FİBONACCİ POLİNOMLARININ VE p^2 MERTEBEDEN BAZI HALKALARIN FİBONACCİ DİZİLERİNİN PERİYOTLARI

Yasemin TAŞYURDU

Doktora Tezi
Matematik Ana Bilim Dalı
Doç. Dr. İnci GÜLTEKİN
2013

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

FİBONACCİ POLİNOMLARININ VE p^2 MERTEBEDEN BAZI HALKALARIN FİBONACCİ DİZİLERİNİN PERİYOTLARI

Yasemin TAŞYURDU

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

ERZURUM
2013

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAY FORMU

FİBONACCİ POLİNOMLARININ ve p^2 MERTEBEDEN BAZI HALKALARIN FİBONACCİ DİZİLERİNİN PERİYOTLARI

Doç. Dr. İnci GÜLTEKİN danışmanlığında, Yasemin TAŞYURDU tarafından hazırlanan bu çalışma 16/09/2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora tezi olarak **oybirliği** ile kabul edilmiştir.

Başkan	: Prof. Dr. Ramazan DİKİCİ	*İmza*	:
Üye	: Prof. Dr. Hüseyin AYDIN	*İmza*	:
Üye	: Prof. Dr. Erdal KARADUMAN	*İmza*	:
Üye	: Doç. Dr. Engin ÖZKAN	*İmza*	:
Üye	: Doç. Dr. İnci GÜLTEKİN	*İmza*	:

Yukarıdaki sonucu onaylıyorum

Prof. Dr. İhsan **EFEOĞLU**
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Doktora Tezi

FİBONACCİ POLİNOMLARININ VE p^2 MERTEBEDEN BAZI HALKALARIN FİBONACCİ DİZİLERİNİN PERİYOTLARI

Yasemin TAŞYURDU

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. İnci GÜLTEKİN

Bu çalışmada A_0 , A_1 p^2 mertebeden birimli halkanın keyfi elemanları, $F_0 = 0$ halkanın sıfır elemanı , $F_1 = 1$ halkanın birim elemanı ve $n \geq 0$ olmak üzere birimli halkalar için tanımlanan $F_{n+2} = A_1 F_{n+1} + A_0 F_n$ bağıntısı kullanılarak p^2 mertebeden bazı halkaların Fibonacci dizileri oluşturuldu. Bu dizilerin periyodik olduğu gösterildi ve periyotları elde edildi. Fibonacci polinomlarının her bir teriminin derecesi ve katsayısı m modülüne indirgeyerek elde edilen dizinin periyodik olduğu gösterildi. $Q = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi tarafından gerilen devirli grubun mertebesinin bu dizinin periyoduna eşit olduğu görüldü. Ayrıca p bir asal sayı olmak üzere p modülüne göre Fibonacci dizilerinin Wall sayıları ile Fibonacci polinomlarının dizilerinin periyotları karşılaştırıldı ve bu periyodun daima çift sayı olduğu gösterildi.

2013, 111 sayfa

Anahtar Kelimeler: Sonlu Halka, Fibonacci Dizisi, Period, Fibonacci Polinomları

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

PERIODS OF FIBONACCI SEQUENCES OF FIBONACCI POLYNOMIALS AND OF SOME RINGS OF ORDER p^2

Yasemin TAŞYURDU

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. İnci GÜLTEKİN

In this study, we obtain the Fibonacci sequences of some rings of order p^2 by using recurrence $F_{n+2} = A_1F_{n+1} + A_0F_n$ defined on the ring with identity, where $F_0 = 0$, the zero of the ring, $F_1 = 1$, the identity of the ring, $n \geq 0$ and A_0, A_1 are arbitrary elements of the ring with identity of order p^2. It was shown that these sequences are periodic and their periods are obtained. It was shown that sequence obtained by reducing modulo m coefficient and exponent of each term of Fibonacci polynomials is periodic. It was seen that order of cylic group generated with $Q = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ matrix is equal to period of these sequences. Also, p is prime, Wall numbers of Fibonacci sequences according to modulo p are compared with the periods of sequences of Fibonacci polynomials and it was shown that this period always was even number.

2013, 111 pages

Keywords: Finite Ring, Fibonacci Sequence, Period, Fibonacci Polynomials,

TEŞEKKÜR

Doktora tezi olarak sunduğum bu çalışma Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde yapılmıştır.

Bu çalışmada bana her türlü kolaylığı sağlayan ve desteklerini esirgemeyen çok değerli hocam Sayın Doç. Dr. İnci GÜLTEKİN'e en içten dileklerimle teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Matematik Bölümü'nde gerekli ilgiyi ve yardımı esirgemeyen başta Bölüm Başkanı Sayın Prof. Dr. Abdullah MAĞDEN olmak üzere anabilim dalımızın değerli öğretim üyeleri Sayın Prof. Dr. Hüseyin AYDIN'a, Sayın Prof. Dr. Erdal KARADUMAN'a, Sayın Prof. Dr. Ramazan DİKİCİ'ye, Sayın Doç. Dr. Engin ÖZKAN'a, Sayın Doç. Dr. Nurullah ANKARALIOĞLU'na ve Matematik Bölümünün diğer tüm öğretim elemanlarına;

Çalışmalarım boyunca kendilerinden görmüş olduğum destek ve güvenden dolayı aileme, sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Doktora eğitimim boyunca "Yurt İçi Doktora Burs Programı" ile tarafıma vermiş olduğu maddi destekten dolayı TÜBİTAK'a teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Yasemin TAŞYURDU
Ağustos 2013

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar
G	Grup
$\|G\|$	G grubunun mertebesi
G/N	Bölüm grubu
$H \leq G$	Alt grup
$N \triangleleft G$	Normal alt grup
1	Birim eleman
$\langle X\|R \rangle$	Grup temsili
R	Halka
$Kar(R)$	R halkasının karakteristiği
F	Cisim
$k(m)$	Wall sayısı
F_n	n. Fibonacci sayısı
$f_n^{(k)}$	k −basamak Fibonacci dizisinin n elemanı
$f(k,m)$	$f_n^{(k)}$ nin m modülüne göre değeri
$F_k(G;X)$	X kümesi üzerinde G nin k −nacci dizisi
$P_k(G;X)$	X kümesi üzerinde G nin k −nacci dizisinin periyodu
$F_n(x)$	n. Fibonacci polinomu
$F_n(x)^m$	m modülüne göre n. Fibonacci polinomu
$Q^n(x)$	Fibonacci polinomu matrisi
$hF_n(x)^m$	$\{F_n(x)^m\}$ dizisinin periyodu

ÇİZELGELER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Cebir ve birçok alanda uygulaması olan Fibonacci dizilerinin kaşifi ve Fibonacci ismi ile tanınan Leonarda Pisa $(1170-1250)$ $13.$ yüzyılda yaşamış İtalyan matematikçidir. 1202 yılında yazdığı Liber Abaci (Hesap Kitabı) adlı en ünlü eseri ile Hindu-Arabic sayısal sistemini Batı Avrupa'ya tanıttı. $19.$ yüzyılda Edward Lucas bu eserde gördüğü bir problemdeki $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...$ dizisinin her bir terimine Fibonacci sayısı ve diziye Fibonacci dizisi adını verdi.

Fibonacci sayılarının özellikleri uzun yıllardır incelenmektedir. Bu sayılar $n \geq 2$ olmak üzere $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ için

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

ile formülleştirildi (Vorobyov 1976; Vajda 1989).

Fibonacci dizisi ve onun bağlantılı olduğu yüksek mertebeli diziler (tribonacci, quatranacci, k-nacci) genellikle tamsayılar dizisi olarak gösterilir.

Fibonacci dizileri gruplarda ilk olarak 1960 da Wall tarafından $\mathbb{Z}_m$ devirli gruplarda çalışıldı (Wall 1960). Bu çalışma sunulduktan sonra Fibonacci dizileri diğer matematikçiler tarafından farklı yönlerde geliştirildi. 1968 yılında $\mathbb{Z}_m$ rezidü sistemini içeren m modüllü tamsayıların Fibonacci dizisi belirlendi (Shah 1968). 1986 yılında Fibonacci dizileri sonlu abelyen gruplara genişletildi ve devirli gruplarda (C_n) kullanıldı (Wilcox 1986). Dihedral gruptaki k-nacci dizilerinin periyodlarının $2k+2$ ye eşit olduğu Knox tarafından gösterildi (Knox 1990).

p-gruplarda Fibonacci uzunluğu birçok matematikçi tarafından incelendi. 2-adım Fibonacci dizisinin uzunluğunun, exponenti asal ve nilpotent sınıfı 4 olan sonlu nilpotent gruplardaki 2-adım Fibonacci dizisinin uzunluğuna eşit olduğu gösterildi (Aydın and Smith 1994). Bu teori exponenti 2 ve nilpotent sınıfı 2 olan sonlu nilpotent gruplardaki 3-adım Fibonacci dizilerine genelleştirildi (Dikici and Smith 1995, 1997). Daha sonra p asal olmak üzere exponenti p ve nilpotent sınıfı 2 olan gruplardaki 2-basamak genel Fibonacci dizilerinin peryotları ile bilinen 2-basamak genel Fibonacci dizilerinin peryotlarının eşit olduğu gösterildi (Aydın and Dikici 1998). Ayrıca p asal, $2 < p \leq 2927$ ve $k(p)$ genel 2-adım Fibonacci dizisinin periyodu olmak üzere exponenti p asal ve nilpotent sınıfı 5 olan sonlu nilpotent gruplardaki 2-adım Fibonacci dizisinin periyodunun $pk(p)$ olduğu gösterildi (Karaduman and Yavuz 2003). Bu teori önce exponenti p asal ve nilpotent sınıfı 4 olan sonlu nilpotent gruplardaki 2-adım Fibonacci dizileri için genelleştirildi (Karaduman and Aydın 2003a). Daha sonra exponenti p asal ve nilpotent sınıfı n olan sonlu nilpotent gruplardaki 2-adım Fibonacci dizileri için genelleştirildi (Karaduman and Aydın 2003b). Son olarak exponenti p asal ve nilpotent sınıfı 4 olan bir nilpotent gruptaki 3-adım genel Fibonacci dizileri oluşturuldu (Özkan 2003).

Belli grupların Fibonacci uzunluğu son yıllarda matematikçiler tarafından ele alındı (Campbell *et al.* 2004a; 2004b Campbell and Campbell 2005a; 2005b; Campbell *et al.* 2006; Karaduman and Aydın 2006). Fibonacci sayıları, dizileri ve uzunlukları ile ilgili birçok çalışma yapıldı (Doostie and Hashemi 2005, 2006). 2007 yılında k-basamak Fibonacci dizileri için Wall sayıları incelendi (Lü and Wang 2007).

p asal sayı olmak üzere p^2 mertebeden halkaların sınıfı üzerine çalışmalar yapıldı (Fine 1993). $Mat(\mathbb{Z})$ ile $Mat(\mathbb{Z}/\mathbb{N}\mathbb{Z})$ matris halkalarının en kısa temsilleri 2007 yılında yapılan çalışma ile verildi (Petrenko and Sidki 2007).

Keyfi bir halka üzerinden genelleştirilmiş Fibonacci dizisinin tanımı verildi (Decarli 1970). R, özdeş elemanlı bir halka olmak üzere R nin elemanlarından oluşan dizi $\{M_n\}$ olduğunda M_0, M_1, A_0, ve A_1 R nin keyfi elemanları olmak üzere $\{M_n\}$ dizisinin elemanları sırasıyla

$$M_{n+2} = A_1 M_{n+1} + A_0 M_n \qquad n \geq 0 \qquad (1.1)$$

ile tanımlandı (Decarli 1970). R halkası tamsayılar kümesi olmak üzere (1.1)'in özel durumları ele alındı (Buschman 1963; Horadam 1961; Vorobyov 1963). Wyler ise birimli, değişmeli özel bir halka üzerinde (1.1) dizisini çalıştı (Wyler 1965).

Mertebesi p^2 olan birimli halkaların Fibonacci dizileri oluşturuldu ve periyotları hesaplandı (Taşyurdu and Gültekin 2013).

Fibonacci polinomları ilk olarak 1883 yılında Belçikalı matematikçi E.Charles Catalan ve Alman matematikçi E.Jacobsthal tarafından çalışıldı. Catalan tarafından çalışılan Fibonacci polinomları daha sonra 1966 yılında M.N.S.Swamy tarafından geliştirildi. Ayrıca 1963 yılında P.F.Bryd tarafından Fibonacci tipi polinomların bir yenisi literature eklendi. P.F.Bryd tarafından tanımlanan polinom bugün Pell polinomu olarak adlandırılmaktadır. Fibonacci polinomu olarak kabul edilen polinom ise Catalan tarafından tanımlanmış olan polinomdur. Daha sonra tüm bu farklı tanımlamalar Fibonacci ve Lucas tipi polinomlar olarak adlandırıldı.

Fibonacci polinomlarının her bir teriminin derecesi ve katsayısı m modülüne göre indirgendiğinde elde edilen dizinin periyodik olduğu gösterildi. Ayrıca p asal sayı olmak üzere p modülüne göre Fibonacci dizilerinin Wall sayıları ile Fibonacci polinomlarının dizisinin periyodu karşılaştırıldı ve Q matrisi tarafından gerilen devirli grubun mertebesinin bu dizinin periyoduna eşit olduğu gösterildi (Gültekin and Taşyurdu 2013).

Son yıllarda Fibonacci sayıları, genelleştirilmiş Fibonacci dizileri ve Fibonacci polinomları üzerine çalışmalar yapılmaktadır.

Sunulan bu tezde p^2 mertebeden bazı halkalarda Fibonacci dizileri ve m modülüne göre Fibonacci polinomlarının dizilerinin periyodu incelendi. Bu amaçla kuramsal temeller adını alan ikinci bölümde temel kavramlar verildi.

Üçüncü bölüm dört başlık altında toplandı. İlk olarak p asal sayı olmak üzere mertebesi p^2 ve 4 tanesi birimli olan 11 halkanın temsili verildi. Ardından Fibonacci dizilerinin uygulamalarının yapılacağı $n \geq 2$ olmak üzere $\mathbb{Z}$ üzerinde 2 gerenli ve 3 bağıntılı $n \times n$ tipindeki $Mat(\mathbb{Z})$ ile $Mat(\mathbb{Z}/\mathbb{N}\mathbb{Z})$ matris halkalarının bilinen en kısa temsilleri verildi. İkinci olarak Fibonacci sayıları, Fibonacci dizileri ve $k(m)$ Wall sayısı tanımlanarak iki ve üç adımlı Fibonacci sayılarının özellikleri verildi. Bir grubun k-nacci dizileri ve periyodu ile ilgili mevcut bilgiler temel teoremlerle sunuldu. Üçüncü olarak keyfi bir halka üzerinden Fibonacci dizisini elde etmemizi sağlayan bağıntı ve onun özel bir hali verildi. Son olarak Fibonacci dizisindeki bağıntılar gibi tanımlanabilen Fibonacci polinomunun tanımı ve bazı özellikleri verildi.

Dördüncü bölümde ise ilk olarak keyfi halkalar için tanımlanmış bağıntı kullanılarak p^2 mertebeden bazı halkalarının Fibonacci dizileri oluşturuldu. Bu dizilerin periyodik olduğu gösterilip periyotları bulundu. Daha sonra birimli keyfi bir halka üzerinden elde edilmiş Fibonacci sayılarının bazı özellikleri elde edildi. Son olarak Fibonacci polinomlarının her bir teriminin derecesi ve katsayısı m modülüne göre indirgenerek elde edilen dizinin periyodik olduğu gösterildi. Ayrıca p bir asal sayı olmak üzere m modülüne göre Fibonacci dizilerinin Wall sayıları ile Fibonacci polinomlarının dizisinin periyodu karşılaştırıldı ve $Q = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi tarafından gerilen devirli grubun mertebesinin bu dizinin periyoduna eşit olduğu gösterildi.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Genel Kavramlar

Bu bölümde çalışmamız için temel teşkil eden kavramlar verilecektir.

Tanım 2.1.1: A, boş olmayan bir küme olmak üzere

$$*: A \times A \to A$$

dönüşümüne A üzerinde ikili işlem denir (Taşçı 2007).

Tanım 2.1.2: Boş kümeden farklı bir küme üzerinde bir veya daha fazla ikili işlem tanımlanmış ise bu ikili işlemlerle birlikte bu kümeye bir cebirsel yapı denir. A kümesi üzerinde bir $" * "$ işlemi tanımlanmışsa bu cebirsel yapı $(A,*)$ ile gösterilir (Çallıalp 2001).

Tanım 2.1.3: G, boş olmayan bir küme ve G üzerinde bir $" * "$ ikili işlemi tanımlı olsun. Eğer

i. $" * "$ işlemi birleşme özelliğini sağlarsa; yani her

$$a * (b * c) = (a * b) * c$$

ise,

ii. Her $a \in G$ için

$$a * e = e * a = a$$

olacak biçimde bir $e \in G$ varsa,

iii. Her $a \in G$ için

$$a * a' = a' * a = e$$

olacak biçimde bir $a' \in G$ varsa o zaman $(G,*)$ cebirsel yapısına bir grup denir (Taşçı 2007).

Tanım 2.1.4: $(G,*)$ bir grup olsun. Her $a, b \in G$ için

$$a * b = b * a$$

oluyorsa $(G,*)$ grubuna değişmeli (abel ya da komütatif) grup denir (Taşçı 2007).

Tanım 2.1.5: $(G,*)$ bir grup olsun. Eğer G kümesi sonlu ise o zaman bu gruba sonlu grup denir. Eğer G kümesi sonlu değilse bu durumda $(G,*)$ grubuna sonsuz grup denir. Sonlu bir grubun elemanlarının sayısına grubun mertebesi ya da kardinalitesi denir. $o(G)$ veya $|G|$ ile gösterilir (Taşçı 2007).

Tanım 2.1.6: $(G,*)$ bir grup ve H, G nin boş kümeden farklı bir alt kümesi olsun. Eğer H, G grubundaki işleme göre bir grup teşkil ederse $(H,*)$ cebirsel yapısına $(G,*)$ grubunun bir alt grubu denir ve $H \leq G$ şeklinde gösterilir (Taşçı 2007).

Aşağıdaki tanım ve teoremlerde ikili işlem için çarpımsal gösterim kullanılacaktır.

Tanım 2.1.7: $(G,\cdot)$ bir grup olmak üzere $H = \{a^n : n \in Z\}$ alt grubuna G nin a elemanı tarafından üretilen alt grubu denir ve $\langle a \rangle$ ile gösterilir. Yani

$$\langle a \rangle = \{a^n : n \in Z\} = H$$

dır. Buradan hareketle devirli grup şu şekilde de tanımlanabilir: G bir grup olmak üzere G de $G = \{a^n : n \in Z\}$ olacak şekilde bir a elemanı varsa o zaman G grubuna devirli grup, a elemanına da G nin üreteci denir. $G = \langle a \rangle$ şeklinde gösterilir (Taşçı 2007).

Tanım 2.1.8: $(G,\cdot)$ bir grup ve H, G'nin alt grubu olsun. $g \in G$ olmak üzere

$$Hg = \{hg : h \in H\}$$

kümesine H nin sağ yan kümesi

$$gH = \{gh : h \in H\}$$

kümesine H nin sol yan kümesi denir. (Toplam notasyonunda sırasıyla $H + g = \{h + g : h \in H\}$ ve $g + H = \{g + h : h \in H\}$ olur.) Tüm sağ veya sol yan kümelerin sınıfı G/H ile gösterilir. Yani

$$G/H = \{gH : g \in G\} = \{Hg : g \in G\}$$

dir (Bayraktar 2006).

Teorem 2.1.9: $(G,\cdot)$ bir grup ve $N \leq G$ olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

i. Her $a \in G$, her $n \in N$ için $ana^{-1} \in N$ dir.

ii. Her $a \in G$ için $aNa \subset N$ dir.

iii. Her $a \in G$ için $aNa = N$ dir.

iv. Her $a \in G$ için $aN = Na$ dır (Taşçı 2007).

Tanım 2.1.10: Teorem 2.1.9 da denk koşullarından birini sağlayan G nin bir N alt grubuna normal alt grup denir ve $N \lhd G$ ile gösterilir (Taşçı 2007).

Tanım 2.1.11: $(G,\cdot)$ bir grup ve S de G nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. S yi ihtiva eden G nin bütün normal alt grupların arakesitine S nin normal kapanışı denir ve $\bar{S}$ ile gösterilir (Çallıalp 2001).

Tanım 2.1.12: N, $(G,\cdot)$ grubunun bir normal alt grubu ise G/N kümesi

$$(Na)\cdot(Nb)=Nab \text{ ya da } (aN)\cdot(bN)=abN$$

olarak tarif edilen " $\cdot$ " işlemine göre bir grup teşkil eder. Bu gruba G nin N ye göre bölüm grubu veya faktör grubu denir (Bayraktar 2006).

Tanım 2.1.13: $(G,*)$ ve (G',o) iki grup $f\colon G\to G'$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x,y\in G$ için

$$f(x*y)=f(x)of(y)$$

şartı sağlanıyorsa f ye G den G' ne bir grup homomorfizmi ya da kısaca homomorfizm denir (Taşçı 2007).

Tanım 2.1.14: $(G,*)$, (G',o) iki grup ve $f\colon G\to G'$ bir dönüşüm olsun. Eğer

i. f birebir ve örten

ii. Her $x,y\in G$ için $f(x*y)=f(x)of(y)$

şartları sağlanıyorsa f ye G ile G' arasında bir izomorfizm denir (Taşçı 2007).

Tanım 2.1.15: $R\neq\emptyset$ kümesi üzerinde tanımlı iki ikili işlem " $+$ " ve " $\cdot$ " olsun. Aşağıdaki aksiyomları sağlayan $(R,+,\cdot)$ cebirsel yapısına bir halka denir.

i. $(R,+)$, bir değişmeli gruptur.

ii. " $\cdot$ " işleminin R de birleşme özelliği vardır.

iii. " $\cdot$ " işleminin " $+$ " işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özellikleri vardır yani her $a,b,c\in R$ için

$$a(b+c)=ab+ac \text{ ve } (a+b)c=ac+bc$$

dir (Taşçı 2007).

