YARI TANJANT DEMET

Suna AY

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Ana Bilim Dalı
Prof. Dr. Arif SALİMOV
2013

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YARI TANJANT DEMET

Suna AY

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

ERZURUM
2013

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAY FORMU

YARI TANJANT DEMET

Prof. Dr. Arif SALİMOV danışmanlığında, Suna AY tarafından hazırlanan bu çalışma 24/09/2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Ana Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak **oybirliği/oy çokluğu (…/…)** ile kabul edilmiştir.

Başkan	: Prof. Dr. Abdullah MAĞDEN	*İmza*	:
Üye	: Prof. Dr. Arif SALİMOV	*İmza*	:
Üye	: Doç. Dr. Abdullah KAPLAN	*İmza*	:

Yukarıdaki sonucu onaylıyorum

Prof. Dr. İhsan EFEOĞLU
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

YARI TANJANT DEMET

Suna AY

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Arif SALİMOV

Bu tezde, ilk olarak diferensiyellenebilir bir manifold üzerinde yarı tanjant demet oluşturulmuş ve bu demetin manifold üzerindeki tanjant demet ile arasındaki ilişki incelenmiştir. Daha sonra keyfi tipli tensörlerin yarı tanjant demet üzerinde tam (complete) liftleri ve dikey (vertical) liftleri araştırılmış ve elde edilen bulgular yardımıyla bazı özellikler ispatlanmıştır.

2013, 44 sayfa

Anahtar Kelimeler: Tanjant Demet, Yarı Tanjant Demet, Tam Lift, Dikey lift

ABSTRACT

Master Thesis

SEMI TANGENT BUNDLE

Suna AY

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Arif SALİMOV

In this thesis, the first semi-tangent bundle of a differentiable manifold was created and the relationship between the bundle and the tangent bundle on the manifold was investigated. Then arbitrary types tensors on the semi-tangent bundle, complete and vertical lifts were investigated and by the help of the findings was proven to some of the features.

2013, 44 pages

Keywords: Tangent Bundle, Semi Tangent Bundle, Vertical Lift, Complete Lift

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Bu tez konusunu çalışmamı sağlayan, her adımda bilgilerini esirgemeyen, Hocam Sayın Prof. Dr. Arif SALİMOV'a teşekkür ederim. Ayrıca çalışmalarımda ve tezin hazırlanışında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen Hocam Sayın Doç. Dr. Aydın GEZER'e ve Hocam Sayın Doç. Dr. Murat İŞÇAN'a saygı ve şükranlarımı arz ederim.

Bu süreçte desteklerini esirgemeyen sevgili arkadaşlarım Derya MİRAL, Elmas MİROĞLU ve Ömer KOÇAK'a; başta okul müdürüm Yusuf CİVLEZ olmak üzere tüm Hınıs Teknik ve Endüstri Meslek Lisesi'nde görev yapan değerli öğretmen arkadaşlarıma: ayrıca dil konusunda yardımlarını esirgemeyen Faruk SARIDEMİR, Eda AKKAYA, sevgili ev arkadaşım Nisa KARABULUT ve canım kardeşim Hava AY'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek Lisans eğitimim süresince bana destek veren TÜBİTAK'a ayrıca teşekkür ederim.

Suna AY
Eylül, 2013

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$T(M_n)$	M_n Manifoldunun Tanjant Demeti
$t(M_n)$	M_n Manifoldunun Yarı Tanjant Demeti
$T_q^p(M_n)$	M_n Manifoldu üzerinde (p,q) Tipli Tensör Demeti
L_X	X vektör Alanına Göre Lie Türevi
∇_X	X vektör Alanına Göre Kovaryant Türevi
v	Tanjant Demette Dikey Lift
c	Tanjant Demette Tam Lift
vv	Yarı Tanjant Demette Dikey Lift
cc	Yarı Tanjant Demette Tam Lift

1. GİRİŞ

Diferensiyel Geometride önemli konulardan biri olan Reimanian manifoldta Tanjant Demetlerin Diferensiyel Geometrisinin incelenmesi ilk olarak 1958 yılında Sasaki tarafından yapılmıştır. Daha sonra 1962 yılında Dombrowski, Tanjant Demetteki geometrilerin gelişmesine katkıda bulunmuştur. 1965 yılında Yano ve Legder, simetrik uzayalarda tanjant demeti tanımlamışlar ve bu konuyla ilgili çalışmalarda bulunmuşlardır. 1966 yılında da Kandatu, lineer olmayan konneksiyona sahip bir manifoldta Tanjant Demeti tanımlamıştır (Gezer 2004).

1965 yılında Tanjant Demette liftler çalışılmaya başlanmıştır. İlk çalışma 1965 yılında Kobayashi ve Yano tarfından Tanjant Demette tensör alanlarının ve konneksiyonların tam ve dikey liftleri olmuştur. 1967 yılında Morimoto Tanjant Demette tensör alanlarının ve konneksiyonların liftleri hakkında çalışmalarda bulunmuştur (Gezer 2004).

Tanjant Demetin genellenmiş hali olan yarı tanjant demetler ilk olarak Duc 1979 ve Vishnevskii *et al.* 1985 tarafından çalışılmıştır.

Sunulan bu tezde Yarı Tanjant Demette fonksiyonun, 1-formun, vektör alanının ve tensör alanlarının tam ve dikey lifti incelenmiştir. Bu amaçla tezin ikinci bölümünde ihtiyaç duyulan tüm kavramların tanımları ve özellikleri kuramsal temeller başlığı altında verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise Tanjant Demetle ilgili genel bilgiler verilmiş ve Tanjant Demette fonksiyonun, 1-formun, vektör alanının ve tensör alanlarının tam ve dikey lifti incelenmiştir.

Dördüncü bölümde ise Yarı Tanjant Demetin tanımı özellikleri Tanjant Demetle arasındaki geçiş ve fonksiyonun, 1-formun, vektör alanının ve tensör alanlarının tam ve dikey liftleriyle alakalı genel bilgi verildikten sonra bu konuyla alakalı bazı teoremler ispatlanmıştır.

2. KURAMSAL TEMELLER

Tanım 2.1: *X* Hausdorff topolojik uzay olmak üzere herhangi bir $U \subset X$ açık kümesinin $V \subset \mathfrak{R}^n$ bölgesine

$$\varphi: U \to V$$

homeomorfizmine X de n boyutlu koordinat sistemi, U ya ise φ haritasının koordinat komşuluğu veya koordinat bölgesi denir. Bazen harita (U, φ) şeklinde de gösterilir. Eğer $x \in U$ ise,

$$\varphi(x) = (x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathfrak{R}^n$$

olur. $x^1, x^2, \dots, x^n$ reel sayılarına φ haritasında *x* noktasının koordinatları denir.

Tanım 2.2: Eğer *X* Hausdorff topolojik uzayının *n* boyutlu φ_α haritalarının U_α bölgeleri bu uzayı örterse, yani

$$X = \bigcup_{\propto \epsilon A} U_\propto$$

(A-indisler kümesi) ise *X* 'e *n* boyutlu topolojik manifold veya sadece *n* boyutlu manifold denir.

Tanım 2.3: X topolojik Hausdorff uzay ve k ise $0 \leq k \leq \infty$ şartını sağlayan tam sayı olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $\{(U_\propto, \varphi_\propto) : \propto \in A, U_\propto \subset X\}$ lokal koordinatlar ailesine X üzerinde C^k sınıfından *n* boyutlu atlas adı verilir:

1. Lokal haritaların U_α bölgesi *X* i örter, yani *X*, *n* boyutlu topolojik manifolddur.

2. Keyfi $\propto, \beta \in A$ için $U_\propto \cap U_\beta \neq \emptyset$ ise

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\propto^{-1} : \varphi_\propto(U_\propto \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\propto \cap U_\beta)$$

dönüşümü C^k sınıfındandır. Bu şarta bazen $(U_\propto, \varphi_\propto)$ ve (U_β, φ_β) haritalarının C^k uzlaşması şartı da denir.

$\varphi_\beta \circ \varphi_\propto^{-1}$ dönüşümüne ise koordinatların dönüşümü $\left(u_\beta^i\right) = u_\beta^i\left(u_\propto^j\right), i, j = 1, \dots, n$ denir. Burada u_β^i, (U_β, φ_β) haritasındaki $x \in U_\propto \cap U_\beta$ noktasının koordinatlar, $u_\propto^j$ ise $(U_\propto, \varphi_\propto)$ haritasındaki *x* noktasının koordinatlarıdır.

$U_\propto \cap U_\beta \neq \emptyset$ ise bu durumda $\varphi_\beta \circ \varphi_\propto^{-1}$ dönüşümü tayin edilemez. Bu durumda $\varphi_\beta \circ \varphi_\propto^{-1}$ dönüşümünün C^k sınıfından olduğu kabul edilecektir. 2. şartı, $\varphi_\beta \circ \varphi_\propto^{-1}$ dönüşümlerinin C^k sınıfından diffeomorfizmler olmasına denktir. Bu ise, $\varphi_\beta \circ \varphi_\propto^{-1}$ koordinat dönüşümünün Jakobiyen matrisinin determinantının sıfırdan farklı olması demektir.

Tanım 2.4: $\{(U_\propto, \varphi_\propto)\}$ve $\{(U_\beta, \varphi_\beta)\}$, C^k sınıfından herhangi iki atlas olsun. Bu atlasların keyfi $(U_\propto, \varphi_\propto)$ ve (U_β, φ_β) haritaları C^k uzlaşmış ise yani, $\{(U_\propto, \varphi_\propto)\}$ ve $\{(U_\beta, \varphi_\beta)\}$, atlaslarının birleşimi C^k sınıfından atlas ise verilen atlaslara denk atlaslar denir.

Tanım 2.5: *X* Hausdorff uzay üzerinde C^k atlaslarının denklik sınıfına C^k-yapı denir. C^k-yapısının tüm C^k atlaslarının birleşimi yine C^k atlas oluşturur. Bu atlasa maksimal C^k atlas adı verilir.

X üzerindeki C^k atlaslarının her bir denklik sınıfı, kendisinin bir elemanı ile ifade edilir. Yani, C^k-yapısı, onun keyfi C^k atlası yardımıyla oluşturulabilir. Buradan da, *X* üzerindeki her bir C^k-yapısının bu yapıdan olan bir C^k atlas ile verilebileceği sonucu çıkar.

C^0-yapıya topolojik yapı, C^k, $(1 \le k \le \infty)$ yapıya ise düzgün (smooth) yapı denir. Bundan sonra yalnız C^∞ sınıfından olan yapılara bakılacaktır.

Tanım 2.6: M, Hausdorff ve sayılabilir baza sahip topolojik uzay olsun. Eğer, M üzerinde n- boyutlu C^∞ atlaslarının C^∞ yapısı verilmişse M uzayına n-boyutlu C^∞ sınıfından difernsiyellenebilir veya düzgün manifold denir ve M_n ile gösterilir (Salimov ve Mağden 1999).

Tanım 2.7 (Vektör Alanı): M_n , C^∞ sınıfından n- boyutlu diferensiyellenebilir bir manifoldun $p \in M_n$ noktasındaki tanjant uzay $T_p(M_n)$ ve bu uzayların birleşimi de

$$T(M_n) = \bigcup_{p \in M_n} T_p(M_n)$$

olsun.

$$x: M_n \to \bigcup_{p \in M_n} T_p(M_n)$$

dönüşümü için

$$\pi \circ x: I_{M_n}: M_n \to M_n$$

özdeşlik dönüşümü olacak şekilde

$$\pi: \bigcup_{p \in M_n} T_p(M_n) \to M_n$$

dönüşümü varsa x'e M_n üzerinde vektör alanı denir. Vektör alanı tanjant uzayların birleşimi yardımıyla tanımlanır (Hacısalihoğlu 1993).

Tanım 2.8 (1-Form): M_n, n- boyutlu diferensiyellenebilir manifold olsun. $p \in M_n$ noktasındaki kotanjant uzay $T_p^*(M_n)$ ve bu uzayların birleşimi de

$$\bigcup_{p \in M_n} T_p^*(M_n)$$

olsun.

$$\omega: M_n \to \bigcup_{p \in M_n} T_p^*(M_n)$$

dönüşümü için

$$\pi \circ \omega: I_{M_n}: M_n \to M_n$$

özdeşlik dönüşümü olacak şekilde

$$\pi: \bigcup_{p \in M_n} T_p^*(M_n) \to M_n$$

dönüşümü varsa ω dönüşümüne M_n üzerinde 1-form denir(Hacısalihoğlu 1993).

