**ANALİTİK FONKSİYONLARIN BAZI ALT SINIFLARI HAKKINDA**

**Pelin YILMAZTÜRK**

**Yüksek Lisans Tezi**
**Matematik Ana Bilim Dalı**
**Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU**
**2013**

**ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

# ANALİTİK FONKSİYONLARIN BAZI ALT SINIFLARI HAKKINDA

**Pelin YILMAZTÜRK**

**MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

**ERZURUM**
**2013**

**T.C.**
**ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

## TEZ ONAY FORMU

### ANALİTİK FONKSİYONLARIN BAZI ALT SINIFLARI HAKKINDA

Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU danışmanlığında, Pelin YILMAZTÜRK tarafından hazırlanan bu çalışma 27/06/2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak **oybirliği** ile kabul edilmiştir.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Başkan | : Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU | *İmza* | : |
| Üye | : Prof. Dr. Sezgin AKBULUT | *İmza* | : |
| Üye | :Doç. Dr. Yasin SOYLU | *İmza* | : |

Yukarıdaki sonucu onaylıyorum

Prof. Dr. İhsan **EFEOĞLU**
**Enstitü Müdürü**

**Not:** Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

# ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

**ANALİTİK FONKSİYONLARIN BAZI ALT SINIFLARI HAKKINDA**

Pelin YILMAZTÜRK

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU

Bu tezde, birim diskte analitik olan fonksiyonların oluşturduğu $A$ sınıfının $M(\alpha,\beta)$ ve $N(\alpha,\beta)$ alt sınıfları tanımlanmıştır. Ayrıca, bu alt sınıflardaki fonksiyonlar için katsayı eşitsizlikleri elde edilmiştir.

**2013, 45 sayfa**

**Anahtar Kelimeler:** Analitik fonksiyonlar, katsayı eşitsizlikleri.

# ABSTRACT

Master Thesis

**ON SOME SUBCLASSES OF ANALYTIC FUNCTIONS**

Pelin YILMAZTÜRK

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU

In this thesis, M(α,β) and N(α,β) subclasses of *A* class which formed by the analytic functions in unit disk were defined. In addition, coefficient inequalities for the functions in this subclasses were obtained.

**2013, 45 pages**


**Keywords:** Analytic functions, coefficient inequalities.

# TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Bu tez konusunu çalışmamı sağlayan, her adımda bilgilerini esirgemeyen, çok değerli hocam Sayın Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU'na en içten dileklerimle saygılarımı sunarım.

Tezin hazırlanması sürecinde değerli fikirlerinden yararlandığım Sayın Murat ÇAĞLAR'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, çalışmalarım esnasında kendilerinden görmüş olduğum destek ve sonsuz güvenden dolayı aileme arkadaşlarıma ve hayatımın her aşamasında örnek aldığım, matematiği seçmeme vesile olan sayın Hulusi ER'e teşekkür ederim.

Yüksek lisans eğitimim boyunca "Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı" ile tarafıma vermiş olduğu maddi destekten dolayı TÜBİTAK'a teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Pelin YILMAZTÜRK
Haziran - 2013

**İÇİNDEKİLER**

## SİMGELER DİZİNİ

| | |
|---|---|
| $A$ | $D$ de analitik olan $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ şeklindeki fonksiyonların sınıfı |
| $\mathbb{C}$ | Kompleks sayılar kümesi |
| $D$ | Birim disk |
| $D_r$ | Orijin merkezli $r$ yarıçaplı disk |
| $D(z_0, \varepsilon)$ | $z_0$ merkezli $\varepsilon$ yarıçaplı disk |
| $K$ | Konveks fonksiyonların sınıfı |
| $K_\alpha$ | $\alpha.$ mertebeden konveks fonksiyonların sınıfı |
| $\mathbb{N}$ | Doğal sayılar kümesi |
| $P$ | $D$ de $p(0) = 1, Rep(z) > 0$ şartını sağlayan $p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ |
| $S$ | Normalleştirilmiş ünivalent fonksiyonların sınıfı |
| $S^*$ | Yıldızıl fonksiyonların sınıfı |
| $S_\alpha^*$ | $\alpha.$ mertebeden yıldızıl fonksiyonların sınıfı |
| $M(\alpha, \beta)$ | $\alpha < Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) < \beta$ şartını sağlayan $A$ sınıfına ait fonksiyonların sınıfı |
| $N(\alpha, \beta)$ | $\alpha < Re\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) < \beta$ şartını sağlayan $A$ sınıfına ait fonksiyonların sınıfı |
| $\Delta$ | Kapalı birim diskin dışı |
| $\sum$ | $\Delta$ de analitik ve ünivalent fonksiyonların sınıfı |

## ŞEKİLLER DİZİNİ

# 1. GİRİŞ

Kökleri 18. yüzyıla dayanan kompleks analizin en önemli konularından biri olan ünivalent fonksiyonlar teorisi, 20. yüzyılın başlarında ortaya çıkmıştır.

Bieberbach 1916 yılında, “$z, D$ birim diskinin elemanı olmak üzere $f(z) \in S$ fonksiyonu

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

biçiminde bir Taylor açılımına sahipse $n = 2, 3, \ldots$ için $|a_n| \leq n$” olduğunu söylemiştir. Burada $S$, birim diskde analitik, ünivalent ve normalleştirilmiş fonksiyonların sınıfını göstermektedir. Alman matematikçi Bieberbach’ ın bu tahmini üzerine ünivalent ve analitik fonksiyonlar için katsayı tahmini problemi ortaya çıkmıştır. Birçok matematikçi 68 yıl boyunca Bieberbach’ ın bu tahminini ispatlamak için katsayı tahminleri ile yoğun olarak uğraşmıştır. Problem, 1985 yılında Louis de Branges tarafından çözülmüştür. Bu çalışmalar sırasında birçok farklı sınıflar da ortaya çıkmış ve benzer problemler bu sınıflar için de çalışılmıştır.

De Branges’ in ispatından önce bu konuda çok önemli çalışmalar yapan, bir nevi ispata adım adım yaklaşan önemli matematikçiler vardır. 1923 yılında $|a_3| \leq 3$ olduğunu ispatlayarak Bieberbach’ın tahmininin ötesinde büyük bir adım atan Karl Löwner dir. Löwner, yeni bir alt sınıf ile tüm ünivalent fonksiyonlara yaklaşmayı mümkün kılan yeni bir metot bularak bu probleme yaklaşmıştır. Bu teknik problemi anlamayı daha kolaylaştırmıştır. Bir sonraki adım, Garabedian ve Schiffer tarafından 1955 yılında $|a_4| \leq 4$ olduğunun gösterilmesidir. Bunu 1968-1969 yıllarında Pederson-Ozawa tarafından gösterilen $|a_6| \leq 6$ nın ispatı ve 1972 yılında Pederson-Schiffer tarafından gösterilen $|a_5| \leq 5$ in ispatı takip etmiştir. Yani, Branges konuyla ilgilendiğinde, Bieberbach tahmininin $n \leq 6$ için ispatı tamamlanmıştı.

Bieberbach'ın teoreminin çok önemli sonuçları vardır. Bunlardan birisi de $S$ sınıfına ait bir $f$ fonksiyonu için $|a_2| \leq 2$ sonucu kullanılarak Koebe tarafından verilen ve bükülme (distortion) teoremleri olarak bilinen $|f(z)|$ , $|f'(z)|$ , $\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right|$ nin sınırlarının elde edilmesi problemidir.

Bieberbach' ın teoreminin bu sonucundan da gördüğümüz gibi, tahminin her $n$ için çözülmesi ünivalent fonksiyonlar teorisini daha da zenginleştirmiş ve yeni problemlerin çıkışına neden olmuştur.

Biz de, $D$ birim diskinde analitik olan

$$\alpha < Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} < \beta \qquad (0 \leq \alpha < 1\,,\;\; \beta > 1)$$

şartını sağlayan fonksiyonların oluşturduğu $M(\alpha,\beta)$ sınıfı ve

$$\alpha < Re\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} < \beta \qquad (0 \leq \alpha < 1\,,\;\; \beta > 1)$$

şartını sağlayan fonksiyonların oluşturduğu $N(\alpha,\beta)$ sınıfını inceledik.

# 2. KURAMSAL TEMELLER

## 2.1. Genel Kavramlar

**Tanım 2.1.1 ($\boldsymbol{\varepsilon -}$ komşuluğu) :** $z_0 \in \mathbb{C}$ noktası verilsin. $D(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$ kümesine $z_0$ noktasının $\varepsilon -$ komşuluğu veya $z_0$ merkezli $\varepsilon$ yarıçaplı disk denir.

**Tanım 2.1.2 (İç Nokta) :** $A \subset \mathbb{C}$ ve $z_0 \in A$ olsun. $z_0$ noktasının en az bir $\varepsilon -$ komşuluğu, tamamen $A$ kümesi içinde kalıyorsa, $z_0$ noktasına $A$ kümesinin bir iç noktası denir.

**Tanım 2.1.3 (Açık Küme) :** $A$ kümesinin her noktası bir iç nokta ise, bu kümeye açık küme denir.

**Tanım 2.1.4 (Ayrık Küme) :** $U$ ve $V$, $\mathbb{C}$ nin boştan farklı iki alt kümesi olsun. Bu kümelerin arakesiti boş ise bu iki kümeye ayrık kümeler denir.

**Tanım 2.1.5 (Ayrılmış Kümeler) :** $U$ ve $V$, $\mathbb{C}$ nin boştan farklı iki alt kümesi; $\bar{U}$ ve $\bar{V}$, sırasıyla, $U$ ve $V$ nin kapanışları olsun. Eğer $\bar{U} \cap V = \emptyset = U \cap \bar{V}$ oluyorsa $U$ ve $V$ ye ayrılmış kümeler denir.

