q-FİBONACCİ POLİNOMLARI
VE MORS KOD DİZİSİ

Fatih ÇEVİK

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Ana Bilim Dalı
Doç. Dr. İnci GÜLTEKİN
2013

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

q-FİBONACCİ POLİNOMLARI VE MORS KOD DİZİSİ

Fatih ÇEVİK

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

ERZURUM
2013

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAY FORMU

q-FİBONACCİ POLİNOMLARI VE MORS KOD DİZİSİ

Doç. Dr.İnci GÜLTEKİN danışmanlığında, Fatih ÇEVİK tarafından hazırlanan bu çalışma 19/07/2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından. Matematik AnaBilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak **oybirliği/oy çokluğu (…/…)** ile kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Erdal KARADUMAN *İmza* :

Üye : Doç. Dr. İnci GÜLTEKİN *İmza* :

Üye : Yrd. Doç. Dr. Tevfik İŞLEYEN *İmza* :

Yukarıdaki sonucu onaylıyorum

Prof. Dr. İhsanEFEOĞLU
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

q-FİBONACCİ POLİNOMLARI AND MORSE CODE SEQUENCE

Fatih ÇEVİK

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik AnaBilim Dalı

Danışman: Doç. Dr.İnci GÜLTEKİN

Bu çalışmada ilk olarak Mors Kod Dizileri ve Fibonacci polinomları incelenmiş bu polinomların q-karşılıklarının Continuant polinomlarla arasındaki indirgeme bağıntıları verilmiştir. Daha sonra Lucas polinomları, Chebyshev polinomları ile bunların q ve (q, b) sınıflarının aralarındaki indirgeme bağıntıları hakkında bilgi verilmiştir. Son olarak determinantı ve permananti q-Fibonacci polinomunu veren uygun alt Hessenberg matrisi oluşturulmuştur.

2013,48 sayfa

Anahtar Kelimeler: q-Fibonacci polinomları, Continuantpolinomları, q-Lucaspolinomları, q-Chebpshev polinomları, (q,b)-Fibonacci polinomları, alt Hessenberg matris.

ABSTRACT

MS Thesis

ABOUT q-FİBONACCİ POLYNOMİALS – q-LUCAS POLYNOMİALS AND OTHER POLYNOMİALS

Fatih ÇEVİK

AtaturkUniversity
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. İnci GÜLTEKİN

In this thesis firstly, Morse Code sequences and Fibonacci polynomial have been examined and given recurrences between q-analogues of these polynomials and Continuant polynomials. Later, information about Lucas polynomials, Chebyshev polynomials and recurrences between their q and (q,b) class have been given. Finally have been get determinant and permanents of some lower Hessenberg matrices that give terms of q- Fibonacci polynomial.

2013, 48pages

Keywords: :q-Fibonacci polynomials, Continuant polynomials, q-Lucas polynomials, q-Chebpshev polynomials, (q,b) Fibonacci polynomials, lower Hessenberg matrices.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma, Atatürk üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde yapılmıştır.

Bu tez konusunu çalışmamı sağlayan, çalışmalarımda ve tezin hazırlanışında yakın ilgi gösteren ve yardımlarını esirgemeyen hocam Sayın Doç. Dr.İnci GÜLTEKİN'e ve çalışmalarım boyunca kendilerinden görmüş olduğum destekten dolayı başta Sayın Prof. Dr. Hüseyin AYDIN olmak üzere bölümdeki bütün hocalarıma ve araştırma görevlisi arkadaşlarıma ve beni destekleyen aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

Fatih ÇEVİK
Temmuz 2013

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

C^n	Fibonacci matrisi
$d(n,k,b,s)$	(q,b)-CassiniEuler Formu
$F(a,b)$	Fibonaccipolinomları
$F(x,s,q)$	q-Fibonaccipolinomları
$F(x,b,s,q)$	(q,b)-Fibonaccipolinomu
$K_n(x_1,x_2,........x_n)$	Continuantpolinomları
$L(x,s)$	Lucaspolinomları
$L(x,b,s,q)$	q- Lucaspolinomu
$l(x,b,s,q)$	(q,b)-Lucaspolinomu
MC	Mors Kodu
$M(x,s)$	q -Fibonaccipolinom matrisi
$T(x,s)$	1.Tür 2 Değişkenli Chebyshevpolinomu
$T(x,-1)$	Klasik Chebyshevpolinomu
$T(x,s,q)$	2.Tür Chebyshevpolinomu
$T(x,-1,1)$	1.Tür Chebyshevpolinomu
$U(x,s)$	2. Tür 2 Değişkenli Chebyshevpolinomu
$U(x,s,q)$	2.Tür 2 Değişkenli Chebyshevpolinomu
$U(x,-1,1)$	2.Tür Klasik q -Chebyshevpolinomu

1. GİRİŞ

Leonardo Fibonacci, ortaçağ Avrupa'sının en çok tanınan matematikçisidir. Matematiksel yazıları haricinde hayatı hakkında az şey bilinmektedir. Fibonacci 1170 yılında Pisa da Banacci ailesinin bir ferdi olarak dünyaya gelmiştir.1190 yılında babası Cezayir'e atanmış ve oğlu Fibonacci'yi beraberinde götürerek hesaplama sanatını öğrenmesine sebep olmuştur. İlk derslerini Cezayir'de almıştır. Burada Hint-Arap sayı ve sistemini ve hesaplama tekniğini öğrenmiştir. Fibonacci burada 'Harezmi'nin Hesap el Cebir el Muhakemat' adlı kitabı ile tanışmıştır.1202 yılında 'Liber Abaci The Book of Abacus' adlı ilk kitabını yazmıştır. Aritmetik ve temel Cebire adanan 'Liber Abacci', Avrupa'ya yeni sistemi ve aritmetik algoritmayı tanıtmıştır. Fibonacci 'Geometri Alıştırması' Flos(Çiçek) ve Libor Quadratorum (The Book of Square Numbers) adlı iki kitabı yayımlanmıştır.

Polinomların büyük bir sınıfı Fibonacci gibi indirgeme bağıntısıyla tanımlanabilir. Fibonacci polinomu denilen böyle polinomlar 1883 yılında Belçikalı matematikçi Eugene Charles Catalan ve Alman matematikçi E. Jacobsthal tarafından çalışıldı. Matematikte Fibonacci polinomları Fibonacci sayılarının genellemesi olarak düşünülebilir. Benzer şekilde Lucas sayılarından üretilen polinomlara Lucas polinomları denir.

Mors kod dizileri Fibonacci sayılarının çeşitli özelliklerinin kombinatorial özelliklerini vermek için faydalıdır. Cigler (2003) Fibonacci sayıları ve Fibonacci polinomlarının birkaç q karşılığını elde etmiş ve Mors kod dizisinin kombinatorial yönünü vermiştir.

Polinomların bu sınıflarının birbiriyle nasıl bağlantılı olduklarını ve klasik Fibonacci polinomları hakkında bazı iyi bilinen teoremler ve bazı örnekler daha önce W. A. Al-Salam ve M. E. H. Ismail, M. E. H Ismail, H. Prodinger ve D. Stonten ve I. Schur tarafından incelenmiştir.

Bu Yüksek Lisans çalışmasında Mors Kod Dizileri, Fibonacci polinomları ve bunların q karşılıkları ile diğer polinomların (q,b) sınıfları arasındaki indirgeme bağıntıları incelenmiştir.

2.Bölümde Fibonacci polinomları verilerek q sınıfları hakkında bilgi verilmiş ve Continuant polinomlarıyla bunların q karşılıklarından bahsedilerek q-Fibonacci polinomları ile aralarındaki ilişkiden bahsedilmiştir.

3.Bölümde q-Fibonacci polinomlarıyla, Lucas polinomu ve q ve (q,b) sınıfları, Chebyshev polinomları ve q ve (q,b) sınıfları incelenerek aralarındaki indirgeme bağıntılarından bahsedilmiştir

4.Bölümde determinant ve permanenti $q-$Fibonacci polinomunu veren uygun alt Hessenberg matrisi oluşturulmuştur.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Mors Alfabesi

Mors alfabesi veya mors kodu, kısa ve uzun işaretler (• ve –) ile bunlara karşılık gelen ışık veya sesleri kullanarak bilgi aktarılmasını sağlayan yöntemdir.1832'de telgraf ile ilgilenmeye başlayan Samuel Morse tarafından 1835 yılında oluşturulmuştur. 1837'de kullanılmaya başlanmıştır. Orijinal mors kodu kısa ve uzun sinyallerin kombinasyonunun bir sayıya karşılık gelmesinden oluşmuştur.

Ancak Morse'un bulduğu sistemin kullanımı kolay değildi. Asistanı Veil ile bu konu üzerine ortaklaşa çalışmaya başlayan Morse, bir süre sonra Veil'in önerdiği sistemin daha basit olduğuna ikna oldu. Veil'in sisteminde kısa ve uzun sinyallerin yanı sıra duraklamalar da kullanılıyordu. Bu sistem daha sonra Amerikan Mors Kodu olarak isimlendirilmiştir.

Mors kod dizisi $\bullet$ ve $-$'lerin bir sonsuz dizisidir ve kısaca MC ile gösterilir. $\bullet$'nın 1 uzunluğuna ve $-$' lerin 2 uzunluğuna sahip olduğu kabul edilir.

MC tüm Mors kod dizilerinin kümesi olduğunda MC, birim elemanı ε, boş dizisi olan monoid olarak alınır. Eğer $\bullet$ için a ve $-$ için b yazılırsa MC, a ve b deki bütün kelimelerden oluşur. Örneğin 4 uzunluğundaki Mors kod dizileri

$$\bullet\bullet\bullet\bullet, \quad \bullet\bullet-, \quad \bullet-\bullet, \quad -\bullet\bullet, \quad --$$

biçimindedir.

