QUASİ OPTİĞİN DURGUN DENKLEMİ
İÇİN LİONS FONKSİYONELLİ
OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ
VE ONUN NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

Yusuf KOÇAK

Doktora Tezi
Matematik Ana Bilim Dalı
Doç. Dr. Ercan ÇELİK
2013

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

QUASİ OPTİĞİN DURGUN DENKLEMİ İÇİN LİONS FONKSİYONELLİ OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ VE ONUN NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

Yusuf KOÇAK

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

ERZURUM
2013

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAY FORMU

Quasi Optiğin Durgun Denklemi için Lions Fonksiyonelli Optimal Kontrol Problemi ve Onun Nümerik Çözümü

Doç. Dr. Ercan ÇELİK danışmanlığında, Yusuf KOÇAK tarafından hazırlanan bu çalışma 11/12/2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora tezi olarak oybirliği ile kabul edilmiştir.

Başkan	: Prof. Dr. Gabil YAGUB	*İmza*	:
Üye	: Doç. Dr. Ercan ÇELİK	*İmza*	:
Üye	: Prof. Dr. Murat SUBAŞI	*İmza*	:
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Arzu AYKUT	*İmza*	:
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Muhammed YİĞİDER	*İmza*	:

Yukarıdaki sonucu onaylıyorum

Prof. Dr. İhsan **EFEOĞLU**
Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

QUASİ OPTİĞİN DURGUN DENKLEMİ İÇİN LİONS FONKSİYONELLİ OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ VE ONUN NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

Yusuf KOÇAK

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ercan ÇELİK

Bu tezde, Quasi optiğin durgun denklemi için optimal kontrol problemi ele alınmıştır. İlk bölümde optimal kontrol teorisi hakkında genel bir giriş yapıldıktan sonra, ikinci bölümde tezde kullanılan teoremler, lemmalar ve bazı matematiksel kavramlara yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, Quasi optiğin durgun denklemi için bir optimal kontrol problemi ele alınmıştır. Bu problem için olası kontroller kümesi, ölçülebilir karesel integrallenebilir fonksiyonlar uzayıdır. Bu problem için, başlangıç-sınır değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliğine ait teorem verilmiş, optimal kontrol probleminin iyi konulmuş olması için gerekli olan sorular incelenmiş, fonksiyonelin diferansiyellenebilir olduğu gösterilmiş ve optimal kontrol probleminin çözümü için varyasyon eşitsizliği şeklinde gerek şart elde edilmiştir. Daha sonra, bu bölümde ele alınan optimal kontrol problemine sonlu farklar yöntemi uygulanmış ve sonlu fark yaklaşımlarının fonksiyonele göre yakınsaklığı ispatlanmıştır. Dördüncü bölümde elde edilen bulgular verilmiş olup, beşinci bölümde bu tezin önceki çalışmalardan farklılığı vurgulanmıştır.

2013, 80 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Schrödinger denklemi, Quasi optik, optimal kontrol, ölçülebilir karesel integrallenebilir fonksiyonlar uzayı, sonlu farklar metodu, kontrol.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

OPTIMAL CONTROL PROBLEM WITH LIONS FUCTIONAL FOR STATIONARY EQUATION OF QUASİ OPTİC AND ITS NUMERICAL SOLUTION

Yusuf KOÇAK

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ercan ÇELİK

In this thesis, the optimal control problems for stationary equation of Quasi optic are considered. In the first chapter, after giving a general introduction about the optimal control theory, in the second chapter, theorems, lemmas and some mathematical concepts used in this thesis are presented. In the third chapter, a optimal control problem for stationary equation of Quasi optic equation is considered. For this problem, set of probable controls is space of measurable squarel integrable functions. For this problem, the existence and uniqueness of the solution of initial boundary value problem is given, the questions which are necessary for checking whether optimal control problems are well posed are investigated, it is showed that functional is differentiable and a necessary condition in the form of variation inequality for the solution of optimal control problems is obtained. Then, respectively, the finite difference method is applied to this optimal control problem considered in this chapter and the convergence of the finite difference approximation according to the functional is proved. In the fourth chapter, obtained findings are given and it is emphasized that this thesis different from the former studying in the fifth chapter.

2013, 80 Pages

Keywords: Schrödinger equation, Quasi optic, optimal control, the space of measurable squarel integrable functions, the finite differences method, control.

TEŞEKKÜR

Doktora tezi olarak sunduğum bu çalışma Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde yapılmıştır.

Çalışmalarım boyunca yöneticiliğimi üstlenerek bana her türlü kolaylığı sağlayan beni destekleyen Sayın Doç. Dr. Ercan Çelik'e, tezin hazırlanması sürecinde fikirleriyle bana yol gösteren, hiçbir özveriden kaçınmayıp değerli bilgi ve katkılarını benden esirgemeyen Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölüm Başkanı Sayın Prof. Dr. Gabil YAGUB'a teşekkürlerimi ve şükranlarımı sunarım.

Çalışmalarım esnasında maddi ve manevi desteğiyle her zaman yanımda olan değerli eşim Birsen hanım'a ve aileme teşekkürlerimi sunarım.

Doktora eğitimim boyunca "Yurt İçi Doktora Burs Programı" ile tarafıma vermiş olduğu destekten dolayı TÜBİTAK'a teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

06. 10. 2013 tarihinde kaybettiğim babam Zihni KOÇAK'a ithaf ederim.

Yusuf KOÇAK
Aralık 2013

SİMGELER DİZİNİ

Bu bölümde tezde kullanacağımız bazı sembolleri tanıtacağız:

E_n	n −boyutlu Öklit uzayı
H	Hilbert uzayı
$\mathcal{H}$	Hamilton- Ponrtayagin fonksiyonu
$i=\sqrt{-1}$	Sanal birim
$l>0$	Verilen sayı
$L>0$	Verilen sayı
$\forall$	Her
$\overset{0}{\forall}$	Hemen hemen her yerde
Ω	E_n uzayında sınırlı bölge
$\delta_{\bar{x}}\phi_{jk}=\frac{\phi_{jk}-\phi_{jk-1}}{h}$	x e göre sol fark
$\delta_{\bar{x}}\phi_{jk}=\frac{\phi_{j+1k}-\phi_{jk}}{h}$	x e göre sağ fark
$\delta_{\bar{x}\bar{x}}\phi_{jk}=\frac{\phi_{j+1k}-2\phi_{jk}-\phi_{j-1k}}{h^2}$	x e göre ikinci mertebeden fark
$\delta_{\bar{z}}\phi_{jk}=\frac{\phi_{jk}-\phi_{jk-1}}{\tau}$	z ye göre sağ fark

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Optimal kontrol teorisi tarihi çok eskiye dayanan varyasyon hesabının bir uzantısıdır. Bir efsaneye göre, Tyrian prensesi Dido, Kartaca şehrinin bulunduğu alanı maksimize etmek için çember yayı formunda sığır derisinden bir ip kullanır. Kartaca'nın bulunma hikâyesi hayali olsa da, yeni bir matematik kuralına esin kaynağı olmuş, varyasyon hesabı ve uzantıları ile optimal kontrol teori oluşmuştur (Naidu 2002). Matematiğin bir dalı olan varyasyon hesabı, bir fonksiyonun ekstremumu ile ilgilidir. Doğada varyasyon hesabı ile ifade edilen birçok problem bulunmaktadır.

Son yüzyılda teknolojinin hızla gelişmesiyle ekonomide, uzay teknolojisinde, mühendislikte vb. alanlarda karşılaşılan yeni problemlerin çözümünde varyasyon hesabı yöntemleri yetersiz kalmıştır. Bu da optimal kontrol teorisinin doğmasına neden olmuştur.

Matematikte optimal kelimesinin anlamı en iyi, en uygun, ideal gibi kelimelerle ifade edilir. Optimal kontrol verilen bir sistemin kontrol kanunun bulunmasıyla ilgilidir. Bir kontrol problemi maliyet fonksiyoneli içerir. Aynı zamanda bazı fiziksel şartlar altında maliyet fonksiyonelinin maksimize veya minimize edilmesidir. Uygulamalarda ortaya çıkan optimal kontrol problemlerine bazı örnekler şunlardır:

- Minimum yakıt tüketimi ile aya roket gönderilmesi,
- Minimum miktarda katalizör kullanarak kısa sürede kimyasal üretmek,
- Yeni bir ürünün satışını reklam kampanyalarına minimum para harcayarak istenilen seviyeye getirmek,
- Belli kapasitede bir iletişim kanalı üzerinden maksimum doğru bilgi iletmek (Liberzon 2012).

Optimal kontrol problemini formüle etme şunları gerektirir:

1. Kontrol edilen (genellikle durum değişken formunda) amacın bir matematiksel modeli,
2. Maliyet fonksiyonelinin belirlenmesi ve
3. Durum ve/veya kontrollerdeki fiziksel sınırlar ve sınır şartlarının bir ifadesi (Naidu 2002).

Optimal kontrol teorisinin gelişmesinde dünyaca ünlü matematikçilerden L. S. Pontryagin, J. L. Lions, A. G. Butkovskiy, A. İ. Yegorov, Yu. V. Egorov, K. A. Lurye, V. I. Plotnikov, G. T. Ahmedov, A. D. İskenderov, F. P. Vasilev, T. Zolezzi, C. Sokolowski, M. G. Bidout, M. Goebel ve diğer bilim adamlarının önemli rolleri olmuştur. Optimal kontrol sistemlerine en önemli katkı 1956'da L. S. Pontryagin ve ortaklarının maksimum prensibini üretmeleri ile olmuştur. R. Bellman 1957'de ayrık-zamanlı optimal kontrol sistemlerini çözmek için dinamik programlama tekniğini geliştirmiştir.

Optimal kontrol problemleri incelenirken çeşitli sorulara cevap aranır:

i. Optimal kontrol problemlerinin iyi konulması,
ii. Gerek ve yeterli şartların elde edilmesi,
iii. Optimal kontrol problemlerinin çözümü için nümerik çözüm yöntemlerinin oluşturulmasıdır.

Schrödinger denklemi ile ifade edilen kuantum mekanik sistemleri için optimal kontrol teorisi çağdaş optimal kontrol teorisinin önemli alanlarından biridir. Bu teorinin problemleri çoğunlukla kuantum mekaniğinde, nükleer fizikte, lineer olmayan optikte ve çağdaş fiziğin ve tekniğin farklı alanlarında ortaya çıkar. (Landau and Lifschitz 1963; Butkovskiy and Samoilenko 1984; Vorontsov and Shamal'gauzen 1984). Bu nedenle böyle problemlerin incelenmesi gerek teorik gerek pratik anlamda öneme sahiptir. Quasi optiğin durgun denklemi aslında kompleks potansiyelli Schrödinger denkleminin bir biçimidir. Bilindiği üzere durgun olmayan Schrödinger denklemi için optimal kontrol problemleri ilk önce A. G. Butkovskiy, Yu. İ. Samoilenko, A. D. İskenderov, F. P. Vasilev, M. A. Vorontsov, V. I. Shmalgauzen, G. Ya. Yagubov, M. M. Potapov, A. V. Razgulin, Dın Nıo Hao, N. Silla, B. Yıldız, M. Subaşı, M. A. Musayeva, N. M. Mahmudov gibi bilim adamlarının çalışmalarında incelenmiştir. Ancak denklemin katsayılarında yer alan kontrollerle başlangıç fonksiyonunda yer alan kontroller karesel integrallenebilir fonksiyonlar olduğunda bu tür problemler az incelenmiştir.

Burada incelenen problem konulma açısından önceki incelenenlerden farklıdır. Ele alınan problemde amaç fonksiyoneli olarak Lions fonksiyoneli tipli amaç fonksiyoneli kullanılmıştır. Lions tipli fonksiyoneller ilk kez Fransız matematikçi Lions tarafından sunulmuştur. Bu tipli foksiyoneller matematiksel fiziğin denklemlerinin katsayısı ile kontrol edilen sistemler için kontrol problemlerinde ilk kez İskenderov'un çalışmalarında sunulmuştur ve analiz edilmiştir. Lions fonksyonelli optimal kontrol problemleri Schrödinger denklemleri için daha önce farklı konulmada İskenderov, Yagubov, İbrahimov vb. bilim adamlarının çalışmalarında incelenmiş ve problemin iyi konulmasına ve çözüm için gerek şartlara ait sonuçlar elde edilmiştir.

Bu tez çalışmasında üstte denildiği gibi Quasi optiğin durgun denklemi için Lions fonksiyonelli optimal kontrol problemi ele alınmıştır. Göz önüne alınan problem için önce problemin iyi konulmasına ait olan sorular incelenmiştir. Yani optimal kontrolün varlığı ve tekliğine ait hükümler ispatlanmıştır. Sonra problemde kullanılan amaç fonksiyonelinin diferensiyellenebilmesi incelenmiş ve onun gradiyenti için formül elde edilmiştir. Gradiyent için olan formülü kullanarak optimal kontrol probleminin çözümü için varyasyon eşitsizliği şeklinde gerek şart ispatlanmıştır.

Optimal kontrol problemleri için incelenen sorulardan biri onların nümerik çözüm sorusudur. Optimal kontrol problemlerini çözmek için şimdiye kadar farklı metotlar kullanılmıştır. Bu metotlardan birisi sonlu farklar metodudur. Sonlu farklar metodunun temelinde ünlü Rus matematikçi Tikonov A.N. Samarski A.A. ve diğerlerinin oluşturduğu ve geliştirdiği farklar şeması teorisi bulunmaktadır. Optimal kontrol problemlerinin çözümüne sonlu farklar metodu uygulanırken önce kontrol olunan sistem ifade edilen diferansiyel denklem fark şemasına dönüştürülür ve elde edilen fark şeması için kararlılık ve şemanın hatası soruları incelenir. Bu soruların incelenmesinde farklar şeması teorisiyle ilgili bilgiler önemli rol oynar. Göz önüne alınan fark şeması için elde edilen sonuçlar optimal kontrol probleminin sonlu farklar metoduyla çözümünde kullanılır.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde tezde kullanılacak olan bazı tanımlar, teoremler ve lemmalar verilmiştir:

Tanım 2.1: X boş olmayan bir küme ve $X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall\, x, y, z \in X$ için,

i. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
ii. $d(x, y) = d(y, x)$
iii. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

şartlarını sağlanıyorsa d fonksiyonuna metrik, d ile birlikte X kümesine metrik uzay denir ve (X, d)ile gösterilir.

Tanım 2.2: Bir k cismi üzerinde, bir vektör uzay (ya da lineer uzay), vektör adını taşıyan, $x, y, \ldots$ elemanlarından oluşan ve üzerinde iki cebirsel işlem tanımlı, boş olmayan bir *X* kümesidir. Bu işlemler, vektör toplamı ve vektörlerin skalerlerle (yani *k*' nın elemanlarıyla) çarpımı olarak adlandırılır.

Tanım 2.3: X bir lineer uzay olsun. $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun x noktasındaki değeri $\|x\|$ ile gösterilsin. Bu fonksiyon için,

i. $\|x\| \geq 0$
ii. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
iii. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$
iv. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Üçgen Eşitsizliği)

şartları sağlanıyorsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde norm, $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de normlu uzay denir.

Tanım 2.4: Bir tam normlu uzaya (norm tarafından tanımlanan metriğe göre tam) ise, bir Banach uzayı denir.

Tanım 2.5: Bir iç çarpım uzayı (ya da ön-Hilbert uzayı), üzerinde bir iç çarpım tanımlanmış bir X vektör uzayıdır. Burada sözü edilen iç çarpım, $X \times X$'den X' in bir k skaler cismi içine yapılan bir dönüşümdür; yani, X' in her x ve y vektör çifti, x ve y' nin vektörel çarpımı olarak adlandırılan ve $\langle x, y\rangle$ ile gösterilen ve her x, y, z vektörleri ve α skaleri için aşağıdaki özellikleri gerçekleyen bir skalerle eşlenmektir:

i. $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$
ii. $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$
iii. $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$
iv. $\langle x, x\rangle \geq 0, \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

Tanım 2.6: Bir iççarpım uzayı üzerinde tanımlanmış bir metriğe göre tam ise bu uzaya Hilbert uzayı denir.

Tanım 2.7: $L_2(0, l)$ Hilbert uzayı olup elemenları $(0, l)$ aralığında ölçülebilir ve mutlak değerinin karesiyle integrallenebilir fonksiyonlar uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki gibidir:

$$\langle u, v\rangle_{L_2(0,l)} = \int_0^l u(x)\bar{v}(x)dx,$$

$$\|u\|_{L_2(0,l)} = \sqrt{\langle u, u\rangle_{L_2(0,l)}}.$$

Tanım 2.8: $L_2(\Omega)$ Hilbert uzayı olup elemanları $\Omega = (0, l) \times (0, L)$ bölgesinde ölçülebilir ve mutlak değerinin karesiyle integrallenebilir fonksiyonlar uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki gibidir:

$$\langle\psi,\phi\rangle_{L_2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} \psi(x,z)\bar{\phi}(x,z)dxdt,$$

$$\|\psi\|_{L_2(\Omega)} = \sqrt{\langle\psi,\psi\rangle_{L_2(\Omega)}}.$$

Tanım 2.9: $L_\infty(0,l)$ Banach uzayı olup $(0,l)$ aralığında ölçülebilir, sınırlı ve sonlu

$$\|u\|_{L_\infty(0,l)} = \underset{x\in(0,l)}{vrai\sup}|u(x)| = ess\sup\{|u(x)|: x \in (0,l)\}$$
$$= inf\left\{c \geq 0: \overset{0}{\forall}_x \in (0,l) \text{ için } |u(x)| \leq c\right\}$$

normuna sahip $u = u(x)$ fonksiyonlarının uzayıdır.

Tanım 2.10: $C^0([0,T],B)$ Banach uzayı olup elemanları $[0,T]$ aralığında sürekli olan ve değerlerini *B* Banach uzayından alan fonksiyonlar uzayıdır. Burada norm aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\|u\|_{C^0([0,T],B)} = \max_{t\in T}\|u(t)\|_B \ .$$

Tanım 2.11: $W_2^1(0,l)$ Sobolev uzayı olup elemanlarının kendisi ve x`e göre I. mertebeden genelleştirilmiş türevi $L_2(0,l)$'den olan fonksiyonlar uzayıdır. Bu uzay aynı zamanda Hilbert uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\langle u,v\rangle_{W_2^1(0,l)} = \int\limits_0^l \left[u(x)\bar{v}(x) + \frac{du(x)}{dx}\frac{d\bar{v}(x)}{dx}\right]dx\ ,$$

$$\|u\|_{W_2^1(0,l)} = \sqrt{\langle u,v\rangle_{W_2^1(0,l)}}.$$

Burada $\bar{v}(x)$ fonksiyonu $v(x)$ `in kompleks eşleniğidir.

$\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ uzayı $W_2^1(\Omega)$ uzayının alt uzayı olup elemanları Ω dikdörtgeninin yan taraflarında sıfıra eşittir

Tanım 2.12: $W_2^2(0,l)$ Sobolev uzayı olup, elemanlarının kendisi ve x `e göre II. mertebeden genelleştirilmiş türevleri $L_2(0,l)$ `den olan fonksiyonlar uzayıdır. Aynı zamanda Hilbert uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\langle u,v\rangle_{W_2^2(0,l)} = \int_0^l \left[u(x)\bar{v}(x) + \frac{du(x)}{dx}\frac{d\bar{v}(x)}{dx} + \frac{d^2u(x)}{dx^2}\frac{d^2\bar{v}(x)}{dx^2}\right] dx \,,$$

$$\|u\|_{W_2^2(0,l)} = \sqrt{\langle u,v\rangle_{W_2^2(0,l)}}.$$

$\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)$ uzayı $W_2^2(0,l)$ uzayının alt uzayı olup elemanları 0 ve l noktalarında sıfıra eşittir

Tanım 2.13: $W_2^{2,1}(\Omega)$ Hilbert uzayı olan Sobelev uzayıdır, elemanları Ω bölgesinde tanımlanan öyle $u(x,t)$ fonksiyonlarıdır ki, $u, \frac{\partial u}{dx}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in L_2(\Omega)$ özelliklerini sağlar. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\langle u,\phi\rangle_{W_2^{2,1}(\Omega)} = \int_\Omega \left[u(x,z)\bar{\phi}(x,z) + \frac{\partial u(x,z)}{\partial x}\frac{\partial\bar{\phi}(x,z)}{\partial x} + \frac{\partial u(x,z)}{\partial z}\frac{\partial\bar{\phi}(x,z)}{\partial z} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 u(x,z)}{\partial x^2}\frac{\partial^2\bar{\phi}(x,z)}{\partial x^2}\right] dxdt \,,$$

$$\|u\|_{W_2^{2,1}(\Omega)} = \sqrt{\langle u,u\rangle_{W_2^{2,1}(\Omega)}}.$$

$\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayı $W_2^{2,1}(\Omega)$ uzayının alt uzayı olup elemanları Ω dikdörtgeninin yan taraflarında sıfıra eşittir

Tanım 2.14: Eğer B Banach uzayından olan $\{u_k\}$ dizisi için $\forall c \in B^*$,

$$\lim_{k\to\infty} \langle c, u_k\rangle = \langle c, u\rangle$$

şartını sağlıyorsa bu takdirde $\{u_k\}$ dizisi $u \in B$ noktasına zayıf yakınsıyor denir.

Tanım 2.15: $\{u_k\}$, H hilbert uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall y \in H$ için

$$\lim_{k\to\infty}(u_k, y)_H = (x, y)_H$$

oluyorsa$\{u_k\}$ dizisi $x \in H$ elemanına zayıf yakınsıyordur denir.

Tanım 2.16: $\{u_k\}$, $(X, \| \quad \|)$ normlu uzayında bir dizi olsun. Eğer

$$\lim_{k\to\infty} \|u_k - u\| = 0$$

oluyorsa $\{u_k\}$ dizisi $u \in X$ elemanına kuvvetli yakınsar denir.

Tanım 2.17: $\{f_n\}$, bir X kümesi üzerinde tanımlı fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer $\forall x \in X$ için

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

oluyorsa, $\{f_n\}$ dizisi X üzerinde bir f fonksiyonuna noktasal yakınsar denir. Yani, verilen $x \in X$ ve $\varepsilon > 0$ için $n \geq N$ olduğunda $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(x, \varepsilon) > 0$ sayısı vardır.

Tanım 2.18: $\{f_n\}$ **,** bir X uzayı üzerinde tanımlı fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

hemen hemen bütün $x \in X$ için oluyorsa $\{f_n(x)\}$ dizisi bir $f(x)$ fonksiyonuna hemen hemen her yerde yakınsar denir. Yani

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

sağlamayan noktaları ölçümü sıfırdır.