**Tanım 2.1.6 (Ayrışım) :** $A, U$ ve $V, \mathbb{C}$ nin boştan farklı altkümeleri olsun. $U, V$ ayrılmış kümeler ve $A = U \cup V$ ise $\{U, V\}$ kümeler ailesine $A$ kümesinin bir ayrışımı denir.

**Tanım 2.1.7 (Bağlantılı Küme) :** $A, \mathbb{C}$ nin boştan farklı bir altkümesi olsun. Eğer $A$ kümesinin hiçbir ayrışımı yoksa $A$ ya bağlantılı küme denir.

**Tanım 2.1.8 (Bölge) :** $\mathbb{C}$ de hem açık hem de bağlantılı olan bir kümeye bölge denir.

**Tanım 2.1.9 (Fonksiyon) :** $A \subset \mathbb{C}$ boş olmayan bir küme olsun. $A$ kümesindeki her bir $z$ elemanına $w$ kompleks sayısı karşılık getiren $f(z)$ kuralına $A$ dan $\mathbb{C}$ ye bir fonksiyon denir ve $f: A \to \mathbb{C}$ ile gösterilir.

$f(z)$ fonksiyonu $A$ daki her bir elemana belirli bir tek $w$ kompleks sayısı karşılık getiriyorsa $f(z)$ fonksiyonuna tek değerli fonksiyon adı verilir.

$f(z)$ fonksiyonu $A$ daki en az bir elemana birden fazla kompleks sayı karşılık getiriyorsa $f(z)$ fonksiyonuna çok değerli fonksiyon deriz.

**Tanım 2.1.10 (Süreklilik) :** $A \subset \mathbb{C}$ , $f: A \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve $z_0 \in A$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $|z - z_0| < \delta$ olduğunda $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ olacak biçimde $\delta(z_0, \varepsilon) > 0$ sayısı varsa $f(z)$ ye $z_0$ noktasında süreklidir denir. Eğer $f(z)$ fonksiyonu $A$ kümesinin her noktasında sürekli ise $f(z)$ ye $A$ kümesinde sürekli fonksiyon adı verilir.

**Tanım 2.1.11 (Eğri) :** $[a, b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\gamma: [a, b] \to \mathbb{C}$$

sürekli fonksiyonuna $\mathbb{C}$ düzleminde bir eğri denir. $\gamma(a)$ ve $\gamma(b)$ noktalarına da sırasıyla, eğrinin başlangıç ve bitiş noktaları adı verilir.

**Tanım 2.1.12 (Kapalı Eğri) :** $\gamma: [a, b] \to \mathbb{C}$ ye bir eğri olsun. $\gamma(a) = \gamma(b)$ ise $\gamma$ ya kapalı eğri denir.

**Tanım 2.1.13 (Basit Kapalı Eğri) :** Uç noktaların çakışması hariç, kendini kesmeyen eğrilere basit eğriler denir.

Yani, $\gamma(t) = x(t) + iy(t),\ a \leq t \leq b$ eğrisi $[a, b)$ veya $(a, b]$ aralığında bire-bir ise $\gamma(t)$ eğrisine basit eğri adı verilir. Bir eğri hem basit hem de kapalı olabilir. Böyle eğrilere basit kapalı eğri (Jordan eğrisi) denir.

**Tanım 2.1.14 (Basit Bağlantılı Bölge) :** $A$ , $\mathbb{C}$ de bir bölge olsun. Eğer $A$ bölgesindeki her basit kapalı eğrinin içi, tamamen $A$ da kalıyorsa $A$ bölgesine basit bağlantılı bölge denir.

Geometrik bir yorumla, bir bölgedeki her basit kapalı eğri bölgenin dışına çıkmadan, bölgede bir noktaya büzülebiliyorsa bu bölge basit bağlantılıdır deriz.

**Tanım 2.1.15 (Diferansiyellenebilme) :** $f: A \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve $z_0$, $A$ nın bir iç noktası olsun.

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti varsa, $f(z)$ fonksiyonuna $z_0$ da diferansiyellenebilirdir denir. Bu limit değerine de $f(z)$ nin $z_0$ daki türevi adı verilir. Bu değer $f'(z_0)$ ile gösterilir.

**Tanım 2.1.16 (Analitiklik) :** $f(z)$ fonksiyonu, $z_0$ noktasında ve bu noktanın uygun bir komşuluğundaki her noktada diferansiyellenebilirse $f(z)$ fonksiyonuna $z_0$ noktasında analitiktir (holomorf) denir.

**Lemma 2.1.1 (Schwarz Lemması):** $f(z)$ fonksiyonu $D$ birim diskinde analitik ve bu diskte $|f(z)| \leq 1, f(0) = 0$ şartları sağlanıyorsa

$$|f(z)| \leq |z| \text{ ve } |f'(0)| \leq 1$$

olur. $D$ diskinde sıfırdan farklı en az bir $z$ noktasında $f(z) = |z|$ olması için gerek ve yeter şart $|c| = 1$ olmak üzere $f(z) = cz$ olmasıdır.

**Tanım 2.1.17 (Konform Dönüşüm) :** $f: A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sürekli fonksiyonu verilsin. Eğer bir $z_0 \in A$ noktasından geçen ve aralarında $\alpha$ açısı yapan herhangi iki düzgün $\gamma_1$ ve $\gamma_2$ eğrilerinin $f(\gamma_1)$ ve $f(\gamma_2)$ görüntü eğrileri de $\omega_0 = f(z_0)$ noktasında aralarında yön ve büyüklük bakımından aynı $\alpha$ açısı yapıyorlarsa $f(z)$ fonksiyonuna $z_0$ noktasında bir konform dönüşümdür denir.

$f(z)$ fonksiyonu bir $z_0$ noktasında analitik ve $f'(z_0) \neq 0$ ise $f(z)$ , $z_0$ noktasında bir konform dönüşümdür.

**Tanım 2.1.18 (Harmonik Fonksiyon) :** $B \subset \mathbb{R}^2$ bölgesi ve $u: B \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $u$ nun birinci ve ikinci dereceden kısmi türevlerinin $B$ bölgesinde var ve sürekli olduğunu kabul edelim. Ayrıca, her $(x, y) \in B$ için

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0$$

oluyorsa $u$ ya $B$ bölgesinde harmonik fonksiyon denir.

**Tanım 2.1.19 (Argüman) :** $z \neq 0$ sayısı verilsin. Bu $z$ kompleks sayısının belirttiği vektörün $x$ −ekseninin pozitif kısmıyla yaptığı açıya $z$ kompleks sayısının argümanı denir.

**Tanım 2.1.20 (Dizi) :** $f: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ , $f(n) = z_n$ olan fonksiyona $\mathbb{C}$ de bir dizi ( kompleks dizi ) denir.

**Tanım 2.1.21 (Yakınsaklık) :** $(z_n)$ bir kompleks dizi ve $z_0 \in \mathbb{C}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n \geq n_0$ olduğunda $|z_n - z_0| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0$ doğal sayısı varsa bu dizi $z_0$

kompleks sayısına yakınsıyor denir ve $(z_n)$ dizisinin $z_0$ noktasına yakınsaması $z_n \to z_0$ veya $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ ile gösterilir.

**Tanım 2.1.22 (Seri) :** $(a_n)$ bir kompleks dizi olmak üzere

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

toplamına kompleks sayı serisi (kompleks seri) denir. $a_1, a_2, \ldots$ sayılarına serinin terimleri adı verilir.

**Tanım 2.1.23 (Yakınsak Seri) :** $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, bir kompleks seri ve $(s_n)$ bu serinin kısmi toplamlar dizisi olsun. Eğer $(s_n)$ dizisi bir $s$ sayısına yakınsıyorsa $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ serisi de $s$ sayısına yakınsıyor denir ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = s$$

olarak yazılır. Bu $s$ sayısına serinin toplamı adı verilir. Bir sayıya yakınsayan seriye yakınsak seri, aksi halde ıraksak seri denir. Bir serinin yakınsaklık ve ıraksaklığına o serinin karakteri adı verilir.

**Tanım 2.1.24 (Kuvvet Serisi) :** $z_0$ kompleks sayısı verilsin. $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ kompleks sayılar olmak üzere

$$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots + a_n(z - z_0)^n + \cdots$$

fonksiyon serisine $z_0$ merkezli bir kuvvet serisi denir.

Kuvvet serisini kısaca

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

ile gösteririz. $z = z_0$ için bu kuvvet serisinin toplamının $a_0$ olduğu görülmektedir. Yani, bir kuvvet serisi, merkezi olan $z = z_0$ noktasında yakınsaktır.

**Tanım 2.1.25 (Taylor Serisi) :** $f(z)$ fonksiyonu $z_0$ noktasında analitik olsun. Bu durumda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

serisine $f(z)$ fonksiyonunun $z_0$ noktasının bir komşuluğundaki Taylor Serisi denir.

Taylor serisinde özel olarak $z_0 = 0$ alınırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} (z)^n$$

olur. Buna Maclaurin serisi adı verilir.

**Teorem 2.1.1 (Taylor Teoremi) :** $f(z)$ fonksiyonu $z_0$ noktasının uygun bir komşuluğunda analitik ise bu noktanın uygun bir komşuluğunda

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \cdots$$

şeklinde bir kuvvet serisine açılır.

**Tanım 2.1.26 (Laurent Serisi) :** $z_0$ kompleks sayısı verilsin. $a_n, b_n$ kompleks sayılar olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

fonksiyon serisine, $z_0$ merkezli Laurent Serisi denir.

**Tanım 2.1.27 (Ayrık Tekil Nokta) :** $\omega = f(z)$ fonksiyonu $z_0$ noktasının $D(z_0, r)\backslash\{z_0\}$ delinmiş komşuluğunda analitik fakat $z_0$ noktasında analitik değilse $f(z)$ fonksiyonu için $z_0$ noktası ayrık tekil noktadır denir.