Tanım 2.9 (Dual (Kovektör) Uzay): B_n vektör uzayında tayin edilmiş $z = \propto(\vec{x})$ vektör değişkenli reel değerli fonksiyonunu göz önüne alalım. Eğer $\forall \vec{x}, \vec{y} \in B_n$ ve $\forall \lambda, \mu \in \Re$ için

$$\propto(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \lambda \propto(\vec{x}) + \mu \propto(\vec{y})$$

şartını sağlarsa $z = \propto(\vec{x})$ fonksiyonuna lineer fonksiyon denir. Bu durumda $\propto: B_n \to \Re$ dönüşümüne lineer operatör denir. $z = \propto(\vec{x})$ değerine $\propto$ operatörünün $\vec{x}$ vektörünün üzerindeki izi denir.

B_n vektör uzayının bütün lineer operatörlerinin oluşturduğu B_n^* vektör uzayına B_n uzayının dual uzayı denir (Bishop and Goldberg 1968).

Tanım 2.10 (Tensör): B_n, n boyutlu vektör uzayı, B_n^* ise onun dual uzayı olsun. $x_j \in B_n, j = 1, \ldots, q$ ve $\xi^i \in B_n^*, i = 1, \ldots, p$ kovektör değişkenlerinin

$$\omega = t(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_q, \xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^p)$$

reel değerli fonksiyonunu gözönüne alalım. Eğer bu fonksiyon her bir değişkene göre lineerlik şartını sağlarsa, multilineer fonksiyon denir.

Mesela birinci vektör değişkenine göre lineerlik şartı $\lambda, \mu \in \Re$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\omega &= t(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_q, \xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^p) \\ &= \lambda t(\vec{x}, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_q, \xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^p) + \mu t(\vec{y}, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_q, \xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^p)\end{aligned}$$

biçiminde gösterilebilir. Bu multilineer fonksiyona karşılık gelen

$$t: \underbrace{B_n \times B_n \times \ldots \times B_n}_{q} \times \overbrace{B_n^* \times \ldots \times B_n^*}^{p} \to \Re$$

operatörüne B_n uzayında p dereceden kontravaryant, q dereceden kovaryant tensör adı verilir (Bishop and Goldberg 1968).

Tanım 2.11 (Tensör Alanı): $E \subset M_n$ olmak üzere $T: E \to T_s^r(M_n)$ şeklindeki fonksiyona (r, s) tipli bir T tipli tensör alanı denir. Burada her $m \in E$ için $T(m) \in T_s^r(M_n)$ şeklindedir (Bishop and Goldberg 1968).

$r \geq 0, s \geq 0$olmak üzere $r + s$ sayısına ise tensörün valentliği denir. $(r, 0)$ tipli tensöre kontravaryant tensörler, $(0, s)$ tipli tensörlere ise kovaryant tensörler denir.

f, M_n manifoldunda bir fonksiyon ise Xf de M_n manifoldunda bir fonksiyon tanımlar. Bu ise

$$(Xf)(p) = X_p f$$

ile tanımlanır. $U \subset M_n$ koordinat komşuluğunu alalım. Bu komşuluktaki bir vektör alanı

$$X = \xi^i \partial_i$$

olarak yazılır. ξ^i ler U daki lokal koordinatlara bağlıdır. Yani,

$$\xi^i = \xi^i(x^i, \ldots, x^n) \text{ },i = 1, \ldots, n$$

olur.

M_n, C^∞ sınıfından bir manifold olmak üzere $\forall m \in M_n$ noktasındaki her bir (p,q) tipli tensör için uygun bir $T_q^p(m)$ tensör uzayı vardır.

Tanım 2.12: M_n, C^∞ sınıfından bir manifold ve $T_q^p(m), \forall m \in M_n$ noktasındaki (p,q) tipli tensör uzayı olsun. M_n manifoldunun $\forall m \in M_n$ noktasına $T_q^p(m)$ tensör uzayından bir $t_q^p(m)$ tensörü karşılık getiren *T* fonksiyonuna (p,q) tipli tensör alanı denir (Bishop and Goldberg 1968).

Eğer $p=1, q=0$ ise vektör alanı elde edilir. Yani, (1,0) tipli tensör alanı bir vektör alanıdır.

Eğer $p=q=0$ ise her $m \in M_n$ noktasına bir skaler değer karşılık gelır. Bu yüzden (0,0) tipli tensör alanı reel değerli bir fonksiyondur.

Eğer $U \subset M_n$ bölgesinde *f* fonksiyonu C^∞ sınıfından ise $\forall x \in U$ için $df|_x \in T_1^0(x)$ olur. Böylece *f* fonksiyonunun diferensiyeli olan df operatörü ifadesi (0,1) tipli bir tensör alanıdır.

T, (p,q) tipli tensör alanı olsun. $\theta_1, .., \theta_p$ (0,1) tipli tensör alanları ve $X^1, \dots, X^q$ vektör alanları olmak üzere

$$T(\theta_1, \dots, \theta_p, X_1, \dots, X_q)(m) = T_m(\theta_1(m), \dots, \theta_p(m), X_1(m), \dots, X_q(m))$$

ifadesi reel değerli fonksiyon tanımlar. Özelikle x^i koordinatlarına göre *T* tensör alanının bileşenleri

$$T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = T(dx^{i_1}, \dots, dx^{i_q}, \partial_{j_1}, \dots, \partial_{j_p})$$

biçiminde reel değerli fonksiyonlardır (Bishop and Goldberg 1968).

Tanım 2.13: M_n manifoldu üzerinde $T_0^1(M_n)$ vektör alanlarının modülü olmak üzere

$$\nabla_X Y = \nabla(X,Y): T_0^1(M_n) \times T_0^1(M_n) \to T_0^1(M_n)$$

dönüşümü

i. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_X Z, \ \ \forall f,g \in T_0^0(M_n)$
ii. $\nabla_Z(fX+gY) = (Zf)X + f\nabla_Z X + (Zg)Y + g\nabla_Z Y$

şartlarını sağlıyorsa ∇ ya afin konneksiyon denir. Bu halde

$$\nabla_X: T_0^1(M_n) \to T_0^1(M_n)$$

dönüşümüne kovaryant diferensiyellenme denir.

Tanım 2.14: M_n diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde X vektör alanı olmak üzere X vektör alanı için aşağıdaki şartları sağlayan L_X operatörüne Lie türevi denir (Kobayashi and Nomızu 1963).

i. $L_X(K \otimes L) = L_X K \otimes L + K \otimes L_X L\ ,\ \forall K,L \in T(M_n)$
ii. $L_X f = Xf,\ f \in T_0^0(M_n)$
iii. $L_X df = dL_X f$
iv. $L_X Y = [X,Y]$

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Tanjant Demet

Tanım 3.1.1: M_n , C^∞ sınıfından n- boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold ve M_n manifoldunun P noktasındaki tanjant uzay $T_p(M_n)$ olmak üzere

$$T(M_n) = \bigcup_{p \in M_n} T_p(M_n) \tag{3.1}$$

ile tanımlanan $T(M_n)$ kümesine tanjant demet denir.

$T(M_n)$'nin herhangi bir $\tilde{P} \in T_p(M_n)$ noktası için M_n manifoldu üzerindeki $T(M_n)$ tabii demet yapısını tamamlayan $\pi: T(M_n) \to M_n$ demet izdüşümü $\tilde{P} \to P$ karşılık getirir. Yani $\pi(\tilde{P}) = P$ olur. $\pi^{-1}(P) = \tilde{P} \in T_p(M_n)$ kümesine M_n temel uzayının P noktasındaki fibre denir. Doğal olarak burada $T(M_n)$ kesiti bulunur. M_n manifoldunun keyfi P noktasındaki $f(P)$, $T_p(M_n)$'nin sıfır vektörüdür. Bu f kesitine veya $f(M_n)$'nin görüntüsüne sıfır kesit denir. $f(M_n)$ sıfır kesiti M_n temel uzayı ile aynıdır ve bu nedenle M_n manifoldunun kendisi $f(M_n)$'de diferensiyellenebilir imbedding olmuş (içine daldırılmış) altmanifolddur.

(x^h), U koordinat komşuluğunda lokal koordinatlar olmak üzere M_n baz uzayı $\{U; x^h\}$ koordinat komşuluk sistemiyle örtülmüş olsun. $\pi^{-1}(U) \subset T(M_n)$ açık kümesi için $\pi^{-1}: U \subset M_n \to U \times R^n$ dönüşümü diferensiyellenebilir bir homeomorfizm olur. Burada R^n, R üzerindeki n- boyutlu vektör uzayıdır. $\tilde{P} \in T_p(M_n)(P \in U)$ noktası (P, X) sıralı çifti ile gösterilir ve $X \in R^n$ vektörünün bileşenleri $T_p(M_n)$ tanjant uzayında $\{\partial_h\}\left(\partial_h = \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$ doğal bazına $\tilde{P}$ nin $(y^h) = \left(x^{\bar{h}}\right), \bar{h} = n+1, \dots, 2n$ kartezyen koordinatları ile verilir. U komşuluğunda $P = \pi(\tilde{P})$'nin koordinatları $(\mathrm{x}^{\mathrm{h}})$ $h = 1, \dots, n$ ile gösterilirse $\tilde{P}$ noktası uygun $\left(x^h, x^{\bar{h}}\right) \to \tilde{P} \in \pi^{-1}(U)$ ile verilmiş olur.

Biz $\pi^{-1}(U) \subset T(M_n)$ açık kümesinde $\left(x^h, x^{\bar{h}}\right)$ lokal koordinatlar sistemini elde ederiz. Buradan $\left(x^h, x^{\bar{h}}\right)$ ya, (x^h) dan indirgenmiş (elde edilmiş) $\pi^{-1}(U)$'da koordinatlar denir.

M_n manifoldunun $P = \pi(\tilde{P})$ noktasını ihtiva eden diğer bir koordinat komşuluğu $\left\{U', x^{h'}\right\}$ ise $\pi^{-1}(U')$ koordinat komşuluğu $\tilde{P}$ noktasını ihtiva eder. $\pi^{-1}(U')$ göre $\tilde{P}$' nin indirgenmiş koordinatları $\left(x^{h'}, y^{h'}\right)$ ile verilecektir. Burada

$$\begin{cases} x^{h'} = x^{h'}(x^h), \\ y^{h'} = \dfrac{\partial x^{h'}}{\partial x^h} y^h, \end{cases} \tag{3.2}$$

olarak verilir.

$x^{h'}(x^h), P$ noktasındaki $x^1, x^2, \dots, x^n$ değişkenlerinin C^∞ sınıfından olan diferensiyellenebilir fonksiyonlarıdır. $x^{\bar{h}'} = y^h, x^{\bar{h}'} = y^{h'}$ ile gösterirsek (3.2) denklemi

$$x^{p'} = x^{p'}(x^p) \tag{3.3}$$

olarak yazılır. (3.2) denkleminin Jacobian matrisi

$$\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^p} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x^{h'}}{\partial x^j} & 0 \\ \dfrac{\partial^2 x^{h'}}{\partial x^h \partial x^i} & \dfrac{\partial x^{h'}}{\partial x^h} \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

ile verilir (3.2) denkleminin tersi ise

$$\begin{cases} x^h = x^h(x^{h'}) \\ y^h = \dfrac{\partial x^h}{\partial x^{h'}} y^{h'} \end{cases} \tag{3.5}$$

veya

$$x^p = x^p\left(x^{p'}\right) \tag{3.6}$$

olarak yazılır. (3.5) denkleminin Jakobiyeni

$$\left(\frac{\partial x^p}{\partial x^{p'}}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x^h}{\partial x^{h'}} & 0 \\ \dfrac{\partial^2 x^h}{\partial x^{h'} \partial x^{i'}} y^{i'} & \dfrac{\partial x^h}{\partial x^{h'}} \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

matrisi ile verilir. (3.4) ve (3.7) denklemleri $T(M_n)$ tanjant demetin daima yönlendirilebilir olduğunu gösterir. M_n manifoldu üzerindeki C^∞ sınıfından (r,s) tipli tüm tensör alanlarının kümesinin $\Im_\mathrm{s}^\mathrm{r}(M_n)$ ve M_n deki tüm tensör alanlarının kümesini ise

$$\Im(M_n) = \sum_{r,s=0}^{\infty} \Im_s^r(M_n)$$

ile göstereceğiz. Benzer olarak $T(M_n)$ tanjant demetindeki tensör alanlarının kümelerini ise sırasıyla $\Im_s^r\big(T(M_n)\big)$ ve $\Im\big(T(M_n)\big)$ olarak göstereceğiz.