Tanım 2.19: *V*, *X* lineer uzayının bir alt kümesi olsun. Eğer $u, v \in V$ ve $\alpha \in [0,1]$ için $\alpha u + (1-\alpha)v \in V$ oluyorsa, *V* kümesine *X* de konveks(dışbükey) küme denir.

Tanım 2.20: f konveks bir *X* kümesi üzerinde tanımlı, reel değerli bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in X$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$$

oluyorsa f ye konveks fonksiyon denir.

Tanım 2.21: $(X, \|\ \ \|)$ bir normlu uzay olsun. $0 < \varepsilon \leq 2$ şartını sağlayan her ε sayısı için eğer $x, y \in X$ için $\|x\| = \|y\| = 1$ ve $\|x-y\| \geq \varepsilon$ iken $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1 - \delta(\varepsilon)$ olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa , $(X, \|\ \ \|)$ uzayına düzgün konveks uzay denir.

$1 < p < \infty$ için $L_p(\Omega)$ uzayı düzgün konveks uzaydır.

Tanım 2.22: $(X, \|\ \ \|)$ bir normlu uzay ve $E \subset X$ olsun. *E* içindeki her dizinin *E* de bir limit noktası varsa *E* kümesine *X* de kompakt küme denir.

Tanım 2.23: *X* normlu uzayında bir *E* kümesi verilsin. Eğer *E* deki bütün yakınsak dizilerin limit noktaları *E* deyse *E* kümesine *X* de kapalı küme denir.

Tanım 2.24: *X*, Banach uzayı ve $E \subset X$ olsun. Eğer $\{x_n\} \in E$ ve $\{x_n\}$ dizisi bir *x* elemanına zayıf yakınsadığında $x \in E$ ise *E* kümesine *X* de zayıf kapalıdır denir.

Tanım 2.25: U, B Banach uzayının bir kümesi olsun. Eğer $\forall\{u_k\} \in U$ dizisinden zayıf yakınsayan en azından bir alt dizi seçmek mümkün ise bu takdirde U kümesine B`de zayıf kompakt küme denir.

Tanım 2.26 : X ve Y normlu uzaylar ve $f: X \rightarrow Y$ bir operatör olsun. X'de sınırlı olan her E alt kümesi için $f(E)$, Y'de ön- kompakt ise f'ye kompakt operatör denir. Yani, bütün sınırlı $E \subset X$ için $\overline{f(E)}$, Y'de kompakttır.

Tanım 2.27 : X ve Y normlu uzaylar olsun. Eğer

i) X ,Y nin bir alt vektör uzayı,
ii) Her $x \in X$ için $Ix = x$ olarak tanımlanan $I: X \rightarrow Y$ özdeşlik operatörü sürekliyse,

X uzayı Y uzayına (sürekli) gömülür denir. Yani, $X \subset Y$ ve her $x \in X$ için $\|Ix\|_Y \leq M\|Ix\|_X$ olacak şekilde bir M sabiti vardır. Eğer I operatörü kompakt ise X uzayı Y uzayına kompakt gömülür denir.

Tanım 2.28: X, bir normlu uzay ve $E \subset X$ olsun. Eğer X' in her bir x elemanı, E'nin elemanlarının bir dizisinin limiti ise E' ye X' de yoğundur denir.

Tanım 2.29: X bir vektör uzayı olmak üzere, $I: X \rightarrow R$ (veya C) lineer operatörüne X üzerinde bir lineer fonksiyonel denir. X üzerindeki sınırlı lineer fonksiyonellerin uzayına X' in duali denir ve X^* ile gösterilir.

Tanım 2.30: $J(u)$ fonksiyoneli B Banach uzayının U alt kümesinde tanımlanmış olsun. Eğer $u \in U$ noktasına kuvvetli yakınsayan $\{u_k\} \in U$ dizisi için

$$\lim_{k\to\infty} J(u_k) \geq J(u)$$

şartı sağlanıyorsa bu takdirde $J(u)$ fonksiyoneli u noktasında alttan yarı sürekli denir.

Tanım 2.31: $J(u)$ fonksiyoneli B Banach uzayının U alt kümesinde tanımlanmış olsun. Eğer $u \in U$ noktasına zayıf yakınsayan $\{u_k\} \in U$ dizisi için

$$\lim_{k\to\infty} J(u_k) \geq J(u)$$

şartı sağlanıyorsa bu takdirde $J(u)$ fonksiyoneli u noktasında alttan zayıf yarı sürekli denir.

Tanım 2.32: F , bir I aralığı üzerinde tanımlı $f(t)$ fonksiyonlarının bir ailesi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $f \in F$ için $t_1, t_2 \in I$ olmak üzere $|t_1 - t_2| \leq \delta(\varepsilon)$ olduğunda $|f(t_1) - f(t_2)| \leq \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa F'ye I üzerinde aynı dereceden sürekli (eş sürekli) dir denir.

Tanım 2.33: F , bir I aralığı üzerinde tanımlı $f(t)$ fonksiyonlarının fonksiyonlarının bir ailesi olsun. Eğer her $t \in I$ ve her $f \in F$ için $|f(t)| \leq M$ olacak şekilde negatif olmayan bir M sayısı varsa F'ye I üzerinde sınırlıdır denir.

Tanım 2.34: Sürekli fonksiyonlar uzayı üzerinde

$$\|f\| = \sup_{x\in X}|f(x)|$$

olarak tanımlanan norm düzgün ya da sup olarak adlandırılır. $\{f_n\}$ **,** X metrik uzayı üzerinde sınırlı, reel değerli fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer $\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\| = 0$ oluyorsa $\{f_n\}$ dizisi $f \in X$ fonksiyonuna düzgün yakınsar denir. Burada norm sup normudur.

Tanım 2.35: B herhangi Banach uzayı, $J(u)$ fonksiyoneli ise u noktasının herhangi bir $\omega(u,\gamma) = \{v : v \in B, \|v - u\| < \gamma\}$ komşuluğunda tanımlanmış olsun. Eğer fonksiyonelin artışı için

$$\lim_{\|h\|_B \to 0} \frac{o(h,u)}{\|h\|_B} = 0$$

olacak şekilde $\Delta J(u) = J(u+h) - J(u) = \langle J'(u), h \rangle_B + o\langle h, u \rangle$ şartını sağlayan $J'(u) \in B^*$ elemanı varsa bu takdirde $J(u)$ fonksiyoneli Fréchet anlamında differansiyellenebilirdir denir.

Tanım 2.36: $D \subset R^n$ bir bölge olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ verildiğinde $|z| < \sigma$ şartını sağlayan tüm z' ler için $1 \leq p < \infty$ iken $\|f(x+z) - f(x)\|_{L_p(D)} < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\sigma > 0$ sayısı varsa, $f(x)$ fonksiyonuna L_p normu anlamında süreklidir denir.

Teorem 2.1: $1 \leq p < \infty$ iken $L_p(D)$ den olan her fonksiyon L_p normu anlamında süreklidir denir (Mikhailov 1983).

Teorem 2.2:U, B Banach uzayının konveks alt kümesi $J(u)$ fonksiyoneli bu kümede 1. mertebeden sürekli differansiyellenebilir fonksiyonel ve

$$U_* = \left\{ u \in U : J(u) = J_* = \inf_U J(u) \right\}$$

kümesi $J(u)$ fonksiyonelinin minimum noktalar kümesi olsun. Bu takdirde $\forall u_* \in U_*$ ve $\forall u \in U$ için $\langle J'(u_*), u - u_* \rangle \geq 0$ şartı sağlanır (Vasilev 1981).

Teorem 2.3 (Arzela- Ascoli): Sınırlı bir *I* aralığı üzerinde *F* , *f(t)* fonksiyonlarının bir ailesi olsun. Eğer *F*, sonsuz, sınırlı ve aynı dereceden sürekli ise *F*, *I* üzerinde düzgün yakınsak olan bir dizi içerir (Hsieh and Sibuya 1999).

Teorem 2.4 (Weierstrass Teoremi): U, B Banach uzayında zayıf kompakt küme olsun. $J(u)$ fonksiyoneli ise bu kümede tanımlanan sonlu değerlere sahip ve alttan yarı sürekli olsun. Bu takdirde

$$J_* = \inf_U J(u) > -\infty, U_* = \{u \in U : J(u) = J_*\} \neq \emptyset$$

zayıf kompakttır ve U `dan olan herhangi minimalleştirici dizi minimum noktaları kümesine zayıf yakınsar (Vasilev 1981).

Teorem 2.5 (Goebel): $\tilde{X}$ düzgün konveks uzay, U kümesi $\tilde{X}$ uzayının kapalı sınırlı kümesi $I(v)$ fonksiyoneli U kümesi üzerinde tanımlanan alttan yarı sürekli fonksiyonel ve $\alpha > 0,\ \beta \geq 1$ verilen sayılar olsun. Bu takdirde $\tilde{X}$ uzayında her yerde yoğun olan öyle G alt kümesi vardır ki, $\forall\omega \in G$ için

$$J_\alpha(v) = I(v) + \alpha\|v - \omega\|_{\tilde{X}}^{\beta}$$

fonksiyoneli U kümesi üzerinde en küçük değerini alır. Eğer $\beta > 1$ ise $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli için en küçük değerini U kümesi üzerinde bir tek noktada alır (Goebel 1979).

Teorem 2.6 (Fubini): Q_n, R^n nin sınırlı bir bölgesi ve Q_m, R^m' in sınırlı bir bölgesi olmak üzere $Q_n \times Q_m$ bölgesinde $f(x, y)$ fonksiyonunu tanımlayalım. Farz edelim ki $f(x, y)$ fonksiyonu $Q_{n+m} = Q_n \times Q_m$ bölgesinde integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu takdirde $f(x, y)$ fonksiyonu hemen hemen $x \in Q_n$ için $y \in Q_m$' ye göre, hemen hemen $y \in Q_m$ için $x \in Q_n$'e göre integrallenebilirdir. Ayrıca

$$\int_{Q_n} f(x, y)dx \quad \text{ve} \quad \int_{Q_m} f(x, y)dy$$

fonksiyonları sırasıyla *x* ve *y* ye göre integrallenebilir olup

$$\int_{Q_{n+m}} f(x, y)dxdy = \int_{Q_n} dx \int_{Q_m} f(x, y)dy = \int_{Q_m} dy \int_{Q_n} f(x, y)dx$$

eşitliği geçerlidir (Mikhailov 1983).

Lemma 2.1: $\mathrm{D} \subset R^n$ herhangi bir bölge olsun. Eğer $\{u_k(x)\}$ fonksiyonlar dizisi $L_q(D)$ $(q \geq 1)$ uzayında bir $u(x)$ fonksiyonuna kuvvetli yakınsıyor ise bu takdirde $\{u_k(x)\}$ dizisinden $u(x)$ fonksiyonuna D de hemen hemen yakınsayan bir alt dizi seçmek mümkündür. Ayrıca $\{u_k(x)\}$ dizisinin D üzerinde $u(x)$ fonksiyonuna hemen hemen yakınsaması, D üzerinde hemen hemen yakınsamayı gerektirir. (Ladyzhenskaja *et al.* 1967)

Lemma 2.2: $\{u_k(x)\}$ bir fonksiyonlar dizisi olmak üzere, $q > 1$ ve $k = 1,2,..$ için $\|u_k\|_{L_q(D)} \leq c$ ise bu durumda $\{u_k(x)\}$ den $L_q(D)$'de zayıf yakınsayan bir alt dizi seçmek mümkündür. Eğer $k = 1,2,...$ için $\{u_k(x)\}$, D üzerinde $u(x)$ fonksiyonuna hemen hemen yakınsıyorsa ve $q > 1$ için $\|u_k\|_{L_q(D)} \leq c$ ise bu durumda $\{u_k\}$ dizisi $q^* < q$ için $L_{q^*}(D)$ de u ya kuvvetli yakınsar; $L_q(D)$ de ise u ya zayıf yakınsar (Ladyzhenskaja *et al.* 1967).

Lemma 2.3: $f(x,t,u)$ fonksiyonu $\{(x,t) \in \Omega,\ u \in (-\infty,\infty)\}$ kümesinde tanımlı ölçülebilir bir fonksiyon ve hemen hemen $(x,t) \in \Omega$ için u'ya göre sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $L_1(\Omega)$'dan olan $\{u_k(x,t)\}$ dizisi, $L_1(\Omega)$'dan olan $u(x,t)$ fonksiyonuna hemen hemen yakınsıyorsa ve $q > 1$ için $\|f(.,.,u_k(.,.))\|_{L_q(\Omega)} \leq c$ ise bu durumda $q^* < q$ için $f(x,t,u_k(x,t))$ fonksiyonlar dizisi $L_{q^*}(\Omega)$ normunda $f(x,t,u_k(x,t))$ fonksiyonuna yakınsar; $L_q(\Omega)$ da zayıf yakınsaktır. Eğer $\{u_k(x,t)\}$ dizisi $L_q(\Omega)$ da u fonksiyonuna kuvvetli yakınsıyorsa ve $q > 1$ için $\|u_k\|_{L_q(\Omega)} \leq c$ ise bu takdirde $\{u_k(x,t)\}$ dizisi u ya $q^* < q$ için $L_{q^*}(\Omega)$ da kuvvetli yakınsar (Ladyzhenskaja *et al.* 1967).

Lemma2.4 (T. H. Gronwall): Eğer $g(t)$ fonksiyonu $t_0 \leq t \leq t_1$ üzerinde sürekli bir fonksiyon ve

$$0 \leq g(t) \leq K + L\int_{t_0}^{t} g(s)\,ds$$

eşitsizliği sağlanırsa, $t_0 \leq t \leq t_1$ üzerinde

$$0 \leq g(t) \leq Kexp(L(t - t_0))$$

dır. Burada *K* ve *L* negatif olmayan sabitlerdir (Hsieh and Sibuya 1999).

Lemma2.5 (Gronwall Lemmasının ayrık aynısı): Eğer $a \geq 0, b \geq 0$ olmak üzere $\varphi_j, j = \overline{0, N}$ sayıları

$$0 \leq \varphi_0 \leq a, 0 \leq \varphi_{j+1} \leq a + b \sum_{m=0}^{j} \varphi_m,\ j = \overline{0, N-1}$$

şartını sağlıyor ise bu takdirde

$$0 \leq \varphi_j \leq a(1+b)^j\ , j = \overline{0, N}$$

eşitsizliği geçerlidir. Eğer

$$0 \leq \varphi_{j-1} \leq a + b \sum_{m=j}^{N-1} \varphi_m,\ j = \overline{0, N-1}, 0 \leq \varphi_{N-1} \leq a,$$

şartları sağlanıyorsa ise bu takdirde

$$0 \leq \varphi_j \leq a(1+b)^{N-j-1}\ , j = \overline{0, N-1}$$

eşitsizliği geçerlidir (Vasilev 1981).

Lemma2.6 (Cauchy- Bunyakovsky Eşitsizliği): $u, v \in L_2(\Omega)$ elemanları için

$$\left|\int_{\Omega} u\bar{v}dxd\tau\right| \leq \left(\int |u|^2 dxd\tau\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |v|^2 dxd\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Ladyzhenskaja *et al.* 1967).

Lemma2.7 (ε −Cauchy Eşitsizliği): Keyfi *a*, *b* sayıları ve herhangi $\varepsilon > 0$ için

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2}|a|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}|b|^2$$

eşitsizliği geçerlidir (Ladyzhenskaja *et al.* 1967).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Quasi Optiğin Durgun Denklemi için Lions Fonksiyonelli Optimal Kontrol Probleminin İyi Konulması

Bu bölümde Quasi optiğin durgun denklemi için optimal kontrol probleminin iyi konulması incelenmektedir. Bilindiği üzere Quasi optiğin durgun denklemi lineer olmayan optikte ortaya çıkan durgun ışık demetlerinin dağılması sürecini ifade eden bir denklemdir (Vorontsov and Shamal'gauzen 1984). Bu denklemin katsayıları olan kırılma ve absorbe katsayıları Quasi optiğin durgun denklemi için optimal kontrol problemlerinde kontrol rolünü oynayan fiziksel araçlardır. Bunların yanı sıra ışık demetlerinin başlangıç noktasındaki durumuda kontrol rolünü oynayabilen bir fiziksel araç olabilir.

3.1.1. Problemin konulması

$l > 0$, $L > 0$ verilen sayılar; $x \epsilon (0,l)$, $z \epsilon (0,L)$, $\Omega = \Omega_z$, $\Omega_z = (0,l) \times (0,L)$ olmak üzere Quasi optiğin durgun denklemi için başlangıç sınır değer problemleri ile ifade edilen sistemi göz önüne alalım:

$$i\frac{\partial \psi_k}{\partial z} + a_0 \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x^2} - a(x)\psi_k + v_0(z)\psi_k + i v_1(z)\psi_k = f_k(x,z),$$
$$(x,z) \in \Omega ,\ k = 1,2 , \quad (1)$$

$$\psi_k(x,0) = \varphi_k(x) = \varphi_{k0}(x) + i\varphi_{k1}(x) ,\ x \epsilon (0,l),\ \ k = 1,2 , \quad (2)$$

$$\psi_1(0,z) = \psi_1(l,z) = 0,\ z \epsilon (0,L) , \quad (3)$$

$$\frac{\partial \psi_2(0,z)}{\partial x} = \frac{\partial \psi_2(l,z)}{\partial x} = 0, z \epsilon (0,L). \quad (4)$$

Burada $\psi_k = \psi_k(x,z)$ dalga fonksiyonu, $a_0 > 0$ verilen sayı, $i = \sqrt{-1}$ sanal birim, $a(x)$ ölçülebilir sınırlı fonksiyon olup

$$0 < \mu_0 \leq a(x) \leq \mu_1 \, , \overset{0}{\forall} x \in (0, L), \; \mu_0 \text{ve} \mu_1 \text{ sabit} > 0 \tag{5}$$

şartını sağlar. $\varphi_k(x)$, $f_k(x,z)$, $k = 1{,}2$ kompleks değerli ölçülebilir fonksiyonlar olup

$$\varphi_k \in L_2(0,l) \, , f_k \in L_2(\Omega) \, , k = 1{,}2 \tag{6}$$

şartlarını sağlar. v kontrol fonksiyonları olup $b_m > 0$, $d_{km} > 0$, $(m = 0{,}1 \quad k = 1{,}2\ )$ sabitler olmak üzere

$$V \equiv \{v = (v_0, v_1, \varphi_{10}, \varphi_{11}, \varphi_{20}, \varphi_{21}), \; v_m \in L_2(0,L) \; , \|v_m\|_{L_2(0,L)} \leq b_m \; , \; \varphi_{km} \in L_2(0,l)$$

$$, \|\varphi_k\|_{L_2(0,l)} \leq d_{km} \; , m = 0{,}1 \;\; k = 1{,}2\} \tag{7}$$

aday kontrolleri kümesinden seçilir.

Şimdi

$$J_0(v) = \|\psi_1 - \psi_2\|^2_{L_2(\Omega)} \tag{8}$$

olmak üzere

$$J_\alpha(v) = \|\psi_1 - \psi_2\|^2_{L_2(\Omega)} + \alpha\|v - \omega\|^2_H \tag{9}$$

fonksiyonelinin (1)-(4) şartları altında minimumunun bulunması problemini göz önüne alalım. Burada $\alpha \geq 0$ verilen sayı; $\omega \in H$ ve $H = (L_2(0,L))^2 \times (L_2(0,l))^4$ 'dür.

$J_\alpha(v)$ amaç fonksiyonelidir. $J_0(v)$ Lions fonksiyonelidir ve ilk kez (Lions 1971) çalışmasında sunulmuştur.

(9) fonksiyonelinin (1)-(4) şartları altında minimumunun bulunması problemini optimal kontrol problemi olarak adlandıracağız.

$\forall v \in V$ için (1)-(3) şartlarından $\psi_1 = \psi_1(x, \mathrm{z}) \equiv \psi_1(x, z; v)$ fonksiyonunun bulunması problemi Quasi optiğin durgun denklemi için I. çeşit başlangıç sınır değer problemi, (1), (2) ve (4) şartlarından $\psi_2 = \psi_2(x, \mathrm{z}) \equiv \psi_2(x, z; v)$ fonksiyonunun bulunması problemi Quasi optiğin durgun denklemi için II. çeşit başlangıç sınır değer problemidir.

Tanım 3.1: $\forall v \in V$ için (1)-(4) başlangıç sınır değer probleminin genelleştirilmiş çözümü olarak $C^0([0, L], L_2(0, l))$ uzayına ait olan ve $\forall \eta_1 \in \overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$, $\forall \eta_2 \in W_2^{2,1}(\Omega)$,

$$\frac{\partial \eta_2(0, l)}{\partial x} = \frac{\partial \eta_2(l, z)}{\partial x} = 0, \qquad \forall z \in (0, L)$$

için

$$\int\limits_{\Omega_z} \psi_k(x, \tau) \left[-i \frac{\partial \bar{\eta}_k}{\partial z} + a_0 \frac{\partial^2 \bar{\eta}_k}{\partial x^2} - a(x)\bar{\eta}_k + v_0(\tau)\bar{\eta}_k + i v_1(\tau)\bar{\eta}_k \right] dx d\tau =$$

$$= \int\limits_{\Omega_z} f_k \bar{\eta}_k dx d\tau - i \int\limits_0^l \psi_k(x, z)\bar{\eta}_k(x, z) dx + i \int\limits_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{l}} \varphi_k(x)\, \bar{\eta}_k(x, 0) dx \quad , k = 1,2 \quad (9)$$

integral özdeşliğini sağlayan $\psi_k = \psi_k(x, \mathrm{z}) \equiv \psi_k(x, z; v)$, $k = 1,2$ fonksiyonu anlaşılır.

Quasi optiğin durgun denklemi için sınır değer problemlerinin zayıf genelleştirilmiş çözümleri (İbrahimov 2010) çalışmasında incelenmiştir. Bu çalışmada yer alan sonuçları kullanarak aşağıdaki teoremi yazabiliriz.

Teorem 3.1: $\forall v \in V$ için (1)-(4) başlangıç sınır değer probleminin $C^0([0,L], L_2(0,l))$ uzayına ait olan $\psi_k = \psi_k(x,\mathrm{z}) \equiv \psi_k(x,z;v)$, $k = 1{,}2$ bir tek çözümü vardır ve çözüm için aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\|\psi_k(\cdot,z)\|^2_{L_2(0,l)} \le c_0\left(\|\varphi_k\|^2_{L_2(0,l)} + \|f_k\|^2_{L_2(\Omega)}\right), k = 1{,}2 \quad , \forall z \in [0,L]. \qquad (10)$$

Burada c_0 sayısı φ_k ve f_k'dan bağımsızdır.

3.1.2. Optimal kontrol probleminin çözümünün varlığı ve tekliği

Bu bölümde (1)-(4), (9) optimal kontrol probleminin çözümünün varlığı ve tekliği incelenecektir.