Tanım 2.1.16: $(R,+,\cdot)$ bir halka olsun.

i. Her $a,b \in R$ için

$$ab = ba$$

oluyorsa R ye değişmeli halka denir.

ii. $(R,\cdot)$ birimli ise $(R,+,\cdot)$ halkasına birimli halka ve $(R,\cdot)$ nin birim elemanına R halkasının birim elemanı denir. R halkasının birimi "1_R" veya sadece "1" ile gösterilir.

iii. $(R,+,\cdot)$ halkasının " $+$ " işlemine göre birim elemanına halkanın sıfır elemanı denir ve $(R,+,\cdot)$ halkasının sıfır elemanı "0_R" veya "0" ile gösterilir (Çallıalp 2001).

Bu çalışma boyunca birimli bir halkanın birim elemanı 1 ile gösterilecektir.

Tanım 2.1.17: $(R,+,\cdot)$ bir halka olmak üzere her $a \in R$ için $na = 0$ olacak şekilde bir n pozitif tamsayısı varsa bu özelliği sağlayan en küçük pozitif n tamsayına halkanın karakteristiği denir. Eğer böyle bir pozitif tamsayı yoksa R halkanın karakteristiği sıfırdır denir. Halkanın karakteristiği kısaca $Kar(R)$ ile gösterilir (Taşçı 2007).

Tanım 2.1.18: $(R,+,\cdot)$ bir halka ve $x \in R$ olsun. x in R de çarpma işlemine göre tersi varsa x e R de aritmetik birim denir. Aksi halde x e, R de aritmetik birim değildir denir (Taşçı 2007).

Tanım 2.1.19: $(R,+,\cdot)$ bir halka, H kümesi R nin boş kümeden farklı bir alt kümesi olsun. Eğer $(H,+,\cdot)$ cebirsel yapısı bir halka ise bu halkaya $(R,+,\cdot)$ halkasının bir alt halkası denir (Taşçı 2007).

Tanım 2.1.20: $(R,+,\cdot)$ bir halka ve I, R halkasının boş kümeden farklı bir alt kümesi olsun. I, aşağıdaki şartları sağlarsa, I ya ideal denir.

i. Her $x, y \in I$ için $x - y \in I$

ii. Her $x \in I$ ve her $r \in R$ için $rx \in I$

iii. Her $x \in I$ ve her $r \in R$ için $xr \in I$

Özellikle i. ve ii. şartlar sağlanırsa *I* ya sol ideal, i. ve iii. şartlar sağlanırsa *I* ya sağ ideal denir (Taşçı 2007).

Tanım 2.1.21: $(R,+,\cdot)$, bir halka ve I, R nin bir ideali olsun. Bu durumda R/I kümesi, aşağıdaki toplama ve çarpma işlemleri altında bir halkadır. Bu halkaya R nin I ile bölüm halkası denir.

$$(a+I)+(b+I)=(a+b)+I$$
$$(a+I)(b+I)=(ab)+I$$

(Taşçı 2007).

Tanım 2.1.22: $(R,+,\cdot)$ bir halka olsun. Katsayıları *R* de olan tüm $f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ polinomların kümesi $R[x]$ ile gösterilir ve $R[x]$ kümesi sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanan toplama ve çarpma işlemleriyle birlikte bir halkadır. Bu halkaya *R* halkası üzerinde polinomlar halkası denir .

$f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $f(x)=\sum_{i=0}^{m} b_i x^i$ olmak üzere $f(x), g(x) \in R[x]$ olsun.

i. $f(x)+g(x)\sum_{i=0}^{max\{m,n\}}(a_i+b_i)x^i$

ii. $f(x).\,g(x)=\sum_{i=0}^{m+n} c_i x^i$, $c_i=\sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}$

(Taşçı 2007).

Tanım 2.1.23: Birimli ve değişmeli bir halkanın sıfırdan farklı her elemanı aritmetik birim ise o zaman bu halkaya cisim denir ve F ile gösterilir (Bayraktar 2006).

Tanım 2.1.24: $(F,+,.)$ bir cisim olsun. F nin boş kümeden farklı bir S alt kümesi $(F,+,.)$ deki işlemlere göre bir cisim olursa S ye F nin bir alt cismi denir (Taşçı 2007).

Tanım 2.1.25: $0 < x < n$ için $x^2 \equiv q(mod\ n)$ olacak şekilde bir x tamsayısı varsa q sayısına n modülüne göre kuadratik rezidü aksi takdirde q ya n modülüne göre kuadratik olmayan rezidü denir.

Örneğin 10 modülüne göre

$$1^2 \equiv 1(mod\ 10)$$
$$2^2 \equiv 4(mod\ 10)$$
$$3^2 \equiv 9(mod\ 10)$$
$$4^2 \equiv 6(mod\ 10)$$
$$5^2 \equiv 5(mod\ 10)$$
$$6^2 \equiv 6(mod\ 10)$$
$$7^2 \equiv 9(mod\ 10)$$
$$8^2 \equiv 4(mod\ 10)$$
$$9^2 \equiv 1(mod\ 10)$$

olup 10 modülüne göre kuadratik rezidü kümesi $\{1,4,5,6,9\}$ ve 10 modülüne göre kuadratik olmayan rezidü kümesi $\{2,3,7,8\}$dir.

Tanım 2.1.26: $(G,\cdot)$ bir grup ve S de G nin bir alt kümesi olsun. Eğer G nin her elemanı S nin elemanlarının ve bu elemanların terslerinin sonlu bir çarpımı olarak yazılabiliyorsa S kümesi, G grubunun gerenlerinin bir kümesi olarak adlandırılır (Dummit and Foote 2004).

Tanım 2.1.27: Bir gruptaki gerenlerin sağladıkları denklemlere bu gruptaki bağıntılar denir (Dummit and Foote 2004).

Tanım 2.1.28: G bir grup ve S de G nin bir alt kümesi olsun. $s_1, s_2, \dots, s_n$ S nin elemanları ve her bir $\alpha = \pm 1$ olmak üzere S deki bir kelime ${s_1}^{\alpha_1}, {s_2}^{\alpha_2}, \dots, {s_n}^{\alpha_n}$ şeklinde ifade edilir. S deki her bir kelime, G nin bir elemanını temsil eder.

Tanım 2.1.29: G bir grup ve S de G nin bir alt kümesi olsun. Eğer G nin herhangi bir elemanı S nin sonlu sayıdaki elemanlarının ve bu elemanların terslerinin bir çarpımı olarak tek türlü yazılabiliyorsa G grubuna S kümesi üzerinde serbesttir denir.

Tanım 2.1.30: F bir grup ve S de F nin bir alt kümesi olsun. Herhangi bir $\varphi: S \to G$ dönüşümü için bir tek $\varphi': F \to G$ homomorfizmi varsa F'ye X üzerinde serbesttir denir.

Burada φ', φ'nün genişlemesidir. Yani, her $x \in X$ için $\varphi'(x) = \varphi(x)$ biçimindedir.

Tanım 2.1.31: X bir küme olsun. $F = F(X)$ ile X üzerinde serbest grubu, R de F nin bir alt kümesini göstersin. $N = \bar{R}$ ile de R nin F deki normal kapanışını gösterelim ve $G = F/N$ olsun. Bu taktirde $G = \langle X | R \rangle$ ye G nin bir temsili denir.

Bir $\langle X | R \rangle$ temsilinde X kümesine gerenlerin kümesi ve R kümesine de bağıntıların kümesi denir. Hem X hem de R sonlu kümeler olmak üzere eğer bir G grubu $\langle X | R \rangle$ şeklinde temsil edilirse bu gruba sonlu temsil edilmiş grup denir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Halkaların Temsilleri

Soyut Cebirde yapılan birçok çalışma sonlu grupların yapısını incelemek ve bu grupları sınıflandırmak yönündedir. Ancak çok azı sonlu halkalar ile ilgili yapılmıştır. Bu bölümde p asal sayı olmak üzere B. Fine tarafından çalışılmış mertebesi p^2 olan bütün sonlu halkaların sınıflandırılması verilecektir.

Tanım 3.1.1: $(R,+,\cdot)$ sonlu bir halka olmak üzere $(R,+)$ toplam grubu değişmeli sonlu bir gruptur. Dolayısıyla $(R,+)$ grubu devirli grupların direk çarpımıdır. Bu devirli gruplar sırasıyla $m_1, m_2, \dots, m_k$ ıncı mertebeden $g_1, g_2, \dots, g_k$ gerenlere sahip olduğunda halkanın yapısı $c_{ij}^t \in \mathbb{Z}_{m_t}$ olmak üzere

$$g_i g_j = \sum_{t=1}^{k} c_{ij}^t g_t$$

dir. Burada $g_i g_j$ çarpımlarının sayısı k^2 tane ve c_{ij}^t sabitlerinin sayısı ise k^3 tanedir (Fine 1993).

Grup teorisini kullanarak sonlu bir halkanın yapısını veren bir gösterim sunacağız. Sonlu bir R halkasının temsili, bağıntılar ile R toplamsal grubunun $g_1, g_2, \dots, g_k$ gerenlerinden oluşur. Bu bağıntılar iki tiptir;

i. $i = 1,2, \dots, k$ için

$$m_i g_i = 0$$

dır.

ii. $i = 1,2, \dots, k$, $j = 1,2, \dots, k,$ $t = 1,2, \dots, k$ ve $c_{ij}^t \in \mathbb{Z}_{m_t}$ olmak üzere

$$g_i g_j = \sum_{t=1}^{k} c_{ij}^t g_t$$

dir.

R halkası yukarıdaki bağıntılara sahipse temsili

$$R = \langle g_1, g_2, \dots, g_k \mid m_i g_i = 0, g_i g_j = \sum_{t=1}^{k} c_{ij}^t g_t \, , i = 1,2, \dots, k \rangle$$

şeklindedir (Fine 1993).

Örneğin 4. merteben sonlu $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ halkası için

$$\langle g_1, g_2 \mid 2g_1 = 2g_2 = 0, {g_1}^2 = 0, {g_2}^2 = g_2, g_1 g_2 = g_2 g_1 = g_1 \rangle$$

yazılır (Fine 1993). Gerçekten $\left(\mathbb{Z}_4, +\right) \cong \mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2$ olup

$$o(g_1) = m_1 = 2$$

$$o(g_2) = m_2 = 2$$

dir. Dolayısıyla $i = 1,2$ için

$$2g_1 = 0$$

$$2g_2 = 0$$

dır.

$k = 2$ olmak üzere $i = 1,2$, $j = 1,2$, $t = 1,2$ için $c_{ij}^{t} \in \mathbb{Z}_2$ olup

$$g_1 g_1 = \sum_{t=1}^{1} c_{11}^{t} g_t = c_{11}^{1} g_1$$

$$g_1 g_2 = \sum_{t=1}^{1} c_{12}^{t} g_t = c_{12}^{1} g_1$$

$$g_2 g_1 = \sum_{t=1}^{2} c_{21}^{t} g_t = c_{21}^{1} g_1 + c_{21}^{2} g_2$$

$$g_2 g_2 = \sum_{t=1}^{2} c_{22}^{t} g_t = c_{22}^{1} g_1 + c_{22}^{2} g_2$$

yazılır. $(R, +, \cdot)$ bir halka olduğundan $(R, +)$ bir değişmeli gruptur. Grup olma şartları dikkate alınarak $g_1 g_2 = g_1$ için

$$g_2 g_1 = g_1$$

$$g_2 g_2 = g_2$$

$$g_1 g_1 = g_1$$

elde edilir. Dolayısıyla $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ halkasının temsili

$$\langle g_1, g_2 \mid 2g_1 = 2g_2 = 0, {g_1}^2 = 0, {g_2}^2 = g_2, g_1 g_2 = g_2 g_1 = g_1 \rangle$$

şeklindedir.

Teorem 3.1.2: İzomorfizm farkıyla, C_m devirli toplamsal grubu ile $(R,+,\cdot)$ halkalarının sayısı m nin bölenlerinin sayısı ile verilir. Özellikle m nin her bir d böleni için g, C_m nin toplamsal bir gereni olmak üzere R_d halkası

$$R_d = \langle g \mid mg = 0, g^2 = dg \rangle$$

olur. Farklı d değerleri için bu halkalar izomorf değildir (Fine 1993).

3.1.1. p^2 Mertebeden halkalar

Fibonacci dizisinin uygulamasının yapılacağı p^2 mertebeden 11 tane halkanın temsili aşağıdaki teoremde verildi.

Teorem 3.1.1.1: p asal sayı olmak üzere mertebesi p^2 olan izomorfizm farkıyla 11 tane halka vardır. Bunlar aşağıdaki temsillerle verilir.

i. Birimli halkalar

$A = \langle a \mid p^2 a = 0, a^2 = a \rangle \cong \mathbb{Z}_{p^2}$

$B = \langle a, b \mid pa = pb = 0, a^2 = a, b^2 = b, ab = ba = 0 \rangle \cong \mathbb{Z}_p + \mathbb{Z}_p$

$C = \langle a, b \mid pa = pb = 0, a^2 = 0, b^2 = b, ab = a, ba = a \rangle$

$D,\ p^2$ mertebeden sonlu cisim olmak üzere

$$D = GF(p^2) = \begin{cases} \langle a, b \mid pa = pb = 0, a^2 = a, b^2 = ja, ab = b, ba = b \rangle \\ \qquad p \neq 2 \ için\ j,\quad \mathbb{Z}_p de\ kare\ değil \\ \langle a, b \mid 2a = 2b = 0, a^2 = a, b^2 = a + b, ab = b, ba = b \rangle \\ \qquad p = 2 \end{cases}$$

dir.

ii. Birimli olmayan halkalar

$E = \langle a \mid p^2 a = 0, a^2 = pa \rangle$

$F = \langle a \mid p^2 a = 0, a^2 = 0 \rangle \cong C_{p^2}(0)$

$G = \langle a, b \mid pa = pb = 0, a^2 = a, b^2 = b, ab = a, ba = b \rangle$

$H = \langle a, b \mid pa = pb = 0, a^2 = a, b^2 = b, ab = b, ba = a \rangle$

$I = \langle a, b \mid pa = pb = 0, a^2 = 0, b^2 = b, ab = ba = 0 \rangle \cong \mathbb{Z}_p + C_p(0)$

$J = \langle a, b \mid pa = pb = 0, a^2 = b, ab = 0 \rangle$

$K = \langle a, b \mid pa = pb = 0, a^2 = b^2 = 0 \rangle \cong C_p \times C_p(0)$

dir (Fine 1993).

$G(0)$, değişmeli G grubu için toplamsal G gruplu ve aşikar çarpımlı halkayı gösterir.

3.1.2. Matris halkaları

Bu bölümde $Mat_n(\mathbb{Z})$ ile $Mat_n(\mathbb{Z}/\mathbb{N}\mathbb{Z})$ matris halkalarının en kısa temsilleri verilecektir.

Teorem 3.1.2.1: $n \geq 2$ olmak üzere $\mathbb{Z}$ üzerinde 2 gerenli ve 3 bağıntılı $n \times n$ tipindeki matris halkaları

$$Mat_n(\mathbb{Z}) = \langle x, y \mid x^n = y^n = 0, xy + y^{n-1}x^{n-1} = 1 \rangle$$

temsiline sahiptir (Kassabov 2009).

Lemma 3.1.2.2: $m \geq l$ olacak şekilde negatif olmayan k, l, m tamsayıları için

$$x^k y^i x^m = \begin{cases} y^{i-k} x^k & , \quad l \geq k \\ x^{k+m-i} & , \quad l \leq k \end{cases}$$

ve

$$y^m x^i y^k = \begin{cases} y^m x^{i-k} & , \quad l \geq k \\ y^{k+m-i} & , \quad l \leq k \end{cases}$$

dir (Kassabov 2009).

Lemma 3.1.2.3: $0 \leq i, j < n$ olmak üzere toplamsal bir R halkası $y^i x^j$ elemanları tarafından gerilir (Kassabov 2009).

Tanım 3.1.2.4: $0 \leq i, j < n$ olmak üzere $a_{i,j}$ elemanı

$$a_{i,j} = y^i x^j - y^{i+1} x^{j+1}$$

ile gösterilir (Kassabov 2009).

Teorem 3.1.2.5: Herhangi $\mathbb{N}$ tamsayısı için $Mat_n(\mathbb{Z}/\mathbb{N}\mathbb{Z})$ matris halkası

$$Mat_n\big(\mathbb{Z}/\mathbb{N}\mathbb{Z}\big) = \big\langle x, y \,\big|\, x^n = y^n = 0, xy + \big(\mathbb{N} + 1\big) y^{n-1} x^{n-1} = 1 \big\rangle$$

ile temsil edilir (Kassabov 2009).

3.2. Fibonacci Sayıları ve Dizileri

19. yüzyıl sayı teorisyenlerinden Edvard Lucas, Leonarda Pisa'nın Liber Abaci adlı eserinde gördüğü bir problemdeki $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$ dizisine Fibonacci dizisi, bu dizinin terimlerine ise Fibonacci sayıları ismini verdi.

Fibonacci dizisindeki her bir terim alışılmış olarak bir alt indisle gösterilir. F_n, n. Fibonacci sayısı, $F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ olmak üzere Fibonacci sayıları, $n \geq 2$ ise

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

ve $n < 0$ ise

$$F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$$

bağıntısı ile tanımlanan $(F_n)_{-\infty}^{\infty}$ dizisinin elemanlarıdır. Yani Fibonacci dizisindeki her terim kendinden önceki iki terimin toplamıdır. Bu şekilde olan dizilere iç içe dizi denir. Fibonacci sayıları ile ilgili bilinen birçok sonuç vardır (Vorobyov 1976; Vajda 1989).

Fibonacci dizisinin terimlerini yazabilmek için yalnızca $n \geq 0$ için

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \tag{3.2.1}$$

bağıntısını kullanmak yetmez. Çünkü F_0 ve F_1 nin keyfi seçilmesi ile $(3.2.1)$ şartını sağlayan birçok farklı dizi oluşturulabilir. Örnek olarak

$$7, 2, 9, 11, 20, 31, 51, \ldots$$

$$-3, -5, -8, -13, -21, \ldots$$

$$1, 8, 9, 17, 26, 43, 69, \ldots$$

yazılabilir.

Dolayısıyla $(3.2.1)$ $F_0,\ F_1,\ F_2, \dots, F_n, \dots$ dizisini bir tek şekilde belirlemek için yeterli değildir. Bu nedenle $(3.2.1)$ bağıntısına başka şartlar ilave edilmesi gerekir. O halde $(3.2.1)$ bağıntısı kullanılarak dizinin bütün terimlerinin hesaplanabilmesi için dizinin ilk iki teriminin bilinmesi gerekir.

F_2, F_1 ve F_0 sayılarının toplamı olarak yeniden temsil edilebilir. F_2 için belirlenen değere F_1 ilave ederek F_3 değeri, F_3 için belirlenen değere F_2 ilave ederek F_4 değeri, F_4 için belirlenen değere F_3 ilave ederek F_5 değeri ve bu şekilde devam edilerek keyfi olarak büyük indisli terimler hesaplanabilir.

Yukarıda bahsedilen Fibonacci sayılarına iki adımlı Fibonacci sayıları denir. Şimdi bu sayıların bazı özellikleri aşağıdaki teoremler ile verilecektir.

Teorem 3.2.1:

1. $F_{2n} = F_n^2 + 2F_{n-1}F_n$

2. $F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2$

3. $F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2$

4. $F_{n+2}F_{n-1} = F_{n+1}^2 - F_n^2$

5. $2(F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2) = F_{n+3}^2 + F_n^2$

6. $F_{2k+1}F_{2n+1} = F_{(n+k+1)}^2 + F_{n-k}^2$

7. $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$

8. $(-1)^{n-r}F_r^2 = F_n^2 - F_{n+r}F_{n-r}$

9. $(-1)^m F_{n-m} = F_n F_{m+1} + F_m F_{n+1}$

10. $F_{n+m} = F_{n+1} F_{m+1} - F_{n-1} F_{m-1}$

11. $F_n = F_m F_{n+1-m} + F_{m-1} F_{n-m}$

12. $F_{n+m} = F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n$

13. $F_n F_{n+1} = F_{n-1} F_{n+2} + (-1)^{n-1}$

(Vajda 1989; Renault 1996).

Teorem 3.2.2: $F_0, F_1, F_2, \dots, F_n$ Fibonacci dizisi için

i. $F_0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$

ii. $F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$

iii. $F_0 + F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$

iv. $F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + \cdots + (-1)^{n+1} F_n = (-1)^{n+1} F_{n-1} + 1$

yazılır (Gültekin 1997).

$F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1$ için

$$F_3 = F_2 + F_1 + F_0, F_4 = F_3 + F_2 + F_1, \dots, F_n = F_{n-1} + F_{n-2} + F_{n-3}$$

şeklindeki sayılara ise 3-adımlı Fibonacci sayıları denir.

Şimdi 3-adımlı Fibonacci sayılarının bazı özelliklerini içeren teorem verilecektir.

Teorem 3.2.3. $F_0, F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$ üç adımlı Fibonacci dizisi için

i. $F_0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_n = \frac{(F_{n+3} - F_{n+1} - 1)}{2}$

ii. $F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} = \frac{(F_{2n+2} - F_{2n+1})}{2}$

iii. $F_0 + F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = \frac{(F_{2n+1} + F_{2n} - 1)}{2}$

iv. $F_0^2 + F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$

yazılır (Gültekin 1997).

3.2.1. *k*-nacci dizileri

Tanım 3.2.1.1: $j \leq k$ olsun. Sonlu bir G grubundaki k-nacci dizisi, verilen bir başlangıç kümesi $x_0, x_1, \dots, x_{j-1}$ için her bir elemanı

$$x_n = \begin{cases} x_0 x_1 \dots x_{n-1} & , \quad j \leq n < k \\ x_{n-k} x_{n-k+1} \dots x_{n-1} & , \quad n \geq k \end{cases}$$

ile tanımlanan $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ grup elemanlarının bir dizisidir. $x_0, x_1, \dots, x_{j-1}$ ile gerilen bir G grubunun k-nacci dizisi $F_k(G\,;\, x_0, x_1, \dots, x_{j-1})$ ile gösterilir (Campbell 2003).