3.2. Fonksiyonun Vertical (dikey) Lifti

f, M_n'de bir fonksiyon olsun. $T(M_n)$ tanjant demette ${}^V f$ fonksiyonuna bakalım. $f\colon M_n \to R$ ve $\pi\colon T(M_n) \to M$ olmak üzere ${}^V f = f \circ \pi$, ${}^V f\colon T(M_n) \to R$ fonksiyonuna

f fonksiyonunun dikey lifti denir.

$$\tilde{P} \in \pi^{-1}(U)\tilde{P} = \left(x^i, y^i\right) = (x^i, x^{\bar{\iota}})$$

koordinatlarına sahiptir.

$$^V f\left(\tilde{P}\right) = {}^V f(x, y) = f \circ \pi\left(\tilde{P}\right) = f(P) = f(x)$$

olduğundan $^V f(\tilde{P})$ değeri fibre boyunca sabittir denir ve $P = \pi^{-1}(\tilde{P}) \in M_n$ noktasındaki $f(P)$ değerine eşit olur. (Yano and Ishihara 1973).

3.3. Vektör Alanının Dikey Lifti

$\tilde{X} \in \mathfrak{J}_0^1\left(T(M_n)\right)$ alalım. $\forall f \in \mathfrak{J}_0^0(M_n)$ için $\tilde{X}^V f = 0$ ise buradaki $\tilde{X}$'e dikey vektör alanı denir. $\tilde{X}$'nın lokal koordinatlarda bileşenleri $\binom{\tilde{X}^h}{\tilde{X}^{\bar{h}}}$ olsun.

$$\tilde{X}^V f = \tilde{X}^i \partial_i f + \tilde{X}^{\bar{\iota}} \partial_{\bar{\iota}} f = 0$$

buradan da

$$\tilde{X}^i = 0 \qquad \tilde{X}^{\bar{\iota}} \neq 0$$

bulunur.

X, M_n'de bir vektör alanı olsun. $T(M_n)$'de, $\iota\omega = \omega_i dx^i$ olmak üzere $^V X(\iota\omega) =^V \left(\omega(X)\right)$ ile $^V X$ bir vektör alanıdır. Bu vektör alanına M_n'den $T(M_n)$'ye X vektör alanının dikey lifti denir. Şimdi $^V X$ dikey liftinin bileşenlerini bulalım.

$$^{V}X(\iota\omega) = ^{V}\big(\omega(X)\big)$$

$$\tilde{X}^{j}\big(\partial_j \omega_i\big) + \tilde{X}^{\bar{j}}\omega_j = \omega_i X^{i}$$

$$\tilde{X}^{\bar{j}}\omega_j = \omega_i X^{i}$$

buradan da

$$\tilde{X}^{\bar{j}} = X^{j}$$

olur.

$$^{v}X = \begin{pmatrix} 0 \\ X^{j} \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

şeklindedir (Yano and Ishihara 1973).

3.4. 1-Formun Dikey Lifti

$\widetilde{\omega} \in T_1^0(T(M_n))$ verilmiş olsun. $\forall X \in T_0^1(M_n)$, $\widetilde{\omega}(^{v}X) = 0$ eşitliğini sağlayan $\widetilde{\omega}$ 1-formuna $T(M_n)$ de dikey 1-form denir. $\widetilde{\omega}$ lokal koordinatları ($\widetilde{\omega}_i$, $\widetilde{\omega}_{\bar{\imath}}$) olsun.

$\widetilde{\omega}(^{v}X) = 0$ eşitliğinden

$$\widetilde{\omega}_i {}^{v}X^{i} + \widetilde{\omega}_{\bar{\imath}} {}^{v}X^{\bar{\imath}} = 0$$

$$\widetilde{\omega}_{\bar{\imath}} X^{\bar{\imath}} = 0$$

$$\widetilde{\omega}_{\bar{\imath}} = 0$$

$$(\widetilde{\omega}_i, \widetilde{\omega}_{\bar{\imath}}) = (\widetilde{\omega}_i, 0)$$

olur. $\omega \in T_1^0(M_n)$ 1-formunun $^{v}\omega$ dikey liftini tanımlayalım.

$$^{v}\omega = {}^{v}(\omega_i)^{v}(dx^i) = \omega_i dx^i$$

$$^{v}\omega = {}^{v}\,\widetilde{\omega}_i{}^{v}dx^i + {}^{v}\,\widetilde{\omega}_{\bar{\imath}}{}^{v}dx^{\bar{\imath}}$$

yukarıdaki eşitliklerden

$$^{v}\,\widetilde{\omega}_i{}^{v}dx^i + {}^{v}\,\widetilde{\omega}_{\bar{\imath}}{}^{v}dx^{\bar{\imath}} = \omega_i dx^i$$

buradan

$$({}^{v}\,\widetilde{\omega}_i - \omega_i)^{v}dx^i + {}^{v}\,\widetilde{\omega}_{\bar{\imath}}{}^{v}dx^{\bar{\imath}} = 0$$

$$^{v}\,\widetilde{\omega}_i = \omega_i\ ,{}^{v}\,\widetilde{\omega}_{\bar{\imath}} = 0$$

$$^{v}\omega = (\omega_i, 0)$$

şeklindedir. Sonuç olarak

$$^{v}\omega({}^{v}X) = 0$$

olur (Yano and Ishihara 1973).

3.5. Tensör Alanlarının Dikey Lifti

$^{v}: T_0^0(M_n) \to T_0^0(T(M_n))$ $^{v}(af + bg) = a^{v}f + b^{v}g$ ve $^{v}(fg) = {}^{v}f^{v}g$ işlemleri ile bir izomorfizmdır. Ayrıca

$^{v}: T_0^1(M_n) \to T_0^1(T(M_n))$ $^{v}(aX + bY) = a^{v}X + b^{v}Y$ ve $^{v}(fX) = {}^{v}f^{v}X$ işlemleri ile

$^{v}: T_1^0(M_n) \to T_1^0(T(M_n))$ $^{v}(a\omega + b\theta) = a^{v}\omega + b^{v}\theta$ ve $^{v}(f\omega) = {}^{v}f^{v}\omega$ işlemleri bir izomorfizmdir.

$$T(M_n) = \sum_{p,q=0}^{\infty} T_q^p(M_n)$$

olmak üzere $T(M_n)$ bir cebir oluşturur. ${}^v: T(M_n) \to (T(T(M_n))$ izomorfizmine bakalım.

$${}^v(P \otimes Q) = {}^vP \otimes {}^vQ, \quad {}^v(aP + bQ) = a{}^vP + b{}^vQ$$

işlemleriyle dikey lift tanımlar.

Şimdi (1,1) tipli afinorun dikey liftine bakalım.

$${}^vF = {}^v(F_j^i \partial_i \otimes dx^j)$$

$$= {}^v(F_j^i \partial_i) \otimes {}^v\left(dx^j\right) = {}^v(F_j^i){}^v(\partial_i) \otimes {}^v\left(dx^j\right) = F_j^i \partial_{\bar{\imath}} \otimes dx^j,$$

$${}^vF_j^i = 0, {}^v F_{\bar{j}}^i = 0, {}^vF_{\bar{j}}^{\bar{\imath}} = 0 \text{ , } {}^vF_j^{\bar{\imath}} = F_j^i$$

$${}^vF = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F_j^i & 0 \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

Benzer şekilde $G \in T_2^0(M_n)$ tensör alanının ${}^vG$ dikey liftinin lokal koordinatlarda bileşenleri

$${}^vG = \begin{pmatrix} G_{ij} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ve $H \in T_0^2(M_n)$ tensör alanının ${}^vH$ dikey liftinin lokal koordinatlarda bileşenleri

$$^{v}H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & H^{ij} \end{pmatrix}$$

şeklindedir. (Yano and Ishihara 1973).

3.6. Fonksiyonun Complete (Tam) Lifti

$f \in \mathfrak{I}_0^0(M_n)$ olmak üzere $T(M_n)$ de $\iota(df) = y^s \partial_s f = \partial f = {}^c f$ buradaki ${}^C f$ fonksiyonuna *f* fonksiyonunun tanjant demette tam lifti denir (Yano and Ishihara 1973).

3.7. Vektör Alanının Tam Lifti

$X \in \mathfrak{I}_0^1(M_n)$ olsun. ${}^C X {}^C f = {}^C (Xf)$ ile tanımlanan ${}^C X$'e, X vektör alanının tam lifti denir. Şimdi ${}^C X = \begin{pmatrix} {}^C X^i \\ {}^C X^{\bar{\imath}} \end{pmatrix}$ bileşenlerini bulalım.

$$ {}^C X^i \partial_i^C f + {}^C X^{\bar{\imath}} \partial_{\bar{\imath}}^C f = y^s \partial_s (X^i \partial_i f)$$

$$ {}^C X^i \partial_i (y^s \partial_s f) + {}^C X^{\bar{\imath}} \partial_{\bar{\imath}} (y^s \partial_s f) = y^s (\partial_s X^i) \partial_i f + y^s X^i \partial_s \partial_i f$$

$$ {}^C X^i = X^i,\ {}^C X^{\bar{\imath}} = y^s \partial_s X^i$$

buradan da

$$ {}^C X = \begin{pmatrix} X^i \\ y^s \partial_s X^i \end{pmatrix}$$

olur.

3.8. Kovektör Alanının Tam Lifti

$\omega \in T_1^0$ olsun. ${}^c\omega \in T_1^0(T(M_n))$ olmak üzere ${}^c\omega({}^c X) = {}^c(\omega(X))$ şartını sağlıyorsa ${}^c\omega$ ye ω nin tam lifti denir. Şimdi ${}^c\omega \in T_1^0(T(M_n))$ 1- formunun bileşenlerini bulalım.

$$ {}^{c}\omega({}^{c}X) = {}^{c}(\omega(X)) $$

$$ {}^{c}\omega_{\boldsymbol{i}}{}^{c}X^{\boldsymbol{i}} + {}^{c}\omega_{\bar{\imath}}{}^{c}X^{\bar{\imath}} = y^{s}\partial_{s}(\omega_{i}X^{i}) $$

$$ {}^{c}\omega_{\boldsymbol{i}}X^{i} + {}^{c}\omega_{\bar{\imath}}y^{s}\partial_{s}X^{i} = y^{s}\partial_{s}\omega_{i}X^{i} + y^{s}\omega_{i}\partial_{s}X^{i} $$

$$ {}^{c}\omega_{\boldsymbol{i}} = y^{s}\partial_{s}\omega_{i}\ ,\ {}^{c}\omega_{\bar{\imath}} = \omega_{i} $$

olup

$$ {}^{c}\omega = (y^{s}\partial_{s}\omega_{i}, \omega_{i}) $$

şeklinde olur.(Yano and Ishihara 1973)

3.9. Tensör Alanlarının Tam Lifti

$P \in T_{q}^{p}(M_{n})$ keyfi tipli tensörleri inceleyelim.

${}^{c}: T_{0}^{0}(M_{n}) \rightarrow T_{0}^{0}(T(M_{n}))$ ${}^{c}(f+g) = {}^{c}f + {}^{c}g$ ve ${}^{c}(fg) = {}^{c}f\,{}^{v}g + {}^{v}f\,{}^{c}g$ işlemleri ile bir izomorfizmdir. Ayrıca

${}^{c}: T_{0}^{1}(M_{n}) \rightarrow T_{0}^{1}(T(M_{n}))$ ${}^{c}(X+Y) = {}^{c}X + {}^{c}Y$ ve ${}^{c}(fX) = {}^{c}f\,{}^{v}X + {}^{v}f\,{}^{c}X$ işlemleri ile

${}^{c}: T_{1}^{0}(M_{n}) \rightarrow T_{1}^{0}(T(M_{n}))$ ${}^{c}(\omega+\theta) = {}^{c}\omega + {}^{c}\theta$ ve ${}^{c}(f\omega) = {}^{c}f\,{}^{v}\omega + {}^{v}f\,{}^{c}\omega$ işlemleri bir izomorfizmdir.

$$ T(M_{n}) = \sum_{p,q=0}^{\infty} T_{q}^{p}(M_{n}) $$

olmak üzere $T(M_{n})$ bir cebir oluşturur. ${}^{c}: T(M_{n}) \rightarrow (T(T(M_{n}))$ izomorfizmine bakalım.

$$^{c}(P \otimes Q) = {}^{c}P \otimes {}^{v}Q + {}^{v}P \otimes {}^{c}Q, \quad {}^{c}(P + Q) = {}^{c}P + {}^{c}Q$$

işlemleriyle dikey lift tanımlar.

