GECİKEN DEĞİŞKENLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN BAZI İTERATİF ÇÖZÜMLERİ

Cebeli İNAN

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Yrd. Doç. Dr. Arzu AYKUT
2014

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GECİKEN DEĞİŞKENLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN BAZI İTERATİF ÇÖZÜMLERİ

Cebeli İNAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ERZURUM
2014

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAY FORMU

GECİKEN DEĞİŞKENLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN BAZI İTERATİF ÇÖZÜMLERİ

Yrd. Doç. Dr. Arzu AYKUT danışmanlığında, Cebeli İNAN tarafından hazırlanan bu çalışma 09.05.2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak **oybirliği/~~oy çokluğu~~ (.../...)** ile kabul edilmiştir.

Başkan	: Prof.Dr. Murat SUBAŞI	*İmza* :
Üye	: Prof.Dr. Elif BOYDAŞ	*İmza* :
Üye	: Yrd.Doç.Dr. Arzu AYKUT	*İmza* :

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu 15.05.2014.. tarih ve 20/635 nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. İhsan EFEOĞLU
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GECİKEN DEĞİŞKENLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN BAZI İTERATİF ÇÖZÜMLERİ

Cebeli İNAN

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Arzu AYKUT

$\tau(t) \geq 0$ fonksiyonu $0 \leq t \leq T$ aralığında sürekli fonksiyon olmak üzere

$$x''(t) + a(t)x\big(t - \tau(t)\big) = f(t), \quad (0 \leq t \leq T)$$
$$x(t) = \varphi(t) \quad (\lambda_0 \leq t \leq 0), \qquad x(T) = x_T$$

sınır değer problemi göz önüne alınarak bu probleme denk olan Fredholm-Volterra integral denklemi yazıldı. Bu problem için çözüm “Varyasyonel İterasyon Metodu” ve “Basit Ardışık Yaklaşıklar Metodu” ile yaklaşık olarak elde edildi ve çözümler karşılaştırıldı. Böylece verilen sınır değer probleminin bir yaklaşık çözümü bulundu.

2014, 52 sayfa

Anahtar Kelimeler: Geciken değişkenli diferansiyel denklemler, Fredholm ve Volterra integral denklemleri, Basit Ardışık Yaklaşıklar Metodu, Varyasyonel İterasyon Metodu.

ABSTRACT

Master Thesis

SOME ITERATIVE SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH RETARDED ARGUMENT

Cebeli İNAN

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Arzu AYKUT

In this thesis, by considering the boundary value problem

$$x''(t) + a(t)x\big(t - \tau(t)\big) = f(t), \ \ (0 \le t \le T)$$
$$x(t) = \varphi(t) \ \ (\lambda_0 \le t \le 0), \quad x(T) = x_T$$

such that $\tau(t) \ge 0$ is an arbitrary continous function on $0 \le t \le T$, Fredholm-Volterra integral equation which is equivalent to the boundary value problem is written. Solution for this problem is obtained approximately by "Variational İteration Method" and "Successive Approximate Method". And this solutions was compared with. Thus the approximate solution of the boundary value problem is obtained.

2014, 52 pages

Keywords:.Fredholm-Volterra integral equations, Differential equation with retarded argument, Successive Approximate method, Variational İteration Method

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü’nde yapılmıştır.

Matematik bölümünde gerekli ilgi ve bilgilerini esirgemeyen Bölüm Başkanımız Sayın Prof. Dr. Abdullah MAĞDEN’e, çok değerli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Arzu AYKUT’a, değerli fikirlerinden yararlandığım Sayın Prof. Dr. Murat SUBAŞI’na ve matematik bölümünün tüm öğretim elemanlarına teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Ayrıca, çalışmalarım esnasında kendilerinden görmüş olduğum destek ve sonsuz güvenden dolayı Seda İĞRET ARAZ’a teşekkür ederim. Destek ve sabrını esirgemeyen eşime ve aileme de çok teşekkür ederim.

Cebeli İNAN
Mayıs, 2014

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$C[0,T]$	$[0,T]$ aralığında tanımlı, sürekli $x(t)$ fonksiyonlarının uzayı
$F_\lambda x$	$[0,\lambda(T)]$ aralığında Fredholm operatörü
$V_\lambda x$	$[0,\lambda(t)]$ aralığında Volterra operatörü
$K(t,s)$	İntegral denklemin çekirdeği
$G(t,s)$	Green fonksiyonu
$A(x)$	Sıkan operatör
$x_n(t)$	n=1,2,3 olmak üzere Basit Ardışık Yaklaşık ve Varyasyonel İterasyon metodu ile elde edilen yaklaşık çözüm fonksiyonu

ŞEKİLLER DİZİNİ

ÇİZELGELER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Fiziksel veya gerçek hayatta karşılaştığımız problemlere matematiksel metotları uygulamak için, bu problemler matematiksel ifadelerle formüle edilir, yani problem için bir matematiksel model oluşturulur. Çoğu fiziksel problemler değişen nicelikler arasındaki ilişkilerle bağlantılıdır. Matematiksel olarak değişimin oranı türevle ifade edildiğinden dolayı, matematiksel modeller sık sık bilinmeyen fonksiyon ve onun bir veya daha fazla türevini içeren denklemleri içerir (Trench 2013). Dolayısıyla diferansiyel denklemler bir takım bağımsız değişkenleri, bu değişkenlerin fonksiyonlarını ve fonksiyonların sonlu basamaktan türevlerini içeren matematiksel bağıntılardır.

Birçok probleme adi diferansiyel denklem karşılık getirilerek çözümler arandığı, diferansiyel denklemler teorisinden bilinir. Bu problemlerdeki işlemin değişme hızı ancak değişme anındaki durumla bağlantılıdır. Bundan dolayı alınan diferansiyel denklemde bilinmeyen fonksiyonun kendisi ve türevleri, bağımsız değişkenin o andaki değerine bağlıdır (Dağ 1983; Memmedov ve Kaçar 1994). Fakat öyle fiziki problemler vardır ki işlemin değişme hızı, işlemin o andaki durumuyla değil de onun geçmiş ya da gelecekteki durumuyla ilişkilidir. Böyle işlemlere karşılık gelen diferansiyel denklemlere sapan değişkenli (ya da meyleden değişkenli) diferansiyel denklemler denir. Özel halde bilinmeyen fonksiyonun kendisi ve türevi $t-\tau(t), (\tau(t) \geq 0)$ değişkenine bağlı ise böyle diferansiyel denklemlere geciken değişkenli diferansiyel denklem denir.

Varyasyonel İterasyon Yöntemi, varyasyonel tabanlı analitik bir çözüm tekniğidir. Bu yöntemle çeşitli doğrusal ve doğrusal olmayan diferansiyel denklemler, sınır-değer ve başlangıç-değer problemleri, diferansiyel denklem sistemleri çözülebilmektedir. Metodun yakınsaklığını inceleyerek diferansiyel denkleme çözüm bulan çalışmalar da vardır. Yöntemin bu başarılı uygulamaları, mevcut çalışma için seçilmesinin başlıca nedenleridir.

İkinci mertebeden geciken değişkenli lineer diferansiyel denklemler için konulmuş

$$\left.\begin{array}{c} x''(t) + a(t)x\big(t-\tau(t)\big) = f(t), \quad (0 \le t \le T) \\ x(t) = \varphi(t) \quad (\lambda_0 \le t \le 0) \qquad x(T) = x_T) \end{array}\right\} \tag{1}$$

sınır değer problemini göz önüne alalım. Burada $a(t) \ge 0$, $f(t) \ge 0$, $\tau(t) \ge 0$, $(0 \le t \le T)$ ve $\varphi(t)$, $(\lambda_0 \le t \le 0)$ fonksiyonları önceden verilmiş sürekli fonksiyonlardır. $\lambda(t) = t - \tau(t)$ olarak alınırsa bu halde $t_0 \in [0, T]$, T nin solunda öyle ilk noktadır ki $\lambda(t_0) = 0$ ve $\lambda(t) \le 0, (0 \le t \le t_0)$ şartı korunur. $\lambda_0 = \min_{0 \le t \le t_0} \lambda(t)$ dır. $\lambda(t)$ fonksiyonu $[t_0, T]$ aralığında azalmayan, $\lambda(t) = \sigma$ denkleminin keyfi $\sigma \in [0, \lambda(T)]$ değeri için $t = \gamma(\sigma)$ çözümü var ve bu çözüm sürekli diferansiyellenebilir olduğu kabul edilsin.

(1) problemi literatürde çeşitli metodlarla ele alındı (El'sgol'c 1960; Norkin 1972; Ahmedov 1972; Memmedov 1994). Ayrıca bu problem, tezde incelenen metodlarla $\tau(t) \equiv 0$ (Memmedov ve Kaçar 1993) ve $\tau(t)$ =sabit hali (Kaçar ve Memmedov, 1994) incelendi. Bu tezde $\tau(t)$ nın keyfi sürekli bir fonksiyon olması hali araştırıldı. Böylece daha önce yapılan çalışmaların sonuçları çalışmamızın bir özel durumu olarak elde edildi (Memmedov ve Kaçar 1993; Kaçar ve Memmedov 1994; Kaçar ve Memmedov 1994). Tezde kullanılan bu metotlar literatürde, Y.C. Memmedov Metodu olarak da bilinmektedir (Krasnosel'skij *et al.* 1989).

(1) problemi değişik metotlarla daha önce incelenmiş, yaklaşık çözüm elde edilip gerçek çözüm ile karşılaştırılmıştır (Aykut 1995).

Bu metotta, incelenen problem denk bir Fredholm-Volterra integral denklemine dönüştürülür, sonra bu integral denkleme ilgili metotlar uygulanır. Burada integral denkleme ait olan Fredholm operatörünün çekirdeğinin bozulmuş olması özelliğinden faydalanılır (Delves 1974).

Sunulan tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş bölümüdür. İkinci bölümde kuramsal bilgiler verilmiş olup, burada varyasyonel iterasyon yönteminden bahsedilip değişken, geciken değişkenli diferansiyel denklem, integral denklem kavramlarına değinildi. Ayrıca geciken değişkenli diferansiyel denklemler için modelleme izah edildi ve bu denklemlerin uygulama alanları ile ilgili örnekler verildi. Üçüncü bölümde (1) problemine denk olan Fredholm – Volterra integral denklemi elde edildi. Ayrıca bu problemin çözümünün varlığı ve tekliği için gerekli şartlar belirtildi ve Ardışık Yaklaşıklar Metodunun bazı yorumları problemin çözümüne uygulandı. Aynı örnek için varyasyonel iterasyon yöntemi kullanıldı. İlgili metot için uygun örnek verildi ve bahsi geçen iki metot için yaklaşık çözüm bulundu. Dördüncü bölümde problemin Varyasyonel iterasyon ve basit ardışık yaklaşıklar metodu ile elde edilen yaklaşık çözüm hakkında bilgi verildi. Beşinci bölüm sonuç bölümü olup bu bölümde problemin yaklaşık çözümleri ile kesin çözümü mukayese edildi.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde varyasyonel iterasyon teorisinden, geciken değişkenli diferansiyel denklemlerden, geciken değişkenli diferansiyel denklemlerin modellemelerinden ve uygulama alanlarından ayrıca integral denklemler, integral denklemlerin çeşitleri ve sınıflandırılmaları ele alınmıştır.

