FUZZY KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Ekhtiar KHODADADIGHANDHAR

Doktora Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Doç. Dr. Ercan ÇELİK
2014

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

FUZZY KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Ekhtiar KHODADADIGHANDHAR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ERZURUM
2014

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAY FORMU

FUZZY KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Doç. Dr. Ercan ÇELİK danışmanlığında, Ekhtiar KHODADADIGHANDHAR tarafından hazırlanan bu çalışma 13.03.2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora tezi olarak **oybirliği (5/5)** ile kabul edilmiştir.

Başkan	: Doç. Dr. Ercan ÇELİK	*İmza* :
Üye	: Doç. Dr. Nejmi CENGİZ	*İmza* :
Üye	: Doç. Dr. Ömür DEVECİ	*İmza* :
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Levent AKGÜN	*İmza* :
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Muhammed YİĞİDER	*İmza* :

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu'nun 10/04/2014 tarih ve ..496.. nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. İhsan EFEOĞLU
Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

FUZZY KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Ekhtiar KHODADADIGHANDHAR

Atatürk Üniversitiesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ercan ÇELİK

Bu tez çalışmasında, ilk olarak fuzzy kavramı üzerinde durulmuş ve fuzzy sayıları, fuzzy kümeleri, aralık aritmetiği ve genişleme prensibi gibi temel kavramlar verilmiştir. Devamında, fuzzy kesirli diferansiyel denklemlerin analitik ve sayısal çözümleri için yöntemler incelenmiştir. Bu yöntemler fuzzy Laplace dönüşümü ve modifiye edilmiş kesirli Euler yöntemi ve varyasyonel iterasyon yöntemidir. Özellikle fuzzy kesirli diferansiyel denklemlerin çesitli örnekleri ele alınmıştır.

2014, 108 Sayfa

Anahtar Kelemeler: Fuzzy sayılar, Riemann-Liouville H-türevlenebilirliği, Caputo-tipi H-türevlenebilirliği, fuzzy Laplace dönüşümleri, kesirli Euler yöntemi ve varyasyonel iterasyon yöntemi.

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

NUMERICAL SOLUTIONS FOR FUZZY FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUTIONS

Ekhtiar KHODADADIGHANDHAR

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ercan ÇELİK

In this thesis, firstly fuzzy concept is studied and then fuzzy numbers, fuzzy sets, interval arithmetic and extension principle concepts are given. Next, methods for analytical and numerical solutions of the fuzzy fractional differential equations are investigated. These methods are fuzzy Laplace transforms method, modified fractional Euler method and variational iteration method. Fuzzy fractional differential equations are especially taken in different examples.

2014, 108 Pages

Keywords: Fuzzy numbers, Riemann-Liouville H-Differentiability, Caputo-type H-differentiability, fuzzy Laplace transforms, fractional Euler method and variational iteration method.

TEŞEKKÜR

Çalışmamın her aşamasında görüş ve önerileriyle beni yönlendiren ve bana her konuda yardımcı olan hocam Sayın Doç. Dr. Ercan ÇELİK (Atatük Üniversitesi Fen Fakültesi)'e ve doktora yaptığım süre boyunca, ilk günden itibaren destek, anlayış ve deneyimlerini benden esirgemeyen hocam Sayın Arş. Gör. Mesut KARABACAK (Atatük Üniversitesi Fen Fakültesi)'e ayrıca çalışmalarım sırasında bana anlayış gösteren, maddi ve manevi destek olan sevgili aileme teşekkürlerimi sunarım.

Ekhtiar KHODADADIGHANDHAR
Mart, 2014

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel Sayısı
$\mathbb{E}^n$	Fuzzy kümelerin kümesi
$\mathcal{IFR}_I$	Düzgün olmayan fuzzy Riemann integral
$L_p^{\mathbb{F}}(a,b), 1 \leq p \leq \infty$	Tüm fuzzy değerli ölçülebilen f fonksiyonların $[a,b] \subset \mathbb{R}$ üzerindeki kümesi
$L^{\mathbb{F}}(a,b)$	Tüm fuzzy değerli ölçülebilen f fonksiyonların $[a,b] \subset \mathbb{R}$ üzerindeki kümesi
$C^{\mathbb{F}}[a,b]$	Fuzzy değerli fonksiyonların bir alanı, ($[a,b] \subset \mathbb{R}$ üzerinde süreklidir)
$C_n^{\mathbb{F}}[a,b]$	Tüm fuzzy-değerli fonksiyonların kümesi, ($[a,b] \subset \mathbb{R}$ üzerinde n mertebeye kadar süreklidir)
$AC^{\mathbb{F}}[a,b]$	Tüm fuzzy-değerli fonksiyonların kümesini gösterir, ($[a,b] \subset \mathbb{R}$ üzerinde kesinlikle süreklidir)

ŞEKİLLER DİZİNİ

ÇİZELGELER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Bu tez konusunun adı olan fuzzy kavramı hakkında ilk bilgiler Azerbaycan asıllı Lütfu Askerzade (Zadeh 1965) tarafından literatüre kazandırılmasına karşılık bu fikirler ancak 1970 yıllarından sonra doğu dünyasında ve özellikle de Japonya'da teknolojik cihaz yapım ve işleyişinde kullanılarak bütün dünyada yaygın hale gelmiştir. 1980'den sonra fuzzy (bulanık) sisteminin elektrikli süpürgeler, çamaşır makineleri, asansörler, metro ve şirket işletimi gibi konularda kullanılmasında patlama olmuştur. Son yıllarda birçok mühendislik dallarında, veri tabanlarının özelleştirilmesinde, telelefon sekreterlerinin cevaplanmasında ve birçok konularda fuzzy mantık bütün dünyada kullanılır hale gelmiştir.