Teorem 3.2: Teorem3.1'in şartları sağlansın ve $\omega \in H$ verilen fonksiyon olsun. Bu takdirde $H = (L_2(0,L))^2 \times (L_2(0,l))^4$ uzayında her yerde yoğun G alt kümesi vardır ki, $\forall \omega \in G$ ve $\alpha > 0$ için (1)- (4), (9) optimal kontrol probleminin bir tek çözümü vardır.

İspat: İlk önce V kümesi üzerinde $J_0(v) = \|\psi_1 - \psi_2\|^2_{L_2(\Omega)}$ fonksiyonelinin sürekli olduğunu gösterelim. $\forall v \in V$ alalım ve bu elemana $v + \Delta v \in V$ olacak biçimde $\Delta v \in H$ artışını verelim. Bu takdirde (1)–(4) başlangıç sınır değer probleminin çözümü olan $\psi_k = \psi_k(x,\mathrm{z}) \equiv \psi_k(x,z;v)$, $k = 1{,}2$ fonksiyonları $\Delta\psi_k = \Delta\psi_k(x,z) = \psi_k(x,z;v+\Delta v) - \psi(x,z;v)$, $k = 1{,}2$ artışına sahip olur. Burada $\Delta\psi_\mathrm{k}(x,z) = \psi_k(x,z;v+\Delta v)$, $k = 1{,}2$ fonksiyonu (1)–(4) başlangıç sınır değer probleminin $v + \Delta v \in V$elemanına uygun gelen çözümüdür. (1)–(4) şartlarından $\Delta\psi_k = \Delta\psi_k(x,z)$, $k = 1{,}2$ fonksiyonlarının aşağıdaki sınır değer probleminin çözümü olduğu açıktır:

$$i\frac{\partial\Delta\psi_k}{\partial z}+a_0\frac{\partial^2\Delta\psi_k}{\partial x^2}-a(x)\psi_k+\big(v_0(z)+\Delta v_0(z)\big)\Delta\psi_k+i\big(v_1(z)+\Delta v_1(z)\big)\Delta\psi_k=$$

$$=-\Delta v_0(z)\psi_k-iv_1(z)\psi_k\ ,k=1,2\ ,(x,z)\in\Omega\ , \tag{11}$$

$$\Delta\psi_k(x,0)=\Delta\varphi_k\ ,\ k=1,2\ ,x\in(0,l)\ , \tag{12}$$

$$\Delta\psi_1(0,z)=\Delta\psi_1(l,z)=0\quad ,z\in(0,L) \tag{13}$$

$$\frac{\partial\Delta\psi_2(0,z)}{\partial x}=\frac{\partial\Delta\psi_2(l,z)}{\partial x}=0\ ,z\in(0,L)\ . \tag{14}$$

(11)-(14) başlangıç sınır değer probleminin (1)-(4) problemiyle aynı tipte olan problem olduğunu göz önünde bulundurarak (10) kestiriminin aynısını (11)-(14) probleminin çözümü için aşağıdaki biçimde yazabiliriz:

$$\|\Delta\psi_k(\cdot,z)\|^2_{L_2(0,l)}\le c_1\big(\|\Delta v\psi_k\|^2_{L_2(\Omega)}+\|\Delta\varphi_k\|^2_{L_2(0,l)}\big),\ k=1,2\quad ,\forall z\in[0,L]. \tag{15}$$

Burada $c_1>0$ sayısı Δv ve $\Delta\varphi_k$' dan bağımsızdır. (10) kestirimini kullanarak buradan aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\|\Delta\psi_k(\cdot,z)\|^2_{L_2(0,l)}\le c_2\|\Delta v\|^2_H\quad ,\forall z\in[0,L]. \tag{16}$$

Burada $c_2>0$ sayısı Δv , $\Delta\varphi_k$ ve z' den bağımsızdır.

Şimdi $J_0(v)$ fonksiyonelinin artışını bulalım:

$$\Delta J_0(v)=J_0(v+\Delta v)-J_0(v)=$$

$$=2\int_\Omega Re\left[\big(\psi_1(x,z)-\psi_2(x,z)\big)(\Delta\overline{\psi_1}(x,z)-\Delta\overline{\psi_2}(x,z))\right]dxdz+$$

$$+\|\Delta\psi_1\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\Delta\psi_2\|^2_{L_2(\Omega)} - 2\int_\Omega Re\big(\Delta\psi_1(x,z)\Delta\psi_2(x,z)\big)dxdz\,. \qquad (17)$$

Burada Cauchy- Bunyakovsky eşitsizliğini uygulayıp (10) kestirimini kullanırsak

$$|\Delta J_0(v)| \le c_3\big(\|\Delta\psi_1\|_{L_2(\Omega)} + \|\Delta\psi_2\|_{L_2(\Omega)} + \|\Delta\psi_1\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\Delta\psi_2\|^2_{L_2(\Omega)}\big) \qquad (18)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Burada $c_3 > 0$ sayısı Δv'den bağımsızdır. Bu eşitsizliğin sağ tarafında (16) kestirimini kullanırsak fonksiyonelin $v \in V$ elemanı üzerinde artışı için aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$|\Delta J_0(v)| \le c_4(\|\Delta v\|_H + \|\Delta v\|^2_H). \qquad (19)$$

Bu eşitsizlik $J_0(v)$ fonksiyonelinin $\forall v \in V$ üzerinde sürekli olduğunu göstermektedir. Yani $\|\Delta v\|_H \to 0$ için $|\Delta J_0(v)| \to 0$ 'dır. v noktası V kümesinin herhangi elemanı olduğundan $J_0(v)$ fonksiyonelinin V kümesi üzerinde sürekli olduğu ispat edilir. Buradan da $\forall v \in V$ için $J_0(v)$ fonksiyonelinin V kümesi üzerinde alttan sınırlı ve alttan yarı sürekli olduğu ispatlanmış olur. Tanıma göre V kümesi H uzayında kapalı ve sınırlı kümedir. H uzayı ise Hilbert uzayı olduğundan düzgün konveks uzaydır (Yosida 1980).

$I(v) = J_0(v)$, $\tilde{X} = H$, $U = V$ olarak alınırsa Teorem2.5'nin şartları sağladığı görülür. Yani H uzayında hemen hemen her yerde yoğun olan G alt kümesi bulunur ki $\forall\omega \in G$ için $\alpha > 0$ olduğu takdirde (1)-(4), (9) optimal kontrol problemi bir tek çözüme sahip olur. Teorem ispatlandı.

3.2. Quasi Optiğin Durgun Denklemi için Lions Fonksiyonelli Optimal Kontrol Probleminde Çözüm için Gerek Şart

Bu bölümde Quasi optiğin durgun denklemi için Lions fonksiyonelli optimal kontrol probleminin çözümüne ait olan gerek şart incelenecektir. Bu nedenle önce amaç fonksiyonelinin diferansiyellenebilir olduğunu ispatlayıp gradiyenti için formül elde edeceğiz.

3.2.1. Fonksiyonelin diferansiyellenebilmesi

Bu alt bölümde (1)–(4), (9) optimal kontrol probleminde amaç fonksiyonelinin differansiyellenebilir olduğunu gösterecek ve onun gradiyenti için formül ispatlayacağız. Bu amaçla aşağıdaki başlangıç sınır değer problemini göz önüne alalım:

$$i\frac{\partial \phi_k}{\partial z} + a_0\frac{\partial^2 \phi_k}{\partial x^2} - a(x)\phi_k + v_0(z)\phi_k - iv_1(z)\phi_k = 2(-1)^k(\psi_1(x,z) - \psi_2(x,z)),$$

$$k = 1,2\ , (x,z) \in \Omega \qquad (20)$$

$$\phi_k(x,L) = 0\,, k = 1,2\ ,\ x \in (0,l)\,, \qquad (21)$$

$$\phi_1(0,z) = \phi_1(l,z) = 0\,,\ z \in (0,L) \qquad (22)$$

$$\frac{\partial \phi_2(0,z)}{\partial x} = \frac{\partial \phi_2(l,z)}{\partial x} = 0\,, z \in (0,L)\,. \qquad (23)$$

Burada $\psi_k = \psi_k(x,z) \equiv \psi_k(x,z;v), k = 1,2$ fonksiyonu (1)–(4) başlangıç sınır değer probleminin $v \in V$ olan çözümüdür. (20)–(23) eşlenik problemin çözümü olarak $C^0([0,L],\ L_2(0,L))$ uzayına ait olan ve herhangi $\forall \eta_1 \in \overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$

$$\frac{\partial \eta_2(0,l)}{\partial x} = \frac{\partial \eta_2(l,z)}{\partial x} = 0$$

şartını sağlayan $\forall \eta_{12} \in W_{\mathbf{2}}^{\mathbf{2,1}}(\Omega)$ için

$$\int_{\Omega} \phi_k \left(-i \frac{\partial \bar{\eta}_{1k}}{\partial z} + a_0 \frac{\partial^2 \bar{\eta}_{1k}}{\partial x^2} - a(x)\bar{\eta}_{1k} + v_0(z)\bar{\eta}_{1k} - i v_1(z)\bar{\eta}_{1k} \right) dxdz =$$

$$= \int_{\Omega} 2(-1)^k (\psi_1 - \psi_2)\bar{\eta}_{1k} dxdz + i \int_0^l \phi_k(x,0)\bar{\eta}_{1k}(x,0)dx \qquad (24)$$

integral özdeşliğini sağlayan $\phi_k = \phi_k(x,z)$ fonksiyonu anlaşılır.

$\theta = L - z$ değişken dönüşümü yaparak eşlenik problemi (1)-(4) başlangıç sınır değer probleminin kompleks eşleniğine denk olan bir başlangıç sınır değer problemine dönüştürebiliriz. Bu nedenle (1)-(4) başlangıç sınır değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliği hakkındaki düşünceleri kullanarak (20)-(23) eşlenik probleminin $C^0\big([0,L],\ L_2(0,L)\big)$ uzayına ait olan bir tek çözümünün olduğunu ve bu çözüm için aşağıdaki kestirimin geçerli olduğunu hükmedebiliriz:

$$\|\phi_k(\cdot,z)\|_{L_2(0,l)}^2 \le c_5 \|\psi_1 - \psi_2\|_{L_2(\Omega)}^2 \quad ,k = 1,2. \qquad (25)$$

Burada $c_5 > 0$ sayısı ψ_1 ve ψ_2 ’den bağımsızdır. Şimdi (9) fonksiyonelinin diferansiyellenebilir olduğunu göstermek için önce aşağıdaki gibi fonksiyonelin artışına bakalım:

$$\Delta J_\alpha(v) = J_\alpha(v + \Delta v) - J_\alpha(v) = 2\int_{\Omega} Re[(\psi_1 - \psi_2)(\Delta\bar{\psi}_1 - \Delta\bar{\psi}_2)]\, dxdz +$$

$$+\|\Delta\psi_1\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\Delta\psi_2\|_{L_2(\Omega)}^2 - 2\int_{\Omega} Re(\Delta\psi_1 \Delta\bar{\psi}_2) dxdz +$$

$$+2\alpha\int_0^L (v_0(z)-\omega_0(z))\Delta\, v_0(z)dz + \; 2\alpha\int_0^L (v_1(z)-\omega_1(z))\Delta\, v_1(z)dz +$$

$$+2\alpha\int_0^l (\varphi_{10}(x)-\omega_{10}(x))\Delta\,\varphi_{10}(x)dx + \; 2\alpha\int_0^l (\varphi_{11}(x)-\omega_{11}(x))\Delta\,\varphi_{11}(x)dx +$$

$$+2\alpha\int_0^l (\varphi_{20}(x)-\omega_{20}(x))\Delta\,\varphi_{20}(x)dx + \; 2\alpha\int_0^l (\varphi_{21}(x)-\omega_{21}(x))\Delta\,\varphi_{21}(x)dx +$$

$$+\alpha\|\Delta v\|_H^2\,. \tag{26}$$

Şimdi bu formülün sağ tarafında yer alan I. terimi dönüştürmeye çalışalım.

Lemma 3.1: Aşağıdaki bağıntı geçerlidir:

$$2\int_\Omega Re(\psi_1-\psi_2)(\Delta\bar{\psi}_1-\Delta\bar{\psi}_2)\,dxdz = \int_\Omega Re(\psi_1\bar{\phi}_1+\psi_2\bar{\phi}_2)\Delta v_0(z)dxdz -$$

$$-\int_\Omega Im(\psi_1\bar{\phi}_1+\psi_2\bar{\phi}_2)\Delta v_1(z)dxdz + \int_0^l Re\Delta\varphi_1(x)Im(\bar{\phi}_1(x,0))dx -$$

$$-\int_0^l Im\Delta\varphi_1(x)Re(\bar{\phi}_1(x,0))dx + \int_0^l Re\Delta\varphi_2(x)Im(\bar{\phi}_2(x,0))dx -$$

$$-\int_0^l Im\Delta\varphi_2(x)Re(\bar{\phi}_2(x,0))dx + \; R_0(\Delta v). \tag{27}$$

Burada $R_0(\Delta v)$ kalan terimi aşağıdaki gibi tanımlıdır.

$$R_0(\Delta v) = \int_{\Omega} Re(\Delta\psi_1\bar{\phi}_1 + \Delta\psi_1\bar{\phi}_1)\Delta v_0(z)dxdz -$$

$$-\int_{\Omega} Im(\Delta\psi_1\bar{\phi}_1 + \Delta\psi_1\bar{\phi}_1)\Delta v_1(z)dxdz\,. \qquad (28)$$

İspat: (1)-(4) başlangıç sınır değer probleminin genelleştirilmiş çözümü $C^0([0,L],L_2(0,l))$ uzayına ait olduğundan $\Delta\psi_k = \Delta\psi_k(x,z) = \psi_k(x,z;v+\Delta v) - \psi(x,z;v)$ fonksiyonu ve $\forall\phi_k \in L_2(\Omega)$ için

$$\int_{\Omega}\left(i\frac{\partial\Delta\psi_k}{\partial z} + a_0\frac{\partial^2\Delta\psi_k}{\partial x^2} - a(x)\Delta\psi_k + \big(v_0(z)+\Delta v_0(z)\big)\Delta\psi_k\right.$$

$$\left. + i\big(v_1(z)+\Delta v_1(z)\big)\Delta\psi_k\right)\bar{\phi}_k dxdz = \int_{\Omega}(-\Delta v_0(z)\psi_k - iv_1(z)\psi_k)\bar{\phi}_k dxdz\,,$$

$$k = 1,2 \qquad (29)$$

integral eşitliği sağlanır. Bu eşitliği kompleks eşleniği ile toplarsak aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\int_{\Omega}\left(-i\frac{\partial\Delta\bar{\psi}_k}{\partial z} + a_0\frac{\partial^2\Delta\bar{\psi}_k}{\partial x^2} - a(x)\Delta\bar{\psi}_k + v_0(z)\Delta\bar{\psi}_k - iv_1(z)\Delta\bar{\psi}_k\right)\phi_k dxdz =$$

$$\int_{\Omega} 2(-1)^k(\psi_1-\psi_2)\,\Delta\bar{\psi}_k dxdz + i\int_0^l \phi_k(x,0)\Delta\bar{\psi}_k(x,0)dx\ ,k = 1,2.$$

Bu eşitliğinde tekrar kompleks eşleniğini alırsak

$$\int_{\Omega}\left(i\frac{\partial\Delta\psi_k}{\partial z} + a_0\frac{\partial^2\Delta\psi_k}{\partial x^2} - a(x)\Delta\psi_k + v_0(z)\Delta\psi_k - iv_1(z)\Delta\psi_k\right)\bar{\phi}_k dxdz =$$

$$2(-1)^k \int_\Omega (\bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2)\, \Delta\psi_k dxdz - i \int_0^l \bar{\phi}_k(x,0)\Delta\psi_k(x,0)dx \ , k = 1,2 \qquad (30)$$

eşitliğini elde ederiz. Buradan da aşağıdaki eşitliği kolaylıkla yazabiliriz:

$$\int_\Omega (\Delta v_0(z)\Delta\psi_k\, \bar{\phi}_k + i\Delta v_1(z)\Delta\psi_k \bar{\phi}_k)dxdz = -2(-1)^k \int_\Omega (\bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2)\, \Delta\psi_k dxdz +$$

$$+i \int_0^l \Delta\psi_k(x,0)\bar{\phi}_k(x,0)dx + \int_\Omega (-\Delta v_0(z)\psi_k - \Delta v_1(z)\psi_k)\bar{\phi}_k dxdz$$

veya

$$2(-1)^k \int_\Omega (\bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2)\, \Delta\psi_k dxdz = \int_\Omega (-\Delta v_0(z)\psi_k - \Delta v_1(z)\psi_k)\bar{\phi}_k dxdz +$$

$$\int_\Omega (-\Delta v_0(z)\Delta\psi_k - i\Delta v_1(z)\Delta\psi_k)\bar{\phi}_k dxdz + i \int_0^l \Delta\psi_k(x,0)\bar{\phi}_k(x,0)dx\, , k = 1,2\, . \quad (31)$$

Elde ettiğimiz son eşitliği $\Delta\psi_k(x,0) = \Delta\varphi_k(x)$ şartını kullanarak $k = 1,2$ için aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$2 \int_\Omega (\bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2)\, \Delta\psi_1 dxdz = \int_\Omega (\Delta v_0(z)\psi_1 + (z)\psi_1)\bar{\phi}_1 dxdz +$$

$$\int_\Omega (\Delta v_0(z)\Delta\psi_1 + i\Delta v_1(z)\Delta\psi_1)\bar{\phi}_1 dxdz - i \int_0^l \Delta\varphi_1(x)\bar{\phi}_1(x,0)dx \ , \quad (32)$$

$$-2 \int_\Omega (\bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2)\, \Delta\psi_2 dxdz = \int_\Omega (\Delta v_0(z)\psi_2 + v_1(z)\psi_2)\bar{\phi}_2 dxdz +$$

$$\int_{\Omega} (\Delta v_0(z)\Delta\psi_2 + i\Delta v_1(z)\Delta\psi_2)\bar{\phi}_2 dxdz - i\int_0^l \Delta\varphi_2(x)\bar{\phi}_2(x,0)dx. \tag{33}$$

(32) ve (33) taraf tarafa toplanırsa

$$2\int_{\Omega} (\bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2)(\Delta\psi_1 - \Delta\psi_2)dxdz = \int_{\Omega} (\psi_1\bar{\phi}_1 + \psi_2\bar{\phi}_2)\big(\Delta v_0(z) + i\Delta v_1(z)\big)dxdz +$$

$$+\int_{\Omega} (\Delta\psi_1\bar{\phi}_1 + \Delta\psi_2\bar{\phi}_2)\big(\Delta v_0(z) + i\Delta v_1(z)\big)dxdz -$$

$$-i\int_0^l [\Delta\varphi_1(x)\bar{\phi}_1(x,0) - \Delta\varphi_2(x)\bar{\phi}_2(x,0)]dx \tag{34}$$

eşitlğini elde ederiz. (34) eşitliğini kompleks eşleniği ile toplayalım:

$$2\int_{\Omega} (\bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2)(\Delta\psi_1 - \Delta\psi_2)dxdz + 2\int_{\Omega} (\psi_1 - \psi_2)(\Delta\bar{\psi}_1 - \Delta\bar{\psi}_2)dxdz =$$

$$= \int_{\Omega} (\psi_1\bar{\phi}_1 + \psi_2\bar{\phi}_2)\big(\Delta v_0(z) + i\Delta v_1(z)\big)dxdz +$$

$$+\int_{\Omega} (\bar{\psi}_1\phi_1 + \bar{\psi}_2\phi_2)\big(\Delta v_0(z) - i\Delta v_1(z)\big)dxdz +$$

$$+\int_{\Omega} (\Delta\psi_1\bar{\phi}_1 + \Delta\psi_2\bar{\phi}_2)\big(\Delta v_0(z) + i\Delta v_1(z)\big)dxdz -$$

$$-\int_{\Omega} (\Delta\bar{\psi}_1\phi_1 + \Delta\bar{\psi}_2\phi_2)\big(\Delta v_0(z) - i\Delta v_1(z)\big)dxdz -$$

$$-i\int_0^l [\Delta\varphi_1(x)\bar{\phi}_1(x,0) - \Delta\varphi_2(x)\bar{\phi}_2(x,0)]dx +$$

$$+i\int_0^l [\Delta\varphi_1(x)\phi_1(x,0) - \Delta\varphi_2(x)\phi_2(x,0)]dx.$$

Buradan da

$$4\int_\Omega Re(\psi_1-\psi_2)\,(\Delta\bar{\psi}_1-\Delta\bar{\psi}_2)dxdz = 2\int_\Omega Re(\psi_1\bar{\phi}_1+\psi_2\bar{\phi}_2)\Delta v_0(z)\,dxdz -$$

$$-2\int_\Omega Im(\bar{\psi}_1\phi_1+\bar{\psi}_2\phi_2)\,\Delta v_1(z)dxdz + \int_\Omega Re(\Delta\psi_1\bar{\phi}_1+\Delta\psi_2\bar{\phi}_2)\Delta v_0(z)dxdz -$$

$$-\int_\Omega Im(\Delta\psi_1\bar{\phi}_1+\Delta\psi_2\bar{\phi}_2)\Delta v_1(z)dxdz - i\int_0^l \big(\Delta\varphi_{10}(x)+i\Delta\varphi_{11}(x)\big)\bar{\phi}_1(x,0)dx -$$

$$-i\int_0^l \big(\Delta\varphi_{20}(x)+i\Delta\varphi_{21}(x)\big)\bar{\phi}_2(x,0)dx + i\int_0^l \big(\Delta\varphi_{10}(x)-i\Delta\varphi_{11}(x)\big)\phi_1(x,0)dx +$$

$$-i\int_0^l \big(\Delta\varphi_{20}(x)-i\Delta\varphi_{21}(x)\big)\phi_2(x,0)dx \qquad (35)$$

eşitliğini ve

$$-i\int_0^l \Big(\Delta\varphi_{10}(x)\bar{\phi}_1(x,0)+i\Delta\varphi_{10}(x)\phi_1(x,0)\Big)\,dx +$$

$$+\int_0^l \Big(\Delta\varphi_{11}(x)\bar{\phi}_1(x,0)+i\Delta\varphi_{21}(x)\phi_1(x,0)\Big)\,dx -$$

$$-i\int_0^l \Big(\Delta\varphi_{20}(x)\bar{\phi}_2(x,0)-i\Delta\varphi_{20}(x)\phi_2(x,0)\Big)\,dx +$$

$$+\int_0^l \left(\Delta\varphi_{21}(x)\bar{\phi}_2(x,0) - i\Delta\varphi_{21}(x)\phi_2(x,0)\right)dx =$$

$$= -i\int_0^l \Delta\varphi_{10}(x)\left(\bar{\phi}_1(x,0) - \phi_1(x,0)\right)dx +$$

$$+\int_0^l \Delta\varphi_{11}(x)\left(\bar{\phi}_1(x,0) - \phi_1(x,0)\right)dx -$$

$$-i\int_0^l \Delta\varphi_{20}(x)\left(\bar{\phi}_2(x,0) - \phi_2(x,0)\right)dx +$$

$$+\int_0^l \Delta\varphi_{21}(x)\left(\bar{\phi}_2(x,0) - \phi_2(x,0)\right)dx \qquad (36)$$

eşitliğini yazabiliriz. (36)’yı (35)’te dikkate alırsak lemmanın ispatı tamamlanmış olur.