2.1. Varyasyonel İterasyon Teorisi

2.1.1. Varyasyon hesabında birinci problem

Üç değişkenli bir fonksiyonumuz olduğunu ve (a, y_0) dan (a, y_1) e giden bir $y(x)$ fonksiyonunu

$$\int_a^b f[x, y(x), y'(x)]dx \tag{2.1}$$

bir maksimum ya da minimum olacak şekilde seçmek istediğimizi varsayalım. Denklem (2.1)'i maksimum yada minimum yapan y fonksiyonuna stasyoner fonksiyon denir. Bu bölümde problemi, ilgili bir diferansiyel denklemi çözmek için stayoner fonksiyon bulmaya indirgeyecek bir koşul türeteceğiz.

$y = u(x)$ denklem (2.1) için stasyoner fonksiyon olsun. Yani $u(x)$,

$$\int_a^b f[x, y, y']dx$$

ifadesini maksimize ve minimize eder. u fonksiyonunu bulmak için bir koşul elde etmek isteyelim, böyle bir koşulu geliştirmek için

$$y = u(x) + \varepsilon\mu(x) \tag{2.2}$$

şeklinde fonksiyonları ele alacağız. Burada ε sabit ve $\mu(x)$, $[a, b]$ aralığında sürekli olan ve aşağıdaki koşulları sağlayan fonksiyondur.

$$\mu(a) = \mu(b) = 0$$

Böyle bir μ fonksiyonuna kabul edilebilir fonksiyon denir. Denklem (2.2) de yer alan fonksiyon (a, y_0) ve (b, y_1) noktalarından geçer.

Denklem (2.2) denklem (2.1) de yerine koyulursa,

$$\int_a^b f[x, u(x), \varepsilon\mu(x), u^{'}(x), \varepsilon\mu^{'}(x)]dx \tag{2.3}$$

elde edilir. Herhangi bir kabul edilebilir fonksiyon $\mu(x)$ için $u(x)$ problemin sabit bir çözümü olduğundan bu integral ε nun bir fonksiyonu olarak düşünülebilir.

$$I(\varepsilon) = \int_a^b f[x, u(x) + \varepsilon\mu(x), u^{'}(x) + \varepsilon\mu^{'}(x)]dx \tag{2.4}$$

$u(x)$, problemin bir çözümü olduğundan, (2.4) integrali $\varepsilon = 0$ iken maksimum veya minimum değere sahiptir. I($\boldsymbol{\varepsilon}$) tek değişken olan $\boldsymbol{\varepsilon}$' nun fonksiyonu olduğundan $\varepsilon = 0$ iken $I^{'}(\varepsilon) = 0$ olmasını bekleriz.

$$\frac{dI}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = 0$$

$\frac{dI}{d\varepsilon}$ nu hesaplayalım ve $\varepsilon = 0$ değerini yerine koyalım

$$\frac{dI}{d\varepsilon} = \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial \varepsilon}\right] dx$$

$$\frac{dx}{d\varepsilon} = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon}[u(x) + \varepsilon\mu(x)] = \mu(x)$$

$$\frac{\partial y'}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon}[u'(x) + \varepsilon\mu'(x)] = \mu'(x)$$

olduğundan

$$\frac{dI}{d\varepsilon} = \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y}\mu(x) + \frac{\partial f}{\partial y'}\mu'(x)\right] dx$$

$\varepsilon = 0$ yerine koyarsak

$$\frac{dI}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y}\mu(x) + \frac{\partial f}{\partial y'}\mu'(x)\right] dx \qquad (2.5)$$

eşitliğin sağında, ikinci terimin kısmi integrali alınırsa

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y'}\mu'(x)dx = \frac{\partial f}{\partial y'}\mu(x) \; - \int_a^b \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\mu(x)dx$$

$\mu(a) = \mu(b) = 0$ olduğundan

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y'}\mu'(x)dx = -\int_a^b \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\mu(x)dx \qquad (2.6)$$

Denklem (2.6) nın denklem (2.5) de yerine konulmasıyla

$$\frac{dI}{d\varepsilon}\,|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y}\mu(x)|_a^b - \frac{d}{dx}(\frac{\partial f}{\partial y'})\mu(x)\right]dx=0$$

bu integral şu şekilde yazılabilir.

$$\int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right]\mu(x)dx = 0$$

μ, $[a,b]$ aralığında türevi sürekli olan ve a ile b de yok olan herhangi bir fonksiyon olduğundan yukardaki denlemde $a \leq x \leq b$ için köşeli parantez içindeki ifade sıfıra eşit olmalıdır.

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=0 \tag{2.7}$$

Bu denkleme Euler denklemi denir ve aranılan koşul bu denklemdir. Denklem (2.1) için stasyoner fonksiyon; denklem (2.7) yi sağlamalıdır.

Tanım: (Fonksiyonel)

Denklem (2.1) de görülmekte olan, bağıl değişkenler (fonksiyonlar) ve türevlerine bağlı integral ifadelerine fonksiyonel denir. Bir fonksiyonel I, y vektör uzayından R reel sayı alanında bir operatördür.

$$I: y \to R$$

Tanım: (Fonksiyonelin birinci bileşeni)

Denklem (2.2) de görülmekte olan $\varepsilon\mu(x)$ fonksiyonu $u(x)$ konfigurasyonunda bir değişimi ifade eder ve aşağıdaki şekilde gösterilebilir.

$$\delta u(x) = \varepsilon\mu(x) \tag{2.8}$$

δu ifadesine u(x) fonksiyonunun birinci değişimi denir. Bu durumda denklem (2.1) de görülmekte olan fonksiyonun değişimi denklem (2.8) in yardımıyla aşağıdaki şekilde gösterilebilir.

$$\delta I = \int_a^b \left[\frac{df}{dx}\delta u + \frac{df}{dy'}\delta u'\right] dx \tag{2.9}$$

Bu denklemde yer alan $\delta u'$ ifadesi için

$$\delta(\frac{du}{dx}) = \frac{d}{dx}(\delta u) \tag{2.10}$$

bağıntısı kullanılabilir. Varyasyon (değişimi) gösteren δ operatörü için bazı özellikler aşağıdaki gibidir.

$$\delta\,(F_1 \pm F_2) = \delta F_1 \pm \delta F_2$$

$$\delta(F_1F_2) = F_1\delta F_2 \pm F_2\delta F_1$$

$$\delta\left(\frac{F_1}{F_2}\right) = \frac{F_2\delta F_1 - F_1\delta F_2}{F_2^2},$$

$$\delta(FI)^n = n(FI)^{n-1}\delta F_1$$

Fonksiyonelin birinci değişimini gösteren (2.9) daki ifade denklem (2.10) ve kısmi integral tekniğinden yararlanılarak tekrar yazılır ve $\delta I = 0$ bağıntısı uygulanırsa ve $\delta(a) = \delta(b) = 0$ sınır koşulu ile

$$\int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y}\delta u + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta u'\right] dx = \int_a^b \delta u \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}(\frac{\partial f}{\partial y'})\right] dx \ = 0$$

İfadesi elde edilir ve Euler denklemi aynı şekilde buradan da elde edilebilir.

Bu bölümde, daha sonraki bölümlerde gerekli olan bazı kavram ve bilgiler verilecektir.

2.2. Geciken Değişkenli Diferansiyel Denklemler

$$x'(t) = f\left(t, x\big(t - \tau(t)\big)\right) \quad (0 \leq t \leq T) \tag{2.2.1}$$

diferansiyel denklemine birinci mertebeden sapan değişkenli lineer olmayan diferansiyel denklem denir. Burada $\tau(t), (0 \leq t \leq T)$ değişkenin sapanı olarak adlandırılır. Eğer $\tau(t) \geq 0$ ise (2.2.1) denklemine geciken değişkenli diferansiyel denklem; $\tau(t) =$ sabit olduğunda ise

$$x'(t) = f\big(t, x(t - \tau)\big) \quad (0 \leq t \leq T) \tag{2.2.2}$$

diferansiyel denklemine sabit geciken değişkenli diferansiyel denklem denir. $\tau = \tau(t)$ olduğunda denklem geciken değişkenli diferansiyel denklem adını alır.

(2.2.2) diferansiyel denklemi $[0, T]$ aralığında

$$x(t) = \varphi(t) \quad (-\tau \leq t \leq 0) \tag{2.2.3}$$

şartıyla beraber bir başlangıç değer problemi oluşturur. Burada $\varphi(t), (-\tau \le t \le 0)$ fonksiyonuna başlangıç fonksiyonu adı verilir. $\tau \equiv 0$ olduğunda (2.1.3) şartının $x(0) = \varphi(0)$ olduğu aşikardır.

$\tau(t) > 0$ olmak üzere,

$$x''(t) = f\Big(t, x\big(t - \tau(t)\big)\Big), (0 \le t \le T) \qquad (2.2.4)$$

diferansiyel denklemine ikinci mertebeden sapan değişkenli lineer olmayan diferansiyel denklem denir. Bu denklem de birinci mertebeden diferansiyel denklemde olduğu gibi $\tau(t)$ nin durumuna göre sabit geciken değişkenli diferansiyel denklem, değişken geciken değişkenli diferansiyel denklem gibi isimler alacaktır.

(2.2.4) diferansiyel denklemi $[0, T]$ aralığında

$$x(t) = \varphi(t) \quad (-\tau \le t \le 0)$$

$$x'(t) = \varphi'(t) \quad (-\tau \le t \le 0)$$

şartlarıyla beraber bir başlangıç değer problemi oluşturur.

Diğer yandan,

$$x''(t) + a(t)x(t - \tau) = f(t), \quad (0 \le t \le T, \tau \ge 0) \qquad (2.2.5)$$

diferansiyel denklemine lineer diferansiyel denklem denir. Bu denklem $[0, T]$ aralığında

$$x(t) = \varphi(t) \quad (-\tau \le t \le 0), \; x(T) = x_T$$

sınır şartlarıyla beraber bir sınır değer problemi oluşturur.

2.3. Geciken Değişkenli Diferansiyel Denklemlerle Modelleme

Günlük hayatta her alanda karşılaştığımız problemlerin çözümü için matematiksel modelleme yapılırken, çoğunlukla

$$\begin{cases} y'(t) = f\big(t, y(t)\big), & t \geq t_0, \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{2.3.1}$$

denklemi ile verilen başlangıç değer problemleri kullanılır.

Örneğin, bir topluluktaki nüfus artış miktarını tahmin etmek istediğimizi varsayalım; öncelikle bu grubu her türlü dış etkiden uzak, izole bir kapalı kutu halinde düşünelim. $y(t)$, t zamanındaki nüfus miktarını veriyor olsun. Aynı zamanda büyüme hızının, o andaki belirlenecek mevcut nüfusa orantılı olduğunu kabul edelim. Bu oranı k gibi bir sabit ile gösterelim. Bu durumda nüfus değişimini $y'(t)$ ile gösterecek olursak, sistemi

$$\begin{cases} y'(t) = k.y(t), & t \geq t_0, \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

denklemi ile modelleyebiliriz.