**Tanım 2.1.28 (Kutup Noktası) :** $z_0, f(z)$ fonksiyonunun ayrık tekil noktası olsun. Bu noktanın uygun bir delinmiş komşuluğunda, $f(z)$ fonksiyonunun Laurent serisini göz önüne alalım. Bu serinin esas kısmında sonlu sayıda terim varsa $z_0$ noktasına $f(z)$ fonksiyonunun kutup noktası denir.

# 3. MATERYAL ve YÖNTEMLER

## 3.1. Ünivalent Fonksiyonlar

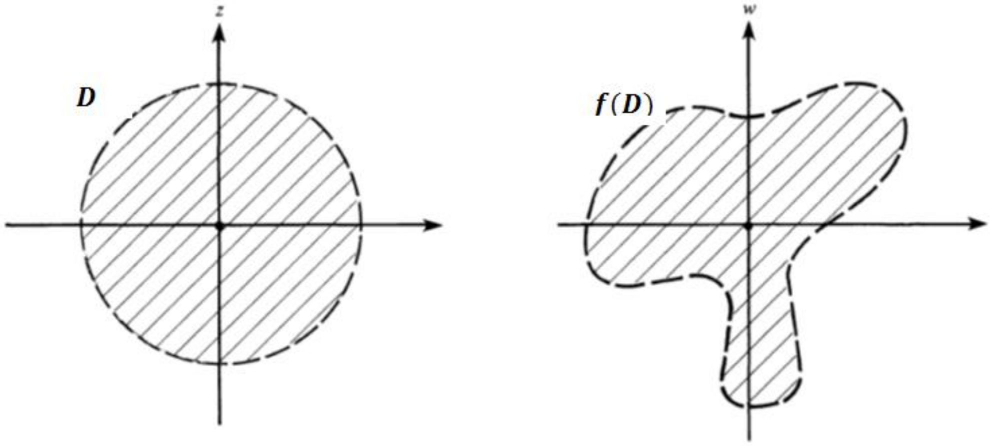
$z_0 \in \mathbb{C}$ ve $r > 0$ olmak üzere $D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ kümesine $z_0$ merkezli, $r$ yarıçaplı açık disk adını vermiştik. Orijin merkezli $r$ yarıçaplı açık diski yazım kolaylığı sağlaması açısından bazen $D(0, r)$ yerine $D_r$; orijin merkezli birim diski de $D$ ile göstereceğiz.

**Tanım 3.1.1 (Ünivalent fonksiyon):** $f(z)$, $A \subset \mathbb{C}$ bölgesinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Her $z_1, z_2 \in A$ için $f(z_1) = f(z_2)$ olması sadece $z_1 = z_2$ olmasını gerektiriyorsa (veya $z_1 \neq z_2$ olduğunda $f(z_1) \neq f(z_2)$ gerçekleşiyorsa) $f(z)$ fonksiyonuna $A$ bölgesinde ünivalent (yalınkat) fonksiyon denir.

Yani bir kümede bire-bir olan kompleks fonksiyona o kümede ünivalenttir denir.

Tanımdan da anlaşılacağı gibi "ünivalent", bire-bir kompleks fonksiyonlar için kullanılan bir kompleks analiz terimidir. "Analitik ünivalent"lik için ise Almancada "schlicht" (basit) ve Rusçada "odnolistni" (tek-yapraklı) kelimeleri kullanılmaktadır.

$w = f(z)$ ünivalent fonksiyonunu birim diske kısıtlarsak geometrik olarak $z -$düzlemindeki $D$ diskini, Şekil 3.1'de ki gibi $w -$ düzlemindeki bir $f(D)$ kümesine bire-bir örten olarak dönüştürür.




**Şekil 3.1.** $f(z)$ univalent fonksiyonunun birim diski dönüştürdüğü bölge

**3.2. Riemann Dönüşüm Teoremi ve Normalleştirilmiş Fonksiyonlar**

Bir fonksiyon hem analitik hem de ünivalent olabilir. 1851'de Riemann tarafından ortaya atılan Riemann dönüşüm teoremi ünivalent analitik fonksiyonların en önemli özelliği olarak bilinir.

**Teorem 3.2.1 (Riemann Dönüşüm Teoremi):** $G \neq \mathbb{C}$ olmak üzere G, $\mathbb{C}$ de basit bağlantılı bir bölge ise $D$ birim diskinden $G$ ye bire-bir örten analitik bir $f(z)$ dönüşümü vardır. Eğer $f(0) = z_0$ ve $f'(0) > 0$ şartları sağlanıyorsa bu $f: D \to G$ bire-bir analitik fonksiyonu tektir.

Kompleks düzlemdeki iki bölge arasında bire-bir örten ve analitik bir fonksiyon varsa bu iki bölgeye konform olarak denktir deriz. Buna göre Riemann Dönüşüm Teoremi bize kompleks düzlemin basit bağlantılı her has alt kümesinin birim diske konform olarak denk olduğunu söyler. $G$ deki $f(0)$ görüntü noktasının belli bir $z_0$ ve $f'(0)$ ın pozitif bir reel sayı olması durumunda ise bu konform dönüşüm tek olarak belirlenir.

Ünivalent analitik fonksiyonların, Riemann Dönüşüm Teoremindeki şartları sağladığı düşünüldüğünde, $f(z)$ fonksiyonunun analitiklik özellikleri ile $f(D)$ görüntü kümesinin geometrik özelliklerinin birbirlerine nasıl yansıdığı merak edilir. Bu, Geometrik Fonksiyonlar Teorisinin bakış açısıdır.

İnceleyeceğimiz ünivalent fonksiyonların ortak bir görünüme sahip olması işlem açısından da faydalı olacağından bir fonksiyonun normalleşmesi kavramının tanımını vereceğiz.

**Tanım 3.2.1:** $f: D \to \mathbb{C}$ fonksiyonu analitik olsun. Eğer

1) $f(0) = 0$
2) $f'(0) = 1$

şartları sağlanıyorsa $f(z)$ e normalleştirilmiş fonksiyon denir. $f(z)$ fonksiyonu hem ünivalent hem de normalleştirilmiş ise $f(z)$ fonksiyonuna normalleştirilmiş ünivalent fonksiyon adı verilir ve normalleştirilmiş ünivalent fonksiyonların oluşturduğu aile $S$ ile gösterilir (Zorn 1986).

$S$ kümesindeki bir $f(z)$ fonksiyonunu "$f(z) \in S$" şeklinde yazarak gösterebileceğimiz gibi "$S$-fonksiyonu" şeklinde de ifade edeceğiz.

Tanımdaki 1) ve 2) şartlarına göre, bir $S$ −fonksiyonu

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

şeklinde kuvvet serisine sahiptir. Görüldüğü üzere, normalleştirme şartları sabitleri yok ederek fonksiyon serisinin daha standart bir görünüm kazanmasını sağlar. Eğer $f(z)$, $D$

üzerinde herhangi bir ünivalent analitik fonksiyon ise $g(z) = \frac{f(z)-f(0)}{f'(0)}$, $S$ ailesinde olur ve $f(z)$ nin özellikleri $g(z)$ den kolayca elde edilir. Geometrik olarak $f(z)$ nin yerine $g(z)$ yi çalışmak görüntü kümesini $f(0)$ vektörü kadar ötelemek, $|f'(0)|$ böleni kadar uzatmak-kısaltmak ve $\arg f'(0)$ açısı boyunca döndürmeye karşılık gelir. Bu işlemlerin hepsi tersine de çevrilebilir.

Normalleştirilmiş ünivalent bir $f(z)$ fonksiyonu orijinde analitik ise orijin civarında bir Taylor serisine açılır. Elde edilen Taylor serisinin katsayılarının büyüklükleri ile ünivalentlik arasında nasıl bir ilişkinin olabileceği aşağıdaki teoremde verilmiştir.

**Teorem 3.2.2:** $f(z) = z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n$, $n$.dereceden bir polinom olsun. Eğer $f(z)$, $D$ de ünivalent ise $|a_n| \leq 1/n$ olur (Zorn 1986).

**İspat:** $f(z)$ fonksiyonunun türevi alınarak

$$f'(z) = 1 + 2a_2z + \cdots + na_nz^{n-1} = na_n(\frac{1}{na_n} + \cdots + z^{n-1})$$

yazılır. Cebirin Temel Teoremine göre, parantez içindeki polinom, $c_1, \dots, c_{n-1}$ şeklinde $n-1$ tane sıfıra sahiptir. Böylece $f'(z)$,

$$f'(z) = na_n(z - c_1)(z - c_2) \dots (z - c_{n-1})$$

şeklinde çarpanlara ayrılır. $f(z)$, $D$ de ünivalent olduğundan, $f'(z)$ nin $D$ de herhangi bir sıfırı yoktur. Dolayısıyla $c_i$ lerin hepsi $D$ nin dışındadır, yani her bir $i$ için $|c_i| \geq 1$ dir. $f(z)$, $S$ de olduğundan

$$1 = |f'(0)| = |na_n||c_1||c_2| \dots |c_{n-1}| \geq |na_n|$$

olarak yazılabilir. Buradan da $|a_n| \leq 1/n$ olduğu görülür.

Şunu vurgulayalım ki bu teoremin tersinin doğru olması gerekmez.