Tanım 2.1.1. F_n, n. Fibonacci sayısını göstermek üzere,

$$F_0 = 0 \ , \ F_1 = 1$$

başlangıç koşulları ve her $n \geq 2$ tamsayısı için Fibonacci sayıları,

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır. Bazı Fibonacci sayıları;

$F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, F_6 = 8, \ F_7 = 13, \ldots$

şeklinde verilebilir. Toplam uzunluğu $n-1$ olan bütün Mors kod dizilerinin sayısı, F_n Fibonacci sayısıdır.

Ayrıca negatif indisli Fibonacci sayıları $F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.2. L_n**,** *n.* Lucas sayısını göstermek üzere, $L_0 = 2, L_1 = 1$ başlangıç koşulları ve her $n \geq 2$ tamsayısı için Lucas sayıları,

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır. Bazı Lucas sayılarına örnek olarak

$$L_0 = 2\,,\ L_1 = 1,\ L_2 = 3,\ L_3 = 4\,,\ L_4 = 7\,,\ L_5 = 11,\ L_6 = 18, \ldots$$

verilebilir.

Tanım 2.1.3. $F_n(x)$ Fibonacci polinomları,

$$F_0(x)=0\ ,\ F_1(x)=1$$

başlangıç koşulları ve her $n\geq 1$ tamsayısı için,

$$F_{n+1}(x)=xF_n(x)+F_{n-1}(x)$$

şeklindeki indirgeme bağıntısı ile tanımlanır. Bu dizinin birkaç terimi;

$$0,1,\ x,\ x^2+1,\ x^3+2x,\ x^4+3x^2+1,\dots$$

şeklindedir (Falconand Plaza 2009).

$F_n(x)$ Fibonacci polinomunun derecesi $n\geq 1$ için $n-1$'dir. Fibonacci polinomları ve Fibonacci sayıları arasında $n\geq 1$ olmak üzere $F_n(1)=F_n$ ilişkisi vardır. Örneğin; $F_4(1)=F_4$şeklindedir. Ayrıca $F_1(2)=1$, $F_2(2)=2$ve $n\geq 3$olmak üzere

$$F_n(2)=2F_{n-1}(2)+F_{n-2}(2)$$

Eşitliği söz konusudur. Bu eşitlikten elde edilen sayılar

$$P_n=F_n(2)$$

biçimindeki Pell sayılarıdır. Pell sayıları 1,2,5,12, 29, … şeklindedir (Falconand Plaza 2009).

Tanım 2.1.4. $F_0(x)=0$ olmak üzere

$$F_{-n}(x)=(-1)^{n+1}F_n(x)$$

bağıntısı ile tanımlanan polinomlara negatif indisli Fibonacci polinomları denir. (Falconand Plaza 2009).

Teorem 2.1.5. $n \in \mathbb{Z}$ ve $Q(x) = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$olmak üzere

$$Q^n(x) = \begin{bmatrix} F_{n+1}(x) & F_n(x) \\ F_n(x) & F_{n-1}(x) \end{bmatrix}$$

dir **(**Falconand Plaza 2009).

Teorem 2.1.6 (Cassini veya Simon) özelliği): $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$F_{n+1}(x)F_{n-1}(x) - F_n^{\ 2}(x) = (-1)^n$$

dir (Falconand Plaza 2009).

Tanım 2.1.7. $F_n(x, s)$ Fibonacci polinomları

$$F_0(x,s) = 0 \ , \ F_1(x,s) = 1$$

başlangıç koşulları ve her $n \geq 2$ tamsayısı için,

$$F_n(x,s) = xF_{n-1}(x,s) + sF_{n-2}(x,s)$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır (Cigler 2003).

Ayrıca,

$$F_n(x,s)=\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n-1-k}{k} s^k x^{n-1-2k}$$

olur (Cigler 2003).

Bu dizinin birkaç terimi;

$$0,1,\ x,\ x^2+s,\ x^3+2sx,\ x^4+3sx^2+s^2,\dots$$

şeklindedir.

Tanım 2.1.8. $L_n(x,s)$ Lucas polinomları,

$$L_0(x,s)=2 \text{ ve } L_1(x,s)=x$$

başlangıç koşulları ve

$$L_n(x,s)=xL_{n-1}(x,s)+sL_{n-2}(x,s)$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır (Cigler 2003). Üstelik

$$L_n(x,s)=\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} s^k x^{n-2k}$$

olur (Cigler 2003).

İki değişkenli Fibonacci polinomları için Tanım 2.1.7'de verilen indirgeme bağıntısının

$$r^2-xr-s=0$$

karakteristik denklemi için kökler

$$\alpha = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4s}}{2}, \quad \beta = \frac{x - \sqrt{x^2 + 4s}}{2}$$

olduğunda Binet formülü

$$F_n(x,s) = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

ve

$$L_n(x,s) = \alpha^n + \beta^n$$

olur. $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ s & x \end{pmatrix}$ matrisi $C^2 = xC + sI$ eşitliğini sağladığında Fibonacci matrisi,

$$C^n = \begin{pmatrix} F_{n-1}(x,s) & F_n(x,s) \\ F_n(x,s) & F_{n+1}(x,s) \end{pmatrix}$$

ile ifade edilir.

Lucas polinomları $L_n(x,s)$ ile gösterilir. $L_n(x,s)$ Lucas polinomu C^n Fibonacci matrisinin izine karşılık gelir. Yani;

$$L_n(x,s) = tr(C^n) = F_{n+1}(x,s) + F_{n-1}(x,s)$$

olur.

Tanım 2.1.9. $T_0(x,s)=1$ ve $T_1(x,s)=x$ başlangıç değerleri ile 1.türden iki değişkenli Chebyshev polinomları

$$T_n(x,s)=2xT_{n-1}(x,s)+sT_{n-2}(x,s)$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır (Cigler 2012).

$T_n(x,s)$ polinomları

$$T_n(x,s)=2^{n-1}L_n(x,\frac{s}{4})=\frac{1}{2}\left(\left(x+\sqrt{x^2+s}\right)^n+\left(x-\sqrt{x^2+s}\right)^n\right)$$

ile Lucas polinomlarına bağlanır.

Tanım 2.1.10:İkinci türden iki değişkenli $U_n(x,s)$ Chebyshev polinomları

$$U_0(x,s)=1,\ U_1(x,s)=2x$$

başlangıç değerleri ve

$$U_n(x,s)=2xU_{n-1}(x,s)+sU_{n-2}(x,s)$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanır (Cigler 2012).

İkinci türden 2 değişkenli Chebyshev polinomu

$$U_n(x,s)=2^nF_{n+1}\left(x,\frac{s}{4}\right)=\frac{\left(x+\sqrt{x^2+s}\right)^{n+1}-\left(x-\sqrt{x^2+s}\right)^{n+1}}{2\sqrt{x^2+s}}$$

ile Fibonacci polinomlarına bağlanır.

Chebyshev polinomlarının her iki türüde eğer $U_{-1}(x,s)=0$ olarak alınırsa

$$\left(x+\sqrt{x^2+s}\right)^n = T_n(x,s) + U_{n-1}(x,s)\sqrt{x^2+s}$$

ile karakterize edilir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. q-Fibonacci Polinomları ve Mors Kod Dizileri

MC, $\bullet$ ve $-$'lerin bütün Mors kodu dizilerinin kümesi olsun. MC monoidinin birim elemanı boş dizidir ve ε ile gösterilir. Eğer $\bullet$ için a, $-$ için b alınırsa o zaman MC, a ve b deki bütün kelimelerden oluşur. P, $\mathbb{R}$ üzerinde karşılık gelen monoid cebiri olsun. Yani reel katsayılı $\sum_{v\in MC} \lambda_v v$ bütün sonlu toplamların (polinomların) cebiri olsun.

P'nin önemli bir elemanı

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n(a,b)$$

olur.Burada;

$C_k^n(a,b)$, $n-k$ tane $\bullet$ ve k tane $-$ den oluşan bütün kelimelerin toplamıdır.

Örnek 3.1.1. $n=2$ için $(a+b)^2$ yi yazalım.

$$(a+b)^2 = \sum_{k=0}^{2} C_k^2(a,b)$$

$(a+b)(a+b) = a^2+ab+ba+b^2 = C_0^2 + C_1^2 + C_2^2$

$C_0^2(a,b) \quad b=0 \quad a=2 \quad a^2$

$C_1^2(a,b) \quad b=1 \quad a=2-1=1 \quad ab \quad ba$

$C_2^2(a,b) \quad b=2 \quad a=2-2=0 \quad b^2$

$C_0^2 + C_1^2 + C_2^2 = a^2+ab+ba+b^2$

Tanım 3.1.2. Değişmeli olmayan Fibonacci polinomları,

$$F_0(a,b)=0,\ F_1(a,b)=\varepsilon$$

başlangıç değerleri ve

$$F_n(a,b)=a\,F_{n-1}(a,b)+b\,F_{n-2}(a,b)$$

indirgeme bağlantısıyla tanımlanır (Cigler 2003).

Bu dizi için ilk birkaç terimi,

$$\begin{array}{cccccc}
0 & \underline{\varepsilon} & \underline{a} & \underline{a^2+b} & \underline{a^3+ab+ba} & \underline{a^4+a^2b+aba+ba^2+b^2}\dots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
F_0 & F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5
\end{array}$$

şeklindedir.

Tanım 3.1.3. $v \in MC$ elemanının uzunluğu, v deki b'lerin sayısı k, a'ların sayısı l olduğunda $2k+l$ olarak tanımlanır (Cigler 2003).