Adi diferansiyel denklemler kullanılarak, modelleme yapılması istenen sistemlerde mevcut gecikmeler daima göz ardı edilir, ancak sistemdeki çok küçük gecikme miktarları bile, sistemin mevcut durumda çok büyük değişiklikler görülmesine neden olabilir. Bu nedenle karşılaşılan problemlerin birçoğunun modellemesi yapılırken, gecikmeli diferansiyel denklemlerin kullanılması daha gerçekçidir.

Nüfus artışını belirlemek için yaptığımız önceki modellemede, grubun sadece o anki mevcut nüfusla orantılı olduğunu kabul ettik. Ancak çoğu zaman sistemin daha önceki bir zamandaki durumu, sistemin gelecekteki durumunu büyük ölçüde etkiler. Sistemlerin geçmişteki durumlarını belirtmek için, gecikme miktarlarını kullanırız ve böylece modelleme yaparken sistemlerin geçmişe olan bağımlılıklarını da hesaba katmış oluruz. Bu durumda topluluktaki nüfus değişiminin o andaki nüfus ile değil de, belirli bir süre τ önceki nüfus ile orantılı olduğunu kabul ettiğimizde

$$\begin{cases} y'(t) = k.y(t-\tau), & t \geq t_0\,,\ \ \tau > 0, \\ y(t_0) = \varphi(t), & t_0 - \tau \leq t \leq t_0, \end{cases}$$

gecikmeli diferansiyel denklemini elde ederiz (Günel 2006).

2.4. Gecikmeli Diferansiyel Denklemlerin Uygulama Alanları

Bu kısımda gecikmeli diferansiyel denklemlerin kullanıldığı fiziksel ve biyolojik sistemler üzerine örnekler vererek, neden gecikmeli diferansiyel denklem teorisine ihtiyaç duyulduğunu açıklamaya çalışacağız.

2.4.1. Popülasyon dinamiği

İzole edilmiş bir ortamda, bir hayvan kolonisinin herhangi bir t anındaki popülasyonunu $y(t)$ ile gösterirsek, popülasyonun büyümesini matematiksel olarak aşağıdaki gibi belirleyebiliriz.

$$\begin{cases} y'(t) = \alpha y(t), & t \geq t_0\,, \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{2.4.1.1}$$

(2.4.1.1) ile verilen diferansiyel denklemin çözümü $y(t) = y_0 e^{\alpha t}$ şeklindedir ve popülasyonun üstel sınırsız artış sağladığı açıkça görülmektedir. Bundan dolayı, belli bir zaman sonra aşırı artan popülasyon sonucu kıtlık oluşacak ve kolonide ani ölümler görülecektir. Bu modelleme popülasyondaki büyüme oranının sadece doğumlarla ilgili olduğu düşünülmektedir. Ancak kolonideki ölümlerin de popülasyon dinamiğini etkileyeceği düşünülmelidir. Bu nedenle sistemi,

$$\begin{cases} y'(t) = \alpha\left[1 - \frac{y(t)}{p}\right] y(t), \quad t \geq t_0\,, \\ \qquad y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{2.4.1.2}$$

diferansiyel denklemiyle modellemek daha doğru olacaktır.

(2.4.1.2) denkleminde $1 - \frac{y(t)}{p}$ değeri, biyolojik anlamda sistem dengesini sağlayan faktör olarak verilir. Bu başlangıç değer probleminde α ve p değerleri pozitif sabit olarak kabul edilirse çözüm aşağıdaki gibi olacaktır:

$$y(t) = \frac{y_0(t)e^{\alpha t}}{1 + \frac{y_0}{p}(e^{\alpha t} - 1)}$$

Şimdi topluluktaki nüfus değişiminin o andaki nüfus ile değil de, belirli bir süre τ önceki nüfus ile orantılı olduğunu kabul edelim. Bu durumda aşağıda ile verilen gecikmeli diferansiyel denklemi elde ederiz.

$$\begin{cases} y'(t) = \alpha y(t)\left[1 - \frac{y(t-\tau)}{p}\right], \qquad t \geq t_0\,, \\ y(t_0) = \varphi(t), \quad t_0 - \tau \leq t \leq t_0, \quad \varphi_0 > 0, \end{cases} \tag{2.4.1.3}$$

(2.4.1.3) gecikmeli diferansiyel denklemi literatürde çok sıkça geçmektedir. Wright, $\tau = 1$ ve $p = 1$ için bu denklemin özel bir halini incelemiştir (Wright 1946).

$$\begin{cases} y'(t) = \alpha y(t)\{1 - y(t-1)\}, \quad t \geq 0 \\ y(t) = \varphi(t), \qquad t \leq 0, \qquad \varphi_0 > 0, \end{cases} \tag{2.4.1.4}$$

Kuang (2.4.1.4) denklemini popülasyon dinamiğini modellemek için kullanmıştır (Kuang 1993). Bu model Verhulst-Pearl eşitliği olarak bilinmektedir.

Özel olarak, Lord Cherwell (1946) (2.4.1.4) denkleminde $\alpha = \log_e 2$ alarak, belirli bir aralık içindeki asal sayıların dağılımını incelemiştir (Wright 1946).

2.4.2. Kontrol sistemler

Geri beslemeli kontrol sistemlerinin hemen hemen tümünde gecikme zamanı bulunur. Gecikmeli diferansiyel denklem kullanılarak bir kontrol sisteminin modellenmesine ilk örneklerden biri, Minorsky'nın II. Dünya Savaşı sırasında gemilerin dalgalardan dolayı sağa sola yalpalanmasını önleyebilmek için yaptığı çalışmadır. Bu modele göre θ, geminin denge durumunda bulunduğu normal pozisyon ile yana yatma durumundaki pozisyonu arasındaki açıyı göstersin. Minorsky' nın yaptığı modellemeye göre;

Gemi, denge durumunda kalabilmek için ağırlık sağlaması amacıyla içi suyla doldurulup boşaltılabilen tanklar içermektedir. Bununla birlikte geminin yana yatmasını engelleyebilmek için, suyun bir tanktan diğerine pompalanarak boşaltılmasını sağlayan bir mekanizma bulunmaktadır. Böylece dalgaların gemi üzerindeki etkisi ortadan kaldırılmaya çalışılmaktadır. Doğal olarak, bu mekanizmanın çalışması belli bir t anında aniden gerçekleşen bir olay değildir, yani suyun bir tanktan diğerine boşaltılabilmesi için belli bir süre geçmesi gerekir. Bu süre τ ile gösterilecek olursa, geminin dengede kalabilmesi, geminin $t-\tau$ anındaki durumuna bağlıdır. Minorsky, tüm bunları göz önünde bulundurarak yapmış olduğu modelleme sonucu, aşağıdaki denklemi elde etmiştir (Driver 1977).

$$\begin{cases} m\theta''(t) + b\theta'(t) + q\theta'(t-\tau) + k\theta(t) = 0\ , & t \geq 0 \\ \theta(t) = \phi(t), & t \leq 0 \end{cases}$$

2.5. İntegral Denklemler

İntegral işareti altında bilinmeyen fonksiyon ihtiva eden denkleme integral denklem denir. Bizim çalışacağımız integral denklemler

$$x(t) = f(t) + \int_a^b K(t,s)x(s)ds$$

şeklindedir. Burada $f(t), (0 \leq t \leq T)$ ve $K(t,s), (0 \leq t, s \leq T)$ bilinen fonksiyonlar, $x(t), (0 \leq t \leq T)$ ise bilinmeyen fonksiyondur. $f(t)$ fonksiyonu integral denklemin serbest terimi, $K(t,s)$ fonksiyonu ise integral denklemin çekirdeğidir. Eğer bilinmeyen fonksiyon lineer olursa bu integral denklem lineer integral denklem adını alır.

Bu denklemi sağlayan $x(t)$ fonksiyonuna integral denklemin çözümü denir. Bir başka deyişle integral denklemi çözmek demek, $x(t)$ fonksiyonunu bulmak demektir.

$C[0,T]$ ile $[0,T]$ aralığında tanımlı sürekli $x(t)$ fonksiyonlarının uzayı gösterilecektir. Bu uzayda norm,

$$\|x\|_{C[0,T]} = \max_{0 \leq t \leq T} |x(t)|$$

ile tanımlanır. $C[0,T]$ uzayı bu norma göre bir Banach uzayıdır. (1) probleminin çözümünün varlığı ve tekliği bu uzayda incelenecektir.

2.6. İntegral Denklemlere Genel Bakış ve Tarihçe

İntegral denklemlerle ilk uğraşlar XIX. yüzyılın ilk yarısında başlamıştır. Bir mekanik problemin incelendiği 1823 yılında Abel'in ilk defa integral denkleme rastladığı bilinmektedir.

2.7. İntegral Denklemlerin Sınıflandırılması

Bu bölümde integral denklemlerin temel kavramlar açısından öncelikle lineer olan veya lineer olmayan, tekil olan veya olmayan integral denklemler olarak sınıflandırılması. Ayrıca yapılarına göre sınıflandırılması, homojen olup olmadığına göre sınıflandırılması birde bazı yardımcı formüller verilmiştir.

2.7.1. Lineer olan veya lineer olmayan integral denklemler

İntegral denklemler çeşitli şekillerde sınıflandırılmışlardır. Temel kavramlar açısından öncelikle, lineer integral denklemler ve lineer olmayan integral denklemler olarak iki büyük sınıfa ayrılırlar.

$u(x)$ bilinmeyen fonksiyon olmak üzere,

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)u(t)dt$$

yapısında bir integral denklemde, $u(x)$ fonksiyonunun lineer olması halinde, integral denklem de lineer integral denklem adını almaktadır.

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)u^n(t)dt$$

integral denkleminde ise $u(x)$ bilinmeyen fonksiyonunun n. kuvveti bulunduğundan, lineer olmayan bir integral denklem olmaktadır.

Bunun gibi, daha genel olarak,

$$u(x) = f(x) + \int_a^x \phi[x, t, u(t)]dt$$

integral denklemi de lineer olmayan integral denklem olmaktadır.

2.7.2. Tekil olan veya olmayan integral denklemler

İntegral denklemlerin bir sınıflandırılması da $K(x, t)$ çekirdek fonksiyonunun sürekliliği ile ilgilidir. $K(x, t)$ fonksiyonu $a \leq x \leq b$; $a \leq t \leq b$ aralığında sürekli ise integral denklem tekil (singüler) olmayan bir integral denklemdir. Eğer $K(x, t)$ fonksiyonu bu aralıkta sürekli değilse, integral denklem tekil (singüler) integral denklem sınıfına girecektir.

Örneğin; $0 \leq n \leq 1$ olmak üzere,

$$f(x) = \int_0^x \frac{u(t)dt}{(x-t)^n}$$

şeklindeki bir integral denklem, bu sınıfa girmektedir.