### 3.3. Koebe Fonksiyonu

En önemli ünivalent analitik fonksiyon $k(z) = z/(1-z)^2$ fonksiyonudur. Buna Koebe fonksiyonu adı verilir.

$$k(z) = z\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{1-z}\right],$$

eşitliğini kullanarak $k(z)$ nin $D$ deki her $z$ için

$$k(z) = z + 2z^2 + 3z^3 + \cdots \quad ,$$

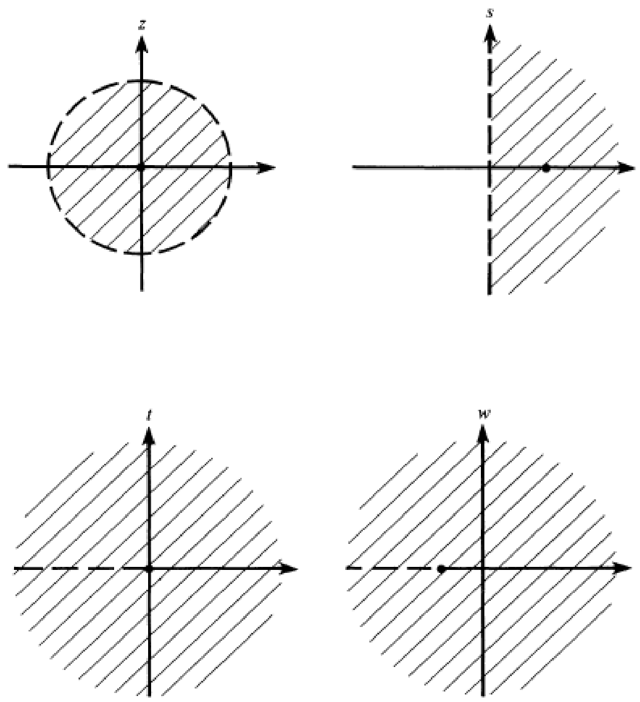
şeklinde bir kuvvet serisine sahip olduğu kolaylıkla görülür. Koebe fonksiyonu

$$k(z) = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 - 1\right]$$

şeklinde yazılır. Burada

$$s = \frac{1+z}{1-z} \quad ; \quad t = s^2 \quad ; \quad w = \frac{1}{4}(t-1) \quad ;$$

alındığında $k(z) = (w \circ t \circ s)(z)$ olur. İlk olarak, $s$ lineer kesirli dönüşümü, $D$ yi $S-$ düzleminin sağ yarısı üzerine ünivalent olarak dönüştürür. $t = s^2$ dönüşümü de sağ yarı düzleme kısıtlandığında bire-birdir. $w$ lineer dönüşümünün bire-bir olduğu açıktır. Dolayısıyla Koebe fonksiyonu birebirdir (Zorn 1986).




**Şekil 3.2.** Koebe Fonksiyonunun İnşası

**Tanım 3.3.1(Rotasyon) :** $f(z), S$ de bir fonksiyon ve $\alpha$ herhangi bir reel sayı olmak üzere

$$f_\alpha(z) = e^{-i\alpha} f(e^{i\alpha} z)$$

olsun. $f_\alpha(z)$ ya $f(z)$ nin bir rotasyonu denir.

**Tanım 3.3.2 (Bieberbach Tahmini):** Eğer $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ , $S$ de ise her $n \geq 2$ için $|a_n| \leq n$ olur. Eğer herhangi bir $n$ için $|a_n| = n$ oluyorsa, bu taktirde $f(z)$ , Koebe fonksiyonunun bir rotasyonudur.

**Teorem 3.3.1 (Bieberbach Teoremi) :** $S$ deki $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonu için $|a_2| \leq 2$ dir. Burada eşitsizliğin sağlanması için gerek ve yeter şart $f(z)$ nin Koebe fonksiyonunun bir rotasyonu olmasıdır.

Bieberbach tipi eşitsizlikleri elde etmenin temel bir yolu, düzlemdeki bir bölgenin alanını kuvvet serisi katsayılarıyla ilişkilendirmektir. Bu şekildeki ilk sonuç 1914'de T.H.Gronwall tarafından ispatlanan alan teoremidir. Bu teorem, $S$ ile ilgili değil ancak ünivalent analitik fonksiyonlarının başka bir sınıfı ile ilgilidir. Bu sınıf aşağıdaki tanımda verilmiştir.

**Tanım 3.3.3:** $\Delta = \{z: |z| > 1\}$ de analitik ve ünivalent olan

$$g(z) = z + b_0 + \frac{b_1}{z} + \cdots = z + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}$$

fonksiyonlarının sınıfı $\sum$ ile gösterilir.

**Teorem 3.3.2** (***Alan Teoremi***): $g(z) = z + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n} \in \sum$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \leq 1$ olur.

Eğer $g(z), \sum$ da ise bu taktirde $|b_1| \leq 1$ dir. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart $g(z) = z + b_0 + e^{i\alpha}/z$ olmasıdır.

Alan teoremi, $\sum -$fonksiyonlarıyla ilgilidir, fakat bu, dolaylı olarak $S$ sınıfındaki katsayı tahminlerinin yapılmasına da imkan verir. Bir $S -$fonksiyonu ile başlayarak katsayıların yolunu koruyan bir $\sum$–fonksiyonu elde etmek için cebirsel bir dönüşüm uygulanır. Bu, Bieberbach ispatının görüşüdür.

**Bieberbach Teoreminin İspatı:** $S$ de $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonu alınsın.

$$g(z) = \left(f(z^2)\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{ve} \quad h(z) = 1/g(1/z)$$

yardımcı fonksiyonlarını oluşturalım. ($f(z)$ ünivalent olduğundan dolayı, $f(z^2)$ fonksiyonu bir ünivalent analitik kare köke sahiptir.) Basit bir hesaplama ile $h(z)$ nin

$$h(z) = z - \frac{a_2}{2z} + \cdots$$

şeklinde Laurent serisine sahip ve $\sum$ da olduğunu görürüz. Alan teoreminin sonucu olarak $|a_2| \leq 2$ yazılır. Bu eşitliğin olabilmesi için gerek ve yeter şart $|b| = 1$ olmak üzere $h(z) = z + b/z$ yazılabilmesidir. $f(z), g(z)$ ve $h(z)$ verilişi göz önüne alınarak

$$h(z) = z + \frac{b}{z} \qquad \Leftrightarrow \qquad f(z) = \frac{z}{(1+bz)^2}$$

olması gerektiği görülür. İddia edildiği gibi $f(z)$ fonksiyonu, Koebe fonksiyonunun bir rotasyonudur (Zorn 1986).

Yukarıda incelenen prensip bundan sonra da kullanılacaktır. Böyle sonuçların bir örneği aşağıdadır:

Koebe Bir-Çeyrek Teoremi ve Distortion Teoremi, Bieberbach teoreminin önemli sonuçlarındandır.

**Teorem 3.3.3 (Koebe Bir-Çeyrek Teoremi) :** $f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \cdots$ , $S$ de olsun. $f(D)$ kümesi $\omega_0$ değerini kapsamazsa $|\omega_0| \geq 1/4$ olur. Burada eşitliğin olabilmesi için gerek ve yeter şart $f$ nin Koebe fonksiyonunun bir rotasyonu olmasıdır.

**Teorem 3.3.4 (Distortion Teoremi) :** Eğer $f(z)$ , $S$ de ve $|z| < 1$ ise

i. $\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+z}{(1-|z|)^3}$

ii. $\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{z}{(1-|z|)^2}$

yazılır.

Distortion teoremleri, analitik ünivalent fonksiyonların tüm ileri incelemeleri için temeldir.

## 3.4. Yıldızıl ve Konveks Fonksiyonlar

Bu bölümde $S$ sınıfının en önemli alt sınıflarından olan yıldızıl (starlike) ve konveks fonksiyonlardan bahsedeceğiz. Her iki sınıf da geometrik düşünceyle tanımlanmıştır, ancak her ikisi de çok kullanışlı analitik karakterizasyonlara sahiptirler. $S$ sınıfındaki fonksiyonların Taylor serilerinin katsayılarının sınırlarını tahmin etmek, yıldızıl ve konveks fonksiyonlar sınıflarındaki fonksiyonların katsayı sınırlarının tahmin etmekten daha zordur. Bu yüzden öncelikli olarak yıldızıl ve konveks fonksiyonlar sınıflarındaki fonksiyonların katsayı sınırlarının tahmini problemi ile ilgilenilmiştir.

Yıldızıl fonksiyonlar tüm $S$ sınıfındaki gibi, aynı büyüme, distortion ve covering teoremlerini sağlarlar. Konveks fonksiyonlar ve çeşitli diğer alt sınıflar daha güçlü özelliklere sahiptirler.

Yıldızıl ve konveksliğin analitik karakterizasyonları daha yüksek mertebelere genişletilebilir.

Yıldızıl ve konveks fonksiyonların tanımlarını vermeden önce bu alt sınıfları analitik olarak ifade ederken kullanacağımız $P$ sınıfını verelim:

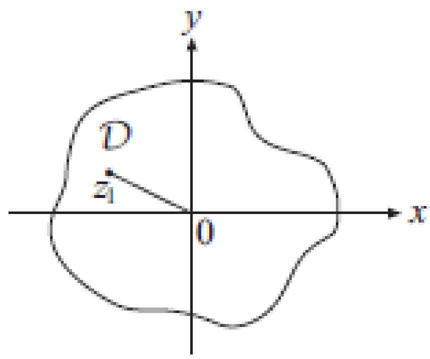
**Tanım 3.4.1 ($\boldsymbol{P}$ sınıfı):** $D$ birim diskinde $p(0) = 1$, $Rep(z) > 0$ koşullarını sağlayan $p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ şeklindeki fonksiyonların oluşturduğu sınıfa Caratheodory sınıfı veya $P$ sınıfı denir (Duren 1983).

Örneğin; $z \in D$ olmak üzere $p(z) = (1 + z)/(1 - z)$ fonksiyonu $P$ sınıfına ait olup, $D$ birim diskini sağ yarı düzlem üzerine resmeden bir konform dönüşümdür. Ayrıca $P$

sınıfına ait bir fonksiyonun ünivalent olması gerekmez. Örneğin; $f(z) = 1 + z^n$ fonksiyonu $P$ sınıfına ait olmasına rağmen $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ için ünivalent değildir.