$F_n(a,b)$, $n-1$ uzunluğunda MC'deki bütün kelimelerin toplamı olur.

Örnek 3.1.4. $F_0(a,b)=0$, $F_1(a,b)=\varepsilon$ olmak üzere F_2, F_3, F_4, F_5 i yazalım.

$F_2(a,b)$, $2-1=1$, uzunluğundaki kelimelerin toplamı olduğundan
$2k+l=1 \Rightarrow k=0,\ l=1$ için

$$F_2(a,b)=a$$

$F_3(a,b),\ 3-1=2$ uzunluğundaki kelimelerin toplamı olduğundan

$2k+l=2 \Rightarrow k=1,\ l=0$ veya $k=0,\ l=2;\ b\ \ a^2$

$$F_3(a,b)=b+a^2$$

$F_4(a,b),\ 4-1=3$ uzunluğundaki kelimelerin toplamı olduğundan

$2k+l=3 \Rightarrow k=1,\ l=1$ veya $k=0,\ l=3;\ ab\ \ ba\ \ a^3$

$$F_4(a,b)=\ ab+ba+a^3$$

$F_5(a,b),\ 5-1=4$ uzunluğundaki kelimelerin toplamı olduğundan

$2k+l=4 \Rightarrow k=0,\ \ l=4$ veya $k=1,\ \ l=2$ veya $k=2,\ \ l=0$

$a^4,\ ba^2,\ a^2b,\ b^2,\ aba$

$$F_5(a,b)=\ a^4+ba^2+a^2b+aba+b^2$$

…

biçiminde devam edilirse

$$\begin{array}{cccccc} 0 & \underline{\varepsilon} & \underline{a} & \underline{a^2+b} & \underline{a^3+ab+ba} & \underline{a^4+a^2b+aba+ba^2+b^2}\ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ F_0 & F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 \end{array}$$

olur.

$$F_n(a,b)=F_{n-1}(a,b)a+F_{n-2}(a,b)b$$

indirgeme bağıntısının da sağlandığını görmek kolaydır. Her iki durumda

$$F_{m+n}(a,b) = F_{m-1}(a,b)\,b\,F_n(a,b) + F_m(a,b)\,F_{n+1}(a,b)$$

formülünün özel durumlarıdır.

Örnek 3.1.5. F_5 için, $F_5 = F_{2+3} = F_{1+4} = F_{4+1} = F_{3+2}$ olduğunu aşağıdaki şekilde gösterebiliriz.

$$F_{2+3} = F_1(a,b)bF_3(a,b) + F_2F_4\ (a,b)$$

$$\begin{aligned} F_{2+3} &= \varepsilon b\ (b+a^2) + a\ (ba + a^3 + ab) \\ &= b^2 + ba^2 + aba + a^4 + a^2b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{3+2} &= F_2\,bF_2 + F_3F_3 \\ &= aba + (b+a^2)(b+a^2) \\ &= aba + b^2 + ba^2 + a^2b + a^4 \end{aligned}$$

$$F_{1+4} = F_0 b\,F_4 + F_1F_5$$

$$\begin{aligned} F_{4+1} &= F_3bF_1 + F_4\,F_2 \\ &= (b+a^2)\,b\varepsilon + (ba + a^3 + ab)\cdot a \\ &= b^2 + a^2b + ba^2 + a^4 + aba \end{aligned}$$

$$F_5 = ba^2 + a^4 + aba + b^2 + a^2b\,.$$

Tanım 3.1.6. $m+n-1$ uzunluğundaki her bir w kelimesi

$$w = \begin{cases} ubv, & l(u) = m-2,\ l(v) = n-1 \\ xy\ , & l(x) = m-1,\ l(y) = n \end{cases}$$

olarak tek türlü yazılabilir (Cigler 2003).

Örnek 3.1.7. 4 uzunluğundaki w kelimesi için Tanım 3.1.6 yı uygulayalım.

F_{2+3} $\quad m+n-1=2+3-1=4$ uzunluğundaki her w kelimesi için

$2k+l=4$

$k=0\ ,l=4 \quad a^4$

$k=1,\ l=2 \quad a^2b \quad ba^2 \quad aba$

$k=2\ ,l=0 \quad b^2$

$w=u\,b\,v \quad m=2, \quad n=3$

$$\left.\begin{array}{l} u \to m-2=2-2=0 \\ v \to n-1=3-\ 1=2 \end{array}\right\}$$ uzunluğunda kelimeler olduğundan

$u=\varepsilon$

$v \to 2k+l=2$

$\quad k=0,\ \ l=2 \quad a^2$

$\quad k=1, \quad l=0 \quad b$

$w=\varepsilon b\ \ (a^2+b) \Rightarrow \ w=ba^2+b^2$

ya da

$x \to m-1=2-1=1$ uzunluğunda

$2k+l=1$

$k=0,\ l=1 \quad a \qquad y \to 3$ uzunluğunda

$2k+l=3$

$k=0, \quad l=3 \quad a^3$

$k=1, \quad l=1 \quad ab \quad ba$

$w=xy \Rightarrow a(a^3+ab+ba)=a^4+a^2b+aba$

$F_5=ubv\ +\ xy$

$\quad =ba^2+b^2+a^4+a^2b+\ aba$

$F_6=F_{2+4}=F_1bF_4+F_2F_5 \qquad m=2, \quad n=4$

$F_6={}_{m-2\swarrow}u\,\mathrm{b}v_{\searrow_{n-1}}+{}_{m\swarrow}xy_{\searrow_n}$

$u \quad 2-2 \ =0 \quad u=\varepsilon$

$v \quad 4-1=3 \quad 2k+l=3$

$\qquad k=0,\ l=3 \quad a^3$

$\qquad k=1,\ \ l=1 \quad ab+ba$

$x \quad 2-1=1 \quad 2k+l=1$

$\qquad k=0,\ \ l=1 \quad a$

$y \quad 4 \quad 2k+l=4$

$\qquad k=0,\ \ l=4 \quad a^4$

$\qquad k=1,\ \ l=2 \quad ba^2 \quad a^2b \quad aba$

$\qquad k=2,\ \ l=0 \quad b^2$

$$F_6 = aba^2 + a^5 + a^2ba + ab^2 + a^3b + b^2a + ba^3 + bab$$
$$F_6 = ubv + xy$$
$$F_6 = b(a^3 + ab + ba) + a(a^4 + ba^2 + a^2b + aba + b^2)$$
$$= ba^3 + bab + b^2a + a^5 + aba^2 + a^3b + a^2ba + ab^2$$

$C_k^n(a,b)$ ile bu Fibonacci polinomlarını ilgilendiren basit bir formülü aşağıdaki teoremde verilebilir.

Teorem 3.1.8. $F_n(a,b)$ değişmeli olmayan Fibonacci polinomları

$$F_n(a,b) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k^{n-k-1}(a,b)$$

ile verilir (Cigler 2003).

Burada,

$F_n(a,b),\ (n-1)$ uzunluğundaki bütün $v \in MC$ tekli terimlerin (monomial) toplamıdır.

Eğer böyle bir monomial tamamiyle k tane $-$'ye sahipse, bu durumda $n-1-2k$ tane $\bullet$'ya ve bu durumda $n-k-1$harfe sahiptir ve bütün böyle kelimeler üzerindeki toplamı

$$C_k^{n-k-1}(a,b)$$

olur.

Örnek 3.1.9. Teorem 3.1.8 yardımıyla F_3 ü yazalım.

$$F_3(a,b) = \sum_{k=0}^{3-1} C_k^{3-k-1}(a,b)$$
$$= C_0^{3-0-1} + C_1^{3-1-1} + C_2^{3-2-1} = a^2 + b$$

olduğu aşağıdaki şekilde gösterilir.

$C_0^2 \quad b = 0,\ a = 2 \quad a^2$

$C_1^1 \quad b = 1,\ a = 1-1 = 0 \quad b$

$C_2^0 \quad b = 2,\ a = \cancel{0-2} \quad \cancel{b}^2$

olduğundan

$$F_4(a,b) = \sum_{k=0}^{4-1} C_k^{4-k-1}(a,b)$$
$$= C_0^3 + C_1^2 + C_2^1 + C_3^0$$

$C_0^3 \quad b = 0, \quad a = 3-0 \quad a^3$

$C_1^2 \quad b = 1, \quad a = 2-1 = 1 \quad ab + ba$

$C_2^1 \quad b = 2, \quad a = \cancel{1-2}$

$C_3^0 \quad b = 3, \quad a = \cancel{0-3}$

$a^3 + ab + ba$

…

$C_k^{n-k-1}(a,b)$ b’lerin sayısı k, a’ların sayısı $n-k-1-k = n-2k-1$ olur.

k tane b, $n-k-1$ tane a için toplam kelimelerin sayısı $n-2k-1$ dir.

3.2. q-Fibonacci Polinomlarının Bir Sınıfı

$\{m, m+1, \ldots, m+k-1\} \subseteq \mathbb{Z}$ kümesinde tanımlanan Mors kod dizilerini ele alalım. Bu durumda dizinin m ile başladığı söylenir. Böyle bir diziye aşağıdaki şekilde bir ağırlık eşlenir. $t(s) \neq 0$ reel değerli s'nin bir fonksiyonu ve $q \neq 0$ reel sayı olsun. V'de $\{m, m+1, \ldots, m+k-1\}$ kümesinde bir Mors kodu dizisi olsun. $i \in \{m, m+1, \ldots, m+k-1\}$ olmak üzere

$$w(i) = \begin{cases} x & , \quad \bullet \\ t(q^i s), & -\bullet \\ 1 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.2.1. v'nin ağırlığı aralığın bütün yerlerinin ağırlıklarının çarpımı olarak tanımlanır ve $w(v)$ ile gösterilir. Buna göre

$$w(v) = \prod_{i=m}^{m+k-1} w(i)$$

olur (Cigler 2003).