Şimdi (1,1) tipli afinorun tam liftine bakalım.

$$^{c}F = {}^{c}(F_j^i \partial_i \otimes dx^j)$$

$$= {}^{c}(F_j^i \partial_i) \otimes {}^{v}\left(dx^j\right) + {}^{v}(F_j^i \partial_i) \otimes {}^{c}\left(dx^j\right)$$

$$= \left({}^{c}F_j^i \, {}^{v}\partial_i + {}^{v}F_j^i \, {}^{c}\partial_i\right) \otimes {}^{v}\left(dx^j\right) + {}^{v}(F_j^i \partial_i) \otimes {}^{c}\left(dx^j\right)$$

$$= y^s \partial_s F_j^i \partial_{\bar{\imath}} \otimes dx^j + F_j^i \partial_i \otimes dx^j + F_j^i \partial_{\bar{\imath}} \otimes dx^{\bar{\jmath}}$$

$$^{c}F_j^i = F_j^i, \; {}^{c}F_{\bar{\jmath}}^i = 0, \; {}^{c}F_{\bar{\jmath}}^{\bar{\imath}} = F_j^i, \; {}^{c}F_j^{\bar{\imath}} = y^s \partial_s F_j^i$$

$$^{c}F = \begin{pmatrix} F_j^i & 0 \\ y^s \partial_s F_j^i & F_j^i \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

Benzer şekilde $G \in T_2^0(M_n)$ tensör alanının ${}^{c}G$ tam liftinin lokal koordinatlarda bileşenleri

$$^{v}G = \begin{pmatrix} y^s \partial_s G_{ij} & G_{ij} \\ G_{ij} & 0 \end{pmatrix}$$

ve $H \in T_0^2(M_n)$ tensör alanının ${}^{c}H$ tam liftinin lokal koordinatlarda bileşenleri

$$^{c}H = \begin{pmatrix} 0 & H^{ij} \\ H^{ij} & y^s \partial_s H^{ij} \end{pmatrix}$$

şeklindedir (Yano and Ishihara 1973).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Yarı Tanjant Demet

M_n , C^∞ sınıfından n boyutlu diferensiyellenebilir manifold ve $\pi: M_n \to B_m$ bir submersion tarafından tanımlanan diferensiyellenebilir bir demet olsun. Kabul edelim ki, $(x^a, x^\propto), a, b, \dots = 1, \dots, n-m;\ \propto, \beta, \dots, = n-m+1, \dots, n; i = 1,2, \dots, n$ olmak üzere bu lokal koordinat sistemini $\pi: M_n \to B_m$ dönüşümü yardımıyla B_m deki lokal koordinatlara dönüşüm kuralını yazalım. x^a lar B_m nin koordinatları olduğundan x^a lar demetin fibre koordinatları olur. Eğer $\left(x^{a'}, x^{\propto'}\right)$ demetteki başka yerel koordinatlar ise aşağıdaki denklemler yazılabilir.

$$\begin{cases} x^{a'} = x^{a'}(x^a, x^\propto), \\ \ x^{\propto'} = x^{\propto'}(x^\propto). \end{cases} \tag{4.1}$$

Bu dönüşümün Jacobian matrisi aşağıdaki gibidir.

$$\left(A_i^{i'}\right) = \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right) = \begin{pmatrix} A_a^{a'} & A_\propto^{a'} \\ 0 & A_\propto^{\propto'} \end{pmatrix}$$

Kabul edelim ki $T_p(B_m)$ $(p = \pi(\tilde{p}),\ \tilde{p} = (x^a, x^\propto) \in M_n)$ B_m nin bir p noktasındaki tanjant uzayı olsun. Bu durumda $T_p(B_m)$ uzayındaki $\{\partial_\propto\}$ doğal tabanına göre X in bileşenleri $X^\propto = dx^\propto(X)$ olur. $x^{\overline{\propto}} = y^\propto \in T_x(B_m)$ olmak üzere $\left(x^a, x^\propto, x^{\overline{\propto}}\right)$ üçlüsüne yarı tanjant demet denir ve $t(M_n)$ ile gösterilir. Bu durumda M_n manifoldu üzerinde tanımlanan $t(M_n)$ yarı tanjant demet üzerindeki tüm noktalar için $\left(x^a, x^\propto, x^{\overline{\propto}}\right)$, $x^{\overline{\propto}} = X^\propto, \overline{\propto} = \propto + m$ yazılır. O halde yarı tanjant demetin boyutu $n + m$ olur. $n = m$ için yarı tanjant demet $t(M_n)$, manifold üzerindeki tanjant demete $T(M_n)$ ye dönüşür.

M_n deki lokal koordinatların (4.1) dönüşümü yardımıyla $t(M_n)$ yarı tanjant demetteki dönüşüm kuralı aşağıdaki gibidir.

$$\begin{cases} x^{a'} = x^{a'}(x^a, x^\propto) \\ x^{\propto'} = x^{\propto'}(x^\propto) \\ x^{\overline{\propto}'} = \dfrac{\partial x^{\propto'}}{\partial x^\propto} x^{\overline{\propto}} \end{cases}$$

Bu dönüşümün Jacobian matrisi ise aşağıdaki gibidir.

$$\overline{A} = \left(\frac{\partial x^{I'}}{\partial x^I}\right) = \begin{pmatrix} A_a^{a'} & A_\propto^{a'} & 0 \\ 0 & A_\propto^{\propto'} & 0 \\ 0 & A_{\propto\sigma}^{\propto'} x^{\overline{\sigma}} & A_\propto^{\propto'} \end{pmatrix}$$

Burada

$$A_{\propto\sigma}^{\propto'} = \frac{\partial^2 x^{\propto'}}{\partial x^\propto \partial x^\sigma}$$

şeklindedir (Salimov ve Kadıoğlu 2000).

4.2. Yarım Tanjant Demette İz Düşüm Fonksiyonları

$\propto: M_n \to B_m$ olmak üzere $t(M_n)$ üzerinde tanımlanan iz düşüm fonksiyonları aşağıdaki gibidir.

$$\begin{cases} \pi_1 : M_n \to B_m \\ \pi_1(x^a, x^\propto) \to x^\propto \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi_2 : M_{n+m} \to B_m \\ \left(x^a, x^\propto, x^{\overline{\propto}}\right) \to x^\propto \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi_{12} : M_{n+m} \to M_n \\ \left(x^a, x^\propto, x^{\overline{\propto}}\right) \to (x^a, x^\propto) \end{cases}$$

Bu iz düşüm fonksiyonları arasında

$$\pi_2 = \pi_1 o \pi_{12}$$

eşitliği yazılabilir.

4.3. Fonsiyonun Dikey Lifti

Genel anlamda fonksiyonun dikey lifti

$$^{v}f = f o \pi_1 \in T_0^0(M_n)$$

olarak tanımlanır.

$$^{v}f(x^a, x^\propto) = f(x^\propto)$$

olduğundan ^{v}f sadece $x^\propto$ bağlı olduğundan $t(M_n)$ de fonksiyon tanımlar. O halde

$$^{vv}f = \underbrace{f o \pi_1}_{^{v}f} o \pi_{12} = {}^{v}f o \pi_{12}$$

$$^{vv}f\left(x^a, x^\propto, x^{\bar{\propto}}\right) = f(x^\propto)$$

ile tanımlanan ^{vv}f fonksiyonuna f fonksiyonunun $t(M_n)$ üzerindeki dikey lifti denir.

Yukarıdaki tanım dikkate alındığında $g, f \in \Im_0^0(M_n)$ olmak üzere

$$^{vv}(gf) = {}^{vv}g\, {}^{vv}f$$

olduğu görülür.

4.4. Vektör Alanının Dikey Lifti

$V \in \Im_0^1(M_n)$ olmak üzere ${}^{vv}V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ V^{\propto} \end{pmatrix}$ olsun. ${}^{vv}V$ nin $t(M_n)$ de vektör alanı olduğunu gösterelim. Bunun için ${}^{vv}V' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ V^{\propto'} \end{pmatrix}$ olsun. O halde

$$ {}^{vv}V^{\mathrm{I}'} = A_{\mathrm{I}}^{\mathrm{I}'}\, {}^{vv}V^{\mathrm{I}} $$

$$ {}^{vv}V^{\mathrm{I}'} = A_{a}^{\mathrm{I}'}\, {}^{vv}V^{a} + A_{\alpha}^{\mathrm{I}'}\, {}^{vv}V^{\alpha} + A_{\bar{\propto}}^{\mathrm{I}'}\, {}^{vv}V^{\bar{\propto}} $$

$\mathrm{I}' = a'$ alınırsa,

$$ {}^{vv}V^{a'} = A_{a}^{a'} \underbrace{{}^{vv}V^{a}}_{0} + A_{\alpha}^{a'} \underbrace{{}^{vv}V^{\alpha}}_{0} + \underbrace{A_{\bar{\propto}}^{a'}}_{0}\, {}^{vv}V^{\bar{\propto}} $$

$$ = 0 $$

$\mathrm{I}' = \propto'$ alınırsa

$$ {}^{vv}V^{\propto'} = \underbrace{A_{a}^{\propto'}}_{0} \underbrace{{}^{vv}V^{a}}_{0} + A_{\alpha}^{\propto'} \underbrace{{}^{vv}V^{\alpha}}_{0} + \underbrace{A_{\bar{\propto}}^{\propto'}}_{0}\, {}^{vv}V^{\bar{\propto}} $$

$$ = 0 $$

$\mathrm{I}' = \bar{\propto}'$ alınırsa

$$ {}^{vv}V^{\bar{\propto}'} = \underbrace{A_{a}^{\bar{\propto}'}}_{0} \underbrace{{}^{vv}V^{a}}_{0} + A_{\alpha}^{\bar{\propto}'} \underbrace{{}^{vv}V^{\alpha}}_{0} + A_{\bar{\propto}}^{\bar{\propto}'}\, {}^{vv}V^{\bar{\propto}} $$

$$ = A_{\alpha}^{\propto'} V^{\propto} $$

$$ = V^{\propto'} $$

olup ${}^{vv}V,\ t(M_n)$ de vektör alanı tanımlar. Bu şekilde tanımlanan ${}^{vv}V$ ye $t(M_n)$ de V vektör alanının dikey lifti denir.

Teorem 4.4.1: $f \in \Im_0^0(M_n),\ X,Y \in \Im_0^1(M_n)$ olmak üzere

i) ${}^{vv}X\,{}^{vv}f = 0$

ii) ${}^{vv}(X+Y) = {}^{vv}X + {}^{vv}Y$

iii) ${}^{vv}(fX) = {}^{vv}f\,{}^{vv}X$

eşitlikleri yazılır.