$P$ sınıfını tanımladıktan sonra, $S$ sınıfının iki önemli alt sınıfını aşağıdaki şekilde verebiliriz.

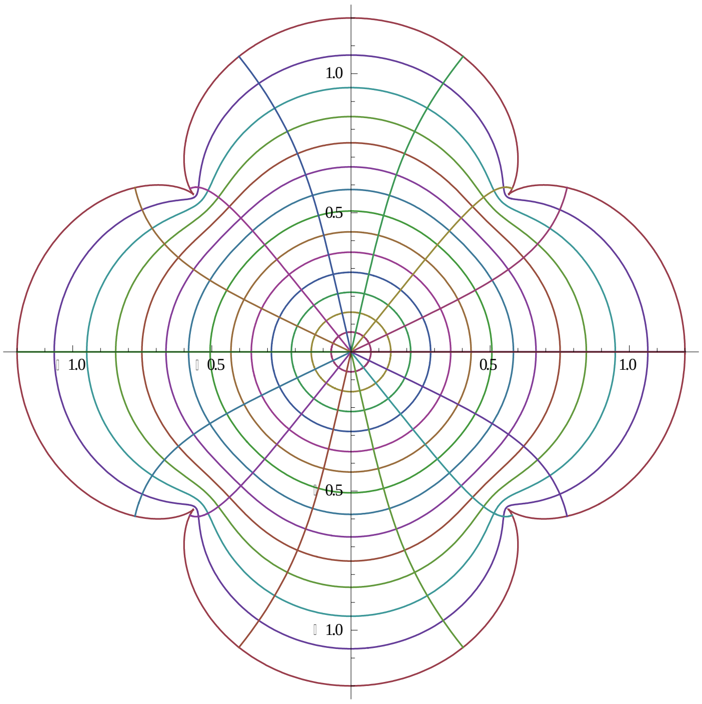
**Tanım 3.4.2 ($S^*$ sınıfı):** $B \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. $B$ kümesindeki sabit bir $w_0$ noktasını her $w \in B$ noktasına birleştiren doğru parçası tamamen $B$ kümesinde kalıyorsa, $B$ ye $w_0$ noktasına göre yıldızıl küme denir. $w_0$ noktası özel olarak orijin seçilirse, bu kümeye orijine göre yıldızıl küme veya kısaca yıldızıl küme adı verilir. Eğer bir $f(z)$ fonksiyonu $D$ birim diskini $w_0$ noktasına göre bir yıldızıl kümeye resmediyorsa, f(z) fonksiyonuna $w_0$ noktasına göre yıldızıl fonksiyon denir. Özel durumda, f(z) fonksiyonu D birim diskini yıldızıl bir kümeye resmediyorsa, f(z) fonksiyonuna yıldızıl fonksiyon denir. Yıldızıl fonksiyonların sınıfı $S^*$ ile gösterilir (Duren 1983).




**Şekil 3.3.** Sıfıra göre yıldızıl bir bölge

$S^*$ sınıfına ait bir fonksiyon örneği aşağıda verilmiştir:

**Örnek 3.4.1 :** $f(z) = z + \frac{1}{5}z^5$




**Şekil 3.4.** $\boldsymbol{f(z) = z + \frac{1}{5}z^5}$ fonksiyonunun birim diski dönüştürdüğü bölge

Yıldızıl fonksiyonların yukarıdaki geometrik tanımını analitik olarak ifade eden en önemli teorem aşağıda verilmiştir.

**Teorem 3.4.1 :** $f: D \to \mathbb{C}$ analitik bir fonksiyon ve $f(0) = 0$ olsun. Bu durumda $f(z)$ nin yıldızıl olması için gerek ve yeter şart $f'(0) \neq 0$ ve $D$ de

$$Re\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > 0$$

olmasıdır (Graham and Kohr 2003).

**İspat :** İlk olarak $f(z)$ nin yıldızıl olduğunu kabul edelim. Bu halde $f(z)$ ünivalenttir ve bu nedenle $f'(0) \neq 0$ dır. Her $r \in (0,1)$ için $f(D_r)$ nin, sıfır noktasına göre, yıldızıl bir bölge olduğunu göstermeliyiz. Bunun için $r \in (0,1)$ i sabitleyelim, $t \in (0,1)$ olmak üzere $z \in D$ için $g(z) = f^{-1}(tf(z))$ fonksiyonunu göz önüne alalım. $f(z)$ yıldızıl olduğundan bu fonksiyon iyi tanımlı ve $D$ de analitiktir. $g(0) = 0$ ve $D$ de $|g(z)| < 1$ dir. Schwarz lemmasından $D$ de $|g(z)| < |z|$ sonucuna varırız. Böylece her $z \in D_r$ için $tf(z) = f\big(g(z)\big) \in f(D_r)$ dır. O halde $f(D_r)$ sıfıra göre yıldızıl bir bölgedir. Geometrik düşüncelerle $|z| = r$ çemberinin görüntüsünün 0 noktasına göre yıldızıl bir eğri olduğu görülür. Yani $[0,2\pi]$ de $\theta$ artarken $argf(e^{i\theta}r)$ de artar. Buradan

$$\frac{\partial}{\partial\theta} argf\big(re^{i\theta}\big) \geq 0 \ , \qquad (\theta \in [0,2\pi])$$

olur.

$$\frac{\partial}{\partial\theta} argf\big(re^{i\theta}\big) = \frac{\partial}{\partial\theta} Im\big[logf\big(re^{i\theta}\big)\big]$$

$$= Im\left[\frac{izf'(z)}{f(z)}\right]$$

$$= Re\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]$$

olduğundan, $Re\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] \geq 0, (z \in D_r)$ sonucuna varırız. $f'(z) \neq 0$ olduğundan minimum prensibinden dolayı $z \in D_r$ için

$$Re\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > 0$$

yazılır. $r$ keyfi olduğundan, $D$ de

$$Re\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > 0$$

elde edilir.

Aksine, $f'(0) \neq 0$ ve $Re\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > 0\,, |z| < 1$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$z \in D\backslash\{0\}$ için $f(z) \neq 0$ dır. Aksi halde $\frac{zf'(z)}{f(z)}$ fonksiyonu $D$ de bir kutup noktasına sahip olur. İspatın ilk kısmında olduğu gibi, basit bir hesaplama ile $\theta \in [0,2\pi]$ için

$$\frac{\partial}{\partial\theta} argf\left(re^{i\theta}\right) > 0$$

olduğu görülür. Böylece $argf\left(re^{i\theta}\right)$, $\theta \in [0,2\pi]$ de artan bir fonksiyondur. Ayrıca, $f(z)\,, D$ birim diskinin tamamında sadece bir basit sıfıra sahip olduğundan, $\theta \in [0,2\pi]$ için $f\left(re^{i\theta}\right)$ nın argümanının değişimi $2\pi$ ye eşittir. Gerçekten

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial\theta} argf\left(re^{i\theta}\right) d\theta = Re\left\{\frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz\right\} = 2\pi$$

dir. Bu nedenle, $|z| = r$ nin görüntüsü basit yıldızıl bir eğri ve $f(D_r)$ yıldızıl bir bölgedir. Ayrıca, $f(z)$, $|z| = r$ çemberinde bire-bir olduğundan, sınırda ünivalentlik prensibinden, $f(z)$ nin $D_r$ diskinde de ünivalent olduğu anlaşılır. $r$ keyfi olduğundan, $D$ diskinin tamamında $f(z)$ nin ünivalent olduğu sonucuna varırız. Son olarak $f(D) = \bigcup_{0<r<1} f(D_r)$ olduğundan , $f(D)$ nin sıfıra göre yıldızıl bir bölge olduğunu söyleriz.

Yıldızıl fonksiyonları kısaca

$$S^* = \left\{f(z) \in A :\ \forall z \in D \text{ için } Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0\right\}$$

şeklinde gösterebiliriz.

**Tanım 3.4.3 ($\alpha$. Mertebeden Yıldızıl Fonksiyonlar) :** $f(z), D$ birim diskinde ünivalent bir fonksiyon, $f(0) = 0$ ve $f'(0) \neq 0$ olsun. Eğer $D$ de

$$Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > \alpha \ , \qquad (0 \leq \alpha < 1)$$

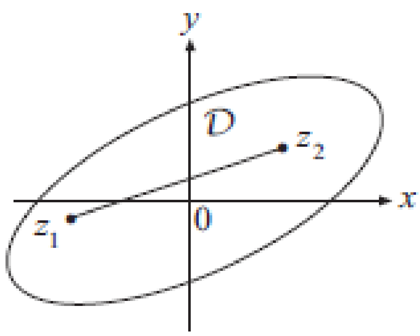
oluyorsa $f(z)$ fonksiyonuna $\alpha$. mertebeden yıldızıldır denir (Graham and Kohr 2003).

$\alpha$.mertebeden yıldızıl fonksiyonları kısaca

$$S_\alpha^* = \left\{f(z) \in A \colon \forall z \in D \text{ için } Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha\,, \qquad 0 \leq \alpha < 1\right\}$$

şeklinde ifade ederiz.