Tanım 3.2.1.2: Sonlu bir G grubunun her elemanı dizide görülecek şekilde bir k-nacci dizisi varsa bu sonlu G grubuna k-nacci dizilendirilebilir denir (Knox 1990).

Örneğin; $\mathbb{Z}_4 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$ için $(\mathbb{Z}_4, +)$ grubunun 3-nacci dizisi

$$\overline{0}, \overline{1}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3},\ \overline{1}, \overline{0}, \overline{1}, \ldots$$

şeklinde olup grubun her elemanı dizide mevcuttur. Dolayısıyla $(\mathbb{Z}_4, +)$ grubu 3-nacci dizilendirilebilirdir.

Tanım 3.2.1.3: Belli bir noktadan sonra grup elemanlarının dizisi sabit bir alt dizinin tekrarından oluşuyorsa grup elemanlarının dizisine periyodik denir (Knox 1990).

Tanım 3.2.1.4: Periyodik dizide tekrarlanan alt dizideki elemanların sayısına dizinin periyodu denir (Knox 1990).

Örneğin;

$$a, b, c, d, e, b, c, d, e, \ldots$$

dizisi başlangıç elemanı olan a elemanından sonra periyodiktir ve periyodu 4 tür.

Tanım 3.2.1.5: Diziyi, ilk k elemanı tekrarlanan bir alt dizi oluşturuyorsa diziye k periyotlu basit periyodik dizi denir.

Örneğin;

$$a, b, c, d, e, f, a\ b, c, d, e, f, \ldots$$

dizisi 5 periyodu ile basit periyodiktir (Knox 1990).

3.3. Fibonacci Uzunluğu

$A=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ olmak üzere sonlu olarak gerilmiş bir $G=\langle A\rangle$ grubu için Fibonacci orbiti ve Fibonacci uzunluğu aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 3.3.1: G, $A=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ geren kümesi ile sonlu olarak gerilmiş bir grup olsun. A, $(a_1,a_2,\dots,a_n)$ sıralı n-li olarak yazıldığında A geren kümesine bağlı G nin Fibonacci orbiti

$$x_0=a_1, x_1=a_2, \dots, x_{n-1}=a_n$$

ve

$$x_{n+i}=\prod_{j=1}^{n} x_{i+j+1} \qquad\qquad i\geq 0$$

dizisidir ve $F_A(G)$ ile gösterilir (Campbell *et al.* 2006).

$$\{x_0,x_1,\dots,x_{j-1},x_j=x_0x_1\dots x_{j-1},x_{j+1}=x_0x_1\dots x_{j-1}x_j,\dots,x_{k-1}=x_0x_1\dots x_{k-1}x_{k-2}\}$$

geren kümesine bağlı G nin Fibonacci orbiti $F_k(G\,;\,x_0,x_1,\dots,x_{j-1})$ dir. Örneğin $F_4(G\,;\,x_0,x_1)$ için dizi

$$x_0,x_1,x_2=x_0x_1,x_3=x_0x_1x_2=x_0x_1x_0x_1,x_4=x_0x_1x_2x_3,x_5=x_1x_2x_3x_4,\dots$$

olur. Bu ise $\{x_0,x_1,x_2,x_3\}$ kümesine bağlı G nin Fibonacci orbitidir.

$F_k(G\,;\,x_0,x_1,\dots,x_{j-1})$ k-nacci dizisinin periyodu $P_k(G\,;\,x_0,x_1,\dots,x_{j-1})$ ile gösterilir.

Tanım 3.3.2: A geren kümesi ve G bir grup olmak üzere $F_A(G)$ periyodik ise dizinin periyodunun minimum uzunluğuna A geren kümesine bağlı G nin Fibonacci uzunluğu denir ve $LEN_A(G)$ olarak yazılır.

$F_A(G)$ periyodik değilse G , A geren kümesine bağlı sonsuz Fibonacci uzunluğuna sahiptir.

Örnek 3.3.3: $\langle a,b\,;\ a^2,b^n,(ab)^2\rangle$ temsili ile tanımlanmış $2n.$ mertebeden olan D_n dihedral grupların Fibonacci uzunluğu 6 dır. Gerçekten

$a,$
$b,$
$ab,$
$bab = a,$
$aba = b^{-1},$
$ab^{-1},$
$b^{-1}ab^{-1} = a,$
$ab^{-1}a = b,$
...

olup

$$\{a, b, ab, b^{-1}, ab^{-1}, a, b, \dots\}$$

elde edilir. Dolayısıyla $LEN_{(a,b)}(D_n) = 6$ dır.

Teorem 3.3.4: G, $\langle X|R\rangle$ temsili ile tanımlanmış bir grup olsun. $LEN_X(G) = n$ ve H aynı geren kümesi üzerinde G nin bir bölüm grubu ise $LEN_X(H)|LEN_X(G)$ dir (Campbell *et al*. 2006).

3.4. m Modülüne Göre Fibonacci Dizileri

F_n, Fibonacci dizisinin n. elemanını göstermek üzere $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ için

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad , \qquad n \geq 1$$

dizisinin her F_n elemanı m modülüne göre indirgenebilir.

Tanım 3.4.1: $(F_n \ (mod\ m))_{n=-\infty}^{\infty}$ dizisinin periyodunun minimum uzunluğu $k = k(m)$ ile gösterilir ve Wall sayısı olarak adlandırılır.

Örnek 3.4.2: $m = 5$ ise 5 in Wall sayısı 20 dir ve $k(5) = 20$ olarak yazılır. Aşağıdaki çizelge kullanılarak bu görülebilir.

Çizelge 3.1. Wall sayıları

n	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24
$F_n\ mod\ 5$	1 1 2 3 0 3 3 1 4 0 4 4 3 2 0 2 2 4 1 0 1 1 2 …

Tamsayılarda her bir eleman m modülüne göre indirgendiğinde elde edilen klasik Fibonacci dizisi $F_2\left(\mathbb{Z}_m; 0,1\right)$ olarak yazılır. Sonlu bir grubun Fibonacci dizisi, grup elemanlarının 2-nacci dizisi olarak adlandırılır.

Tanım 3.4.3: $k_{(a,b,c)}(m)$, her bir terim m modülüne indirgendiğinde $F_0 = a, F_1 = b$ ve $F_2 = c$ olmak üzere

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} + F_{n-3}$$

bağıntısı ile tanımlanan F_n dizisinin minimal periyodunu gösterir (Campbell *et al.* 2006).

Örnek 3.4.4: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ için F_n dizisi

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, \ldots$$

olarak yazılır.

F_n dizisinin her bir elemanı 7 modülüne göre indirgenirse $F_n(mod\ 7)$ dizisi

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 1, 6, 0, 6, 6, 5, 4, 2, 6, 1, 0, 1, \ldots$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla $\mathrm{k}(7) = 16$ dır.

Teorem 3.4.5: $F_n(mod\ m)$ dizileri basit periyodiktir (Wall 1960).

İspat: $F_n(mod\ m)$ dizileri sonlu sayıda m^2 çiftlerinden oluştuğundan elemanları tekrar eder. Fibonacci dizisinin tanımından

$$F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$$

dir. Bu bağıntı kullanılarak

$$F_{t+1} \equiv F_{s+1}$$

$$F_t \equiv F_s(mod\ m)$$

olup

$$F_{t+1} - F_t \equiv F_{s+1} - F_s$$

$$F_{t-1} \equiv F_{s-1}$$

elde edilir. Buradan aynı oranda indisleri arttırarak veya azaltarak elde edilen dizinin elemanlarının aynı olduğu görülür.

Dolayısıyla

$$F_{t-1-s+2} \equiv F_{s-1-s+2}$$

$$F_{t-s+1} \equiv F_1$$

ve

$$F_{t-1-s+1} \equiv F_{s-1-s+1}$$

$$F_{t-s} \equiv F_0$$

dır. Yani

$$F_{t-1} \equiv F_{s-1}, \dots, F_{t-s+1} \equiv F_1, F_{t-s} \equiv F_0$$

dir. Böylece diziler basit periyodiktir.

Teorem 3.4.6: Eğer $m,\quad m = \prod {p_i}^{e_i}$ asal çarpanlamaya sahipse ve k_i, $F_n(mod {p_i}^{e_i})$ periyod uzunluğunu gösteriyorsa k, k_i nin en küçük ortak katı olan $lcm[k_i]$ ye eşittir. Yani $k = lcm[k_i]$ dir (Wall 1960).

İspat: "k_i, $F_n(mod {p_i}^{e_i})$ periyodunun uzunluğudur" ifadesi $F_n(mod {p_i}^{e_i})$ dizilerinin sadece ck_i uzunluğundaki bloklardan sonra tekrar ettiğini vurgular. "k, $F_n(mod\, m)$ periyodunun uzunluğudur" ifadesi ise $F_n(mod {p_i}^{e_i})$ nin tüm i değerleri için k terimlerinden sonra tekrar ettiğini vurgular. Dolayısıyla k, i nin tüm değerleri için ck_i şeklindedir. Böyle sayılar $F_n(mod\, m)$ nin bir periyodunu verdiği için $k = lcm[k_i]$ eşitliği elde edilir.

Teorem 3.4.7: $F_n \equiv 0(mod\, m)$ terimleri basit bir aritmetik sıra şeklindedir. Yani $x = 0,1,2,...$ve $d = d(m)$olan bazı pozitif tamsayılar için $n = xd$ tüm $F_n \equiv 0(mod\, m)$ terimlerini sağlar (Wall 1960).

İspat: $i \geq j$ olmak üzere $(F_n, F_{n+1}) = 1$ ve $F_{n+t} = F_{n+1}F_t + F_nF_{t-1}$ bilinen bağıntılarından $F_i = 0(mod\ m)$ ve $F_j = 0(mod\ m)$'den

$$F_{i+j} = 0(mod\ m) \text{ ve } F_{i-j} = 0(mod\ m)$$

elde edilir. görülebilir. İlk olarak $n = i$ ve $t = j$ düzeni için

$$F_n = 0(mod\ m)$$

$$F_t = 0(mod\ m)$$

olur.

$F_i = 0(mod\ m)$ ve $F_j = 0(mod\ m)$ kullanılarak

$$F_{n+t} = F_{n+1}F_t + F_nF_{t-1}$$

$$F_{i+j} = F_{i+1}F_j + F_iF_{j-1}$$

$$F_{i+j} = 0(modm)$$

elde edilir. Daha sonra $n + t = i$ ve $n = j$ düzeni için $F_j = 0(mod\ m)$ kullanılarak $t = i - j$ alınırsa

$$\begin{aligned} F_i &= F_{n+t} \\ &= F_{n+1}F_t + F_nF_{t-1} \\ &= F_{n+1}F_t + F_jF_{t-1} \\ &= F_{n+1}F_t \end{aligned}$$

elde edilir. $F_i = 0(mod\ m)$ olduğundan

$$F_{n+1}F_t \equiv 0(mod\ m)$$

dir.

$(F_n, F_{n+1}) = 1$ ve $F_n \equiv 0(mod\ m)$ bağıntılarından

$$F_t = F_{i-j} \equiv 0(mod\ m)$$

ikinci bağıntı elde edilir. Dolayısıyla n değeri $n = xd$ şeklindeki gibi bir modülün negatif olmayan terimlerin içeriği ile ilgilidir. Teorem 3.4.5 e göre sonuç F_0 ın sadece $F_n \equiv 0(mod\ m)$ olmadığını ayrıca $d > 0$ olduğunu gösterir ve teoremin ispatı tamamlanır. Yani $n = xd$, $F_n \equiv 0(mod\ m)$ için $d > 0$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla arada belli bir artış olacak ve $x = 0,1,2, ...$ için n ler dizide bulunacaktır.

Ayrıca $d|k$ olduğu belirtilmelidir. $d \leq k$ ile birçok m değeri bulunabilir (Wall 1960).

Şimdi $k(m)$ nin bilinen bazı özellikleri Teoremler ve örnekleri ile birlikte verilecektir.

Teorem 3.4.8: $m > 2$ ise $k(m)$ çift sayıdır (Wall 1960).

Örneğin $m = 2$ için

$$0, 1, 1, 0, 1, ...$$

olup $k(2) = 3$ tür. $m = 3$ için

$$0, 1, 1, 2, 0, 2, 2, 1, 0, 1, ...$$

olup $k(3) = 8$ dir. Benzer şekilde devam edilerek $k(5) = 20$, $k(6) = 24$, $k(29) = 14$, $k(307) = 88$ olduğu görülür.

Teorem 3.4.9: Eğer $k(p^2) \neq k(p)$ ise $k(p^e) = p^{e-1}k(p)$ dir. Ayrıca t, $k(p^t) = k(p)$ eşitliğini sağlayan en büyük tamsayı ise $e > t$ olmak üzere $k(p^e) = p^{e-t}k(p)$ dir (Wall 1960).

Örneğin $p = 2$ için $k(2^2) = k(4) = 6$ ve $k(2) = 3$ dır. Dolayısıyla

$$k(2^2) \neq k(2)$$

olup

$$k(2^2) = 2^{2-1}k(2)$$
$$6 = 2.3$$
$$6 = 6$$

olur.

Teorem 3.4.10: $m = p = 10x \pm 1$ ise $k(p)|(p-1)$ dir (Wall 1960).

Örneğin; $x = 3$ için $p = 29$ ya da $p = 31$ olup için $k(29) = 14$ ve $k(31) = 30$ dur. Buradan

$$k(29)|28$$
$$14|28$$

ve

$$k(31)|30$$
$$30|30$$

olur.

Lemma 3.4.11: $x^2 = x + 1\ (mod\ p)$ denkliği sadece $p = 5$ olduğunda çift köke sahiptir (Wall 1960).

Teorem 3.4.12: $m = p = 10x \pm 3$ ise $k(p)|(2p+2)$ dir (Wall 1960).

Şimdi sonlu gruplarda k-nacci dizisinin periyoduna ilişkin teoremler verilecektir.

Tanım 3.4.13: Bir G grubu i elemanı ile gerilmiş ise bu gruba i-gerenli grup denir (Knox 1990).

Teorem 3.4.14: G, a ve b gerenleri ile 2-gerenli bir grup olsun. G grubunun birim elemanı $F_2(G\,;a,b)$ veya $F_2(G\,;b,a)$ dizilerinde görülürse bu durumda G abelyendir (Knox 1990).

İspat: Genelliği bozmadan $F_2(G\,;a,b)$ dizisini göz önüne alalım. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere e nin (G grubunu birim elemanın) bu Fibonacci dizisinin $(n+1)$. elemanı olduğunu kabul edelim. Dizinin n. elemanı grubun herhangi bir elemanı olabilir. Böylece bir

$$a, b, \dots, s, e, \dots$$

dizisi elde edilir. Burada s nin önündeki eleman nedir? s^{-1} yalnızca $(n-1)$. eleman olarak tanımlı diziyi sağlayabilirdi. Benzer şekilde s^2 , $(n-2)$. eleman ve s^{-3} ise $(n-3)$. eleman olarak dizi periyodunda olmak zorundadır. Buradan

$$a, b, \dots, s^{-8}, s^5, s^{-3}, s^2, s^{-1}, s^1, e, \dots$$

dizisi oluşur. Bu elemanlar $u_i = u_{i-1} + u_{i-2}$ bağıntısına denk olan $u_{i-2} = -u_{i-1} + u_i$ bağıntısı kullanılarak oluşturulmuş kuvvetlere sahip olduğundan değişik işaretleri olan s nin kuvvetlerinde var olan tamsayıların Fibonacci dizisi bulunur. Böylece grubun Fibonacci dizisi aşağıdaki iki şekilden birine sahiptir.

i. n tek doğal sayı ise dizi

$$s^{u_n}, s^{-u_{n-1}}, s^{u_{n-2}}, \dots,, s^5, s^{-3}, s^2, s^{-1}, s^1, e, \dots$$

dir.

Bu durumda

$$s^{u_n} = a, s^{-u_{n-1}} = b$$

elde edilir. Buradan

$$s^{u_{n-1}} = b^{-1}$$

$$s^{u_{n-2}} = ab$$

dir.

$$s^{u_{n-1}} s^{u_{n-2}} = s^{u_{n-1}+u_{n-2}} = s^{u_n}$$

olduğu için $b^{-1}ab = a$ veya $ab = ba$ elde edilir. Böylece grup abelyendir.

ii. n çift doğal sayı ise dizi

$$s^{-u_n}, s^{u_{n-1}}, s^{-u_{n-2}}, \ldots, , s^5, s^{-3}, s^2, s^{-1}, s^1, e, \ldots$$

dir. Bu durumda

$$s^{-u_n} = a$$

$$s^{u_{n-1}} = b$$

elde edilir. Buradan

$$s^{-u_{n-1}} = b^{-1}$$

$$s^{-u_{n-2}} = ab$$

dir.

$$s^{-u_{n-1}} s^{-u_{n-2}} = s^{-(u_{n-1}+u_{n-2})} = s^{-u_n}$$

olduğu için $b^{-1}ab = a$ veya $ab = ba$ elde edilir. Böylece grup abelyendir.

Teorem 3.4.14 ün tersi sağlanmaz. Gerçekten de

$$A = \langle a, b \mid a^9 = b^2 = e, ba = ab \rangle$$

abelyen grubu göz önüne alınırsa bu grubun Fibonacci dizileri;

$$a, b, ab, a, a^2b, a^3b, a^5, a^8b, a^4b, a^3, a^7b, ab, a^8, b,$$

$$a^8b, a^8, a^7b, a^6b, a^4, ab, a^5b, a^6, a^2b, a^8b, a, b, ab, \ldots$$

ve

$$b, a, ab, a^2b, a^3, a^5b, a^8b, a^4, a^3b, a^7b, a, a^8b, b, a^8,$$

$$a^8b, a^7b, a^6, a^4b, ab, a^5, a^6b, a^2b, a^8, ab, b, a, ab, \ldots$$

şeklindedir. Burada grubun elemanları olan e, a^2 ve a^7 elemanları her iki dizide de görünmez.

Teorem 3.4.15: 2-nacci dizilendirilebilen grup devirlidir (Knox 1990).

İspat: G , 2-nacci dizilendirilebilen bir grup olsun. Bu durumda G, ya 1-gerenli ya da 2-gerenlidir. Eğer G, 2-gerenli ise bu durumda e, G nin 2-nacci dizisinde görüldüğü için Teorem 3.4.14 ün ispatındaki gibi bir $s \in G$ terimlerinden bir dizi oluşur. Eğer G nin her elemanı 2-nacci dizisinde görülürse bu durumda G nin bütün elemanları s gibi tek bir eleman ile temsil edilebilir. Böylece G, 1-gerenli ya da devirlidir.

Genelikle $k \geq 3$ için k-nacci dizilendirilebilen gruplar abelyen değildir (Knox 1990).

3.4.1. m Modülüne göre k-adım Fibonacci dizileri

Tanım 3.4.1.1: $n > k$ olmak üzere k-adım Fibonacci dizisinin n. terimi $f_n^{(k)}$ ile gösterilir ve

$$f_n^{(k)} = \sum_{j=1}^{k} f_{n-j}^{(k)} \tag{3.4.1.1}$$

olarak tanımlanır. Burada $1 \leq i < k$ için $f_i^{(k)} = 0$ ve $f_k^{(k)} = 1$ dır. $f_i^{(k,m)} = f_i^{(k)} (mod\ m)$ olmak üzere bu diziyi m modülüne indirgeyerek

$$f(k,m) = (f_1^{(k,m)}, f_2^{(k,m)}, \dots, f_n^{(k,m)}, \dots)$$

şeklinde tekrar eden bir dizi elde edilebilir. Buradan

$$f(k,m) = \left(f_1^{(k,m)}, f_2^{(k,m)}, \dots, f_k^{(k,m)}\right) = (0,0, \dots,1)$$

elde edilir. Bu ise (3.4.1.1) bağıntısı ile aynıdır (Lü and Wang 2007).

Teorem 3.4.1.2: $f(k,m)$ periyodik bir dizidir (Lü and Wang 2007).

İspat: $S_k = \{(a_1, a_2, \dots, a_k) :\ 0 \leq a_i \leq m-1\ \}$ olsun. $|S_k| = m^k$ olup sonludur. Yani

$$f_{u+1}^{(k,m)} = f_{v+1}^{(k,m)}, \dots, f_{u+k}^{(k,m)} = f_{v+k}^{(k,m)}$$

olacak şekilde $u \geq 0$ için $v \geq u$ sayısı vardır.

Tanım 3.4.1.1 den,

$$f_{n+k}^{(k)} = \sum_{j=0}^{k-1} f_{n+j}^{(k)}$$

olup

$$f_n^{(k)} = f_{n+k}^{(k)} - \sum_{j=1}^{k-1} f_{n+j}^{(k)}$$

dir. Buradan

$$f_u^{(k,m)} = f_v^{(k,m)}, f_{u-1}^{(k,m)} = f_{v-1}^{(k,m)}, f_{u-2}^{(k,m)} = f_{v-2}^{(k,m)}, \dots, f_2^{(k,m)} = f_{v-u+2}^{(k,m)}$$

ve

$$f_1^{(k,m)} = f_{v-u+1}^{(k,m)}$$

elde edilir. Bu ise $f(k,m)$ dizisinin periyodik bir dizi olduğunu gösterir.

$h_k(m)$ ile $f(k,m)$ nin en küçük periodu gösterilir. $f(k,m)$ nin periodu ya da m modülüne göre k-adım Fibonacci dizisinin Wall sayısı diye adlandırılır (Lü and Wang 2007).

Örnek 3.4.1.3: $k = 4$ adım için

$$s(4,3) = (0, 0, 0, 1, 1, 2, 1, 2, 0, 2, 2, 0, 1, 2, 2, 2, 1, 1, 0, 1, 0, 2, 0, 0, 2, 1, 0, 0, 0, 1, \dots)$$

dizisi ele alınırsa her 26 terimde bir başlangıç elemanlarıyla tekrar eder. Dolayısıyla $h_4(3) = 26$ dir.

p_i farklı asal sayılar, e_i pozitif tamsayılar olmak üzere, $m = \prod_{i=1}^{t} {p_i}^{e_i}$ $(t \geq 1)$ ise bu durumda $h_k(m)$, $h_k({p_i}^{e_i})$'lerin en küçük ortak katıdır (Lü and Wang 2007).