Örnek 3.2.2. $V = -\bullet-\bullet\bullet--\bullet$ dizisi için $m = 4$ ile başlarsa bu dizinin ağırlığı

$$w(v) = x^4 t(q^5 s) t(q^8 s) t(q^{12} s) t(q^{14} s)$$

olur. Gerçekten de,

m

4 $\quad -\ w(4) = 1$

5 $\quad -\bullet\ w(5) = t(q^5 s)$

6 $\quad \bullet\ w(6) = x$

7	$-$ $w(7)=1$
8	$-\bullet$ $w(8)=t(q^8 s)$
9	$\bullet$ $w(9)=x$
10	$\bullet$ $w(10)=x$
11	$-$ $w(11)=1$
12	$-\bullet$ $w(12)=t(q^{12}s)$
13	$-$ $w(13)=1$
14	$-\bullet$ $w(14)=t(q^{14}s)$
15	$\bullet$ $w(15)=x$

olmak üzere

$$w(v)=x^4 t(q^5 s)t(q^8 s)t(q^{12}s)t(q^{14}s)$$

olur.

Örnek 3.2.3. $v=-\bullet\bullet--\bullet$ dizisi için $m=2$ ile başlarsa ağırlık aşağıdaki şekilde yazılır.

m	
2	$-$ $w(2)=1$
3	$-\bullet$ $w(3)=t(q^3 s)$
4	$\bullet$ $w(4)=x$
5	$\bullet$ $w(5)=x$
6	$-$ $w(6)=1$ $w(6)=1$
7	$-\bullet$ $w(7)=t(q^7 s)$
8	$-$ $w(8)=1$
9	$-\bullet$ $w(9)=t(q^9 s)$
10	$\bullet$ $w(10)=x$

olmak üzere

$$w(v) = x^3 t(q^3 s) t(q^7 s) t(q^9 s)$$

olur.

$m = 0$ ile başlayan $n-1$ uzunluğundaki bütün Mors kod dizilerinin ağırlığı $F_n(x,s,q)$ ile gösterilir ve bu da Fibonacci polinomlarının q karşılığıdır.

Tanım 3.2.4. q-Fibonacci polinomları $t(s) \neq 0$ reel değerli s'nin bir fonksiyonu ve $q \neq 0$ bir reel sayı olduğunda

$$F_0(x,s,q) = 0,\ F_1(x,s,q) = 1$$

başlangıç koşulları ve her $n \geq 2$ tamsayısı için

$$F_n(x,s,q) = xF_{n-1}(x,s,q) + t(q^{n-2}s)F_{n-2}(x,s,q)$$

indirgemebağıntısı ile tanımlanır (Cigler 2003).

Örnek 3.2.5. $n-1$ uzunluğunda $m = 0$ da başlayan Mors Kodu dizilerinin ağırlığı $F_n(x,s,q)$ için

$$F_0(x,s,q) = 0, \quad F_1(x,s,q) = 1$$

başlangıç değerleri ve

$$F_n(x,s,q) = xF_{n-1}(x,s,q) + t(q^{n-2}s)F_{n-2}(x,s,q)$$

indirgeme bağıntısı için F_2, F_3, F_4, F_5 ve F_6 yı yazalım.

$F_2 = x$

F_3, 2 uzunluğundaki diziler $\bullet$ 'nın uzunluğu 1, — 'nin uzunluğu 2 olmak üzere,

$$\left.\begin{array}{ll} \bullet\bullet & x^2 \\ - & t(qs) \end{array}\right\} \Rightarrow F_3(x,s,q) = x^2 + t(qs)$$

olur.

F_4, $4-1=3$ uzunluğundaki dizilerin toplamı olmak üzere,

$$\left.\begin{array}{ll} \bullet\bullet\bullet & x^3 \\ \bullet- & xt(q^2s) \\ -\bullet & t(qs)x \end{array}\right\} \Rightarrow F_4(x,s,q) = x^3 + xt(q^2s) + xt(qs)$$

olur.

F_5, $5-1=4$ uzunluğundaki dizilerin toplamı olmak üzere,

$$\left.\begin{array}{ll} \bullet\bullet\bullet\bullet & x^4 \\ \bullet\bullet- & x^2t(q^3s) \\ \bullet-\bullet & x^2t(q^2s) \\ -\bullet\bullet & t(qs)x^2 \\ -- & t(qs)t(q^3s) \end{array}\right\} \Rightarrow F_5(x,s,q) = x^4 + x^2t(qs) + x^2t(q^2s) + x^2t(q^3s) + t(qs)t(q^3s)$$

olur.

F_6, $6-1=5$ uzunluğundaki dizilerin toplamı olmak üzere,

$\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet \quad x^5$

$$\left.\begin{array}{ll} \bullet\bullet\bullet- & xxxt(q^4s) \\ \bullet\bullet-\bullet & xxt(q^3s)x \\ \bullet-\bullet\bullet & xt(q^2s)xx \end{array}\right\}$$

$- \bullet \bullet \bullet \quad t(qs)xxx = t(qs)x^3$

$\bullet - - \quad x\,t(q^2s) = t(q^2s)xt(q^4s)$

$- \bullet - \quad t(qs)x\,t(q^4s)$

$- - \bullet \quad t(qs)\; t(q^3s)x = t(qs)t(q^3s)x$

$$F_6(x,s,q) = \underset{\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet}{x^5} + \underbrace{x^3t(qs)}_{-\bullet\bullet\bullet} + \underbrace{x^3t(q^2s)}_{\bullet-\bullet\bullet} + \underbrace{x^3t(q^3s)}_{\bullet\bullet-\bullet} + \underbrace{x^3t(q^4s)}_{\bullet\bullet\bullet-}$$
$$+ \underbrace{xt(q^2s)t(q^4s)}_{\bullet--} + \underbrace{xt(qs)t(q^4s)}_{-\bullet-} + \underbrace{t(qs)t(q^3s)\,x}_{--\bullet}$$

olur.

3.3. q-Fibonacci Polinomlarının Matris Formu

Tanım 3.3.1.

$$\mathrm{A}(x,s)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t(s) & x \end{pmatrix}$$

ve

$$M_n(x,s)=\mathrm{A}(x,q^{n-1}s)\mathrm{A}(x,q^{n-2}s)...\mathrm{A}(x,s)$$

olsun. Bu durumda

$$M_n(x,s)=\begin{pmatrix} t(s)F_{n-1}(x,qs,q) & F_n(x,s,q) \\ t(s)F_n(x,qs,q) & F_{n+1}(x,s,q) \end{pmatrix}$$

olur (Cigler 2003).

Örnek 3.3.2. M_1, M_2 ve M_3 matrislerini yazalım.

$n=1$ için M(x,s)= A(x,s) olur.

$n=2$ için, $\mathrm{M}_2(x,s)=A(x,q^{2-1}s)A(x,s)$ den,

$A(x,qs)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t(qs) & x \end{pmatrix}$ $A(x,s)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t(s) & x \end{pmatrix}$ olduğunda

$$M_2(x,s) = A(x,qs)A(x,s)$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t(qs) & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t(s) & x \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} t(s).1 & x \\ xt(s) & t(qs)+x^2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} t(s)F_1(x,qs,q) & F_2(x,s,q) \\ t(s)F_2(x,qs,q) & F_3(x,s,q) \end{pmatrix}$$

olur.

$$F_1(x,qs,q) = 1$$

$$F_2(x,s,q) = x$$

$$F_3(x,s,q) = x^2 + t(qs)$$

$$F_4(x,s,q) = x^3 + xt(qs) + xt(q^2s)$$

$$\begin{aligned} F_5(x,s,q) &= x\left[x^3 + xt(qs) + xt(q^2s)\right] + 1 \\ &\quad + t(q^3s)\left[x^2 + t(qs)\right] \\ &= x^4 + x^2t(qs) + x^2t(q^2s) + x^2t(q^3s) + t(q^3s)t(qs) \end{aligned}$$

dir.

$$M_3 = A(x,q^2s)A(x,qs)\ A(x,s)$$

$$=\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t(q^2s) & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t(qs) & x \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t(s) & x \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} t\ (qs) & x \\ xt\,(qs) & t(q^2s)+x^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t(s) & x \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} xt(s) & t(qs)+x^2 \\ t(s)(t(q^2s)+x^2) & xt(qs)+xt(q^2s)+x^3 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} t(s)F_2(x,qs,q) & F_3(x,s,q) \\ t(s)F_3(x,qs,q) & F_4(x,s,q) \end{pmatrix} \text{ olur.}$$

$M_n(x,s)$ matrisi,

$$M_{k+n}(x,s) = M_k(x,q^n s).M_n(x,s)$$

indirgeme bağıntısını sağlar.

Örnek 3.3.3. $M_3 = M_{2+1}$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} M_3 = M_{2+1} &= M_2(x,qs)M_1(x,s) \\ &= A(x,q^1qs)A(x,qs).A(x,s) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t(q^2s) & x \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t(qs) & x \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t(s) & x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olur.

Negatif indisler için matris aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 3.3.4.

$$M_{-k}(x,s)=\left(M_k(x,q^{-k}s)\right)^{-1}$$

ve bu durumda $d_n(s)=(-1)^{n-1}t(q^{-1}s)t(q^{-2}s)\ldots t(q^{-n}s)$ olduğunda

$$M_{-n}(x,s)=\frac{1}{d_n(q^{-n}s)}\begin{pmatrix} F_{n+1}(x,q^{-n}s,q) & -F_n(x,q^{-n}s,q) \\ -t(q^{-n}s)F_n(x,q^{-n+1}s,q) & t(q^{-n}s)F_{n-1}(x,q^{-n+1}s,q)\end{pmatrix}$$

olur (Cigler 2003).