Bu lemmayı kullanarak fonksiyonelin artışını aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\Delta J_\alpha(v) = J_\alpha(v+\Delta v) - J_\alpha(v) = \int_\Omega Re(\psi_1\bar{\phi}_1 + \psi_2\bar{\phi}_2)\Delta v_0(z)dxdz -$$

$$-\int_\Omega Im(\psi_1\bar{\phi}_1 + \psi_2\bar{\phi}_2)\Delta v_1(z)dxdz + \int_0^l Re\Delta\varphi_1(x)Im(\bar{\phi}_1(x,0))dx -$$

$$-\int_0^l Im\Delta\varphi_1(x)Re(\bar{\phi}_1(x,0))dx + \int_0^l Re\Delta\varphi_2(x)Im(\bar{\phi}_2(x,0))dx -$$

$$-\int_0^l Im\Delta\varphi_2(x)Re(\bar{\phi}_2(x,0))dx + 2\alpha\int_0^L (v_0(z) - \omega_0(z))\,\Delta v_0(z)dz +$$

$$+2\alpha\int_0^L (v_1(z)-\omega_1(z))\Delta v_1(z)dz+2\alpha\int_0^l (\varphi_{10}(x)-\omega_{10}(z))\Delta\varphi_{10}(x)dx+$$

$$+2\alpha\int_0^l (\varphi_{11}(x)-\omega_{11}(z))\Delta\varphi_{11}(x)dx+2\alpha\int_0^L (\varphi_{20}(x)-\omega_{20}(z))\Delta\varphi_{20}(x)dx+$$

$$+2\alpha\int_0^L (\varphi_{21}(x)-\omega_{21}(z))\Delta\varphi_{21}(x)dx+R(\Delta v). \qquad (37)$$

Burada $R(\Delta v)$ aşağıdaki eşitlikle tanımlanır:

$$R(\Delta v)= R_0(\Delta v)+\|\Delta\psi_1\|^2_{L_2(\Omega)}+\|\Delta\psi_2\|^2_{L_2(\Omega)}-$$

$$-2\int_\Omega Re(\Delta\psi_1\Delta\bar{\psi}_1)\,dxdz+\alpha\|\Delta v\|^2_H\ . \qquad (38)$$

$R(\Delta v)$ kalanının formülünden yararlanarak (10), (16) ve (25) kestirimleri yardımıyla $R(\Delta v)$' yi aşağıdaki gibi değerlendirebiliriz:

$$|R(\Delta v)|\le c_6\|\Delta v\|^2_H$$

Burada $c_6>0$ sayısı Δv' den bağımsızdır.

$$R(\Delta v)=o(\|\Delta v\|_H). \qquad (39)$$

Bu takdirde fonksiyonelin artışını aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\Delta J_\alpha(v)=J_\alpha(v+\Delta v)-J_\alpha(v)=$$

$$= \int_0^L \left[\int_0^l Re\left(\psi_1(x,z)\bar{\phi}_1(x,z) + \psi_2(x,z)\bar{\phi}_2(x,z)\right)dx + 2\alpha(v_0(z) - \omega_0(z)) \right] \Delta v_0(z)\, dz +$$

$$+ \int_0^l \left[-\int_0^l Im\left(\psi_1(x,z)\bar{\phi}_1(x,z) + \psi_2(x,z)\bar{\phi}_2(x,z)\right)dx + 2\alpha(v_1(z) - \omega_1(z)) \right] \Delta v_1(z) dz +$$

$$+ \int_0^l \left[Im(\bar{\phi}_1(x,0)) + 2\alpha(\varphi_{10}(x) - \omega_{10}(x)\right] \Delta\varphi_{10}(x) dx +$$

$$+ \int_0^l \left[-Re(\bar{\phi}_1(x,0)) + 2\alpha(\varphi_{11}(x) - \omega_{11}(x)\right] \Delta\varphi_{11}(x) dx +$$

$$+ \int_0^l \left[Im(\bar{\phi}_2(x,0)) + 2\alpha(\varphi_{20}(x) - \omega_{20}(x)\right] \Delta\varphi_{20}(x) dx +$$

$$+ \int_0^l \left[-Re(\bar{\phi}_2(x,0)) + 2\alpha(\varphi_{21}(x) - \omega_{21}(x)\right] \Delta\varphi_{21}(x) dx +$$

$$+ o(\|\Delta v\|_H). \tag{40}$$

Fonksiyonel uzaylarda Fréchet anlamında fonksiyonelin diferansiyellenebilirliliğin tanımını kullanarak $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli V kümesi üzerinde diferansiyellenebilir ve fonksiyonelin gradiyenti için aşağıdaki formülün geçerli olduğunu söyleyebiliriz:

$$J_\alpha{}'(v) = (J_{\alpha v_0}{}'(v)\,,\ J_{\alpha v_1}{}'(v)\,,\ J_{\alpha\varphi_{10}}{}'(v)\,, J_{\alpha\varphi_{11}}{}'(v),\ J_{\alpha\varphi_{20}}{}'(v)\,, J_{\alpha\varphi_{21}}{}'(v)) \tag{41}$$

Burada $J_{\alpha v_0}{}'(v)$, $J_{\alpha v_1}{}'(v)$, $J_{\alpha\varphi_{10}}{}'(v)$,$J_{\alpha\varphi_{11}}{}'(v)$, $J_{\alpha\varphi_{20}}{}'(v)$ ve $J_{\alpha\varphi_{21}}{}'(v)$ aşağıdaki formüllerle tanımlanır:

$$J_{\alpha v_0}{}'(v) = \int_0^l Re\left(\psi_1(x,z)\bar{\phi}_1(x,z) + \psi_2(x,z)\bar{\phi}_2(x,z)\right)dx + 2\alpha(v_0(z) - \omega_0(z)), \tag{42}$$

$$J_{\alpha v_1}{}'(v) = -\int_0^l Im\left(\psi_1(x,z)\overline{\phi}_1(x,z) + \psi_2(x,z)\overline{\phi}_2(x,z)\right)dx + 2\alpha(v_1(z) - \omega_1(z)), \quad (43)$$

$$J_{\alpha\varphi_{10}}{}'(v) = Im(\overline{\phi}_1(x,0)) + 2\alpha(\varphi_{10}(x) - \omega_{10}(x)), \quad (44)$$

$$J_{\alpha\varphi_{11}}{}'(v) = -Re(\overline{\phi}_1(x,0)) + 2\alpha(\varphi_{11}(x) - \omega_{11}(x)), \quad (45)$$

$$J_{\alpha\varphi_{20}}{}'(v) = Im(\overline{\phi}_2(x,0)) + 2\alpha(\varphi_{20}(x) - \omega_{20}(x)), \quad (46)$$

$$J_{\alpha\varphi_{21}}{}'(v) = -Re(\overline{\phi}_2(x,0)) + 2\alpha(\varphi_{21}(x) - \omega_{21}(x)). \quad (47)$$

Aşağıdaki fonksiyonları göz önüne alalım:

$$\mathcal{H}_0(x, \psi_1(.,z),\ \psi_2(.,z),\ v_0(z),\ v_1(z), \bar{\phi}_1(.,z), \bar{\phi}_1(.,z)) =$$

$$= -\int_0^l Re\left(\psi_1(x,z)\overline{\phi}_1(x,z) + \psi_2(x,z)\overline{\phi}_2(x,z)\right)dx v_0(z) +$$

$$+\int_0^l Im\left(\psi_1(x,z)\overline{\phi}_1(x,z) + \psi_2(x,z)\overline{\phi}_2(x,z)\right)dx v_1(z) -$$

$$-\alpha(v_0(z) - \omega_0(z))^2 - \alpha(v_1(z) - \omega_1(z))^2, \quad (48)$$

$$\mathcal{H}_1(x, \varphi_{10}(x), \varphi_{11}(x), \varphi_{20}(x), \varphi_{21}(x), \bar{\phi}_1(x,0), \overline{\phi}_2(x,0) =$$

$$= -Im\left(\bar{\phi}_1(x,0)\right)\varphi_{10}(x) +\ Re\left(\bar{\phi}_1(x,0)\right)\varphi_{11}(x) -$$

$$-Im\left(\bar{\phi}_2(x,0)\right)\varphi_{20}(x) +\ -Im\left(\bar{\phi}_2(x,0)\right)\varphi_{21}(x) -$$

$$-\alpha(\varphi_{10}(x) - \omega_{10}(x))^2 - \alpha(\varphi_{11}(x) - \omega_{11}(x))^2 -$$

$$-\alpha(\varphi_{20}(x) - \omega_{20}(x))^2 - \alpha(\varphi_{21}(x) - \omega_{21}(x))^2. \quad (49)$$

Bu fonksiyonların her birine (1)-(4), (9) optimal kontrol problemi için Hamilton-Pontryagin fonksiyonu denir. Fonksiyonelin gradiyentini Hamilton-Pontryagin fonksiyonlarını kullanarak yazarsak gradiyent için aşağıdaki formülü elde etmiş oluruz:

$$J'_\alpha(v) = -\left(\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial v_0}, \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial v_1}, \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \varphi_{10}}, \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \varphi_{11}}, \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \varphi_{20}}, \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \varphi_{21}}\right). \tag{50}$$

Burada $\mathcal{H}_0$ ve $\mathcal{H}_1$ fonksiyonları sırasıyla (40), (41) formülleriyle tanımlanır.

Teorem 3.3: Teorem 3.2 nin şartları sağlansın. Bu takdirde $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli V kümesi üzerinde Fréchet anlamında diferansiyellenebilirdir ve onun gradiyenti için (50) formülü geçerlidir.

3.2.2. Optimal kontrol probleminin çözümü için varyasyon eşitsizliği şeklinde gerek şart

(1)–(4), (9) optimal kontrol probleminin çözümü için varyasyon eşitsizliği biçiminde gerek şart elde edeceğiz. Bu amaçla aşağıdaki teoremi göz önüne alalım.

Teorem 3.4: $v^* \in V$ (1)–(4) , (9) probleminin herhangi bir çözümü olsun. Bu takdirde $\forall v \in V$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\int_0^L \left[\int_0^l Re\left(\psi_1^*(x,z)\bar{\phi}_1^*(x,z) + \psi_2^*(x,z)\bar{\phi}_2^*(x,z)\right)dx + 2\alpha\left(v_0^*(z) - \omega_0(z)\right)\right](v_0(z) - v_0^*(z))\,dz$$

$$+\int_0^L \left[-\int_0^l Im\left(\psi_1^*(x,z)\bar{\phi}_1^*(x,z) + \psi_2^*(x,z)\bar{\phi}_2^*(x,z)\right)dx + 2\alpha\left(v_1^*(z) - \omega_1(z)\right)\right]\left(v_1(z) - v_1^*(z)\right)dz +$$

$$+\int_0^l [Im(\bar{\phi}_1^*(x,0)) + 2\alpha(\varphi_{10}^*(x) - \omega_{10}(x)] \times [\varphi_{10}(x) - \varphi_{10}^*(x)]\,dx +$$

$$+\int_0^l [-Re(\bar{\phi}_1^*(x,0)) + 2\alpha(\varphi_{11}^*(x) - \omega_{11}(x)] \times [\varphi_{11}(x) - \varphi_{11}^*(x)]dx +$$

$$+\int_0^l [Im(\bar{\phi}_2^*(x,0)) + 2\alpha(\varphi_{20}^*(x) - \omega_{20}(x)] \times [\varphi_{20}(x) - \varphi_{20}^*(x)]\,dx +$$

$$+\int_0^l [-Re(\bar{\phi}_2^*(x,0)) + 2\alpha(\varphi_{21}^*(x) - \omega_{21}(x)] \times [\varphi_{21}(x) - \varphi_{21}^*(x)]dx \geq 0. \quad (51)$$

Burada $\psi_k^*(x,z) \equiv \psi_k^*(x,z;v^*)$, $\phi_k^*(x,z) \equiv \phi_k^*(x,z;v^*)$, $k = 1,2$ sırasıyla (1)–(4) başlangıç sınır değer probleminin ve eşlenik problemin $v^* \in V$ `ye karşılık gelen çözümleridir.

İspat: Teorem3.3'ten $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli V kümesinde Fréchet anlamında diferensiyellenebilirdir ve onun gradiyenti için (41) formülü geçerlidir. Öncelikle $J_\alpha{}'(v)$ gradiyentinin V kümesi üzerinde sürekli olduğunu ispatlayalım. Bu amaçla $J_\alpha{}'(v)$ gradiyentinin $\forall v \in V$ için artışını hesaplayalım (40) formülünü kullanmış olursak fonksiyonelin gradiyentinin v elemanı üzerindeki artışı için aşağıdaki formülleri elde ederiz:

$$J_{\alpha v_0}{}'(v+\Delta v) - J_{\alpha v_0}{}'(v) =$$

$$= \int_0^l Re\Big(\Delta\psi_1(x,z)\overline{\phi}_1(x,z) + \psi_1(x,z)\Delta\overline{\phi}_1(x,z) + \Delta\psi_1(x,z)\Delta\overline{\phi}_1(x,z) + \Delta\psi_2(x,z)\overline{\phi}_2(x,z)$$

$$+ \psi_2(x,z)\Delta\overline{\phi}_2(x,z) + \Delta\psi_2(x,z)\Delta\overline{\phi}_2(x,z)\Big)\,dx + 2\alpha\Delta v_0, \quad (52)$$

$$J_{\alpha v_1}{}'(v+\Delta v) - J_{\alpha v_1}{}'(v) =$$

$$= -\int_0^l Im\Big(\Delta\psi_1(x,z)\overline{\phi}_1(x,z) + \psi_1(x,z)\Delta\overline{\phi}_1(x,z) + \Delta\psi_1(x,z)\Delta\overline{\phi}_1(x,z)$$

$$+ \Delta\psi_2(x,z)\overline{\phi}_2(x,z) + \psi_2(x,z)\Delta\overline{\phi}_2(x,z) + \Delta\psi_2(x,z)\Delta\overline{\phi}_2(x,z)\Big)\,dx$$

$$+2\alpha\Delta v_1\,, \tag{53}$$

$$J_{\alpha\varphi_{10}}{}'(v+\Delta v)-J_{\alpha\varphi_{10}}{}'(v)= Im\left(\overline{\phi}_1(x,0)\right), \tag{54}$$

$$J_{\alpha\varphi_{11}}{}'(v+\Delta v)-J_{\alpha\varphi_{11}}{}'(v)= -Re\left(\overline{\phi}_1(x,0)\right), \tag{55}$$

$$J_{\alpha\varphi_{20}}{}'(v+\Delta v)-J_{\alpha\varphi_{20}}{}'(v)= Im\left(\overline{\phi}_2(x,0)\right), \tag{56}$$

$$J_{\alpha\varphi_{21}}{}'(v+\Delta v)-J_{\alpha\varphi_{21}}{}'(v)= -Re\left(\overline{\phi}_2(x,0)\right). \tag{57}$$

Burada $\Delta\psi_k=\Delta\psi_k(x,z),\ k=1,2$ fonksiyonları (11)-(14) sınır değer probleminin çözümü, $\Delta\phi_k=\Delta\phi_k(x,z)\equiv\phi_k(x,z;v+\Delta v)-\phi_k(x,z;v), k=1,2$ fonksiyonları aşağıdaki sınır değer probleminin çözümüdür:

$$i\frac{\partial\Delta\phi_k}{\partial z}+a_0\frac{\partial^2\Delta\phi_k}{\partial x^2}-a(x)\Delta\phi_k+(v_0+\Delta v_0)\Delta\phi_k+(v_1+\Delta v_1)\Delta\phi_k=$$

$$=\Delta v_0\phi_k(x,z)+i\Delta v_1\phi_k(x,z)\,,(x,z)\in\Omega \tag{58}$$

$$\Delta\phi_k(x,L)=2(-1)^k\left(\Delta\psi_1(x,L)-\Delta\psi_2(x,L)\right)\,,k=1,2 \tag{59 }$$

$$\phi_1(0,z)=\ \phi_1(l,z)=0\ ,\ \ z\in(0,L) \tag{60}$$

$$\frac{\partial\Delta\phi_2(0,l)}{\partial x}=\frac{\partial\Delta\phi_2(l,z)}{\partial x}=0\,,\qquad z\in(0,L)\,. \tag{61}$$

(49)-(52) sınır değer probleminin (1)-(4) sınır değer problemi ile aynı tipli olduğunu kolaylıkla söyleyebiliriz. Buna göre (10) kestiriminin benzeri olarak (58)-(61) sınır değer probleminin çözümü için aşağıdaki kestirimi yazabiliriz:

$$\|\Delta\phi_k(\cdot,z)\|^2_{L_2(0,l)}\le c_7\left(\|\Delta\psi_1(.,L)\|^2_{L_2(0,l)}+\|\Delta\psi_2(.,L)\|^2_{L_2(0,l)}+\|\Delta v\phi_k\|^2_{L_2(\Omega)}\right). \tag{62}$$

$\forall z \in [0, L],\ k = 1,2$ burada $c_7 > 0$ sabiti Δv ve $\Delta\psi_k$, $k = 1,2$ den bağımsızdır. Bu takdirde (10), (16) ve (25) kestirimlerini dikkate alırsak

$$\|\Delta\phi_k(\cdot, z)\|^2_{L_2(0,l)} \leq c_8\|\Delta v\|_H \tag{63}$$

elde ederiz. Burada $c_8 > 0,\ \Delta v'$den bağımsızdır. Şimdi $\Delta J_\alpha{}'(v)$ artışı için kestirim elde edelim. Yani $\|\Delta v\|_H \to 0$, $\|J_\alpha{}'(v + \Delta v) - J_\alpha{}'(v)\|_H \to 0$ olduğunu göstermeliyiz.

Öncelikle (52) denklemi için kestirim elde edelim. $J_{\alpha v_0}{}'(v + \Delta v) - J_{\alpha v_0}{}'(v)$ farkı için olan formülü kullanırsak

$$\left|J_{\alpha v_0}{}'(v + \Delta v) - J_{\alpha v_0}{}'(v)\right| \leq \int_0^l |\Delta\psi_1||\phi_1|dx + \int_0^l |\psi_1||\Delta\phi_1|dx + \int_0^l |\Delta\psi_1||\Delta\phi_1|dx +$$

$$\int_0^l |\Delta\psi_2||\phi_2|dx + \int_0^l |\psi_2||\Delta\phi_2|dx + \int_0^l |\Delta\psi_2||\Delta\phi_2|dx + 2\alpha|\Delta v_0|$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Cauchy-Bunyakovsky eşitsizliğini kullanırsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left\|J_{\alpha v_0}{}'(v + \Delta v) - J_{\alpha v_0}{}'(v)\right\| \leq$$

$$\leq \|\Delta\psi_1\|_{L_2(0,l)}\|\phi_1\|_{L_2(0,l)} + \|\psi_1\|_{L_2(0,l)}\|\Delta\phi_1\|_{L_2(0,l)} + \|\Delta\psi_1\|_{L_2(0,l)}\|\Delta\phi_1\|_{L_2(0,l)}$$

$$+\left\|\Delta\psi_2\right\|_{L_2(0,l)}\left\|\phi_2\right\|_{L_2(0,l)} + \left\|\psi_2\right\|_{L_2(0,l)}\left\|\Delta\phi_2\right\|_{L_2(0,l)} + \left\|\Delta\psi_2\right\|_{L_2(0,l)}\left\|\Delta\phi_2\right\|_{L_2(0,l)}$$

$$+2\alpha\|\Delta v\|_H\ .$$

Son eşitsizliğin sağ tarafındaki terimleri değerlendirmiş olursak

$$\|\Delta\psi_1\|_{L_2(0,l)}\|\phi_1\|_{L_2(0,l)} \leq \tilde{c}_1\|\Delta\psi_1\|_{L_2(0,l)} \leq \tilde{c}_2\|\Delta v\|_H$$

$$\|\psi_1\|_{L_2(0,l)}\|\Delta\phi_1\|_{L_2(0,l)} \leq \tilde{c}_3\|\Delta\psi_1\|_{L_2(0,l)} \leq \tilde{c}_4\|\Delta v\|_H$$

eşitsizlilerini yazabiliriz ve aynı şekilde diğer kalan terimleride aşağıdaki gibi değerlendirebiliriz:

$$\|\Delta\psi_1\|_{L_2(0,l)}\|\Delta\phi_1\|_{L_2(0,l)} \leq \tilde{c}_5\|\Delta v\|_H$$

$$\|\Delta\psi_2\|_{L_2(0,l)}\|\phi_2\|_{L_2(0,l)} \leq \tilde{c}_6\|\Delta v\|_H$$

$$\|\psi_2\|_{L_2(0,l)}\|\Delta\phi_2\|_{L_2(0,l)} \leq \tilde{c}_7\|\Delta v\|_H$$

$$\|\Delta\psi_2\|_{L_2(0,l)}\|\Delta\phi_2\|_{L_2(0,l)} \leq \tilde{c}_8\|\Delta v\|_H \ .$$

Yani

$$\left\|J_{\alpha v_0}{}'(v+\Delta v) - J_{\alpha v_0}{}'(v)\right\|_H \leq c_9\|\Delta v\|_H$$

eşitsizliği elde edilir. Aynı işlemler (53) denklemi için yapılırsa

$$\left\|J_{\alpha v_1}{}'(v+\Delta v) - J_{\alpha v_1}{}'(v)\right\|_H \leq c_{10}\|\Delta v\|_H$$

eşitsizliğini elde edilir.