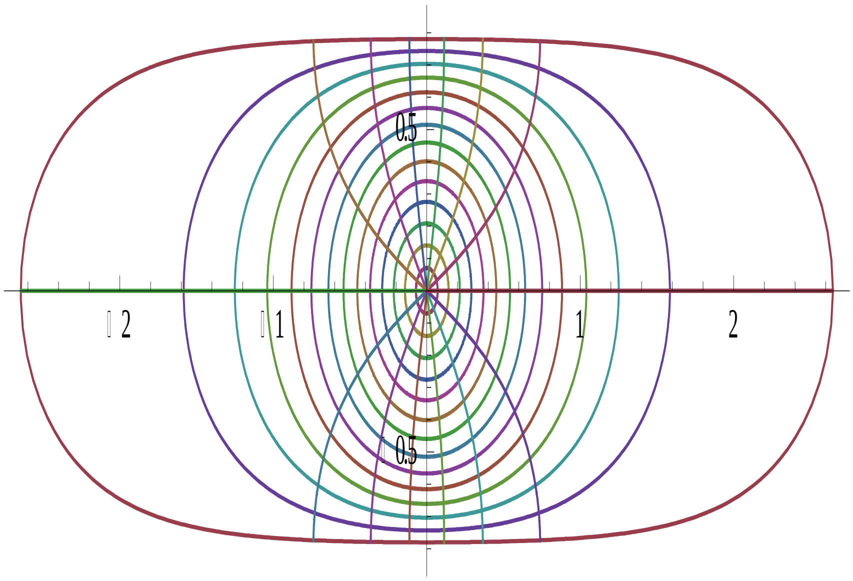
**Tanım 3.4.4 ($K$ sınıfı):** $B \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. Her $w_1, w_2 \in B$ için $w_1$ noktasını $w_2$ noktasına birleştiren doğru parçası tamamen $B$ içinde kalıyorsa $B$ ye konveks küme denir. Eğer bir $f(z)$ fonksiyonu konveks bir kümeyi, konveks bir kümeye resmediyorsa $f(z)$ fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. Konveks fonksiyonların sınıfı $K$ ile gösterilir (Duren 1983).




**Şekil 3.5.** Konveks bölge

$K$ sınıfına ait bir fonksiyon örneği aşağıda verilmiştir:

**Örnek 3.4.2 :** $f(z) = \frac{1}{2} Log\left[\frac{1+z}{1-z}\right]$




**Şekil 3.6.** $\boldsymbol{f(z) = \frac{1}{2} Log\left[\frac{1+z}{1-z}\right]}$ fonksiyonunun birim diski dönüştürdüğü bölge

Konveks fonksiyonları analitik olarak ifade eden en önemli teorem aşağıdaki gibidir.

**Teorem 3.4.2:** $f: D \to \mathbb{C}$ analitik bir fonksiyon olsun. $f(z)$ nin konveks olması için gerek ve yeter şart $f'(0) \neq 0$ ve

$$Re\left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right] > 0$$

olmasıdır (Graham and Kohr 2003).

**İspat :** Öncelikle kabul edelim ki $f(z)$ konveks olsun. Bu durumda $f(z)$ ünivalenttir ve böylece $f'(0) \neq 0$ dır. Her $r \in (0,1)$ için $f(D_r)$ nin konveks bir bölge olduğunu göstereceğiz. Bu amaçla, $r \in (0,1)$ i sabitleyelim, $z_2 \neq 0$ , $|z_1| \leq |z_2|$ olacak şekilde $z_1, z_2 \in D_r$ ve $0 \leq t \leq 1$ olsun. $g: D \to D$

$$g(z) = f^{-1}\left((1-t)f\left(\frac{z_1}{z_2}z\right) + tf(z)\right), \qquad (z \in D)$$

olarak tanımlanan bir fonksiyon olsun. $f(z)$ konveks olduğundan, $g(z)$ iyi tanımlı ve $D$ de analitiktir. Ayrıca, Schwarz lemmasından dolayı $g(0) = 0$ ve bu nedenle $z \in D$ için $|g(z)| \leq |z|$ dir. $z = z_2$ için $|g(z_2)| \leq |z_2| < r$ sonucuna varırız. O halde burdan $(1-t)f(z_1) + tf(z_2) \in f(D_r)$ dir. Buradan $f(D_r)$ nin konveks bir bölge olduğunu söyleriz.

$\Gamma_r$ , $|z| = r$ çemberinin görüntüsü olsun. O halde $\Gamma_r$, pozitif yönlü bir Jordan eğrisidir ve bu eğrinin iç bölgesi konvekstir. Ayrıca, $\Gamma_r$ , $\omega = f(re^{i\theta})$ , $0 \leq \theta \leq 2\pi$ parametrik temsil ile verilmiş olsun.

$f(D_r)$ konveks bir bölge olduğundan, $\Gamma_r$ teğet vektörünün argümenti de azalmayan bir fonksiyondur. Yani

$$\psi(\theta) = arg\left[\frac{\partial}{\partial\theta} f(re^{i\theta})\right] = arg\left[ire^{i\theta} f'(re^{i\theta})\right]$$

ise, $\theta \in [0,2\pi]$ için $\psi'(\theta) \geq 0$ veya

$$\frac{\partial}{\partial\theta} Im[\log(izf'(z))] \geq 0 \, , (z = re^{i\theta})$$

dır. Basit bir hesaplama ile

$$\frac{\partial}{\partial\theta} Im[\log(izf'(z))] = Im\left[i\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\right]$$

$$= Re\left[1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right] \ ,(z=re^{i\theta})$$

olduğunu görürüz ve $|z|=r$ de

$$Re\left[1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right]\geq 0$$

olur.

Harmonik fonksiyonlar için minimum prensibini düşünürsek, $z=0$ da kesin eşitsizlik geçerli olduğundan, $z\in D_r$

$$Re\left[1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right]>0$$

sonucuna varırız. $r$ keyfi olduğundan, $z\in D$

$$Re\left[1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right]>0$$

elde ederiz. Böylece ispatın ilk kısmı tamamlanmış oldu.

Aksine, kabul edelim ki $f'(0)\neq 0$ ve $D$ de

$$Re\left[1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right]>0$$

olsun. O halde, $z\in D\backslash\{0\}$ için $f'(z)\neq 0$ olur. $r\in(0,1)$ olmak üzere $r$ yi sabitleyelim. Yukarıda yaptığımız hesaplamadaki adımların tersine,

$$\frac{\partial}{\partial\theta}arg\left[ire^{i\theta}f'\left(re^{i\theta}\right)\right] \geq 0\,,(0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

elde ederiz. Buradan $|z| = r$ çemberinin görüntüsü olan $\Gamma_r$ eğrisine ait teğetin argümenti, $\theta$ nın azalmayan bir fonksiyonudur. Ayrıca, $[0,2\pi]$de $\psi(\theta)$ nın toplam artışı $2\pi$ ye eşittir. Gerçekten,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \psi'(\theta)d\theta &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial\theta}arg\left[ire^{i\theta}f'^{(re^{i\theta})}\right]d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} Re\left[1+\frac{re^{i\theta}f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}\right]d\theta \\ &= Re\int_{|z|=r}\left[1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right]\frac{dz}{iz} = 2\pi\end{aligned}$$

dir.

Böylece $\Gamma_r$ nin basit konveks bir eğri olduğu görülür. Bu yüzden $f(D_r)$ konveks bir bölgedir. $f(D) = \bigcup_{0<r<1} f(D_r)$ olduğundan, $f(D)$ nin konveks bir bölge olduğunu söyleriz. Ayrıca, $f(z), |z| = r$ çemberinde bire-bir olduğundan sınırda ünivalentlik prensibi $f(z)$ nin her bir $r \in (0,1)$ için $D_r$ de de ünivalent olmasını gerektirir. Böylece $f(z), D$ de ünivalenttir ve bu nedenle konvekstir.

Konveks fonksiyonları kısaca

$$K = \left\{f(z) \in A: \forall z \in D \text{ için } Re\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > 0\right\}$$

şeklinde ifade ederiz.

**Tanım 3.4.5. ($\alpha$. Mertebeden Konveks Fonksiyonlar):** $f(z), D$ birim diskinde ünivalent bir fonksiyon, $f(0) = 0$ ve $f'(0) = 1$ olsun. Eğer $D$ de

$$Re\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > \alpha \quad , \qquad (0 \leq \alpha < 1)$$

oluyorsa $f(z)$ fonksiyonuna $\alpha$. mertebeden konvekstir denir (Graham and Kohr 2003).

$\alpha$.mertebeden konveks fonksiyonları kısaca

$$K_\alpha = \left\{f(z) \in A{:}\ \forall z \in D \text{ için } Re\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \alpha\,, \qquad 0 \leq \alpha < 1\right\}$$

şeklinde ifade ederiz.

Teorem 3.4.1. ve 3.4.2. in bir sonucu olarak ilk kez Alexander tarafından verilmiş olan aşağıdaki teorem $S^*$ ve $K$ sınıflarına ait fonksiyonlar arasındaki çok önemli bir bağlantıyı ifade eder.

**Teorem 3.4.3. (Alexander Teoremi):** $f(z) \in A$ ve $z \in D$ olmak üzere $g(z) = zf'(z)$ olsun. Bu durumda $f(z) \in K$ olması için gerek ve yeter şart $g(z) \in S^*$ olmasıdır.

**İspat :** $f(z) \in K$ olsun. İspatlamalıyız ki $g(z) \in S^*$ dır. $f(z) \in K$ olduğundan

$$Re\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > 0$$

yazılır. $g(z) = zf'(z)$ ise $g'(z) = f'(z) + zf''(z)$ yazılabileceğinden,

$$\frac{zg'(z)}{g(z)} = z\frac{f'(z) + zf''(z)}{zf'(z)} = \frac{f'(z) + zf''(z)}{f'(z)} = 1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}$$

elde edilir.

$$Re\left(1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) > 0$$

olduğundan

$$Re\left(\frac{zg'(z)}{g(z)}\right) > 0$$

olup, $g(z) \in S^*$ dır.

Şimdi de $g(z) \in S^*$ olduğunu kabul ederek $f(z) \in K$ olduğunu gösterelim. $g(z) \in S^*$ olduğundan

$$Re\left(\frac{zg'(z)}{g(z)}\right) > 0$$

yazılır. $g(z)$nin tanımı kullanılırsa

$$Re\left(z\frac{f'(z) + zf''(z)}{zf'(z)}\right) > 0$$

yazılabileceğinden

$$Re\left(1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) > 0$$

elde edilir. O halde $f(z) \in K$ dır.