$p \geq k$ bir asal sayı ise $h_k(p) \big| p^k - p^i$ olacak şekilde $0 \leq i \leq k-1$ sağlayan bir i sayısı vardır (Lü and Wang 2007).

Aşağıdaki tablolar ile bu sayıları doğrulayan bazı örnekler verilmiştir.

Çizelge 3.2. 3-adım Fibonacci dizisinin Wall sayısı

p	$h_3(p)$	Sonuç
5	31	$h_3(p)\|p^3-1$
13	168	$h_3(p)\|p^3-p^2$
23	553	$h_3(p)\|p^3-1$
67	1519	$h_3(p)\|p^3-1$
107	1272	$h_3(p)\|p^3-p$
179	32221	$h_3(p)\|p^3-1$
241	29040	$h_3(p)\|p^3-p$
317	100807	$h_3(p)\|p^3-1$
389	151711	$h_3(p)\|p^3-1$
557	103416	$h_3(p)\|p^3-p$
839	704761	$h_3(p)\|p^3-1$
881	777043	$h_3(p)\|p^3-1$
971	943813	$h_3(p)\|p^3-1$
1033	1067088	$h_3(p)\|p^3-p$
1103	1217713	$h_3(p)\|p^3-1$
1301	1693903	$h_3(p)\|p^3-p$
1447	2093808	$h_3(p)\|p^3-p$
1759	3094080	$h_3(p)\|p^3-p$
2851	8128200	$h_3(p)\|p^3-p$
3347	11205757	$h_3(p)\|p^3-1$
4831	11669280	$h_3(p)\|p^3-p$
13367	7444862	$h_3(p)\|p^3-p$
15791	10389820	$h_3(p)\|p^3-p$
17207	17206	$h_3(p)\|p^3-p^2$
18047	169324	$h_3(p)\|p^3-p$

Çizelge 3.4. 4-adım Fibonacci dizisinin Wall sayısı

p	$h_4(p)$	Sonuç
5	312	$h_4(p)\|p^4-1$
11	120	$h_4(p)\|p^4-p^2$
13	84	$h_4(p)\|p^4-p^2$
19	6858	$h_4(p)\|p^4-p$
29	280	$h_4(p)\|p^4-p^2$
37	1368	$h_4(p)\|p^4-p^2$
41	240	$h_4(p)\|p^4-p^2$
67	100254	$h_4(p)\|p^4-p$
83	1157520	$h_4(p)\|p^4-1$
151	533216	$h_4(p)\|p^4-1$
211	9393930	$h_4(p)\|p^4-p$
433	23248760	$h_4(p)\|p^4-1$
907	822648	$h_4(p)\|p^4-p^2$
1277	1630728	$h_4(p)\|p^4-p^2$
1579	623310	$h_4(p)\|p^4-p^2$
1973	1946364	$h_4(p)\|p^4-p^2$
2593	1680912	$h_4(p)\|p^4-p^2$
2749	7557000	$h_4(p)\|p^4-p^2$
3079	4740120	$h_4(p)\|p^4-p^2$
3331	396270	$h_4(p)\|p^4-p^2$
3581	3205890	$h_4(p)\|p^4-p^2$
3733	2322548	$h_4(p)\|p^4-p^2$
3823	3822	$h_4(p)\|p^4-p^2$
4019	8076180	$h_4(p)\|p^4-p^3$
4253	6029336	$h_4(p)\|p^4-p^2$

Çizelge 3.5. 5-adım Fibonacci dizisinin Wall sayısı

p	$h_5(p)$	Sonuç
5	781	$h_5(p)\|p^5-1$
7	2801	$h_5(p)\|p^5-1$
11	16105	$h_5(p)\|p^5-1$
19	13032	$h_5(p)\|p^5-p$
31	190861	$h_5(p)\|p^5-1$
41	2896405	$h_5(p)\|p^5-1$
53	8042221	$h_5(p)\|p^5-1$
79	39449441	$h_5(p)\|p^5-1$
89	3690720	$h_5(p)\|p^5-p$
163	176477940	$h_5(p)\|p^5-p$
283	20022	$h_5(p)\|p^5-p^3$
419	35812	$h_5(p)\|p^5-p^3$
503	127263526	$h_5(p)\|p^5-p^2$
683	159305993	$h_5(p)\|p^5-p^2$
823	677328	$h_5(p)\|p^5-p^3$
1259	317016	$h_5(p)\|p^5-p^3$
1709	1460340	$h_5(p)\|p^5-p^3$
2287	50292	$h_5(p)\|p^5-p^3$
2549	6497400	$h_5(p)\|p^5-p^3$
2957	8743848	$h_5(p)\|p^5-p^3$
3163	3162	$h_5(p)\|p^5-p^4$
3541	12538680	$h_5(p)\|p^5-p^3$
3929	15437040	$h_5(p)\|p^5-p^3$
4159	17297280	$h_5(p)\|p^5-p^3$

3.5. Halkalarda Fibonacci Dizileri

Tanım 3.5.1: R birim elemanlı bir halka olmak üzere $\{M_n\}$, R nin elemanlarının dizisi olsun. M_0 , M_1 , A_0 ve A_1 ise R nin keyfi elemanları olmak üzere $\{M_n\}$ dizisinin elemanları sırasıyla

$$M_{n+2} = A_1 M_{n+1} + A_0 M_n \qquad n \geq 0 \qquad (3.5.1)$$

bağıntısı ile tanımlanır (Decarli 1970).

Tanım 3.5.2: $\{F_n\}$ dizisi (3.5.1) bağıntısının özel hali olsun. $F_0 = 0$ halkanın sıfırı, $F_1 = 1$ halkanın birim elemanı, A_0 ve A_1 ise R halkasınn keyfi elemanları olmak üzere $\{F_n\}$ dizisinin elemanları sırasıyla

$$F_{n+2} = A_1 F_{n+1} + A_0 F_n \qquad n \geq 0$$

bağıntısı ile tanımlanır (Decarli 1970).

Teorem 3.5.3:

$$F_{n+2} = A_1 F_{n+1} + A_0 F_n$$

ise

$$F_{n+2} = F_{n+1} A_1 + F_n A_0$$

dir (Decarli 1970).

İspat: İspatı tümevarım yöntemini kullanarak yapalım. $n \geq 0$ için

$$F_{n+2} = A_1 F_{n+1} + A_0 F_n$$

ise

$$F_{n+2} = F_{n+1} A_1 + F_n A_0$$

olduğunu gösterelim. İlk olarak $n = 0$ için

$$F_2 = A_1 F_1 + A_0 F_0$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned} F_2 &= A_1 F_1 + A_0 F_0 \\ &= A_1 1 + A_0 0 \\ &= 1A_1 + 0A_0 \\ &= F_1 A_1 + F_0 A_0 \end{aligned}$$

olup

$$F_2 = F_1 A_1 + F_0 A_0$$

dir. $n = k$ için doğru yani,

$$F_{k+2} = A_1 F_{k+1} + A_0 F_k$$

ise

$$F_{k+2} = F_{k+1} A_1 + F_k A_0$$

olduğunu kabul edelim ve $n = k + 1$ için doğru olduğunu gösterelim.

Buradan

$$F_{k+1+2} = A_1 F_{k+1+1} + A_0 F_{k+1}$$

$$F_{k+3} = A_1 F_{k+2} + A_0 F_{k+1}$$

olup

$$F_{k+3} = F_{k+2} A_1 + F_{k+1} A_0$$

olduğunu göstermeliyiz.

Kabulümüzden

$$\begin{aligned}
F_{k+3} &= A_1 F_{k+2} + A_0 F_{k+1} \\
&= A_1(A_1 F_{k+1} + A_0 F_k) + A_0(A_1 F_k + A_0 F_{k-1}) \\
&= A_1(F_{k+1} A_1 + F_k A_0) + A_0(F_k A_1 + F_{k-1} A_0) \\
&= A_1(F_{k+1} A_1) + A_1(F_k A_0) + A_0(F_k A_1) + A_0(F_{k-1} A_0) \\
&= (A_1 F_{k+1}) A_1 + (A_1 F_k) A_0 + (A_0 F_k) A_1 + (A_0 F_{k-1}) A_0 \\
&= (A_1 F_{k+1}) A_1 + (A_0 F_k) A_1 + (A_1 F_k) A_0 + (A_0 F_{k-1}) A_0 \\
&= (A_1 F_{k+1} + A_0 F_k) A_1 + (A_1 F_k + A_0 F_{k-1}) A_0 \\
&= F_{k+2} A_1 + F_{k+1} A_0
\end{aligned}$$

elde edilir.

Dolaysıyla

$$F_{k+3} = A_1 F_{k+2} + A_0 F_{k+1}$$

ise

$$F_{k+3} = F_{k+2} A_1 + F_{k+1} A_0$$

dir.

Tanım 3.5.2 den F_{n+2}, F_{n+3}, F_{n+4} ve F_{n+5} aşağıdaki gibi yazılabilir.

$F_{n+2} = A_1 F_{n+1} + A_0 F_n$

$F_{n+3} = A_1 F_{n+2} + A_0 F_{n+1}$

$= A_1 (A_1 F_{n+1} + A_0 F_n) + A_0 F_{n+1}$

$= A_1^2 F_{n+1} + A_1 A_0 F_n + A_0 F_{n+1}$

$F_{n+4} = A_1 F_{n+3} + A_0 F_{n+2}$

$= A_1 (A_1^2 F_{n+1} + A_1 A_0 F_n + A_0 F_{n+1}) + A_0 (A_1 F_{n+1} + A_0 F_n)$

$= A_1^3 F_{n+1} + A_1^2 A_0 F_n + A_1 A_0 F_{n+1} + A_0 A_1 F_{n+1} + A_0^3 F_n$

$F_{n+5} = A_1 F_{n+4} + A_0 F_{n+3}$

$= A_1 (A_1^3 F_{n+1} + A_1^2 A_0 F_n + A_1 A_0 F_{n+1} + A_0 A_1 F_{n+1} + A_0^3 F_n) + A_0 (A_1^2 F_{n+1} + A_1 A_0 F_n + A_0 F_{n+1})$

$= A_1^4 F_{n+1} + A_1^3 A_0 F_n + A_1^2 A_0 F_{n+1} + A_1 A_0 A_1 F_{n+1} + A_1 A_0^3 F_n + A_0 A_1^2 F_{n+1} + A_0 A_1 A_0 F_n + A_0^2 F_{n+1}$

...

yazılabilir. Benzer şekilde $k \geq 6$ için F_{n+k}, F_n ve F_{n+1}'e bağlı olarak ifade edilebilir.

Örnek 3.5.4: p asal sayı olmak üzere a ve b elemanları ile gerilen 9. mertebeden birimli halka

$$G = \langle a, b \ | \ 3a = 3b = 0, a^2 = 0, b^2 = b, ab = a, ba = a \ \rangle$$

olsun (Fine 1993).

Şimdi Tanım 3.5.2 i kullanarak Örnek 3.5.4 de verilen 9. mertebeden halkanın Fibonacci dizisini yazalım. $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ olmak üzere $A_0 = a$ ve $A_1 = b$ için

$$F_{n+2} = A_1 F_{n+1} + A_0 F_n$$

bağıntısı kullanılırsa halkanın Fibonacci dizisi

$$\begin{aligned}
F_0 &= 0, \\
F_1 &= 1, \\
F_2 &= b1 + a0 \\
&= b, \\
F_3 &= bb + a1 \\
&= b^2 + a \\
&= b + a \\
F_4 &= b(b + a) + ab \\
&= b^2 + ba + ab \\
&= b + a + a \\
&= b + 2a \\
F_5 &= b(b + 2a) + a(b + a) \\
&= b(b + a + a) + ab + a^2 \\
&= b^2 + ba + ba + a + 0 \\
&= b + a + a + a \\
&= b + 3a \\
&= b
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
F_6 &= bb + a(b + 2a) \\
&= b^2 + a(b + a + a) \\
&= b + ab + a^2 + a^2 \\
&= b + a + 0 + 0 \\
&= b + a \\
&\dots
\end{aligned}
$$

dir. Buradan

$$0, 1, b, b + a, b + 2a, b, b + a, \dots$$

şeklindedir. Dolayısıyla

$$\{F_n\} = \{0, 1, b, b + a, b + 2a, b, b + a, \dots\}$$

dir.

Sonuç 3.5.5:

i. $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = F_{n-1}A_0F_{n-1} - F_nA_0F_{n-2}$

ii. $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = F_{n-1}A_0F_{n-1} - F_{n-2}A_0F_n \qquad n \geq 1$

(Decarli 1970).

İspat: i. Teorem 3.5.3 den

$$F_n = A_1F_{n-1} + A_0F_{n-2}$$

$$F_{n+1} = F_nA_1 + F_{n-1}A_0$$

dir.

Buradan

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (F_nA_1 + F_{n-1}A_0)F_{n-1} - F_n(A_1F_{n-1} + A_0F_{n-2})$$

$$= F_nA_1F_{n-1} + F_{n-1}A_0F_{n-1} - F_nA_1F_{n-1} - F_nA_0F_{n-2}$$

$$= F_{n-1}A_0F_{n-1} - F_nA_0F_{n-2}$$

olup istenilen elde edilir.

ii. Teorem 3.5.3 den

$$F_{n+1} = A_1F_n + A_0F_{n-1}$$

$$F_n = F_{n-1}A_1 + F_{n-2}A_0$$

dir. Buradan

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = F_{n-1}(A_1F_n + A_0F_{n-1}) - (F_{n-1}A_1 + F_{n-2}A_0)F_n$$

$$= F_{n-1}A_1F_n + F_{n-1}A_0F_{n-1} - F_{n-1}A_1F_n - F_{n-2}A_0F_n$$

$$= F_{n-1}A_0F_{n-1} - F_{n-2}A_0F_n$$

olup istenilen elde edilir.

$\{M_n\}$ dizisi ve bu dizinin özel hali olan $\{F_n\}$ dizisi arasındaki ilişkileri aşağıdaki gibi verebiliriz.

Teorem 3.5.6:

$$M_{n+r} = F_rA_0M_{n-1} + F_{r+1}M_n \qquad n \geq 1, r \geq 0$$

(Decarli 1970).

Sonuç 3.5.7:

$$M_n = F_n M_1 + F_{n-1} A_0 M_0 \qquad\qquad n \geq 1$$

(Decarli 1970).

İspat: Teorem 3.5.6 dan $n \geq 1, r \geq 0$ olmak üzere

$$M_{n+r} = F_r A_0 M_{n-1} + F_{r+1} M_n$$

dir. Burada n ile r yer değiştirirse

$$M_{r+n} = F_n A_0 M_{r-1} + F_{n+1} M_r$$

elde edilir. n yerine $n-1$ alınıp $r = 1$ olarak seçilirse

$$M_{r+n-1} = F_{n-1} A_0 M_{r-1} + F_{n-1+1} M_r$$

$$M_{1+n-1} = F_{n-1} A_0 M_{1-1} + F_n M_1$$

$$M_n = F_{n-1} A_0 M_0 + F_n M_1$$

$$M_n = F_n M_1 + F_{n-1} A_0 M_0$$

elde edilir. Teorem 3.5.6 dan $\{F_n\}$ dizisi

$$F_{n+r} = F_r A_0 F_{n-1} + F_{r+1} F_n \qquad n \geq 1 \qquad (3.5.2)$$

dir.

(3.5.2) bağıntısında n yerine $n+1$ ve r yerine n alınırsa

$$F_{n+1+r} = F_r A_0 F_{n+1-1} + F_{r+1} F_{n+1}$$

$$F_{n+1+n} = F_n A_0 F_n + F_{n+1} F_{n+1}$$

$$F_{2n+1} = F_n A_0 F_n + F_{n+1}^2$$

elde edilir.

Teorem 3.5.8:

$$F_n F_{n+r} - F_{n+r} F_n = F_n F_r A_0 F_{n-1} - F_{n-1} A_0 F_r F_n \qquad n \geq 1, r \geq 1$$

(Decarli 1970).

İspat: (3.5.2) bağıntısından $n \geq 1$ için

$$F_{n+r} = F_r A_0 F_{n-1} + F_{r+1} F_n$$

olduğunu biliyoruz. Burada n yerine $r+1$ ve r yerine $n-1$ alınırsa

$$\begin{aligned} F_{n+r} &= F_r A_0 F_{n-1} + F_{r+1} F_n \\ &= F_{n-1} A_0 F_{r+1-1} + F_{n-1+1} F_{r+1} \\ &= F_{n-1} A_0 F_r + F_n F_{r+1} \end{aligned}$$

olup

$$F_{n+r} = F_{n-1} A_0 F_r + F_n F_{r+1} \tag{3.5.3}$$

elde edilir.

Halkanın çarpma işleminin birleşme özelliği, (3.5.2) ve (3.5.3) bağıntıları kullanılırsa

$$F_n(F_{r+1}F_n) = (F_nF_{r+1})F_n$$

$$F_n(F_{r+1}F_n + F_rA_0F_{n-1} - F_rA_0F_{n-1}) = (F_nF_{r+1} + F_{n-1}A_0F_r - F_{n-1}A_0F_r)F_n$$

$$F_n\left(\underbrace{F_rA_0F_{n-1} - F_{r+1}F_n}_{F_{n+r}} - F_rA_0F_{n-1}\right) = \left(\underbrace{F_nF_{r+1} + F_{n-1}A_0F_r}_{F_{n+r}} - F_{n-1}A_0F_r\right)F_n$$

$$F_n(F_{n+r} - F_rA_0F_{n-1}) = (F_{n+r} - F_{n-1}A_0F_r)F_n$$

$$F_nF_{n+r} - F_nF_rA_0F_{n-1} = F_{n+r}F_n - F_{n-1}A_0F_rF_n$$

$$F_nF_{n+r} - F_{n+r}F_n = F_nF_rA_0F_{n-1} - F_{n-1}A_0F_rF_n$$

olup istenilen elde edilir.

3.6. Fibonacci Polinomları

Polinomlar, Fibonacci dizileri gibi bağıntılar ile tanımlanabilir. 1883 yılında $F_1(x) = 1$ ve $F_2(x) = x$ olmak üzere

$$F_n(x) = xF_{n-1}(x) + F_{n-2}(x), \qquad n \geq 3$$

bağıntısı ile tanınlanan polinomlar Belçikalı matematikçilerden Eugene Charles Catalan ve Alman matematikçilerden E. Jacobsthal tarafından Fibonacci polinomları olarak adlandırıldı.

Daha sonra Jacobsthal çalıştığı Fibonacci polinomlarını, $J_1(x) = J_2(x) = 1$ olmak üzere

$$J_n(x) = J_{n-1}(x) + xJ_{n-2}(x), \qquad n \geq 3$$

bağıntısı ile tanımladı. P.F.Byrd ise $\varphi_0(x) = 0$, $\varphi_1(x) = 1$ olmak üzere

$$\varphi_n(x) = 2x\varphi_{n-1}(x) + \varphi_{n-2}(x), \qquad n \geq 2$$

bağıntısı ile tanımladı. 1970 yılında Bicknell çalıştığı $L_n(x)$ Lucas polinomlarını, $L_0(x) = 2$, $L_1(x) = x$ olmak üzere

$$L_n(x) = xL_{n-1}(x) + L_{n-2}(x), \qquad n \geq 2$$

bağıntısı ile tanımladı (Nalli and Haukkanen 2009).

Tanım 3.6.1: Fibonacci polinomları

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & , \quad n = 0 \\ 1 & , \quad n = 1 \\ xF_{n-1}(x) + F_{n-2}(x) & , \quad n \geq 2 \end{cases}$$

ile tanımlanır (Hoggatt and Bicknell 1973).

İlk 7 Fibonacci polinomu ve katsayıları aşağıda verilmiştir.

Fibonacci Polinomları	Katsayılar			
$F_0(x) = 0$	0			
$F_1(x) = 1$	1			
$F_2(x) = x$	1			
$F_3(x) = x^2 + 1$	1	1		
$F_4(x) = x^3 + 2x$	1	2		
$F_5(x) = x^4 + 3x^2 + 1$	1	3	1	
$F_6(x) = x^5 + 4x^3 + 3x$	1	4	3	
$F_7(x) = x^6 + 5x^4 + 6x^2 + 1$	1	5	6	1

$F_n(x)^m$, $F_n(x)$ polinomunun her bir teriminin derece ve katsayısının m modülüne göre indirgenmiş hali olmak üzere $F_n(x)^m$ polinomları

$$\{F_n(x)^m\} = \{F_0(x)^m, F_1(x)^m, \dots, F_n(x)^m, \dots\}$$

şeklinde tekrar eden bir dizi oluşturur. Yani bu dizi Fibonacci polinomlarının her bir teriminin derecesi ve katsayısı m modülüne göre indirgenerek elde edilen dizidir.

$\{F_n(x)^m\}$ dizisinin periyodu $hF_n(x)^m$ ile gösterilecektir.

Örnek 3.6.2: $m = 2$ için $\{F_n(x)^m\}$ dizisinin periyodunu bulalım. Tanım 3.6.1'den $F_0(x)^2 = 0$, $F_1(x)^2 = 1$ olmak üzere $n \geq 2$ için

$$F_n(x)^2 = xF_{n-1}(x)^2 + F_{n-2}(x)^2$$

bağıntısı kullanılırsa

$F_0(x)^2 = 0,$

$F_1(x)^2 = 1,$

$F_2(x)^2 = x,$

$F_3(x)^2 = x^2 + 1 = x^0 + 1 = 2 = 0,$

$F_4(x)^2 = 0x + x = x,$

$F_5(x)^2 = x^2 + 0 = x^0 + 0 = 1,$

$F_6(x)^2 = x + x = 2x = 0,$

$F_7(x)^2 = 0x + 1 = 1$

olup

$$\{F_n(x)^2\} = \{0,1,x,0,x,1,0,1\}$$

dir. Dolayısıyla dizinin periyodu 6 dır. Yani $hF_n(x)^2 = 6$ dır.