Ayrıca, integral sınırlarından en az birinin sonsuz olması halinde de denklem, tekil integral denklem sınıfında olacaktır.

$$f(x) = \int_0^\infty \sin xt \, u(t)dt$$

ve

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-xt} u(t)dt$$

denklemleri bu türün birer örneğini oluşturmaktadırlar. Bunlardan ilkinde, denklemin ikinci yanı ile tanımlanan $f(x)$ fonksiyonu, $u(x)$ in Fourier Sinüs Transformasyonu, ikincisinde ise $u(x)$ in Laplace Transformasyonu olarak adlandırılır.

2.7.3. İntegral denklemlerin yapılarına göre sınıflandırılması

İntegral denklemler, sınıflarına göre üçe ayrılırlar. Bilinmeyen fonksiyonun $x(t)$, çekirdek fonksiyonun $K(x,t)$ olduğu,

$$\phi(x) = \int_a^b K(x,t)u(t)dt \qquad (2.7.3.1)$$

şeklinde bir integral denkleme I. Cins İntegral Denklem denir. Bilinmeyen fonksiyon sadece integral içinde mevcuttur. Burada $\phi(x)$ fonksiyonu, verilmiş fonksiyondur. Benzer şekilde,

$$\phi(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt \qquad (2.7.3.2)$$

şeklindeki bir integral denklem de yine I. cins integral denklemdir. Burada da $\phi(x)$ ve $f(x)$ önceden verilmiş olan fonksiyonlardır.

Ancak bu denklemler,

$$\phi(x) - f(x) = \psi(x)$$

olmak üzere,

$$\psi(x) = \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

şeklinde ifade edilerek, (2.7.3.1) denklemi yapısında yazılabilirler.

$$x^2 = \int_0^1 (x-t)u(t)dt$$

$$e^x = x - \int_0^{1/2} x^2 t u(t)dt$$

gibi denklemler bu cins için birer örnektir.

$$u(x) = \int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{2.7.3.3}$$

ve

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{2.7.3.4}$$

şeklindeki integral denklemler ise II. Cins İntegral Denklem'ler sınıfını oluşturmaktadır. Görüldüğü gibi, bilinmeyen $u(x)$ fonksiyonu, integralin hem içinde hem dışında bulunmaktadır.

$$u(x) = \int_0^x e^{x+t} u(t)dt$$

ve

$$u(x) = 1 + x + \int_0^2 \sin x + t\, u(t)dt$$

bu tür denklemlere birer örnektir.

Bu iki cins integral denklemlerden başka $\phi(x), f(x)$ ve $K(x,t)$ fonksiyonları bilindiğine göre

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt \qquad (2.7.3.5)$$

şeklinde integral denklemlere ise III. Cins İntegral Denklem denilmektedir. Örneğin,

$$xu(x) = 1 - e^{-x} + \int_0^1 x^2t^2u(t)dt$$

denklemi, III. cins bir integral denklemdir.

2.7.4. Homojen olan veya olmayan integral denklemler

İntegral denklemler bir de, bilinmeyen $u(x)$ fonksiyonuna göre homojen olup olmadıkları açısından sınıflandırılmaktadırlar. II. cins integral denklemler için söz konusu böyle bir sınıflandırmada, (2.7.3.3) ile verilen,

$$u(x) = \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

integral denklemi, Homojen İntegral Denklem olarak adlandırılır. Homojenliği bozucu bir $f(x)$ fonksiyonu bulunduğu, (2.7.3.4) ile verilen

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

gibi denklemlere ise Homojen Olmayan İntegral Denklem denir.

$$u(x) = \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

Homojen integral denkleminin, kolayca görülebileceği gibi $u(x) \equiv 0$ olan bir çözümü vardır. Buna aşikar çözüm denir.

Homojen integral denklemler, daha genel bir yapıya sahip

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

şeklindeki bir integral denklemin, $f(x) \equiv 0$ olması haline uyan özel bir durum olarak da göz önüne alınabilirler.

2.8. Bazı Özel İntegral Denklemler

Bazı özel lineer integral denklemler aşağıda sınıflandırılmıştır:

1.

$$x(t) = f(t) + \int_0^T K(t,s)x(s)ds \qquad (2.8.1)$$

biçimindeki integral denkleme lineer Fredholm integral denklemi,

$$Fx \equiv \int_0^T K(t,s)x(s)ds$$

operatörüne ise Fredholm operatörü denir.

2.

$$x(t) = f(t) + \int_0^t K(t,s)x(s)ds \qquad (2.8.2)$$

denklemi lineer Volterra integral denklemi ve

$$Vx \equiv \int_0^t K(t,s)x(s)ds$$

operatörü ise Volterra operatörü olarak isimlendirilir.

$$K^*(t,s) = \begin{cases} K(t,s) & ,0 \le t \le T, \quad 0 \le s \le t \\ 0 & ,0 \le t \le T, \quad t \le s \le T \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa Volterra integral denklemi,

$$x(t) = f(t) + \int_0^T K^*(t,s)x(s)ds$$

Fredholm integral denklemine dönüşür..

3.

$$x(t) = f(t) + \int_0^t K_1(t,s)x(s)ds + \int_0^T K_2(t,s)x(s)ds \qquad (2.8.3)$$

denklemine lineer Fredholm-Volterra integral denklemi denir. Bu integral denklemi de

$$K^*(t,s) = K_1^*(t,s) + K_2(t,s)$$

$$K_1^*(t,s) = \begin{cases} K_1(t,s) & ,0 \le s \le t \\ 0 & ,t \le s \le T \end{cases}$$

tanımlamaları sonrasında

$$x(t) = f(t) + \int_0^T K^*(t,s)x(s)ds$$

Fredholm integral denklemi olarak yazılabilir. Burada yine Volterra operatörünün özelliği kaybolmuştur.

Buna göre, eğer Volterra operatörünün özelliğinden istifade olunacaksa (2.8.2) ve (2.8.3) integral denklemlerinden yararlanmak daha iyi olur.

Diferansiyel denklemlerde olduğu gibi burada da incelenen integral denklemin çözümü $x(t) = \psi(t), (0 \leq t \leq T)$ fonksiyonudur. Bu fonksiyon incelenen integral denklemi özdeşliğe çevirir.

Özel olarak,

$$K(t,s) = a(t)b(s)$$

şeklinde alınırsa, bu taktirde

$$Fx \equiv a(t)\int_0^T b(s)x(s)ds$$

integral operatörüne bozulmuş çekirdekli Fredholm integral operatörü denir. Açıktır ki Fredholm operatörü (benzer şekilde Volterra operatörü) fonksiyonlar uzayının herhangi bir elemanını bir fonksiyona çevirir.

Fredholm operatörünün özel hali olan

$$F_0 x \equiv \int_0^T b(s)x(s)ds$$

şeklindeki operatör ise fonksiyonlar uzayının elemanını reel sayıya dönüştürür. Bu özellikte olan Fredholm operatörüne Fredholm fonksiyoneli denir.

Tezde incelenecek olan Fredholm integral denklemi

$$x(t) = f(t) + a(t)F_0x$$

şeklinde, yani bozulmuş çekirdekli integral denklem olacaktır. Böyle integral denklemlerin $F_0a \neq 1$ olması halinde çözümünün (kesin çözümünün) varlığı aşağıdaki Lemma ile ispatlanır.

Lemma 2.8.1: $F_0a \neq 1$ olması halinde

$$x(t) = f(t) + a(t)F_0x \tag{2.8.4}$$

Fredholm integral denkleminin bir çözümü vardır.

İspat: $c \in R$ olmak üzere $F_0x = c$ olduğundan Fredholm integral denklemi

$$x(t) = f(t) + a(t)c$$

şeklinde yazılır. Burada $f(t)$ ve $a(t)$ bilinen fonksiyonlar c sabittir. Ancak c nin değeri bilinmemektedir. O halde bu c değerini tespit edelim.

$$c = F_0f + cF_0a$$

cebirsel denkleminden yararlanılır. Hipotezden $F_0a \neq 1$ olup

$$c = \frac{F_0f}{1 - F_0a}$$

olur. Buradan,

$$x(t) = f(t) + \frac{a(t)}{1 - F_0 a} F_0 f$$

elde edilir. Böylece $x(t)$ fonksiyonu belirlenmiştir. Yani (2.8.4) denkleminin kesin çözümüdür.

2.9. Yardımcı Formüller

Burada, daha sonraki bölümlerde problemin çözümünde karşılaşılan bazı integrallerin hesaplanmasında kolaylık sağlayan formül ve interpolasyon polinomları verilmiştir.

1. $\int_0^t \int_0^\sigma F(s) ds d\sigma = \int_0^t (t-s)F(s)ds$
2. $\sqrt{t} \approx 2.83824t - 3.85786t^2 + 2.01962t^3$
3. $\sqrt{1 + 16t - 8\sqrt{t}} \approx 1 - 2.64704t + 12.56854t^2 - 7.92150t^3$
4. $\sqrt{t}\,\sqrt{1 + 16t - 8\sqrt{t}} \approx 1.16176t + 3.85786t^2 - 2.01962t^3$

Burada 2,3 ve 4 ün sağ tarafındaki ifadeler sol taraftaki ifadelere denk olan interpolasyon polinomlarıdır.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde, tezde incelenen (1) sınır değer problemine denk olan Fredholm-Volterra integral denklemi ve Fredholm integral denklemi bulunacaktır.

3.1. $(\mathbf{1})$ Problemi için Denk İntegral Denklemin Oluşturulması

3.1.1 $(\mathbf{1})$ Probleminin Denk Fredholm-Volterra İntegral Denklemine Dönüştürülmesi