Örnek 3.3.5. k=1 için M_1 matrisini ve tersini yazalım.

$$\begin{aligned} M_1(x,q^{-1}s) &= A(x,q^{1-1}q^{-1}s) \\ &= A(x,q^{-1}s) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t(q^{-1}s) & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t(q^{-1}s)F_0 & F_1 \\ t(q^{-1}s)F_1 & F_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olur. Adjoint yardımıyla $M_1(x,q^{-1}s)$ matrisinin tersini bulmak istersek,

$$M_1^{-1}=\frac{1}{\det M_1}\mathrm{Adj}M_1$$

$$Adj\,M_1=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22}\end{pmatrix}$$

$$\alpha_{11}=(-1)^{1+1}x \qquad \alpha_{21}=(-1)^{2+1}1$$

$$\alpha_{12}=(-1)^{1+2}\,t(q^{-1}s) \qquad \alpha_{22}=(-1)^{2+2}0$$

$$\begin{aligned} M_1^{-1} &= \frac{1}{t(q^{-1}s)}\begin{pmatrix} x & -1 \\ -t(q^{-1}s) & 0\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{t(q^{-1}s)}\begin{pmatrix} F_2 & -F_1 \\ -t(q^{-1}s).F_1 & t(q^{-1}s)F_0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

yazılır.

Ayrıca

$$F_{-n}(x,s,q)=(-1)^{n-1}\frac{F_n(x,q^{-n}s,q)}{t(\frac{s}{q}).t(\frac{s}{q^2}).....t(\frac{s}{q^n})}$$

olur.

Örnek 3.3.6. $F_0(x,s,q)=0$ $F_1(x,s,q)=1$ başlangıç değerleri için $F_n(x,s,q)=xF_{n-1}(x,s,q)+t(q^{n-2}s)F_{n-2}(x,s,q)$ den F_{-1} ve F_{-2} yi yazalım.

$$F_1=xF_0+t(q^{1-2}s)F_{-1}(x,s,q)$$

1 0

$$F_{-1}(x,s,q)=\frac{1}{t(q^{-1}s)}=\frac{1}{t(\frac{s}{q})}=F_{-1}=(-1)^{1-1}\frac{F_1}{t(\frac{s}{q})}$$

yazılır.

Yine benzer şekilde,

$$F_0=xF_{-1}+t(q^{-2}s)F_{-2}$$

0

$$F_{-2}=-\frac{x\frac{1}{t(\frac{s}{q})}}{t(\frac{s}{q^2})}=-\frac{x}{t(\frac{s}{q})t(\frac{s}{q^2})}=F_{-2}=(-1)^{2-1}\frac{F_2}{t(\frac{s}{q})t(\frac{s}{q^2})}$$

$$=-1\frac{x}{t(\frac{s}{q})t(\frac{s}{q^2})}$$

yazılır.

Teorem 3.3.8 (q-Cassini Formülü):

$$F_{n-1}(x,qs,q)F_{n+1}(x,s,q)-F_n(x,s,q)F_n(x,qs,q)=(-1)^n t(qs)...t(q^{n-1}s)$$

olur (Cigler 2003).

3.4. Continuant Polinomları

$K_n(x_1, x_2, ...x_n)$ Continuant Polinomları n parametreye sahiptir ve aşağıdaki indirgeme bağıntısı ile tanımlanır.

Tanım 3.4.1.

$$K_0(\,) = 1,\ K_1(x_1) = x_1$$

başlangıç değerleri ve

$$K_n(x_1, x_2....x_n) = K_{n-1}(x_1, x_2, ..., x_{n-1})x_n + K_{n-2}(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanan polinomlara Continuant polinomları denir (Graham *et al.* 1994).

İlk birkaç Continuant polinomu;

$K_0(\,) = 1$

$K_1(x_1) = x_1$

$K_2(x_1, x_2) = x_1x_2 + 1$

$K_3(x_1, x_2x_3) = x_1x_2x_3 + x_1 + x_3$

$K_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2x_3x_4 + x_1x_2 + x_1x_4 + x_3x_4 + 1$

şeklindedir. Burada terimlerin sayısı Fibonacci sayısıdır. $x_i = 1,\ \ i \leq 1 \leq n$ için

$$K_n(1,1,1,...1) = F_{n+1}$$

olur.

Her bir nokta 1 uzunluğunu ve her bir çizgi 2 uzunluğunu gösterdiğinde n uzunluğuna sahip olan, nokta ve çizgilerden oluşan bütün Mors kod dizilerini oluşturarak Continuant polinomları yazılır. 4 uzunluğundaki Mors kod dizileri

$$\bullet\bullet\bullet\bullet,\quad \bullet\bullet-,\ \bullet-\bullet,\ -\bullet\bullet,\ --$$

şeklinde olup bu nokta ve çizgi modelleri $K(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 'ün terimlerine karşılık gelir.

$\bullet$ bir değişken ve $-$ bir değişkenlerin çiftine işaret eder. Örneğin;

$\bullet-\bullet$ $x_1 x_4$ 'e karşılık gelir.

n uzunluğundan Mors kodu dizisi k tane $-$, $n-2k$ tane $\bullet$, $n-k$ kelimeye sahiptir.

Bu nokta ve çizgiler

$$\binom{n-k}{k}$$

şekilde düzenlenir.

Eğer her bir $\bullet$, z ile ve her bir $-$, 1 ile yer değiştirirse

$$K_n(z, z..., z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} z^{n-2k}$$

olur. Ayrıca Continuant'taki terimlerin toplam sayısı bir Fibonacci sayısıdır ve

$$F_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k}$$

olur.

Mors kod dizisi ve Continuant polinomları arasındaki bağıntı Continuantların

$$K(x_n,\ x_{n-1},...,x_2,x_1)=K(x_1,x_2,\ ...,x_n)$$

ayna simetrisine sahip olduğunu gösterir. Bu durumda indirgeme bağıntısı

$$K(x_1,x_2,...,x_n)=x_1K_{n-1}(x_2,...,x_n)+K_{n-2}(x_3,...,x_n)$$

şeklinde yazılabilir. Bu indirgeme bağıntılarının her ikisi de

$$K_{m+n}(x_1,,...\ x_m,x_{m+1},...,x_{m+n})=K_m(x_1,...,x_m)K_n(x_{m+1},...,x_{m+n})+K_{m-1}(x_1,...,x_{m-1})\,K_{n-1}(x_{m+2},...,x_{m+n})$$

genel durumun özel halleridir.

Tanım 3.4.2: Eğer x sabitinin yerine $x(s)$fonksiyonu seçilirse ve i yerinin ağırlığı $x(q^is)$ olarak tanımlanırsa, yer $\bullet$ ile eşlenirse 0 pozisyonunda başlayan n uzunluğunda bütün Mors kod dizilerinin kümesinin ağırlığı olarak $K_n(s)$ Polinomu elde edilir. Bunlara n uzunluğunda bütün Mors Kod dizilerinin kümesine karşılık gelen q-Continuantlar denir (Cigler 2003).

$$t(s)=1 \text{ ve } x\left(q^ks\right)=x_{k+1}$$

için (Graham *et al.* 1994) de göz önüne alınan Continuantlar elde edilir.

3.5. Continuantlar ve Sürekli Kesirler Arasındaki Bağıntı

Continuantlar sürekli kesirlerle de bağlantılıdır.

Tanım 3.5.1: Eğer $x(q^is)=x_i$ ve $\mathrm{t}\left(q^is\right)=y_i$ alınır ve

$$x_0 + \cfrac{y_1}{x_1 + \cfrac{y_2}{x_2 + \cdots}} = x_0 + \frac{y_1}{x_1 +}\frac{y_2}{x_2 +}\frac{y_3}{x_3 +}\cdots,$$

yazılırsa bu durumda

$$x_0 + \frac{y_1}{x_1 +}\frac{y_2}{x_2 +}\dots\frac{y_n}{x_n} = \frac{K_{n+1}(s)}{K_n(qs)}$$

olur (Cigler 2003).

Özel durum olarak

$$\frac{F_{n+2}(1,s,q)}{F_{n+1}(1,qs,q)} = 1 + \frac{t(qs)}{1+}\frac{t(q^2 s)}{1+}\dots\frac{t(q^n s)}{1}$$

olur.

$$w(i) = \begin{cases} t(q^i s)\ , & -\bullet \\ x(q^i s)\ , & \bullet \\ 1\ , & - \end{cases}$$

olur.

1 uzunluğundaki dizi aşağıdaki şekildedir.

$\bullet$ $\quad w(0)\ \ x(q^0 s) = x(s)$

2 uzunluğundaki dizi aşağıdaki şekilde olup,

$\bullet\bullet\ -$ $\quad w(0)w(1) = x(q^0 s)x(q^1 s)\ ,1$

$K_2(s) = x(s)x(qs) + 1$ olur.