Fibonacci polinomları için

$$F_{n+1}(x) = xF_n(x) + F_{n-1}(x)$$

şeklindeki bağıntının karakteristik denklemi

$$r^2 - xr - 1 = 0$$

dir. Karakteristik denklemin kökleri

$$r_1 = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}, r_2 = \frac{x - \sqrt{x^2 + 4}}{2}$$

şeklindedir (Falcon and Plaza 2009).

$F_n(x)$ polinomunun derecesi $n \geq 1$ için $n-1$ dir. Fibonacci polinomları ve Fibonacci sayıları arasında $n \geq 1$ olmak üzere $F_n(1) = F_n$ ilişkisi vardır. Örneğin; $F_6(1) = F_6$ şeklindedir. Ayrıca $F_1(2) = 1$ ve $F_2(2) = 2$ ve $n \geq 3$ olmak üzere

$$F_n(2) = 2F_{n-1}(2) + F_{n-2}(2)$$

dir. Bu bağıntıdan elde edilen sayılar

$$P_n = F_n(2)$$

biçimindeki Pell sayılarıdır. Pell sayıları $1, 2, 5, 12, 29, \ldots$ şeklindedir (Falcon and Plaza 2009).

Tanım 3.6.3: $F_0(x) = 0$ olmak üzere

$$F_{-n}(x) = (-1)^{n+1} F_n(x)$$

ile tanımlanan polinomlara negatif indisli Fibonacci polinomları denir (Falcon and Plaza 2009).

Teorem 3.6.4: $n \in \mathbb{Z}$ ve $Q(x) = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ olmak üzere

$$Q^n(x) = \begin{bmatrix} F_{n+1}(x) & F_n(x) \\ F_n(x) & F_{n-1}(x) \end{bmatrix}$$

dir (Falcon and Plaza 2009).

İspat: İspatı tümevarım yöntemini kullanarak yapalım Yani her n doğal sayısı için

$$Q^n(x) = \begin{bmatrix} F_{n+1}(x) & F_n(x) \\ F_n(x) & F_{n-1}(x) \end{bmatrix}$$

olduğunu gösterelim. İddianın $n = 1$ için

$$Q(x) = \begin{bmatrix} F_2(x) & F_1(x) \\ F_1(x) & F_0(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = Q(x)$$

şeklinde olup doğru olduğu görülür. İddianın n için doğru yani,

$$Q^n(x) = \begin{bmatrix} F_{n+1}(x) & F_n(x) \\ F_n(x) & F_{n-1}(x) \end{bmatrix}$$

olduğunu kabul edelim ve $n + 1$ için doğru olduğunu gösterelim Buradan

$$Q^n(x)Q(x) = \begin{bmatrix} F_{n+1}(x) & F_n(x) \\ F_n(x) & F_{n-1}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_2(x) & F_1(x) \\ F_1(x) & F_0(x) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} F_{n+1}(x)x + F_n(x) & F_{n+1}(x) \\ F_n(x)x + F_{n-1}(x) & F_n(x) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} F_{n+2}(x) & F_{n+1}(x) \\ F_{n+1}(x) & F_n(x) \end{bmatrix} = Q^{n+1}(x)$$

bulunur ki bu da iddianın $n + 1$ için doğru olduğunu gösterir. Benzer olarak $n \in \mathbb{N}$ için

$$Q^{-n}(x) = \begin{bmatrix} F_{-n+1}(x) & F_{-n}(x) \\ F_{-n}(x) & F_{-n-1}(x) \end{bmatrix}$$

olduğu ispatlanabilir.

Şimdi Fibonacci polinomlarının bazı özellikleri teoremlerle verilecektir.

Teorem 3.6.5: (Cassini veya Simon özelliği): $\forall\, n \in \mathbb{Z}$ için

$$F_{n+1}(x)F_{n-1}(x) - {F_n}^2(x) = (-1)^n$$

dir (Falcon and Plaza 2009).

İspat: $Q(x) = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ için

$$Q^n(x) = \begin{bmatrix} F_{n+1}(x) & F_n(x) \\ F_n(x) & F_{n-1}(x) \end{bmatrix}$$

olmak üzere bu matrislerin determinantları alınırsa

$$detQ(x) = -1 \qquad \text{ve} \qquad detQ^n(x) = (-1)^n$$

elde edilir. Buradan

$$F_{n+1}(x)F_{n-1}(x) - {F_n}^2(x) = (-1)^n$$

olduğu görülür.

Teorem 3.6.6: (Catalan özelliği) $\forall\, n, r \in \mathbb{Z}$ ve $n > r$ için

$$F_{n-r}(x)F_{n+r}(x) - {F_n}^2(x) = (-1)^{n-r-1}{F_r}^2(x)$$

dir (Falcon and Plaza 2009).

Sonuç 3.6.7: Catalan özelliğinden;

i. $r = 1$ alınırsa

$$F_{n+1}(x)F_{n-1}(x) - {F_n}^2(x) = (-1)^n$$

şeklindeki Cassini (Simon) özelliği elde edilir.

ii. n yerine $4n$ ve r yerine $2n$ alınırsa

$$F_{2n}(x)[F_{2n}(x) + F_{6n}(x)] = {F_{4n}}^2(x)$$

elde edilir.

iii. n yerine $2n + r$ alınırsa

$$F_{2n}(x)F_{2n+2r}(x) + F_r^2(x) = F_{2n+r}^2(x)$$

elde edilir. $x = 1$ ise $F_n(x) = F_n$ olur ki buradan $F_1(1) = F_2(1) = 1$ olur ve

$$\{F_{2n}, F_{2n+2}, F_{2n+4}, 4F_{2n+1}F_{2n+2}F_{2n+3}\}$$

kümesi bir Diophantine dörtlüsüdür (Falcon and Plaza 2009). Yani bu kümeden alınan herhangi iki elemanın çarpımının bir fazlası tam karedir. Örneğin;

$$F_{2n}F_{2n+2} + 1 = F_{2n+1}^2$$

$$F_{2n}F_{2n+4} + 1 = F_{2n+2}^2$$

$$F_{2n}4F_{2n+1}F_{2n+2}F_{2n+3} + 1 = (2F_{2n+1}F_{2n+2} - 1)^2$$

$$F_{2n+2}F_{2n+4} + 1 = F_{2n+3}^2$$

$$F_{2n+2}4F_{2n+1}F_{2n+2}F_{2n+3}+1=(F_{2n+2}^2+1)^2$$

$$F_{2n+4}4F_{2n+1}F_{2n+2}F_{2n+3}+1=(2F_{2n+2}F_{2n+3}+1)^2$$

dir.

Teorem 3.6.8: (Honsberger Formülü) $\forall\, m,n \in \mathbb{Z}$ için

$$F_{m+n}(x)=F_m(x)F_{n+1}(x)+F_{m-1}(x)F_n(x)$$

dir (Falcon and Plaza 2009).

İspat: Fibonacci polinomlarının matris gösterimi dikkate alınarak $Q^{m+n}(x)$ matrisi

$$Q^{m+n}(x)=\begin{bmatrix} F_{m+n+1}(x) & F_{m+n}(x) \\ F_{m+n}(x) & F_{m+n-1}(x) \end{bmatrix} \tag{3.6.1}$$

şeklinde olur. Diğer taraftan

$$Q^{m+n}(x)=Q^m(x)Q^n(x)$$

$$=\begin{bmatrix} F_{m+1}(x) & F_m(x) \\ F_m(x) & F_{m-1}(x) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_{n+1}(x) & F_n(x) \\ F_n(x) & F_{n-1}(x) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} F_{m+1}(x)F_{n+1}(x)+F_m(x)F_n(x) & F_{m+1}(x)F_n(x)+F_m(x)F_{n-1}(x) \\ F_m(x)F_{n+1}(x)+F_{m-1}(x)F_n(x) & F_m(x)F_n(x)+F_{m-1}(x)F_{n-1}(x) \end{bmatrix} \tag{3.6.2}$$

dir.

(3.6.1) ve (3.6.2) eşit olduğundan

$$F_{m+n}(x) = F_m(x)F_{n+1}(x) + F_{m-1}(x)F_n(x)$$

sonucu elde edilir.

Teorem 3.6.9: $\forall\, m, n \in \mathbb{Z}$ için

$$(-1)^n F_{m-n}(x) = F_m(x)F_{n-1}(x) - F_{m-1}(x)F_n(x)$$

dir (Falcon and Plaza 2009).

İspat: Fibonacci polinomlarının matris gösterimi dikkate alınarak $Q^{m-n}(x)$ matrisi

$$Q^{m-n}(x) = \begin{bmatrix} F_{m-n+1}(x) & F_{m-n}(x) \\ F_{m-n}(x) & F_{m-n-1}(x) \end{bmatrix} \tag{3.6.3}$$

şeklinde olup

$$Q^{m-n}(x) = Q^m(x)Q^{-n}(x)$$

$$= \begin{bmatrix} F_{m+1}(x) & F_m(x) \\ F_m(x) & F_{m-1}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{-n+1}(x) & F_{-n}(x) \\ F_{-n}(x) & F_{-n-1}(x) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} F_{m+1}(x) & F_m(x) \\ F_m(x) & F_{m-1}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^n F_{n-1}(x) & (-1)^{n+1} F_n(x) \\ (-1)^{n+1} F_n(x) & (-1)^n F_{n+1}(x) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} F_{m+1}(x) & F_m(x) \\ F_m(x) & F_{m-1}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{n-1}(x) & -F_n(x) \\ -F_n(x) & F_{n+1}(x) \end{bmatrix} (-1)^n$$

$$= (-1)^n \begin{bmatrix} F_{m+1}(x)F_{n-1}(x) - F_m(x)F_n(x) & F_m(x)F_{n+1}(x) - F_{m+1}(x)F_n(x) \\ F_m(x)F_{n-1}(x) - F_{m-1}(x)F_n(x) & F_{m-1}(x)F_{n+1}(x) - F_m(x)F_n(x) \end{bmatrix} \quad (3.6.4)$$

yazılır. (3.6.3) ile (3.6.4) eşit olduğundan

$$(-1)^n F_{m-n}(x) = F_m(x)F_{n-1}(x) - F_{m-1}(x)F_n(x)$$

elde edilir.

Sonuç 3.6.10: $\forall\, m \in \mathbb{Z}$ için Honsberger formülünde;

i. $n = m - 1$ alınırsa

$$F_{2m-1}(x) = {F_m}^2(x) + {F_{m-1}}^2(x)$$

ii. $n = m$ alınırsa

$$F_{2m}(x) = F_m(x)[F_{m+1}(x) + F_{m-1}(x)]$$

dir (Falcon and Plaza 2009).

Teorem 3.6.11: $\forall\, m \in \mathbb{Z}$ için

$$F_{2m}(x) = \frac{{F_{m+1}}^2(x) - {F_{m-1}}^2(x)}{x}$$

dir (Falcon and Plaza 2009).

Teorem 3.6.12: $\forall\, n, m \in \mathbb{Z}$ için

$$EBOB[F_m(x), F_n(x)] = F_{EBOB[m,n]}(x)$$

dir (Falcon and Plaza 2009).

Teorem 3.6.13: (Genel Bilineer Formül) $a, b, c, d, r \in \mathbb{Z}$ ve $a + b = c + d$ olsun. Bu takdirde

$$F_a(x)F_b(x) - F_c(x)F_d(x) = (-1)^r\big(F_{a-r}(x)F_{b-r}(x) - F_{c-r}(x)F_{d-r}(x)\big)$$

dir (Falcon and Plaza 2009).

Teorem 3.6.14: (d'Ocagne özelliği) $n \leq m$ tamsayıları için

$$F_{n+1}(x)F_m(x) - F_n(x)F_{m+1}(x) = (-1)^{n-1}F_{m-n}(x)$$

dir (Falcon and Plaza 2009).

İspat: Teorem 3.6.13 de verilen Genel Bilineer formülü olan

$$F_a(x)F_b(x) - F_c(x)F_d(x) = (-1)^r\big(F_{a-r}(x)F_{b-r}(x) - F_{c-r}(x)F_{d-r}(x)\big)$$

bağıntıda $a = n + 1$, $b = m$, $c = n$, $d = m + 1$ ve $r = n - 1$ alınırsa

$$F_{n+1}(x)F_m(x) - F_n(x)F_{m+1}(x) = (-1)^{n-1}F_{m-n}(x)$$

bağıntısı kolaylıkla görülebilir.

3.6.1. Fibonacci Polinomları İçin Binet Formülü

Herhangi bir k -Fibonacci sayısı kendinden önceki terimler bilinmeden de elde edilebilirdi. Benzer şekilde herhangi bir Fibonacci polinomu da kendinden önceki polinomlar bilinmeksizin elde edilebilmektedir. Bu durum aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 3.6.1.1: (Binet Formülü) $r_1 = \frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}$, $r_2 = \frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}$ ve $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, n. Fibonacci polinomu

$$F_n(x) = \frac{\mathrm{r}_1{}^n - \mathrm{r}_2{}^n}{\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2} \tag{3.6.1.1}$$

dir (Falcon and Plaza 2009).

İspat: $\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2 = \sqrt{x^2 + 4}$ olduğu kullanarak $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için

$$F_n(x) = \frac{\mathrm{r}_1{}^n - \mathrm{r}_2{}^n}{\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2}$$

olduğunu tümevarım ile gösterelim. İddia $n = 1$ için

$$F_1(x) = \frac{\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2}{\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2} = 1$$

olup doğrudur. İddia n için doğru, yani

$$F_n(x) = \frac{\mathrm{r}_1{}^n - \mathrm{r}_2{}^n}{\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2}$$

olsun.

İddianın $n+1$ için doğru olduğunu gösterelim. Fibonacci polinomlarının tanımından

$$F_{n+1}(x) = xF_n(x) + F_{n-1}(x)$$

yazılır. Bu bağıntında $F_n(x)$ ve $F_{n-1}(x)$ değerleri yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$F_{n+1}(x) = xF_n(x) + F_{n-1}(x)$$

$$= x\left(\frac{\mathrm{r_1}^n - \mathrm{r_2}^n}{\mathrm{r_1} - \mathrm{r_2}}\right) + \left(\frac{\mathrm{r_1}^{n-1} - \mathrm{r_2}^{n-1}}{\mathrm{r_1} - \mathrm{r_2}}\right)$$

$$= x\left(\frac{\mathrm{r_1}^n - \mathrm{r_2}^n}{\sqrt{x^2+4}}\right) + \left(\frac{\mathrm{r_1}^{n-1} - \mathrm{r_2}^{n-1}}{\sqrt{x^2+4}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\left(x\mathrm{r_1}^n - x\mathrm{r_2}^n + \mathrm{r_1}^{n-1} - \mathrm{r_2}^{n-1}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\left[\mathrm{r_1}^{n-1}(1 + x\mathrm{r_1}) - \mathrm{r_2}^{n-1}(1 + x\mathrm{r_2})\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\left[\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^{n-1}\left(1 + \frac{x^2+x\sqrt{x^2+4}}{2}\right) - \left(\frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^{n-1}\left(1 + \frac{x^2-x\sqrt{x^2+4}}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^n \frac{2}{x+\sqrt{x^2+4}} \frac{2+x^2+x\sqrt{x^2+4}}{2}$$
$$- \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\left(\frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^n \frac{2}{x+\sqrt{x^2+4}} \frac{2+x^2-x\sqrt{x^2+4}}{2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\left[\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^n \left(\frac{2+x^2+x\sqrt{x^2+4}}{x^2+4+x\sqrt{x^2+4}}\right) - \left(\frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^n \left(\frac{2+x^2-x\sqrt{x^2+4}}{x^2+4+x\sqrt{x^2+4}}\right)\right]$$

bulunur. Ayrıca $\left(\frac{2+x^2+x\sqrt{x^2+4}}{x^2+4+x\sqrt{x^2+4}}\right)$ ve $\left(\frac{2+x^2-x\sqrt{x^2+4}}{x^2+4+x\sqrt{x^2+4}}\right)$ ifadeleri paydalarının eşlenikleri ile çarpılıp düzenlenirse

$$\left(\frac{2+x^2+x\sqrt{x^2+4}}{x^2+4+x\sqrt{x^2+4}}\right) = \frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2\sqrt{x^2+4}}$$

ve

$$\left(\frac{2+x^2-x\sqrt{x^2+4}}{x^2+4+x\sqrt{x^2+4}}\right) = \frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2\sqrt{x^2+4}}$$

bulunur. Böylece

$$F_{n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^n \frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2\sqrt{x^2+4}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\left(\frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^n \frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2\sqrt{x^2+4}}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$F_{n+1}(x) = \frac{\mathrm{r_1}^n \mathrm{r_1}}{\mathrm{r_1}-\mathrm{r_2}} - \frac{\mathrm{r_2}^n \mathrm{r_2}}{\mathrm{r_1}-\mathrm{r_2}} = \frac{\mathrm{r_1}^{n+1}-\mathrm{r_2}^{n+1}}{\mathrm{r_1}-\mathrm{r_2}}$$

olur. O halde iddia $n+1$ için doğrudur.

Diğer yandan $n = 0$ için

$$F_0(x) = \frac{\mathrm{r}_1{}^0 - \mathrm{r}_2{}^0}{\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2} = 0$$

olup iddia doğrudur. Şimdi de $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$F_{-n}(x) = \frac{\mathrm{r}_1{}^{-n} - \mathrm{r}_2{}^{-n}}{\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2}$$

olduğunu gösterelim.

$$F_{-n}(x) = \frac{\mathrm{r}_1{}^{-n} - \mathrm{r}_2{}^{-n}}{\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2} = \frac{\frac{1}{\mathrm{r}_1{}^n} - \frac{1}{\mathrm{r}_2{}^n}}{\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2}$$

$$= \frac{\frac{\mathrm{r}_2{}^n - \mathrm{r}_1{}^n}{(-1)^n}}{\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2}$$

$$= \frac{(-1)^n(\mathrm{r}_2{}^n - \mathrm{r}_1{}^n)}{\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}(\mathrm{r}_1{}^n - \mathrm{r}_2{}^n)}{\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2}$$

$$= (-1)^{n+1}F_n(x)$$

elde edilir. O halde her $n \in \mathbb{Z}$ için iddia doğrudur.

Teorem 3.6.1.2: $\forall\, n \in \mathbb{Z}$ için

$$\mathrm{r}_1{}^{n} = \mathrm{r}_1 F_n(x) + F_{n-1}(x)$$

dir.

İspat: (3.6.1.1) bağıntısı dikkate alınarak

$$\mathrm{r}_1 F_n(x) + F_{n-1}(x) = \mathrm{r}_1\left(\frac{\mathrm{r}_1{}^{n} - \mathrm{r}_2{}^{n}}{\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2}\right) + \frac{\mathrm{r}_1{}^{n-1} - \mathrm{r}_2{}^{n-1}}{\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2}$$

$$= \frac{\mathrm{r}_1{}^{n+1} - \mathrm{r}_1\mathrm{r}_2{}^{n} + \mathrm{r}_1{}^{n-1} - \mathrm{r}_2{}^{n-1}}{\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2}$$

$$= \frac{\mathrm{r}_1{}^{n}\left(\mathrm{r}_1 + \frac{1}{\mathrm{r}_1}\right)}{\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2} - \frac{\mathrm{r}_2{}^{n}\left(\mathrm{r}_1 + \frac{1}{\mathrm{r}_2}\right)}{\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2}$$

olur. Burada $\mathrm{r}_1\mathrm{r}_2 = -1$ ve $\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2 = \sqrt{x^2+4}$ olduğu kullanılırsa

$$\mathrm{r}_1 F_n(x) + F_{n-1}(x) = \frac{\mathrm{r}_1{}^{n}(\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2)}{\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2} = \mathrm{r}_1{}^{n}$$

bağıntısı doğrulanır.

Teorem 3.6.1.3: $\forall\, n \in \mathbb{Z}$ için

$$\mathrm{r}_2{}^{n} = \mathrm{r}_2 F_n(x) + F_{n-1}(x)$$

dir.

İspat: (3.6.1.1) bağıntısı dikkate alınarak

$$\mathrm{r}_2 F_n(x) + F_{n-1}(x) = \mathrm{r}_2\left(\frac{\mathrm{r}_1{}^n - \mathrm{r}_2{}^n}{\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2}\right) + \frac{\mathrm{r}_1{}^{n-1} - \mathrm{r}_2{}^{n-1}}{\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2}$$

$$= \frac{-\mathrm{r}_2{}^{n+1} - \mathrm{r}_1{}^n \mathrm{r}_2 + \mathrm{r}_1{}^{n-1} - \mathrm{r}_2{}^{n-1}}{\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2}$$

$$= \frac{\mathrm{r}_1{}^n\left(\frac{1}{\mathrm{r}_1} - \mathrm{r}_2\right)}{\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2} - \frac{\mathrm{r}_2{}^n\left(\mathrm{r}_2 + \frac{1}{\mathrm{r}_2}\right)}{\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2}$$

olur. Burada $\mathrm{r}_1\mathrm{r}_2 = -1$ ve $\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2 = \sqrt{x^2 + 4}$ olduğu kullanılırsa

$$\mathrm{r}_2 F_n(x) + F_{n-1}(x) = \frac{-\mathrm{r}_2{}^n(\mathrm{r}_2 - \mathrm{r}_1)}{\mathrm{r}_1 - \mathrm{r}_2} = \mathrm{r}_2{}^n$$

bağıntısı doğrulanır.

Teorem 3.6.1.4: (İlk n Fibonacci Polinomunun Toplamı)

$n \geq 1$ olacak şekilde bir tamsayı olmak üzere ilk n Fibonacci polinomunun toplamı

$$\sum_{i=1}^{n} F_i(x) = \frac{F_{n+1}(x) + F_n(x) - 1}{x}$$

dir (Falcon and Plaza 2009).