$x^*(t)$ fonksiyonunun, (1) sınır değer probleminin çözümü olduğunu kabul edelim. Bu $x^*(t)$ fonksiyonun

$$\tilde{h}(t) = \varphi(0) + \big(x_T - \varphi(0)\big)\frac{t}{T} - \frac{t}{T}\int_0^T (T-s)f(s)ds + \int_0^t (t-s)f(s)ds$$

olmak üzere

$$x(t) = \tilde{h}(t) + \tfrac{t}{T}\textstyle\int_0^T (T-s)a(s)x(s-\tau(s))ds - \int_0^t (t-s)a(s)x(s-\tau(s))ds \tag{3.1.1.1}$$

integral denklemin de çözümü olduğunu gösterelim. Bunun için (1) sınır değer probleminde $x(t)$ yerine $x^*(t)$ yazıp $[0,T]$ aralığında integral alındığında

$$\frac{d}{dt}x^*(t) = \frac{d}{dt}x^*(0) - \int_0^t a(s)x^*(s-\tau(s))ds + \int_0^t f(s)ds$$

olur. Tekrar bu ifadeyi $[0,T]$ aralığında integre edersek

$$x^*(t) = \varphi(0) + t\frac{d}{dt}x^*(0) - \int_0^t \int_0^\sigma a(s)x^*(s-\tau(s))dsd\sigma + \int_0^t \int_0^\sigma f(s)dsd\sigma \tag{3.1.1.2}$$

elde edilir. (3.1.2) ye (2.9) daki yardımcı formüllerden 1. si uygulandığında

$$x^*(t) = \varphi(0) + t\frac{d}{dt}x^*(0) - \int_0^t (t-s)a(s)x^*(s-\tau(s))ds + \int_0^t (t-s)f(s)ds \tag{3.1.1.3}$$

olur. $x^*(T) = x_T$ sınır şartı kullanıldığında

$$x_T = \varphi(0) + T\frac{d}{dt}x^*(0) - \int_0^T (T-s)a(s)x^*(s-\tau(s))ds + \int_0^T (T-s)f(s)ds$$

elde edilir. Buradan,

$$\frac{d}{dt}x^*(0) = \frac{x_T - \varphi(0)}{T} + \frac{1}{T}\int_0^T (T-s)a(s)x^*(s-\tau(s))ds - \frac{1}{T}\int_0^T (T-s)f(s)ds$$

yazılır. Bu değer (3.1.1.3) de yerine yazılarak

$$\begin{aligned} x^*(t) = \varphi(0) + \big(x_T - \varphi(0)\big)\frac{t}{T} + \frac{t}{T}\int_0^T (T-s)a(s)x^*\big(s-\tau(s)\big)ds \\ -\frac{t}{T}\int_0^T (T-s)f(s)ds - \int_0^t (t-s)a(s)x^*(s-\tau(s))ds \\ +\int_0^t (t-s)f(s)ds \end{aligned}$$

bulunur. Böylece,

$$x^*(t) = \tilde{h}(t) + \frac{t}{T}\int_0^T (T-s)a(s)x^*\big(s-\tau(s)\big)ds - \int_0^t (t-s)a(s)x^*(s-\tau(s))ds$$

olduğu görülür. O halde $x^*(t)$, (3.1.1.1) integral denkleminin çözümüdür.

Diğer yandan, $x_*(t)$ nin (3.1.1.1) integral denkleminin çözümü olduğu kabul edilsin. Kolayca gösterilebilir ki $x_*(t)$, (1) sınır değer probleminin de çözümüdür. Böylece (1) sınır değer problemi ile (3.1.1.1) integral denkleminin denk (eşdeğer) olduğu görülür.

(3.1.1.1) integral denklemi yeniden düzenlenerek daha kullanışlı bir integral denkleme dönüştürülür. Bunun için $\sigma = s - \tau(s)$ yazılırsa

$$x(t) = h(t) + \frac{t}{T}\int_0^{\lambda(T)} [T-\gamma(\sigma)]a\big(\gamma(\sigma)\big)x(\sigma)\gamma'(\sigma)d\sigma$$
$$- \int_0^{\lambda(t)} (t-\gamma(\sigma))a\big(\gamma(\sigma)\big)x(\sigma)\gamma'(\sigma)d\sigma$$

elde edilir. Burada,

$$h(t) = \tilde{h}(t) + \frac{t}{T}\int_{\lambda_0}^{0} \big(T-\gamma(\sigma)\big)a\big(\gamma(\sigma)\big)x(\sigma)\gamma'(\sigma)d\sigma$$
$$- \int_{\lambda_0}^{0} \big(t-\gamma(\sigma)\big)a\big(\gamma(\sigma)\big)x(\sigma)\gamma'(\sigma)d\sigma$$

dır. Nihayet,

$$K_1(\sigma) = [T-\gamma(\sigma)]a\big(\gamma(\sigma)\big)\gamma'(\sigma)$$

$$K(t,\sigma) = [t-\gamma(\sigma)]a\big(\gamma(\sigma)\big)\gamma'(\sigma)$$

denirse

$$x(t) = h(t) + \tfrac{t}{T}\int_0^{\lambda(T)} K_1(\sigma)x(\sigma)d\sigma - \int_0^{\lambda(t)} K(t,\sigma)x(\sigma)d\sigma \qquad (3.1.1.4)$$

integral denklemi elde edilir.

Burada,

$$F_\lambda x \equiv \int_0^{\lambda(T)} K_1(\sigma)x(\sigma)d\sigma$$

Fredholm operatörü ve

$$V_\lambda x \equiv -\int_0^{\lambda(t)} K(t,\sigma)x(\sigma)d\sigma$$

Volterra tipli integral operatöründen yararlanarak

$$x(t) = h(t) + \tfrac{t}{T}F_\lambda x + V_\lambda x \qquad (3.1.1.5)$$

Fredholm-Volterra integral denklemi elde edilir. Bu denklem, (1) problemine denk olan Fredholm-Volterra integral denklemidir.

3.1.2. (1) Probleminin Denk Fredholm İntegral Denklemine Dönüştürülmesi

(1) problemine denk olan (3.1.1.1) integral denkleminde ilk integrali parçalayarak

$$x(t) = \tilde{h}(t) + \frac{t}{T}\int_0^t (T-s)a(s)x\big(s-\tau(s)\big)ds + \frac{t}{T}\int_t^T (T-s)a(s)x\big(s-\tau(s)\big)ds$$
$$- \int_0^t (t-s)a(s)x(s-\tau(s))ds$$

yazılır. Buradan,

$$x(t) = \tilde{h}(t) + \int_0^t \left[\frac{t(T-s)}{T} - (t-s)\right] a(s)x\big(s-\tau(s)\big)ds$$
$$+\frac{t}{T}\int_t^T (T-s)a(s)x^*\big(s-\tau(s)\big)ds$$

veya $G(t,s)$ Green fonksiyonu olmak üzere

$$x(t) = \tilde{h}(t) + \int_0^T G(t,s)a(s)x\big(s-\tau(s)\big)ds$$

bulunur. Burada $G(t,s)$ Green fonksiyonu

$$G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{(T-t)s}{T} & ,0 \le s \le t \\ \dfrac{(T-s)t}{T} & ,t \le s \le T \end{cases}$$

şeklindedir. $G(t,s)$ $(0 \le s \le t)$ Green fonksiyonu pozitif, simetrik, sürekli ve

$$|G(t,s)| \le \tfrac{T}{4} \qquad , \qquad \int_0^T |G(t,s)| \le \tfrac{T^2}{8}$$

özelliklerini sağlar. Son integral denklemde $\sigma = s - \tau(s)$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$x(t) = h(t) + \int_0^{\lambda(T)} G(t,\gamma(\sigma))a\big(\gamma(\sigma)\big)\gamma'(\sigma)x(\sigma)d\sigma \qquad (3.1.1.6)$$

olur. Bu ise bir Fredholm integral denklemidir.

Böylece (1) problemi (3.1.1.5) ve (3.1.1.6) integral denklemlerine denk olduğundan (1) problemi yerine (3.1.1.5) veya (3.1.1.6) integral denklemleri incelenecektir.

3.2 Örnek

(1) probleminin özel hali olan

$$\left.\begin{aligned} x''(t)+tx\left(t-\tfrac{1}{2}\sqrt{t}\right)&=2t^3-2t^{\frac{5}{2}}-\tfrac{t^2}{2}-\tfrac{1}{2}t^{3/2}+4, \quad (0\le t\le 1)\\ x(t)=0 \quad (-1/16\le t\le 0),&\quad x(1)=1 \end{aligned}\right\} \qquad (3.1.1.7)$$

sınır değer problemi göz önüne alınsın. Burada $a(t)=t, f(t)=2t^3-2t^{\frac{5}{2}}-\frac{t^2}{2}-\frac{1}{2}t^{3/2}+4,\ \tau(t)=\frac{1}{2}\sqrt{t}\ge 0\ \ (0\le t\le 1)$ ve $\varphi(t)\equiv 0,\quad t\in\left[-\frac{1}{16},0\right]$ sürekli fonksiyonlardır. Ayrıca $t_0=\frac{1}{4}$ noktasında $\lambda(t)=t-\frac{1}{2}\sqrt{t}$ fonksiyonu sıfır değerini alır. Yani $\lambda(t_0)=0$ ve $\lambda(t)\le 0\ \ (0\le t\le\frac{1}{4})$ ve $min\lambda(t)=-\frac{1}{16}$ dır. Şimdi,

$$\lambda(t)=\sigma\,,\qquad \sigma\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$$

denkleminde $t=\gamma(\sigma)$ çözümünü bulalım. Böylece,

$$t-\frac{1}{2}\sqrt{t}-\sigma=0$$

denkleminin $[0,1]$ aralığına ait olan bir kökü

$$t=\frac{1}{16}(1+\sqrt{1+16\sigma})^2=\gamma(\sigma)$$

şeklindedir. $\gamma'(\sigma)$ fonksiyonunun $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ aralığında sürekli diferansiyellenebildiği aşikardır. Böylece (3.1.1.7) denklemine ait olan bilinen fonksiyonların (1) problemi için verilen şartları sağladığı görüldü. Buna göre (3.1.1.7) problemi, (3.1.1.4) integral denkleminin özel halidir.

Şimdi (3.1.1.4) integral denkleminden yararlanarak (3.1.1.7) problemine denk olan integral denklemi yazalım. Önce (3.1.1.7) deki denklemi ard arda iki kez integre edersek

$$x(t) = t - t\int_0^1 (1-s)\left(2s^3 - 2s^{\frac{5}{2}} - \frac{s^2}{2} - \frac{1}{2}s^{3/2} + 4\right)ds$$

$$+ \int_0^t (t-s)\left(2s^3 - 2s^{\frac{5}{2}} - \frac{s^2}{2} - \frac{1}{2}s^{3/2} + 4\right)ds$$

$$+ t\int_0^{1/2} [1 - \frac{1}{16}\left(1+\sqrt{1+16\sigma}\right)^2$$

$$\frac{1}{16}\left(1+\sqrt{1+16\sigma}\right)^2 \frac{1+\sqrt{1+16\sigma}}{\sqrt{1+16\sigma}}]x(\sigma)d\sigma$$

$$-\int_0^{t-\sqrt{t}/2}[t - \frac{1}{16}\left(1+\sqrt{1+16\sigma}\right)^2$$

$$\frac{1}{16}\left(1+\sqrt{1+16\sigma}\right)^2 \frac{1+\sqrt{1+16\sigma}}{\sqrt{1+16\sigma}}]x(\sigma)d\sigma$$

bulunur. Bunu düzenleyerek,

$$x(t) = -\frac{2203}{2520}t - \frac{8}{63}t^{\frac{9}{2}} + 2t^2 - \frac{2}{35}t^{\frac{7}{2}} + \frac{t^5}{10} - \frac{t^4}{24}$$

$$+\frac{t}{4}\int_0^{1/2}\left[1+4\sigma+\frac{1+12\sigma}{\sqrt{1+16\sigma}}\right]x(\sigma)d\sigma$$

$$-\frac{t}{16}\int_0^{1/2}\left[1+12\sigma+16\sigma^2+\frac{1+20\sigma+80\sigma^2}{\sqrt{1+16\sigma}}\right]x(\sigma)d\sigma$$

$$-\frac{t}{4}\int_0^{t-\sqrt{t}/2}\left[1+4\sigma+\frac{1+12\sigma}{\sqrt{1+16\sigma}}\right]x(\sigma)d\sigma$$