Fuzzy kesirli diferansiyel denklemler, özellikle fuzzy kesirli türev ve fuzzy kesirli integraller, teorik ve pratik bakımdan büyük önem taşımakta ve bütün fen ve mühendislik bilim dallarında çok geniş bir uygulama yeri bulunmaktadır.

Son yıllarda, fuzzy kesirli diferansiyel denklemlerin analitik ve nümerik çözümlerinde Riemann-Liouville türev operatörü yerine, Caputo anlamında tanımlanan türev operatörü daha çok tercih edilmektedir. Bunun sebebi, fuzzy başlangıç koşullarını içeren fuzzy kesirli diferansiyel denklemlerin çözümü için Caputo türev tanımının daha kullanışlı olmasıdır. Çalışmamızda da fuzzy başlangıç koşullarını içeren fuzzy kesirli diferansiyel denklemler tercih edildiğinden, Caputo anlamında tanımlanan türev operatörü kullanılmıştır.

Bu tezde, fuzzy kesirli diferansiyel denklemlerin nümerik çözümü incelenecektir. Birinci bölüm giriş bölümü olup, basit anlamda çalışmanın konusunu özetlemekte, amaç ve yönteme ışık tutmaktadır. İkinci bölüm, tezde kullanılan integral ve kesirli türev tanımlarının temel kavramlarını, teoremlerini ve çalışmamızda kullanılan nümerik yöntemlerin altyapısını oluşturan tanımları ve ön bilgileri ele almaktadır. Üçüncü bölüm ise fuzzy Laplace dönüşümünün, modifiye edilmiş kesirli Euler yönteminin ve varyasyonel iterasyon yöntemin tekniğinin temel kavramlarını ve teoremlerini ele alıp ve fuzzy kesirli diferansiyel denklemlerin çözümünü elde etmektedir. Dördüncü bölümde, fuzzy Laplace dönüşümü, kesirli Euler yöntemi ve varyasyonel iterasyon yöntemiyle fuzzy kesirli diferansiyel denklemlerin nümerik çözülebilirliğinin gösterilebilmesi için bazı denklem modelleri üzerinde çalışılmıştır. Beşinci bölümde de, önceki verdiğimiz yöntemlerin sonucu verilmektedir.

2. KURAMSAL TEMELLER

Şimdi bu çalışmada kullandığımız bazı temel kavramları verelim.

2.1. Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. (Fuzzy İlişkiler, Fuzzy mantık):

Fuzzy mantığın temeli fuzzy küme ve alt kümelere dayanır. Klasik yaklaşımda bir varlık, ya kümenin elemanıdır ya da değildir. Matematiksel olarak ifade edildiğinde varlık küme ile olan üyelik ilişkisi bakımından kümenin elemanı olduğunda "1", kümenin elemanı olmadığı zaman "0" değerini alır. Fuzzy mantık klasik küme gösteriminin genişletilmesidir. Fuzzy varlık kümesinde her bir varlığın üyelik derecesi vardır. Varlıkların üyelik derecesi, $(0, 1)$ aralığında herhangi bir değer olabilir ve üyelik fonksiyonu $\mu(x)$ ile gösterilir (Zadeh 1961).

Tanım 2.1.2. (Fuzzy küme ve Üyelik fonksiyonu):

x ile gösterilen nesnelerin bir araya getirilmesi X ise, A fuzzy kümesi, sıralı ikililerden oluşan bir küme olarak

$$A = \{(x, \mu_A(x)) | x \in X\}, \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanır. $\mu_A(x)$ üyelik fonksiyonudur. Üyelik fonksiyonu X'in her elemanını, 0 ve 1 arasında bir üyelik derecesine eşler.

$$\mu_A: X \longrightarrow [0,1], \tag{2.2}$$

X, klasik anlamda evrensel küme ve A, X'in bir alt kümesi olsun. X'den $[0,1]$ kümesine

μ_A karakteristik fonksiyonu

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}, \tag{2.3}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.1.3. (r-kesim ya da r-seviye, Güclü r-kesim ya da Güclü r-seviye):

Bir A fuzzy kümesinin, r-kesim veya r-seviye kümesi, başka bir esnek küme

$$A_r = \{x | \mu_A(x) \geq r\}, \tag{2.4}$$

şeklinde tanımlanır. Güçlü r-seviye kümeside,

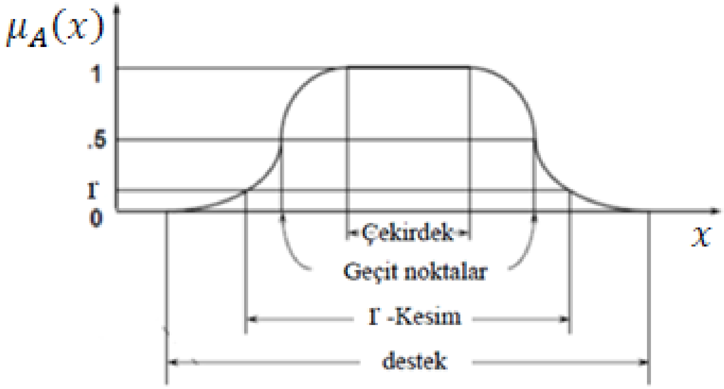
$$A'_r = \{x | \mu_A(x) > r\}, \tag{2.5}$$

olarak tanımlanır.

