi yine C^k atlas oluşturur. Bu atlasa maksimal C^k atlas adı verilir.

C^0-yapıya topolojik yapı, C^k $(1 \le k \le \infty)$ yapıya ise düzgün (smooth) yapı denir. Bu çalışmada sadece C^∞ sınıfından olan yapılara bakılacaktır.

Tanım 2.1.6: M Hausdorff ve sayılabilir baza sahip topolojik uzay olsun. Eğer, M üzerinde n-boyutlu C^∞ atlaslarının C^∞ yapısı verilmişse M uzayına n-boyutlu C^∞ sınıfından diferensiyellenebilir veya düzgün manifold denir ve M_n ile gösterilir (Salimov ve Mağden 2008).

2.2. Tensör Alanları

Tanım 2.2.1: M_n diferensiyellenebilir bir manifold ve T_p, $p \in M_n$ noktasındaki vektör uzayı olsun. $\forall p \in M_n$ noktasına bir ve yalnız bir $X_p \in T_p$ vektörünü karşılık getiren $X : p \to X_p$ dönüşümüne M_n üzerinde vektör alanı denir.

f, M_n üzerinde tanımlanan bir fonksiyon ise Xf de M_n üzerinde $(Xf)(p) = X_p f$ biçiminde tanımlanan bir fonksiyondur. Bir diferensiyellenebilir f fonksiyonu için Xf de diferensiyellenebilir bir fonksiyon ise X vektör alanına diferensiyellenebilir vektör alanı denir.

M_n üzerinde, (U, φ) lokal koordinat sisteminde X vektör alanı

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} = X^i \partial_i$$

biçiminde gösterilir. Burada $X^i = X^i(x^i)$ ler U koordinat komşuluğundaki x^i lokal koordinatlarının fonksiyonlarıdır. X^i lere X vektör alanının ∂_i çatısındaki koordinatları denir. X vektör alanının diferensiyellenebilir olması için gerek ve yeter şart $X^i = X^i(x^i)$ lerin diferensiyellenebilir olmasıdır.

Tanım 2.2.2: Her $p \in M_n$ noktasına bir ve yalnız bir $\omega_p \in T_p^*$ kovektörünü karşılık getiren $\omega : p \to \omega_p$ dönüşümüne M_n üzerinde kovektör alanı denir. Burada, T_p^* $p \in M_n$ noktasındaki kovektör uzayıdır.

Eğer ω kovektör alanı ise, herhangi bir U komşuluğunda $\omega = \omega_i dx^i$ yazılabilir. Burada dx^i koçatıdır. ω kovektörünün diferensiyellenebilir olması için gerek ve yeter şart $\omega_i = \omega_i(x^i)$ nin diferensiyellenebilir olmasıdır.

Tanım 2.2.3: Keyfi $p \in M_n$ noktasına bir ve yalnız bir $t_p \in T_p^q(p)$ tensörünü karşılık getiren $t : p \to t_p$ dönüşümüne M_n üzerinde (p,q) tipli tensör alanı denir. Burada, $T_p^q(p)$, $p \in M_n$ noktasındaki tensör uzayıdır (Bishop and Goldberg 1968).

x^i lokal koordinatlarının verildiği U koordinat komşuluğunda, (p,q) tipli t tensör alanı

$$t = t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_p} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada, $t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ lere, lokal koordinat sisteminde, t tensör alanının U koordinat komşuluğundaki koordinatları denir. Eğer $t_{j_1 \cdots j_q}^{i_1 \cdots i_p} = t_{j_1 \cdots j_q}^{i_1 \cdots i_p}(x)$ fonksiyonları diferensiyellenebilirse t tensör alanı da diferensiyellenebilirdir.

2.3. Afin Konneksiyonlu Uzaylar

M_n manifoldu üzerinde $\Im_0^1(M_n)$ vektör alanlarının modülü olmak üzere

$$\nabla_X Y = \nabla(X, Y) : \Im_0^1(M_n) \times \Im_0^1(M_n) \to \Im_0^1(M_n)$$

dönüşümü

i. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,
ii. $\nabla_Z(fX + gY) = (Zf)X + f\nabla_Z X + (Zg)Y + g\nabla_Z Y$

şartlarını sağlıyorsa ∇ ya afin konneksiyon denir. Burada

$$\nabla_X : \Im_0^1(M_n) \to \Im_0^1(M_n)$$

dönüşümüne kovaryant diferensiyellenme denir (Bishop and Goldberg 1968).

2.4. Burulma ve Eğrilik Tensörleri

M_n üzerinde $f = f(x^1, \ldots, x^n)$ diferensiyellenebilir fonksiyonu verilmiş olsun. Bu fonksiyonun tam diferensiyeli, yani $df = \partial_i f dx^i$ ifadesi, koordinatların dönüşümü halinde değişmez kalır ve df fonksiyonunun dx^i vektörünün lineer fonksiyonu olur. Bu lineer fonksiyona karşılık gelen kovektörün koordinatları

$$V_i = \partial_i f \tag{2.2}$$

ile gösterilir. Bu kovektöre f fonksiyonunun gradyent kovektörü, f fonksiyonuna ise bu kovektör alanın potansiyel fonksiyonu denir. Keyfi V_i kovektörünün herhangi bir skaler alanın gradyenti olması için gerek ve yeter şart

$$\partial_{[j} V_{i]} = 0 \tag{2.3}$$

olmasıdır (Yano 1965). Burada $[.\,,\,.]$ sembolü antisimetrikleşme işlemini göstermektedir.

(M_n, ∇) afin konneksiyonlu uzay olsun. V_i gradyent kovektörünün kovaryant türevi

$$\nabla_j V_i = \partial_j V_i - \Gamma^k_{ji} V_k \tag{2.4}$$

biçimindedir. Burada $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ij}(x)$, bir U komşulunda tayin edilmiş C^∞ sınıfından fonksiyonlardır. (2.4) denkleminde j ve i indislerine göre alterneleştirme işlemi yapılır ve (2.3) eşitliği kullanılırsa

$$\nabla_{[j} V_{i]} = -\Gamma^k_{[ji]} V_k = S^k_{ij} V_k \tag{2.5}$$

bulunur. Burada

$$S^k_{ij} = \frac{1}{2}(\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}) \tag{2.6}$$

olarak verilmiştir. (2.5) eşitliğinin sol tarafı tensör, sağ taraftaki V_k da $(0,1)$ tipli tensör olduğundan S_{ij}^{k} da $(1,2)$ tipli tensör ifade eder. S_{ij}^{k} tensörü ∇ konneksiyonunun burulma tensörünün doğal çatıdaki koordinatlarıdır.

Burulma tensörünün invaryant formda yazılışı ise

$$2S\left(X,Y\right)=\nabla_X Y-\nabla_Y X-\left[X,Y\right],\quad \forall X,Y\in\Im_0^1(M_n) \tag{2.7}$$

biçimindedir (Kobayashi and Nomizu 1963). Burada $\left[X,Y\right]$, X ve Y vektör alanlarının Lie parantezi olup

$$\left[X,Y\right]f=X\left(Yf\right)-Y\left(Xf\right)$$

şeklindedir.

Keyfi v^k vektörünün $\nabla_s v^i=\partial_s v^i+\Gamma_{sm}^{i}v^m$ kovaryant türevi $(1,1)$ tipli tensör belirtir. Bu tensörün kovaryant türevi ise

$$\begin{aligned}\nabla_r\nabla_s v^i &=\partial_r\nabla_s v^i+\Gamma_{rm}^{i}\nabla_s v^m-\Gamma_{rs}^{m}\nabla_m v^i\\ &=\partial_r(\partial_s v^i+\Gamma_{sk}^{i}v^k)+\Gamma_{rm}^{i}(\partial_s v^m+\Gamma_{sk}^{m}v^k)-\Gamma_{rs}^{m}\nabla_m v^i\\ &=\partial_{rs}^2 v^i+\partial_r\Gamma_{sk}^{i}v^k+\Gamma_{sk}^{i}\partial_r v^k+\Gamma_{rm}^{i}\partial_s v^m+\Gamma_{rm}^{i}\Gamma_{sk}^{m}v^k-\Gamma_{rs}^{m}\nabla_m v^i\end{aligned}$$

biçiminde bulunur. Bu eşitlikte r,s indislerine göre alterneleştirme işlemi uygulanırsa,

$$2\nabla_{[r}\nabla_{s]}v^i=R_{rsk}^{i}v^k-2S_{rs}^{k}\nabla_k v^i \tag{2.8}$$

denklemi elde edilir. (2.8) denkleminde

$$R^i_{rsk} = \partial_r \Gamma^i_{sk} - \partial_s \Gamma^i_{rk} + \Gamma^i_{rm}\Gamma^m_{sk} - \Gamma^i_{sm}\Gamma^m_{rk} \tag{2.9}$$
$$= 2(\partial_{[r}\Gamma^i_{s]k} + \Gamma^i_{[r|m|}\Gamma^m_{s]k})$$

olarak alınmıştır. (2.8) denkleminin sol tarafındaki terim ve sağ tarafındaki ikinci terim tensör ve v^i keyfi vektör olduğundan R^i_{rsk} ifadesi $(1,3)$ tipli tensördür. Bu tensöre M_n uzayının eğrilik tensörü veya Riemannian- Christoffel tensörü denir.

(2.8) formülüne benzer olarak aşağıdaki formüller yazılır:

$$2\nabla_{[r}\nabla_{s]}\omega_k = -R^m_{rsk}\omega_m - 2S^m_{rs}\nabla_m\omega_k \ , \tag{2.10}$$

$$2\nabla_{[r}\nabla_{s]}\varphi^j_i = R^j_{rsm}\varphi^m_i - R^m_{rsi}\varphi^j_m - 2S^k_{rs}\nabla_k\varphi^j_i \ , \tag{2.11}$$

$$2\nabla_{[r}\nabla_{s]}t^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} = \sum_{\lambda=1}^{p} R_{rsm}{}^{i_\lambda} t^{i_1\ldots m\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} - \sum_{\mu=1}^{q} R_{rsj_\mu}{}^{m} t^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots m\ldots j_q} - 2S^m_{rs}\nabla_m t^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} \tag{2.12}$$

(2.11) formülüne φ^j_i afinorunun Ricci özdeşliği denir.

Keyfi $X, Y, Z \in \Im^1_0(M_n)$ için eğrilik tensörünün invaryant formda yazılışı

$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \tag{2.13}$$

biçimindedir (Kobayashi and Nomizu 1963).