$$+\frac{1}{16}\int_0^{t-\sqrt{t}/2}\left[1+12\sigma+16\sigma^2+\frac{1+20\sigma+80\sigma^2}{\sqrt{1+16\sigma}}\right]x(\sigma)d\sigma$$

veya

$$x(t)=-\frac{2203}{2520}t-\frac{8}{63}t^{\frac{9}{2}}+2t^2-\frac{2}{35}t^{\frac{7}{2}}+\frac{t^5}{10}-\frac{t^4}{24}$$
$$+\frac{t}{16}\int_0^{1/2}\left[3+4\sigma-16\sigma^2+\frac{3+28\sigma-80\sigma^2}{\sqrt{1+16\sigma}}\right]x(\sigma)d\sigma$$
$$-\frac{1}{16}\int_0^{t-\sqrt{t}/2}[(4t-1)+(16t-12)\sigma-16\sigma^2$$
$$+\frac{(4t-1)+(48t-20)\sigma-80\sigma^2}{\sqrt{1+16\sigma}}]x(\sigma)d\sigma \qquad (3.1.1.8)$$

elde edilir. Burada,

$$h(t)==-\frac{2203}{2520}t-\frac{8}{63}t^{\frac{9}{2}}+2t^2-\frac{2}{35}t^{\frac{7}{2}}+\frac{t^5}{10}-\frac{t^4}{24},$$

$$K_1(\sigma)=\frac{1}{16}\left(3+4\sigma-16\sigma^2+\frac{3+28\sigma-80\sigma^2}{\sqrt{1+16\sigma}}\right),$$

$$K(t,\sigma)=\frac{1}{16}\left[(4t-1)+(16t-12)\sigma-16\sigma^2+\frac{(4t-1)+(48t-20)\sigma-80\sigma^2}{\sqrt{1+16\sigma}}\right]$$

ve

$$F_\lambda x\equiv\int_0^{1/2}K_1(\sigma)x(\sigma)d\sigma \qquad ; \qquad V_\lambda x\equiv-\int_0^{t-\sqrt{t}/2}K(t,\sigma)x(\sigma)d\sigma$$

olduğu dikkate alınırsa (3.1.1.8) integral denklemi

$$x(t)=h(t)+tF_\lambda x+V_\lambda x \tag{3.1.1.9}$$

şeklinde yazılır. (3.1.1.8) veya (3.1.1.9) Fredholm-Volterra integral denklemi olup (3.1.1.7) problemine denktir.

3.3. Ardışık Yaklaşıklar Metodu

Ardışık Yaklaşıklar Metodu Basit Ardışık Yaklaşıklar ve Modified Ardışık Yaklaşıklar olmak üzere iki metottan oluşmaktadır. Ancak burada Basit Ardışık Yaklaşıklar metodu ile (1) probleminin bir tek çözümünün varlığı ve yaklaşık çözümün bulunması ile ilgili kural verilecektir.

3.3.1. Basit Ardışık Yaklaşıklar Metodu

Burada (1) probleminin bir tek çözümünün varlığını göstermek için (3.1.1.6) Fredholm integral denkleminden yararlanılacaktır. Ayrıca $x_0(t)$, $(0\le t\le T)$ keyfi sürekli fonksiyon olmak üzere $n=1,2,\ldots$ için

$$x_n(t)=h(t)+\int_0^{\lambda(T)}G\big(t,\gamma(\sigma)\big)a\big(\gamma(\sigma)\big)\gamma'(\sigma)x_{n-1}(\sigma)d\sigma \tag{3.3.1.1}$$

basit ardışık yaklaşıklarının bu çözüme yakınsadığı ispat edilecektir.

Önce $A(x)$ in sıkan operatör olması halinde

$$x = A(x) \tag{3.3.1.2}$$

operatör denkleminin çözümünün var ve tek olduğu aşağıdaki Lemma ile ispatlanacaktır.

$$\|A(x) - A(y)\| \leq \alpha\|x - y\|, \quad (\alpha < 1)$$

şartını sağlayan A operatörüne sıkan operatör denir.

Lemma 3.3.1.1: Kabul edelim ki E Banach uzayı ve $A: E \to E$ bir sıkan operator olsun. Bu takdirde (3.3.1.2) denkleminin E de bir tek x^* çözümü vardır ve $x_0 \in E$ elemanı sıfırıncı yaklaşık olmak üzere

$$x_n = A(x_{n-1}), \quad (n = 1\,, 2\,, \dots) \tag{3.3.1.3}$$

eşitlikleri ile tayin edilen $\{x_n\}$ basit ardışık yaklaşıkları bu çözüme yakınsar.

İspat: Önce $\{x_n\}$ dizisinin iyi tanımlı olduğunu ispat edelim. Yani, $x_n \in E$ olduğunu gösterelim. Kabulden dolayı $x_0 \in E$ dir. Farzedelim ki $x_{n-1} \in E$ olsun. $A(x)$ operatörü E de tanımlandığından ve $x_{n-1} \in E$ olduğundan $A(x_{n-1}) \in E$ olacaktır. (3.3.1.3) den

$$x_n = A(x_{n-1}) \in E$$

yazılır. Tümevarım metoduna göre $n = 1,2, \dots$ için $x_n \in E$ olduğu görülebilir.

Şimdi x_n dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. Bu amaçla,

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \|A(x_n) - A(x_{n-1})\| \leq \alpha\|x_n - x_{n-1}\|$$

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \alpha\|x_n - x_{n-1}\| \qquad (3.3.1.4)$$

eşitsizliğini kuralım. Burada $n = 1$ alınırsa

$$\|x_2 - x_1\| \leq \alpha\|x_1 - x_0\|$$

olur. Bu şekilde devamla,

$$\|x_n - x_{n-1}\| \leq \alpha^{n-1}\|x_1 - x_0\|$$

veya

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \alpha^n\|x_1 - x_0\|$$

elde edilir.

(3.3.1.4) den istifade edilirse

$$\|x_{n+k} - x_n\| \leq \|x_{n+k} - x_{n+k-1}\| + \|x_{n+k-1} - x_{n+k-2}\| + \cdots + \|x_{n+1} - x_n\|$$

$$\leq \alpha^{n+k-1}\|x_1 - x_0\| + \alpha^{n+k-2}\|x_1 - x_0\| + \cdots + \alpha^n\|x_1 - x_0\|$$

$$= (\alpha^{k-1} + \alpha^{k-2} + \cdots + 1)\alpha^n\|x_1 - x_0\|$$

$$= \frac{\alpha^k - 1}{\alpha - 1}\alpha^n\|x_1 - x_0\|$$

veya

$$\|x_{n+k} - x_n\| \leq (\alpha^k - 1)\frac{\alpha^n}{\alpha - 1}\|x_1 - x_0\| \qquad (3.3.1.5)$$

bulunur. Buradan, $\alpha < 1$ olduğu dikkate alınırsa

$$\lim_{n,k\to\infty} \|x_{n+k} - x_n\| = 0$$

elde edilir. Bu ise $\{x_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösterir. E Banach uzayı olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$$

yazılır. $A(x)$ operatörü Lipschitz şartını sağladığından

$$\|A(x_{n-1}) - A(x^*)\| \leq \alpha\|x_{n-1} - x^*\|$$

olur. Buradan

$$\lim_{n\to\infty} A(x_{n-1}) \equiv A(x^*)$$

yazılır. (3.3.1.3) den $n \to \infty$ için limite geçilirse

$$x^* = A(x^*)$$

elde edilir. Bu ise x^* in (3.3.1.2) denkleminin çözümü olduğunu gösterir.

Bu çözümün bir tek olduğunu ispat edelim. Farz edelim ki (3.3.1.2) denkleminin iki çözümü x^* ve y^* olsun. Yani $x^* = A(x^*)$ ve $y^* = A(y^*)$ olsun. Buradan,

$$\|x^* - y^*\| = \|A(x^*) - A(y^*)\| \leq \alpha\|x^* - y^*\|$$

yazılır. $\alpha < 1$ olduğundan $x^* = y^*$ olacaktır. Demek ki (3.3.1.2) denkleminin çözümü bir tektir.

Teorem 3.3.1.2: $a = a(t), (0 \leq t \leq T)$ sürekli fonksiyon olmak üzere

$$\ell = \frac{T^2}{8}\|a\| < 1$$

şartının sağlandığını kabul edelim. Bu takdirde (1) probleminin $[0, T]$ aralığında bir tek çözümü var ve (3.3.1.1) yaklaşıklarının limiti bu çözüme yakınsar.

Ayrıca yakınsama hızı

$$\|x_n - x\| \leq \ell^n\|x_0 - x\|$$

eşitsizliği ile belirlenir.

İspat: Teoremi ispatlamak için Lemma 3.3.1.1'e göre

$$Ax \equiv \int_0^{\lambda(T)} G\,(t, \gamma(\sigma))a\big(\gamma(\sigma)\big)\gamma'(\sigma)x(\sigma)d\sigma$$

operatörünün $C[0, T]$ uzayında sıkan operatör olduğunu gösterelim.

$x(t), y(t) \in C[0, T]$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde,

$$|Ax(t) - Ay(t)| \leq \int_0^{\lambda(T)} G\big(t, \gamma(\sigma)\big)\big|a\big(\gamma(\sigma)\big)\big||x(\sigma) - y(\sigma)|d\gamma(\sigma)$$

$$\leq \|a\| \left[\int_0^{\lambda(T)} G\big(t, \gamma(\sigma)\big)d\gamma(\sigma)\right] \|x - y\|$$

$$\leq \ell\|x - y\|$$

ve

$$\|Ax - Ay\| \leq \ell\|x - y\|$$

elde edilir. Böylece çözümün varlık ve tekliği ispatlanmış olur.

Şimdi (3.3.1.1) yaklaşıklarının (1) probleminin çözümüne yakınsama hızını belirleyelim.

$$|x_n(t) - x(t)| \leq \int_0^{\lambda(T)} G(t, \gamma(\sigma))\big|a\big(\gamma(\sigma)\big)\big||x_{n-1}(\sigma) - x(\sigma)|d\gamma(\sigma)$$

$$\leq \|a\| \left[\int_0^{\lambda(T)} G(t, \gamma(\sigma))d\gamma(\sigma)\right] \|x_{n-1} - x\|$$

$$\leq \ell\|x_{n-1} - x\|$$

ve buradan,

$$\|x_n - x\| \leq \ell\|x_{n-1} - x\|$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece,

$$|x_n(t) - x(t)| \leq \ell^n \|x_0 - x\| \quad (n = 1,2,\ldots) \tag{3.3.1.6}$$

olur. Böylece teorem ispatlanmıştır.

(3.3.1.1) yaklaşıkları için yakınsama hızı,

$$|x_n(t) - x(t)| \leq \frac{\ell^n}{1-\ell} \|x_1 - x_0\| \tag{3.3.1.7}$$

eşitsizliğinden de belirlenir.

3.4. Varyasyonel İterasyon Metodu (VIM)

Varyasyonel İterasyon Metodunun temel kavramlarını açıklamak için aşağıdaki geciken terimli denklemi düşünelim:

$$Lu(t) + N[u(t), u(\xi(t))] = f(t) \tag{3.4.1}$$

Burada L lineer operatör, N lineer olmayan operatör, $\xi(t)$ gecikme terimi ve $f(t)$ homojen olmayan terimdir.