Her konveks fonksiyon aynı zamanda yıldızıl bir fonksiyondur. Ancak her yıldızıl fonksiyonun konveks bir fonksiyon olması beklenemez. Örneğin Koebe fonksiyonu, yıldızıl bir fonksiyon olmasına rağmen konveks değildir.

Ayrıca yukarıda tanımlardan anlaşıldığı üzere bu sınıflar arasında $K \subset S^* \subset S \subset A$ şeklinde bir ilişki vardır.

# 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

## 4.1. Analitik Fonksiyonların Bazı Alt Sınıfları

Ünivalent analitik fonksiyonlara benzer şekilde analitik fonksiyonların da alt sınıfları incelenmiştir (Nishiwaki and Owa 2002), ( Owa and Srivastava 2002).

$A$ ile birim diskte analitik olan ve

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

şeklindeki fonksiyonların kümesini gösterelim. Bu kısımda $A$ sınıfının

$$M(\beta) = \left\{ f(z) \in A \colon \forall z \in D \text{ için } Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) < \beta, \qquad \beta > 1 \right\}$$

alt sınıfı ile

$$N(\beta) = \left\{ f(z) \in A \colon \forall z \in D \text{ için } Re\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) < \beta, \qquad \beta > 1 \right\}$$

alt sınıfları incelenmiştir (Nishiwaki and Owa 2002). Daha önce de incelenen ünivalent analitik fonksiyonların oluşturduğu $S$ sınıfının

$$S_\alpha^* = \left\{ f(z) \in A \colon \forall z \in D \text{ için } Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha, \qquad 0 \leq \alpha < 1 \right\}$$

şartını sağlayan alt sınıfı ile

$$K_\alpha = \left\{ f(z) \in A \colon \forall z \in D \text{ için } Re\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \alpha, \qquad 0 \leq \alpha < 1 \right\}$$

şartını sağlayan alt sınıfları incelenmişti (Silverman 1975). Biz de burada bu iki şartı birleştirerek $D$ birim diskinde analitik olan

$$\alpha < Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} < \beta \qquad (0 \leq \alpha < 1\,,\ \ \beta > 1)$$

ve

$$\alpha < Re\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} < \beta \qquad (0 \leq \alpha < 1\,,\ \ \beta > 1)$$

sınıflarındaki fonksiyonlarla ilgilendik.

Burada $M(\alpha, \beta)$ ile

$$\alpha < Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) < \beta \qquad (0 \leq \alpha < 1\ \ , \beta > 1\,)$$

şartını sağlayan $A$ kümesine ait fonksiyonların ailesini, $N(\alpha, \beta)$ ile de

$$\alpha < Re\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) < \beta \qquad (0 \leq \alpha < 1\ \ , \beta > 1\,)$$

şartını sağlayan $A$ kümesine ait fonksiyonların ailesini gösterelim.

Yani bu sınıflar

$$M(\alpha,\beta)=\left\{f(z)\in A{:}\,\forall z\in D \text{ için } \alpha<Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)<\beta,\right.$$
$$\left.0\leq\alpha<1\; ve\; \beta>1\,)\right\}$$

ve

$$N(\alpha,\beta)=\left\{f(z)\in A{:}\,\forall z\in D \text{ için } \alpha<Re\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)<\beta,\right.$$
$$\left.0\leq\alpha<1\; ve\; \beta>1\,)\right\}$$

olarak yazılır.

**Teorem 4.1.1:** $f(z)\in N(\alpha,\beta)$ olması için gerek ve yeter şart $zf'(z)\in M(\alpha,\beta)$ olmasıdır.

**İspat:** Gerçekten

$$\begin{aligned}f(z)\in N(\alpha,\beta) &\Leftrightarrow \alpha<Re\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)<\beta\\ &\Leftrightarrow \alpha<Re\left(\frac{\left(zf'(z)\right)'}{f'(z)}\right)<\beta\ , \qquad zf'(z)=h(z)\\ &\Leftrightarrow \alpha<Re\left(\frac{zh'(z)}{h(z)}\right)<\beta\\ &\Leftrightarrow h(z)\in M(\alpha,\beta)\\ &\Leftrightarrow zf'(z)\in M(\alpha,\beta)\end{aligned}$$

olmaktadır.

**Teorem 4.1.2:** $u$ bir kompleks sayı ve $0\leq\alpha<1,\ \beta>1$ olsun. Bu durumda

$$|2u-(\beta+\alpha)|<\beta-\alpha$$

eşitsizliği sağlanırsa $\alpha < Reu < \beta$ olur.

**İspat:** $0 \leq \alpha < 1$ , $\beta > 1$ olduğu biliniyor. Bu durumda

$|2u-(\beta+\alpha)|<\beta-\alpha$ ,

eşitsizliğinde $u = x + iy$ olduğu göz önüne alınarak

$$\left|\big(2x-(\beta+\alpha)\big)+2iy\right|<\beta-\alpha$$

yazılır. Buradan

$$\begin{aligned}\big(2x-(\beta+\alpha)\big)^2+4y^2<(\beta-\alpha)^2 &\Rightarrow \big(2x-(\beta+\alpha)\big)^2<(\beta-\alpha)^2\\ &\Rightarrow |2x-(\beta+\alpha)|<(\beta-\alpha)\ \ , \qquad (\beta>\alpha)\\ &\Rightarrow -\beta+\alpha<2x-(\beta+\alpha)<\beta-\alpha\\ &\Rightarrow 2\alpha<2x<2\beta\\ &\Rightarrow \alpha<x<\beta\end{aligned}$$

elde edilir. Son ifadeden

$$\alpha < Re\, u < \beta$$

olduğu görülür.

**Sonuç 4.1.1:** $0 \leq \alpha < 1$ ve $\beta > 1$ olmak üzere Teorem 4.1.2 de $u = \frac{zf'(z)}{f(z)}$ alırsak

$$\alpha < Re\frac{zf'(z)}{f(z)} < \beta$$

olup $f(z) \in M(\alpha,\beta)$ yazılır.

**Sonuç 4.1.2:** $0 \leq \alpha < 1$ ve $\beta > 1$ olmak üzere Teorem 4.1.2 de $u = 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}$ alırsak

$$\alpha < Re\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) < \beta$$

olup $f(z) \in N(\alpha,\beta)$ olduğu görülür.

$M(\alpha,\beta)$ sınıfı için aşağıdaki teoremi yazabiliriz:

**Teorem 4.1.3:** Eğer $f(z) \in A$ fonksiyonu

$$\sum_{n=2}^{\infty}\{|2n-\alpha-\beta| + (\beta-\alpha)\}|a_n| < (\beta-\alpha) - |2-\alpha-\beta|$$

şartını sağlarsa $f(z) \in M(\alpha,\beta)$ dır.

**İspat:** Sonuç 4.1.1 e göre

$$\left|2\frac{zf'(z)}{f(z)} - (\beta+\alpha)\right| < \beta - \alpha$$

olduğunu göstermemiz gerekmektedir. Bu durumda

$$\left|2\frac{zf'(z)}{f(z)} - (\beta+\alpha)\right| = \left|2\frac{z + \sum_{n=2}^{\infty} na_n z^n}{z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n} - (\beta+\alpha)\right|$$

$$= \left|\frac{(2-\alpha-\beta)z + \sum_{n=2}^{\infty}(2n-\alpha-\beta)a_n z^n}{z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n}\right|$$

$$\leq \frac{|2-\alpha-\beta| + \sum_{n=2}^{\infty}|2n-\alpha-\beta||a_n|}{1-\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|}$$

bulunur. Hipotezde

$$\sum_{n=2}^{\infty}\{|2n-\alpha-\beta| + (\beta-\alpha)\}|a_n| < (\beta-\alpha) - |2-\alpha-\beta|$$

şartının sağlandığı verilmiştir. Bu şart ise

$$|2-\alpha-\beta| + \sum_{n=2}^{\infty}|2n-\alpha-\beta||a_n| < (\beta-\alpha)\left(1-\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|\right)$$

veya

$$\frac{|2-\alpha-\beta| + \sum_{n=2}^{\infty}|2n-\alpha-\beta||a_n|}{1-\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|} < \beta-\alpha$$

şeklinde de ifade edilir. Buradan

$$\left|2\frac{zf'(z)}{f(z)} - (\beta+\alpha)\right| < \beta-\alpha$$

olduğu görülür. Sonuç 4.1.1'e göre bu da

$$\alpha < Re\frac{zf'(z)}{f(z)} < \beta$$

olması demektir. Dolayısıyla $f(z) \in M(\alpha,\beta)$ olur.

**Sonuç 4.1.3 :** Teorem 4.1.3 de $\beta = 2$ alınırsa

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-\alpha)|a_n| < (1-\ \alpha)$$

olur.

**İspat:** Teorem 4.1.3 de $\beta = 2$ alındığında

$$\sum_{n=2}^{\infty} \{|2n-\alpha-2| + (2-\alpha)\}|a_n| < (2-\alpha) - |2-\alpha-2|$$

olduğu görülür. Buradan

$$\sum_{n=2}^{\infty} \{(2n-\alpha-2+2-\alpha)\}|a_n| < (2-\ \alpha-\ \alpha)$$

yazılıp

$$\sum_{n=2}^{\infty} 2(n-\alpha)|a_n| < 2(1-\ \alpha)$$

veya

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-\alpha)|a_n| < (1-\ \alpha)$$

elde edilir. Bu ise Silverman'ın sonucudur.