İspat:

i) ${}^{vv}X\,{}^{vv}f = {}^{vv}X^{\mathrm{I}}\partial_{\mathrm{I}}\,{}^{vv}f$

$$= \underbrace{{}^{vv}X^{a}}_{0}\,\partial_a\,{}^{vv}f + \underbrace{{}^{vv}X^{\alpha}}_{0}\,\partial_\alpha\,{}^{vv}f + {}^{vv}X^{\bar{\propto}}\,\underbrace{\partial_{\bar{\propto}}\,{}^{vv}f}_{0}$$

$$= 0$$

ii) ${}^{vv}(X+Y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ X^{\propto} + Y^{\propto} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ X^{\propto} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Y^{\propto} \end{pmatrix} = {}^{vv}X + {}^{vv}Y$

iii) ${}^{vv}(fX) = {}^{vv}(fX)^{I}\partial_I$

$$= \underbrace{{}^{vv}(fX)^{a}}_{0}\,\partial_a + \underbrace{{}^{vv}(fX)^{\propto}}_{0}\,\partial_\propto + {}^{vv}(fX)^{\bar{\propto}}\partial_{\bar{\propto}}$$

$$= (fX)^{\propto}$$

$$= fX^{\propto}$$

$$= {}^{vv}f\,{}^{vv}X$$

4.5. Kovektör Alanının Dikey Lifti

$\omega \in \Im_1^0(M_n)$ olmak üzere ${}^{vv}\omega = (0, \omega_\propto, 0)$ olsun. Benzer şekilde ${}^{vv}\omega$ nin $t(M_n)$ de kovektör alanı olduğunu göstermek için ${}^{vv}\omega_{\mathrm{I}'} = (0, \omega_{\propto'}, 0)$ olarak alalım. O halde

$$ {}^{vv}\omega_{\mathrm{I}} = A_{\mathrm{I}}^{\mathrm{I}'}\ {}^{vv}\omega_{\mathrm{I}'} $$

$$ {}^{vv}\omega_{\mathrm{I}} = A_{\mathrm{I}}^{a'}\ {}^{vv}\omega_{a'} + A_{\mathrm{I}}^{\alpha'}\ {}^{vv}\omega_{\alpha'} + A_{\mathrm{I}}^{\bar{\propto}'}\ {}^{vv}\omega_{\bar{\propto}'} $$

$\mathrm{I} = a$ alınırsa,

$$ \begin{aligned} {}^{vv}\omega_{a} &= A_{a}^{a'}\ \underbrace{{}^{vv}\omega_{a'}}_{0} + \underbrace{A_{a}^{\alpha'}}_{0}\ {}^{vv}\omega_{\alpha'} + \underbrace{A_{a}^{\bar{\propto}'}}_{0}\ \underbrace{{}^{vv}\omega_{\bar{\propto}'}}_{0} \\ &= 0 \end{aligned} $$

$\mathrm{I} = \propto$ alınırsa,

$$ \begin{aligned} {}^{vv}\omega_{\alpha} &= A_{\alpha}^{a'}\ \underbrace{{}^{vv}\omega_{a'}}_{0} + A_{\alpha}^{\alpha'}\ {}^{vv}\omega_{\alpha'} + A_{\alpha}^{\bar{\propto}'}\ \underbrace{{}^{vv}\omega_{\bar{\propto}'}}_{0} \\ &= A_{\alpha}^{\alpha'}\omega_{\propto'} \\ &= \omega_{\propto} \end{aligned} $$

$\mathrm{I} = \bar{\propto}$ alınırsa,

$$ \begin{aligned} {}^{vv}\omega_{\bar{\propto}} &= \underbrace{A_{\bar{\propto}}^{a'}}_{0}\ \underbrace{{}^{vv}\omega_{a'}}_{0} + \underbrace{A_{\bar{\propto}}^{\alpha'}}_{0}\ {}^{vv}\omega_{\alpha'} + A_{\bar{\propto}}^{\bar{\propto}'}\ \underbrace{{}^{vv}\omega_{\bar{\propto}'}}_{0} \\ &= 0 \end{aligned} $$

olup ${}^{vv}\omega$, $t(M_n)$ de kovektör alanı tanımlar. Bu şekilde tanımlanan ${}^{vv}\omega$ ye $t(M_n)$ de ω kovektör alanının dikey lifti denir.

Teorem 4.5.1: $f \in \Im_0^0(M_n)$, $X \in \Im_0^1(M_n)$ ve $\omega \in \Im_1^0(M_n)$ olmak üzere

i) ${}^{vv}(\omega + \theta) = {}^{vv}\omega + {}^{vv}\theta$

ii) ${}^{vv}(f\omega) = {}^{vv}f\,{}^{vv}\omega$

iii) ${}^{vv}\omega({}^{vv}X) = 0$

eşitlikleri yazılır.

İspat:

i) ${}^{vv}(\omega + \theta) = (0,\ \omega_\propto + \theta_\propto, 0) = (0, \omega_\propto, 0) + (0,\ \theta_\propto, 0) = {}^{vv}\omega + {}^{vv}\theta$

ii) ${}^{vv}(f\omega) = {}^{vv}(f\omega)_I dx^I$

$$= \underbrace{{}^{vv}(f\omega)_a}_{0} dx^a + {}^{vv}(f\omega)_\propto dx^\propto + \underbrace{{}^{vv}(f\omega)_{\bar{\propto}}}_{0} dx^{\bar{\propto}}$$

$$= (f\omega)_\propto$$

$$= f\omega_\propto$$

$$= {}^{vv}f\,{}^{vv}\omega$$

iii) ${}^{vv}\omega\,{}^{vv}X = {}^{vv}\omega_{\mathrm{I}}\,{}^{vv}X^{\mathrm{I}}$

$$= \underbrace{{}^{vv}\omega_a}_{0}\,\underbrace{{}^{vv}X^a}_{0} + {}^{vv}\omega_\alpha\,\underbrace{{}^{vv}X^\alpha}_{0} + \underbrace{{}^{vv}\omega_{\bar{\propto}}}_{0}\,{}^{vv}X^{\bar{\propto}}$$

$$= 0$$

4.6. Tensör Alanlarının Dikey Lifti

${}^{vv}: t_0^0(M_n) \to t_0^0(t(M_n))$ ${}^{vv}(\,af + bg) = \ a^{vv}f + \ b^{vv}g$ ve ${}^{vv}(fg) = \ {}^{vv}f\,{}^{vv}g$ işlemleri ile bir izomorfizmdir. Ayrıca

${}^{vv}\colon t_0^1(M_n) \to t_0^1(t(M_n))$ ${}^{vv}(aX + bY) = a^{vv}X + b^{vv}Y$ ve ${}^{vv}(fX) = {}^{vv}f^{vv}X$ işlemleri ile

${}^{vv}\colon t_1^0(M_n) \to t_1^0(t(M_n))$ ${}^{vv}(a\omega + b\theta) = a^{vv}\omega + b^{vv}\theta$ ve ${}^{vv}(f\omega) = {}^{vv}f^{vv}\omega$ işlemleri bir izomorfizmdir.

$$t(M_n) = \sum_{p,q=0}^{\infty} t_q^p(M_n)$$

olmak üzere $t(M_n)$ bir cebir oluşturur. ${}^{vv}\colon t(M_n) \to (t(t(M_n))$ izomorfizmine bakalım.

$${}^{vv}(P \otimes Q) = {}^{vv}P \otimes {}^{vv}Q, \quad {}^{vv}(aP + bQ) = a^{vv}P + b^{vv}Q$$

işlemleriyle dikey lift tanımlar.

Teorem 4.6.1:

i) ${}^{vv}(\partial_\propto) = \partial_{\overline{\propto}}$

ii) ${}^{vv}(dx^\propto) = dx^\propto$

İspat:

i) ${}^{vv}(\partial_\propto) = {}^{vv}(\delta_\propto^\beta \partial_\beta) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta_\propto^\beta \end{pmatrix} = 0.\partial_b + 0.\partial_\beta + \delta_\propto^\beta.\partial_{\overline{\beta}} = \partial_{\overline{\propto}}$

ii) ${}^{vv}(dx^\propto) = {}^{vv}(\delta_\beta^\propto dx^\beta) = \left(0, \delta_\beta^\propto, 0\right) = 0.dx^b + \delta_\beta^\propto.dx^\beta + 0.dx^{\overline{\beta}} = dx^\propto$

Şimdi (1,1) tipli afinorun dikey liftine bakalım.

$$ {}^{vv}F = {}^{vv}(F_{\beta}^{\propto}\partial_{\propto} \otimes dx^{\beta}) $$

$$ = {}^{vv}(F_{\beta}^{\propto}\partial_{\propto}) \otimes {}^{vv}\left(dx^{\beta}\right) = {}^{vv}(F_{\beta}^{\propto})^{vv}(\partial_{\propto}) \otimes {}^{vv}\left(dx^{\beta}\right) = F_{\beta}^{\propto}\partial_{\overline{\propto}} \otimes dx^{\beta}, $$

$$ {}^{vv}F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_{\beta}^{\propto} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} $$

Benzer şekilde $G \in t_0^2(M_n)$ tensör alanının ${}^{vv}G$ dikey liftinin koordinatlarını bulalım.

$$ {}^{vv}G = {}^{vv}(G^{\propto\beta}\partial_{\propto} \otimes \partial_{\beta}) $$

$$ = {}^{vv}(G^{\propto\beta}\partial_{\propto}) \otimes {}^{vv}(\partial_{\beta}) = {}^{vv}(G^{\propto\beta})^{vv}(\partial_{\propto}) \otimes {}^{vv}(\partial_{\beta}) = G^{\propto\beta}\partial_{\overline{\propto}} \otimes \partial_{\overline{\beta}} $$

$$ {}^{vv}G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G^{\propto\beta} \end{pmatrix} $$

Benzer şekilde $H \in t_2^0(M_n)$ tensör alanının ${}^{vv}H$ dikey liftinin koordinatlarını bulalım

$$ {}^{vv}H = {}^{vv}(H_{\propto\beta}\, dx^{\propto} \otimes dx^{\beta}) $$

$$ = {}^{vv}(H_{\propto\beta}\, dx^{\propto}) \otimes {}^{vv}(dx^{\beta}) = {}^{vv}(H_{\propto\beta})^{vv}(\, dx^{\propto}) \otimes {}^{vv}(\, dx^{\beta}) = H_{\propto\beta}\, dx^{\propto} \otimes dx^{\beta} $$

$$ {}^{vv}H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ H_{\propto\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} $$

$S \in t_q^p(M_n)$ olmak üzere genel anlamda tensör alanlarının dikey lifti

$$ {}^{vv}S = {}^{vv}(S^{\,i_1,..,i_p}_{\,j_1,..,j_q}\partial_{i_1} \otimes \ldots \otimes \partial_{i_p} \otimes dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_q}) $$

$$ = {}^{vv}(S^{\,i_1,..,i_p}_{\,j_1,..,j_q})\, {}^{vv}\left(\partial_{i_1}\right) \otimes \ldots \otimes {}^{vv}\left(\partial_{i_p}\right) \otimes {}^{vv}\left(dx^{j_1}\right) \otimes \ldots \otimes {}^{vv}\left(dx^{j_q}\right) $$

$$ = S^{\,i_1,..,i_p}_{\,j_1,..,j_q}\partial_{\overline{\iota_1}} \otimes \ldots \otimes \partial_{\overline{\iota_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_q} $$

olarak tanımlanır.

4.7. Fonksiyonun Tam Lifti

Eğer $f = f(x^a, x^{\propto})$ M_n de bir fonksiyon ise $t(M_n)$ de ${}^{cc}f$ yazılabilir.

$$ {}^{cc}f = \iota(df) = x^{\overline{\beta}}\partial_\beta f = y^\beta \partial_\beta f $$

olup ${}^{cc}f,\ t(M_n)$ de f fonksiyonunun tam lifti olarak adlandırılır.