3 uzunluğundaki dizi ise aşağıdaki şekilde olup,

••• •– –• $x(q^0s)x(q^1s)x(q^2s),\ x(q^0s).1, t(qs)x(q^2s)$

$$K_3(s) = x(s)x(q^1s)x(q^2s) + x(s).1 + t(qs)x(q^2s)$$

olur.

$$x(qs) = x_2 \qquad\qquad x(q^ks) = x_{k+1}$$

olduğundan,

$$K_3 = x_1\,x_2\,x_3 + x_1 + x_3$$

olur.

$$\frac{F_{n+2}(1,s,q)}{F_{n+1}(1,qs,q)} = 1 + \frac{t(qs)}{1+}\,\frac{t(q^2s)}{1+}\cdots\frac{t(q^ns)}{1}$$

olmak üzere,

$$F_4(1,s,q) = 1F_3(1,s,q) + t(q^2s)F_2(1,s,q)$$
$$F_3(1,qs,q) = 1F_2(1,qs,q) + t(q^2s)\,F_1(1,s,q)$$

$$F_3(1,s,q) = 1F_2(1,s,q) + t(qs)\,F_1(1,s,q) = t(qs) + 1$$

$$F_2(1,s,q) = 1F_1 + F_0 = 1$$

$$F_4(1,s,q) = t(qs) + 1 + t(q^2s)$$
$$F_2(1,qs,s) = 1F_1 + t\,(qs)\,F_0 = 1$$

$$F_3(1,qs,q) = 1 + \ t\ (q^2s)$$

den,

$$\frac{F_4(1,s,q)}{F_3(1,qs,q)} = 1 + \frac{t(qs)}{1+t(q^2s)} = \frac{1+t\,(q^2s)+t(qs)}{1+t(q^2s)}$$

olur.

Şimdi

$$\frac{K_3(s)}{K_2(qs)} = \frac{x(s)x(qs)x(q^2s) + x(s) + t(qs)\,x(q^2s)}{x(qs)x(q^2s) + 1}$$

yazalım.Buna göre,

$$x(q^0s) = x_0 \qquad t(qs) = y_1$$
$$x(q^1s) = x_1$$
$$x(q^2s) = x_2$$

olmak üzere,

$$x_0 + \cfrac{y_1}{x_1 + \cfrac{y_2}{x_2}} = x_0 + \frac{y_1x_2}{x_1x_2 + y_2} = \frac{x_0x_1x_2 + x_0y_2 + y_1x_2}{x_1\,x_2 + y_2}$$

$$= \frac{x(s)x(qs)x(q^2s) + x(s) + t(qs)x(q^2s)}{x(qs)x(q^2s) + 1}$$

olur.

$$F_2 = x(s)x(qs) + 1 = K_2(s) = x_1\ x_2 + 1$$

$$F_3 = x(s)\,x(qs)x(q^2s)x(q^3s) = K_3(s) = x_1\,x_2\,x_3 + \ x_1 + x_3$$

$$F_4 = x(s)\,x(qs)\,x(q^2s)\,x(q^3s) + \ x(s)x(qs) + x(s)\,t(q^2s)\,x(q^3s) + t(qs)\,x(q^2s)\,x(q^3s) + 1$$

$$x_1x_2x_3x_4 \ + \ x_1x_2 + x_1\,x_4 + x_3\,x_4 + 1 = K_4(s)$$

elde edilir.

$$K_2(s) = x(s)\,x(qs) + 1$$

$$K_3(s) = x(s)x(qs)x(q^2s) + x(s) + t\,(qs)\,x\,(q^2s)$$

$$K_4(s) = x(s)\,x(qs)\,x\,(q^2s)\,x\,(q^3s) + x(s)\,x\,(qs) +$$
$$x(s)\,t\,(q^2s)\,x\,(q^3s) + t\,(qs)\,x(q^2s)\,x\,(q^3s) + 1$$

$$\frac{K_3(s)}{K_2(qs)} = \frac{x(s)x(qs)x(q^2s) + x(s) + t(qs)\,x\,(q^2s)}{x(qs)\,x\,(q^2s) + 1}$$

olur. Yine,

$$K_4(s) = x(s)x(qs)\,x\,(q^2s)x(q^3s) + \ x\,(s)x(qs) +$$
$$x(s)\,t\,(q^2s)x(q^3s) + t(qs)\,x\,(q^2s)x(q^3s) + 1$$

$$K_3(qs) = x(qs)x(q^2s)x(q^3s) + x(qs) + t(q^2s)\,x\,(q^3s)$$

$$\left.\begin{aligned} x(q^0s) &= x_0 \\ x(q^1s) &= x_1 \\ x(q^2s) &= x_2 \\ x(q^3s) &= x_3 \end{aligned}\right\}$$

$$x_0 + \cfrac{y_1}{x_1 + \cfrac{y_2}{x_2 + \cfrac{y_3}{x_3}}} = x_0 + \cfrac{y_1}{x_1 + \cfrac{y_2 x_3}{x_2 x_3 + y_3}} = x_0 + \frac{y_1 x_2 x_3 + y_1 y_3}{x_1 x_2 x_3 + x_1 y_3 + y_2 x_3}$$

$$= \frac{x_0 x_1 x_2 x_0 + x_0 x_1 y_3 + x_0 y_2 x_3 + y_1 x_2 x_3 + y_1 y_3}{x_1 x_2 x_3 + y_3 x_1 + y_2 x_3}$$

$$= \frac{x(s)x(qs)x(q^2s)x(q^3s) + x(s)\,x(qs) + x(s)\,t(q^2s)x(q^3s) + t(qs)\,x(q^2s)x(q^3s) + t(qs)}{x(qs)\,x(q^2s)\,x(q^3s) + x(qs) + t(q^2s)x(q^3s)}$$

olur.

q- Fibonacci polinomları Continuantlar ile bağlantılıdır buna göre ;F_2, F_3, F_4, F_5, F_6 aşağıdaki şekildedir.

$$F_2 \rightarrow x \rightarrow \bullet \rightarrow x_1$$

şeklindedir.

$$F_3 \rightarrow x^2 + t(qs) \rightarrow \bullet\bullet/- \rightarrow x_1 x_2 + 1$$

şeklindedir.

$$F_4 \rightarrow x^3 + xt(q^2s) + xt(qs) \rightarrow \bullet\bullet\bullet/\bullet-/-\bullet \rightarrow x_1 x_2 x_3 + x_1 + x_3$$

şeklindedir.

$$F_5 \rightarrow x^4 + x^2 t(q^3s) + x^2 t(q^2s)x + t(qs)x^2 + t(qs)t(q^3s) \rightarrow$$

$$\bullet\bullet\bullet\bullet/\bullet\bullet-/\bullet-\bullet/-\bullet\bullet/--$$

$x_1x_2x_3x_4 + x_1x_2 + x_1x_4 + x_3x_4 + 1$

şeklindedir.

$$F_6 \rightarrow x^5 + x^3\, t\,(q^4 s) + x^3 t\,(q^3 s) + x^3 t\,(q^2 s) + x^3 t(qs) + x\,t\,(qs)\,t\,(q^3 s) + x\,t\,(qs)\,t\,(q^4 s)$$
$$+\, xt\,(q^2 s)\,t\,(q^4 s)$$

$\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet / \bullet\bullet\bullet - / \bullet\bullet - \bullet / \bullet - \bullet\bullet / - \bullet\bullet\bullet / \bullet - - / - \bullet - / - - \bullet$

$x_1x_2x_3x_4x_5 + x_1x_2x_3 + x_1x_2x_5 + x_1x_4x_5 + x_3x_4x_5 + x_1 + x_3 + x_5$

olur.

3.6. (*q*,b)-Fibonacci Polinomları

q-Ppochhammer sembolleri q analizin kısaltmalarıdır.

$$(a:q)_n = (1-a)(1-qa)...(1-q^{n-1}a)$$
$$(a:q)_\infty = \prod_{j=0}^{\infty}(1-q^j a)$$
$$(a:q)_{-n} = \frac{(a;q)_\infty}{(q^{-n}a;q)_\infty} = \frac{1}{(q^{-n}a;q_n)}$$

$$(a,q)_0 = 1,\ (0,q)_n = 1$$

olarak tanımlanır. q-binom katsayıları

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(q;q)_n}{(q;q)_k\,(q;q)_{n-k}}$$

ile gösterilir ve $\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}$ in yerine $[n]$ yazılır. q-binom teoreminden

$$\sum_{k\geq 0} \frac{(a;q)_k}{(q;q)_k} z^k = \frac{(az;q)_\infty}{(z;q)_\infty}$$

ve Carlitz'in

$$F_n(x,s,q)=\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor} q^{k^2}\begin{bmatrix} n-1-k \\ k \end{bmatrix} s^k x^{n-1-2k}$$

q- Fibonacci polinomları $F_0(x,s,q)=0$ ve $F_1(x,s,q)=1$ başlangıç değerleriyle

$$F_n(x,s,q)=xF_{n-1}(x,qs,q)+qsF_{n-2}(x,q^2s,q)$$

indirgeme bağıntısını sağlar (Cigler 2012).

Şimdi $F_n\left(x,\dfrac{s}{(1-b)^2}\right)$nin yeni bir q- karşılığını vereceğiz.

Tanım 3.6.1.

$$F_n(x,b,s,q)=\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor} q^{k^2}\begin{bmatrix} n-k-1 \\ k \end{bmatrix}\frac{1}{(qb;q)_k(q^{n-k}b;q)_k} s^k x^{n-1-2k}$$

polinomlarına (q,b)-Fibonacci polinomları denir (Cigler 2012).

$b=0$ için $F_n(x,0,s,q)=F_n(x,s,q)$ olur.

Teorem 3.6.2.(q,b) – Fibonacci polinomları

$$F_0(x,b,s,q)=0 \text{ ve } F_1(x,b,s,q)=1$$

başlangıç değerleri için

$$F_n(x,b,s,q)=xF_{n-1}(x,b,s,q)+\frac{q^{n-2}s}{(1-q^{n-2}b)(1-q^{n-1}b)}F_{n-2}(x,b,s,q)$$

indirgeme bağıntısını sağlar (Cigler 2012).