İspat: İspatı tümevarım yöntemi ile yapalım. $n = 1$ için

$$\frac{F_2(x) + F_1(x) - 1}{x} = \frac{x + 1 - 1}{x} = 1 = F_1(x)$$

olup bağıntı doğrudur. $k \leq n$ için eşitliğin doğru olduğunu kabul edelim. O halde $n + 1$ için

$$\sum_{i=1}^{n+1} F_i(x) = \sum_{i=1}^{n} F_i(x) + F_{n+1}(x)$$

$$= \frac{F_{n+1}(x) + F_n(x) - 1}{x} + F_{n+1}(x)$$

$$= \frac{F_{n+1}(x) + F_n(x) - 1 + xF_{n+1}(x)}{x}$$

$$= \frac{F_{n+2}(x) + F_{n+1}(x) - 1}{x}$$

olduğundan bağıntı tüm pozitif tamsayılar için doğrudur.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. p^2 Mertebeden Birimli, Sonlu Halkaların Fibonacci Dizileri ve Periyotları

Bu bölümde B. Fine'ın sınıflandırmış olduğu 11 tane p^2 mertebeden halkalardan birimli olan ve

$$A = \langle a \mid p^2 a = 0, a^2 = a \rangle$$

$$B = \langle a, b \mid pa = pb = 0, a^2 = a, b^2 = b, ab = ba = 0 \rangle = \mathbb{Z}_p + \mathbb{Z}_p$$

$$C = \langle a, b \mid pa = pb = 0, a^2 = 0, b^2 = b, ab = a, ba = a \rangle$$

temsillerine sahip halkaların Fibonacci dizilerinin periyotları hesaplandı. Bunun için A_0, A_1 birim elemanlı bir halkanın keyfi elemanları ve bu halkanın sıfır elemanı 0, birim elemanı 1 olmak üzere $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ için DeCarli'nin birimli halkalar üzerinden tanımladığı

$$F_{n+2} = A_1 F_{n+1} + A_0 F_n$$

bağıntısı kullanılarak A, B ve C halkalarının Fibonacci dizileri oluşturuldu. A halkasının periyodu $h_2(p^2)$, B halkasının periyodu 2 ve C halkasının periyodu ise keyfi elemanlarına bağlı olarak p ya da $2p$ olarak hesaplandı.

Teorem 4.1.1: Herhangi p asal sayısı için a elemanı ile gerilen p^2 mertebeden halka

$$A = \langle a \mid p^2 a = 0, a^2 = a \rangle$$

olsun. Bu halkanın Fibonacci dizisinin periyodu $h_2(p^2)$ dir. Yani $P(A; a, a) = h_2(p^2)$ dir (Taşyurdu and Gültekin 2013).

İspat: Tanım 3.5.2 den $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ olmak üzere $A_0 = a$, $A_1 = a$ için

$$F_{n+2} = A_1 F_{n+1} + A_0 F_n$$

bağıntısı kullanılırsa A halkasının temsilinden

$$\begin{aligned}
F_0 &= 0,\\
F_1 &= 1,\\
F_2 &= a1 + a0\\
&= a,\\
F_3 &= aa + a1\\
&= a^2 + a\\
&= a + a\\
&= 2a,\\
F_4 &= a(2a) + aa\\
&= a(a+a) + a^2\\
&= a^2 + a^2 + a^2\\
&= 3a^2\\
&= 3a,\\
F_5 &= a(3a) + a(2a)\\
&= a(a+a+a) + a(a+a)\\
&= a^2 + a^2 + a^2 + a^2 + a^2\\
&= 5a^2\\
&= 5a,\\
&\ \dots\\
F_n &= af_n^{(2)},\\
F_{n+1} &= af_{n+1}^{(2)},\\
F_{n+2} &= a\left(f_{n+1}^{(2)}a\right) + a\left(f_n^{(2)}\right)\\
&= a\left(\underbrace{a + a + \cdots + a}_{f_{n+1}^{(2)}}\right) + a\left(\underbrace{a + a + ..+a}_{f_n^{(2)}}\right)
\end{aligned}$$

$$= f_{n+1}^{(2)}a^2 + f_n^{(2)}a^2$$
$$= f_{n+1}^{(2)}a + f_n^{(2)}a$$
$$= \left(f_{n+1}^{(2)} + f_n^{(2)}\right)a$$
$$= f_{n+2}^{(2)}a\ ,$$
...

olup

$$0{,}1, a, 2a, 3a, 5a, 8a, 13a, 21a, 34a, \dots, f_n^{(2)}a, f_{n+1}^{(2)}a, f_{n+2}^{(2)}a, \dots$$

dizisi elde edilir. $n \geq 2$ için $f_n^{(2)}$, 2-adım Fibonacci dizisinin $n.$ sayısı ve $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ olmak üzere oluşan bu dizinin her bir F_n elemanı $f_n^{(2)}a$ şeklindedir. Yani her bir F_n elemanının katsayısı $f_n^{(2)}$ dir. Dolayısıyla bu F_n elemanının katsayıları arasında $n \geq 2$ için $f_0^{(2)} = 0$, $f_1^{(2)} = 1$ olmak üzere

$$f_n^{(2)} = f_{n-1}^{(2)} + f_{n-2}^{(2)}$$

bağıntısı vardır. Dizinin periyodu F_n elemanının katsayısı olan $f_n^{(2)}$ sayısı yani p asal sayısına göre belirlenir. Şimdi p asal sayısına göre dizinin periyodunu belirleyelim. $p \geq 2$ için $f_n^{(2,p^2)} = f_n^{(2)}(mod p^2)$ olmak üzere $n \geq 2$ için bu dizinin her bir F_n elemanı $f_n^{(2,p^2)}a$ şeklindedir. Oluşan bu dizinin elemanlarının katsayıları arasında $n \geq 2$ için $f_0^{(2,p^2)} = 0$, $f_1^{(2,p^2)} = 1$ olmak üzere

$$f_n^{(2,p^2)} = f_{n-1}^{(2,p^2)} + f_{n-2}^{(2,p^2)}$$

bağıntısı vardır. Yani katsayılar $f(2, p^2)$ dizisinin elemanlarıdır. Teorem 3.4.1.2 den $f(2, p^2)$ dizisinin periyodu $h_2(p^2)$ olduğundan bu dizinin periyodu $h_2(p^2)$ dir. Yani $P(A; a, a) = h_2(p^2)$ dir.

Teorem 4.1.2: Herhangi p asal sayısı için a ve b elemanları ile gerilen p^2 mertebeden halka

$$B = \langle a, b \mid pa = pb = 0, a^2 = a, b^2 = b, ab = ba = 0 \rangle = \mathbb{Z}_p + \mathbb{Z}_p$$

olsun. Bu halkanın Fibonacci dizisinin periyodu 2 dir. Yani $P(B; a, b) = P(B; b, a) = 2$ dir (Taşyurdu and Gültekin 2013).

İspat: Tanım 3.5.2 den $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ olmak üzere $A_0 = a$, $A_1 = b$ için

$$F_{n+2} = A_1 F_{n+1} + A_0 F_n$$

bağıntısı kullanılırsa B halkasının temsilinden

$$\begin{aligned}
F_0 &= 0, \\
F_1 &= 1, \\
F_2 &= b1 + a0 \\
&= b, \\
F_3 &= bb + a1 \\
&= b^2 + a \\
&= a + b, \\
F_4 &= b(a + b) + ab \\
&= ba + b^2 + ab \\
&= 0 + b + 0 \\
&= b, \\
F_5 &= bb + a(a + b) \\
&= b^2 + a^2 + ab \\
&= b + a + 0 \\
&= a + b,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
F_6 &= b(a+b)+ab \\
&= ba+b^2+ab \\
&= 0+b+0 \\
&= b, \\
F_7 &= bb+a(a+b) \\
&= b^2+a^2+ab \\
&= b+a+0 \\
&= a+b, \\
&\dots \\
F_n &= b, \\
F_{n+1} &= a+b\ , \\
F_{n+2} &= b(a+b)+ab \\
&= ba+b^2+ab \\
&= 0+b+0 \\
&= b, \\
F_{n+3} &= bb+a(a+b) \\
&= b^2+a^2+ab \\
&= b+a+0 \\
&= a+b, \\
&\dots
\end{aligned}
$$

olup

$$0,1,b,a+b,b,a+b,\dots,b,a+b,\dots$$

dizisi elde edilir. Bu halkanın dizisi belli bir noktadan sonra sabit bir alt dizinin tekrarından oluşuyor. Dolayısıyla B halkasının Fibonacci dizisi periyodiktir. Tekrar eden alt dizinin eleman sayısı 2 olduğundan bu halkanın periyodu 2 dir. Yani $P(B;a,b)=2$ dir.

Benzer olarak Tanım 3.5.2 den $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ olmak üzere $A_0 = b$, $A_1 = a$ için

$$F_{n+2} = A_1 F_{n+1} + A_0 F_n$$

bağıntısı kullanılırsa B halkasının temsilinden

$$\begin{aligned}
F_0 &= 0,\\
F_1 &= 1,\\
F_2 &= a1 + b0\\
&= a,\\
F_3 &= aa + b1\\
&= a^2 + b\\
&= a + b,\\
F_4 &= a(a+b) + ba\\
&= a^2 + ab + ba\\
&= a + 0 + 0\\
&= a,\\
F_5 &= aa + b(a+b)\\
&= a^2 + ba + b^2\\
&= a + 0 + b\\
&= a + b,\\
F_6 &= a(a+b) + ba\\
&= a^2 + ab + ba\\
&= a + 0 + 0\\
&= a,\\
F_7 &= aa + b(a+b)\\
&= a^2 + ba + b^2\\
&= a + 0 + b\\
&= a + b,\\
&\dots
\end{aligned}$$

$F_n \ = a,$

$F_{n+1} = a + b \ ,$

$F_{n+2} \ = a(a+b) + ba$

$\quad\quad = a^2 + ab + ba$

$\quad\quad = a + 0 + 0$

$\quad\quad = a,$

$F_{n+3} = aa + b(a+b)$

$\quad\quad = a^2 + ba + b^2$

$\quad\quad = a + 0 + b$

$\quad\quad = a + b,$

$\quad\quad$ ...

olup

$$0{,}1, a, a+b, a, a+b, \dots, a, a+b, \dots$$

dizisi elde edilir. Bu halkanın dizisi belli bir noktadan sonra sabit bir alt dizinin tekrarından oluşuyor. Dolayısıyla B halkasının Fibonacci dizisi periyodiktir. Tekrar eden alt dizinin eleman sayısı 2 olduğundan bu halkanın periyodu 2 dir. Yani $P(B; b, a) = 2$ dir. Sonuç olarak $P(B; a, b) = P(B; b, a) = 2$ dir.

Teorem 4.1.3: Herhangi p asal sayısı için a ve b elemanları ile gerilen p^2 mertebeden halka

$$C = \langle a, b \ \mid \ pa = pb = 0, a^2 = 0, b^2 = b, ab = a, ba = a \ \rangle$$

olsun. Bu halkanın Fibonacci dizisinin periyodu p ya da $2p$ dir. Yani $P(C; a, b) = p$ ve $P(C; b, a) = 2p$ dir (Taşyurdu and Gültekin 2013).

İspat: Tanım 3.5.2 den $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ olmak üzere $A_0 = a$, $A_1 = b$ için

$$F_{n+2} = A_1 F_{n+1} + A_0 F_n$$

bağıntısı kullanılırsa C halkasının temsilinden

$$
\begin{aligned}
F_0 &= 0,\\
F_1 &= 1,\\
F_2 &= b1 + a0\\
&= b,\\
F_3 &= bb + a1\\
&= b^2 + a\\
&= b + a,\\
F_4 &= b(b + a) + ab\\
&= ba + b^2 + ab\\
&= a + b + a\\
&= b + 2a,\\
F_5 &= b(b + 2a) + a(b + a)\\
&= b^2 + 2ba + ab + a^2\\
&= b + 2a + a + 0\\
&= b + 3a,\\
F_6 &= b(b + 3a) + a(b + 2a)\\
&= b(b + a + a + a) + a(b + a + a)\\
&= b^2 + ba + ba + ba + ab + a^2 + a^2\\
&= b + a + a + a + a + 0 + 0\\
&= b + 4a,\\
&\dots\\
F_{n-2} &= b + (n - 4)a\ ,\\
F_{n-1} &= b + (n - 3)a\ ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_n &= b(b+(n-3)a)+a(b+(n-4)a)\\
&= b^2+b\big((n-3)a\big)+ab+a((n-4)a)\\
&= b+b\Bigg(\underbrace{a+a+\cdots+a}_{n-3}\Bigg)+a+a\Bigg(\underbrace{a+a+\cdots+a}_{n-4}\Bigg)\\
&= b+ba+ba+\cdots+ba+a+a^2+a^2+\cdots+a^2,\\
&= b+\underbrace{a+a+\cdots+a}_{n-2}+0+0+\cdots+0\\
&= b+(n-2)a\ ,\\
&\ \ \dots
\end{aligned}
$$

olup

$$0{,}1, b, b+a, b+2a, b+3a, \dots, b+(n-4)a, b+(n-3)a, b+(n-2)a, \dots$$

dizisi elde edilir. Oluşan bu dizinin her bir $(n+2)$. elemanı $n \in \mathbb{N}$ için $b+na$ şeklindedir. Bu elemanın a teriminin katsayıları ardışık doğal sayılar ve b teriminin katsayısı 1 dir. Dizinin periyodu a teriminin katsayısı olan temsildeki p asal sayısına göre belirlenir.

Şimdi p asal sayısını ele alarak dizinin periyodunu belirleyelim. Halkanın temsilindeki bağıntılar kullanılırsa dizinin her bir elemanı $p \geq 2$ için

$$b+na=\begin{cases} b & , \quad n=p \\ b+ta & , \quad n=t(mod\, p) \end{cases}$$

olur. Oluşan bu dizide $p \geq 2$ için kalan sınıfında p tane eleman olduğundan dizinin periyodu p dir. Dolayısıyla C halkasının Fibonacci dizisinin periyodu p dir. Yani $P(C\colon a,b)=p$ dir.

Benzer olarak Tanım 3.5.2 den $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ olmak üzere $A_0 = b$, $A_1 = a$ için

$$F_{n+2} = A_1 F_{n+1} + A_0 F_n$$

bağıntısı kullanılırsa C halkasının temsilinden

$$\begin{aligned}
F_0 &= 0,\\
F_1 &= 1,\\
F_2 &= a1 + b0\\
&= a,\\
F_3 &= aa + b1\\
&= a^2 + b\\
&= b,\\
F_4 &= ab + ba\\
&= a + a\\
&= 2a\ ,\\
F_5 &= a(2a) + bb\\
&= a(a + a) + b^2\\
&= 2a^2 + b^2\\
&= 0 + b,\\
&= b,\\
F_6 &= ab + b(2a)\\
&= a + b(a + a)\\
&= a + ba + ba\\
&= a + a + a\\
&= 3a,\\
&\dots\\
F_{2n} &= na\ ,\\
F_{2n+1} &= b\ ,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
F_{2n+2} &= ab + b(na) \\
&= a + b\Big(\underbrace{a + a + \cdots + a}_{n}\Big) \\
&= a + ba + ba + \cdots + ba \\
&= \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n+1} \\
&= (n+1)a \\
&\ \ \ldots
\end{aligned}
$$

olup

$$0,1,a,b,2a,b,\ldots,na,b,(n+1)a,\ldots$$

dizisi elde edilir. $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ olmak üzere $m \in \mathbb{Z}^+$ için bu dizinin her bir n. elemanı

$$F_n = \begin{cases} ma \quad , & n = 2m \\ b \quad , & n = 2m+1 \end{cases}$$

şeklindedir.

Halkanın dizisini

$$0,1,\underbrace{a}_{A_0},\underbrace{b}_{B_0},\underbrace{2a}_{A_1},\underbrace{b}_{B_1},\underbrace{3a}_{A_2},\underbrace{b}_{B_2},\ldots,\underbrace{na}_{A_n},\underbrace{b}_{B_n},\underbrace{(n+1)a}_{A_{n+1}},\underbrace{b}_{B_{n+1}},\ldots$$

olarak alalım. Yani A_n ve B_n gibi iki diziye ayıralım. p asal sayısına göre dizinin periyodunu belirleyelim. A_n dizisinde $p \geq 2$ için kalan sınıfında p tane eleman vardır. B_n dizisinde ise b elemanı p tane olup C halkasının Fibonacci dizisinin periyodu $2p$ dir. Yani $P(C;b,a) = 2p$ dir. Sonuç olarak $P(C;a,b) = p$ ve $P(C;b,a) = 2p$ dir.

Sonuç 4.1.4:

i. Teorem 4.1.1 den A halkasının karakteristiği $Kar(A)$ olmak üzere bu halkanın Fibonacci dizisinin periyodu $h_2\big(Kar(A)\big)$ dir. Yani $P(A;a,a) = h_2\big(Kar(A)\big)$ dir.

ii. Teorem 4.1.3 den C halkasının karakteristiği $Kar(C)$ olmak üzere bu halkanın Fibonacci dizisinin periyodu $Kar(C)$ dir. Yani $P(C;a,b) = Kar(C)$ dir.

4.2. p^2 Mertebeden Sonlu Cismin Fibonacci Dizisi ve Periyodu

Bu bölümde B. Fine'ın sınıflandırmış olduğu 11 tane p^2 mertebeden halkalardan

$$GF(p^2) = \begin{cases} \langle a,b\,;\ pa = pb = 0, a^2 = a, b^2 = ja, ab = b, ba = b\rangle \\ \hfill p \neq 2 \text{ için } j\,,\ \mathbb{Z}_p \text{ de kare değil} \\ \langle a,b\,; 2a = 2b = 0, a^2 = a, b^2 = a+b, ab = b, ba = b\rangle \\ \hfill p = 2 \end{cases}$$

temsiline sahip cismin Fibonacci periyodu hesaplanmıştır. Bunun için A_0, A_1 birim elemanlı bir halkanın keyfi elemanları ve bu halkanın sıfır elemanı 0, birim elemanı 1 olmak üzere $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ için DeCarli'nin birimli halkalar üzerinden tanımladığı

$$F_{n+2} = A_1 F_{n+1} + A_0 F_n$$

bağıntısı kullanılarak periyodun temsilde verilen j sayısına göre değiştiği görüldü.

Konjüktür 4.2.1: Herhangi p asal sayısı için a ve b elemanları ile gerilen p^2 mertebeden cisim

$$GF(p^2) = \begin{cases} \langle a, b\,;\ \ pa = pb = 0, a^2 = a, b^2 = ja, ab = b, ba = b \rangle \\ \qquad\qquad p \neq 2 \; için \; j\,,\ \ Z_p \; de \; kare \; değil \\ \langle a, b\,; 2a = 2b = 0, a^2 = a, b^2 = a + b, ab = b, ba = b \rangle \\ \qquad\qquad\qquad\qquad p = 2 \end{cases}$$

olsun. Tanım 3.5.2 den $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ olmak üzere $A_0 = a$, $A_1 = b$ için

$$F_{n+2} = A_1 F_{n+1} + A_0 F_n$$

bağıntısı kullanılırsa $GF(p^2)$ cisminin Fibonacci dizisi;

i. $j = p - 1$ için

$$0{,}1, b, 0, b, ja, 0, ja, jb, 0, jb, a, 0, a, b, 0, \ldots$$

şeklinde olup periyodiktir ve periyodu 12,

ii. $j = p - 2$ için

$$0{,}1, b, (j+1)a, 0, (j+1)a, (j+1)b, a, 0, a, b, (j+1)a, \ldots$$

şeklinde olup periyodiktir ve periyodu 8,

iii. $j = p - 3$ için

$$0{,}1, b, (j+1)a, (j+2)b, a, 0, a, b, (j+1)a, \ldots$$

şeklinde olup periyodiktir ve periyodu 6,

iv. $j = p - 4$ ise

$$\underbrace{0,1,b,(j+1)a,(j+2)b,\underbrace{(4k+1)a,(2k+1)b,\big(j-(4k-1)\big)a,\big(j-(2k-2)\big)b,}_{k=1}}_{A_0}$$

$$\underbrace{\underbrace{(4k+1)a,(2k+1)b,\big(j-(4k-1)\big)a,\big(j-(2k-2)\big)b}_{k=2},\ldots,\underbrace{(4k+1)a,(2k+1)b,}_{k=r}}_{A_0}$$

$$\underbrace{\underbrace{\big(j-(4k-1)\big)a,\big(j-(2k-2)\big)b}_{k=r},\underbrace{(4k+1)a,(2k+1)b}_{k=r+1},(4k+1)a,(2k+1)b,\ldots,}_{A_1}$$

$$\underbrace{\underbrace{(4k+1)a,(2k+1)b,}_{k=s}}_{A_1}\underbrace{\underbrace{\big(j-(4k-1)\big)a,\big(j-(2k-2)\big)b}_{k=s},\underbrace{(4k+1)a,(2k+1)b,}_{k=s+1}}_{A_2}$$

$$\underbrace{(4k+1)a,(2k+1)b,\ldots,\underbrace{(4k+1)a,(2k+1)b}_{k=t}}_{A_2},0,1,b,(j+1)a,\ldots$$

olup periyodiktir ve periyodu $4p$ dir.

Şimdi Konjüktür 4.2.1 in her durumu için sırası ile birer örnek verelim.

Örnek 4.2.2:

i. $p = 11$ için $GF(11^2)$ cisminin temsili

$$GF(11^2) = \langle a,b\,;\ 11a = 11b = 0, a^2 = a, b^2 = ja, ab = b, ba = b\rangle$$

şeklindedir.

j , $\mathbb{Z}_{11}$ kümesinde kare olmayan bir elemandır. $\mathbb{Z}_{11} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}\}$ kümesinden

$0^2 = 0\,, 1^2 = 1,\; 2^2 = 4\,,\; 3^2 = 9\,,\; 4^2 = 5\,,\; 5^2 = 3\,,\; 6^2 = 3\,,\; 7^2 = 5\,,\; 8^2 = 9\,, 9^2 = 4\,,$ $10^2 = 1$

yazılır. Buradan $\mathbb{Z}_{11}$ kümesinde kare olan elemanların kümesi $A = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{9}\}$ ve kare olmayan elemanların kümesi $B = \{\overline{2}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{10}\}$ dir. Dolayısıyla j, B kümesinin bir elemanıdır.