Genel Lagrange çarpanı metodu (Inokuti *et al*. 1978) tarafından ileri sürüldü. He, genel Lagrange çarpanı metodunu

$$u_{k+1}(t) = u_k + \int_0^t \lambda(s) \left[Lu_k(s) + N\left(\tilde{u}_k(t), \tilde{u}_k(\xi(t))\right) - f(s)\right] ds \tag{3.4.2}$$

şeklindeki yazılabilen düzeltme fonksiyonelini kullanarak bir iterasyon metoduna dönüştürdü (He 1997a, 1997b, 1998). Burada λ varyasyonel teori sayesinde optimal şekilde tanımlanabilen genel Lagrange çarpanı, k indisi yaklaşımın mertebesi ve $\tilde{u}_k$ kısıtlı varyasyonlar olarak düşünülür, yani $\delta u_k = 0$ dır.

Lagrange çarpanları lineer problemler için kolayca ve tam olarak elde edilebilir. Ancak lineer olmayan problemler için elde etmek kolay değildir. VIM de, $\tilde{u}_k$ nonlineer terimler, Lagrange çarpanının kolayca belirlenmesine imkan sağlayan varyasyonel teoriden yararlanılan bir kavram olan kısıtlı varyasyonlar olarak düşünülür.

Bu çalışmada $\tilde{u}_k\big(\xi(t)\big) = 0$ dır. Bu varsayımla Lagrange çarpanı kolayca belirlenebilir. Bu yüzden

$$u(t) = \lim_{t\to\infty} u_k(t)$$

kullanarak yaklaşık çözüme başarılı bir şekilde ulaşılabilir.

3.5. Metodların Uygulanması

Bu bölümde önceki bölümlerde anlatılan 'Basit Ardışık Yaklaşımlar Metodu' ve 'Varyasyonel İterasyon Yöntemi' için örnekler oluşturulmuştur.

(3.1.1.7) örneğini basit ardışık yaklaşıklar metodu ile çözelim. Burada,

$$l = \frac{T^2}{8}\|a\| = \frac{1}{2} < 1$$

olduğu yani Teorem 3.3.1.2 nin şartlarının sağlandığı dikkate alınarak (3.1.1.8) integral denklemi için basit ardışık yaklaşıklardan yararlanılırsa,

$$x_n(t) = -0.8742063492t + 2t^2 - 0.05714285714t^{7/2} - 0.04166666667\, t^4 - 0.1269841270t^{9/2} + 0.1\, t^5$$

$$+\frac{t}{8}\int_{0}^{1/2}\left[3+4\sigma-16\sigma^{2}+\frac{3+28\sigma-80\sigma^{2}}{\sqrt{1+16\sigma}}\right]x_{n-1}(\sigma)d\sigma$$

$$-\frac{t}{8}\int_{0}^{1/2-\sqrt{2}/4}[1-4\sigma-16\sigma^{2}+\frac{1+4\sigma-80\sigma^{2}}{\sqrt{1+16\sigma}}]x_{n-1}(\sigma)d\sigma$$

$$-\frac{1}{16}\int_{0}^{t-\sqrt{t}/2}[(4t-1)+(16t-12)\sigma-16\sigma^{2}$$

$$+\frac{(4t-1)+(48t-20)\sigma-80\sigma^{2}}{\sqrt{1+16\sigma}}]x_{n-1}(\sigma)d\sigma$$

olup burada,

$$x_0(t)=-0.8742063492t$$

kabul edilmiştir. Buna göre,

$$x_1(t)=-0.8742063492t+2t^2-0.05714285714t^{7/2}-0.04166666667\,t^4$$

$$-0.1269841270t^{9/2}+0.1\,t^5$$

$$+\frac{t}{8}\int_{0}^{1/2}\left[3+4\sigma-16\sigma^{2}+\frac{3+28\sigma-80\sigma^{2}}{\sqrt{1+16\sigma}}\right]x_{0}(\sigma)d\sigma$$

$$-\frac{t}{8}\int_{0}^{1/2-\sqrt{2}/4}[1-4\sigma-16\sigma^{2}+\frac{1+4\sigma-80\sigma^{2}}{\sqrt{1+16\sigma}}]x_{0}(\sigma)d\sigma$$

$$-\frac{1}{16}\int_{0}^{t-\sqrt{t}/2}[(4t-1)+(16t-12)\sigma-16\sigma^{2}$$

$$+\frac{(4t-1)+(48t-20)\sigma-80\sigma^{2}}{\sqrt{1+16\sigma}}]x_{0}(\sigma)d\sigma$$

olup buradan,

$$x_1(t) = -0.0001219595911 - 0.8968188542t + 2.071549088t^2$$
$$- 0.3110386324t^3 - 0.621106071t^4 + 2.284591301t^5$$
$$- 1.255886865t^6 - 0.2564596825t^7$$

sonucu elde edilir. Benzer şekilde $x_2(t)$ için,

$$x_2(t) = -0.8742063492t2t^2 - 0.05714285714t^{7/2} - 0.04166666667\,t^4$$
$$- 0.1269841270t^{9/2} + 0.1\,t^5$$
$$+\frac{t}{8}\int_0^{1/2}\left[3 + 4\sigma - 16\sigma^2 + \frac{3 + 28\sigma - 80\sigma^2}{\sqrt{1+16\sigma}}\right]x_1(\sigma)d\sigma$$
$$-\frac{t}{8}\int_0^{1/2-\sqrt{2}/4}\left[1 - 4\sigma - 16\sigma^2 + \frac{1 + 4\sigma - 80\sigma^2}{\sqrt{1+16\sigma}}\right]x_1(\sigma)d\sigma$$
$$-\frac{1}{16}\int_0^{t-\sqrt{t}/2}[(4t-1) + (16t-12)\sigma - 16\sigma^2$$

$$+\frac{(4t-1) + (48t-20)\sigma - 80\sigma^2}{\sqrt{1+16\sigma}}]x_1(\sigma)d\sigma$$

olup buradan,

$$x_2(t) = -0.0001357855408 - 0.8828785766t + 2.064145198t^2$$
$$- 0.5404964609t^3 + 0.8379707663t^4 + 1.225363725t^5$$
$$- 5.304808779t^6 + 7.508652336t^7 - 9.633578139t^8$$
$$+ 5.190803563t^9 + 4.056414854t^{10} - 3.028285240t^{11}$$
$$- 0.4854364506t^{12}$$

sonucu bulunur.

$$\left.\begin{array}{l} x''(t) + tx\left(t - \frac{1}{2}\sqrt{t}\right) = 2t^3 - 2t^{5/2} - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t^{3/2} + 4, \qquad (0 \leq t \leq 1) \\ x(t) = 0, \quad (-1/16 \leq t \leq 0), \ \ x(1) = 1 \end{array}\right\} \tag{3.4.1}$$

sınır değer problemini VIM metoduyla yeniden çözelim. (3.4.1) denklemini çözmek için öncelikle

$$x_{k+1}(t) = x_k(t) + \int_0^t \lambda(s)\left[x''_k(s) + t\tilde{x}\big(s - \tau(s)\big) - f(s)\right]ds \tag{3.4.2}$$

şeklinde ifade edilen düzeltme fonksiyonelini düşünelim. Burada λ genel Lagrange çarpanı, $\tilde{x}(s - \tau(s))$ kısıtlı varyasyonlar olarak düşünülür, yani $\delta\tilde{x}\big(s - \tau(s)\big) = 0$ dır. Ayrıca

$$f(s) = 2s^3 - 2s^{5/2} - \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2}s^{3/2} + 4 \tag{3.4.3}$$

$$\delta x_{k+1}(t) = \delta x_k(t) + \delta\int_0^t \lambda(s)[x''_k(s)]ds \tag{3.4.4}$$

(3.4.2) den, aşağıdaki stasyoner koşullar elde edilir.

$$\delta x_k(t): \quad 1 - \lambda'(t)\,\Big|_{s=t} = 0,$$

$$\delta x_k(t): \quad \lambda(t)\,\Big|_{s=t} = 0,$$

$$\delta x_k(s): \quad \lambda''(t)\,\Big|_{s=t} = 0,$$

dir. Buradan genel Lagrange çarpanı,

$$\lambda(s) = s - t \tag{3.4.5}$$

olarak ifade edilir. Bulunan Lagrange çarpanı (3.4.2) de yerine yazılarak,

$$x_{k+1}(t) = x_k(t) + \int_0^t (s-t)\left[x''_k(s) + t x_k\left(s - \sqrt{s}/2\right) - f(s)\right] ds \quad (3.4.6)$$

iterasyon formülü elde edilir. Uygun başlangıç yaklaşımı seçilip, (3.4.5) iterasyon formülünde kullanılarak istenilen mertebeye kadar yaklaşık çözüme ulaşılabilir.

Burada $x_0 = -0.2t^2 - 0.9t$ olarak alınıp, iki metodun sonuçlarının karşılaştırılabilmesi için iterasyon 2. mertebeye kadar çözüldü. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} x_2(t) = 2t^2 &- 0.9t + 0.2998184382t^4 - 0.0215550132t^5 - 0.1396825397t^{\frac{9}{2}} \\ &- 0.2171428572t^{\frac{7}{2}} - 0.3076157001t^6 + 0.01613127795t^9 \\ &- 0.005300539828t^{\frac{11}{2}} - 0.008897370511t^{\frac{13}{2}} \\ &+ 0.003134507231t^{10} - 0.004320066827t^{\frac{17}{2}} + 0.01938208824t^{\frac{15}{2}} \\ &- 0.01222748951t^{\frac{19}{2}} - 0.01274651145t^8 + 0.2742694031t^7 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu çalışmada

$$\left.\begin{array}{l} x''(t) + a(t)x\big(t-\tau(t)\big) = f(t) \quad (0 \le t \le T) \\ x(t) = \varphi(t) \qquad (\lambda_0 \le t \le 0), \qquad x(T) = x_T, \end{array}\right\} \tag{4.1}$$

problemi

$$x(t) = h(t) + tF_\lambda x + V_\lambda x$$

denk Fredholm-Volterra integral denklemine dönüştürülerek, bu integral denklem Basit Ardışık Yaklaşıklar Metodu ile ve (1) sınır değer problemi Varyasyonel İterasyon Metodu ile yaklaşık olarak çözüldü. Bu metotla elde edilen çözüm aynı zamanda (4.1) sınır değer probleminin çözümü olarak alındı.