4.8. Vektör Alanının Tam Lifti

$V \in \Im_0^1(M_n)$ olmak üzere ${}^{cc}V = \begin{pmatrix} V^a \\ V^{\propto} \\ y^\sigma \partial_\sigma V^{\propto} \end{pmatrix}$ olsun. ${}^{vv}V$ nin $t(M_n)$ de vektör alanı olduğunu gösterelim. Bunun için ${}^{cc}V' = \begin{pmatrix} V^{a'} \\ V^{\propto'} \\ y^\sigma \partial_\sigma V^{\propto'} \end{pmatrix}$ olsun. O halde

$$ {}^{cc}V^{\mathrm{I}'} = A_{\mathrm{I}}^{\mathrm{I}'}\, {}^{cc}V^{\mathrm{I}} $$

$$ {}^{cc}V^{\mathrm{I}'} = A_a^{\mathrm{I}'}\, {}^{cc}V^a + A_\alpha^{\mathrm{I}'}\, {}^{cc}V^\alpha + A_{\overline{\propto}}^{\mathrm{I}'}\, {}^{cc}V^{\overline{\propto}} $$

$\mathrm{I}' = a'$ alınırsa,

$$ \begin{aligned} {}^{cc}V^{a'} &= A_a^{a'}\, {}^{cc}V^a + A_\alpha^{a'}\, {}^{cc}V^\alpha + \underbrace{A_{\overline{\propto}}^{a'}}_{0}\, {}^{cc}V^{\overline{\propto}} \\ &= A_a^{a'} V^a + A_\alpha^{a'} V^{\propto} \\ &= V^{a'} \end{aligned} $$

$\mathrm{I}' = \propto'$ alınırsa

$$ {}^{cc}V^{\propto'} = \underbrace{A_{a}^{\propto'}}_{0}\, {}^{cc}V^{a} + A_{\alpha}^{\propto'}\, {}^{cc}V^{\alpha} + \underbrace{A_{\bar{\propto}}^{\propto'}}_{0}\, {}^{cc}V^{\bar{\propto}} $$

$$ = A_{\alpha}^{\propto'} V^{\propto} $$

$$ = V^{\propto'} $$

$\mathrm{I}' = \bar{\propto}'$ alınırsa

$$ {}^{cc}V^{\mathrm{I}'} = \underbrace{A_{a}^{\bar{\propto}'}}_{0}\, {}^{cc}V^{a} + A_{\alpha}^{\bar{\propto}'}\, {}^{cc}V^{\alpha} + A_{\bar{\propto}}^{\bar{\propto}'}\, {}^{cc}V^{\bar{\propto}} $$

$$ = (A_{\propto\sigma}^{\propto'} y^{\sigma}) V^{\propto} + A_{\alpha}^{\propto'} (y^{\sigma} \partial_{\sigma} V^{\propto}) $$

$$ = y^{\sigma}\left(\partial_{\sigma} A_{\alpha}^{\propto'}\right) V^{\propto} + y^{\sigma} A_{\alpha}^{\propto'} (\partial_{\sigma} V^{\propto}) $$

$$ = y^{\sigma} \partial_{\sigma} (A_{\alpha}^{\propto'} V^{\propto}) $$

$$ = y^{\sigma} \partial_{\sigma} V^{\propto'} \quad (\sigma = \sigma' \text{ alınırsa}) $$

$$ = y^{\sigma'} \partial_{\sigma'} V^{\propto'} $$

olup ${}^{cc}V$, $t(M_n)$ de vektör alanı tanımlar. Bu şekilde tanımlanan ${}^{cc}V$ ye $t(M_n)$ de V vektör alanının tam lifti denir.

Teorem 4.8.1: $f \in \Im_0^0(M_n)$ ve $X, Y \in \Im_0^1(M_n)$ olmak üzere

i) ${}^{vv}X\, {}^{cc}f = {}^{vv}(Xf)$

ii) ${}^{cc}X\, {}^{vv}f = {}^{vv}(Xf)$

iii) ${}^{cc}X\, {}^{cc}f = {}^{cc}(Xf)$

iv) ${}^{cc}(X + Y) = {}^{cc}X + {}^{cc}Y$

v) ${}^{cc}(fX) = {}^{cc}f\, {}^{vv}X + {}^{vv}X\, {}^{cc}f$

eşitlikleri yazılır.

İspat:

i) $^{vv}X^{cc}f = {}^{vv}X^{\mathrm{I}}\partial_{\mathrm{I}}{}^{cc}f$

$$= \underbrace{{}^{vv}X^{a}}_{0}\,\partial_{a}{}^{cc}f + \underbrace{{}^{vv}X^{\alpha}}_{0}\,\partial_{\alpha}{}^{cc}f + {}^{vv}X^{\bar{\propto}}\partial_{\bar{\propto}}{}^{cc}f$$

$$= X^{\propto}\,\underbrace{\partial_{\bar{\propto}}(y^{\sigma}}_{\delta_{\propto}^{\sigma}}\,\partial_{\sigma}f)$$

$$= X^{\propto}\partial_{\propto}f$$

$$= {}^{vv}(Xf)$$

ii) $^{cc}X^{vv}f = {}^{cc}X^{\mathrm{I}}\partial_{\mathrm{I}}{}^{vv}f$

$$= {}^{cc}X^{a}\,\underbrace{\partial_{a}{}^{vv}f}_{0} + {}^{cc}X^{\alpha}\partial_{\alpha}{}^{vv}f + {}^{cc}X^{\bar{\propto}}\,\underbrace{\partial_{\bar{\propto}}{}^{vv}f}_{0}$$

$$= X^{\propto}\partial_{\propto}f$$

$$= {}^{vv}(Xf)$$

iii) $^{cc}X^{cc}f = {}^{cc}X^{\mathrm{I}}\partial_{\mathrm{I}}{}^{cc}f$

$$= {}^{cc}X^{a}\,\underbrace{\partial_{a}{}^{cc}f}_{0} + {}^{cc}X^{\alpha}\partial_{\alpha}{}^{cc}f + {}^{cc}X^{\bar{\propto}}\partial_{\bar{\propto}}{}^{cc}f$$

$$= X^{\propto}\partial_{\propto}(y^{\sigma}\partial_{\sigma}f) + y^{s}\partial_{s}X^{\propto}\,\underbrace{\partial_{\bar{\propto}}(y^{\sigma}}_{\delta_{\propto}^{\sigma}}\,\partial_{\sigma}f)$$

$$= y^{\sigma}X^{\propto}\partial_{\propto}(\partial_{\sigma}f) + y^{s}\partial_{s}X^{\propto}\partial_{\propto}f \quad (\, s = \sigma \text{ alınırsa})$$

$$= y^{\sigma}(X^{\propto}\partial_{\propto}(\partial_{\sigma}f) + (\partial_{\sigma}X^{\propto})\partial_{\propto}f)$$

$$= y^{\sigma}\partial_{\sigma}(X^{\propto}\partial_{\propto}f)$$

$$= y^{\sigma}\partial_{\sigma}(Xf)$$

$$= {}^{cc}(Xf)$$

iv) $^{cc}(X+Y)=\begin{pmatrix} X^a+Y^a \\ X^\propto+Y^\propto \\ y^\sigma\partial_\sigma(X^\propto+Y^\propto)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X^a \\ X^\propto \\ y^\sigma\partial_\sigma X^\propto\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} Y^a \\ Y^\propto \\ y^\sigma\partial_\sigma Y^\propto\end{pmatrix}={}^{cc}X+{}^{cc}Y$

v) $^{cc}(fX)={}^{cc}(fX)^I\partial_I$

$$\begin{aligned}
&= {}^{cc}(fX)^a\partial_a+{}^{cc}(fX)^\propto\partial_\propto+{}^{cc}(fX)^{\bar\propto}\partial_{\bar\propto}\\
&= (fX)^a\partial_a+(fX)^\propto\partial_\propto+y^\sigma\partial_\sigma\,(fX)^\propto\partial_{\bar\propto}\\
&= fX^a\partial_a+fX^\propto\partial_\propto+(y^\sigma\partial_\sigma f)X^\propto\partial_{\bar\propto}+y^\sigma f(\partial_\sigma X^\propto)\partial_{\bar\propto}\\
&= (y^\sigma\partial_\sigma f)X^\propto\partial_{\bar\propto}+f(X^a\partial_a+X^\propto\partial_\propto+y^\sigma\partial_\sigma X^\propto\partial_{\bar\propto})\\
&= {}^{cc}f\,{}^{vv}X+{}^{vv}f\,{}^{cc}X
\end{aligned}$$

4.9. Kovektör Alanının Tam Lifti

$\omega\in\Im_1^0(M_n)$ olmak üzere $^{cc}\omega=(0,y^\sigma\partial_\sigma\omega_\propto\,,\omega_\propto)$ olsun. $^{cc}\omega$ nin $t(M_n)$ de kovektör alanı olduğunu göstermek için $^{cc}\omega'=(0,y^\sigma\partial_\sigma\omega_{\propto'},\omega_{\propto'})$ alalım. O halde

$$^{cc}\omega_{\mathrm{I}}=A_{\mathrm{I}}^{\mathrm{I}'}\ {}^{cc}\omega_{\mathrm{I}'}$$

$$^{cc}\omega_{\mathrm{I}}=A_{\mathrm{I}}^{a'}\ {}^{cc}\omega_{a'}+A_{\mathrm{I}}^{\alpha'}\ {}^{cc}\omega_{\alpha'}+A_{\mathrm{I}}^{\bar\propto'}\ {}^{cc}\omega_{\bar\propto'}$$

I $=a$ alınırsa,

$$\begin{aligned}
^{cc}\omega_a &= A_a^{a'}\ \underbrace{^{cc}\omega_{a'}}_{0}+\underbrace{A_a^{\alpha'}}_{0}\ {}^{cc}\omega_{\alpha'}+\underbrace{A_a^{\bar\propto'}}_{0}\ {}^{cc}\omega_{\bar\propto'}\\
&=0
\end{aligned}$$

I $=\propto$ alınırsa,

$$\begin{aligned}
^{cc}\omega_\alpha &= A_\alpha^{a'}\ {}^{cc}\omega_{a'}+A_\alpha^{\alpha'}\ {}^{cc}\omega_{\alpha'}+A_\alpha^{\bar\propto'}\ {}^{cc}\omega_{\bar\propto'}\\
&= A_\alpha^{a'}\ \underbrace{\omega_{a'}}_{0}+A_\alpha^{\alpha'}(y^\sigma\partial_\sigma\omega_{\propto'})+A_{\propto\sigma}^{\propto'}y^\sigma\omega_{\propto'}
\end{aligned}$$

$$= y^{\sigma} A_{\alpha}^{\alpha'} (y^{\sigma} \omega_{\propto'}) + y^{\sigma} (\partial_{\sigma} A_{\alpha}^{\alpha'}) \omega_{\propto'}$$

$$= y^{\sigma} \partial_{\sigma} \omega_{\propto}$$

$\mathrm{I} = \overline{\propto}$ alınırsa

$$^{cc}\omega_{\overline{\propto}} = \underbrace{A_{\overline{\propto}}^{a'}}_{0} \ {}^{cc}\omega_{a'} + \underbrace{A_{\overline{\propto}}^{\alpha'}}_{0} \ {}^{cc}\omega_{\alpha'} + A_{\overline{\propto}}^{\overline{\propto}'} \ {}^{cc}\omega_{\overline{\propto}'}$$

$$= A_{\alpha}^{\alpha'} \omega_{\propto'}$$

$$= \omega_{\propto}$$

olup $^{cc}\omega,\ t(M_n)$ de kovektör alanı tanımlar. Bu şekilde tanımlanan$^{cc}\omega$ ye $t(M_n)$ de ω kovektör alanının tam lifti denir.

Teorem 4.9.1: $X \in \Im_0^1(M_n)$ ve $\omega \in \Im_1^0(M_n)$ olmak üzere

i) $^{vv}\omega\,^{cc}X = {}^{vv}(\omega(X))$

ii) $^{cc}\omega\,^{vv}X = {}^{vv}(\omega(X))$

iii) $^{cc}\omega\,^{cc}X = {}^{cc}(\omega(X))$

eşitlikleri yazılır.

İspat:

i) $^{vv}\omega\,^{cc}X = {}^{vv}\omega_{\mathrm{I}}\,^{cc}X^{\mathrm{I}}$

$$= \underbrace{^{vv}\omega_{a}}_{0} \,^{cc}X^{a} + {}^{vv}\omega_{\alpha}\,^{cc}X^{\alpha} + \underbrace{^{vv}\omega_{\overline{\propto}}}_{0} \,^{cc}X^{\overline{\propto}}$$

$$= \omega_{\propto} X^{\propto}$$

$$= \omega(X)$$

$$= {}^{vv}\omega(X)$$

ii) $^{cc}\omega^{vv}X = {}^{cc}\omega_{\mathrm{I}}{}^{vv}X^{\mathrm{I}}$

$$= {}^{cc}\omega_a \underbrace{{}^{vv}X^a}_{0} + {}^{cc}\omega_\alpha \underbrace{{}^{vv}X^\alpha}_{0} + {}^{cc}\omega_{\bar{\alpha}}{}^{vv}X^{\bar{\alpha}}$$

$$= \omega_\propto X^\propto$$

$$= \omega(X)$$

$$= {}^{vv}\omega(X)$$

iii) $^{cc}\omega^{cc}X = {}^{cc}\omega_{\mathrm{I}}{}^{cc}X^{\mathrm{I}}$

$$= \underbrace{{}^{cc}\omega_a}_{0}\, {}^{cc}X^a + {}^{cc}\omega_\alpha{}^{cc}X^\alpha + {}^{cc}\omega_{\bar{\alpha}}{}^{cc}X^{\bar{\alpha}}$$

$$= (y^\sigma \partial_\sigma \omega_\propto)X^\alpha + \omega_\propto(y^\sigma \partial_\sigma X^\alpha)$$

$$= y^\sigma(\partial_\sigma \omega_\propto)X^\alpha + y^\sigma \omega_\propto(\partial_\sigma X^\alpha)$$

$$= y^\sigma \partial_\sigma(\omega_\propto X^\alpha)$$

$$= {}^{cc}(\omega(X))$$

Teorem 4.9.2: $f \in \Im_0^0(M_n)$ ve $\omega, \theta \in \Im_1^0(M_n)$ olmak üzere

i) $^{cc}(\omega + \theta) = {}^{cc}\omega + {}^{cc}\theta$

ii) $^{cc}(f\omega) = {}^{cc}f^{vv}\omega + {}^{vv}f^{cc}\omega$

eşitlikleri yazılır.