2.5. Burulmasız Uzaylar

Burulmasız afin konneksiyonlu uzayların burulma tensörü sıfıra eşit olduğundan bu uzayların konneksiyon katsayıları alt indislerine göre simetriktir, yani

$$\Gamma_{ij}^{k} = \Gamma_{ji}^{k}$$

olur. Burulmasız afin konneksiyonlu uzayın herhangi eğrisel koordinat sistemine göre koordinatları $\overset{\circ}{u}{}^{1},...,\overset{\circ}{u}{}^{n}$ olan O $(\overset{\circ}{u}{}^{i})$ noktası olsun. Ayrıca konneksiyon katsayılarının verilmiş olduğu koordinat sistemine göre, bu noktadaki değerleri $\overset{\circ}{\Gamma}{}_{ij}^{k}$ katsayıları ile verilsin. Bu durumda $\delta_{k}^{i'}$ Kronecker sembolü olmak üzere

$$u^{i'} = \delta_{k}^{i'}\{(u^{k} - \overset{\circ}{u}{}^{k}) + \frac{1}{2}\overset{\circ}{\Gamma}{}_{pq}^{k}(u^{p} - \overset{\circ}{u}{}^{p})(u^{q} - \overset{\circ}{u}{}^{q})\} \tag{2.14}$$

biçiminde yeni koordinatlar tanımlanır. (2.14) dönüşümü diferensiyellenebilirdir ve $u^{i'}$ koordinatlarının u^{i} koordinatlarına göre kısmi türevleri

$$A_{i}^{i'} = \delta_{i}^{i'} + \delta_{k}^{i'}\overset{\circ}{\Gamma}{}_{ip}^{k}(u^{p} - \overset{\circ}{u}{}^{p}), \quad A_{ij}^{i'} = \delta_{k}^{i'}\overset{\circ}{\Gamma}{}_{ij}^{k} \tag{2.15}$$

biçiminde yazılır. (2.15) eşitliği O noktasında ve civarında $\det\left(A_{i}^{i'}\right) \neq 0$ şartını sağlar. Yani, (2.14) dönüşümü diferensiyellenebilir manifoldun tanımındaki mümkün olan dönüşümler sınıfındandır. (2.15) türev fonksiyonları O noktasında yazılırsa,

$$A_{i}^{i'} = \delta_{i}^{i'}, \quad A_{ij}^{i'} = \delta_{k}^{i'}\overset{\circ}{\Gamma}{}_{ij}^{k} \tag{2.16}$$

olur.

Şimdi konneksiyon katsayılarının yeni koordinat sistemine göre, O noktasındaki değerleri hesaplanacaktır. Bunun için (2.16) eşitliliği ve konneksiyonların dönüşüm kuralı kullanılarak

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^{i}_{jk} = \delta^{j'}_{j}\delta^{k'}_{k}\delta^{i}_{i'}\overset{\circ}{\Gamma}{}^{i'}_{j'k'} + \delta^{i}_{i'}\delta^{i'}_{l}\overset{\circ}{\Gamma}{}^{l}_{kj}$$

veya

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^{i'}_{j'k'} = 0$$

bulunur. Böylece burulmasız afin uzayın her bir noktasında öyle koordinat sistemi vardır ki, konneksiyon katsayılarının bu sisteme göre bu noktadaki bütün değerleri sıfır olur. (2.14) ile verilen koordinatlara normal koordinat sistemi denir.

Burulmasız afin konneksiyonlu uzaylarda aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

1. $R_{(rs)k}{}^{i} = 0,$

2. $R_{[rsk]}{}^{i} = 0,$

3. $\nabla_{[t}R_{rs]k}{}^{i} = 0$ (Bianhci-Padov eşitliği).

Bu eşitliklerin her üçünün invaryant (tensör) karakter taşıdığı dikkate alınırsa, bunların ispatının normal koordinat sisteminde incelenmesi yeterli ve daha kolaydır.

Burulmasız afin konneksiyonlu uzayda simetrik ve regüler a_{ij} tensörü verilmiş olsun. Bu tensörün tersi $\tilde{a}^{ij}$ olmak üzere a_{ij} tensörünün kovaryant türevi

$$\nabla_k a_{ij} = a_{kij} \tag{2.17}$$

olarak gösterilsin. (2.17) eşitliğinde indislerin yeri dairesel olarak değiştirilerek aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

$$\partial_k a_{ij} - \Gamma_{ki}^m a_{mj} - \Gamma_{kj}^m a_{mi} = \nabla_k a_{ij},$$
$$\partial_i a_{jk} - \Gamma_{ij}^m a_{mk} - \Gamma_{ik}^m a_{jm} = \nabla_i a_{jk},$$
$$\partial_j a_{ki} - \Gamma_{jk}^m a_{mi} - \Gamma_{ji}^m a_{km} = \nabla_j a_{ki}.$$

Sonuncu iki eşitlikten birinci eşitlik çıkartılırsa,

$$2\Gamma_{ij}^m a_{mk} = \partial_i a_{jk} + \partial_j a_{ik} - \partial_k a_{ij} - \left(a_{ijk} + a_{jik} - a_{kij}\right) \qquad (2.18)$$

bulunur. (2.18) eşitliğinin her iki tarafı $\tilde{a}^{rk}$ tensörü ile kontraksiyona alınırsa

$$\Gamma_{ij}^r = \left\{ {r \atop ij} \right\} - \frac{1}{2}\tilde{a}^{rk}\left(a_{ijk} + a_{jik} - a_{kij}\right) \qquad (2.19)$$

olur. Burada

$$\left\{ {r \atop ij} \right\} = \frac{1}{2}\tilde{a}^{rk}\left(\partial_i a_{jk} + \partial_j a_{ik} - \partial_k a_{ij}\right) \qquad (2.20)$$

biçimindedir. (2.20) ifadesine a_{ij} tensörünün Christoffel sembolü denir. Burulmasız afin konneksiyonlu uzayın konneksiyon katsayıları regüler ve simetrik a_{ij} tensörünün Christoffel sembolü ve kovaryant türevleri yardımıyla ifade edilir.

Tanım 2.5.1: Burulmasız afin konneksiyonlu M_n uzayında $e_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \begin{cases} \mp 1 \\ 0 \end{cases}$, $e = e_{1,2,\ldots,n}$ n-vektörü olmak üzere $\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \ldots, \underset{n}{v}$ lineer bağımsız vektörleri üzerine kurulan paralel yüzün hacmi

$$V = e_{i_1 i_2 \ldots i_n} \underset{1}{v}^{i_1} \underset{2}{v}^{i_2} \ldots \underset{n}{v}^{i_n} \qquad (2.21)$$

olsun. $\underset{1}{v},\underset{2}{v},...,\underset{n}{v}$ vektörlerin paralel taşınması sonucunda V hacmi korunursa burulmasız M_n uzayına eşafin (denk afin) uzay denir.

(2.21) denkleminden

$$\delta e_{i_i..i_n} = 0 \text{ veya } \nabla_k e_{i_i..i_n} = 0 \tag{2.22}$$

olur. Eşafin uzayın konneksiyonu (2.22) denklemiyle belirlenir. (2.22) şartı

$$\partial_k e_{i_i..i_n} - \Gamma^s_{ki_1} e_{si_2..i_n} - ... - \Gamma^s_{ki_n} e_{i_1..s} = 0 \tag{2.23}$$

biçiminde yazılır. n-vektörün antisimetrikliğine göre (2.22) sisteminin bütün denklemleri

$$\partial_k e_{12..n} - \Gamma^s_{k1} e_{s2..n} - ... - \Gamma^s_{kn} e_{12..s} = 0 \tag{2.24}$$

denklemine denk olur. $e_{12..n} = e$ olarak yazılırsa bu durumda (2.24) eşitliğinden

$$\Gamma^s_{ks} = \partial_k \ln e \tag{2.25}$$

yazılır. (2.25) eşitliği eşafin konneksiyonun katsayıları ile belirlenen Γ^s_{ks} toplamı gradyenttir. Bu gradyentin potansiyel fonksiyonu ise $\ln e$ olur.

$$R_{ij} = R_{kij}{}^{k} = \partial_k \Gamma^k_{ij} - \partial_i \Gamma^k_{kj} + \Gamma^k_{kl}\Gamma^l_{ij} - \Gamma^l_{ki}\Gamma^k_{lj} \tag{2.26}$$

tensörüne Ricci tensörü denir. Eşafin konneksiyonu

$$R_{ij} = R_{ji} \tag{2.27}$$

şartı ile de karakterize edilebilir.

Burulmasız afin konneksiyonlu uzaylarda eğrilik tensörünün $R_{[rsk]}{}^{i} = 0, \quad R_{(rs)k}{}^{i} = 0$ şartlarını sağladığını göz önüne alındığında

$$R_{rsk}{}^{k} = R_{rs} - R_{sr} \tag{2.28}$$

yazılabilir. (2.27) ve (2.28) eşitlikleri eş afin konneksiyonunun

$$R_{rsk}{}^{k} = 0$$

şartı ile karakterize edilebileceğini gösterir.

Tanım 2.5.2: Burulmasız afin konneksiyonlu uzayın her bir noktasındaki tanjant uzayında verilen simetrik $(0,2)$ tipli g_{ij} tensörü tanjant uzayın paralel taşınması durumunda korunuyorsa böyle uzaylara metrik uzay denir. Burada simetrik (0,2) tipli g_{ij} tensörüne de metrik tensör denir.

Tanım 2.5.3: Metrik uzayın g_{ij} metrik tensörü regüler ise yani $\det(g_{ij}) \neq 0$ oluyorsa böyle uzaya Weyl uzayı denir ve W_n ile gösterilir.

Tanım 2.5.4: Eğer Weyl uzayı eşafin uzay olursa bu uzaya Riemannian uzayı denir ve V_n ile gösterilir.

Riemannian uzayı burulmasız konneksiyona sahip olan uzaydır ve bu uzayın Riemannian konneksiyonu

$$\nabla_k g_{ij} = 0 \tag{2.29}$$

şartı ile karakterize edilir. V_n Riemannian uzayının konneksiyon katsayıları

$$\Gamma_{ij}^{k} = \left\{ {k \atop ij} \right\} = \frac{1}{2} g^{kr} \left(\partial_i g_{rj} + \partial_j g_{ir} - \partial_r g_{ij} \right) \tag{2.30}$$

biçiminde verilir. Yani, V_n uzayının konneksiyon katsayıları g_{ij} tensörünün Christoffel sembolleriyle çakışır. (2.30) katsayılarıyla verilen konneksiyona Riemannian konneksiyonu veya Levi-Civita konneksiyonu denir. Diğer taraftan Riemannian manifoldu üzerinde $\nabla g = 0$ şartını sağlayan ama burulması olan konneksiyonlar da vardır. Bu tür konneksiyonlara ise metrik konneksiyon denir.