$N(\alpha, \beta)$ sınıfı için aşağıdaki teoremi yazabiliriz:

**Teorem 4.1.4 :** Eğer $f(z) \in A$ fonksiyonu

$$\sum_{n=2}^{\infty}\{n[|2n-\alpha-\beta|+(\beta-\alpha)]\}|a_n| < (\beta-\alpha)-|2-\alpha-\beta|$$

şartını sağlarsa $f(z) \in N(\alpha,\beta)$ dır.

**İspat :** 1.Yol: Sonuç 4.1.2 ye göre

$$\left|2\frac{zf''(z)}{f'(z)}+(2-\beta-\alpha)\right| < \beta-\alpha$$

olduğunu göstermemiz gerekmektedir. Bu durumda

$$\left|2\frac{zf''(z)}{f'(z)}+(2-\beta-\alpha)\right| = \left|\frac{\sum_{n=2}^{\infty}2n(n-1)a_nz^{n-1}}{1+\sum_{n=2}^{\infty}na_nz^{n-1}}+(2-\beta-\alpha)\right|$$

$$=\left|\frac{\sum_{n=2}^{\infty}2n(n-1)a_nz^{n-1}+\sum_{n=2}^{\infty}n(2-\beta-\alpha)a_nz^{n-1}+(2-\beta-\alpha)}{1+\sum_{n=2}^{\infty}na_nz^{n-1}}\right|$$

$$\leq\frac{\sum_{n=2}^{\infty}n|2n-\alpha-\beta||a_n|+|2-\alpha-\beta|}{1-\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n|}$$

bulunur. Hipotezde

$$\sum_{n=2}^{\infty}\{n[|2n-\alpha-\beta|+(\beta-\alpha)]\}|a_n| < (\beta-\alpha)-|2-\alpha-\beta|$$

şartının sağlandığı verilmiştir. Bu şart ise

$$\sum_{n=2}^{\infty} n|2n-\alpha-\beta||a_n| + |2-\alpha-\beta| < (\beta-\alpha)\left(1-\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|\right)$$

veya

$$\frac{\sum_{n=2}^{\infty} n|2n-\alpha-\beta||a_n| + |2-\alpha-\beta|}{1-\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|} < \beta-\alpha$$

şeklinde de ifade edilir. Buradan

$$\left|2\frac{zf''(z)}{f'(z)} + (2-\beta-\alpha)\right| < \beta-\alpha$$

olduğu görülür. Sonuç 4.1.2 ye göre

$$\alpha < Re\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) < \beta$$

yazılır. Dolayısıyla $f(z) \in N(\alpha,\beta)$ olur.

2.Yol: $f(z) \in N(\alpha,\beta)$ olması için gerek ve yeter şartın $zf'(z) \in M(\alpha,\beta)$ olması gerektiğini biliyoruz. $f(z) \in A$ iken

$$zf'(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} na_n z^n$$

olduğundan $zf'(z) \in A$ olur. Teorem 4.1.3 de $a_n$ yerine $na_n$ alırsak

$$\sum_{n=2}^{\infty}\{n[|2n-\alpha-\beta|+(\beta-\alpha)]\}|a_n|<(\beta-\alpha)-|2-\alpha-\beta|$$

şartı sağlanır ve buradan $zf'(z)\in M(\alpha,\beta)$ yazılır. $zf'(z)\in M(\alpha,\beta)$ olması da $f(z)\in N(\alpha,\beta)$ olmasını gerektirir.

**Sonuç 4.1.4 :** Teorem 4.1.4 de $\beta=2$ alınırsa

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-\alpha)|a_n|<(1-\alpha)$$

olur.

**İspat:** Teorem 4.1.4 de $\beta=2$ alındığında

$$\sum_{n=2}^{\infty}\{n[|2n-\alpha-2|+(2-\alpha)]\}|a_n|<(2-\alpha)-|2-\alpha-2|$$

olduğu görülür. Buradan

$$\sum_{n=2}^{\infty}\{n[2n-\alpha-2+2-\alpha]\}|a_n|<(2-\alpha-\alpha)$$

yazılıp

$$\sum_{n=2}^{\infty}2n(n-\alpha)|a_n|<2(1-\alpha)$$

veya

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-\alpha)|a_n| < (1-\alpha)$$

elde edilir. Bu ise Silverman'ın sonucudur.

Teorem 4.1.3 de verilen

$$\sum_{n=2}^{\infty} \{|2n-\alpha-\beta| + (\beta-\alpha)\}|a_n| < (\beta-\alpha) - |2-\alpha-\beta|$$

eşitsizliğinde $2n-\alpha-\beta \geq 0$ ve $2-\alpha-\beta \geq 0$ olması halinde mutlak değerleri kaldırmış oluruz. Buna göre,

$$2n-\alpha-\beta \geq 0 \Rightarrow \alpha+\beta \leq 4$$

$$2-\alpha-\beta \geq 0 \Rightarrow \alpha+\beta \leq 2$$

bulunur. Her iki mutlak değeri kaldırmak için $\alpha+\beta \leq 2$ şartı kullanılır. $0 \leq \alpha < 1$ ve $\beta > 1$ olduğu göz önüne alınırsa $1 < \alpha+\beta \leq 2$ olur. Bu durumda aşağıdaki sonuç yazıır.

**Sonuç 4.1.5 :** $i.$ $1 < \alpha+\beta \leq 2$ ( $0 \leq \alpha < 1$ ve $\beta > 1$ ) olmak üzere $f(z) \epsilon A$ için

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-\alpha)|a_n| < (\beta-1)$$

şartı sağlanırsa $f(z) \in M(\alpha,\beta)$ dır.

$ii.$ $1 < \alpha+\beta \leq 2$ ( $0 \leq \alpha < 1$ ve $\beta > 1$ ) olmak üzere $f(z) \epsilon A$ için

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-\alpha)|a_n| < (\beta - 1)$$

şartı sağlanırsa $f(z) \in N(\alpha, \beta)$ olur.

**İspat :** Teorem 4.1.3 ve Teorem 4.1.4 de $1 < \alpha + \beta \leq 2$ alınarak mutlak değerlerin kalktığını görürüz. Doğrudan işlem yaparak sonuçların doğruluğunu elde ederiz.

## 5. SONUÇ

Bu tezde aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

**Sonuç 5.1:** $f(z) \in A$ ve $0 \leq \alpha < 1,\ \beta > 1$ olsun. Bu durumda

$$\left|2\frac{zf'(z)}{f(z)} - (\beta + \alpha)\right| < \beta - \alpha$$

eşitsizliği sağlanırsa $\alpha < Re\frac{zf'(z)}{f(z)} < \beta$ olur.

**Sonuç 5.2:** $f(z) \in A$ ve $0 \leq \alpha < 1,\ \beta > 1$ olsun. Bu durumda

$$\left|2\frac{zf''(z)}{f'(z)} + (2 - \beta - \alpha)\right| < \beta - \alpha$$

eşitsizliği sağlanırsa $\alpha < Re\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) < \beta$ olur.

**Sonuç 5.3:** Eğer $f(z) \in A$ fonksiyonu

$$\sum_{n=2}^{\infty}\{|2n - \alpha - \beta| + (\beta - \alpha)\}|a_n| < (\beta - \alpha) - |2 - \alpha - \beta|$$

şartını sağlarsa $f(z) \in M(\alpha, \beta)$ dır.

**Sonuç 5.4 :** Eğer $f(z) \in A$ fonksiyonu

$$\sum_{n=2}^{\infty}\{n[|2n-\alpha-\beta|+(\beta-\alpha)]\}|a_n| < (\beta-\alpha)-|2-\alpha-\beta|$$

şartını sağlarsa $f(z) \in N(\alpha,\beta)$ dır.

**Sonuç 5.5:** $1 < \alpha+\beta \leq 2$ ( $0 \leq \alpha < 1$ ve $\beta > 1$ ) olmak üzere $f(z) \epsilon A$ için

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha)|a_n| < (\beta-1)$$

şartı sağlanırsa $f(z) \in M(\alpha,\beta)$ dır.

**Sonuç 5.6:** $1 < \alpha+\beta \leq 2$ ( $0 \leq \alpha < 1$ ve $\beta > 1$ ) olmak üzere $f(z) \epsilon A$ için

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-\alpha)|a_n| < (\beta-1)$$

şartı sağlanırsa $f(z) \in N(\alpha,\beta)$ olur.

**KAYNAKLAR**

Duren P.L., 1983. Duren univalent functions. Springer-Verlag, New York.

Graham I. and Kohr G., 2003. Geometric function theory in one and higher dimensions.Marcel Dekker. Inc. New York.

Nishiwaki J. and Owa S., 2002. Coefficient inequalities for certain analytic functions. International Journal of Mathematics 29, no (5), 285-290.

Nishiwaki J. and Owa S., 2002. Coefficient estimates for certain classes of analytic functions. JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math 3, no (5), Article 72.

Owa S. and Srivastava H.M., 2002. Some generalized convolution properties associated with certain subclasses of analytic functions. J. Inequal. Pure Appl. Math 3, no (3), Article 42.

Silverman H., 1975. Univalent functions with negative coefficients. Proceedings of the American Mathematical Society 51, no (1), 109-116.

Zorn P., 1986. The Bieberbach conjecture. Mathematics Magazine 59, no (3), 131-148.

## ÖZGEÇMİŞ

Pelin YILMAZTÜRK 1987 yılında Rize ilinin Pazar ilçesinde dünyaya geldi. İlk ve orta öğrenimini Rize ilinin Ardeşen ilçesinde tamamladı. Lise öğrenimini Pazar Anadolu Lisesi'nde tamamladı. 2005 yılında girdiği Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2009 yılında mezun oldu. 2009-2010 eğitim -öğretim yılında Atatürk Üniversitesi Eğitim Fakültesinde tezsiz yüksek lisans yaptı. 2011 yılında aynı bölümde yüksek lisansa başladı. Halen lisansüstü eğitimine devam etmektedir.