Teorem 3.6.3. $F_n(x,b,s,q)$ polinomları

$$F_0(x,b,s,q)=0 \text{ ve } F_1(x,b,s,q)=1$$

başlangıç değerleri için

$$F_n(x,b,s,q)=xF_{n-1}(x,qb,qs,q)+\frac{qs}{(1-qb)(1-q^2b)}F_{n-2}(x,q^2b,q^2s,q)$$

indirgeme bağıntısını sağlar (Cigler 2012).

Tanım 3.6.4.

$$F_{n+1}(x,-1,s,q)=\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} q^{k^2}\begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}\frac{1}{(-q;q)_k(-q^{n+1-k};q)_k}s^k x^{n-2k}$$

ya da

$$F_{n+1}(x,-1,s,q)=\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}\frac{(q^{-n};q^2)_k(q^{1-n};q^2)_k}{(q^{-2n};q^2)_k(q^2;q^2)_k}(-s)^k x^{n-2k}$$

formundaki $(q,-1)$ - Fibonacci polinomlarına genelleşen q- Fibonacci polinomları denir.

Şimdi Fibonacci matrisini yazalım.

$$C(x,b,s,q)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{s}{(1-b)(1-qb)} & x \\ & \end{pmatrix}$$

olsun. Bu durumda

$$\begin{pmatrix} \frac{s}{(1-qb)(1-q^2b)} F_{n-1}(x,q^2b,q^2s,q) & F_n(x,qb,qs,q) \\ \frac{s}{(1-qb)(1-q^2b)} F_n(x,q^2b,q^2s,q) & F_{n+1}(x,qb,qs,q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{s}{(1-b)(1-qb)} & x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{s}{(1-b)(1-qb)} F_n(x,qb,qs,q) & F_{n+1}(x,b,s,q) \\ \frac{s}{(1-b)(1-qb)} F_{n+1}(x,qb,qs,q) & F_{n+2}(x,b,s,q) \end{pmatrix}$$

ve

$$C\left(x,q^{n-1}b,q^{n-1}s,q\right)\cdots C\left(x,b,s,q\right) = \begin{pmatrix} \frac{s}{(1-b)(1-qb)} F_{n-1}(x,qb,qs,q) & F_n(x,b,s,q) \\ \frac{s}{(1-b)(1-qb)} F_n(x,qb,qs,q) & F_{n+1}(x,b,s,q) \end{pmatrix}$$

olur.

Teorem 3.6.5 $(\boldsymbol{q},\boldsymbol{b})$-Cassini formülü: Her $n \in \mathbb{Z}$ için

$$F_{n-1}(x,qb,qs,q)F_{n+1}(x,b,s,q) - F_n(x,b,s,q)F_n(x,qb,qs,q) = (-1)^n \frac{q^{\binom{n}{2}}}{(qb;q)_{n-1}(q^2b;q)_{n-1}} s^{n-1}$$

olur (Cigler 2012).

3.7. $(\boldsymbol{q},\boldsymbol{b})$-Lucas Polinomları

b=0 için Fibonacci Matrislerinin izi Carlitz'in q- Lucas polinomlarıyla çakışır. Böylece Lucas polinomunun (q,b) karşılığı

$$l_n(x,b,s,q) = tr\left(C(x,q^{n-1}b,q^{n-1}s,q)...C(x,b,s,q)\right)$$

ya da

$$l_n(x,b,s,q)=F_{n+1}(x,b,s,q)+\frac{s}{(1-b)(1-qb)}F_{n-1}(x,qb,qs,q)$$

olur. Bu durumda $n>0$ için

$$l_n(x,b,s,q)=\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor} q^{k^2-k}s^k x^{n-2k}\frac{[n]}{[n-k]}\begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}\frac{1}{(b;q)_k(q^{n-k+1}b;q)_k}$$

olur.

$$F_{-1}(x,qb,qs)=\frac{(1-b)(1-qb)}{s}$$

olduğu için

$$l_0(x,b,s,q)=2$$

ve n<0 için

$$l_{-n}(x,b,s,q)=(-1)^n\frac{q^{\binom{n+1}{2}}}{s^n}\left(\frac{b}{q^n};q\right)_n\left(\frac{b}{q^{n-1}};q\right)l_n\left(x,\frac{b}{q^n},\frac{s}{q^n},q\right)$$

olur.

Tanım 3.7.1: $L_n(x,b,s,q)$, (q,b)-Lucas polinomları

$$L_0(x,b,s,q)=1-b \text{ ve } L_1(x,b,s,q)=x$$

başlangıç değerleri için

$$L_n(x,b,s,q) = xL_{n-1}(x,qb,qs,q) + \frac{qs}{(1-qb)(1-q^2b)} L_{n-2}(x,q^2b,q^2s,q)$$

ile tanımlanır (Cigler 2012).

Bu polinomlar (q,b) - Fibonacci polinomlarıyla bağlantılıdır.

Teorem 3.7.2:

$$L_n(x,b,s,q) = F_{n+1}(x,b,s,q) - \frac{q^{2n-1}sb}{(1-q^{n-1}b)(1-q^n b)} F_{n-1}(x,b,s,q)$$

olur (Cigler 2012).

Teorem 3.7.3: (q,b) - Lucas polinomları,

$$L_n(x,b,s,q) = x\,L_{n-1}(x,b,s,q) + \frac{q^{n-1}s}{(1-q^{n-2}b)(1-q^{n-1}b)} L_{n-2}(x,b,s,q)$$

indirgeme bağıntısını sağlar (Cigler 2012).

$b=-1$ ise (q,b) - Lucas polinomları çok ilginç özelliklere sahiptir. $b=-1$ için

$$L_n(x,-1,s,q) = F_{n+1}(x,-1,s,q) + \frac{q^{2n-1}s}{(1+q^{n-1})(1+q^n)} F_{n-1}(x,-1,s,q)$$

olur.

Teorem 3.7.4: $n>0$ için

$$L_n(x,-1,s,q)=\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor} q^{k^2} s^k x^{n-2k}\frac{[n]}{[n-k]}\begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}\frac{1}{(-q;q)_k(-q^{n-k};q)_k}$$

olur (Cigler 2012).

Tanım 3.7.5. $L_n(x,-1,s,q)$ polinomlarına genelleşen q -Lucas polinomları denir (Cigler 2012).

3.8. *q*-Chebyshev Polinomları

Tanım 3.8.1.

$$U_n(x,s,q)=F_{n+1}(x,-1,s,q)(-q;q)_n=\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor} q^{k^2}\begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}(1+q^{k+1})...(1+q^{n-k})s^k x^{n-2k}$$

polinomlarına ikinci tür q - Chebyshev polinomları denir(Cigler 2012).

Teorem 3.8.2. İkinci tür q - Chebyshev polinomları

$$U_0(x,s,q)=1 \text{ ve } U_1(x,s,q)=(1+q)x$$

Başlangıç değerleri ile

$$U_n(x,s,q)=(1+q^n)xU_{n-1}(x,s,q)+q^{n-1}sU_{n-2}(x,s,q)$$

bağıntısını sağlar (Cigler 2012).

$(U_n(x,s,q))_{n\geq 0}$ dizisinin ilk birkaç terimi;

$$1,(1+q)x,(1+q)(1+q^2)x^2+qs,(1+q)(1+q^2)(1+q^3)x^3+q(1+q)(1+q^2)sx,...$$

şeklindedir.

$U_n(x,-1,1) = U_n(x)$ ikinci tür klasik q- Chebyshev polinomudur.

Tanım 3.8.3. $n > 0$ ve $T_0(x,s,q) = 1$ için

$$T_n(x,s,q) = (-q;q)_{n-1} L_n(x,-1,s,q) = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} q^{k^2} \frac{[n]}{[n-k]} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix} \frac{(-q;q)_{n-1}}{(-q;q)_k (-q^{n-k};q)_k} s^k x^{n-2k}$$

(5.4)

polinomlarına birinci tür Chebyshev polinomu denir.

Teorem 3.8.4. $n \geq 2$ için $T_0(x,s,q) = 1,\ T_1(x,s,q) = x$ başlangıç değerleri için

birinci tür q-Chebyshev polinomları

$$T_n(x,s,q) = (1+q^{n-1})xT_{n-1}(x,s,q) + q^{n-1}sT_{n-2}(x,s,q)$$

indirgeme bağıntısını sağlar (Cigler 2012).

$\left(T_n\left(x,s,q\right)\right)_{n\geq 0}$ dizisinin ilk birkaç terimi;

$$1, x, (1+q)x^2 + qs, (1+q)(1+q^2)x^3 + q(1+q+q^2)sx,$$
$$(1+q)(1+q^2)(1+q^3)x^4 + q(1+q)(1+q^2)^2 sx^2 + q^4 s^2, \ldots,$$

şeklindedir.

$T_n(x) = T_n(x,-1,1)$ polinomu birinci tür klasik Chebyshev polinomudur.

Negatif indisler için

$$U_{-n-2}(x,s,q)=(-1)^n\left(\frac{q}{s}\right)^{n+1}U_n(x,s)\,\text{ve}\,T_{-n}(x,s,q)=\frac{(-1)^n}{s^n}T(x,s,q)$$

olur.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1.Determinant Temsili

Tanım 4.1.1. $j-i>1$ olduğunda $a_{ij}=0$ ise $A_n(a_{ij})$ nxn matrisine alt Hessenberg matrisi denir (Kaygısız *et al.* 2012). Yani; $n \times n$ tipindeki alt Hessenberg matrisi

$$A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

şeklindedir.