Bir seviyeye bağlı küme gösterimi için, A kümesinin "*destek*"leri ve "*çekirdek*"leri şöyle tanımlanır.

$$destek(A) = A'_0, \quad r = 0\text{-güçlü seviyesi}$$

$$Çekirdek(A) = A_1, \quad r = 1\text{-kesimi}$$



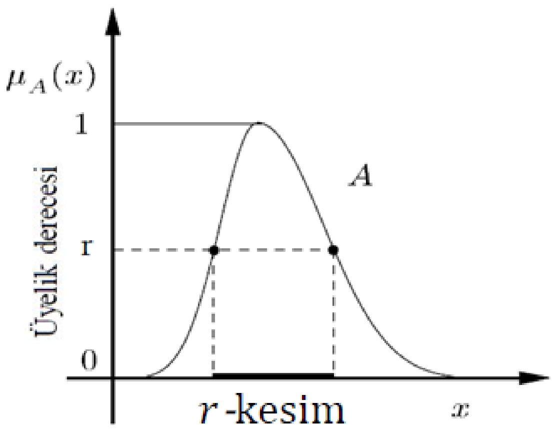
Şekil 2.1. r-kesim kümesi.

Tanım 2.1.4. (Konveks fuzzy kümeler ya da Dışbükeylik):

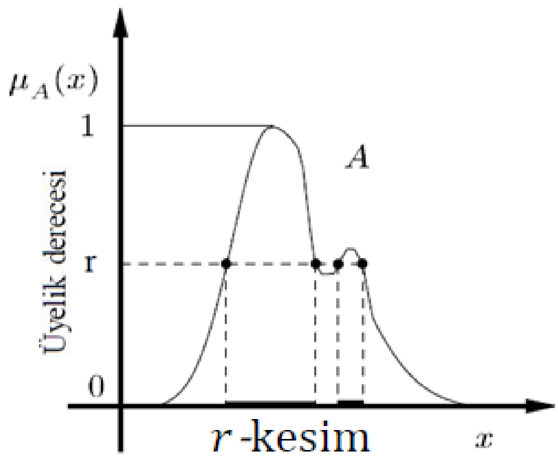
Bir fuzzy kümesinin dışbükey zarfı olması için gerek ve yeter şartı A evrenin elemanı olan herhangi verilen iki eleman için ve $\lambda \in [0,1]$ değeri için,

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\}, \tag{2.6}$$

olmasıdır.



Şekil 2.2. Konveks fuzzy küme.



Şekil 2.3. Konveks olmayan fuzzy kümeler

Başka bir şekilde ifade edersek, "A" fuzzy kümesinin konveks olması için tüm r-seviyelerine göre elde edilen A_r kümelerinin konveks olması gerekmektedir.

Tanım 2.1.5. (Fuzzy Sayılar):

Bir operatör $u: \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ bir fuzzy sayısının tüm aşağıdaki özelliklerini temsil etmektedir (Salahshour et al. 2012):

a) u yukarıdaki semi-süreklidir,
b) u fuzzy konveksidir, yani, tüm $x, y \in \mathbb{R}$, $\lambda \in [0,1]$ için $u(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq min\{u(x), u(y)\}$ dir,
c) u normaldır, yani, her hangı $u(x_0) = 1$ için $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ dır,
d) u'yun desteği $destek(u) = \{x \in \mathbb{R} | u(x) > 0\}$ dır, ve onun kapanışı (closure) $cl(destek(u))$ kompaktıdır.

Tüm fuzzy sayılar $\mathbb{R}$ üzerinde $\mathbb{E} = \mathbb{E}^1$ kümesi ile belirtilir. Bir fuzzy sayısı $u \in \mathbb{E}$'yun, r-seviye kümesi, gösterilen $[u]^r$, $0 \leq r \leq 1$ ile aşağıdaki gibi tanımlanmıştır

$$[u]^r = \begin{cases} \{x \in \mathbb{R} | u(x) \geq r\} & \text{eğer } 0 < r \leq 1 \text{ ise,} \\ cl(destek(u)) & \text{eğer } r = 0 \text{ ise.} \end{cases}$$

Tanım 2.1.6. (Fuzzy fonksiyon sayısının Parametrik formu): Bir u fuzzy fonksiyon sayısının parametrik formu $[\underline{u}(r), \overline{u}(r)]$, bir çift $\underline{u}(r)$, $\overline{u}(r)$, $0 \leq r \leq 1$ ile aşağıdaki şartları sağlamalıdır

- $\underline{u}(r)$ Bir sınırlı monoton soldan sürekli bir fonksiyon $[0,1]$ üzerinde artandır,
- $\overline{u}(r)$ Bir sınırlı monoton soldan sürekli bir fonksiyon $[0,1]$ üzerinde azalandır,
- $\underline{u}(r) \leq \overline{u}(r)$; $0 \leq r \leq 1$.