2.6. Riemannian Manifoldu

Her bir $x \in M_n$ noktasında (0,2) tipli simetrik g tensörü ve $\forall Y \in T_x(M_n)$ için $g(X,Y) = 0$ eşitliğinden $X = 0$ oluyorsa g ye M_n üzerinde Riemannian metriği denir. Lokal koordinatlarda bu şart $Det(g_{ij}) \neq 0$ şartına denktir. g nin bileşenleri g_{ij} olmak üzere g için

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j$$

ifadesi de kullanılır (Kobayashi and Nomizu 1963).

Eğer M_n üzerinde Riemannian metriği verilmişse, o zaman (M_n, g) çiftine Riemannian manifoldu denir.

Burulmasız $\Gamma_{ij}^{k}=\frac{1}{2}g^{ks}\left(\partial_i g_{sj}+\partial_j g_{is}-\partial_s g_{ij}\right)$ konneksiyonuna ise Riemannian manifoldunun Riemannian konneksiyonu denir.

2.7. Pseudo-Riemannian Manifoldu

$\left(M_n,g\right)$ pseudo-Riemannian manifoldu g metrik tensörü simetrik, bilineer ve non-dejenere olan M_n Riemannian manifolddur. Burada g metrik tensörünün pozitif tanımlı olması gerekmez, fakat non-dejenere olmak zorundadır. Böyle metriklere de pseudo-Riemannian metrik denir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Diferensiyel Geometrik Cebirsel Yapılar

M_n n-boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold olsun $(n = 2m)$. $\varphi \in \Im_1^1(M_n)$, $\varphi^2 = -I$, $z = aI + b\varphi,\ a, b \in R$ ifadesine kompleks cebirsel yapı denir. Kompleks cebir değişmeli bir cebirdir. Kompleks cebirsel yapının bazı $\{1, i\}$, $i^2 = -1$, $1.i = i.1$ şeklindedir.

3.1.1. m-boyutlu cebir (birleşimli, değişimli sonlu boyutlu cebir)

A_m m-boyutlu, birleşimli ve birimli bir cebir olsun. Yani A_m, $\forall\ a, b, c \in \mathrm{A}_m$ için $(ab)c = a(bc)$ şartını ve $\forall\ a \in \mathrm{A}_m$ ve $\exists e$ için $ea = ae$ şartını sağlar.

A_m cebir olduğundan aynı zamanda bir vektör uzayıdır. Dolayısıyla $\vec{e}_\alpha \in \mathrm{A}_m$, $\alpha = 1, ..., n,\ \{\vec{e}_\alpha\}$ şeklindeki baza sahiptir ve

$$\vec{e}_\alpha \vec{e}_\beta = C_{\alpha\beta}^{\gamma} \vec{e}_\gamma \tag{3.1}$$

şeklinde yazılır.

$C_{\alpha\beta}^{\gamma}$ ya cebirin yapı sabitleri denir. Yapı sabitlerinin en önemli özelliği (1,2) tipli tensörün koordinatları olmasıdır.

$C_{\alpha\beta}^{\gamma}$ yapı sabitleri $\{\vec{e}_\alpha\}$ bazında, $C_{\alpha'\beta'}^{\gamma'}$ yapı sabitleri ise $\{\vec{e}_{\alpha'}\}$ bazında olsun. $C_{\alpha\beta}^{\gamma}$ yapı sabitinin tensör olduğunu göstermek için $\vec{e}_{\alpha'} = A_{\alpha'}^{\alpha} \vec{e}_\alpha$ kuralı verildiğinde $C_{\alpha\beta}^{\gamma}$ ve $C_{\alpha'\beta'}^{\gamma'}$

yapı sabitleri arasında $C^{\gamma'}_{\alpha'\beta'} = A^{\gamma'}_{\gamma} A^{\alpha}_{\alpha'} A^{\beta}_{\beta'} C^{\gamma}_{\alpha\beta}$ şeklindeki bağıntının olduğu ispat edilmelidir. A_m cebirinin $\{\vec{e}_{\alpha'}\}$ bazının yardımıyla

$$\vec{e}_{\alpha'}\vec{e}_{\beta'} = C^{\gamma'}_{\alpha'\beta'}\vec{e}_{\gamma'} \tag{3.2}$$

eşitliği yazılabilir. Kuraldan $\vec{e}_{\alpha'} = A^{\alpha}_{\alpha'}\vec{e}_{\alpha}$, $\vec{e}_{\beta'} = A^{\beta}_{\beta'}\vec{e}_{\beta}$ ve $\vec{e}_{\gamma'} = A^{\gamma}_{\gamma'}\vec{e}_{\gamma}$ eşitlikleri yazılabileceğinden bu eşitlikler (3.2) eşitliğinde yerine yazılırsa ve (3.1) eşitliğini de kullanılırsa

$$C^{\gamma'}_{\alpha'\beta'} = A^{\gamma'}_{\gamma} A^{\alpha}_{\alpha'} A^{\beta}_{\beta'} C^{\gamma}_{\alpha\beta}$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla $C^{\gamma}_{\alpha\beta}$ yapı sabitleri (1,2) tipli tensörün koordinatları olur.

$\forall a,b,c \in \mathsf{A}_m$ için $(ab)c = a(bc)$ olduğundan $\{\vec{e}_{\alpha}\}$ bazı için

$$\begin{aligned}
(\vec{e}_{\alpha}\vec{e}_{\beta})\vec{e}_{\gamma} &= \vec{e}_{\alpha}(\vec{e}_{\beta}\vec{e}_{\gamma}),\\
(C^{\sigma}_{\alpha\beta}\vec{e}_{\sigma})\vec{e}_{\gamma} &= \vec{e}_{\alpha}(C^{\sigma}_{\beta\gamma}\vec{e}_{\sigma}),\\
C^{\sigma}_{\alpha\beta}C^{\varepsilon}_{\sigma\gamma}\vec{e}_{\varepsilon} &= C^{\sigma}_{\beta\gamma}C^{\varepsilon}_{\alpha\sigma}\vec{e}_{\varepsilon}
\end{aligned}$$

eşitliği yazılabilir. Baz üzerinde lineer terkibe ayrılma tek olduğundan dolayı son eşitlikteki katsayılar eşittir. Yani birleşimli olma şartı

$$C^{\sigma}_{\alpha\beta}C^{\varepsilon}_{\sigma\gamma} = C^{\sigma}_{\beta\gamma}C^{\varepsilon}_{\alpha\sigma}$$

şeklinde tensör eşitliğiyle ifade edilebilir. Bu kurala A_m cebirinin birleşimli olma şartı denir.

$\exists e = 1, \;\; e.a = a.e = a \;\; (1.a = a.1 = a), \quad \forall a \in \mathrm{A}_m$ olduğundan benzer işlemlerle A_m cebirinin tensör ile yazılmış birimli olma şartı

$$C^{\gamma}_{\alpha\beta}\varepsilon^{\alpha} = \delta^{\gamma}_{\beta} \text{ ve } C^{\gamma}_{\alpha\beta}\varepsilon^{\beta} = \delta^{\gamma}_{\alpha}$$

eşitlikleri ile verilir. Burada $1 = \varepsilon^{\alpha}\vec{e}_{\alpha}$ şeklindedir.

A_m cebirinin tensör ile yazılmış değişimli olma şartı ise

$$C^{\gamma}_{\alpha\beta} = C^{\gamma}_{\beta\alpha}$$

şeklindedir. Son eşitlikte görüldüğü gibi yapı sabitleri aşağıdaki indislere göre simetriktir.

Şimdi parakompleks cebir için yapı sabitlerinin hangi formda olduğuna bakılacaktır.

Parakompleks cebir (iki kat sayılar cebiri) boyutu 2 $(\dim R(j) = 2)$ ve bazıda $\{1, j\}$ olan cebirdir ve $j^2 = 1$, $1.1 = 1$ ve $1.j = j.1 = j$ şartlarını sağlar. Parakompleks cebir,

$j^2 = 1$ eşitliğinden

$$C^{1}_{22} = 1, \;\; C^{2}_{22} = 0\,,$$

$1.1 = 1$ eşitliğinden

$$C^{1}_{11} = 1, \;\; C^{2}_{11} = 0$$

ve $1.j = j.1 = j$ eşitliğinden ise

$$C_{12}^{1}=C_{21}^{1}=0,\;\; C_{12}^{2}=C_{21}^{2}=1$$

şeklindeki sekiz tane yapı sabitine sahip olmuş olur. Parakompleks cebirin birimi ise $\left\{\varepsilon^{\alpha}\right\}=\left\{1,0\right\}$ şeklindedir.

Parakompleks cebir değişme özelliğine sahip olmayan birimli bir cebir olsun. Yapı sabitlerinin matris dilinde yazılımı

$$C_{\alpha}=\left(C_{\alpha\beta}^{\gamma}\right) \text{ ve } \tilde{C}_{\beta}=\left(C_{\alpha\beta}^{\gamma}\right)$$

şeklindedir. $\text{Boy}A_m=m$, $\gamma=1,...,m$ olmak üzere C_{α}, $m\times m$ tipinde bir kare matris olur. $m\times m$ tipindeki tüm kare matrislerin kümesine bakılacak olursa, genelde vektör uzayıdırlar. Kare matrislerde değişme özelliği dışındaki diğer tüm özellikler vardır ve boyutu da m^2 dir.

$\vec{a}\in A_m$ olmak üzere

$$\vec{a}=a^{\alpha}\vec{e}_{\alpha}\rightarrow a^{\alpha}C_{\alpha}=C(A)$$
$$\vec{a}=a^{\alpha}\vec{e}_{\alpha}\rightarrow a^{\alpha}\tilde{C}'_{\alpha}=\tilde{C}'(A),\;\; a^{\alpha}\in R$$

şeklindeki iki tane birebir örten dönüşümlerine bakalım. Bu gösterimlerden $C_{\alpha}(A)$ ya 1. regüler tasvir veya regüler matris, $\tilde{C}'_{\alpha}(A)$ ya 2. regüler tasvir veya transpoz regüler matris denir.

Bu aşamadan sonra parakompleks cebir değişmeli olsun. Yani $\vec{e}_{\alpha}.\vec{e}_{\beta}=\vec{e}_{\beta}.\vec{e}_{\alpha}$ olarak verilsin. Bu eşitlik yapı sabitleri için,

$$C^{\gamma}_{\alpha\beta} = C^{\gamma}_{\beta\alpha}$$

şeklinde olur. Son eşitlik matris dilinde, $C_{\alpha} = \tilde{C}_{\alpha}$ şeklinde yazılır ve $C_{\alpha} = \tilde{C}_{\alpha}$ eşitliğine değişmeli olma durumu denir.