Şimdi (54) denklemi için kestirim elde edelim. Bu amaçla (54) denklemin her iki tarafının mutlak değerinin karesini alıp $(0,l)$ aralığında integrallersek aşağıdaki kestirimi elde ederiz:

$$\int_0^l \left| J_{\alpha\varphi_{10}}{}'(v+\Delta v) - J_{\alpha\varphi_{10}}{}'(v)\right|^2 dx \leq \int_0^l |\Delta\phi_1(x,0)|^2\, dx = \|\Delta\phi_1\|_{L_2(0,l)}^2 \leq \overline{c_1}\|\Delta v\|_H.$$

Benzer şekilde (46)-(47) ve (48) denklemleri içinde aşağıdaki kestirimler elde edilir:

$$\int_0^l \left| J_{\alpha\varphi_{11}}{}'(v+\Delta v) - J_{\alpha\varphi_{11}}{}'(v) \right|^2 dx \le \int_0^l |\Delta\phi_1(x,0)|^2 \, dx = \|\Delta\phi_1\|^2_{L_2(0,l)} \le \bar{c_2}\|\Delta v\|_H,$$

$$\int_0^l \left| J_{\alpha\varphi_{20}}{}'(v+\Delta v) - J_{\alpha\varphi_{20}}{}'(v) \right|^2 dx \le \int_0^l |\Delta\phi_2(x,0)|^2 \, dx = \|\Delta\phi_2\|^2_{L_2(0,l)} \le \bar{c_3}\|\Delta v\|_H,$$

$$\int_0^l \left| J_{\alpha\varphi_{21}}{}'(v+\Delta v) - J_{\alpha\varphi_{21}}{}'(v) \right|^2 dx \le \int_0^l |\Delta\phi_1(x,0)|^2 \, dx = \|\Delta\phi_1\|^2_{L_2(0,l)} \le \bar{c_4}\|\Delta v\|_H.$$

(43)-(48) denklemleri için olan kestirimleri kullanırsak gradiyentin artışı için aşağıdaki gibi kestririm elde ederiz:

$$\|J_\alpha{}'(v+\Delta v) - J_\alpha{}'(v)\|_H \le c_{11}\|\Delta v\|_H.$$

Burada $c_{11} > 0$ sayısı Δv den bağımsızdır. Bu eşitsizlikten $J_\alpha{}'(v)$ gradiyentinin V kümesi üzerinde sürekli olduğu elde edilir. Yani $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli V kümesinde Fréchet anlamında sürekli diferensiyellenebilirdir. Teorem2.2'nin şartları sağlanmaktadır. Buna göre $v^* \in V$ elemanının $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin minimum olması için gerek ve yeter şart $\forall v \in V$ için

$$\langle J'(v^*), v - v^* \rangle_H \ge 0$$

şartını sağlamasıdır. Burada $J_\alpha{}'(v)$ gradiyenti için olan formül kullanılırsa teorem ispatlanmış olur.

3.3. Quasi Optiğin Durgun Denklemi için Lions Fonksiyonelli Optimal Kontrol Probleminin Sonlu Fark Yaklaşımı

Bu bölümde, incelenen optimal kontrol probleminin özel hali için sonlu fark yaklaşımı uygulanmıştır. Önce problemin sonlu fark aynısı yazılıcak ve elde edilen fark şemasının çözümü için kararlılık kestirimi elde edilecektir. Bu kestirimden faydalanarak fark şemasının hatası için kestiririm ispatlanacaktır. Kararlılık ve hata için olan kestirimler yardımıyla sonlu fark yaklaşımının fonksiyonele yakınsaması ispatlanacaktır. Daha önceki çalışmalarda (Potapov *et al.* 1987; Silla 1991; Yagubov and Musayeva 1995; Mahmudov 1997; Razgulin 1998; Yetişkin 2005; Yıldırım 2009; Toyoğlu 2012) sonlu fark yaklaşımı farklı türden optimal kontrol problemlerine uygulanmıştır.

3.3.1. Optimal kontrol probleminin diskritleştirilmesi

Bu kesimde

$$J(v) = \|\psi_1 - \psi_2\|^2_{L_2(\Omega)} \tag{64}$$

fonksiyonelinin

$$V \equiv \left\{ v = (v_0, v_1), v_m \in L_2(0,L)\,, \|v_m\|_{L_2(0,L)} \le b_m,\ v_1(z) \ge 0\,, \overset{0}{\forall} z \in (0,L), m = 0,1 \right\}$$

kümesi üzerinde

$$i\frac{\partial \psi_k}{\partial z} + a_0\frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x^2} - a(x)\psi_k + v_0(z)\psi_k + iv_1(z)\psi_k = f_k(x,z),$$

$$(x,z) \in \Omega\,,\ k = 1,2\,, \tag{65}$$

$$\psi_k(x,0) = \varphi_k(x), x \in (0,l),\quad k = 1,2\,, \tag{66}$$

$$\psi_1(0,z) = \psi_1(l,z) = 0\,,\ z \in (0,L)\,, \tag{67}$$

$$\frac{\partial \psi_2(0,z)}{\partial x} = \frac{\partial \psi_2(l,z)}{\partial x} = 0\,, z \in (0,L). \tag{68}$$

şartları altında minimumunun bulunması problemini inceleyelim. Burada $i=\sqrt{-1}$, sanal birim $a_0>0$, $l>0$, $L>0$, $b_m>0$ ($m=0{,}1$) verilen sayılar $a(x)$ sınırlı ölçülebilir fonksiyon olup aşağıdaki şartları sağlar:

$$0<\mu_0\le a(x)\le\mu_1\,,\qquad \left|\frac{da(x)}{dx}\right|\le\mu_2,\qquad \left|\frac{d^2a(x)}{dx^2}\right|\le\mu_3\,,\forall x\in(0,l),\ \mu_m=sabit>0.$$

$\varphi_k(x)$ ve $f_k(x,z)$ fonksiyonları ise

$$\varphi_1\in \overset{0}{W}{}_2^2(0,l)\ ,\varphi_2\in W_2^2(0,l),\quad \frac{d\varphi_2(0)}{dx}=\frac{d\varphi_2(l)}{dx}=0$$

$$f_1\in \overset{0}{W}{}_2^{2,0}(\Omega)\ ,\ f_2\in W_2^{2,0}(\Omega),\quad \frac{\partial f(0,z)}{\partial x}=\frac{\partial f(l,z)}{\partial x}=0$$

şartlarını sağlar.

Quasi optiğin durgun denklemi için I. çeşit başlangıç sınır değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliği için (Yetişkin 2006) çalışmasındaki sonuçları kullanarak aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.4: $a(x)$, $\varphi_1(x)$ ve $f_1(x,z)$ üzerine konulmuş şartlar altında $\forall v\in V$ için (65)-(68) başlangıç sınır değer probleminin bir tek çözümü vardır ve bu çözüm için

$$\|\psi_1\|_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)}\le c_{12}\left(\|\varphi_1\|_{\overset{0}{W}{}_2^{2}(0,l)}+\|f_1\|_{\overset{0}{W}{}_2^{2,0}(\Omega)}\right)$$

kestirimi geçerlidir. Burada $c_{12}>0$ sayısı φ_1 ve f_1 den bağımsızdır.

II. çeşit başlangıç sınır değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliği için ise (İbrahimov 2010) çalışmasından aşağıdaki teoremi yazabiliriz.

Teorem 3.5: $a(x)$, $\varphi_2(x)$ ve $f_2(x,z)$ üzerine konulmuş şartlar altında $\forall v \in V$ için (65), (66), (68) başlangıç sınır değer probleminin bir tek çözümü vardır ve bu çözüm için

$$\|\psi_2\|_{W_2^{2,1}(\Omega)} \le c_{13}\left(\|\varphi_2\|_{W_2^{2}(0,l)} + \|f_2\|_{W_2^{2,0}(\Omega)}\right)$$

kestirimi geçerlidir. Burada $c_{13} > 0$ sayısı φ_2 ve f_2 den bağımsızdır.

(64)-(68) optimal kontrol problemi (1)-(4), (9) optimal kontrol probleminin $\alpha = 0$ haline karşılık gelen özel halidir. (64)-(68) optimal kontrol probleminin en azından çözümünün olduğu kolaylıkla gösterebiliriz. Yani

$$V_* \equiv \left\{v^* \in V : J(v^*) = J_* = \inf_{v\in V} J(v)\right\} \neq \emptyset$$

dır.

Şimdi (64)-(68) probleminin sonlu fark aynısını yazalım yani optimal kontrol problemini diskritleştirelim. Bu amaçla Ω bölgesini aşağıdaki ağlar dizisine dönüştürelim.

$\left\{(x_j, z_k)_n\right\}$, $n = 1,2, \ldots$, $x_j = jh - {}^{h}/_{2}$, $j = \overline{1, M_{n-1}}$, $z_k = k\tau$, $k = \overline{1, N_n}$

$$h = h_n = {}^{l}/_{(M_n - 1)}, \ \tau = \tau_n = {}^{\tau}/_{N_n}, \ M = M_n, \ N = N_n .$$

(65) denklemine karşılık gelen sonlu farkları ise

$$\delta_{\bar{x}}\phi_{jk} = \frac{\phi_{jk} - \phi_{jk-1}}{h} ,$$

$$\delta_{\bar{z}}\phi_{jk} = \frac{\phi_{jk} - \phi_{jk-1}}{\tau} ,$$

$$\delta_x \phi_{jk} = \frac{\phi_{j+1k} - \phi_{jk}}{h},$$

$$\delta_{x\bar{x}} \phi_{jk} = \frac{\phi_{j+1k} - 2\phi_{jk} - \phi_{j-1k}}{h^2}$$

biçiminde gösterelim.

Her bir $n \geq 1$ doğal sayısı için

$$I_n([v]_n) = h \sum_{j=1}^{M-1} \left|\phi_{jN}^1 - \phi_{jN}^2\right|^2 \tag{69}$$

fonksiyonunun

$$V_n \equiv \{[v]_n : [v]_n = ([v_0]_n, [v_1]_n), v_{1k} \geq 0, k = \overline{1, N},$$

$$\left.[v_p] = (v_{p1}, v_{p2}, \dots, v_{pN}), \left(h \sum_{k=1}^{N} |v_{pk}|^2\right)^{1/2} \leq b_p, p = 0{,}1, k = \overline{1, N}\right\}$$

kümesi üzerinde

$$i\delta_{\bar{z}}\phi_{jk}^p + a_0 \delta_{x\bar{x}} \phi_{jk}^p - a_j \phi_{jk}^p + v_{0k} \phi_{jk}^p + i v_{1k} \phi_{jk}^p = f_{jk}^p, j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}, \tag{70}$$

$$\phi_{j0}^p = \varphi_j^p,\ j = \overline{0, M}, p = 1{,}2, \tag{71}$$

$$\phi_{0k}^1 = \phi_{Mk}^1 = 0, k = \overline{1, N}, \tag{72}$$

$$\delta_{\bar{x}} \phi_{1k}^2 = \delta_{\bar{x}} \phi_{Mk}^2 = 0, k = \overline{1, N}. \tag{73}$$

şartları altında minimumunun bulunması problemini göz önüne alalım. Burada $a_j, \varphi_j^p, f_{jk}^p, p = 1{,}2$ fonksiyonları ağ fonksiyonları olup aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$a_j = \frac{1}{h} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} a(x)dx \quad , j = \overline{1, M-1} \tag{74}$$

$$\varphi_j^p = \frac{1}{h} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} \varphi_p(x)dx \quad , p = 1,2 \ , j = \overline{1, M-1} \tag{75}$$

$$\varphi_0^1 = \varphi_M^1 = 0 \ , \varphi_0^2 = \varphi_1^2 \ , \ \varphi_M^2 = \varphi_{M-1}^2$$

$$f_{jk}^p = \frac{1}{\tau h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} f_p(x,z)dxdz \quad , p = 1,2 \ , \ j = \overline{1, M-1} \ , k = \overline{1, N}. \tag{76}$$

(69)-(73) problemi gördüğümüz gibi (64)-(68) probleminin diskrit aynısıdır. Her bir $[v]_n \in V_n$ için (70)-(73) şartlarından $\phi_{jk}^p , p = 1,2$ ağ fonksiyonunun bulunması problemi (1)-(4) sınır değer problemine karşılık gelen fark şemasıdır. Önce bu fark şemasının çözümü için kararlılık kestirimi elde edelim.

3.3.2. Fark Şemasının Kararlılığı

Teorem 3.6: Her bir $[v]_n \in V_n$ için (70)-(73) fark şemasının kararlılığı için aşağıdaki kestirim sağlanır:

$$h \sum_{j=1}^{M-1} \left|\phi_{jk}^p\right|^2 \le c_{14} \left(h \sum_{j=1}^{M-1} \left|\varphi_j^p\right|^2 + \tau h \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{M-1} \left|f_{jk}^p\right|^2 \right) , m = 1,2 \dots , N \ \ , p = 1,2 \ . \tag{77}$$

Burada $c_{14} > 0$ sayısı τ ve h ‘den bağımsızdır.

İspat: $z = z_k$ katlarında aşağıdaki toplam özdeşliklerin geçerli olduğu açıktır:

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left(i\delta_{\bar{z}}\phi_{jk}^{1}\bar{\eta}_{jk}^{1}\right) - h\sum_{j=1}^{M-1}\left(a_0\delta_{\bar{x}}\phi_{jk}^{1}\delta_{\bar{x}}\bar{\eta}_{jk}^{1}\right) - h\sum_{j=1}^{M-1}\left(a_j\phi_{jk}^{1}\bar{\eta}_{jk}^{1}\right) +$$

$$+h\sum_{j=1}^{M-1}\left(v_{0j}\phi_{jk}^{1}\bar{\eta}_{jk}^{1}\right) + h\sum_{j=1}^{M-1}\left(v_{1j}\phi_{jk}^{1}\bar{\eta}_{jk}^{1}\right) = h\sum_{j=1}^{M-1}\left(f_{jk}^{1}\bar{\eta}_{jk}^{1}\right)\ , k = \overline{1,N}\,, \qquad (78)$$

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left(i\delta_{\bar{z}}\phi_{jk}^{2}\bar{\eta}_{jk}^{2}\right) - h\sum_{j=2}^{M-1}\left(a_0\delta_{\bar{x}}\phi_{jk}^{2}\delta_{\bar{x}}\bar{\eta}_{jk}^{2}\right) - h\sum_{j=1}^{M-1}\left(a_j\phi_{jk}^{2}\bar{\eta}_{jk}^{2}\right) +$$

$$+h\sum_{j=1}^{M-1}\left(v_{0j}\phi_{jk}^{2}\bar{\eta}_{jk}^{2}\right) + h\sum_{j=1}^{M-1}\left(v_{1j}\phi_{jk}^{2}\bar{\eta}_{jk}^{2}\right) = h\sum_{j=1}^{M-1}\left(f_{jk}^{2}\bar{\eta}_{jk}^{2}\right)\ , k = \overline{1,N}\,. \qquad (79)$$

Burada $\bar{\eta}_{jk}^{p}$, $p = 1{,}2$ ağ fonksiyonları $\eta_{0k}^{1} = \eta_{Mk}^{1} = 0$, $\delta_{\bar{x}}\eta_{1k}^{2} = \delta_{\bar{x}}\eta_{Mk}^{2} = 0$ şartlarını sağlayan $\{(x_j, z_k)_n\}$ ağı üzerinde tanımlı herhangi η_{jk}^{p} , $p = 1{,}2$ ağ fonksiyonlarının kompleks eşleniğidir. Bu toplam özdeşliklerinde $\bar{\eta}_{jk}^{p}$, $p = 1{,}2$ ağ fonksiyonları yerine $\tau\bar{\phi}_{jk}^{p}$, $p = 1{,}2$ ağ fonksiyonlarını alalım. Buradan elde edilen eşitliklerden onların kompleks eşleniğini çıkaralım. Sonuçta aşağıdaki eşitliği elde ediyoruz:

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\tau\left(\delta_{\bar{z}}\phi_{jk}^{p}\bar{\phi}_{jk}^{p} + \delta_{\bar{z}}\bar{\phi}_{jk}^{p}\phi_{jk}^{p}\right) = 2\tau h\sum_{j=1}^{M-1}v_{1k}\left|\phi_{jk}^{p}\right|^{2} - 2\tau h\sum_{j=1}^{M-1}Im(f_{jk}^{p}\bar{\phi}_{jk}^{p}) \qquad (80)$$

$k = \overline{1,M}, p = 1{,}2$.

(80) eşitliğinden aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\tau\left(\delta_{\bar{z}}\phi_{jk}^{p}\bar{\phi}_{jk}^{p} + \delta_{\bar{z}}\bar{\phi}_{jk}^{p}\phi_{jk}^{p}\right) = \left|\phi_{jk}^{p}\right|^{2} - \left|\phi_{jk-1}^{p}\right|^{2} + \left|\phi_{jk}^{p} - \phi_{jk-1}^{p}\right|^{2} \qquad (81)$$

(81) eşitliğini (80) de dikkate alırsak ($v_{1k} \geq 0\ , j = \overline{1, M-1}$)

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|\phi_{jk}^{p}\right|^{2}-\left|\phi_{jk-1}^{p}\right|^{2}+\left|\phi_{jk}^{p}-\phi_{jk-1}^{p}\right|^{2}\right)\leq 2\tau h\sum_{j=1}^{M-1}\left|f_{jk}^{p}\right|\left|\bar{\phi}_{jk}^{p}\right| \qquad (82)$$

Bu eşitsizliği k indisine göre 1 ‘den $m \leq N$ ye kadar toplayalım. Elde edilen eşitsizliğin sağ tarafına $\varepsilon - cauchy$ eşitsizliğini uygularsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}^{p}\right|^{2}+h\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jk}^{p}-\phi_{jk-1}^{p}\right|^{2}\leq h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_{j}^{p}\right|^{2}+\varepsilon\tau h\sum_{j=1}^{M-1}\left|f_{jk}^{p}\right|^{2}+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\tau h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}\right|^{2}+2\tau h\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|f_{jk}^{p}\right|\left|\bar{\phi}_{jk}^{p}\right|. \qquad (83)$$

Burada $\varepsilon = 2\tau$ seçilirse

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}^{p}\right|^{2}+2h\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jk}^{p}-\phi_{jk-1}^{p}\right|^{2}\leq 2h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_{j}^{p}\right|^{2}+4\tau\tau h\sum_{j=1}^{M-1}\left|f_{jm}^{p}\right|^{2}+$$

$$+4\tau h\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|f_{jk}^{p}\right|\left|\bar{\phi}_{jk}^{p}\right|. \qquad (84)$$

(84) eşitsizliğinin sol tarafının ikinci teriminin negatif olmadığını dikkate alırsak

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}^{p}\right|^{2}\leq 2h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_{j}^{p}\right|^{2}+2\tau h\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jk}^{p}\right|^{2}+(4\tau+2)\tau h\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|f_{jm}^{p}\right|^{2},$$

$$m = 1,2\ \ldots\ldots, N \quad , p = 1,2$$

eşitsizliği elde edilir.

Gronwall lemmasının diskrit aynısını kullanırsak

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}^{p}\right|^{2}\leq c_{15}\left(h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_{j}^{p}\right|^{2}+\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|f_{jk}^{p}\right|^{2}\right),\qquad m=1,\ldots\ldots,N\ ,p=1,2$$

eşitsizliğini elde ederiz. Teorem3.6 ispatlandı.

3.3.3. Fark şemasının hatası için kestirim

Bu kısımda (70)-(73) fark şemasının hatası için kestirim elde edelim. Bu amaçla önce $\forall v\in V$ için (65)-(68) sınır değer probleminin çözümünün ortalamasını aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$[\psi(x,z;v)]_{n}=\{\psi_{jk}^{p}\}$$

$$\psi_{jk}^{p}=\frac{1}{\tau h}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\psi_{p}(x,z)dxdz\ ,j=\overline{1,M-1},k=\overline{1,N} \tag{86}$$

$$\psi_{j0}^{p}=\psi_{j}^{p}\quad ,j=\overline{0,M}\ \ ,p=1,2$$

$$\psi_{0k}^{1}=\psi_{Mk}^{1}=0\ ,\ \psi_{0k}^{2}=\psi_{1k}^{2}\ \ ,\psi_{Mk}^{2}=\psi_{M-1k}^{2}\ \ ,k=\overline{1,N}$$

Bu ortalamaya Steklov anlamında ortalama denir.

Ayrıca V kümesi üzerinde Q_n operatörü tanımlayalım:

$$Q_{n}:V\to V_{n}\ \ ,Q_{n}(v)=[w]_{n}=([w_{0}]_{n}\,,[w_{1}]_{n})$$

$$w_{pk} = \frac{1}{\tau} \int_{z_{k-1}}^{z_k} v_p(z)dz \quad , \quad k = \overline{1,N} \quad , p = 1,2 \tag{87}$$

$[Z^p]_n = \{Z_{jk}^p\} = \{\phi_{jk}^p\} - \{\psi_{jk}^p\}$ ile fark şemasının hatasını gösterelim. $\{Z_{jk}^p\}, p = 1,2$ ağ fonksiyonları aşağıdaki sistemin çözümü olduğu açıktır:

$$i\delta_{\bar{z}} Z_{jk}^p + a_0 \delta_{x\bar{x}} Z_{jk}^p - a_j Z_{jk}^p + v_{0k} Z_{jk}^p + iv_{1k} Z_{jk}^p = F_{jk}^p \,, j = \overline{1, M-1} \,, k = \overline{1,N} \,, \tag{88}$$

$$Z_{j0}^p = 0 \,, \; j = \overline{0,M} \,, p = 1,2 \;, \tag{89}$$

$$Z_{0k}^1 = Z_{Mk}^1 = 0 \,, k = \overline{1,N} \;, \tag{90}$$

$$\delta_{\bar{x}} Z_{1k}^2 = \delta_{\bar{x}} Z_{Mk}^2 = 0 \,, k = \overline{1,N} \,. \tag{91}$$

Burada F_{jk}^p, aşağıdaki eşitlikle tanımlanır:

$$F_{jk}^p = \frac{1}{\tau h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} \left(i \frac{\partial \psi_p}{\partial z} + a_0 \frac{\partial^2 \psi_p}{\partial x^2} - a(x)\psi_p + v_0(z)\psi_p + iv_1(z)\psi_p \right) dx dz -$$

$$-i\delta_{\bar{z}} \psi_{jk}^p - a_0 \delta_{x\bar{x}} \psi_{jk}^p + a_j \psi_{jk}^p - v_{0k} \psi_{jk}^p - iv_{1k} \psi_{jk}^p \,, j = \overline{1, M-1} \,, k = \overline{1,N} \,, p = 1,2 \,.$$

Teorem 3.7: τ ve h adımlarının $c_{16} \leq \tau/h \leq c_{17}$ şartlarını sağladığını ve

$$\underset{z \in [0,L]}{vraimax} \left\| \frac{\partial \psi_p(.,z)}{\partial z} \right\|_{L_2(0,l)} \leq c_{18}$$

eşitsizliğinin geçerli olduğunu kabul edelim. Burada c_{16} ve c_{17} sayıları τ ve h'dan bağımsızdır. Bu takdirde (88)-(91) sisteminin çözümü için yani fark şemasının hatası için aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|Z_{jk}^{p}\right|^{2} \leq c_{19}^{p}(\beta_{\tau h} + \|Q_n(v) - [v]_n\|^2) \ \ ,m = \overline{1,N} \ \ ,p = 1,2. \tag{92}$$

Burada $c_{19}^{p} > 0$ sayısı τ ve h' dan bağımsızdır.