Zadeh'in genişleme prensibine göre, $\mathbb{E}$ üzerinde ek olarak operatör

$$(u \oplus v)(x) = sup_{y \in \mathbb{R}}\, min\{u(y), v(x-y)\}, x \in \mathbb{R},$$

ile tanımlanmıştır, ve bir fuzzy sayısının skaler çarpımı

$$(k \odot u)(x) = \begin{cases} u(x/k), & k > 0 \\ \tilde{0}, & k = 0 \end{cases},$$

ile verilmiştir burada $\tilde{0} \in \mathbb{E}$.

Fuzzy sayılar arasındaki Hausdorff uzaklık $d\colon \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{R}_{+} \cup \{0\}$

$$d(u, v) = sup_{r \in [0,1]}\, max\{|\underline{u}(r) - \underline{v}(r)|, |\overline{u}(r) - \overline{v}(r)|\},$$

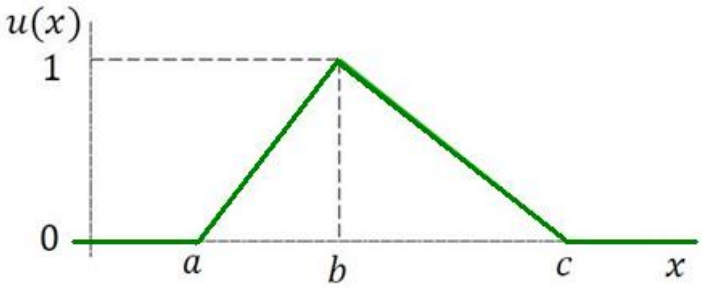
ile verilmiştir, burada $u = \left(\underline{u}(r), \overline{u}(r)\right), v = \left(\underline{v}(r), \overline{v}(r)\right) \subset \mathbb{R}$, o zaman d, $\mathbb{E}$ üzerinde bir metriktir ve aşağıdaki özelliklere sahiptir.

1. $d(u + w, v + w) = d(u, v), \forall u, v, w \in \mathbb{E}$,
2. $d(ku, kv) = |k| d(u, v), \forall k \in \mathbb{R}, u, v \in \mathbb{E}$,
3. $d(u + w, w + e) \leq d(u, w) + d(v, e), \forall u, v, w \in \mathbb{E}$,

4. $(d, \mathbb{E})$ bir tam metrik uzaydır.

Tanım 2.1.7. (Üçgensel Fuzzy Sayısı): Bir üçgensel fuzzy sayısı u üç reel sayısı ile tanımlanır $a < b < c$ olmak üzere üçgenin tabanı $[a, c]$ aralığı ve köşesi $x = b$ dır. u'yu (a, b, c) ile belirteceğiz. Üçgensel fuzzy için üyelik fonksiyonunun sayısı $u = (a, b, c)$ aşağıdaki gibi tanımlanır

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ \frac{x-c}{b-c}, & b \leq x \leq c \\ 0, & x > c \end{cases}, \tag{2.7}$$



Şekil 2.4. $u(x)$ Üyelik fonksiyonu.

burada $a \neq b$ ve $b \neq c$ dir. Her üçgensel fuzzy sayısı için $\underline{u} = a + (b - a)r$ ve $\overline{u} = c + (b - c)r$ dır. Biz bunları:

(1) $u > 0$ ise $a > 0$,
(2) $u \geq 0$ ise $a \geq 0$,
(3) $u < 0$ ise $c < 0$ ve $u \leq 0$ ise $c \leq 0$,

şeklinde yazabiliriz. İki keyfi fuzzy sayısı için $u(r) = [u]^r = [\underline{u}(r), \overline{u}(r)]$ ve $v(r) = [v]^r = [\underline{v}(r), \overline{v}(r)]$ aşağıdaki aritmetik işlemler tanımlanmıştır,

- Ekleme: $u(r) + v(r) = [\underline{u}(r) + \underline{v}(r), \overline{u}(r) + \overline{v}(r)]$,

- Bir gerçek sayıyı k ile çarpma:

$$ku(r) = \begin{cases} [k\underline{u}(r), k\overline{u}(r)], & k \geq 0 \\ [k\overline{u}(r), k\underline{u}(r)], & k < 0\text{'} \end{cases}$$

- Eksilme: $u(r) - v(r) = u(r) + (-1)v(r) = [\underline{u}(r) - \overline{v}(r), \overline{u}(r) - \underline{v}(r)]$.

Önerme 2.1.1.

i. $\tilde{A}$, üyelik fonksiyonu $\mu_{\tilde{A}}$ ve $A_r = \{x | \mu_{\tilde{A}}(x) \geq r\}$ ile bir fuzzy küme olsun. O zaman

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = sup_{0 \leq r \leq 1}\{r | A_r(x)\},$$

ii. A bir küme ve $\{A_r | r \in [0,1]\}$ altküme A'ın bir ailesi olsun, o zaman

a) $A_0 = A$,
b) $r_1 < r_2$ ise $A_{r_2} \subseteq A_{r_1}$,
c) Her $r_n \longrightarrow r$ için $A_r = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{r_n}$.