Parakompleks cebir için regüler ve transpoz regüler matrisler, C_{α} matrisi

$$C_{\alpha} = \begin{pmatrix} C^{1}_{\alpha 1} & C^{1}_{\alpha 2} \\ C^{2}_{\alpha 1} & C^{2}_{\alpha 2} \end{pmatrix}$$

şeklinde olduğundan, C_1 ve C_2 matrisleri de sırasıyla,

$$C_1 = \begin{pmatrix} C^{1}_{11} & C^{1}_{12} \\ C^{2}_{11} & C^{2}_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

ve

$$C_2 = \begin{pmatrix} C^{1}_{21} & C^{1}_{22} \\ C^{2}_{21} & C^{2}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde olacaktır. Parakompleks cebirin regüler tasviri $\{C_1, C_2\}$, transpoz regüler matrisi de $C_1^T = C_1$, $C_2^T = C_2$ olduğundan dolayı $\{C_1^T, C_2^T\} = \{C_1, C_2\}$ şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla parakompleks cebir için 1. ve 2. regüler tasvirler birbirine denk olmuş olur.

3.2. Paralel Null-Dağılımı

Tanım 3.2.1 (M, g) üzerinde alınan bir $\vec{x} \neq 0$ vektörü için $g(\vec{x}, \vec{x}) = 0$ ise $\vec{x}$ e null vektör denir.

Tanım 3.2.2 M, (p,q) işaretli pseudo-Riemannian manifold olsun. $T(M)$ Tanjant demetinin $T(M) = V_1 \oplus V_2$ şeklindeki parçalanışı verilsin.

$$\pi_1 : T(Mn) \to V_1$$
$$\pi_2 : T(Mn) \to V_2$$

tamamlayıcı izdüşüm operatörleri olmak üzere $\nabla \pi_1 = 0$ ise V_1 e paralel dağılım denir. Burada V_1 ve V_2 ye de diferensiyellenebilir alt demetlerine dağılımlar (tamamlayıcı dağılımlar) denir.

Dağılımın null olması, dağılım üzerindeki vektörlerin null olması demektir.

Tanım 3.2.3 (M, g), (p,q) işaretli pseudo-Riemannian manifold olsun. $T(M)$ Tanjant demetinin $T(M) = V_1 \oplus V_2$ şeklindeki parçalanışı verilsin. V_1 paralel dağılım olmak üzere $\forall \vec{x} \in V_1$ için $g(\vec{x}, \vec{x}) = 0$ ise V_1 e paralel null dağılım denir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

M_{2n} nötral metriğe sahip bir Riemannian manifoldu olsun. Yani g (n,n) formunda bir pseudo-Riemannian metriği olsun. M_{2n} de bütün (p,q) tipli tensör alanlarının kümesi $\Im_q^p(M_{2n})$ ile gösterilir. Manifoldların, tensör alanlarının ve konneksiyonların her zaman diferensiyellenebilir ve C^∞ sınıfından olduğu kabul edilecektir.

Hemen hemen parakompleks manifold; φ nin $+1$ ve -1 öz değerlerine karşılık gelen, aynı ranklı T^+M_{2n} ve T^-M_{2n} öz demetlerine sahip, $\varphi^2 = I$ şartını sağlayan (M_{2n},φ) şeklindeki hemen hemen çarpım manifoldudur. Hemen hemen parakompleks manifoldun boyutunun çift olması gerekir.

φ parakompleks yapısı göz önüne alındığında, M_{2n} manifoldu üzerinde $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde mertebesi iki olan cebiri temsil eden baz formunda olan $\{I,\varphi\}$, $\varphi^2 = I$ afinorların kümesi elde edilir. Bu cebire $R(j) = \{a_0 + a_1 j \,/\, j^2 = 1; a_0, a_1 \in R\}$ ile tanımlanan parakompleks (iki katlar) sayılar cebiri denir. Bu cebir birleşimli değişimli ve birimli bir cebirdir. Bu cebirin kanonik bazı $\{1, j\}$ biçimindedir.

Hemen hemen parakompleks yapıya göre bir *pür metrik* $\forall X,Y \in \Im_0^1(M_n)$ için,

$$g(\varphi X,Y) = g(X,\varphi Y) \qquad (4.1)$$

şartını sağlayan g pseudo-Riemannian metriğidir. Böyle Riemannian metrikleri birçok yazar tarafından çalışılmıştır (Vishnevskii *et al.* 2002; Salimov *et al.* 2007; Iscan and Salimov 2009; Iscan and Magden 2010). φ yapısına göre g metrik tensörü 1960 da kabul edilen terminolojiye göre B-tensör olduğundan (Norden 1960; Vishnevskii 2002;

Salimov *et al.* 2007; Iscan and Salimov 2009; Iscan and Magden 2010) çalışmalarında bu metriği B-metrik ismiyle kullanmışlardır.

(Ganchev and Borisov 1986; Bonome *et al.* 2005; Iscan and Salimov 2009) çalışmalarında hemen hemen kompleks yapıya göre B-manifold (Norden manifold) çalışmışlardır.

(M_{2k}, φ) ikilisi B-metriğine sahip bir hemen hemen parakompleks manifold ise, (M_{2k}, φ, g) üçlüsüne bir hemen hemen B-manifold denir. Bu şekildeki manifoldlar (Salimov *et al.* 2007; Iscan and Magden 2010; Salimov, Iscan and Akbulut 2010) da çalışılmıştır.

4.1. 4-Boyutta Hemen Hemen B-Manifoldlar

4-boyutlu hemen hemen B-manifoldlarla ilgilenildiğinden, bu çalışma $(++--)$ işaretli nötral 4-boyutlu pseudo-Riemannian manifoldlarda yapılacaktır.

(M_4, g), $(2,2)$ işaretli 4-boyutlu bir manifold olsun. Eğer g hem φ hem de φ' yapılarına göre pür ise, yani $\forall\, X, Y \in \Im_0^1(M_4)$ için

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X,Y), \quad g(\varphi' X, \varphi' Y) = g(X,Y) \tag{4.2}$$

ise ve ayrıca

$$\varphi^2 = \varphi'^2 = 1, \quad \varphi\varphi' = \varphi'\varphi \tag{4.3}$$

şartlarını sağlıyorsa φ ye bir hemen hemen parakompleks yapı ve φ' ye de bir zıt (opposite) hemen hemen parakompleks yapı denir (Bonome *et al.* 2005).

Böylece, (M_4, φ, g) üçlüsüne bir hemen hemen B-manifold ve (M_4, φ', g) üçlüsüne bir zıt hemen hemen B-manifold adı verilir.

4-boyutta vektörlerin $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ortonormal çatısı ve 1-formlarının $\{e^1, e^2, e^3, e^4\}$ dual çatısı göz önüne alındığında, g

$$g = e^1 \otimes e^1 + e^2 \otimes e^2 - e^3 \otimes e^3 - e^4 \otimes e^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

şeklinde yazılabilir.

Ayrıca φ hemen hemen parakompleks yapısı ve φ' zıt hemen hemen parakompleks yapısı

$$\varphi = -e_1 \otimes e^2 - e_2 \otimes e^1 - e_3 \otimes e^4 - e_4 \otimes e^3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

ve

$$\varphi' = -e_1 \otimes e^2 - e_2 \otimes e^1 + e_3 \otimes e^4 + e_4 \otimes e^3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

şeklinde olsun. Burada (4.4) te verilen g nötral metriği (4.5) ve (4.6) da verilen φ ve φ' ne göre ayrı ayrı B-metriktir. Ayrıca φ ve φ'

$$\varphi^2 = \varphi'^2 = 1, \quad \varphi\varphi' = \varphi'\varphi$$

şartlarını sağlar.

φ ve φ', $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ vektörlerinin lineer terkibi olarak

$$\varphi e_1 = -e_2, \quad \varphi e_2 = -e_1, \quad \varphi e_3 = -e_4, \quad \varphi e_4 = -e_3, \tag{4.7}$$

$$\varphi' e_1 = -e_2, \quad \varphi' e_2 = -e_1, \quad \varphi' e_3 = e_4, \quad \varphi' e_4 = e_3 \tag{4.8}$$

şeklinde yazılabilir.

4.2. Hemen Hemen B-Manifoldların İnşası

Bu bölümde φ ve φ' hemen hemen parakompleks yapılarına göre hemen hemen B-manifold elde etmeye çalışılacaktır.

(M_4, g), (φ, φ') hemen hemen parakompleks yapı çiftine sahip $(++--)$ nötral işaretli pseudo-Riemannian 4-manifold olsun. g nötral metriğinin hem φ hem de φ' ne göre pürlüğünün haricinde, hemen hemen B-manifold olabilecek yeni bir g pür metriği araştırılacaktır.

Tanım 4.2.1:

(i) (M_4, φ)

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) \tag{4.9}$$

ile verilen g B-metriğe sahip bir hemen hemen parakompleks manifold ise (M_4, φ, g) üçlüsüne hemen hemen B-manifold denir. Bu durumda, g ye de B-metrik denir.

(ii) (M_4, φ')

$$g(\varphi' X, \varphi' Y) = g(X, Y) \tag{4.10}$$

ile verilen g B-metriğe sahip bir hemen hemen parakompleks manifold ise (M_4, φ', g) üçlüsüne zıt hemen hemen B-manifold denir. Bu durumda, g ye de zıt B-metrik denir.

(iii) Eğer bir M_4 manifoldu hem hemen hemen parakompleks manifold hem de zıt hemen hemen parakompleks B-manifold ise, $\left(M_4, \varphi, \varphi', g\right)$ ye çift (double) hemen hemen B-manifold denir. Bu durumda, g ye de çift B-metrik denir.

Burada amaç, (M_4, φ, g) ve (M_4, φ', g) nin (4.5) ve (4.6) da verildiği gibi (φ, φ') ikilisine göre hemen hemen B-manifold olan böyle g B-metriği bulmaktır.

Teorem 4.2.2: $\{e_i\}$ ortonormal bazına göre, M_4 üzerinde $(++--)$ işaretli bir metriğin, B-metrik olması için gerek ve yeter şart g metriğinin

$$\begin{aligned} g_+ = {} & \alpha(e^1 \otimes e^1 + e^2 \otimes e^2) + \beta(e^3 \otimes e^3 + e^4 \otimes e^4) \\ & + \nu(e^1 \otimes e^2 + e^2 \otimes e^1) + \mu(e^3 \otimes e^4 + e^4 \otimes e^3) \\ & + \gamma(e^1 \otimes e^3 + e^3 \otimes e^1 + e^2 \otimes e^4 + e^4 \otimes e^2) \\ & + \delta(e^1 \otimes e^4 + e^4 \otimes e^1 + e^2 \otimes e^3 + e^3 \otimes e^2) \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha & \nu & \gamma & \delta \\ \nu & \alpha & \delta & \gamma \\ \gamma & \delta & \beta & \mu \\ \delta & \gamma & \mu & \beta \end{bmatrix}, \quad \det g_+ \neq 0 \tag{4.11}$$

biçiminde bir forma sahip olmasıdır. Burada $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu$ ve ν, M_4 üzerinde fonksiyonlardır.