$\beta_{\tau h} > 0$, $\tau \to 0$ ve $h \to 0$ için $\beta_{\tau h} \to 0$. Ve (92) eşitsizliğinde

$$\|Q_n(v) - [v]_n\|^2 = \tau\sum_{k=1}^{N}(|w_{0k} - v_{0k}|^2 + |w_{1k} - v_{1k}|^2)$$

'dir.

<u>İspat:</u> Her bir $z = z_k$ için (88)-(91) sistemi aşağıdaki toplam özdeşliğine denktir:

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left(i\delta_{\bar{z}}Z_{jk}^{1}\bar{\eta}^{1}{}_{jk}\right) - a_0 h\sum_{j=1}^{M-1}\left(\delta_{\bar{x}}Z_{jk}^{1}\delta_{\bar{x}}\bar{\eta}^{1}{}_{jk}\right) - h\sum_{j=1}^{M-1}\left(a_j Z_{jk}^{1}\bar{\eta}^{1}{}_{jk}\right) +$$

$$+ h\sum_{j=1}^{M-1}\left(v_{0k}Z_{jk}^{1}\bar{\eta}^{1}{}_{jk}\right) + h\sum_{j=1}^{M-1}\left(iv_{1k}Z_{jk}^{1}\bar{\eta}^{1}{}_{jk}\right) = h\sum_{j=1}^{M-1}\left(F_{jk}^{1}\bar{\eta}^{1}{}_{jk}\right) \ ,k = \overline{1,N} \tag{93}$$

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left(i\delta_{\bar{z}}Z_{jk}^{2}\bar{\eta}^{2}{}_{jk}\right) - a_0 h\sum_{j=2}^{M-1}\left(\delta_{\bar{x}}Z_{jk}^{2}\delta_{\bar{x}}\bar{\eta}^{2}{}_{jk}\right) - h\sum_{j=1}^{M-1}\left(a_j Z_{jk}^{2}\bar{\eta}^{2}{}_{jk}\right) +$$

$$+ h\sum_{j=1}^{M-1}\left(v_{0k}Z_{jk}^{2}\bar{\eta}^{2}{}_{jk}\right) + h\sum_{j=1}^{M-1}\left(iv_{1k}Z_{jk}^{2}\bar{\eta}^{2}{}_{jk}\right) = h\sum_{j=1}^{M-1}\left(F_{jk}^{2}\bar{\eta}^{2}{}_{jk}\right) \ ,k = \overline{1,N}. \tag{94}$$

Burada $\bar{\eta}_{jk}^{p}$ ağ fonksiyonları $\eta^{1}{}_{0k} = \eta^{1}{}_{Mk} = 0$, $\delta_{\bar{x}}\eta^{2}{}_{1k} = \delta_{\bar{x}}\eta^{2}{}_{Mk} = 0$, $k = \overline{1,N}$ şartlarını sağlayan $\{(x_j, z_k)_n\}$ ağlar dizisinde tanımlanan herhangi η_{jk}^{p} ağ fonksiyonlarının kompleks eşleniğidir. Bu toplam özdeşliklerinde $\bar{\eta}_{jk}^{p}$ ağ fonksiyonunun yerine $\tau\bar{Z}_{jk}^{p}$, $p = 1,2$ ağ fonksiyonlarını alırsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left(i\tau\delta_{\bar{z}}Z_{jk}^{p}\bar{Z}_{jk}^{p}\right)-a_0 h\sum_{j=1}^{M-1}\tau\left|\delta_{\bar{x}}Z_{jk}^{p}\right|^2-h\sum_{j=1}^{M-1}\tau a_j\left|Z_{jk}^{p}\right|^2+$$

$$+h\sum_{j=1}^{M-1}\tau v_{0k}\left|Z_{jk}^{p}\right|^2+h\sum_{j=1}^{M-1}i\tau v_{1k}\left|Z_{jk}^{p}\right|^2=\tau h\sum_{j=1}^{M-1}\left(F_{jk}^{p}\bar{Z}_{jk}^{p}\right)\ ,k=\overline{1,N}\ ,p=1,2. \quad (95)$$

Bu eşitlikten onun kompleks eşleniğini çıkarıp Z_{jk}^{p} ağ fonksiyonu için (81) formülünü dikkate alırsak ($v_{1k}\geq 0$)

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|Z_{jk}^{p}\right|^2\leq c_{20}\left(\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{p}\right|^2\right),m=\overline{1,N} \quad (96)$$

eşitsizliğini kolaylıkla elde ederiz. Burada c_{20} sayısı h ve τ'dan bağımsızdır. Şimdi (96) eşitsizliğinin sağ tarafını aşağıdaki gibi gösterelim:

$$F_{jk}^{p}=F_{jk}^{p1}+F_{jk}^{p2}+F_{jk}^{p3}+F_{jk}^{p4}+F_{jk}^{p5}\quad ,p=1,2. \quad (97)$$

Burada $F_{jk}^{p1}, F_{jk}^{p2}, F_{jk}^{p3}, F_{jk}^{p4}, F_{jk}^{p5}, p=1,2$ aşağıdaki formüllerle tanımlanır:

$$F_{jk}^{p1}=\frac{1}{\tau h}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} i\frac{\partial\psi_p}{\partial z}dxdz-i\delta_{\bar{z}}\psi_{jk}^{p}, \quad (98)$$

$$F_{jk}^{p2}=\frac{1}{\tau h}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} a_0\frac{\partial^2\psi_p}{\partial x^2}dxdz-a_0\delta_{x\bar{x}}\psi_{jk}^{p}\ , \quad (99)$$

$$F_{jk}^{p3}=-\frac{1}{\tau h}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} a(x)\psi_p(x,z)dxdz+a_j\,\psi_{jk}^{p}\ , \quad (100)$$

$$F_{jk}^{p4} = \frac{1}{\tau h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} v_0(z)\, \psi_p(x,z) dxdz - v_{0k} \psi_{jk}^p, \tag{101}$$

$$F_{jk}^{p5} = \frac{1}{\tau h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} i v_1(z)\, \psi_p(x,z) dxdz - v_{1k} \psi_{jk}^p, \tag{102}$$

$$j = \overline{1, M-1}\,, k = \overline{1, N}\,, p = 1{,}2 \ .$$

Şimdi F_{jk}^p fonksiyonlarının her biri için kestirim elde edelim. Öncelikle F_{jk}^{p1} ağ fonksiyonunu değerlendirelim. (86) ve (98) formüllerinden aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$F_{jk}^{p1} = \frac{1}{\tau h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} i \frac{\partial \psi_p}{\partial z} dxdz - i \left(\frac{\psi_{jk}^p - \psi_{jk-1}^p}{\tau} \right) = \frac{1}{\tau h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} i \frac{\partial \psi_p}{\partial z} dxdz -$$

$$- \frac{i}{h\tau^2} \left(\int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} \psi_p(x,z) dxdz - \int_{z_{k-2}}^{z_{k-1}} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} \psi_p(x,z) dxdz \right)$$

$$= \frac{1}{\tau h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} i \frac{\partial \psi_p}{\partial z} dxdz - \frac{i}{h\tau^2} \int_{z_{k-2}}^{z_{k-1}} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} \int_{z-\tau}^{t} \frac{\partial \psi_p(x,\theta)}{\partial \theta} d\theta dxdz$$

$$= \frac{i}{h\tau^2} \int_{z_{k-2}}^{z_{k-1}} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} \left(\int_{-\tau}^{0} \left[\frac{\partial \psi_p(x,z)}{\partial z} - \frac{\partial \psi_p(x, t+\theta)}{\partial \theta} \right] d\theta \right) dxdz$$

$$j = \overline{1, M-1}\,, k = \overline{2, N}\,, p = 1{,}2 \ .$$

Bu eşitsizliği Cauchy-Bunyakovsky eşitsizliğini uygulamış olursak buradan aşağıdaki eşitsizliği elde etmiş oluruz:

$$\left|F_{jk}^{p1}\right|^2 \le \frac{1}{h\tau^2} \int_{z_{k-2}}^{z_{k-1}} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \int_{-\tau}^{0} \left|\frac{\partial\psi_p(x,z)}{\partial z} - \frac{\partial\psi_p(x,t+\theta)}{\partial\theta}\right|^2 d\theta\, dxdz \quad (103)$$

$$j = \overline{1, M-1}\,, k = \overline{2, N}\,, p = 1{,}2\ .$$

F_{j1}^{p1} için olan formulü kullanırsak

$$F_{j1}^{p1} = \frac{1}{\tau h}\int_{z_0}^{z_1}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} i\frac{\partial\psi_p}{\partial z}dxdz - i\left(\frac{\psi_{j1}^p - \psi_{j0}^p}{\tau}\right) = \frac{1}{\tau h}\int_{z_0}^{z_1}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} i\frac{\partial\psi_p}{\partial z}dxdz -$$

$$-\frac{i}{h\tau^2}\left(\int_{z_0}^{z_1}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \psi_p(x,z)dxdz - \int_{z_{k-2}}^{z_{k-1}}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \psi_p(x,z)dxdz\right)$$

$$= \frac{i}{\tau h}\int_{z_0}^{z_1}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \frac{\partial\psi_p}{\partial z}dxdz - \frac{i}{h\tau^2}\int_{z_0}^{z_1}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\int_{z-\tau}^{z} \frac{\partial\psi_p(x,\theta)}{\partial\theta}d\theta dxdz$$

eşitliğini yazabiliriz ve buradan

$$\left|F_{j1}^{p1}\right|^2 \le \frac{4}{\tau h}\int_{z_0}^{z_1}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left|\frac{\partial\psi_p(x,z)}{\partial z}\right|^2 dxdz \quad , j = \overline{1, M-1}\,, p = 1{,}2 \qquad (104)$$

eşitsizliğini elde ederiz. F_{jk}^{p2}için olan formulü kullanırsak

$$F_{jk}^{p2} = \frac{a_0}{\tau h}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \frac{\partial^2\psi_p}{\partial x^2}dxdz -$$

$$-\frac{a_0}{\tau h^3}\left\{\int_{z_{k-1}}^{z_k}\left[\int_{x_{j+1}-h/2}^{x_{j+1}+h/2} \psi_p(x,z)dx - 2\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \psi_p(x,z)dx + \int_{x_{j-1}-h/2}^{x_{j-1}+h/2} \psi_p(x,z)dx\right]dz\right\}$$

$$=$$

$$= \frac{a_0}{\tau h^3} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \int_{x}^{x+h} \int_{\xi-h}^{\xi} \left[\frac{\partial^2\psi_p(x,z)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi_p(\eta,z)}{\partial \eta^2}\right] d\eta d\xi dx dz =$$

$$= \frac{a_0}{\tau h^3} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \int_{x}^{x+h} \int_{-h}^{0} \left[\frac{\partial^2\psi_p(x,z)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi_p(\eta+\xi,z)}{\partial \xi^2}\right] d\eta d\xi dx dz =$$

$$= \frac{a_0}{\tau h^3} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \int_{0}^{h} \int_{-h}^{0} \left[\frac{\partial^2\psi_p(x,z)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi_p(x+\eta+\xi,z)}{\partial \xi^2}\right] d\eta d\xi dx dz. \quad (105)$$

eşitliğini yazabiliriz. (105) eşitliğine Cauchy-Bunyakovsky eşitsizliğini uygularsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left|F_{jk}^{p2}\right|^2 \le \frac{{a_0}^2}{\tau h^3} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \int_{0}^{h} \int_{-h}^{0} \left|\frac{\partial^2\psi_p(x,z)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi_p(x+\eta+\xi,z)}{\partial \xi^2}\right|^2 d\eta d\xi dx dz. \quad (106)$$

$$j = \overline{2, M-2}\,, k = \overline{1, N}\,, p = 1,2\ .$$

$F_{1k}^{p2}, k = \overline{1, N}, p = 1,2$ terimini kestirelim $p = 1$ için olan formülünü kullanırsak

$$F_{1k}^{12} = \frac{a_0}{\tau h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \frac{\partial^2\psi_1(x,z)}{\partial x^2} dx dz - \frac{a_0}{h^2}[\psi_{2k}^1 - 2\psi_{1k}^1 + \psi_{0k}^1] =$$

$$= \frac{a_0}{\tau h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \left(\frac{\partial\psi_1\left(x+\frac{h}{2},z\right)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi_p\left(x-\frac{h}{2},z\right)}{\partial \xi^2}\right) dz -$$

$$- \frac{a_0}{\tau h^3}\left\{\int_{z_{k-1}}^{z_k}\left[\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\int_{x}^{x+h} \frac{\partial\psi_1(\xi,z)}{\partial \xi} d\xi dx - \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \frac{\partial\psi_1(\xi,z)}{\partial \xi} d\xi dx\right] dz\right\} =$$

$$= \frac{a_0}{\tau h^3} \int\limits_{z_{k-1}}^{z_k} \int\limits_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} \int\limits_{x_1}^{x+h} \int\limits_{\xi}^{x_1 + \frac{h}{2}} \frac{\partial^2 \psi_1(\eta, z)}{\partial \eta^2} d\eta d\xi dx dz -$$

$$- \frac{a_0}{\tau h^3} \int\limits_{z_{k-1}}^{z_k} \int\limits_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} \int\limits_{x_1 - h/2}^{x+h} \int\limits_{x_1 - h/2}^{\xi} \frac{\partial^2 \psi_1(\eta, z)}{\partial \eta^2} d\eta d\xi dx dz$$

eşitliğini ve buradan Cauchy-Bunyakovsky eşitsizliğinin yardımıyla aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$|F_{1k}^{12}| \leq \frac{9{a_0}^2}{\tau h} \int\limits_{z_{k-1}}^{z_k} \int\limits_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} \left| \frac{\partial^2 \psi_1(x, z)}{\partial x^2} \right|^2 dx dz \quad , k = \overline{1, N}. \qquad (107)$$

$p = 2$ için F_{1k}^{p2} olan formülden aşağıdaki eşitliği elde ediyoruz:

$$F_{1k}^{22} = \frac{a_0}{\tau h} \int\limits_{z_{k-1}}^{z_k} \int\limits_{x_1 - h/2}^{x_1 + h/2} \left| \frac{\partial^2 \psi_2(x, z)}{\partial x^2} \right| dx dz - \frac{a_0}{h^2} [\psi_{2k}^1 - 2\psi_{1k}^1 + \psi_{0k}^1]$$

$$= \frac{a_0}{\tau h} \int\limits_{z_{k-1}}^{z_k} \frac{\partial \psi_2 \left(x + \frac{h}{2}, z \right)}{\partial x^2} dz - \frac{a_0}{\tau h^3} \left[\int\limits_{z_{k-1}}^{z_k} \int\limits_{x_1 - h/2}^{x_1 + h/2} \int\limits_{x}^{x+h} \frac{\partial \psi_2(\xi, z)}{\partial \xi} d\xi dx dz \right]$$

$$= \frac{a_0}{\tau h^3} \int\limits_{z_{k-1}}^{z_k} \int\limits_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} \int\limits_{x}^{x+h} \int\limits_{\xi}^{x_1 + h/2} \frac{\partial^2 \psi_2(\eta, z)}{\partial \eta^2} d\eta d\xi dx dz.$$

Buradan da

$$|F_{1k}^{22}|^2 \leq \frac{4{a_0}^2}{\tau h} \int\limits_{z_{k-1}}^{z_k} \int\limits_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} \left| \frac{\partial^2 \psi_2(x, z)}{\partial x^2} \right|^2 dx dz \quad , k = \overline{1, N} (108)$$

eşitsizliğini elde ederiz. (107)-(108) eşitsizliklerinden aynı şekilde F_{M-1k}^{12}ve F_{M-1k}^{12}için aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir:

$$|F_{M-1k}^{12}| \leq \frac{9{a_0}^2}{\tau h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_{M-1}-h/2}^{x_{M-1}+h/2} \left| \frac{\partial^2 \psi_1(x,z)}{\partial x^2} \right|^2 dxdz \quad , \tag{109}$$

$$|F_{M-1k}^{22}|^2 \leq \frac{4{a_0}^2}{\tau h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_{M-1}-h/2}^{x_{M-1}+h/2} \left| \frac{\partial^2 \psi_2(x,z)}{\partial x^2} \right|^2 dxdz \quad . \tag{110}$$

Şimdi $F_{jk}^{p3}\ , j = \overline{1, M-1}\ , k = \overline{1, N}\ , p = 1{,}2\ terimlerini$ kestirelim. (86) ve (100) formüllerini kullanırsak

$$F_{jk}^{p3} = -\frac{1}{\tau h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} a(x)\psi_p(x,z)dxdz + a_j\, \psi_{jk}^p$$

$$= \frac{1}{\tau h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \psi_{jk}^p(a_j - a(x))dxdz$$

$$+ \frac{1}{\tau h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} a(x)(\psi_{jk}^p - \psi_p(x,z))dxdz \tag{111}$$

eşitliğini elde ederiz.

ψ_{jk}^p için olan formüle gore aşağıdaki eşitsizliği elde ediyoruz:

$$|\psi_{jk}^p| = \left| \frac{1}{\tau h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \psi_p(x,z)dxdz \right| \leq \underset{(x,z)\in\Omega}{vraimax} |\psi_p(x,z)| =$$

$$= \|\psi_p\|_{L_\infty(\Omega)} \leq \|\psi_p\|_{L_\infty(0,T;W_2^1(0,l))} \quad , \quad p = 1{,}2. \tag{112}$$

Teorem3.4 ve Teorem3.5'deki kestirimler kullanılırsa kolaylıkla $\psi_p(x,z),\ \ p=1,2$ fonksiyonları için aşağıdaki eşitsizlikleri yazabiliriz:

$$\|\psi_1(.,z)\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)} \le c_{21}\left(\|\varphi_1\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} + \|f_1\|_{\overset{0}{W}{}_2^{2,0}(\Omega)}\right), \overset{0}{\forall} z \in (0,L) \quad (113)$$

$$\|\psi_2(.,z)\|_{W_2^1(0,l)} \le c_{22}\left(\|\varphi_2\|_{W_2^2(0,l)} + \|f\|_{W_2^{2,0}(\Omega)}\right), \overset{0}{\forall} z \in (0,L) \quad (114)$$

Bu kestirimleri ve (112)'yi kullanırsak

$$\begin{aligned} &\left|\psi_{jk}^1\right| \le c_{23}\ \ , \\ &\left|\psi_{jk}^2\right| \le c_{24}\ \ , k=\overline{1,N}, j=\overline{1,M-1}, \end{aligned} \quad (115)$$

eşitsizlikleri elde edilir.

(111)'den aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left|F_{jk}^{p3}\right| \le \frac{\mu_1}{\tau h}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\psi_{jk}^p-\psi_p(x,z)\right| dxdz\,,\ \ p=1,2. \quad (116)$$

(116)'da $\psi_{jk}^p-\psi_p(x,z)$ farkını bulalım. ψ_{jk}^p için olan formula kullanırsak bu farkı aşağıda gibi yazabiliriz:

$$\psi_{jk}^p-\psi_p(x,z)=\frac{1}{\tau h}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}(\psi_p(\xi,\theta)-\psi_p(x,z))d\xi d\theta$$

$$=\frac{1}{\tau h}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left[\int_x^\xi\frac{\partial\psi_p(\eta,\theta)}{\partial\eta}d\eta+\int_z^\theta\frac{\partial\psi_p(x,\sigma)}{\partial\sigma}d\sigma\right]d\xi d\theta. \quad (117)$$