2.2. Hukuhara Türevi

Tanım 2.2.1. (Hukuhara türevi) (I): $F: (a, b) \longrightarrow \mathbb{E}^n$ ve $t_0 \in (a, b)$ olsun. Eğer aşağıdaki iki şartı sağlıyorsa F, t_0'da Hukuhara türevlenebilirdir:

(i) $F'(t_0) \in \mathbb{E}^n$ mevcut, tüm $h > 0$ için 0'a yeterince yakındır, Burada $F(t_0 + h) - F(t_0)$, $F(t_0) - F(t_0 - h)$ mevcuttur ve limitler

$$\lim_{h \to 0^+} = \frac{F(t_0+h)-F(t_0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{F(t_0)-F(t_0-h)}{h} = F'(t_0), \tag{2.8}$$

dır ((i)-türevlenebilir).

(ii) $F'(t_0) \in \mathbb{E}^n$ mevcut, tüm $h < 0$ için 0‘a yeterince yakın ve limitler

$$\lim_{h \to 0^-} = \frac{F(t_0+h)-F(t_0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{F(t_0)-F(t_0-h)}{h} = F'(t_0), \quad (2.9)$$

dır ((ii)-türevlenebilir).

Tanım 2.2.2. (Hukuhara türevi) (II): Bir $F: T \longrightarrow \mathbb{E}^n$, $t_0 \in T \subseteq \mathbb{R}$ operatöründe Hukuhara anlamında türevlenebilirdir, eğer bir $F'(t_0) \in \mathbb{E}^n$ varsa, öyle ki

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F(t_0+h)-F(t_0)}{h}, \quad (2.10)$$

ve

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F(t_0)-F(t_0-h)}{h}, \quad (2.11)$$

limitler mevcut ve $F'(t_0)$’a eşittiler. $F'(t_0)$’a fuzzy kümesinde F’nin, t_0’daki Hukuhara türevi denir.

Not: Tanımın, doğrudan F türevlenebilirse o zaman F_r operatörde tüm $r \in [0,1]$ için Hukuhara türevlenebilir ve

$$DF_r(t) = [F'(t)]^r,$$

dir. Burada DF_r, F_r’nın Hukuhara türevini temsil eder.

Teorem 2.2.1. $f: I \longrightarrow \mathbb{R}_f$ bir fuzzy fonksiyon olsun, burada her $r \in [0,1]$ için

$[f(t)]^r = \left[\underline{f}(t;r), \overline{f}(t;r)\right]$ dir.

i. f, (i)-türevlenebilir ise, o zaman $\underline{f}(t;r)$ ve $\overline{f}(t;r)$ türevlenebilir fonksiyonlardır ve $[D_1^1 f(t)]^r = \left[\underline{f}'(t;r), \overline{f}'(t;r)\right]$,

ii. f, (ii)-türevlenebilir ise, o zaman $\underline{f}(t;r)$ ve $\overline{f}(t;r)$ türevlenebilir fonksiyonlardır ve $[D_2^1 F(t)]^r = \left[\overline{f}'(t;r), \underline{f}'(t;r)\right]$.

2.3. Gamma Fonksiyonu

Tanım 2.3.1. $\Gamma(x)$ ile göstereceğimiz gamma fonksiyonu

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2.12}$$

genelleştirilmiş integrali ile tanımlanır.

Teorem 2.3.1. $\Gamma(1) = 1$ dir.

İspat: Gamma fonksiyonunun tanımından,

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{1-1} dt = \int_0^\infty e^{-t}\, dt = -e^{-t}\big|_0^\infty = 1,$$

bulunur.

Teorem 2.3.2. $x > 0$ olmak üzere, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ olur.

İspat: Gamma fonksiyonun tanımından,

$$\Gamma(x+1)=\int_0^\infty e^{-t}t^x\,dt,$$

ifadesine kısmi entegrasyon uygulanırsa,

$$\Gamma(x+1)=[(-e^{-t})t^x]_0^\infty-\int_0^\infty(-e^{-t})xt^{x-1}\,dt=0+x\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt=x\Gamma(x),$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 2.3.3. $x>0$ tam sayı olmak üzere, $\Gamma(x+1)=x!$ dir, ($n!=\int_0^\infty t^n e^{-t}\,dt$).

İspat: $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ olduğunu biliyoruz. $\Gamma(x)$'in yerine tekrar $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ yazarsak

$$\Gamma(x+1)=x(x-1)\Gamma(x-1),$$

bulunur. Ve devam edersek

$\Gamma(x+1)=x(x-1)(x-2)\Gamma(x-2)=x(x-1)(x-2)(x-3)\ldots 3.2.1.\Gamma(1)=$
$x!\,\Gamma(1)=x!,$

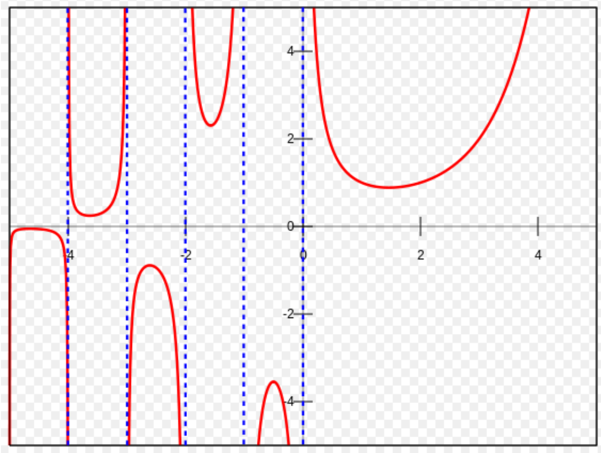
elde edilir. Gamma fonksiyonunun diğer özellikleri aşağıdaki gibidir:

a) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi},$

b) $\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi},$

c) $\Gamma(n)=\frac{\Gamma(n+1)}{n},\ (n<0).$

Gamma fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir.