Teorem 4.1.2. Her $n \geq 1$ için $A_n = (a_{ij})$ nxn tipinde alt Hessenberg matrisi olsun ve $det(A_0) = 1$ olarak tanımlansın. Bu durumda,

$$det(A_1) = a_{11}$$

ve $n \geq 2$ için

$$\det A_n = a_{n,n}\det(A_{n-1}) + \sum_{r=1}^{n-1}\left[(-1)^{n-r} a_{n,r}\left(\prod_{j=r}^{n-1} a_{j,j+1}\det(A_{r-1})\right)\right]$$

olur (Cahill *et al.* 2002).

Teorem 4.1.3. $F_n(x,s,q)$ q- Fibonacci polinomu ve $A_n = (a_{ij})$ nxn tipinde alt Hessenberg matrisi

$$A_n = \begin{bmatrix} x & it(qs) & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ i & x & it(q^2s) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & i & x & it(q^3s) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & i & x & it(q^{n-1}s) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & i & x \end{bmatrix}_{n\times n}$$

ile tanımlansın. Bu durumda $i = \sqrt{-1}$ olduğunda

$$\det A_n = F_{n+1}(x,s,q)$$

olur.

İspat: $\det(A_n) = F_{n+1}(x,s,q)$ olduğunu ispatlamak için, n üzerinde tümevarımı kullanalım. Sonuç $n = 1$ için doğrudur. n ye eşit ve n den küçük bütün pozitif tamsayılar için doğru olduğunu kabul edelim. Yani

$$\det A_n = F_{n+1}(x,s,q)$$

olsun. Bu durumda

$$\det A_{n+1} = a_{n+1,n+1}\det A_n + \sum_{r=1}^{n}\left[(-1)^{n+1-r}a_{n+1,r}\left(\prod_{j=r}^{n}a_{j,j+1}\det(A_{r-1})\right)\right]$$

$$= x\det A_n + \sum_{r=1}^{n-1}\left[(-1)^{n+1-r}a_{n+1,r}\left(\prod_{j=r}^{n}a_{j,j+1}\det(A_{r-1})\right)\right] + \left[(-1)a_{n+1,n}a_{n,n+1}\det A_{n-1}\right]$$

$$= x\det(A_n) + [(-1)(i)(it(q^n s))\det A_{n-1}$$

$$= x\det(A_n) + t(q^n s)\det A_{n-1}$$

$$= xF_{n+1}(x,s,q) + t(q^n s)F_n(x,s,q)$$

$$= F_{n+2}(x,s,q)$$

olur ve sonuç tüm n tamsayıları için sağlanır.

Teorem 4.1.4.$B_n = (b_{ij})$ alt *Hessenberg* matrisi olsun,

$$B_n = \begin{bmatrix} x & -t(qs) & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x & -t(q^2 s) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & x & -t(q^3 s) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 1 & x & -t(q^{n-1}s) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & x \end{bmatrix}_{n\times n}$$

bu durumda

$$\det\ B_n = F_{n+1}(x,s,q)$$

olur.

İspat: $\det\ B_n = F_{n+1}(x,s,q)$ olduğunu ispatlamak için n üzerinde tümevarımı kullanalım. Sonuç hipotezle $n = 1$ için doğrudur. n ye eşit ve n den küçük tüm tamsayılar için doğru olduğunu kabul edelim yani;

$$\det\ B_n = F_{n+1}(x,s,q)$$

olsun. Bu durumda

$$\det B_{n+1} = b_{n+1,n+1}\det B_n + \sum_{r=1}^{n}\left[(-1)^{n+1-r} b_{n+1,r}\left(\prod_{j=r}^{n} b_{j,j+1}\det(B_{r-1})\right)\right]$$

$$= x det B_n + \sum_{r=1}^{n-1}\left[(-1)^{n+1-r} b_{n+1,r}\left(\prod_{j=r}^{n} b_{j,j+1}\det(B_{r-1})\right)\right] + \left[(-1) b_{n+1,n} b_{n,n+1} det B_{n-1}\right]$$

$$= x\det B_n + \left[(-1)(1)(-t(q^n s)\det B_{n-1}\right]$$

$$= x\det B_n + t(q^n s)\det B_{n-1}$$

$$= xF_{n+1}(x,s,q) + t(q^n s)F_n(x,s,q)$$

$$= F_{n+2}(x,s,q)$$

olur ve sonuç tüm n tamsayıları için doğrudur.

4.2. Permanent Temsili

Tanım 4.2.1. $A = (a_{ij})$ nxn tipinde bir matris olsun. Bu durumda A' nin permanenti S_n, n üzerindeki simetrik grubu gösterdiğinde

$$per(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

ile tanımlanır (Kaygısız *et al.* 2012).

Teorem 4.2.2. Her $n \geq 1$ için A_n nxn tipinde alt Hessenberg matrisi olsun ve $per\ A_0 = 1$ olarak tanımlansın. $per\ A_1 = a_{11}$ ve $n \geq 2$ için

$$per\ A_n = a_{n,n}\, per\ A_{n-1} + \sum_{r=1}^{n-1}\left[a_{n,r}\prod_{j=r}^{n-1} a_{j,j+1}\, per(A_{r-1})\right]$$

olur (Öcal *et al.*2005).

Teorem 4.2.3. C_n, nxn tipinde alt Hessenberg matrisi olsun.

$$C_n = \begin{bmatrix} x & -it(qs) & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ i & x & -it(q^2s) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & i & x & -it(q^3s) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & i & x & -it(q^{n-1}s) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & i & x \end{bmatrix}_{n\times n}$$

Bu durumda,

$$per\ C_n = F_{n+1}(x,s,q)$$

İspat: $per\ C_n = F_{n+1}(x,s,q)$ olduğunu ispatlamak için n üzerinde tümevarım kullanacağız. Sonuç $n=1$ için doğrudur. Şimdi n ye eşit ve n den küçük tamsayılar için doğru olduğunu kabul edelim yani;

$$\text{per}\ C_n = F_{n+1}(x,s,q)$$

olsun. Bu durumda

$$per\ C_{n+1} = c_{n+1,n+1} per\ C_n + \sum_{r=1}^{n} \left[c_{n+1,r} \prod_{j=r}^{n} c_{j,j+1} per(C_{r-1}) \right]$$

$$= xper(C_n) + \sum_{r=1}^{n-1} \left[c_{n+1,r} \prod_{j=r}^{n} c_{j,j+1} per(C_{r-1}) \right] + c_{n+1,n}\ c_{n,n+1} perC_{n-1}$$

$$= xperC_n + \left[(i)(-it(q^n s) \det C_{n-1} \right]$$

$$= xperC_n + t(q^n s) perC_{n-1}$$

$$= xF_{n+1}(x,s,q) + t(q^n s) F_n(x,s,q)$$

$$= F_{n+2}(x,s,q)$$

Sonuç tüm n tamsayıları için sağlanır.

5. SONUÇ

Yapılan bu çalışmada Fibonacci polinomlarının q karşılığı ile bu polinomların diğer polinomlarla onların q ve (q,b) karşılıkları arasındaki indirgeme bağlantılarının nasıl olduğu hakkında bilgi verilerek ve örnekler oluşturularak konunun daha iyi anlaşılması sağlanmaya çalışılmıştır. Ayrıca, uygun Hessenberg matrisi oluşturularak bu matrisin determinant ve permanantının $F_{n+1}(x,s,q)$ Fibonacci polinomunu verdiği görülmüştür.

KAYNAKLAR

Cahill N.D., D’Errico J.R., Narayan D.A., J.Y. Narayan, (2002). Fibonacci determinants, College Math. J. 33(3), 221-225.

Carlitz L., 1978. Fibonacci notes 4 Fibonacci Quart.13, 97-102.

Cigler J., 2003. q - Fibonaccipolynomials, FibonacciQuart. 41,31-40

Cigler J., 2003. A new class of q-Fibonacci polynomials Electr J.Comb 10R19

Cigler J., 2003. Some algebra aspects of Morse code sequences, Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science 6, 055-068

Cigler J., 2012. Some beautifal q-analogues of Fibonacci and Lucas polynomials, arXiv:1104.2699

Cigler J.A., 2012. Simple approach to q-Chebyshev polynomials, arxiv:1201,4703

Falcon, S. and Plaza, A., 2009. On k-Fibonacci sequences and polynomials and their derivaties. Chaos, Solitons&Fractals, 39, 1005-1019

Graham R.L., Knuth D.E., 1988. O.Patashnik. Concrete Mathematics. Reading Mass.: Addison-Wesley,

Ismail M. E. H. Prodinger, H.,Stanton D., 2000. “Schur’s Determinants and Partition Theorems.”Seminaire Lotharingien de Combinatore B44a http://www.mat.univie.ac.at/slc.

Kaygısız, K., Şahin, A., 2012. Generalized Bivariate Lucas p polynomial and Hesenber Matrices Journal of integer sequences, v.115.

Nalli Ayşe, Haukkanen Penti, 2009. On generalized Fibonacci and Lucas polynomials, Chaos, Solutions And Fractals, 423179-3186.

Öcal A.A., Tuğlu N. and Altınışık E., 2005. On the representation of k- generalized Fibonacci and Lucas Number. Apply. Math.Comput., 170584-596.

Salam Al-, Ismail W.A., M.E.H., 1983.Orthogonal Polynomials Associated with the Rogers-Ramanujan Continued Fraction. Pac. J. Math. 104, 269-83

Schur I.. 1973. “Ein Beitragzuradditiven Zahlen theorie undzur Theorie der Kettenbrüche”. In I. Schur, Gesammelte Abhandlungen 2:117-36 (Berlin Springer,).

ÖZGEÇMİŞ

1977 yılında Erzurum'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Erzurum'da tamamladı. 1998 yılında Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Matematik Bölümüne girmeye hak kazanarak 2002 yılında mezun oldu. 2012 de Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde yüksek lisans eğitimine başladı. Evli ve bir çocuk babasıdır.