Konjüktür 4.2.1 deki i. şıkkın uygulaması olarak $j = 11 - 1 = 10$ olup cismin temsili

$$GF(11^2) = \langle a, b\,;\;\; 11a = 11b = 0, a^2 = a, b^2 = 10a, ab = b, ba = b \rangle$$

şeklinde olur. Tanım 3.5.2 den $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ olmak üzere $A_0 = a$, $A_1 = b$ için

$$F_{n+2} = A_1 F_{n+1} + A_0 F_n$$

bağıntısı kullanılırsa

$F_0 = 0,$

$F_1 = 1,$

$F_2 = b1 + a0$
$\quad = b,$

$F_3 = bb + a1$
$\quad = b^2 + a$
$\quad = 10a + a$
$\quad = 11a$
$\quad = 0,$

$F_4 = b0 + ab$
$\quad = b,$

$$
\begin{aligned}
F_5 &= bb + a0 \\
&= b^2 \\
&= 10a, \\
F_6 &= b(10a) + ab \\
&= b\left(\underbrace{a + a + \cdots + a}_{10}\right) + b \\
&= \underbrace{ba + ba + \cdots + ba}_{10} + b \\
&= \left(\underbrace{b + b + \cdots + b}_{10}\right) + b \\
&= 11b \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_7 &= b0 + a(10a) \\
&= a\left(\underbrace{a + a + \cdots + a}_{10}\right) \\
&= \underbrace{aa + aa + \cdots + aa}_{10}, \\
&= \underbrace{a^2 + a^2 + \cdots + a^2}_{10} \\
&= \underbrace{a + a + \cdots + a}_{10} \\
&= 10a,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_8 &= b(10a) + a0 \\
&= b\left(\underbrace{a + a + \cdots + a}_{10}\right) \\
&= \underbrace{ba + ba + \cdots + ba}_{10} \\
&= \left(\underbrace{b + b + \cdots + b}_{10}\right) \\
&= 10b,
\end{aligned}
$$

$$F_9 = b(10b) + a(10a)$$

$$= b\left(\underbrace{b + b + \cdots + b}_{10}\right) + a\left(\underbrace{a + a + \cdots + a}_{10}\right)$$

$$= \underbrace{b^2 + b^2 + \cdots + b^2}_{10} + \underbrace{a^2 + a^2 + \cdots + a^2}_{10}$$

$$= \underbrace{10a + 10a + \cdots + 10a}_{10} + \underbrace{a + a + a \ldots + a}_{10}$$

$$= 110a$$

$$= 0$$

$$F_{10} = b0 + a(10b)$$

$$= a\left(\underbrace{b + b + \cdots + b}_{10}\right)$$

$$= \underbrace{ab + ab + \cdots + ab}_{10}$$

$$= \underbrace{b + b + \cdots + b}_{10}$$

$$= 10b$$

$$F_{11} = b(10b) + a0$$

$$= b\left(\underbrace{b + b + \cdots + b}_{10}\right)$$

$$= \underbrace{b^2 + b^2 + \cdots + b^2}_{10}$$

$$= \underbrace{10a + 10a + \cdots + 10a}_{10}$$

$$= 100a$$

$$= a$$

$$F_{12} = ba + a\left(\underbrace{b + b + \cdots + b}_{10}\right)$$

$$= b + \underbrace{ab + ab + \cdots + ab}_{10}$$

$$= b + \underbrace{b + b + \cdots + b}_{10}$$

$$= 11b$$

$$= 0$$

$F_{13} = b0 + aa$

$= a^2$

$= a$

$F_{14} = ba + a0$

$= b$

$F_{15} = bb + aa$

$= b^2 + a^2$

$= 10a + a$

$= 11a$

$= 0$

...

olup

$$0,1, b, 0, b, 10a, 0,10a, 10b, 0,10b, a, 0, a, b, 0, \ldots$$

dir.

$j = 10$ için

$$0,1, b, 0, b, ja, 0, ja, jb, 0, jb, a, 0, a, b, \ldots$$

elde edilir. Dolayısıyla Fibonacci dizisi periyodiktir ve periyodu 12 dir.

ii. $p = 13$ için $GF(13^2)$ cisminin temsili

$$GF(13^2) = \langle a, b\ ;\ \ 13a = 13b = 0, a^2 = a, b^2 = ja, ab = b, ba = b \rangle$$

dir. Cismin temsilindeki j, $\mathbb{Z}_{13}$ kümesinde kare olmayan bir elemandır.

$\mathbb{Z}_{13} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}\}$ kümesinden

$0^2 = 0, 1^2 = 1,\ 2^2 = 4,\ 3^2 = 9,\ 4^2 = 3,\ 5^2 = 12,\ 6^2 = 10,\ 7^2 = 10,\ 8^2 = 12, 9^2 = 3,$
$10^2 = 9,\ 11^2 = 9,\ 12^2 = 1$

yazılır. Buradan $\mathbb{Z}_{13}$ kümesinde kare olan elemanların kümesi $A = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{12}\}$ ve kare olmayan elemanların kümesi $B = \{\overline{2}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{11}\}$ dir. Dolayısıyla j, B kümesinin bir elemanıdır.

Konjüktür 4.2.1 deki ii. şıkkın uygulaması olarak $j = 13 - 2 = 11$ olup cismin temsili

$$GF(13^2) = \langle a, b\ ;\ \ 13a = 13b = 0, a^2 = a, b^2 = 11a, ab = b, ba = b \rangle$$

şeklinde olur. Tanım 3.5.2 den $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ olmak üzere $A_0 = a$, $A_1 = b$ için

$$F_{n+2} = A_1 F_{n+1} + A_0 F_n$$

bağıntısı kullanılırsa

$$\begin{aligned}
F_0 &= 0, \\
F_1 &= 1, \\
F_2 &= b1 + a0 \\
&= b, \\
F_3 &= bb + a1 \\
&= b^2 + a \\
&= 11a + a \\
&= 12a, \\
F_4 &= b(12a) + ab \\
&= 12ba + b \\
&= 12b + b \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
F_5 &= b0 + a(12a) \\
&= 12a^2 \\
&= 12a, \\
F_6 &= b(12a) + a0 \\
&= 12ba \\
&= 12b, \\
F_7 &= b(12b) + a(12a) \\
&= 12b^2 + 12a^2 \\
&= 12(11a) + 12a \\
&= 144a \\
&= a, \\
F_8 &= ba + a(12b) \\
&= b + 12ab \\
&= b + 12b \\
&= 13b \\
&= 0, \\
F_9 &= b0 + aa \\
&= a^2 \\
&= a, \\
F_{10} &= ba + a0 \\
&= b, \\
F_{11} &= bb + aa \\
&= b^2 + a^2 \\
&= 11a + a \\
&= 12a, \\
&\dots
\end{aligned}
$$

olup

$$0,1,b,12a,0,12a,12b,a,0,a,b,12a,\dots$$

dir.

$j = 11$ için

$$0,1, b, (j+1)a, 0, (j+1)a, (j+1)b, a, 0, a, b, \ldots$$

elde edilir. Dolayısıyla Fibonacci dizisi periyodiktir ve periyodu 8 dir.

iii. $p = 17$ için $GF(17^2)$ cisminin temsili

$$GF(17^2) = \langle a, b\ ;\ \ 17a = 17b = 0, a^2 = a, b^2 = ja, ab = b, ba = b \rangle$$

olup j, $\mathbb{Z}_{17}$ kümesinde kare olmayan bir elemandır.

$\mathbb{Z}_{17} = \{ \overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{16} \}$ kümesinden

$0^2 = 0, 1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4^2 = 16$, $5^2 = 8$, $6^2 = 2$, $7^2 = 15$, $8^2 = 13, 9^2 = 13$, $10^2 = 15$, $11^2 = 2$, $12^2 = 8$, $13^2 = 16$, $14^2 = 9$, $15^2 = 4$, $16^2 = 1$

yazılır. Buradan $\mathbb{Z}_{17}$ kümesinde kare olan elemanların kümesi $A = \{ \overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{13}, \overline{15} \}$ ve kare olmayan elemanların kümesi $B = \{ \overline{3}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{14}, \}$ dir. Dolayısıyla j, B kümesinin bir elemanıdır.

Konjüktür 4.2.1 deki iii. şıkkın uygulaması olarak $j = 17 - 3 = 14$ olup cismin temsili

$$GF(17^2) = \langle a, b\ ;\ \ 17a = 17b = 0, a^2 = a, b^2 = 14a, ab = b, ba = b \rangle$$

şeklinde olur.

Tanım 3.5.2 den $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ olmak üzere $A_0 = a$, $A_1 = b$ için

$$F_{n+2} = A_1 F_{n+1} + A_0 F_n$$

bağıntısı kullanılırsa

$$\begin{aligned}
F_0 &= 0, \\
F_1 &= 1, \\
F_2 &= b1 + a0 \\
&= b, \\
F_3 &= bb + a1 \\
&= b^2 + a \\
&= 14a + a \\
&= 15a, \\
F_4 &= b(15a) + ab \\
&= 15ba + b \\
&= 15b + b \\
&= 16b, \\
F_5 &= b(16b) + a(15a) \\
&= 16b^2 + 15a^2 \\
&= 16(14a) + 15a \\
&= 239a \\
&= a, \\
F_6 &= ba + a(16b) \\
&= b + 16ab \\
&= b + 16b \\
&= 17b \\
&= 0, \\
F_7 &= b0 + aa \\
&= 0 + a^2 \\
&= a,
\end{aligned}$$

$F_8 = ba + a0$

$\quad = b,$

$F_9 = bb + aa$

$\quad = b^2 + a^2$

$\quad = 14a + a$

$\quad = 15a,$

...

olup

$$0,1, b, 15a, 16b, a, 0, a, b, 15a, \ldots$$

dizisi elde edilir. $j = 14$ için

$$0,1, b, (j+1)a, (j+2)b, a, 0, a, b, (j+1)a, \ldots$$

elde edilir. Dolayısıyla Fibonacci dizisi periyodiktir ve periyodu 6 dir.

iv. $p = 19$ için $GF(19^2)$ cisminin temsili

$$GF(19^2) = \langle a, b\,;\ \ 19a = 19b = 0, a^2 = a, b^2 = ja, ab = b, ba = b\rangle$$

dir. Cismin temsilindeki j, $\mathbb{Z}_{19}$ kümesinde kare olmayan bir elemandır.

$\mathbb{Z}_{19} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{18}\}$ kümesinden

$0^2 = 0, 1^2 = 1, 2^2 = 4, 3^2 = 9, 4^2 = 16, 5^2 = 6, 6^2 = 17, 7^2 = 11, 8^2 = 7, 9^2 = 5$
$10^2 \equiv (-9)^2 = 5, \ldots$

dir.

Benzer şekilde devam edilirse $\mathbb{Z}_{19}$ kümesinde kare olan elemanların kümesi $A = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{9}, \overline{11}, \overline{16}, \overline{17}\}$ ve kare olmayan elemanların kümesi $B = \{\overline{2}, \overline{3}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{18},\}$ dir. Dolayısıyla j, B kümesinin bir elemanıdır.

Konjüktür 4.2.1 deki iv. şıkkın uygulaması olarak $j = 19 - 4 = 15$ olup cismin temsili

$$GF(p^2) = \langle a, b\,;\ \ 19a = 19b = 0, a^2 = a, b^2 = 15a, ab = b, ba = b\rangle$$

şeklinde olur. Tanım 3.5.2 den $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ olmak üzere $A_0 = a$, $A_1 = b$ için

$$F_{n+2} = A_1 F_{n+1} + A_0 F_n$$

bağıntısı kullanılırsa

$0,1, b, 16a, 17b, 5a, 3b, 12a, 15b, 9a, 5b, 8a, 13b, 13a, 7b, 4a, 11b, 17a, 9b,$

$0,9b, 2a, 11b, 15a, 7b, 6a, 13b, 11a, 5b, 10a, 15b, 7a, 3b, 14a, 17b, 3a, b, 18a$

$0,18a, 18b, 3a, 2b, 14a, 16b, 7a, 4b, 10a, 14b, 11a, 6b, 6a, 12b, 15a, 8b, 2a, 10b$

$0,10b, 17a, 8b, 4a, 12b, 13a, 6b, 8a, 14b, 9a, 4b, 12a, 16b, 5a, 2b, 16a, 18b, a,$

$0,1, b, 16a, \ldots$

elde edilir. Dolayısıyla Fibonacci dizisi periyodiktir ve periyodu $4.19 = 76$ dır.

4.3. Keyfi Bir Halka Üzerinden Fibonacci Sayılarının Bazı Özellikleri

Bu bölümde Teorem 3.2.1. de verilen Fibonacci sayılarının özelliklerinden bazılarının birimli keyfi bir halka üzerinden elde edilen özellikleri verildi.

R birimli keyfi bir halka ve $\{F_n\}$ de bu halka üzerinde tanımlı Fibonacci dizisi olmak üzere $n \geq 1, r \geq 0$ için

$$F_{n+r} = F_r A_0 F_{n-1} + F_{r+1} F_n$$

bağıntısı ile $n \geq 0$ için $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ ve A_0, A_1 R halkasının keyfi elemanları olmak üzere

$$F_{n+2} = A_1 F_{n+1} + A_0 F_n$$

bağıntısı kullanılarak

i. $F_n F_{n+1} - F_{n-1} F_{n+2} = F_{n-2} A_0 F_{n+1} - F_{n-1} A_0 F_n$

ii. $F_n F_m + F_{n+1} F_{m+1} = F_{n+2} F_m + F_{n+1} A_0 F_{m-1}$

iii. $F_{m-n} = F_m F_{n+1} - F_{m+1} F_n = F_m A_0 F_{n-1} - F_{m-1} A_0 F_n$

iv. $F_n^2 = F_n A_0 F_n$

şeklinde halkalar üzerinde tanımlı Fibonacci sayılarının bazı özellikleri elde edildi. Ayrıca elde edilen eşitliklerin uygulaması Konjüktür 4.2.1 kullanılarak gösterildi.

Teorem 4.3.1: $n \geq 3$ olmak üzere $F_n F_{n+1} - F_{n-1} F_{n+2} = F_{n-2} A_0 F_{n+1} - F_{n-1} A_0 F_n$ dir.

İspat: $n \geq 1$ için $F_{n+r} = F_r A_0 F_{n-1} + F_{r+1} F_n$ ve $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ için Tanım 3.5.2 kullanılırsa

$$\begin{aligned} F_n F_{n+1} - F_{n-1} F_{n+2} &= (F_{n-1} A_1 + F_{n-2} A_0) F_{n+1} - F_{n-1}(A_1 F_{n+1} + A_0 F_n) \\ &= F_{n-1} A_1 F_{n+1} + F_{n-2} A_0 F_{n+1} - F_{n-1} A_1 F_{n+1} - F_{n-1} A_0 F_n \\ &= F_{n-2} A_0 F_{n+1} - F_{n-1} A_0 F_n \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$F_n F_{n+1} - F_{n-1} F_{n+2} = F_{n-2} A_0 F_{n+1} - F_{n-1} A_0 F_n$$

dir. Konjüktür 4.2.1 in 1 i. şıkkında $p = 3$ olarak alalım. Buradan $j = 3 - 1 = 2$ olup temsil

$$GF(9) = \langle a, b \ | 3a = 3b = 0, a^2 = a, b^2 = 2a, ab = b, ba = b \rangle$$

dir. Buradan halkanın Fibonacci dizisi

F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}
0	a	b	0	b	$2a$	0	$2a$	$2b$	0	$2b$	a	0	a	b

şeklindedir. Teorem 4.3.1 in uygulaması olarak $n = 4$ alalım:

$$\begin{aligned} F_4 F_5 - F_3 F_6 &= b(2a) - 00 \\ &= b(2a) \\ &= ba(2a) \\ &= ba(2a) - 0 \\ &= ba(2a) - 0ab \\ &= F_2 A_0 F_5 - F_3 A_0 F_4 \end{aligned}$$

bağıntının sağlandığı görülür.

Teorem 4.3.2: $n > 1, m \geq 1$ için $F_nF_m + F_{n+1}F_{m+1} = F_{n+2}F_m + F_{n+1}A_0F_{m-1}$ dir.

İspat: $n \geq 1$ için $F_{n+r} = F_rA_0F_{n-1} + F_{r+1}F_n$ ve $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ için Tanım 3.5.2 kullanılırsa

$$F_nF_m + F_{n+1}F_{m+1} = F_nF_m + F_{n+1}(F_m + F_{m-1})$$

$$= F_nF_m + F_{n+1}F_m + F_{n+1}F_{m-1}$$

$$= (A_1F_{n-1} + A_0F_{n-2})F_m +$$

$$(A_1F_n + A_0F_{n-1})F_m + (F_{n+3} - F_{n+2})F_{m-1}$$

$$= A_1F_{n-1}F_m + A_0F_{n-2}F_m$$

$$A_1F_nF_m + A_0F_{n-1}F_m + F_{n+3}F_{m-1} - F_{n+2}F_{m-1}$$

$$= A_1(F_{n-1} + F_n)F_m + A_0(F_{n-2} + F_{n-1})F_m +$$

$$F_{(n+1)+2}F_{m-1} - F_{(n+1)+1}F_{m-1}$$

$$= A_1F_{n+1}F_m + A_0F_nF_m + (F_{n+1}A_0F_1 + F_{n+2}F_2)F_{m-1} -$$

$$(F_{n+1}A_0F_0 + F_{n+2}F_1)F_{m-1}$$

$$= (A_1F_{n+1} + A_0F_n)F_m + F_{n+1}A_0IF_{m-1} + F_{n+2}F_2F_{m-1} -$$

$$F_{n+1}A_0 0F_{m-1} - F_{n+2}F_1F_{m-1}$$

$$= F_{n+2}F_m + F_{n+1}A_0F_{m-1} + F_{n+2}F_2F_{m-1} - F_{n+2}F_1F_{m-1}$$

$$= F_{n+2}F_m + F_{n+1}A_0F_{m-1} + F_{n+2}(F_2 - F_1)F_{m-1}$$

$$= F_{n+2}F_m + F_{n+1}A_0F_{m-1} + F_{n+2}F_0F_{m-1}$$

$$= F_{n+2}F_m + F_{n+1}A_0F_{m-1} + F_{n+2}0F_{m-1}$$

$$= F_{n+2}F_m + F_{n+1}A_0F_{m-1}$$

elde edilir.

Dolayısıyla $n > 1, m \geq 1$ için

$$F_nF_m + F_{n+1}F_{m+1} = F_{n+2}F_m + F_{n+1}A_0F_{m-1}$$

dir. Konjüktür 4.2.1 in ii. şıkkında $p = 5$ olarak alalım. Buradan $j = 5 - 2 = 3$ olup temsil

$$GF(25) = \langle a, b \ |5a = 5b = 0, a^2 = a, b^2 = 3a, ab = b, ba = b\rangle$$

dir. Buradan halkanın Fibonacci dizisi

F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}
0	a	b	$4a$	0	$4a$	$4b$	a	0	a	b

şeklindedir. Teorem 4.3.2 nin uygulaması olarak $n = 2$ ve $m = 3$ alalım:

$$\begin{aligned} F_2F_3 + F_3F_4 &= b(4a) + (4a)0 \\ &= b(4a) \\ &= b(a + a + a + a) \\ &= ba + ba + ba + ba \\ &= ab + ab + ab + ab \\ &= (a + a + a + a)b \\ &= (4a)b \\ &= (4a)ab \\ &= 0 + (4a)ab \\ &= 0(4a) + (4a)ab \\ &= F_4F_3 + F_3A_0F_2 \end{aligned}$$

olup bağntının sağlandığı görülür.

Teorem 4.3.3: $F_{m-n} = F_m F_{n+1} - F_{m+1} F_n = F_m A_0 F_{n-1} - F_{m-1} A_0 F_n$

İspat: $n \geq 1$ için $F_{n+r} = F_r A_0 F_{n-1} + F_{r+1} F_n$ ve $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ için Tanım 3.5.2 kullanılırsa

$$\begin{aligned} F_m F_{n+1} - F_{m+1} F_n &= F_m(F_1 A_0 F_{n-1} + F_2 F_n) - (F_{m-1} A_0 F_1 + F_m F_2) F_n \\ &= F_m F_1 A_0 F_{n-1} + F_m F_2 F_n - F_{m-1} A_0 F_1 F_n - F_m F_2 F_n \\ &= F_m 1 A_0 F_{n-1} + F_m F_2 F_n - F_{m-1} A_0 1 F_n - F_m F_2 F_n \\ &= F_m A_0 F_{n-1} - F_{m-1} A_0 F_n \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$F_m F_{n+1} - F_{m+1} F_n = F_m A_0 F_{n-1} - F_{m-1} A_0 F_n$$

elde edilir.

Konjüktür 4.2.1 in i. şıkkında $p = 5$ olarak alalım. Buradan $j = 5 - 1 = 4$ olup temsil

$$GF(25) = \langle a, b \ \ | 5a = 5b = 0, a^2 = a, b^2 = 4a, ab = b, ba = b \rangle$$

dir. Buradan halkanın Fibonacci dizisi

F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}
0	a	b	0	b	$4a$	0	$4a$	$4b$	0	$4b$	a	0	a	b

şeklindedir.

Teorem 4.3.3 ün uygulaması olarak $n = 2$ ve $m = 6$ alalım:

$$
\begin{aligned}
F_6F_3 - F_7F_2 &= 00 - (4a)b \\
&= 0 - (4a)ab \\
&= 0a^2 - (4a)ab \\
&= 0(aa) - (4a)ab \\
&= F_6A_0F_1 - F_5A_0F_2
\end{aligned}
$$

olup bağıntının sağlandığı görülür.

Sonuç 4.3.4: $n \geq 2$ için $F_n^2 = F_nA_0F_n$ dir.

İspat: (3.5.2) bağıntısından $n \geq 1$ için $F_{n+r} = F_rA_0F_{n-1} + F_{r+1}F_n$ dir. Bu bağıntıda n, $n+1$ olarak ve r ise n olarak alınırsa

$$
\begin{aligned}
F_{n+r} &= F_{n+1+n} \\
&= F_nA_0F_{n+1-1} + F_{n+1}F_{n+1} \\
&= F_nA_0F_n + F_{n+1}^2
\end{aligned}
$$

olup

$$F_nA_0F_n + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$$

elde edilir. Diğer yandan Fibonacci sayılarının özelliklerinden Teorem 3.2.1 den

$$F_{n+1}^2 + F_n^2 = F_{2n+1}$$

olduğunu biliyoruz.