Bu ifadeyi (116)'da kullanırsak:

$$\left|F_{jk}^{p3}\right|^2 \le \frac{2\mu_1^2 h}{\tau} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left|\frac{\partial \psi_p}{\partial x}\right|^2 dxdz + \frac{2\mu_1^2 \tau}{h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left|\frac{\partial \psi_p}{\partial z}\right| dxdz \quad (118)$$

$$j = \overline{1, M-1}\,, k = \overline{1, N}\,, p = 1,2 \quad .$$

eşitsizliğini elde ederiz. F_{jk}^{p4}'ü değerlendirmiş olursak (101) formülünden

$$F_{jk}^{p4} = \frac{1}{\tau h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left[v_0(z)\psi_p(x,z) - w_{0k}\psi_{jk}^p\right] dxdz =$$

$$\frac{1}{\tau h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} [v_0(z) - w_{0k}]\, \psi_{jk}^p dxdz +$$

$$+\frac{1}{\tau h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} v_0(z)(\psi_p(x,z) - \psi_{jk}^p)\, dxdz =$$

$$= (\psi_{jk}^p) \frac{1}{\tau} \int_{z_{k-1}}^{z_k} [v_0(z) - w_{0k}] dz + \frac{1}{\tau h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} v_0(z)(\psi_p(x,z) - \psi_{jk}^p)\, dxdz$$

eşitliğini kolaylıkla yazabiliriz. Bu eşitliğin her iki tarafının mutlak değerini alıp elde ettiğimiz eşitsizliğe Cauchy-Bunyakovsky eşitsizliğini uygulayalım. Bu takdirde aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left|F_{jk}^{p4}\right| \le \left|\psi_{jk}^p\right| |v_0(z) - w_{0k}| + \frac{1}{\tau h} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} |v_0(z)| \left|\psi_p(x,z) - \psi_{jk}^p\right| dxdz \le$$

$$\left|\psi_{jk}^{p}\right|\left|v_0(z)-w_{0k}\right|+$$

$$+\frac{1}{\tau h}\left[\left(\int_{z_{k-1}}^{z_k}|v_0(z)|^2dz\right)^{1/2}\times\left(\int_{z_{k-1}}^{z_k}\left|\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left[\psi_p(x,z)-\psi_{jk}^{p}\right]dx\right|^2 dz\right)^{1/2}\right]\le$$

$$\le\left|\psi_{jk}^{p}\right|\left|v_0(z)-w_{0k}\right|+$$

$$\frac{1}{\tau h}\left(\int_{z_{k-1}}^{z_k}|v_0(z)|^2dz\right)^{1/2}\times\frac{1}{\tau h}\Big(\int_{z_{k-1}}^{z_k}\Big(\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\psi_p(x,z)-\psi_{jk}^{p}\right|dx\Big)^2\Big)^{1/2}=$$

$$=\left|\psi_{jk}^{p}\right|\left|v_0(z)-w_{0k}\right|+\frac{1}{\tau h}\left(\int_{z_{k-1}}^{z_k}|v_0(z)|^2dz\right)^{1/2}\times$$

$$\frac{1}{\tau h}\Big(\int_{z_{k-1}}^{z_k}\Big(\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{1}{\tau h}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left[\int_{x}^{\xi}\frac{\partial\psi_p(\eta,\theta)}{\partial\eta}d\theta+\int_{z}^{\sigma}\frac{\partial\psi_p(x,\sigma)}{\partial\sigma}d\sigma\right]d\xi d\theta\right|dx\Big)^2dz\Big)^{1/2}$$

$$\le\left|\psi_{jk}^{p}\right|\left|v_0(z)-w_{0k}\right|+\frac{1}{\tau h}\left(\int_{z_{k-1}}^{z_k}|v_0(z)|^2dz\right)^{1/2}\times$$

$$\frac{1}{\tau h}\left(\int_{z_{k-1}}^{z_k}\left[\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left(\frac{1}{\tau h}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left[\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial\psi_p(\eta,\theta)}{\partial\eta}\right|d\eta+\int_{z_{k-1}}^{z_k}\frac{\partial\psi_p(x,\sigma)}{\partial\sigma}d\sigma\right]\right)d\xi d\theta)\right]^2dz\right)^{1/2}\le$$

$$\le\left|\psi_{jk}^{p}\right|\left|v_0(z)-w_{0k}\right|+\frac{1}{\tau h}\left(\int_{z_{k-1}}^{z_k}|v_0(z)|^2dz\right)^{1/2}\times$$

$$\left(\int_{z_{k-1}}^{z_k}\left[\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left(\frac{1}{\tau}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\left[\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial\psi_p(\eta,\theta)}{\partial\eta}\right|d\eta+\int_{z_{k-1}}^{z_k}\frac{\partial\psi_p(x,\sigma)}{\partial\sigma}d\sigma\right]d\theta\right)dx\right]^2dz\right)^{1/2}$$

$$= \left|\psi_{jk}^{p}\right| |v_0(z) - w_{0k}| + \frac{1}{\tau h}\left(\int_{z_{k-1}}^{z_k} |v_0(z)|^2 dz\right)^{1/2} \times$$

$$\left(\int_{z_{k-1}}^{z_k}\left[\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left[\frac{1}{\tau}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial\psi_p(\eta,\theta)}{\partial\eta}\right| d\eta d\theta + \frac{1}{\tau}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\left|\frac{\partial\psi_p(x,\sigma)}{\partial\sigma}\right| d\sigma d\theta\right] dx\right]^2\right)^{1/2} =$$

$$\left|\psi_{jk}^{p}\right| |v_0(z) - w_{0k}| + \frac{1}{\tau h}\left(\int_{z_{k-1}}^{z_k} |v_0(z)|^2 dz\right)^{1/2} \times$$

$$\left(\int_{z_{k-1}}^{z_k}\left[\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left[\frac{1}{\tau}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial\psi_p(\eta,\theta)}{\partial\eta}\right| d\eta d\theta + \int_{z_{k-1}}^{z_k}\left|\frac{\partial\psi_p(x,\sigma)}{\partial\sigma}\right| d\sigma\right] dx\right]^2 dz\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \left|\psi_{jk}^{p}\right| |v_0(z) - w_{0k}| + \frac{1}{\tau h}\left(\int_{z_{k-1}}^{z_k} |v_0(z)|^2 dz\right)^{1/2} \times$$

$$\left(\int_{z_{k-1}}^{z_k}\left[\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left[\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{\tau}}\left(\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial\psi_p(\eta,\theta)}{\partial\eta}\right|^2 d\eta d\theta\right)^{1/2} + \sqrt{\tau}\left(\int_{z_{k-1}}^{z_k}\left|\frac{\partial\psi_p(x,\sigma)}{\partial\sigma}\right|^2 d\sigma\right)^{1/2}\right] dx\right]^2 dz\right)^{1/2}$$

$$\leq \left|\psi_{jk}^{p}\right| |v_0(z) - w_{0k}| + \frac{1}{\tau h}\left(\int_{z_{k-1}}^{z_k} |v_0(z)|^2 dz\right)^{1/2} \times$$

$$\times\left(\int_{z_{k-1}}^{z_k}\left[\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{\tau}}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left(\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial\psi_p(\eta,\theta)}{\partial\eta}\right|^2 d\eta d\theta\right)^{1/2} dx + \sqrt{\tau}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left(\int_{z_{k-1}}^{z_k}\left|\frac{\partial\psi_p(x,\sigma)}{\partial\sigma}\right|^2 d\sigma\right)^{1/2}\right]^2 dz\right)^{1/2} =$$

$$= \left|\psi_{jk}^{p}\right| |v_0(z) - w_{0k}| + \frac{1}{\tau h}\left(\int_{z_{k-1}}^{z_k} |v_0(z)|^2 dz\right)^{1/2} \times$$

$$\times\left(\int_{z_{k-1}}^{z_k}\left[\frac{h\sqrt{h}}{\sqrt{\tau}}\left(\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial\psi_p(\eta,\theta)}{\partial\eta}\right|^2 d\eta d\theta\right)^{1/2}+\sqrt{\tau h}\left(\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\left|\frac{\partial\psi_p(x,\sigma)}{\partial\sigma}\right|^2 d\sigma\,dx\right)^{1/2}\right]^2 dz\right)^{1/2}\leq$$

$$\leq\left|\psi_{jk}^p\right|\left|v_0(z)-w_{0k}\right|+\frac{1}{\tau h}\left(\int_{z_{k-1}}^{z_k}|v_0(z)|^2dz\right)^{1/2}\times$$

$$\times\left(\int_{z_{k-1}}^{z_k}\left[2\frac{h^3}{\tau}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial\psi_p(\eta,\theta)}{\partial\eta}\right|^2 d\eta d\theta+\tau h\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\left|\frac{\partial\psi_p(x,\sigma)}{\partial\sigma}\right|^2 dx\,d\sigma\right]dz\right)^{1/2}=$$

$$=\left|\psi_{jk}^p\right|\left|v_0(z)-w_{0k}\right|+\frac{1}{\tau h}\left(\int_{z_{k-1}}^{z_k}|v_0(z)|^2dz\right)^{1/2}\times$$

$$\times\left(h^3\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial\psi_p(\eta,\theta)}{\partial\eta}\right|^2 d\eta d\theta+\tau^2 h\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\left|\frac{\partial\psi_p(x,\sigma)}{\partial\sigma}\right|^2 dx\,d\sigma\right)^{1/2}\leq$$

$$\leq\left|\psi_{jk}^p\right|\left|v_{0k}-w_{0k}\right|+\frac{1}{\tau h}\left(\int_{z_{k-1}}^{z_k}|v_0(z)|^2dz\right)^{1/2}\times$$

$$\times\left(h^{\frac{3}{2}}\left(\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial\psi_p(\eta,\theta)}{\partial\eta}\right|^2 d\eta d\theta\right)^{1/2}+\tau\sqrt{h}\left(\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial\psi_p(x,\sigma)}{\partial\sigma}\right|^2 dxd\,\sigma\right)^{1/2}\right)=$$

$$\leq\left|\psi_{jk}^p\right|\left|v_{0k}-w_{0k}\right|$$

$$+\frac{1}{\tau h}\left(\int_{z_{k-1}}^{z_k}|v_0(z)|^2dz\right)^{1/2}\left[\frac{\sqrt{h}}{\tau}\left(\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial\psi_p(\eta,\theta)}{\partial\eta}\right|^2 d\eta d\theta\right)^{1/2}+\frac{1}{\sqrt{h}}\left(\int_{z_{k-1}}^{z_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial\psi_p(x,\sigma)}{\partial\sigma}\right|^2 dxd\,\sigma\right)^{1/2}\right]$$

Sonuçta F_{jk}^{p4} ağ fonksiyonu için aşağıdaki eşitsizliği elde etmiş oluyoruz:

$$\left|F_{jk}^{p4}\right| \leq \left|\psi_{jk}^{p}\right| |v_{0k} - w_{0k}| \frac{1}{\tau h} \left(\int_{z_{k-1}}^{z_k} |v_0(z)|^2 dz \right)^{1/2}$$

$$+\frac{1}{\tau h}\left(\int_{z_{k-1}}^{z_k} |v_0(z)|^2 dz \right)^{1/2} \left[\frac{\sqrt{h}}{\tau} \left(\int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left| \frac{\partial \psi_p(\eta,\theta)}{\partial \eta} \right|^2 d\eta d\theta \right)^{1/2} + \frac{1}{\sqrt{h}} \left(\int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left| \frac{\partial \psi_p(x,\sigma)}{\partial \sigma} \right|^2 dx d\sigma \right)^{1/2} \right].$$

Bu eşitsizlikte $j = \overline{1, M-1}\,, k = \overline{1, N}$ için toplama geçip Cauchy-Bunyakovsky eşitsizliğini kullanırsak aşağıdaki eşitsizliği elde ediyoruz:

$$\tau h \sum_{k=1}^{M} \sum_{j=1}^{M-1} \left|F_{jk}^{p4}\right|^2 \leq \tau h \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{M-1} 3\left|\psi_{jk}^{p}\right|^2 |w_{0k} - v_{0k}|^2 +$$

$$+3\tau h \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{M-1} \int_{z_{k-1}}^{z_k} |v_0(z)|^2 dz \times \frac{h}{\tau^2} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left| \frac{\partial \psi_p(\eta,\theta)}{\partial \eta} \right|^2 d\eta d\theta +$$

$$+3\tau h \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{M-1} \int_{z_{k-1}}^{z_k} |v_0(z)|^2 dz \times \frac{1}{h^2} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left| \frac{\partial \psi_p(x,\sigma)}{\partial \sigma} \right|^2 dx d\sigma \leq$$

$$\leq 3l\left|\psi_{jk}^{p}\right|^2 \tau \sum_{k=1}^{N} |w_{0k} - v_{0k}|^2 + 3b_0^2 h^2 vraimax \left\| \frac{\partial \psi_p(x,\eta)}{\partial \eta} \right\|_{L_2(0,l)}^2$$

$$+ 3b_0^2 h^2 vraimax \left\| \frac{\partial \psi_p(x,\sigma)}{\partial \sigma} \right\|_{L_2(0,l)}^2 \quad p = 1,2\,.$$

$\psi_p \in W_2^{2,1}(\Omega),\ p = 1,2$ olduğundan

$$\underset{z\in[0,L]}{vraimax} \left\| \frac{\partial \psi_p(.,z)}{\partial x} \right\|_{L_2(0,l)} \leq c_{20} \left\| \psi_p \right\|_{W_2^{2,1}(\Omega)}$$

olduğunu kolaylıkla gösterebiliriz. Diğer taraftan teoremin şartından

$$\underset{z\in[0,L]}{vraimax}\left\|\frac{\partial\psi_p(.,z)}{\partial x}\right\|_{L_2(0,l)}\leq c_{18}$$

dir. Bu şartlar ve (115) kullanarak F_{jk}^{p4} için aşağıdaki kestirimi elde ederiz:

$$\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{p4}\right|^2\leq c_{26}\left(\tau\sum_{j=1}^{M-1}|w_{0k}-v_{0k}|^2+\tau\left\|\frac{\partial\psi_p}{\partial z}\right\|_{L_2(0,l)}^2+h\left\|\frac{\partial\psi_p}{\partial x}\right\|_{L_2(0,l)}^2\right).\quad(119)$$

(119) u kullanarak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{p4}\right|^2\leq c_{27}(\|Q_n(v)-[v]_n\|^2+h^2+\tau)$$

Aynı işlemler F_{jk}^{p5} ağ fonksiyonu için uygulanırsa benzer şekilde aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir:

$$\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{p5}\right|^2\leq 3l\left|\psi_{jk}^{p}\right|^2\tau\sum_{k=1}^{N}|w_{1k}-v_{1k}|^2+3b_0^2h^2vraimax\left\|\frac{\partial\psi_p(x,\eta)}{\partial\eta}\right\|_{L_2(0,l)}^2$$
$$+3b_0^2h^2vraimax\left\|\frac{\partial\psi_p(x,\sigma)}{\partial\sigma}\right\|_{L_2(0,l)}^2\quad p=1,2\,.$$

ve

$$\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{p5}\right|^2\leq c_{28}\left(\tau\sum_{j=1}^{M-1}|w_{1k}-v_{1k}|^2+\tau\left\|\frac{\partial\psi_p}{\partial z}\right\|_{L_2(0,l)}^2+h\left\|\frac{\partial\psi_p}{\partial x}\right\|_{L_2(0,l)}^2\right).$$

Buradan da aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{p5}\right|^2\leq c_{29}(\|Q_n(v)-[v]_n\|^2+h^2+\tau).$$

(118) eşitsizliği aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\tau h \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{M-1} \left| F_{jk}^{p3} \right|^2 \leq c_{30} \left(\tau^2 \left\| \frac{\partial \psi_p}{\partial z} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + h^2 \left\| \frac{\partial \psi_p}{\partial x} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \right). \qquad (120)$$

Fubini teoremini kullanırsak (103) eşitsizliğinden aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$h\tau \sum_{k=2}^{N} \sum_{j=1}^{M-1} \left| F_{jk}^{p1} \right|^2 \leq \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^{0} \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial \psi_p(x,z)}{\partial z} - \frac{\partial \psi_p(x,z+\theta)}{\partial z} \right| dxdz \right) d\theta \,, p = 1{,}2. \quad (121)$$

Herhangi bir $\varepsilon > 0$ alalım. $L_2(\Omega)$ uzayında tanımlanmış fonksiyonun sürekliliği teoremine göre $0 < \tau < \delta$ iken

$$\left\| \frac{\partial \psi_p(x,z)}{\partial z} - \frac{\partial \psi_p(x,z+\theta)}{\partial z} \right\|_{L_2(\Omega)} < \varepsilon$$

olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı vardır. Buna göre (57)'den aşağıdaki eşitsizliğin geçerli olduğunu elde ederiz:

$$\tau h \sum_{k=2}^{N} \sum_{j=1}^{M-1} \left| F_{jk}^{p1} \right|^2 \leq w_\tau^0. \qquad (122)$$

Burada $w_\tau^0 > 0$, $\tau \to 0$ için $w_\tau^0 \to 0$. (104) eşitsizliğine göre

$$\tau h \sum_{j=1}^{M-1} \left| F_{j1}^{p1} \right|^2 \leq \int_{0}^{\tau} \left\| \frac{\partial \psi_p(.\,,z)}{\partial z} \right\|_{L_2(0,l)} dz$$

eşitsizliğini elde ediyoruz. İntegralin mutlak sürekliliğine göre sonuncu eşitsizlikten aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir:

$$\tau h \sum_{j=1}^{M-1} \left|F_{j1}^{p1}\right|^2 \le w_\tau^1 \,, p = 1{,}2. \tag{123}$$

burada $w_\tau^1 > 0$, $\tau \to 0$ için $w_\tau^1 \to 0$. (122) ve (123) eşitsizliklerinden

$$\tau h \sum_{k=2}^{N} \sum_{j=1}^{M-1} \left|F_{jk}^{p1}\right|^2 \le w_\tau^0 + w_\tau^1 = \overline{w}_\tau^0 \quad , p = 1{,}2 \tag{124}$$

eşitsizliği sağlanır.

(122) eşitsizliğinin elde edilmesiyle aynı olarak (106)'dan aşağıdaki eşitsizliğin geçerli olduğunu elde ediyoruz:

$$\tau h \sum_{j=1}^{M-1} \left|F_{j1}^{p2}\right|^2 \le w_h^2 \,, p = 1{,}2. \tag{125}$$

Burada $w_h^2 > 0$ ve $h \to 0$ için $w_h^2 \to 0$. (107) ve (110) eşitsizliklerinden aşağıdaki eşitsizlikleri elde ediyoruz:

$$\tau h \sum_{j=1}^{M-1} \left|F_{j1}^{p2}\right|^2 \le 9a_0^2 \int_0^h \left\|\frac{\partial^2 \psi_p}{\partial x^2}\right\|_{L_2(0,L)} dx, \tag{126}$$

$$\tau h \sum_{j=1}^{M-1} \left|F_{M-1k}^{p2}\right|^2 \le 9a_0^2 \int_{l-h}^{l} \left\|\frac{\partial^2 \psi_p}{\partial x^2}\right\|_{L_2(0,L)} dx. \tag{127}$$

İntegralin mutlak sürekliliğinden bu eşitsizliklerin sağ taraflarının $h \to 0$ için sıfıra yaklaştığını elde ediyoruz. Yani:

$$\tau h \sum_{j=1}^{M-1} \left|F_{1k}^{p2}\right|^2 + \tau h \sum_{j=1}^{M-1} \left|F_{M-1k}^{p2}\right|^2 \le w_h^3, p = 1{,}2. \tag{128}$$

Burada $w_h^3 > 0$ ve $h \to 0$ için $w_h^3 \to 0$' dır. Bu takdirde (125)-(127)'den

$$\tau h \sum_{k=2}^{N} \sum_{j=1}^{M-1} \left|F_{jk}^{p2}\right|^2 \leq \widetilde{w}_h^0 \,, p = 1{,}2 \tag{129}$$

eşitsizliğini elde ediyoruz. Burada $\widetilde{w}_h^0 = w_h^2 + w_h^3$. (118) eşitsizliğinden (106) ve (107) kestirimlerinin yardımıyla bir sonraki eşitsizliği elde ediyoruz:

$$\tau h \sum_{k=2}^{N} \sum_{j=1}^{M-1} \left|F_{jk}^{p3}\right|^2 \leq c_{31}(\tau^2 + h^2) \,, p = 1{,}2. \tag{130}$$

Burada $c_{31} > 0$ sayısı τ ve h 'dan bağımsızdır. (98)-(102) ağ fonksiyonları için olan kestirimlerden faydalanılırsa F_{jk}^piçin

$$\tau h \sum_{k=1}^{N} \left|F_{jk}^{p}\right|^2 \leq c_{32}(\widetilde{w}_h^0 + w_\tau^0 + \tau + h + \tau^2 + h^2 + \|Q_n(v) - [v]_n\|^2) \tag{131}$$

kestirimi elde edilir. Burada $c_{32} > 0$ sayısı τ ve h 'dan bağımsızdır. Bu kestirim (96) eşitsizliğinde dikkate alınır ve

$$\beta_{\tau h} = \widetilde{w}_h^0 + w_\tau^0 + \tau + h + \tau^2 + h^2$$

olarak tanımlanırsa teorem ispatlanmış olur.

3.3.4. Fark Şemasının Fonksiyonele Göre Yakınsaklığı

Fark şemasının hatası için olan kestirimi kullanarak fark yaklaşımlarının fonksiyonele yakınsadığını inceleyelim. Bu amaçla öncelikle $J(v)$ ile $I_n([v]_n)$ fonksiyonelinin farkına bakalım.

Teorem 3.8: Teorem3.7'nin şartları sağlansın. Bu takdirde $\forall v \in V$ ve $\forall [v]_n \in V_n$ için

$$|J(v) - I_n([v]_n)| \leq c_{33}(\sqrt{\beta_{\tau h}} + \|Q_n(v) - [v]_n\|)$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $c_{33} > 0$ sayısı h ve τ'dan bağımsızdır.

İspat: $J(v) - I_n([v]_n)$ farkını göz önüne alalım. (64) ve (68) formüllerini kullanarak aşağıdaki eşitliği elde ediyoruz:

$$J(v) - I_n([v]_n) = \int_{\Omega} |\psi_1(x,z) - \psi_2(x,z)|^2 dxdz - h \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{M-1} \left|\phi_{jk}^1 - \phi_{jk}^2\right|^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{M-1} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} \left(\left(|\psi_1(x,z) - \psi_2(x,z)| + \left|\phi_{jk}^1 - \phi_{jk}^2\right|\right) \times\right.$$

$$\left. \times \left(|\psi_1(x,z) - \psi_2(x,z)| + \left|\phi_{jk}^1 - \phi_{jk}^2\right|\right)\right) dxdz.$$

Sınır değer probleminin çözümünü ait kestirimler yardımıyla ve Cauchy-Bunyakovsky eşitsizliğini kullanırsak

$$|J(v) - I_n([v]_n)| \leq$$

$$\leq c_{20}\left[\left(\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\int\limits_{z_{k-1}}^{z_k}\int\limits_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\psi_1(x,z)-\phi_{jk}^1\right|^2 dxdz\right)^{\frac{1}{2}}\right.$$

$$\left.+\left(\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\int\limits_{z_{k-1}}^{z_k}\int\limits_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\psi_2(x,z)-\phi_{jk}^2\right|^2 dxdz\right)^{\frac{1}{2}}\right] = c_{21}[J_1 + J_2]$$

$$(J_1)^2 = \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\int\limits_{z_{k-1}}^{z_k}\int\limits_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\psi_1(x,z) - \psi_{jk}^1 + \psi_{jk}^1 - \phi_{jk}^1\right| \leq$$

$$2\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\int\limits_{z_{k-1}}^{z_k}\int\limits_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\psi_1(x,z) - \psi_{jk}^1\right|^2 + 2\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\int\limits_{z_{k-1}}^{z_k}\int\limits_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\psi_{jk}^1 - \phi_{jk}^1\right|^2 =$$

$$= J_{11} + J_{12} \tag{132}$$

şeklinde değerlendirebiliriz. (117) formülünü kullanırsak

$$J_{11} \leq 4\tau^2\left\|\frac{\partial\psi_1}{\partial z}\right\|_{L_2(\Omega)}^2 + 4h^2\left\|\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right\|_{L_2(\Omega)}^2 \tag{133}$$

eşitsizliğini elde ederiz. (86) da $p = 1$ alırsak

$$J_{11} \leq 2c_{34}(\beta_{\tau h} + \|Q_n(v) - [v]_n\|^2) \tag{134}$$

eşitsizliğini elde ederiz. (133) ve (134) kestirimleri yardımıyla J_{11} için aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$(J_{11})^2 \leq c_{35}(\beta_{\tau h} + \|Q_n(v) - [v]_n\|^2). \tag{135}$$

Burada $c_{35} > 0$ sayısı τ ve h den bağımsızdır.

Benzer şekilde $(J_2)^2$ için aşağıdaki eşitsizlik ispatlanabilir:

$$(J_2)^2 \leq c_{36}(\beta_{\tau h} + \|Q_n(v) - [v]_n\|^2). \qquad (136)$$

(135) ve (136)'dan teorem ispatlanmış olur.