Şekil 2.5. Gama fonksiyonu eğrisi

Çalışmanın ileri aşamalarında kullanılacak Gamma fonksiyonuna ilişkin rakamsal değerler Çizelge 2.1'de verilmiştir.

Çizelge 2.1. Gamma fonksiyonunun bazı rakamsal değerleri

$\Gamma(0)$	Tanımsız
$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$	$\sqrt{\pi}$
$\Gamma(1)$	1
$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$	$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$
$\Gamma(2)$	1
$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$	$\frac{3}{2}\sqrt{\pi}$
$\Gamma(3)$	2
$\Gamma(\infty)$	∞

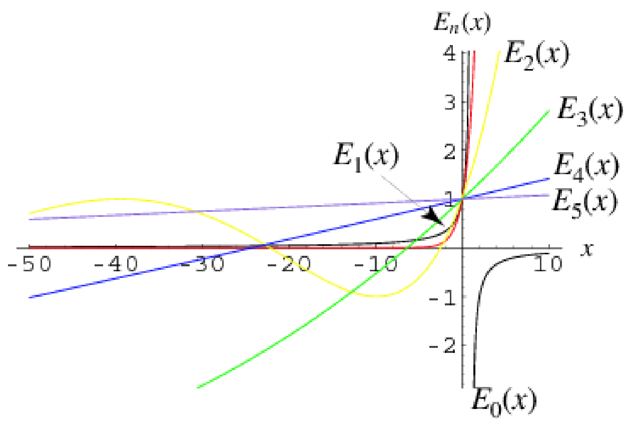
2.4. Mittag-Leffler Fonksiyonları

Mittag-Leffler fonksiyonları (Mittag-Leffler 1902) kesirli diferansiyel yönteminde çok yaygın kullanım alanları bulan oldukça önemli bir fonksiyondur. e^z üstel fonksiyonu, tamsayı dereceden diferansiyel denklemler teorisinde çok önemli bir rol oynar. Onun bir parametreli genelleştirilmiş şekli

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)}, \tag{2.13}$$

ile Mittag-Leffler tarafından verilmiştir. $\alpha = 1$ için,

$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = e^z,$$



Şekil 2.6. Mittag-Leffler Fonksiyonları

Mittag-Leffler tipi iki parametreli fonksiyona genelleştirme ise ilk olarak Agrawal ve Humbert tarafından Laplace dönüşümü tekniği kullanılarak yapılmış olup ve kesirli mertebeli diferansiyel denklemlerin hesaplamasında önemli bir yere sahiptir.

İki parametreli Mittag-Leffler fonksiyonu

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}, \tag{2.14}$$

seri açılımıyla verilir. (2.14) denkleminden

$$E_{1,1}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k+1)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\mathrm{k}!}=e^z,$$

$$E_{1,2}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k+2)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(\mathrm{k}+1)!}=\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k+1}}{(\mathrm{k}+1)!}=\frac{e^z-1}{z},$$

$$E_{1,3}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k+3)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(\mathrm{k}+2)!}=\frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k+2}}{(\mathrm{k}+2)!}=\frac{e^z-1-z}{z^2},$$

ve en genel formül

$$E_{1,m}(z)=\frac{1}{z^{m-1}}\left\{e^z-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k}\right\}, \tag{2.15}$$

elde edilir (Oldham and Spenier 1974; Podlubny 1999).

$$E_{2,1}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-z^2)^k}{\Gamma(2k+1)}=\cos z,$$

Hiperbolik sinüs ve hiperbolik kosinüs,

$$E_{2,1}(z^2)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{(2k)!}=\cosh(z),$$

$$E_{2,2}(z^2)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}=\frac{\sinh(z)}{z},$$

Mittag-Leffler fonksiyonunun özel bir durumlarıdır.

2.5. Kesirli İntegraller ve Kesirli Türevler

Kesirli mertebeden türevlerin birbirinden farklı ve birbiriyle uyuşmayan bir çok tanımı literatürde mevcuttur. Fakat literatür incelediğinde, bu tanımların aslında Riemann-Liouville türev tanımının genelleştirilmiş şekli ve varyantları yada belirli şartlar altında Riemann-Liouville türev tanımı ile bağlantılı olduğu görülür. Bu tanımlar arasındaki temel fark elde alınan fonksiyonların tanım kümesi ve seçilen yardımcı parametrelerdir (Guo *et al*. 2003). Kesirli türev tanımları arasında en çok kullanılan Riemann-Liouville türev tanımıdır. Çalışmamızda başlangıç koşullarını içeren kesirli diferansiyel denklemlerin çözümü esas alındığından, bu tip problemler için daha kullanışlı olan Caputo türev tanımı kullanılmıştır. Caputo türev tanımında, Riemann-Liouville türev tanımından yararlanıldığı için önce Riemann-Liouville integral ve türev tanımları verilip, daha sonra Caputo türev tanımı verilecektir.