İspat: g metriğinin bileşenleri $g_{ij} = g(e_i, e_j)$ olmak üzere

$$g = \sum_{i,j=1}^{4} g_{ij} e^i \otimes e^j = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \cdots & \\ g_{41} & \cdots & \cdots & g_{44} \end{bmatrix}$$

yazılabilir.

g bir B-metrik olsun. Bir B-metriğin (4.9) denklemindeki tanımından

$$g(\varphi e_i, \varphi e_j) = g(e_i, e_j), \quad 1 \leq i, j \leq 4$$

olur. Bu durumda (4.7) eşitliği kullanılarak:

$$g(\varphi e_1, \varphi e_1) = g(-e_2, -e_2) = g(e_1, e_1)$$

$$g(\varphi e_2, \varphi e_2) = g(-e_1, -e_1) = g(e_2, e_2)$$

$$g(\varphi e_3, \varphi e_3) = g(-e_4, -e_4) = g(e_3, e_3)$$

$$g(\varphi e_4, \varphi e_4) = g(-e_3, -e_3) = g(e_4, e_4)$$

$$g(\varphi e_1, \varphi e_2) = g(-e_2, -e_1) = g(e_1, e_2) \text{ (şart yok)}$$

$$g(\varphi e_1, \varphi e_3) = g(-e_2, -e_4) = g(e_1, e_3)$$

$$g(\varphi e_1, \varphi e_4) = g(-e_2, -e_3) = g(e_1, e_4)$$

$$g(\varphi e_2, \varphi e_3) = g(-e_1, -e_4) = g(e_2, e_3)$$

$$g(\varphi e_2, \varphi e_4) = g(-e_1, -e_3) = g(e_2, e_4)$$

$$g(\varphi e_3, \varphi e_4) = g(-e_4, -e_3) = g(e_3, e_4) \text{ (şart yok)}$$

elde edilir. Bu şartlar

$$g_{11} = g_{22} (= \alpha), \qquad g_{33} = g_{44} (= \beta),$$

$$g_{13} = g_{31} = g_{24} = g_{42} (= \gamma), \quad g_{14} = g_{41} = g_{23} = g_{32} (= \delta)$$

gibi dört farklı durumla ifade edilebilir. Şartın olmadığı eşitlikler $g_{12} = g_{21} (= \nu)$ ve $g_{34} = g_{43} (= \mu)$ şeklinde alınırsa, (4.11) ile verilen ve g_+ ile tanımlanan B-metriği elde edilmiş olur.

Tersine, g_+ (4.11) eşitliğindeki gibi bir forma sahip ise, (4.7) den g metriğinin B-metrik olduğu kolayca görülebilir.

Teorem 4.2.3: $\{e_i\}$ ortonormal bazına göre, M_4 üzerinde $(++--)$ işaretli bir metriğin, zıt B-metrik olması için gerek ve yeter şart g metriğinin

$$\begin{aligned} g_- &= \alpha(e^1 \otimes e^1 + e^2 \otimes e^2) + \beta(e^3 \otimes e^3 + e^4 \otimes e^4) \\ &+ \nu(e^1 \otimes e^2 + e^2 \otimes e^1) + \mu(e^3 \otimes e^4 + e^4 \otimes e^3) \\ &+ \gamma(e^1 \otimes e^3 + e^3 \otimes e^1 - e^2 \otimes e^4 - e^4 \otimes e^2) \\ &+ \delta(e^1 \otimes e^4 + e^4 \otimes e^1 - e^2 \otimes e^3 - e^3 \otimes e^2) \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha & v & \gamma & \delta \\ v & \alpha & -\delta & -\gamma \\ \gamma & -\delta & \beta & \mu \\ \delta & -\gamma & \mu & \beta \end{bmatrix}, \quad \det g_{-} \neq 0 \tag{4.12}$$

biçiminde bir forma sahip olmasıdır. Burada $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu$ ve v, M_4 üzerinde fonksiyonlardır.

İspat: g metriğinin bileşenleri $g_{ij} = g(e_i, e_j)$ olmak üzere;

$$g = \sum_{i,j=1}^{4} g_{ij} e^i \otimes e^j = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \cdots & \\ g_{41} & \cdots & \cdots & g_{44} \end{bmatrix}$$

yazılabilir.

g bir zıt B-metrik olsun. Bir zıt B-metriğin (4.10) denklemindeki tanımından

$$g(\varphi' e_i, \varphi' e_j) = g(e_i, e_j), \quad 1 \leq i, j \leq 4$$

yazılabilir. Bu durumda (4.8) eşitliği kullanılarak:

$$g(\varphi' e_1, \varphi' e_1) = g(-e_2, -e_2) = g(e_1, e_1)$$

$$g(\varphi' e_2, \varphi' e_2) = g(-e_1, -e_1) = g(e_2, e_2)$$

$$g(\varphi' e_3, \varphi' e_3) = g(e_4, e_4) = g(e_3, e_3)$$

$$g(\varphi' e_4, \varphi' e_4) = g(e_3, e_3) = g(e_4, e_4)$$

$$g(\varphi' e_1, \varphi' e_2) = g(-e_2, -e_1) = g(e_1, e_2) \text{ (şart yok)}$$

$$g(\varphi' e_1, \varphi' e_3) = g(-e_2, e_4) = g(e_1, e_3)$$

$$g(\varphi' e_1, \varphi' e_4) = g(-e_2, e_3) = g(e_1, e_4)$$

$$g(\varphi' e_2,\varphi' e_3)=g(-e_1,e_4)=g(e_2,e_3)$$
$$g(\varphi' e_2,\varphi' e_4)=g(-e_1,e_3)=g(e_2,e_4)$$
$$g(\varphi' e_3,\varphi' e_4)=g(e_4,e_3)=g(e_3,e_4)\ \text{(şart yok)}$$

elde edilir. Bu şartlar,

$$g_{11}=g_{22}(=\alpha), \qquad g_{33}=g_{44}(=\beta),$$
$$g_{13}=g_{31}=-g_{24}=-g_{42}(=\gamma), \quad g_{14}=g_{41}=-g_{23}=-g_{32}(=\delta)$$

gibi dört farklı durumla ifade edilebilir. Dikkat edilirse $g_{12}=g_{21}(=\nu)$ ve $g_{34}=g_{43}(=\mu)$ için şart yoktur. Böylece (4.12) ile verilen ve g_- ile tanımlanan zıt B-metriği elde edilmiş olur.

Tersine, g_- (4.12) eşitliğindeki gibi bir forma sahip ise, (4.8) den g metriğinin zıt B-metrik olduğu kolayca görülebilir.

Yukarıdaki ispatta görüldüğü gibi g_{12} ve g_{34} bileşenleri, (4.9) ve (4.10) eşitliklerinden bağımsızdır. g_{11}, g_{22}, g_{33} ve g_{44} bileşenleri her iki durum için de aynıdır. B-metrik ve zıt B-metrik olma şartları arasındaki fark esas bileşenler denilen g_{13}, g_{14}, g_{23} ve g_{24} bileşenlerinden kaynaklanır. Bu yüzden g metriğinde esas bileşenler olan g_{13}, g_{14}, g_{23} ve g_{24} bileşenleri sıfır alınırsa, g metriği hem B-metrik hem de zıt B-metrik olmak zorundadır. Dolayısıyla aşağıdaki sonuç yazılabilir.

Sonuç 4.2.4: $\{e_i\}$ ortonormal bazına göre, M_4 üzerinde $(++--)$ işaretli bir metriğin çift B-metrik olması için gerek ve yeter şart g metriğinin

$$g_{\pm}=\alpha(e^1\otimes e^1+e^2\otimes e^2)+\beta(e^3\otimes e^3+e^4\otimes e^4)$$
$$+\nu(e^1\otimes e^2+e^2\otimes e^1)+\mu(e^3\otimes e^4+e^4\otimes e^3) \qquad (4.13)$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha & \nu & 0 & 0 \\ \nu & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & \mu \\ 0 & 0 & \mu & \beta \end{bmatrix}, \quad \det g_{\pm} \neq 0 \tag{4.14}$$

biçimindeki bir forma sahip olmasıdır.

Böylece, bir nötral 4-manifold üzerinde hemen hemen parakompleks yapının iki çeşidini, verilen bir (φ, φ') ikilisine göre, B-metriğin ve zıt B-metriğin lokal ifadeleri belirlenmiş olur.

4.3. Hemen Hemen B-Manifoldlar İçin Örnekler

Teorem 4.2.2 deki (4.11) ifadesi kullanılarak, B-metrik formu için aşağıdaki gibi iki örnek verilebilir:

$$g_{+} = e^1 \otimes e^4 + e^4 \otimes e^1 + e^2 \otimes e^3 + e^3 \otimes e^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.15}$$

$$g_{+} = e^1 \otimes e^3 + e^3 \otimes e^1 + e^2 \otimes e^4 + e^4 \otimes e^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.16}$$

Birinci durumda esas bileşenler $g_{13} = g_{42} = 0$ ve $g_{14} = g_{23} = 1$ iken, ikinci durumda esas bileşenler $g_{13} = g_{42} = 1$ ve $g_{14} = g_{23} = 0$ formuna sahiptir.

Benzer şekilde, teorem 4.2.3 deki (4.12) ifadesi kullanılarak, zıt B-metrik formu için aşağıdaki gibi iki örnek verilebilir:

$$g_{-} = e^1 \otimes e^4 + e^4 \otimes e^1 - e^2 \otimes e^3 - e^3 \otimes e^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.17}$$

$$g_{-} = e^1 \otimes e^3 + e^3 \otimes e^1 - e^2 \otimes e^4 - e^4 \otimes e^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.18}$$

Burada ise birinci durumda esas bileşenler $g_{13} = g_{42} = 0$ ve $g_{14} = -g_{23} = 1$ iken, ikinci durumda esas bileşenler $g_{13} = -g_{42} = 1$ ve $g_{14} = g_{23} = 0$ formuna sahiptir.

Ayrıca, sonuç 4.2.4 teki (4.14) ifadesi kullanılarak, çift B-metrik formu için aşağıdaki gibi dört örnek verilebilir:

$$g_{\pm} = e^1 \otimes e^1 + e^2 \otimes e^2 + e^3 \otimes e^3 + e^4 \otimes e^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{4.19}$$

$$g_{\pm} = e^1 \otimes e^1 + e^2 \otimes e^2 + e^3 \otimes e^4 + e^4 \otimes e^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.20}$$

$$g_{\pm} = e^1 \otimes e^2 + e^2 \otimes e^1 + e^3 \otimes e^3 + e^4 \otimes e^4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{4.21}$$

$$g_{\pm} = e^1 \otimes e^2 + e^2 \otimes e^1 + e^3 \otimes e^4 + e^4 \otimes e^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.22}$$

4.4. Walker 4-Manifold Üzerinde Hemen Hemen B-Manifoldların Uygulamaları

Bu bölümde, çeşitli nötral 4-manifoldlara uygulanabilecek olan B-metriğinin nasıl oluşturulacağı gösterilecektir.