$F_n A_0 F_n + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$ ve $F_{n+1}^2 + F_n^2 = F_{2n+1}$ bağıntılarından

$$F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_n A_0 F_n + F_{n+1}^2$$

$$F_n^2 = F_n A_0 F_n$$

elde edilir. Konjüktür 4.2.1 in ii. şıkkında $p = 7$ olarak alalım. Buradan $j = 7 - 2 = 5$ olup temsil

$$GF(25) = \langle a, b \ \ |7a = 7b = 0, a^2 = a, b^2 = 5a, ab = b, ba = b \rangle$$

dir. Buradan halkanın Fibonacci dizisi

F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}
0	a	b	$6a$	0	$6a$	$6b$	a	0	a	b

şeklindedir.

Sonuç 4.3.4 ün uygulaması olarak;

$n = 2$ için

$$\begin{aligned} F_2^2 &= b^2 \\ &= bb \\ &= b(ab) \\ &= F_2 A_0 F_2 \end{aligned}$$

$n = 5$ için

$$\begin{aligned} F_5^2 &= (6a)^2 \\ &= (6a)(6a) \\ &= (6a)(a + a + a + a + a + a) \\ &= (6a)(a^2 + a^2 + a^2 + a^2 + a^2 + a^2) \\ &= (6a)(aa + aa + aa + aa + aa + aa) \\ &= (6a)a(a + a + a + a + a + a) \\ &= (6a)a(6a) \\ &= F_5 A_0 F_5 \end{aligned}$$

$n = 9$ için

$$\begin{aligned} F_9^2 &= a^2 \\ &= aa \\ &= a(ba) \\ &= F_5 A_0 F_5 \end{aligned}$$

olup $n \geq 2$ için bağıntının sağlandığı görülür.

4.4. Fibonacci Polinomlarının m Modülüne Göre Dizilerinin Periyodu

Bu bölümde ise Fibonacci polinomlarının derece ve katsayısının m modülüne göre dizileri elde edildi. Fibonacci polinomlarının her bir teriminin derecesi ve katsayısı m modülüne göre indirgenerek elde edilen $F_n(x)^m$ polinomlarının

$$\{F_n(x)^m\} = \{F_0(x)^m, F_1(x)^m, \dots, F_n(x)^m, \dots\}$$

dizisinin periyodik olduğu gösterildi. Ardından bu dizinin periyodunun $Q = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi tarafından gerilen devirli grubun mertebesine eşit olduğunu veren teorem verildi.

Yani

$$hF_n(x)^m = |\langle Q \rangle_m|$$

olduğu gösterildi. Ayrıca p bir asal sayı olmak üzere p modülüne göre Fibonacci dizilerinin Wall sayıları ile Fibonacci polinomlarının dizisinin periyodu karşılaştırıldığında

$$hF_n(x)^p = pk(p)$$

sağlayan teorem elde edildi. Buradan p bir asal sayı olmak üzere Fibonacci polinomlarının her bir teriminin derecesi ve katsayısı p modülüne göre indirgenerek elde edilen $F_n(x)^p$ polinomlarının dizisinin periyodunun yani $hF_n(x)^p$ nin çift sayı olduğunu gösteren teorem verildi.

Teorem 4.4.1. $\{F_n(x)^m\}$ dizisi periyodik bir dizidir (Gültekin and Taşyurdu 2013).

İspat: $F_n(x)^m$, $F_n(x)$ polinomlarının her bir teriminin derece ve katsayısının m modülüne göre indirgenmiş hali olduğunda

$$F_1(x)^m = \sum_{i=0}^{m-1} a_i x^i \qquad \text{ve} \qquad F_2(x)^m = \sum_{j=0}^{m-1} b_j x^j$$

olmak üzere $F_1(x)^m$, $0 \leq a_i \leq m-1$ için m^m şekilde yazılır. Benzer olarak $F_2(x)^m$, $0 \leq b_j \leq m-1$ için m^m şekilde yazılır. S kümesi $(F_1(x)^m, F_2(x)^m)$ eleman çiftlerinden oluşmak üzere $|S| = (m^m)^2$ olup sonludur.

S kümesi sonlu olduğundan $i > j$ için

$$F_{i+1}(x)^m = F_{j+1}(x)^m$$
$$F_{i+2}(x)^m = F_{j+2}(x)^m$$
$$F_{i+3}(x)^m = F_{j+3}(x)^m$$
$$\dots$$
$$F_{i+k}(x)^m = F_{j+k}(x)^m$$

olmak üzere i ve j doğal sayıları vardır. Bu da $\{F_n(x)^m\}$ dizisinin periyodik olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.4.2: $hF_n(x)^m = |\langle Q \rangle_m|$ dir (Gültekin and Taşyurdu 2013).

İspat: $hF_n(x)^m$ in $|\langle Q \rangle_m|$ ni böldüğü ve $|\langle Q \rangle_m|$ nin de $hF_n(x)^m$ i böldüğü gösterilirse ispat tamamlanır. Fibonacci polinomları

$$Q^n = \begin{bmatrix} F_{n+1}(x) & F_n(x) \\ F_n(x) & F_{n-1}(x) \end{bmatrix}$$

olmak üzere $Q(x) = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi ile elde edilir. Buradan $hF_n(x)^m$ in $|\langle Q \rangle_m|$ i böldüğü aşikardır.

$|\langle Q \rangle_m|$ 'nin $hF_n(x)^m$ 'i böldüğünü gösterelim. $hF_n(x)^m = t$ olsun. Periyodu t olan Fibonacci polinomlarının dizisinde $F_t(x) = 0$ ve $F_{t+1}(x) = 1$ dir. Fibonacci polinomlarının tanımından $F_{t-1}(x) = 1$ elde edilir. Teorem 3.6.4 den $Q(x) = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ olmak üzere

$$Q^t = \begin{bmatrix} F_{t+1}(x) & F_t(x) \\ F_t(x) & F_{t-1}(x) \end{bmatrix}$$

olup

$$Q^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dir. Yani $Q^t = I(mod\, m)$ olur. Bu da bize $|\langle Q \rangle_m|$ nin t yi böldüğünü gösterir. $hF_n(x)^m = t$ olduğundan $|\langle Q \rangle_m|$ i, $hF_n(x)^m$ yi böler. Dolayısıyla $hF_n(x)^m = |\langle Q \rangle_m|$ olup ispat tamamlanır.

Burada $\langle Q \rangle_m = \langle \langle Q^i(mod\, m) \rangle \ : \ \ i \geq 0 \rangle$ bir devirli grup olmak üzere $Q^i(mod\, m)$, $Q^{\text{İ}}$ matrisindeki her bir polinomun derece ve katsayısının m modülüne göre indirgenmesi anlamına gelmektedir.

Teorem 4.4.3. p bir asal sayı olmak üzere $hF_n(x)^p = pk(p)$ dir (Gültekin and Taşyurdu 2013).

İspat: Teorem 4.4.2 den $hF_n(x)^m = |\langle Q \rangle_m|$ dir. Buradan p asal sayı olmak üzere

$$hF_n(x)^p = \left|\langle Q \rangle_p\right|$$

dir. Dolayısıyla $\left|\langle Q \rangle_p\right|$ nin $pk(p)$ yi ve $pk(p)$ nin de $\left|\langle Q \rangle_p\right|$ yi böldüğü gösterilirse ispat tamamlanır. Teorem 3.6.4 den $Q(x) = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ için

$$Q^n = \begin{bmatrix} F_{n+1}(x) & F_n(x) \\ F_n(x) & F_{n-1}(x) \end{bmatrix}$$

dir.

Teorem 4.4.2 den $Q^{hF_n(x)^p} = I(mod\, p)$ dir. p modülüne göre periyodu s olan Fibonacci dizisinde $F_s = 0$ ve $F_{s+1} = 1$ olup Fibonacci dizisinin tanımından $F_{s-1}(x) = 1$ elde edilir. Buradan $k(p) = s$ yazılır. Periyodu s olan Fibonacci polinomlarının dizisinde $F_{pk(p)} = 0$ ve $F_{pk(p)+1} = 1$ olup Fibonacci polinomlarının tanımından $F_{pk(p)-1}(x) = 1$ elde edilir. Buradan

$$Q^{pk(p)} = \begin{bmatrix} F_{pk(p)+1}(x) & F_{pk(p)}(x) \\ F_{pk(p)}(x) & F_{pk(p)-1}(x) \end{bmatrix}$$

$$Q^{pk(p)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olup $Q^{pk(p)} = I(mod\, p)$ olduğu görülür. Dolayısıyla $hF_n(x)^p$, $pk(p)$ yi böler. Diğer taraftan $pk(p)$, $|\langle Q \rangle_p|$ i bölüp $|\langle Q \rangle_p| = hF_n(x)^p$ olduğundan $pk(p)$ i $hF_n(x)^p$ yi böler. Böylece $hF_n(x)^p = pk(p)$ olup ispat tamamlanır.

Teorem 4.4.4: p bir asal sayı olmak üzere $hF_n(x)^p$ çift sayıdır (Gültekin and Taşyurdu 2013).

İspat: $hF_n(x)^p = pk(p)$ olduğundan $pk(p)$'nin çift sayı olduğunu gösterirsek ispat tamamlanır. $p = 2$ için $k(2) = 3$ olup $pk(p)$ çift sayıdır. $p \geq 3$ olmak üzere Teorem 3.4.8'den $k(p)$ çift sayıdır. Dolayısıyla $pk(p)$ daima çift sayıdır. Yani $hF_n(x)^p$ çift sayıdır.

p asal sayı olmak üzere $k(p)$ değerini kullanarak Fibonacci polinomlarının derece ve katsayılarının p modülüne göre dizisinin periyodu veren tablo aşağıdadır.

Çizelge 4.1. Fibonacci polinomlarının derece ve katsayılarını p modülüne indirgeyerek elde edilen dizisinin periyodu

p	$k(p)$	$hF_n(x)^p$	Sonuç
2	3	6	$hF_n(x)^2 = 2k(2)$
7	16	112	$hF_n(x)^7 = 7k(7)$
13	28	364	$hF_n(x)^{13} = 13k(13)$
29	14	406	$hF_n(x)^{29} = 29k(29)$
41	40	1640	$hF_n(x)^{41} = 41k(41)$
79	78	6162	$hF_n(x)^{79} = 79k(79)$
103	208	21424	$hF_n(x)^{103} = 103k(103)$
181	90	16290	$hF_n(x)^{181} = 181k(181)$
241	240	57840	$hF_n(x)^{241} = 241k(241)$
283	568	160744	$hF_n(x)^{283} = 283k(283)$
317	636	201612	$hF_n(x)^{317} = 317k(317)$
373	748	279004	$hF_n(x)^{373} = 373k(373)$
419	418	175142	$hF_n(x)^{419} = 419k(419)$
433	868	375844	$hF_n(x)^{433} = 433k(433)$
503	1008	507024	$hF_n(x)^{503} = 503k(503)$
557	124	69068	$hF_n(x)^{557} = 557k(557)$
653	1308	854124	$hF_n(x)^{653} = 653k(653)$
683	1368	934344	$hF_n(x)^{683} = 683k(683)$
823	1648	1356304	$hF_n(x)^{823} = 823k(823)$
853	1708	1456924	$hF_n(x)^{853} = 853k(853)$
907	1816	1647112	$hF_n(x)^{907} = 907k(907)$
971	970	941870	$hF_n(x)^{971} = 971k(971)$

4.5. 2×2 Tipindeki Matris Halkasının Fibonacci Dizisi ve Periyodu

Şimdi $\mathbb{Z}$ üzerinde 2 gerenli ve 3 bağıntılı 2×2 tipindeki matris halkasının temsilini ve Fibonacci dizini verelim.

Teorem 4.5.1. $n \geq 2$ olmak üzere $\mathbb{Z}$ üzerinde 2 gerenli ve 3 bağıntılı $n \times n$ tipindeki matris halkaları

$$Mat_n(\mathbb{Z}) = \langle x, y \mid x^n = y^n = 0, xy + y^{n-1}x^{n-1} = 1 \rangle$$

temsiline sahiptir (Kassabov 2009).

Teorem 4.5.2. $\mathbb{Z}$ üzerinde 2 gerenli ve 3 bağıntılı 2×2 tipindeki matris halkasının temsili

$$Mat_2(\mathbb{Z}) = \langle x, y \mid x^2 = y^2 = 0, xy + yx = 1 \rangle$$

olmak üzere bu halkanın Fibonacci dizisinin periyodu 3 tür.

İspat. Tanım 3.5.2 den $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ olmak üzere $A_0 = x$, $A_1 = y$ için

$$F_{n+2} = F_{n+1}A_1 + F_nA_0$$

bağıntısı kullanılırsa halkanın temsilinden

$$\begin{aligned}
F_0 &= 0,\\
F_1 &= 1,\\
F_2 &= y1 + x0\\
&= y,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
F_3 &= yy + x1 \\
&= y^2 + x \\
&= x, \\
F_4 &= yx + xy \\
&= 1, \\
F_5 &= y1 + xx \\
&= y + x^2 \\
&= y, \\
F_6 &= yy + x1 \\
&= y^2 + x \\
&= x, \\
&\dots
\end{aligned}
$$

olup

$$0,1, y, x, 1, y, \dots$$

dizisi elde edilir. Bu halkanın dizisi belli bir noktadan sonra sabit bir alt dizinin tekrarından oluşuyor ve tekrar eden alt dizinin eleman sayısı 3 tür. Yani $P\big(Mat_2(\mathbb{Z}\,); x, y\big) = 3$ tür.

Benzer olarak Tanım 3.5.2 den $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ olmak üzere $A_0 = y$, $A_1 = x$ için

$$F_{n+2} = F_{n+1}A_1 + F_nA_0$$

bağıntısı kullanılırsa halkanın temsilinden

$$
\begin{aligned}
F_0 &= 0, \\
F_1 &= 1, \\
F_2 &= x1 + y0 \\
&= x,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_3 &= xx + y1 \\
&= x^2 + y \\
&= y, \\
F_4 &= xy + yx \\
&= 1, \\
F_5 &= x1 + yy \\
&= x + y^2 \\
&= x, \\
F_6 &= xx + y1 \\
&= x^2 + y \\
&= y, \\
&\dots
\end{aligned}
$$

olup

$$0,1, x, y, 1, x, \dots$$

dizisi elde edilir. Bu halkanın dizisi belli bir noktadan sonra sabit bir alt dizinin tekrarından oluşuyor ve tekrar eden alt dizinin eleman sayısı 3 tür. Yani $P\big(Mat_2(\mathbb{Z});y,x\big) = 3$ dir. Sonuç olarak $P\big(Mat_2(\mathbb{Z});x,y\big) = P\big(Mat_2(\mathbb{Z});y,x\big) = 3$ tür.

5. SONUÇ

Bu çalışmada p^2 mertebeden bazı birimli halkalardaki Fibonacci dizilerinin uygulamaları üzerinde duruldu. Bu halkaların Fibonacci dizileri oluşturuldu ve periyotları bulundu. Bu halkaların Fibonacci dizilerinin periyotları ile karakteristiği arasındaki ilişkinin varlığı görüldü.

Fibonacci polinomlarının derece ve katsayılarının m modülüne göre dizileri elde edildi. Bu dizilerin periyodik olduğu ve $Q = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ matrisi tarafından gerilen devirli grubun mertebesinin bu dizinin periyoduna eşit olduğu görüldü. Ayrıca p bir asal sayı olmak üzere p modülüne göre Fibonacci dizilerinin Wall sayıları ile Fibonacci polinomlarının dizisinin periyodu karşılaştırıldı ve bu periyodun daima çift sayı olduğu görüldü.

KAYNAKLAR

Aydın, H. and Dikici, R., 1998. General Fibonacci sequences in finite groups. Fibonacci Quart. 36 (3), 216-221

Aydın, H. and Smith, G. C., 1994. Finite $p-$quotients of some cyclically presented groups. J, London Math. Soc., 49, 83-92.

Bayraktar, Mustafa., 2006. Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi. Gazi Kitabevi. 275 s, Ankara.

Buschman, R. G., 1963. "Fibonacci Numbers, Chebyschev Polynomials, Generalizations and Difference Equations," Fibonacci Quarterly, Vol. 1, No. 4, 1-7.

Campbell, C. M. and Campbell, P. P., 2005a. The Fibonacci length of certain centro-polyhedral groups. J. Appl. Math. Comput. 19 (1-2), 231-240

Campbell, C. M., Campbell, P. P., Doostie, H. and Robertson, E. F., 2004a. Fibonacci length for certain metacyclic groups. in: Algebra Colloq.11 (2) 215-222

Campbell, C. M., Campbell, P. P., Doostie, H. and Robertson, E. F., 2004b. On the Fibonacci length of powers of dihedral groups. in: Application of Fibonacci numbers, Vol. 9, ed. F.T. Howard, Kluwer, Dordrecht, 69-85

Campbell, C. M., Campbell, P. P., Doostie, H. and Robertson, E. F., 2006. Fibonacci lengths of binary polyhedral groups and related groups. in: Applications of Fibonacci numbers, Vol. 10, Kluwer, Dordrecht, 83-91

Çallıalp, Fethi., 2001. Örneklerle Soyut Cebir. Birsen Yayınevi. 300 s, İstanbul.

Decarli, D. J., 1970. A Generalized Fibonacci Sequence Over An Arbitrary Ring. Fibonacci Quart, Rosary Hill College, Buffalo, New York, 182-184.

Dikici, R. and Smith, G. C., 1995. Recurrences in finite groups. Turkish J. Math. 19, 321-329

Dikici, R. and Smith, G. C., 1997. Fibonacci sequences in finite nilpotent groups. Turkish J. Math. 21, 133-142

Doostie, H. and Hashemi, M., 2005. Fibonacci length of direct products of groups. Vietnam J. Math. 33 (2), 189-197

Doostie, H. and Hashemi, M., 2006. Fibonacci length involving the Wall Number $k(n)$. J. Appl. Math. Comput. 20 (1-2), 171-180

Dummit, D.S and Foote, R.S., 2004. Abstract Algebra. Wiley. 932 p, USA.

Falcon, S. and Plaza, A., 2009. On *k*-Fibonacci sequences and polynomials and their derivatives. Chaos, Solitons & Fractals, 39, 1005-1019.

Fine, B., 1993. Classification of Finite Rings of Order p^2. Mathematics Magazine, 66, 248-252.

Guralnick, R. M., Kantor, W. M., Kassabov, M. And Lubotzky, A. Presentations of finite simple groups: a computational approach. J. European Math. Soc., to appear.

Guralnick, R. M., Kantor, W. M., Kassabov, M. And Lubotzky, A. Presentations of finite simple groups: a quantitative approach. J. Amer. Math. Soc. 21(3): 711-774.

Gültekin, İ., 1997. Fibonacci sayıları ve Fibonacci grupları. Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi.

Gültekin, İ. and Taşyurdu, Y., 2013. On Period of the Sequence of Fibonacci Polynomials Modulo m. Discrete Dynamics in Nature and Society, Vol. 2013, 3p

Hoggatt Jr, V. E. and Bicknell, M., 1973. Generalized Fibonacci polynomials and Zeckendorf's theorem. The Fibonacci Quarterly, vol. 11, no. 4, pp. 399–419

Horadam, A. F., 1961. A Generalized Fibonacci Sequence. American Mathematical Monthly, 68, 445-459.

Karaduman, E. and Aydin, H., 2003a. General 2-step Fibonacci sequences in nilpotent groups of exponent p and nilpotent class 4. Appl. Math. Comput. 141, 491-497

Karaduman, E. and Aydin, H., 2003b. On Fibonacci sequences in nilpotent groups. Math. Balkanica 17 (3-4), 207-214

Karaduman, E. and Aydin, H., 2006. On the periods of 2-step general Fibonacci Sequences in dihedral groups. Matematicki vesnik, Vol 58, 47-56(9)

Karaduman, E. and Yavuz, U., 2003. On the period of Fibonacci sequences in nilpotent goups. Appl. Math. Comput. 142, 321-332

Kassabov, M., 2009. Presentations of Matrix Rings.

Knox, S. W., 1990. Fibonacci Sequences in Finite Groups. The College of Wooster, Wooster, 116-120

Lü, K., Wang J., 2007. k-step Fibonacci sequence modulo m. Unil. Math., 71, 169-178.

Nalli, A. and Haukkanen, P. 2009. "On Generalized Fibonacci and Lucas Polynomials". Chaos, Solitons and Fractals, 42, 3179-3186

Özkan, E., 2003. On general Fibonacci Sequences in groups. Turk J. Math. 27, 525-537

Renault, M., 1996. The Fibonacci Sequence Mod m. Master's Thesis. Wake Forest University.

Shah, A.P., 1968. Fibonacci-Tribonacci. Fibonacci Quarterly 6.2., 139-141

Taşçı, Dursun., 2007. Soyut Cebir. Alp Yayınevi. 671 s, Ankara.

Taşyurdu, Y., 2006. Gruplarda Fibonacci dizileri. Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi.

Taşyurdu, Y. and Gültekin, İ., 2013. On period of Fibonacci sequrnces in finite rings with identity of order p^2 . Journal of Matematics and System Science

Vajda, S., 1989. Fibonacci & Lucas numbers and golden section (Ellis Horwood, Chichester).

Vorobyov, N., 1963. The Fibonacci Numbers, translated from the Russian by Normal D. Whaland, Jr. And Olga A. Tittlebaum, D. C. Heath and Co. , Boston.

Vorobyov, N., 1976. Elementary Numbers Theory. Allyn and Bacon inc, Boston, pages 285-299.

Wall, D. D., 1960. Fibonacci Series Modulo m. American Math. Monthly 67, 525-532

Wilcox, H. J., 1986. Fibonacci sequences of period n in groups. Fibonacci Quarterly. 24., 356-361.

Wyler, O., 1965. On Second Order Recurrences, American Mathematical Monthly. 72, 500-506.

ÖZGEÇMİŞ

1984 yılında Kahramanmaraş'ın Pazarcık ilçesinde doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Pazarcık'da tamamladı. 2002 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde lisans öğrenimine başladı ve 2006 yılında mezun oldu. Aynı yıl Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans öğrenimine başladı ve 2009 yılında mezun oldu. Aynı yıl Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Doktora öğrenimine başladı. Halen eğitimine devam etmekte olup Erzincan Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde Araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.