2.5.1. Riemann-Liouville Kesirli İntegralleri ve Kesirli Türevleri

Bazı kaynaklarda, Riemann-Liouville integral ve türev tanımları ve teoremleri detaylı bir şekilde verilmiştir (Oldham and Spenier 1974; Miller and Ross 1993; Kilbas *et al.* 2006). Biz sadece çalışmamızda kullanacağımız tanım ve teoremleri vereceğiz.

Tanım 2.5.1.1. $x > 0$ ve $f(x)$ fonksiyonu için $f_1(x) \in C[0, \infty]$ olmak üzere $f(x) = x^p f_1(x)$ olacak şekilde bir $p > a, (a \in \mathbb{R})$ reel sayısı varsa, $f(x)$ reel fonksiyonuna C_a'dadır denir. Eğer $m \in \mathbb{N}$ ve $f^m \in C_a$ ise, bu takdirde $f(x)$ reel fonksiyonuna C_a^m'dadır denir (Odibat and Shawagfeh 2007).

Tanım 2.5.1.2. (Riemann-Liouville Kesirli İntegralleri):

Literatürde, Kesirli mertebeli integralinin en sık karşılaşılan açıklaması, kesirli mertebeli integralinin aşağıda verilen Riemann-Liouville integralidir.

$$\left(I_{a^+}^{\beta} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\beta}}, \tag{2.16}$$

$$\left(I_{a^+}^{0} f\right)(x) = f(x), \tag{2.17}$$

burada $0 \leq a < x,\ \ 0 < \beta \leq 1$ dir. $f \in C_a,\ a \geq 0,\ \alpha, \beta > 0$ ve $\gamma > -1$ olmak üzere, Riemann-Liouville integral operatörünün bazı özellikleri aşağıdaki gibidir:

i. $\left(I_a^{\alpha} I_a^{\beta} f\right)(x) = \left(I_a^{\alpha+\beta} f\right)(x),$ (2.18)

ii. $\left(I_a^{\alpha} I_a^{\beta} f\right)(x) = \left(I_a^{\beta} I_a^{\alpha} f\right)(x),$ (2.19)

iii. $I_a^{\alpha} x^{\gamma} = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} x^{\alpha+\gamma}.$ (2.20)

Tanım 2.5.1.3. (Riemann-Liouville Kesirli Türevleri):

Riemann-Liouville Kesirli türevleri

$$\left({}^{RL}D_{a^+}^{\beta} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\beta)} \frac{d^m}{dx^m} \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-m+\beta}}, \quad (2.21)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada ($a > 0$ ve $a \in \mathbb{R}$), $x > a$ ve $m-1 < \beta \leq m, m \in \mathbb{N}$ dir.

Tanım 2.5.1.4. (Riemann-Liouville Kesirli Türevin Laplace Dönüşümü): Riemann-Liouville Kesirli türevlerin Laplace dönüşümü, $\beta > 0$ olmak üzere

$$\mathcal{L}\left\{{}^{RL}D_{a^+}^{\beta} f(x)\right\} = s^{\beta}\mathcal{L}\{f(x)\} - \sum_{k=0}^{m-1} s^{k\,RL}D_{a^+}^{\beta-k-1} f(0), \; m-1 \leq \beta < m, \quad (2.22)$$

ile verilir. Bununla birlikte $x = 0$ alt limitinde kesirli türevlerin limit değerlerinin fiziksel gösteriminin bulunmaması nedeniyle pratik olarak uygulanabilirliği sınırlıdır. (Podlubny 1999; Miller and Ross 1993)

2.5.2. Caputo Kesirli Türevleri

Caputo türev tanımı detaylı bir şekilde M. Caputo tarafından ve bazı kaynaklarda verilmiştir (Caputo 1967; Kilbas *et al.* 2006). Bu yüzden, sadece çalışmamızda kullanacağımız özellikler verilecektir.

Tanım 2.5.2.1. $m-1<\beta\leq m,\ m\in\mathbb{N},\ \ x>0,\ \ f\in C_{-1}^{m}$ olmak üzere, $f(x)$ fonksiyonunun β mertebeden ($\beta>0$) Caputo türev tanımı,

$$\left({}^{C}D_a^{\beta}f\right)(x)=\left(I_a^{m-\beta}f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(m-\beta)}\int_a^x\frac{f^m(t)dt}{(x-t)^{1-m+\beta}},\tag{2.23}$$

biçiminde tanımlanır. Ayrıca $m-1<\beta\leq m, m\in\mathbb{N},\ x>0,\ f\in C_{-1}^{m}$ olmak üzere, Caputo türev tanımına ait,

i. $$\left({}^{C}D_a^{\beta}I_a^{\beta}f\right)(x)=f(x),\tag{2.24}$$

ii. $$I_a^{\beta}({}^{C}D_a^{\beta}f)(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{m-1}f^k(a)\frac{(x-a)^k}{k!},\ \ a\geq 0,\tag{2.25}$$

özelliklerde verilebilir.