İspat:

i) $^{cc}(\omega + \theta) = (0,\ y^\sigma \partial_\sigma(\omega_\propto + \theta_\propto)\,, \omega_\propto + \theta_\propto)$

$$= (0, y^\sigma \partial_\sigma \omega_\propto, \omega_\propto) + (0, y^\sigma \partial_\sigma\, \theta_\propto, \theta_\propto)$$

$$= {}^{cc}\omega + {}^{cc}\theta$$

ii) $^{cc}(f\omega) = {}^{cc}(f\omega)_I dx^I$

$$= \underbrace{^{cc}(f\omega)_a}_{0} dx^a + {}^{cc}(f\omega)_\propto dx^\propto + {}^{cc}(f\omega)_{\bar{\propto}} dx^{\bar{\propto}}$$

$$= y^\sigma \partial_\sigma (f\omega)_\propto dx^\propto + (f\omega)_\propto dx^{\bar{\propto}}$$

$$= (y^\sigma \partial_\sigma f)\omega_\propto dx^\propto + y^\sigma f(\partial_\sigma \omega_\propto) dx^\propto + f\omega_\propto dx^{\bar{\propto}}$$

$$= (y^\sigma \partial_\sigma f)\omega_\propto dx^\propto + f\left(y^\sigma \partial_\sigma \omega_\propto dx^\propto + \omega_\propto dx^{\bar{\propto}}\right)$$

$$= {}^{cc}f\,{}^{vv}\omega + {}^{vv}f\,{}^{cc}\omega$$

4.10. Tensör Alanlarının Tam Lifti

$P \in t_q^p(M_n)$ keyfi tipli tensörleri inceleyelim.

$^{cc}: t_0^0(M_n) \to t_0^0(t(M_n))$ $^{cc}(f+g) = {}^{cc}f + {}^{cc}g$ ve $^{cc}(fg) = {}^{cc}f\,{}^{vv}g + {}^{vv}f\,{}^{cc}g$ işlemleri ile bir izomorfizmdir. Ayrıca

$^{cc}: t_0^1(M_n) \to t_0^1(t(M_n))$ $^{cc}(X+Y) = {}^{cc}X + {}^{cc}Y$ ve $^{cc}(fX) = {}^{cc}f\,{}^{vv}X + {}^{vv}f\,{}^{cc}X$ işlemleri ile

$^{cc}: t_1^0(M_n) \to t_1^0(t(M_n))$ $^{cc}(\omega+\theta) = {}^{cc}\omega + {}^{cc}\theta$ ve $^{cc}(f\omega) = {}^{cc}f\,{}^{vv}\omega + {}^{vv}f\,{}^{cc}\omega$ işlemleri bir izomorfizmdir.

$$t(M_n) = \sum_{p,q=0}^{\infty} t_q^p(M_n)$$

olmak üzere $t(M_n)$ bir cebir oluşturur. $^{cc}: t(M_n) \to (t(t(M_n))$ izomorfizmine bakalım.

$$^{cc}(P \otimes Q) = {}^{cc}P \otimes {}^{vv}Q + {}^{vv}P \otimes {}^{cc}Q, \quad {}^{cc}(P+Q) = {}^{cc}P + {}^{cc}Q$$

işlemleriyle dikey lift tanımlar.

Teorem 4.10.1:

i) ${}^{cc}(\partial_\propto) = \partial_\propto$

ii) ${}^{cc}(dx^\propto) = dx^{\overline{\propto}}$

İspat:

i) $${}^{cc}(\partial_\propto) = {}^{cc}(\delta_\propto^\beta \partial_\beta) = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_\propto^\beta \\ y^\sigma \partial_\sigma \delta_\propto^\beta \end{pmatrix} = 0.\partial_b + \delta_\propto^\beta.\partial_\beta + y^\sigma \underbrace{\partial_\sigma \delta_\propto^\beta}_{0}.\partial_{\overline{\beta}} = \delta_\propto^\beta.\partial_\beta = \partial_\propto$$

ii) $${}^{cc}(dx^\propto) = {}^{cc}\left(\delta_\beta^\propto dx^\beta\right) = \left(0, y^\sigma \partial_\sigma \delta_\beta^\propto, \delta_\propto^\beta\right)$$

$$= 0.dx^b + y^\sigma \underbrace{\partial_\sigma \delta_\beta^\propto}_{0}.dx^\beta + \delta_\propto^\beta.dx^{\overline{\beta}}$$

$$= \delta_\propto^\beta.dx^{\overline{\beta}}$$

$$= dx^{\overline{\beta}}$$

Şimdi (1,1) tipli afinorun tam liftine bakalım.

$${}^{cc}F = {}^{cc}\left(F_\beta^\propto \partial_\propto \otimes dx^\beta\right)$$

$$= {}^{cc}(F_\beta^\propto \partial_\propto) \otimes {}^{vv}(dx^\beta) + {}^{vv}(F_\beta^\propto \partial_\propto) \otimes {}^{cc}(dx^\beta)$$

$$= \left({}^{cc}(F_\beta^\propto)^{vv}(\partial_\propto) + {}^{vv}(F_\beta^\propto)^{cc}(\partial_\propto)\right) \otimes {}^{vv}(dx^\beta) + {}^{vv}(F_\beta^\propto \partial_\propto) \otimes {}^{cc}(dx^\beta)$$

$$= y^\sigma \partial_\sigma F_\beta^\propto \partial_{\overline{\propto}} \otimes dx^\beta + F_\beta^\propto \partial_\propto \otimes dx^\beta + F_\beta^\propto \partial_{\overline{\propto}} \otimes dx^{\overline{\beta}}$$

$${}^{cc}F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_\beta^\propto & 0 \\ 0 & y^\sigma \partial_\sigma F_\beta^\propto & F_\beta^\propto \end{pmatrix}$$

Benzer şekilde $G \in t_2^0(M_n)$ tensör alanının ${}^{cc}G$ tam liftinin koordinatlarını bulalım.

$$
\begin{aligned}
{}^{cc}G &= {}^{cc}\big(G_{\propto\beta}dx^{\propto} \otimes dx^{\beta}\big) \\
&= {}^{cc}(G_{\propto\beta}dx^{\propto}) \otimes {}^{vv}(dx^{\beta}) + {}^{vv}(G_{\propto\beta}dx^{\propto}) \otimes {}^{cc}(dx^{\beta}) \\
&= \big({}^{cc}(G_{\propto\beta}\,)^{\boldsymbol{vv}}(dx^{\propto}) + {}^{vv}(G_{\propto\beta}\,)^{\boldsymbol{cc}}(dx^{\propto})\big) \otimes {}^{vv}(dx^{\beta}) + {}^{vv}(G_{\propto\beta}dx^{\propto}) \otimes {}^{cc}(dx^{\beta}) \\
&= y^{\sigma}\partial_{\sigma}G_{\propto\beta}dx^{\propto} \otimes dx^{\beta} + G_{\propto\beta}dx^{\overline{\propto}} \otimes dx^{\beta} + G_{\propto\beta}dx^{\propto} \otimes dx^{\overline{\beta}}
\end{aligned}
$$

$$
{}^{cc}G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & y^{\sigma}\partial_{\sigma}G_{\propto\beta} & G_{\propto\beta} \\ 0 & G_{\propto\beta} & 0 \end{pmatrix}
$$

Benzer şekilde $H \in t_0^2(M_n)$ tensör alanının ${}^{cc}H$ dikey liftinin koordinatlarını bulalım.

$$
\begin{aligned}
{}^{cc}H &= {}^{cc}(H^{\propto\beta}\partial_{\propto} \otimes \partial_{\beta}) \\
&= {}^{cc}(H^{\propto\beta}\partial_{\propto}) \otimes {}^{vv}(\partial_{\beta}) + {}^{vv}(H^{\propto\beta}\partial_{\propto}) \otimes {}^{cc}(\partial_{\beta}) \\
&= \big({}^{cc}(H^{\propto\beta})^{\boldsymbol{vv}}(\partial_{\propto}) + {}^{vv}(H^{\propto\beta})^{\boldsymbol{cc}}(\partial_{\propto})\big) \otimes {}^{vv}(\partial_{\beta}) + {}^{vv}(H^{\propto\beta}\partial_{\propto}) \otimes {}^{cc}(\partial_{\beta}) \\
&= y^{\sigma}\partial_{\sigma}H^{\propto\beta}\partial_{\overline{\propto}} \otimes \partial_{\overline{\beta}} + H^{\propto\beta}\partial_{\propto} \otimes \partial_{\overline{\beta}} + H^{\propto\beta}\partial_{\propto} \otimes \partial_{\beta}
\end{aligned}
$$

$$
{}^{cc}H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & H^{\propto\beta} & H^{\propto\beta} \\ 0 & 0 & y^{\sigma}\partial_{\sigma}H^{\propto\beta} \end{pmatrix}
$$

şeklindedir.

Teorem 4.10.2: Keyfi $X, Y \in \mathfrak{I}_0^1(M_n)$ olmak üzere

i) $[{}^{vv}X, {}^{vv}Y] = 0$

ii) $[{}^{cc}X, {}^{vv}Y] = [{}^{vv}X, {}^{cc}Y] = {}^{vv}[X, Y]$

iii) $[{}^{cc}X, {}^{cc}Y] = {}^{cc}[X, Y]$

eşitlikleri yazılabilir.

İspat:

$${}^{vv}X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ X^{\beta} \end{pmatrix}, \ {}^{vv}Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Y^{\beta} \end{pmatrix}$$ ve $I = (a, \propto, \overline{\propto})$ olmak üzere

i) $[{}^{vv}X, {}^{vv}Y]^{\boldsymbol{b}} = {}^{vv}X^I \partial_I \underbrace{{}^{vv}Y^b}_{0} - {}^{vv}Y^I \partial_I \underbrace{{}^{vv}X^b}_{0}$

$= 0$

$[{}^{vv}X, {}^{vv}Y]^{\boldsymbol{\beta}} = {}^{vv}X^I \partial_I \underbrace{{}^{vv}Y^{\beta}}_{0} - {}^{vv}Y^I \partial_I \underbrace{{}^{vv}Y^{\beta}}_{0}$

$= 0$

$[{}^{vv}X, {}^{vv}Y]^{\overline{\boldsymbol{\beta}}} = {}^{vv}X^I \partial_I {}^{vv}Y^{\overline{\beta}} - {}^{vv}Y^I \partial_I {}^{vv}Y^{\overline{\beta}}$

$= \underbrace{{}^{vv}X^a}_{0} \partial_a Y^{\beta} + \underbrace{{}^{vv}X^{\propto}}_{0} \partial_{\propto} Y^{\beta} + {}^{vv}X^{\overline{\propto}} \underbrace{\partial_{\overline{\propto}} Y^{\beta}}_{0} - \underbrace{{}^{vv}Y^a}_{0} \partial_a Y^{\beta} - \underbrace{{}^{vv}Y^{\propto}}_{0} \partial_{\propto} Y^{\beta} -$
${}^{vv}Y^{\overline{\propto}} \underbrace{\partial_{\overline{\propto}} Y^{\beta}}_{0}$

$= 0$

olur. Buradan

$$[{}^{vv}X, {}^{vv}Y] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

olduğu görülür.

ii) $[{}^{cc}X, {}^{vv}Y]^{\boldsymbol{b}} = {}^{cc}X^I \partial_I \underbrace{{}^{vv}Y^b}_{0} - {}^{vv}Y^I \partial_I {}^{cc}X^b$

$= -\underbrace{{}^{vv}Y^a}_{0} \partial_a X^b - \underbrace{{}^{vv}Y^{\propto}}_{0} \partial_{\propto} X^b - {}^{vv}Y^{\overline{\propto}} \underbrace{\partial_{\overline{\propto}} X^b}_{0}$