$r \leq \frac{n}{2}$ olmak üzere paralel null düzlem alanlarına sahip, n-boyutlu bir pseudo-Riemannian manifold olan n-boyutlu Walker manifold (M_4, g, D) şeklinde bir üçlüdür. Burada g belirsiz (indefinite) metrik ve D de g ye göre null ve paralel olan iki boyutlu baz düzlem dağılımını (disturbition) gösterir. Walker'in teoreminden (Walker 1950) g nin

$$g = \left[g_{ij} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & c \\ 0 & 1 & c & b \end{bmatrix} \tag{4.23}$$

kanonik formuna sahip olduğu (x^1, x^2, x^3, x^4) koordinat sistemi vardır. Burada a, b ve c (x^1, x^2, x^3, x^4) ün koordinat fonksiyonlarıdır. Ayrıca g, $(++--)$ şeklindeki nötral formuna sahiptir. Paralel null 2-düzlemi lokal olarak $\{\partial_1, \partial_2\}$ tarafından gerilir. Burada

∂_i , $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$, $(i=1,...,4)$ nin sade gösterimidir. Bu şekildeki Walker metrikleri (Matsushita 2004; Matsushita 2005; Davidov *et al.* 2007; Davidov *et al.* 2008; Salimov and Iscan 2010; Salimov *et al.* 2010; Iscan 2011; Iscan *et al.* 2012) yazarlar tarafından geniş bir şekilde çalışılmıştır.

4.4.1. Walker 4-manifoldlar için baz seçimi-I

Bu çalışmada

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{2}(1-a)\partial_1 + \partial_3, \quad & e_2 &= -c\partial_1 + \frac{1}{2}(1-b)\partial_2 + \partial_4, \\ e_3 &= -\frac{1}{2}(1+a)\partial_1 + \partial_3, \quad & e_4 &= -c\partial_1 - \frac{1}{2}(1+b)\partial_2 + \partial_4 \end{aligned} \tag{4.24}$$

lokal ortonormal baz ele alınacaktır. Bu baz için 1-formaların dual bazları

$$\begin{aligned} e^1 &= dx^1 + \frac{1}{2}(1+a)dx^3 + cdx^4, \quad & e^2 &= dx^2 + \frac{1}{2}(1+b)dx^4, \\ e^3 &= -dx^1 + \frac{1}{2}(1-a)dx^3 - cdx^4, \quad & e^4 &= -dx^2 + \frac{1}{2}(1-b)dx^4 \end{aligned} \tag{4.25}$$

ile verilir (Bonome 2005). Lokal çatıya göre g metriği (4.4) teki gibi standart forma sahiptir. Lokal çatının bu şekildeki seçimi için (4.5) ve (4.6) da verilen hemen hemen parakompleks yapı çifti

$$\begin{aligned} \varphi &= -e_1 \otimes e^2 - e_2 \otimes e^1 - e_3 \otimes e^4 - e_4 \otimes e^3 \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & c & \frac{1}{2}(a-b) \\ -1 & 0 & -\frac{1}{2}(a-b) & -c \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{4.26}$$

$$\varphi' = -e_1 \otimes e^2 - e_2 \otimes e^1 + e_3 \otimes e^4 + e_4 \otimes e^3$$

$$= \begin{bmatrix} 2c & a & ac & 2c^2 - \frac{1}{2}(1-ab) \\ b & 0 & -\frac{1}{2}(1-ab) & bc \\ 0 & -2 & 0 & -b \\ -2 & 0 & -a & -2c \end{bmatrix} \tag{4.27}$$

şeklinde bulunur. Burada, bu matrisler koordinat bazına göre yazılmıştır.

Teorem 4.2.2 de B-metriklerin genel formları elde edilmesine rağmen, şimdi (4.15) ve (4.16) da verilen g_+ metriklerinin $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ bazına göre yazılışlarını araştıralım.

Önerme 4.4.1.1: (4.24) ile verilen bir ortonormal çatının seçimiyle, bir Walker 4-manifold üzerinde (4.15) ve (4.16) eşitliğindeki gibi verilen B-metriğinin örnekleri sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$g_+ = e^1 \otimes e^4 + e^4 \otimes e^1 + e^2 \otimes e^3 + e^3 \otimes e^2$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & -b \\ -2 & 0 & -a & -2c \\ 0 & -a & 0 & \frac{1}{2}(1-ab) \\ -b & -2c & \frac{1}{2}(1-ab) & -2bc \end{bmatrix}, \tag{4.28}$$

$$g_+ = e^1 \otimes e^3 + e^3 \otimes e^1 + e^2 \otimes e^4 + e^4 \otimes e^2$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 0 & -a & -2c \\ 0 & -2 & 0 & -b \\ -a & 0 & \frac{1}{2}(1-a^2) & -ac \\ -2c & -b & -ac & -2c^2 + \frac{1}{2}(1-b^2) \end{bmatrix}. \tag{4.29}$$

Burada, bu matrisler de koordinat bazına göre yazılmıştır.

İspat: İspat (4.24) te verilen ifadeler kullanılarak kolayca hesaplanabilir.

Bu durumda (4.26) ve (4.28) ile (4.26) ve (4.29) ifadelerinden Walker 4-manifold üzerinde (M_4,φ,g_+) şeklinde iki tane hemen hemen B-manifold yapısı elde edilmiş olur.

Önerme 4.4.1.2: (4.24) ile verilen bir ortonormal çatının seçimiyle, bir Walker 4-manifold üzerinde (4.17) ve (4.18) eşitliğindeki gibi verilen zıt B-metriğinin örnekleri sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$g_- = e^1 \otimes e^4 + e^4 \otimes e^1 - e^2 \otimes e^3 - e^3 \otimes e^2$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2}(a-b) \\ 1 & 0 & \frac{1}{2}(a-b) & 2c \end{bmatrix}, \tag{4.30}$$

$$g_- = e^1 \otimes e^3 + e^3 \otimes e^1 - e^2 \otimes e^4 - e^4 \otimes e^2$$
$$= \begin{bmatrix} -2 & 0 & -a & -2c \\ 0 & 2 & 0 & b \\ -a & 0 & \frac{1}{2}(1-a^2) & -ac \\ -2c & b & -ac & -2c^2 - \frac{1}{2}(1-b^2) \end{bmatrix}. \tag{4.31}$$

Burada, bu matrisler koordinat bazına göre yazılmıştır.

İspat: İspat (4.24) te verilen ifadeler kullanılarak kolayca hesaplanabilir.

Bu durumda (4.27) ve (4.30) ile (4.27) ve (4.31) ifadelerinden Walker 4-manifold üzerinde (M_4, φ, g_-) şeklinde iki tane zıt hemen hemen B-manifold yapısı elde edilmiş olur.

Şimdi ise çift (double) B-metrikler için (4.19), (4.20), (4.21) ve (4.22) ile verilen dört örnek arasından sadece (4.21) gösterilecektir.

Önerme 4.4.1.3: (4.24) ile verilen bir ortonormal çatının seçimiyle, bir Walker 4-manifold üzerinde (4.21) eşitliğindeki gibi verilen çift B-metriğin örneği aşağıdaki gibidir:

$$g_{\pm} = e^1 \otimes e^2 + e^2 \otimes e^1 + e^3 \otimes e^3 + e^4 \otimes e^4$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2}(1-a) & c+\frac{1}{2}(1+b) \\ 1 & 1 & \frac{1}{2}(1+a) & c-\frac{1}{2}(1-b) \\ -\frac{1}{2}(1-a) & \frac{1}{2}(1+a) & \frac{1}{4}(1-a)^2 & -\frac{1}{2}c(1-a)+\frac{1}{4}(1+a)(1+b) \\ c+\frac{1}{2}(1+b) & c-\frac{1}{2}(1-b) & -\frac{1}{2}c(1-a)+\frac{1}{4}(1+a)(1+b) & c(1+b)+c^2+\frac{1}{4}(1-b)^2 \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

Burada, bu matris koordinat bazına göre yazılmıştır.

İspat: İspat (4.24) te verilen ifadeler kullanılarak kolayca hesaplanabilir.

Böylece (4.26), (4.27) ve (4.32) eşitliklerinden, Walker 4-manifold üzerinde $(M_4, \varphi, \varphi', g_{\pm})$ şeklinde çift hemen hemen B-manifold için bir örnek elde edilmiş olur.

4.4.2. Walker 4-manifoldlar için baz seçimi -II

Bu bölümde farklı bir lokal ortonormal çatıya göre hemen hemen B-manifold olan başka örnekler gösterilecektir. Matsushita (2004) ya göre (4.23) ile verilen Walker metriğinde $c=0$ alınarak,

$$
\begin{aligned}
e_1 &= \frac{1}{\sqrt[4]{a^2+4}}\left\{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+4}-a)\partial_1+\partial_3\right\}\\
e_2 &= \frac{1}{\sqrt[4]{b^2+4}}\left\{\frac{1}{2}(\sqrt{b^2+4}-b)\partial_2+\partial_4\right\}\\
e_3 &= \frac{1}{\sqrt[4]{a^2+4}}\left\{-\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+4}+a)\partial_1+\partial_3\right\}\\
e_4 &= \frac{1}{\sqrt[4]{b^2+4}}\left\{-\frac{1}{2}(\sqrt{b^2+4}+b)\partial_2+\partial_4\right\}
\end{aligned} \tag{4.33}
$$

lokal ortonormal bazı elde edilir. Bu bazın dual bazı ise

$$
\begin{aligned}
e^1 &= \frac{1}{\sqrt[4]{a^2+4}}\left\{dx^1+\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+4}+a)dx^3\right\}\\
e^2 &= \frac{1}{\sqrt[4]{b^2+4}}\left\{dx^2+\frac{1}{2}(\sqrt{b^2+4}+b)dx^4\right\}\\
e^3 &= -\frac{1}{\sqrt[4]{a^2+4}}\left\{dx^1-\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+4}-a)dx^3\right\}\\
e^4 &= -\frac{1}{\sqrt[4]{b^2+4}}\left\{dx^2-\frac{1}{2}(\sqrt{b^2+4}-b)dx^4\right\}
\end{aligned} \tag{4.34}
$$

ile verilir.