İlgili metodun sonunda,

$$\left.\begin{array}{c} x''(t) + tx\left(t - \frac{1}{2}\sqrt{t}\right) = 2t^3 - 2t^{\frac{5}{2}} - \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}t^{3/2} + 4, \quad (0 \le t \le 1) \\ x(t) = 0 \qquad (-1/16 \le t \le 0), \quad x(1) = 1 \end{array}\right\} \tag{4.2}$$

örnek problemi çözüldü ve bu örnek problem için ikinci yaklaşıklar kuruldu.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

İlgili metodun sonunda

$$\left.\begin{aligned} x''(t) + tx\left(t - \frac{1}{2}\sqrt{t}\right) &= 2t^3 - 2t^{\frac{5}{2}} - \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}t^{3/2} + 4, \quad (0 \le t \le 1) \\ x(t) = 0 \quad (-1/16 \le t \le 0&), \quad x(1) = 1 \end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

örnek problemi çözüldü ve bu örnek problem için ikinci yaklaşıklar kurularak, ilgili metot için,

$$\begin{aligned} x_2(t) = {} & -0.0001357855408 - 0.8828785766t + 2.064145198t^2 \\ & - 0.5404964609t^3 + 0.8379707663t^4 + 1.225363725t^5 \\ & - 5.304808779t^6 + 7.508652336t^7 - 9.633578139t^8 \\ & + 5.190803563t^9 + 4.056414854t^{10} - 3.028285240t^{11} \\ & - 0.4854364506t^{12} \end{aligned}$$

yaklaşık çözümü elde edildi. İlgili formüller n nin daha büyük değerleri için çalıştırılarak elde edilebilir.

$$\left.\begin{aligned} x''(t) + tx\left(t - \frac{1}{2}\sqrt{t}\right) &= 2t^3 - 2t^{\frac{5}{2}} - \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}t^{3/2} + 4, \quad (0 \le t \le 1) \\ x(t) = 0 \quad (-1/16 \le t \le 0&), \quad x(1) = 1 \end{aligned}\right\}$$

sınır değer problemi Varyasyonel iterasyosyon metoduyla yeniden çözüldü ve

$$x_2(t) = 2t^2 - 0.9t + 0.2998184382t^4 - 0.0215550132t^5 - 0.1396825397t^{\frac{9}{2}}$$
$$- 0.2171428572t^{\frac{7}{2}} - 0.3076157001t^6 + 0.01613127795t^9$$
$$- 0.005300539828t^{\frac{11}{2}} - 0.008897370511t^{\frac{13}{2}}$$
$$+ 0.003134507231t^{10} - 0.004320066827t^{\frac{17}{2}} + 0.01938208824t^{\frac{15}{2}}$$
$$- 0.01222748951t^{\frac{19}{2}} - 0.01274651145t^8 + 0.2742694031t^7$$

yaklaşık çözümü elde edildi. İlgili formüller n nin daha büyük değerleri için çalıştırılarak elde edilebilir.

Çizelge 5.1. (1) Problemi için yaklaşık çözümün kesin çözümle mukayese tablosu

t_i	$x(t_i)$	${x_3}^1(t_i)$	${x_3}^2(t_i)$	$\varepsilon^1(t_i)$	$\varepsilon^2(t_i)$
0.00	0.000000	-0.000135	0.000000	0.000135	0.000000
0.20	-0.120000	-0.097001	-0.120392	0.022998	0.000392
0.40	-0.080000	-0.037704	-0.084735	0.042295	0.004735
0.60	0.120000	0.166049	0.101490	0.046049	0.018509
1.00	1.000000	1.007731	0.885868	0.007731	0.114131

Çizelgede $x(t_i)$ ile kesin çözüm, ${x_3}^1(t_i)$ ile (1) probleminin Basit Ardışık Yaklaşıklar Metodunun ikinci yaklaşıkları, ${x_3}^2(t_i)$ ile (1) probleminin Varyasyonel İterasyon Metodunun ikinci yaklaşıkları, $\varepsilon^1(t_i)$ ile (1) probleminin Basit Ardışık Yaklaşıklar Metodu için gerçek çözüm ile yaklaşık çözüm arasındaki hata değeri ve $\varepsilon^2(t_i)$ ile de (1) probleminin Varyasyonel İterasyon Metodu için gerçek çözüm ile yaklaşık çözüm arasındaki hata değeri işaret edilmiştir. Çizelgede

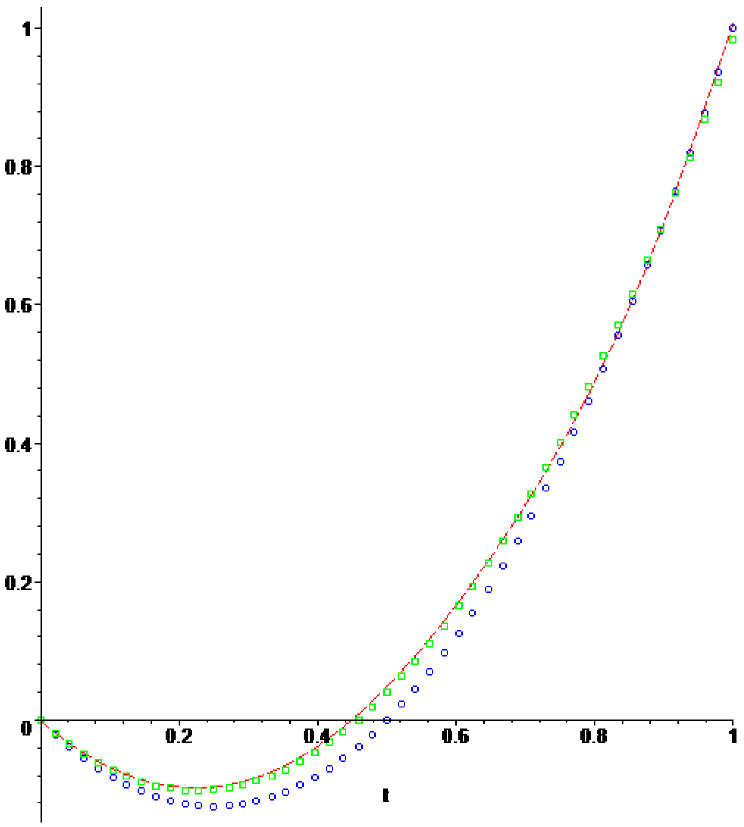
$$\varepsilon^1(t_i) = |x(t_i) - x_3{}^1(t_i)|\,, \quad i = 1,2,3,4,5$$

$$\varepsilon^2(t_i) = |x(t_i) - x_3{}^2(t_i)|\,, \quad i = 1,2,3,4,5$$

şeklinde seçilmiştir.

Sonuç olarak Çizelge 5.1 in hata değerlerine bakıldığında (1) problem için Varyasyonel İterasyon Metodunun hata değerinin Basit Ardışık Yaklaşıklar Metodunun hata değerinden daha az olduğu açıkça görülmektedir. Bu da Varyasyonel İterasyon Metodunun işlevinin önemini vurgular.

Ayrıca iki çözümün gerçek çözümden farkını grafik ile gösterelim.



Şekil 1.1. İki metodun çözümü ile gerçek çözümün karşılaştırılması
*(----:Ardışık yaklaşıklar metodu ile elde edilen yaklaşık çözümün grafiği ; □ □ □ : Varyasyonel metodu ile elde edilen yaklaşık çözümün grafiği ; ∘∘∘ : Gerçek çözümün grafiği

Tablodaki değerlerden kolaylıkla anlaşılabilir ki, gerçek çözümün grafiğine daha yakın olan çözümün grafiği, Varyasyonel İterasyon Metodu sayesinde elde edilmiştir.

Gerekli hesaplamalar Maple 15 programı kullanılarak yapılırken, hesaplamalarda 6 ondalık kısım kullanılmıştır.

KAYNAKLAR

Ahmedov Q. A., 1972. Adi Diferansiyel Denklemler. Maarif. Bakü, 18.
Aksoy Y., 1998. İntegral Denklemler. Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, Yıldız Basımı, İstanbul, 1–6.
Aşlama R.,2011. Lineer ve lineer olmayan integral denklemlerin ve integro-diferansiyel denklemlerin çözümlerinin varyasyonel iterasyon metodu ile hesaplanması. Yüksek Lisans Tezi, Niğde Üniversitesi.
Aykut A.,1995. İkinci mertebeden geciken değişkenli lineer adi diferansiyel denklemlerin yaklaşık metodlarla çözümü. Atatürk Üniversitesi.
Dağ İ., 1983. Bayağı Diferansiyel Denklemler. Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Erzurum, 106.
Delves L. M. and Walsh J., 1974. Numerical Soluation of İntegral Equations. Oxford University Press.
Driver R.D., 1977. Ordinary and Delay Differential Equations. in Applied Mathematic Series, Springer-Verlag: Kluwer.
El’sgol’c L.E., 1960. Boundary-Value Problems for Ordinary Differential Equations With Deviating Arguments. Uspehi Mat. Nauk 15, Russian, 222 – 224.
Günel K., 2006. Zaman Gecikmeli Diferansiyel Denklemlerin Sayısal Çözümleri ve Uygulamaları. Yüksek Lisans Tezi, Adnan Menderes Üniversitesi.
He J.H., 1997a. A new approach to linear partial differential equations,Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.2, 230–235.
He J.H., 1998. Approximate analytical solutions for seepage flow with fractional derivatives in porous media, Comput. Meth. Appl. Mech.Engin.167, 57–68.
He J.H., 1997b. Variational iteration method for delay differential equations, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.2, 235–236.
Inokuti M., 1978. General use of the Lagrange multiplier in nonlinear mathematical inokutiphysics. In: S. Nemat Nasser, Editor, Variational Method in the Mechanics of Solids, Pergamon Press, pp. 156-162.
Kaçar A. ve Memmedov Y. C., 1994. Geciken argümentli diferansiyel denklemler için sınır değer probleminin yaklaşık metodlarla çözümü. Fen Bilimleri Dergisi, Van.
Kaçar A. ve Memmedov Y. C., 1994. Geciken argümentli diferansiyel denklemler için bir özel sınır değer probleminin yaklaşık metodlarla çözümü. Marmara Üniversitesi Yayınları, İstanbul.
Krasnosel’skij M.A., Lifshits Je. A. and Sobolev A. V., 1989. Positive Linear Systems. Heldermann, Varlag, Berlin, 153.
Kuang Y., 1993. Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics. Vol. Boston. Academic Press.
Memmedov Y. C. ve Kaçar A., 1993. Lineer Diferansiyel Denklemler İçin Sınır Değer Probleminin Yaklaşık Metodlarla Çözümü, Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Erzurum, 57.
Memmedov Y. C. ve Kaçar A., 1994. Adi Diferansiyel Denklemler. Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Erzurum, 191.
Memmedov Y. C., 1994. Banach Uzaylarında Operatör Denklemler İçin Ardışık Yaklaşıklar Metodu. Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Erzurum, 23.

Memmedov Y. C., 1994. Yaklaşık Hesaplama Metotları. Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Erzurum, 343.

Norkin S.B., 1972. Differential Equations of The Second Order With Retarded Argument.American Mathematical Society, 264.

Trench W. F., 2013. Elementary Differential Equations. Trinity University, 2 p, Texas, USA.

Wright E.M., 1946. A Non-Linear Difference-Differential Equation. Quart J. Math., 17, 245 – 252.

ÖZGEÇMİŞ

1983 yılında Bingöl'de doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Bingöl'de tamamladı. 2004 yılında İnönü Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden mezun oldu. 2011 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde Yüksek Lisans programına başladı. Evli bir çocuk babasıdır.