Lemma 3.2: Teorem3.8'in şartları sağlansın (87) şeklinde Q_n operatörü tanımlansın. Bu takdirde $Q_n(v) \in V_n$ dir. Ve aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$|J(v) - I_n(Q_n(v))| \leq c_{37}\sqrt{\beta_{\tau h}}\ .$$

İspat: $v \in V$ mümkün kontrol olsun. Q_n operatörünün tanımına göre aşağıdaki formüllerle tanımlanır:

$$Q_n(v) = ([w_0],[w_1]), \qquad [w_M] = (w_{m1}, w_{m2}, \dots w_{mN})\ , m = 0{,}1$$

$$w_{mk} = \frac{1}{\tau}\int_{z_{k-1}}^{z_k} v_m(z)dz, \quad k = \overline{1,N}, \qquad m = 0{,}1\ .$$

Bu formülden

$$w_{1k} = \frac{1}{\tau}\int_{z_{k-1}}^{z_k} v_1(z)dz \geq 0,\ k = \overline{1,N},$$

$v_1(z) \geq 0,\ \overset{0}{\forall}\, z > 0$ ve $w_{1k} \geq 0$

yazabiliriz. w_{mk} için olan formülde her iki tarafın mutlak değeri alınıp Cauchy-Bunyakovsky eşitsizliğini uygularsak

$$|w_{mk}| \le \frac{1}{\tau}\int_{z_{k-1}}^{z_k} |v_m(z)|dz \le \frac{1}{\tau}\left(\int_{z_{k-1}}^{z_k} |v_m(z)|^2 dz\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\tau} = \frac{1}{\sqrt{\tau}}\left(\int_{z_{k-1}}^{z_k} |v_m(z)|^2 dz\right)^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizlikte $k = \overline{1, N}$ toplama geçilirse

$$\left(\tau \sum_{k=1}^{N} |w_{mk}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\sum_{k=1}^{N} \int_{z_{k-1}}^{z_k} |v_m(z)|^2 dz\right)^{\frac{1}{2}} \le b_m,$$

elde eldir. Bu eşitsizlikten $Q_n(v) \in V_n$ olduğu görülür.. Bu takdirde $[v]_n \in V_n$ diskrit kontrolünü alıp Teorem3.8'i kullanırsak lemmanın geçerli olduğunu elde ederiz.

Şimdi aşağıdaki gibi P_n operatörü tanımlayalım:

$$P_n([v]_n) = (P_n[v_0]\,, P_n[v_1]) \qquad (137)$$

$$P_n([v]_m) = \tilde{v}_m(z) \quad , \tilde{v}_m(z) = v_{mk}\,,\ z_{k-1} \le z \le z_k\,, m = 0{,}1\,.$$

Lemma 3.3: Teorem3.8'in şartları sağlansın. (73) şeklinde tanımlı P_n operatörü verilsin. Bu takdirde $P_n([v]_n) \in V$ dir. Ve aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$|J(P_n([v]_n) - I_n([v]_n)| \le c_{38}\sqrt{\beta_{\tau h}}.$$

İspat: $[v]_n \in V_n$ herhangi diskrit kontrolü olsun. P_n operatörü (137) ile tanımlandığından aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\tilde{v}_m(z) = P_n([v]_n) = v_{mk} \ \ge 0,\ z_k \le z \le z_m\,,$$

$$\left(\int_0^l |\tilde{v}_m(z)|^2 dz\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\sum_{k=1}^{N} \int_{z_{k-1}}^{z_k} |\tilde{v}_m(z)|^2 dz\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\tau \sum_{k=1}^{N} \int_{z_{k-1}}^{z_k} |v_{mk}\,|^2 dz\right)^{\frac{1}{2}} \le b_m.$$

Buradan ve V kümesinin tanımından $P_n([v]_n) \in V$ olduğunu elde ediyoruz. Buna göre $v \in V$ kontrolünün yerine $\tilde{v}(z) = P_n([v]_n)$ kontrolünü alıp Teorem3.8'i kullanmış olursak

$$|J(P_n([v]_n) - I_n([v]_n)| \leq c_{39}\left(\sqrt{\beta_{\tau h}} + \|Q_n(P_n([v]_n)) - I_n([v]_n\|\right) \tag{138}$$

eşitsizliğini elde ediyoruz.

$\|Q_n(P_n([v]_n)) - I_n([v]_n\|$ normunu kestirelim.

$$\|Q_n(P_n([v]_n)) - I_n([v]_n\|^2 = \tau \sum_{k=1}^{N} \left| \frac{1}{\tau} \int_{z_{k-1}}^{z_k} v_m(z)dz - v_{mk} \right|^2 =$$

$$\tau \sum_{k=1}^{N} \left| \frac{1}{\tau} \int_{z_{k-1}}^{z_k} v_{mk}\, dz - v_{mk} \right|^2 = \tau \sum_{j=1}^{M-1} |v_{mk} - v_{mk}|^2 = 0$$

Son eşitlikten Lemma3.3'ün hükmünün geçerli olduğunu elde ediyoruz. Şimdi sonlu fark yaklaşımlarının fonksiyonele yakınsaklığı için olan teoremi ispatlayalım.

Teorem 3.9: Lemma3.2 ve Lemma3.3'ün şartları sağlansın. $v^* \in V, [v]_n^* \in V_n$ sırasıyla (64)-(68) ve (69)-(73) problemlerinin çözümü olsun. Yani,

$$J_* = \inf_{v \in V} J(v) = J(v^*)$$
$$I_{n^*} = \inf_{[v]_n \in V} I_n([v]_n) = I_n(v_n^*)$$

olsun. Bu takdirde (64)-(68) fark problemleri dizisi (69)-(73) probleminin yaklaşımıdır. $\lim_{n\to\infty} I_{n^*} = J_*$ ve aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$|I_{n^*} - J_*| \leq c_{40}\sqrt{\beta_{\tau h}}. \tag{139}$$

İspat: (Vasilev, 1981) çalışmasındaki metodolojiyi kullanalım. Teoremin şartına göre $v^* \in V$ (64)-(68) probleminin çözümüdür. Lemma3.2 in şartı sağlandığından $Q_n(v^*) \in V_n$ ve $|J(v^*) - I_n(Q_n(v^*))| \leq c_{41}\sqrt{\beta_{\tau h}}$ $n = 1,2 \ldots$. Bu eşitsizlikten

$$I_{n^*} \leq I_n(Q_n(v^*) \leq J(v^*) + c_{42}\sqrt{\beta_{\tau h}} \ , n = 1,2 \ldots$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan da aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$I_{n^*} - J_* \leq c_{43}\sqrt{\beta_{\tau h}} \ , n = 1,2 \ldots \tag{140}$$

Teoremin şartından $[v]_n^* \in V_n$, (69)-(73) probleminin çözümüdür. Lemma3.3'e göre $P_n([v^*]_n) \in V$ olur ve aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left|J\big(P_n([v^*]_n)\big) - I_n([v]_n^*\right| \leq c_{44}\sqrt{\beta_{\tau h}} \, , n = 1,2 \ldots \ .$$

Buradan aşağıdaki eşitsizliğin geçerli olduğu elde edilir:

$$J_* \leq J\big(P_n([v^*]_n)\big) \leq I_n([v]_n^* + c_{45}\sqrt{\tilde{\beta}_{\tau h}} = I_{n^*}c_{39}\sqrt{\tilde{\beta}_{\tau h}}, n = 1,2 \ldots \ .$$

Sonuncu eşitsizlikten

$$I_{n^*} - J_* \geq -c_{46}\sqrt{\beta_{\tau h}}, n = 1,2 \ldots \tag{141}$$

eşitsizliğinin geçerli olduğu elde edilir. (139) ve (140) dan (141)'in nün geçerli olduğu elde edilir. $\tau = \tau_n \, , h = h_n$ eşitliklerine göre

$$\lim_{n\to\infty} \tau_n = \lim_{n\to\infty} h_n = 0$$

olur. $\beta_{\tau h}$ formülü göz önüne alınarak (140)'da $n \to \infty$ için limite geçersek teoremi ispatlamış oluruz.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu çalışmada Quasi Optiğin durgun denklemiyle ifade edilen 1. tip ve 2. tip başlangıç sınır değer problemi için Lions fonksiyonelli optimal kontrol problemi ve onun nümerik çözümü ele alınmıştır.

Tezin 3. bölümünde ilk olarak, 3.1 bölümünde, Quasi Optiğin durgun denklemi için optimal kontrol problemi ele alınmaktadır. Kontrolün ölçülebilir, karesel integrallenebilir fonksiyonlar uzayından olması durumunda 1. ve 2. tip başlangıç sınır değer probleminin çözümüne ait teoremler verilmiş daha sonra da optimal kontrol problemin çözümünün varlığı ve tekliği ispatlanmış ve fonksiyonelin diferansiyellenebilirliği gösterilmiştir.

Tezin 3.2 bölümünde optimal kontrol probleminin çözümü için varyasyon eşitsizliği şeklinde gerek şart ispatlanmıştır.

Tezin 3.3 bölümünde 3.1 bölümünde göz önüne alınan optimal kontrol probleminin nümerik çözümü incelenmiştir. Problemin özel haline sonlu farklar metodu uygulanmış olup ele alınan optimal kontrol problemi diskritleştirilmiş ve elde edilen fark şeması için kararlılık kestirimi ispatlanmıştır. Daha sonra, fark şemasının hatası değerlendirilmiş ve fonksiyonele göre yakınsama kestirimi ispatlanmıştır.

5. SONUÇ

Durgun ve durgun olmayan Schrödinger denklemi için optimal kontrol problemleri ilk önce A. G. Butkovskiy, Yu. İ. Samoilenko, A. D. İskenderov, F. P. Vasilev, M. A. Vorontsov, V. I. Shmalgauzen, G. Ya. Yagubov, M. M. Potapov, A. V. Razgulin, DınNıoHao, N. Silla, B. Yıldız, M. A. Musayeva, N. M. Mahmudov, M. Subaşı, H. Yetişkin, L. Baudouin, J. Solomon, O. Kılıçoğlu, N. Yıldırım, N. S. İbrahimov, F. Toyoğlu vb. bilim adamlarının çalışmalarında incelenmiştir. Ayrıca denkleminin katsayısı olan kuantum mekanik potansiyelin ölçülebilir, karesel inregrallenebilir fonksiyonlar uzayından olması durumunda, optimal kontrol problemleri ilk olarak İskenderov (2001), Cances *et al.* (2000), Baudouin *et al.* (2005) çalışmalarında, Yetişkin (2005)'in, Yıldırım (2009)'ın ve Toyoğlu (2012)'nun doktora tezlerinde incelenmiştir. Ancak İskenderov (2001)'un çalışmasında lineer Schrödinger denklemi için başlangıç sınır değer problemleriyle ifade edilen sistemler için optimal kontrol problemi, Cances *et al.* (2000) ve Baudouin *et al.* (2005) çalışmalarında durumu Schrödinger denklemi için Cauchy problemleriyle ifade edilen sistemler için optimal kontrol problemleri, Yetişkin (2005)'in doktora tezinde kompleks potansiyelli Schrödinger denklemi için optimal kontrol problemleri, Yıldırım (2009)'ın doktora tezinde lineer olmayan Schrödinger denkleminin sınırsız katsayıyla optimal kontrol problemleri, Toyoğlu (2012)'nun doktora tezinde iki boyutlu Schrödinger denklemi için optimal kontrol problemleri incelendiğinden, bu tezde incelenen optimal kontrol problemi konulma açısından öncekilerden farklıdır. Çünkü bu çalışmada Quasi Optiğin durgun denklemi için optimal kontrol problemi ele alınmıştır. Ayrıca problemdeki kontroller denklemin katsayısında ve başlangıç durumunda yer almaktadır. Bu nedenle, bu çalışmadan elde edilen sonuçlar daha önceki çalışmaların sonuçlarından farklı olup, önceki çalışmalara göre daha günceldir ve hem teorik hem pratik açıdan öneme sahiptir.

KAYNAKLAR

Adams, R. A., 1978. Sobolev spaces. Academic Press Inc., 268 s, California.

Ahmedov, G. T., Ahiyev, S. S., 1972. Optimal kontrol teorisinin bazı problemleri için gerekli optimallık şartları. Azerbaycan Bilimler Akademisi Bildirileri, 28 (25),12-15.

Akbaba, G.D., 2011. Sanal katsayılı gradiyent içeren Schrödinger denklemi için Lions fonksiyonelli Optimal Kontrol Problemi. Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kafkas Üniversitesi

Baundoin, L.,Kavian, O., Puel, J. P., 2005. Regularity for a Schrödinger equation with singuler potentials and application to bilinear optimal control. Journal Differential Equations, 2005, 216, 188-222.

Bidaut, M. G.,1973. These Universite de Paris. –VI.

Butkovskiy, A.G., SamoilenkoYu.İ., 1984. Kuantum mekanik süreçlerin kontrol Nauka, 256 s, Moscow. (Rusça)

Cances, E., Le Bris, G., Pilot, M., 2000. Controle optimal bilineared'unaequation de Schrödinger. C. R. Acad. Sci., t.330, serie 1,567-571/ Controle optimal.

Cavadov, A. V.,İskenderov, A. D., 1965. Gartinhouse tipli potansiyele sahip çekirdeğin kararlı durumunun araştırılması. Azerbaycan Devlet Üniversitesinin bilim haberleri, Fizik ve Matematik serisi, 2, 77-84.

Deveci, Ö., 2006. Lineer olmayan Schrödinger denklemi için Optimal Kontrol Probleminin iyi konulması ve onun nümerik çözümü. Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kafkas Üniversitesi.

Dın Nio Hao, 1986. Kuantum objektlerinin optimal kontrolü. Nauka, Moscow, N. 2, 14-20. (Rusça)

Egorov, Yu. V., 1963. Optimal kontrolün bazı problemleri. Nümerik Analiz ve Matematiksel Fizik Dergisi, 3(5), 887-904. (Rusça)

Goebel, M., 1979. On existence of optimal control. Math. Nachr.,Vol 93, 67-73.

Hsieh, P. F.,Sibuya, Y., 1999. Basic theory of ordinary differential equations. Springer Verlag, 468 s, New york.

Hunter, J. K., Nachtergaele, B., 2000. Applied analysis. 438 s, California.

İbrahimov, N.S., Quasi Optiğin Durgun Lineer Denklemi için Başlangıç Sınır Değer Problemlerinin Çözülebilirliği. Journal of QafqazUniversity. No: 29, s. 61- 70 (2010)

İlter, S., 2005. Lineer Schrödinger denklemi için Lions fonksiyonelli Optimal Kontrol Problemi. Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kafkas Üniversitesi.

İskenderov, A. D.,Tagiev, R. G., 1983. Parabolik denklemlerin katsayılarında olan kontrolörle optimizasyon problemi. Diferansiyel Denklemler, 19 (8), 1324-1334.

İskenderov, A.D.,Yagubov, G.Ya., 1989. A variational method for solving the inverse problem of determining the quantum-mechanical potential. Soviet Math. Dok1., 38 (3), 637-641.

İskenderov, A.D.,Yagubov, G.Ya., 1989. Lineer olmayan kuantum mekanik sistemlerin optimal kontrolü. Otomatik ve Telemekanik, 12, 27-38. (Rusça)

İskenderov, A.D., 2001. Durgun olamayan Schrödinger denkleminde potansiyelin bulunması. Matematik Modellemenin ve Optimal Kontrolün Problemleri Dergisi, Baku, 6-36. (Rusça)

İskenderov, A. D.,Tagiev, R. G., Yagubov, G. Ya., 2002. Optimalleştirme metodları. Çaşıoğlu, 400 s, Bakü.

Kolmogorov, A. N.,Fomin, S. V., 1975. Introductory real analysis. DoverPub., 403 s, New york.

Kolmogorov, A. N.,Fomin, S. V., 1989. Fonksiyonlar teorisinin ve fonksiyonel analizin elemanları. Nauka, 624 s, Moscow. (Rusça)

Kreyszig, E., 1978. Introductory Functional Analysis with Applications. John Wiley and Sons, 688 s., United States of America.

Ladyzenskaja, O. A.,Solonnikov, V. A., Ural'ceva, N. N., 1967. Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type. Nauka, 736 s, Moscow. (Rusça)

Ladyzenskaja, O. A.,Solonnikov, V. A., Ural'ceva, N. N., 1968. Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type. American Math. Soc., 646 s, ABD.

Ladyzenskaja, O. A.,Ural'ceva, N. N., 1973. Linear and Quasilinear Equations of Elliptic Type. Nauka, Moscow. (Rusça)

Liberzon, D., 2012. Calculus of Variations and Optimal Control Theory, Princeton University Press, 235 s., New Jersey.

Lions, J.L.,Magenes, E. 1972. Non homegeneous boundary value problems and applications. Springer-Verlag, vol. 2, 307 s, Berlin.

Lions, J.L., 1971. Optimal control for systems governed by partial differential equations. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 400 s, New York.

Lurye, K. A., 1975. Matematiksel Fiziğin Problemlerinde Optimal Kontrol. Nauka, 478 s, Moskova. (Rusça)

Mahmudov, N. M., 1997. Lions fonksiyonelli kuantum mekanik sistemler için optimal kontrol problemlerinin farklar metoduyla çözümü. Azerbaycan Bilimler Akademisi Matematik Mekanik Enstitüsü Eserleri, 7, 79-82. (Rusça)

Mikhailov, V. P., 1983. Kısmi türevli diferansiyel denklemler. Nauka, 424 s, Moskova. (Rusça)

Musayev, B., Alp, M., 2000. Fonksiyonel analiz. 470 s, Kütahya.

Naidu, D. S., 2002. Optimal Control Systems. CRC press. 460 s, USA

Plotnikov, V. İ., 1976. Optimal kontrol teorisinde varyasyon ve eşlenik problem hakkında. Fonksiyonel Analiz ve onun uygulamaları, 10 (4), 95-96. (Rusça)

Pontryagin, L. S., 1976. Adi diferansiyel denklemler. Nauka, 332 s, Moskova.(Rusça)

Pontryagin, L. S.,Boltyansky, V. G., Gamkrelidze, R. V., Mişenko, E. F., 1969. Optimal süreçlerin matematik teorisi. Nauka, 384 s, Moskova. (Rusça)

Potapov, M. M.,Razgulin, A. V. ve Şameeva, T. Y., 1987. Schrödinger tipli optimal kontrol probleminin yaklaşımı ve regülarizasyonu. Moskova Devlet Üniversitesi Haberleri "Nümerik Analiz ve Sibernetik", 15(1), 8-13. (Rusça)

Pozzi, G. A., 1968, 1969. Problemi diCauchy e problemi ai limiti perequazione de evoluzine del tipo di Schrödinger lineari e nonlineary. I,II. Ann. Mat. Puraappl. I. Vol 78, II. Vol81.

Razgulin, A. V., 1998. Lineer olmayan Schrödinger denklemi için kontrol problemlerinin yaklaşımları. Moskova Devlet Üniversitesi Haberleri "Nümerik Analiz ve Sibernetik", 15(2), 28-33. (Rusça)

Reddy, B. D., 1998. Introductory functional analysis. SpringerVerlag, 471 s, New york.

Samarskii, A. A., Lazarov, R. D., Makarov, V. L., 1987. Genelleşmiş çözümlü diferansiyel denklemler için fark şemaları. Vısşaya Şkola, 296 s, Moskova. (Rusça)

Silla, N., 1991. Schrödinger tipli kuantum mekanik sistemler için optimal kontrol problemlerinin nümerik çözümü. Doktora Tezi, Bakü devlet üniversitesi, 165 s, Bakü.

Sobolev, S. L., 1988. Matematiksel fizikte fonksiyonel analizin bazı uygulamaları. Nauka, 334 s, Moskova. (Rusça)

Sokolowski, J., 1978. Remarks on existence of optimization problems for partial differential equations of parabolic type. Control andCybernetics, 7 (2), 47-61.

Tikhonov, A. N.,Arsenin, V. Ya., 1979. İll-posed problemlerin çözüm metodları. Nauka, 288 s, Moskova. (Rusça)

Toyoğlu, F., 2012. İki Boyutlu Schrödinger Denklemi için Optimal Kontrol Problemleri ve Onların Nümerik Çözümü. Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi.

Vasilev, F. P., 1980. Ekstremal problemlerin nümerik çözüm metodları. Nauka, 388 s, Moskova. (Rusça)

Vasilev, F. P., 1981. Ekstremal problemlerin çözüm metodları. Nauka, 400 s, Moskova. (Rusça)

Vorontsov, M. A., Shmalgauzen, V. I., 1985. Adaptiv optiğin prensipleri. Nauka, 336 s, Moskova. (Rusça)

Yagubov, G.Ya.,Musayeva, M.A., 1997. Lineer Olmayan Schrödinger Denklemi için İdentifikasyon Problemi Hakkında. Diferansiyel Denklemler, 33 (12), 1691-1698. (Rusça)

Yagubov, G.Ya., 1990. Quazi-Lineer Schrödinger Denkleminin Katsayısıyla Optimal Kontrol Probleminin Çözümü için Fark Yöntemi. Matematik Modelleme ve Otomatik Sistemler Dergisi, 53-60, Baku. (Rusça)

Yagubov, G.Ya., 1994. Quazi-Lineer Schrödinger Denkleminin Katsayısıyla Optimal Kontrol, Kiev, 318 s.

Yagubov, G.Ya., 2001. Quazi-Lineer Schrödinger Denkleminin Katsayısıyla Bölgenin Sınırı Üzerinden İntegralle verilen Kritere Sahip Optimal Kontrol Probleminin Çözümü için Fark Yöntemi. Matematik Modellemenin Temelleri ve Optimal Kontrol Dergisi, 37-48, Baku. (Rusça)

Yagubov, G.Ya., Musayeva, M.A., 1995. Finite-difference method solution of variation formulation of an inverse problem for non linear Schrodinger equation. Izv. AN Azerb.-Ser. Physictex.matem.nauk, vol.16, No 1-2,46-51. (Rusça)

Yakupov, S. Ya., 1970. Evolusyon Denklemler için Cauchy Probleminin İyi Konulması ve Onun Uygulamaları. Moskova Matematik Derneği Eserleri, 4(3), 86-94. (Rusça)

Yegorov, A. İ., 1978. Isı ve difüzyon süreçlerinin optimal kontrolü. Nauka, 463 s, Moskova. (Rusça)

Yetişkin, H., 2005. Kompleks Potansiyelli Schrödinger Denklemi için Optimal Kontrol Problemi ve Onun Sonlu Fark Yaklaşımı. Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi.

Yıldırım, N., 2009. Lineer olmayan Schrödinger Denkleminin Sınırsız Katsayıyla Optimal Kontrol Problemleri ve Onların Sonlu Fark Yaklaşımı. Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi.

Yıldız, B.,Yagubov, G.Ya., 1997. On an optimal control problem. Journal of computational and applied mathematics, vol88 , 275-287.

Yıldız, B., Subaşı, M., 2001. On the optimal control problem for linear Schrödinger equation. Applied Mathematics and Computation, 121, 373-381.

Yosida, K., 1980. Functional Analysis. Springer-Verlag, 624 s, New York.

Zeidler, E., 1995. Applied functional analysis. SpringerVerlag, 404 s, New york.

ÖZGEÇMİŞ

1985 yılında Gaziantep' te doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini burada tamamladı. 2004 yılında Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde lisans öğrenimine başlayarak 2008 yılında mezun oldu. 2008 yılında Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans eğitimine başladı 2010 yılında mezun oldu ve aynı yıl Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde doktora eğitimine başladı.