$= 0$

$$[{}^{cc}X, {}^{vv}Y]^{\boldsymbol{\beta}} = {}^{cc}X^I \partial_I \underbrace{{}^{vv}Y^{\beta}}_{0} - {}^{vv}Y^I \partial_I {}^{cc}X^{\beta}$$

$$= -\underbrace{{}^{vv}Y^{a}}_{0} \partial_a X^{\beta} - \underbrace{{}^{vv}Y^{\propto}}_{0} \partial_{\propto} X^{\beta} - {}^{vv}Y^{\overline{\propto}} \underbrace{\partial_{\overline{\propto}} X^{\beta}}_{0}$$

$$= 0$$

$$[{}^{cc}X, {}^{vv}Y]^{\overline{\boldsymbol{\beta}}} = {}^{cc}X^I \partial_I {}^{vv}Y^{\overline{\beta}} - {}^{vv}Y^I \partial_I {}^{cc}X^{\overline{\beta}}$$

$$= {}^{cc}X^{a} \underbrace{\partial_a Y^{\beta}}_{0} + {}^{cc}X^{\propto} \partial_{\propto} Y^{\beta} + {}^{cc}X^{\overline{\propto}} \underbrace{\partial_{\overline{\propto}} Y^{\beta}}_{0} - \underbrace{{}^{vv}Y^{a}}_{0} \partial_a (y^{\sigma} \partial_{\sigma} X^{\beta}) -$$

$$\underbrace{{}^{vv}Y^{\propto}}_{0} \partial_{\propto} (y^{\sigma} \partial_{\sigma} X^{\beta}) - {}^{vv}Y^{\overline{\propto}} \underbrace{\partial_{\overline{\propto}} (y^{\sigma}}_{\delta^{\sigma}_{\overline{\propto}}} \partial_{\sigma} X^{\beta})$$

$$= X^{\propto} \partial_{\propto} Y^{\beta} - Y^{\propto} \partial_{\propto} X^{\beta}$$

$$= [X, Y]^{\boldsymbol{\beta}}$$

olur. Buradan

$$[{}^{cc}X, {}^{vv}Y] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ [X, Y]^{\boldsymbol{\beta}} \end{pmatrix} = {}^{vv}[X, Y]$$

olduğu görülür. Benzer şekilde teoremin üçüncü kısmı da ispat edilebilir.

iii) $[{}^{cc}X, {}^{cc}Y]^{\boldsymbol{b}} = {}^{cc}X^I \partial_I {}^{cc}Y^{b} - {}^{cc}Y^I \partial_I {}^{cc}X^{b}$

$$= {}^{cc}X^{a} \partial_a {}^{cc}Y^{b} + {}^{cc}X^{\propto} \partial_{\propto} {}^{cc}Y^{b} + {}^{cc}X^{\overline{\propto}} \partial_{\overline{\propto}} {}^{cc}Y^{b} - {}^{cc}Y^{a} \partial_a {}^{cc}X^{b} -$$

$${}^{cc}Y^{\propto} \partial_{\propto} {}^{cc}X^{b} - {}^{cc}Y^{\overline{\propto}} \partial_{\overline{\propto}} {}^{cc}X^{b}$$

$$= X^{a} \underbrace{\partial_a Y^{b}}_{0} + X^{\propto} \partial_{\propto} Y^{b} + y^{\sigma} \partial_{\sigma} X^{\propto} \underbrace{\partial_{\overline{\propto}} Y^{b}}_{0} - Y^{a} \underbrace{\partial_a X^{b}}_{0} - Y^{\propto} \partial_{\propto} X^{b} -$$

$$y^{\sigma} \partial_{\sigma} X^{\propto} \underbrace{\partial_{\overline{\propto}} X^{b}}_{0}$$

$$= X^{\propto} \partial_{\propto} Y^{b} - Y^{\propto} \partial_{\propto} X^{b}$$

$$= [X, Y]^{\boldsymbol{b}}$$

$$[{}^{cc}X, {}^{cc}Y]^{\boldsymbol{\beta}} = {}^{cc}X^{I}\partial_{I}{}^{cc}Y^{\beta} - {}^{cc}Y^{I}\partial_{I}{}^{cc}X^{\beta}$$

$$= {}^{cc}X^{a}\partial_{a}{}^{cc}Y^{\beta} + {}^{cc}X^{\propto}\partial_{\propto}{}^{cc}Y^{\beta} + {}^{cc}X^{\bar{\propto}}\partial_{\bar{\propto}}{}^{cc}Y^{\beta} - {}^{cc}Y^{a}\partial_{a}{}^{cc}X^{\beta} - {}^{cc}Y^{\propto}\partial_{\propto}{}^{cc}X^{\beta} - {}^{cc}Y^{\bar{\propto}}\partial_{\bar{\propto}}{}^{cc}X^{\beta}$$

$$= X^{a}\underbrace{\partial_{a} Y^{\beta}}_{0} + X^{\propto}\partial_{\propto} Y^{\beta} + y^{\sigma}\partial_{\sigma}X^{\propto}\underbrace{\partial_{\bar{\propto}} Y^{\beta}}_{0} - Y^{a}\underbrace{\partial_{a} X^{\beta}}_{0} - Y^{\propto}\partial_{\propto} X^{\beta} - y^{\sigma}\partial_{\sigma}Y^{\propto}\underbrace{\partial_{\bar{\propto}} X^{\beta}}_{0}$$

$$= X^{\propto}\partial_{\propto} Y^{\beta} - Y^{\propto}\partial_{\propto} X^{\beta}$$

$$= [X, Y]^{\boldsymbol{\beta}}$$

$$[{}^{cc}X, {}^{cc}Y]^{\bar{\boldsymbol{\beta}}} = {}^{cc}X^{I}\partial_{I}{}^{cc}Y^{\bar{\beta}} - {}^{cc}Y^{I}\partial_{I}{}^{cc}X^{\bar{\beta}}$$

$$= {}^{cc}X^{a}\partial_{a}{}^{cc}Y^{\bar{\beta}} + {}^{cc}X^{\propto}\partial_{\propto}{}^{cc}Y^{\bar{\beta}} + {}^{cc}X^{\bar{\propto}}\partial_{\bar{\propto}}{}^{cc}Y^{\bar{\beta}} - {}^{cc}Y^{a}\partial_{a}{}^{cc}X^{\bar{\beta}} - {}^{cc}Y^{\propto}\partial_{\propto}{}^{cc}X^{\bar{\beta}} - {}^{cc}Y^{\bar{\propto}}\partial_{\bar{\propto}}{}^{cc}X^{\bar{\beta}}$$

$$= X^{a}\partial_{a}y^{\sigma}\underbrace{\partial_{\sigma} Y^{\beta}}_{0} + X^{\propto}\partial_{\propto}y^{\sigma}\partial_{\sigma} Y^{\beta} + y^{\sigma}\partial_{\sigma} X^{\propto}\underbrace{\partial_{\bar{\propto}}y^{\sigma}}_{\delta^{\sigma}_{\propto}}\partial_{\sigma} Y^{\beta} - Y^{a}\partial_{a}y^{\sigma}\underbrace{\partial_{\sigma} X^{\beta}}_{0} - Y^{\propto}\partial_{\propto}y^{\sigma}\partial_{\sigma} X^{\beta} - y^{\sigma}\partial_{\sigma} Y^{\beta}\underbrace{\partial_{\bar{\propto}}y^{\sigma}}_{\delta^{\sigma}_{\propto}}\partial_{\sigma} X^{\beta}$$

$$= y^{\sigma}X^{\propto}\partial_{\propto}\left(\partial_{\sigma} Y^{\beta}\right) - y^{\sigma}Y^{\propto}\partial_{\propto}\left(\partial_{\sigma} X^{\beta}\right) + y^{\sigma}(\partial_{\sigma} X^{\propto})\partial_{\propto} Y^{\beta} - y^{\sigma}\left(\partial_{\sigma} Y^{\beta}\right)\partial_{\propto} X^{\beta}$$

$$= y^{\sigma}\partial_{\sigma}\left(X^{a}\partial_{a} Y^{\beta} - Y^{a}\partial_{a} X^{\beta}\right)$$

$$= y^{\sigma}\partial_{\sigma}[X,Y]^{\beta}$$

olur. Buradan

$$[{}^{cc}X, {}^{cc}Y] = \begin{pmatrix} [X, Y]^{\boldsymbol{b}} \\ [X, Y]^{\boldsymbol{\beta}} \\ y^{\sigma}\partial_{\sigma}[X, Y]^{\boldsymbol{\beta}} \end{pmatrix} = {}^{cc}[X,Y]$$

yazılır.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu tezde yarı tanjant demet ve yarı tanjant demet üzerinde tanımlanan dikey lift ile tam lift araştırılmıştır. Çalışmada ilk olarak yarı tanjant demetin tanımı verilmiş ve tanjant demet ile arasındaki ilişki incelenmiştir. Yarı tanjant demetin $\left(x^a, x^\propto, x^{\overline{\propto}}\right)$ üçlüsünden meydana geldiği, koordinat dönüşümünün

$$\begin{cases} x^{a'} = x^{a'}(x^a, x^\propto) \\ x^{\propto'} = x^{\propto'}(x^\propto) \\ x^{\overline{\propto}'} = \dfrac{\partial x^{\propto'}}{\partial x^\propto} x^{\overline{\propto}} \end{cases}$$

şeklinde olduğu ve bu dönüşümün Jacobian matrisinin

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} A_a^{a'} & A_\propto^{a'} & 0 \\ 0 & A_\propto^{\propto'} & 0 \\ 0 & A_{\propto\sigma}^{\propto'} x^{\overline{\sigma}} & A_\propto^{\propto'} \end{pmatrix}$$

olduğu ifade edilmiştir.

İkinci olarak yarı tanjant demet üzerinde tanımlanan izdüşüm fonksiyonları verilmiştir.

Üçüncü olarak verilen Jacobian matrisi yardımıyla $f \in \Im_0^0(M_n), V \in \Im_0^1(M_n)$ ve $\omega \in \Im_1^0(M_n)$ olmak üzere ${}^{vv}f$, ${}^{vv}V$ ve ${}^{vv}\omega$ dikey liftleri ile ${}^{cc}f$, ${}^{cc}V$ ve ${}^{cc}\omega$ tam liftlerinin yarı tanjant demet üzerinde tanımlı olduğu ispat edilmiştir.

Dördüncü olarak elde edilen bulgular yardımıyla herhangi bir (p, q) tipli tensörün dikey lifti ile tam lifti hesaplanmıştır.

Son olarak tanjant demette geçerli olan bazı önemli teoremlerin yarı tanjant demet üzerinde geçerliliği araştırılmıştır.

KAYNAKLAR

Bishop, R. L. and Goldberg, S.I., 1968. Tensör Analysis on Manifolds., The Macmillan Company, 280 p, New York.

Duc, T.V. Structure presque-transverse. J. Di. Geom., 1979. No:2, 14, 215-219.

Gezer, Aydın., 2004. Yatay Lift Teorisi. Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi, Türkiye.

Hacısalihoğlu, H. H., 1993. Diferensiyel Geometri. Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Ankara.

Kobayashi, S. and Nomizu, K., 1963. Foundations of Differential Geometry, Interscience Publishers, 325 p, New York.

Salimov, A. A. ve Mağden, A., 1999. Diferensiyel Geometriye Giriş. Aktif Yayınevi, Atatürk Üniversitesi, 326 s, Erzurum.

Salimov, A.A. and Kadıoğlu, E., 2000. Lifts of Derivations to the Semitangent Bundle. Turk J Math, 24, 259-266.

Vishnevskii V., Shirokov A.P. and Shurygin V.V., 1985. Spaces over Algebras. Kazan. Kazan Gos. Univ.

Yano, K. and Ishihara, S., 1973. Tangent and Cotangent Bundles. Deparment of Mathematics Tokyo Institute of Technology Tokyo, 423 p, Japan.

ÖZGEÇMİŞ

1989 yılında Adana'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Adana'da tamamladı. Lisans öğrenimini ise Erzurum Atatürk Üniversitesi, Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi, Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü'nde tamamlayarak, 2011 yılında mezun oldu. 2011-2012 Eğitim Öğretim yılında Erzurum Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı, Geometri Bilim Dalında Yüksek Lisans eğitimine başladı. Şubat 2012 de Hınıs Teknik ve Endüstri Meslek Lisesi'ne matematik öğretmeni olarak göreve başladı. Halen bu görevine devam etmektedir.