$K=\sqrt[4]{(b^2+4)/(a^2+4)}$ ve $H=\sqrt[4]{(a^2+4)(b^2+4)}$ olarak alınırsa, (4.5) ve (4.6) ile tanımlanan hemen hemen parakompleks yapıları sırasıyla

$$\varphi = -e_1 \otimes e^2 - e_2 \otimes e^1 - e_3 \otimes e^4 - e_4 \otimes e^3$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{K} & 0 & \frac{1}{2}(aK - \frac{b}{K}) \\ -K & 0 & \frac{1}{2}(\frac{b}{K} - aK) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -K \\ 0 & 0 & -\frac{1}{K} & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.35}$$

$$\varphi' = -e_1 \otimes e^2 - e_2 \otimes e^1 + e_3 \otimes e^4 + e_4 \otimes e^3$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{a}{H} & 0 & \frac{1}{2}(\frac{ab}{H} - H) \\ \frac{b}{H} & 0 & \frac{1}{2}(\frac{ab}{H} - H) & 0 \\ 0 & -\frac{2}{H} & 0 & -\frac{b}{H} \\ -\frac{2}{H} & 0 & -\frac{a}{H} & 0 \end{bmatrix} \tag{4.36}$$

şeklinde elde edilir. Burada bu matrisler koordinat bazına göre yazılmıştır.

Önerme 4.4.2.1 (4.33) ile verilen bir ortonormal çatının seçimiyle, bir Walker 4-manifold üzerinde (4.15) ve (4.16) eşitliğindeki gibi verilen B-metriğin örnekleri sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$g_+ = e^1 \otimes e^4 + e^4 \otimes e^1 + e^2 \otimes e^3 + e^3 \otimes e^2$$

$$= -\frac{1}{H} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & b \\ 2 & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & -\frac{1}{2}(H^2 - ab) \\ b & 0 & -\frac{1}{2}(H^2 - ab) & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.37}$$

$$g_{+} = e^1 \otimes e^3 + e^3 \otimes e^1 + e^2 \otimes e^4 + e^4 \otimes e^2$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{a^2+4}} & 0 & \frac{-a}{\sqrt{a^2+4}} & 0 \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{b^2+4}} & 0 & \frac{-b}{\sqrt{b^2+4}} \\ \frac{-a}{\sqrt{a^2+4}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{a^2+4}} & 0 \\ 0 & \frac{-b}{\sqrt{b^2+4}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{b^2+4}} \end{bmatrix}. \tag{4.38}$$

Burada, bu matrisler koordinat bazına göre yazılmıştır.

İspat: İspat (4.33) eşitliği kullanılarak görülebilir.

Bu durumda (4.35) ve (4.37) ile (4.35) ve (4.38) ifadelerinden Walker 4-manifold üzerinde (M_4, φ, g_{+}) şeklinde iki tane hemen hemen B-manifold yapısı elde edilmiş olur.

Önerme 4.4.2.2: (4.33) ile verilen bir ortonormal çatının seçimiyle, bir Walker 4-manifold üzerinde (4.17) ve (4.18) eşitliğindeki gibi verilen zıt B-metriğin örnekleri sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$g_{-} = e^1 \otimes e^4 + e^4 \otimes e^1 - e^2 \otimes e^3 - e^3 \otimes e^2$$

$$= -\frac{1}{H} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\sqrt{b^2+4} \\ 0 & 0 & \sqrt{a^2+4} & 0 \\ 0 & \sqrt{a^2+4} & 0 & -\frac{1}{2}(a\sqrt{b^2+4} - b\sqrt{a^2+4}) \\ -\sqrt{b^2+4} & 0 & -\frac{1}{2}(a\sqrt{b^2+4} - b\sqrt{a^2+4}) & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.39}$$

$$g_- = e^1 \otimes e^3 + e^3 \otimes e^1 - e^2 \otimes e^4 - e^4 \otimes e^2$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{a^2+4}} & 0 & \frac{-a}{\sqrt{a^2+4}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{b^2+4}} & 0 & \frac{b}{\sqrt{b^2+4}} \\ \frac{-a}{\sqrt{a^2+4}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{a^2+4}} & 0 \\ 0 & \frac{b}{\sqrt{b^2+4}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{b^2+4}} \end{bmatrix}. \qquad (4.40)$$

Burada, bu matrisler koordinat bazına göre yazılmıştır.

İspat: İspat (4.33) eşitliği kullanılarak görülebilir.

Şimdi, Walker 4-manifold üzerinde zıt hemen hemen B-manifold (M_4, φ', g_-) için iki örnek verilebilir. Bunlardan biri (4.36) ve (4.39) eşitliklerinden, diğeri ise (4.36) ve (4.40) eşitliklerinden elde edilenlerdir.

Şimdi çift B-metrikler için (4.19), (4.20), (4.21) ve (4.22) ile verilen dört örnek arasından sadece (4.21) gösterilecektir.

Önerme 4.4.2.3: (4.33) ile verilen bir ortonormal çatının seçimiyle, bir Walker 4-manifold üzerinde (4.21) eşitliğindeki gibi verilen çift B-metriğin örneği aşağıdaki gibidir:

$$g_{\pm}=e^1\otimes e^2+e^2\otimes e^1+e^3\otimes e^3+e^4\otimes e^4$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{a^2+4}} & \frac{1}{H} & -\frac{\sqrt{a^2+4}-a}{2\sqrt{a^2+4}} & \frac{\sqrt{b^2+4}+b}{2H} \\ \frac{1}{H} & \frac{1}{\sqrt{b^2+4}} & \frac{\sqrt{a^2+4}+a}{2H} & -\frac{\sqrt{b^2+4}-b}{2\sqrt{b^2+4}} \\ -\frac{\sqrt{a^2+4}-a}{2\sqrt{a^2+4}} & \frac{\sqrt{a^2+4}+a}{2H} & \frac{(\sqrt{a^2+4}-a)^2}{4\sqrt{a^2+4}} & \frac{(\sqrt{a^2+4}+a)(\sqrt{b^2+4}+b)}{4H} \\ \frac{\sqrt{b^2+4}+b}{2H} & -\frac{\sqrt{b^2+4}-b}{2\sqrt{b^2+4}} & \frac{(\sqrt{a^2+4}+a)(\sqrt{b^2+4}+b)}{4H} & \frac{(\sqrt{b^2+4}-b)^2}{4\sqrt{b^2+4}} \end{bmatrix}. \quad (4.41)$$

Burada, bu matrisler koordinat bazına göre yazılmıştır.

İspat: İspat (4.33) eşitliği kullanılarak görülebilir.

Böylece (4.35), (4.36) ve (4.41) eşitliklerinden, Walker 4-manifold üzerinde çift hemen hemen B-manifold $(M_4,\varphi,\varphi',g_{\pm})$ için bir örnek verilebilir.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu bölümde, çalışmalarımızda elde ettiğimiz sonuçlar verilecektir.

Bu tezde ilk olarak hemen hemen B-manifoldun nasıl oluşturulacağı gösterilmiştir.

φ ve φ' parakompleks yapılarının

$$\varphi=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix},\quad \varphi'=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

biçimindeki seçimiyle, $\{e_i\}$ ortonormal bazına göre M_4 üzerinde $(++--)$ işaretli bir metriğin, sırasıyla B-metrik, zıt B-metrik ve çift B-metrik olması için g metriğinin

$$g_+=\begin{bmatrix}\alpha & v & \gamma & \delta\\ v & \alpha & \delta & \gamma\\ \gamma & \delta & \beta & \mu\\ \delta & \gamma & \mu & \beta\end{bmatrix},\quad g_-=\begin{bmatrix}\alpha & v & \gamma & \delta\\ v & \alpha & -\delta & -\gamma\\ \gamma & -\delta & \beta & \mu\\ \delta & -\gamma & \mu & \beta\end{bmatrix},\quad g_\pm=\begin{bmatrix}\alpha & v & 0 & 0\\ v & \alpha & 0 & 0\\ 0 & 0 & \beta & \mu\\ 0 & 0 & \mu & \beta\end{bmatrix}$$

biçiminde olması gerektiği gösterildi. Burada $\det g_- \neq 0,\ \det g_+ \neq 0,\ \det g_\pm \neq 0$ dır ve $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu$ ve v, M_4 üzerinde fonksiyonlardır.

İkinci olarak,

$$\varphi=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix},\quad g_+=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

ile

$$\varphi=\begin{bmatrix}0&-1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&-1&0\end{bmatrix},\ g_{+}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}$$

ifadelerinden nötral 4-manifold üzerinde (M_4,φ,g_+) şeklinde iki tane hemen hemen B-manifold yapısı ve benzer şekilde

$$\varphi'=\begin{bmatrix}0&-1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix},\ g_{-}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&-1&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

ile

$$\varphi'=\begin{bmatrix}0&-1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix},\ g_{-}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{bmatrix}$$

ifadelerinden nötral 4-manifold üzerinde (M_4,φ,g_-) şeklinde iki tane zıt hemen hemen B-manifold yapısı elde edildi.

Ayrıca,

$$\varphi==\begin{bmatrix}0&-1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&-1&0\end{bmatrix},\ \varphi'=\begin{bmatrix}0&-1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix},\ g_{\pm}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

ifadelerinden nötral 4-manifold üzerinde $(M_4,\varphi,\varphi',g_{\pm})$ şeklinde çift hemen hemen B-manifold yapısı elde edildi.

Son olarak iki farklı baz için, seçtiğimiz (φ,φ') parakompleks yapılarına göre Walker 4-manifold üzerinde hemen hemen B-manifoldlara örnekler verilmiştir.

Birinci baz seçimi için,

$$\varphi=\begin{bmatrix} 0 & -1 & c & \frac{1}{2}(a-b) \\ -1 & 0 & -\frac{1}{2}(a-b) & -c \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},\ g_+=\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & -b \\ -2 & 0 & -a & -2c \\ 0 & -a & 0 & \frac{1}{2}(1-ab) \\ -b & -2c & \frac{1}{2}(1-ab) & -2bc \end{bmatrix}$$

ile

$$\varphi=\begin{bmatrix} 0 & -1 & c & \frac{1}{2}(a-b) \\ -1 & 0 & -\frac{1}{2}(a-b) & -c \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},\ g_+=\begin{bmatrix} -2 & 0 & -a & -2c \\ 0 & -2 & 0 & -b \\ -a & 0 & \frac{1}{2}(1-a^2) & -ac \\ -2c & -b & -ac & -2c^2+\frac{1}{2}(1-b^2) \end{bmatrix}$$

ifadelerinden Walker 4-manifold üzerinde (M_4,φ,g_+) şeklinde iki tane hemen hemen B-manifold yapısı ve benzer şekilde

$$\varphi'=\begin{bmatrix} 2c & a & ac & 2c^2-\frac{1}{2}(1-ab) \\ b & 0 & -\frac{1}{2}(1-ab) & bc \\ 0 & -2 & 0 & -b \\ -2 & 0 & -a & -2c \end{bmatrix},\ g_-=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2}(a-b) \\ 1 & 0 & \frac{1}{2}(a-b) & 2c \end{bmatrix}$$

ile

$$\varphi' = \begin{bmatrix} 2c & a & ac & 2c^2 - \frac{1}{2}(1-ab) \\ b & 0 & -\frac{1}{2}(1-ab) & bc \\ 0 & -2 & 0 & -b \\ -2 & 0 & -a & -2c \end{bmatrix}, \; g_- = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -a & -2c \\ 0 & 2 & 0 & b \\ -a & 0 & \frac{1}{2}(1-a^2) & -ac \\ -2c & b & -ac & -2c^2 - \frac{1}{2}(1-b^2) \end{bmatrix}$$

ifadelerinden Walker 4-manifold üzerinde (M_4, φ, g_-) şeklinde iki tane zıt hemen hemen B-manifold yapısı elde edildi.

Ayrıca,

$$\varphi = \begin{bmatrix} 0 & -1 & c & \frac{1}{2}(a-b) \\ -1 & 0 & -\frac{1}{2}(a-b) & -c \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \; \varphi' = \begin{bmatrix} 2c & a & ac & 2c^2 - \frac{1}{2}(1-ab) \\ b & 0 & -\frac{1}{2}(1-ab) & bc \\ 0 & -2 & 0 & -b \\ -2 & 0 & -a & -2c \end{bmatrix}$$

ve

$$g_{\pm} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2}(1-a) & c+\frac{1}{2}(1+b) \\ 1 & 1 & \frac{1}{2}(1+a) & c-\frac{1}{2}(1-b) \\ -\frac{1}{2}(1-a) & \frac{1}{2}(1+a) & \frac{1}{4}(1-a)^2 & -\frac{1}{2}c(1-a)+\frac{1}{4}(1+a)(1+b) \\ c+\frac{1}{2}(1+b) & c-\frac{1}{2}(1-b) & -\frac{1}{2}c(1-a)+\frac{1}{4}(1+a)(1+b) & c(1+b)+c^2+\frac{1}{4}(1-b)^2 \end{bmatrix}$$

ifadelerinden Walker 4-manifold üzerinde $(M_4,\varphi,\varphi',g_\pm)$ şeklinde çift hemen hemen B-manifold yapısı elde edildi.

İkinci baz seçimi için $K=\sqrt[4]{(b^2+4)/(a^2+4)}$ ve $H=\sqrt[4]{(a^2+4)(b^2+4)}$ olmak üzere,

$$\varphi=\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{K} & 0 & \frac{1}{2}(aK-\frac{b}{K}) \\ -K & 0 & \frac{1}{2}(\frac{b}{K}-aK) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -K \\ 0 & 0 & -\frac{1}{K} & 0 \end{bmatrix},\ g_+=-\frac{1}{H}\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & b \\ 2 & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & -\frac{1}{2}(H^2-ab) \\ b & 0 & -\frac{1}{2}(H^2-ab) & 0 \end{bmatrix}$$

ile

$$\varphi=\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{K} & 0 & \frac{1}{2}(aK-\frac{b}{K}) \\ -K & 0 & \frac{1}{2}(\frac{b}{K}-aK) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -K \\ 0 & 0 & -\frac{1}{K} & 0 \end{bmatrix},\ g_+=\begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{a^2+4}} & 0 & \frac{-a}{\sqrt{a^2+4}} & 0 \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{b^2+4}} & 0 & \frac{-b}{\sqrt{b^2+4}} \\ \frac{-a}{\sqrt{a^2+4}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{a^2+4}} & 0 \\ 0 & \frac{-b}{\sqrt{b^2+4}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{b^2+4}} \end{bmatrix}$$

ifadelerinden Walker 4-manifold üzerinde (M_4,φ,g_+) şeklinde iki tane hemen hemen B-manifold yapısı ve benzer şekilde,

$$\varphi' = \begin{bmatrix} 0 & \frac{a}{H} & 0 & \frac{1}{2}(\frac{ab}{H} - H) \\ \frac{b}{H} & 0 & \frac{1}{2}(\frac{ab}{H} - H) & 0 \\ 0 & -\frac{2}{H} & 0 & -\frac{b}{H} \\ -\frac{2}{H} & 0 & -\frac{a}{H} & 0 \end{bmatrix},$$

$$g_- = -\frac{1}{H}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\sqrt{b^2+4} \\ 0 & 0 & \sqrt{a^2+4} & 0 \\ 0 & \sqrt{a^2+4} & 0 & -\frac{1}{2}(a\sqrt{b^2+4} - b\sqrt{a^2+4}) \\ -\sqrt{b^2+4} & 0 & -\frac{1}{2}(a\sqrt{b^2+4} - b\sqrt{a^2+4}) & 0 \end{bmatrix}$$

ile

$$\varphi' = \begin{bmatrix} 0 & \frac{a}{H} & 0 & \frac{1}{2}(\frac{ab}{H} - H) \\ \frac{b}{H} & 0 & \frac{1}{2}(\frac{ab}{H} - H) & 0 \\ 0 & -\frac{2}{H} & 0 & -\frac{b}{H} \\ -\frac{2}{H} & 0 & -\frac{a}{H} & 0 \end{bmatrix}, \; g_- = \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{a^2+4}} & 0 & \frac{-a}{\sqrt{a^2+4}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{b^2+4}} & 0 & \frac{b}{\sqrt{b^2+4}} \\ \frac{-a}{\sqrt{a^2+4}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{a^2+4}} & 0 \\ 0 & \frac{b}{\sqrt{b^2+4}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{b^2+4}} \end{bmatrix}$$

ifadelerinden Walker 4-manifold üzerinde (M_4, φ, g_-) şeklinde iki tane zıt hemen hemen B-manifold yapısı elde edildi.

Ayrıca,

$$\varphi=\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{K} & 0 & \frac{1}{2}(aK-\frac{b}{K}) \\ -K & 0 & \frac{1}{2}(\frac{b}{K}-aK) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -K \\ 0 & 0 & -\frac{1}{K} & 0 \end{bmatrix},\ \varphi'=\begin{bmatrix} 0 & \frac{a}{H} & 0 & \frac{1}{2}(\frac{ab}{H}-H) \\ \frac{b}{H} & 0 & \frac{1}{2}(\frac{ab}{H}-H) & 0 \\ 0 & -\frac{2}{H} & 0 & -\frac{b}{H} \\ -\frac{2}{H} & 0 & -\frac{a}{H} & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$g_{\pm}=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{a^2+4}} & \frac{1}{H} & -\frac{\sqrt{a^2+4}-a}{2\sqrt{a^2+4}} & \frac{\sqrt{b^2+4}+b}{2H} \\ \frac{1}{H} & \frac{1}{\sqrt{b^2+4}} & \frac{\sqrt{a^2+4}+a}{2H} & -\frac{\sqrt{b^2+4}-b}{2\sqrt{b^2+4}} \\ -\frac{\sqrt{a^2+4}-a}{2\sqrt{a^2+4}} & \frac{\sqrt{a^2+4}+a}{2H} & \frac{(\sqrt{a^2+4}-a)^2}{4\sqrt{a^2+4}} & \frac{(\sqrt{a^2+4}+a)(\sqrt{b^2+4}+b)}{4H} \\ \frac{\sqrt{b^2+4}+b}{2H} & -\frac{\sqrt{b^2+4}-b}{2\sqrt{b^2+4}} & \frac{(\sqrt{a^2+4}+a)(\sqrt{b^2+4}+b)}{4H} & \frac{(\sqrt{b^2+4}-b)^2}{4\sqrt{b^2+4}} \end{bmatrix}$$

ifadelerinden Walker 4-manifold üzerinde $(M_4,\varphi,\varphi',g_{\pm})$ şeklinde çift hemen hemen B-manifold yapısı elde edildi.

KAYNAKLAR

Bonome A., Castro R., Hervella L. M. and Matsushita Y., Construction of Norden structures on neutral 4-manifolds, HJP Journal of Geometry and Topology 5 (2) (2005) 121-140.

Davidov J., Díaz-Ramos J.C., García-Río E., Matsushita Y., Muškarov O., Vázquez-Lorenzo R., Almost Kähler Walker 4-manifolds, Journal of Geometry and Physics 57 (2007) 1075-1088.

Davidov J., Díaz-Ramos J.C., García-Río E., Matsushita Y., Muškarov O., Vázquez-Lorenzo R., Hermitian-Walker 4-manifolds, Journal of Geometry and Physics 58 (2008) 307-323.

Ganchev G. T. and Borisov A. V., Note on the almost complex manifolds with a Norden metric, C. R. Acad. Bulgarie Sci. 39 (5) (1986) 31-34.

Iscan M. and Salimov A.A., On Kähler-Norden manifolds, Proceedings of the Indian Academy of Sciences-Mathematical Sciences 119 (1) (2009) 71-80.

Iscan M., Magden A., On B-manıfolds defined by algebra of plural numbers, The Arabian Journal for Science and Engineering 35 (1D), (2010) 57-63.

Iscan M., Gezer A. and Salimov A.A., Some properties concerning curvature tensors of eight-dimensional Walker manifolds, Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry 8 (1) (2012), 21-37.

Kobayashi S., and Nomızu K., 1963. Foundations of Differential Geometry. Interscience Publishers.

Matsushita Y., Four-dimensional Walker metrics and symplectic structure, Journal of Geometry and Physics 52 (2004) 89-99.

Matsushita Y., Walker 4-manifolds with proper almost complex structure, Journal of Geometry and Physics 55 (2005) 385-398.

Norden A. P., On a certain class of four-dimensional A-spaces, Iz. VUZ no.4 (1960) 145-157.

Salimov A.A., Iscan M. and Etayo F., Paraholomorphic B-manifold and its properties, Topology and its Applications 154 (2007) 925-933.

Salimov A.A., and Mağden A., 2008. Diferensiyel Geometriye Giriş. Atatürk Üniversitesi.

Salimov A. A. and Iscan M., Some properties of Norden–Walker metrics, Kodai Math. J. 33(2) (2010) 283–293.

Salimov A.A., Iscan M. and Akbulut K., Notes on para-Norden-Walker 4-manifolds, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 7 (8) (2010), 1331-1347.

Vishnevskii V.V., Integrable affinor structures and their plural interpretations, J. of Math. Sciences, 108 no.2 (2002) 151-187.

Walker A.G., Canonical form for a Rimannian space with a paralel field of null planes, Quart. J. Math. Oxford, 1 (2) (1950) 69-79.

Yano K., 1965. Differential Geometry on Complex and Almost Complex Spaces, Pergamon Press, N.Y..

ÖZGEÇMİŞ

Hilmi SARSILMAZ 1989 yılında İskenderun'da dünyaya geldi. İlk ve orta öğrenimini İskenderun'da tamamladı. 2007 yılında girdiği Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2011 yılında mezun oldu. Aynı yıl Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans'a başladı. Halen lisansüstü eğitimine devam etmektedir.