Tanım 2.5.2.2. t değişkeni zamanı göstermek üzere, Caputo zaman-kesirli türevi β mertebeden ($\beta>0$),

$$\begin{aligned}&{}^{C}D_t^{\beta}u(x,t)=\frac{\partial^{\beta}u(x,t)}{\partial t^{\beta}}=\\&\begin{cases}\frac{1}{\Gamma(m-\beta)}\int_0^t(t-\tau)^{m-\beta-1}\frac{\partial^m u(x,\tau)}{\partial\tau^m}d\tau, & her\ m-1<\beta<m\ için\\ \frac{\partial^m u(x,t)}{\partial t^m}, & her\ \beta=m\in\mathbb{N}\ için\end{cases},\end{aligned}\tag{2.26}$$

ve benzer şekilde x değişkeni uzayı göstermek üzere, Caputo uzay-kesirli türevi β mertebeden ($\beta>0$),

$$\begin{aligned}&{}^{C}D_x^{\beta}u(x,t)=\frac{\partial^{\beta}u(x,t)}{\partial x^{\beta}}=\\&\begin{cases}\frac{1}{\Gamma(m-\beta)}\int_0^x(x-\theta)^{m-\beta-1}\frac{\partial^m u(\theta,t)}{\partial\theta^m}d\theta, & her\ m-1<\beta<m\ için\\ \frac{\partial^m u(x,t)}{\partial x^m}, & her\ \beta=m\in\mathbb{N}\ için\end{cases},\end{aligned}\tag{2.27}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.5.2.3. (Caputo Kesirli Türevin Laplace Dönüşümü): Caputo kesirli türevlerin Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}\left\{{}^{C}D_{a}^{\beta} f(t)\right\} = s^{\beta}\mathcal{L}\{f(t)\} - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\beta-k-1} f^{(k)}(0)\,,\ m-1 < \beta \leq m, \tag{2.28}$$

ile verilir. Caputo kesirli türevinin Laplace dönüşümünün bu ifadesi $f(t)$ ve onun türevlerini içermektedir. Bu haliyle bazı fiziksel süreçlere uygulaması çok daha kolaydır. Örneğin, $f(0)$ başlangıç durumu, $f'(t)$ başlangıç hızı ve $f''(t)$ başlangıç eğrisi olabilir. Bununla birlikte lineer kesirli diferansiyel denklemlerin çözümünde de kullanışlı bir ifadedir (Podlubny 1999; Miller and Ross 1993).

2.6. Kesirli Diferansiyel Denklemler

Tanım 2.6.1. Bir veya daha fazla değişkenin kesirli türevlerini içeren denklemlere kesirli diferansiyel denklem denir. Yani, kesirli diferansiyel denklemler, tam sayı türevleri yerine, kesirli türevlere sahip olan diferansiyel denklemlerdir (Benghorbal 2004).

Kesirli diferansiyel denklemler aşağıdaki gibi sınıflandırılabilir:

a) Kesirli adi diferansiyel denklemler. Örneğin,

$$D^{\frac{1}{3}}y(x) + 5y^2(x) = 3,$$

$$D^{\frac{3}{2}}y(x) + D^{\frac{1}{2}}y(x) - 2y(x) = 0.$$

b) Kesirli kısmi diferansiyel denklemler. Örneğin,

$$D_t^{\frac{1}{2}}u(x,t) = \lambda^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}.$$

Başka bir sınıflandırma ise, lineerliğe ya da non-lineerliğe göre yapılan sınıflandırma türüdür.

Bir kesirli diferansiyel denklem eğer;

$$a_n(x)D^{\beta_n}y(x) + a_{n-1}(x)D^{\beta_{n-1}}y(x) + \cdots + a_1(x)D^{\beta_1}y(x) + a_0(x)y(x) = f(x), \tag{2.29}$$

biçiminde ise lineer kesirli diferansiyel denklem olarak adlandırılır. D^{β_i}, $(i = 1,2,\dots,n)$ kesirli diferansiyel operatörüdür ve lineerdir.

Tanım 2.6.2. Kesirli diferansiyel denklemdeki en yüksek mertebedeki türeve denklemin mertebesi denir. Örneğin,

$$y(x)D^{\frac{4}{3}}y(x) + D^{\frac{1}{2}}y(t) = x^2 + 1,$$

denklemi $\frac{4}{3}$. mertebeden non-lineer adi diferansiyel denklemdir.

Tanım 2.6.3. (Varlık ve Teklik):

Kesirli türevli diferansiyel denklemlerin çözümünü bulmak için

$$D^{\beta_n}y(x) + \sum_{i=1}^{n-1} a_{n-i}D^{\beta_{n-i}}y(x) + a_0(x)y(x) = f(x), \tag{2.30}$$

$$y^k(a) = y_k,\ \ k = 1,2,\dots,\beta_n - 1,\ \ 0 < \beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_n, \tag{2.31}$$

şeklinde tanımlanan başlangıç değer problemini elde alalım. Öncelikle başlangıç şartlı kesirli türevli diferansiyel denklemlerin çözümünü araştıracağız. Eğer denklemin çözümü varsa tek midir? Bu soruların cevabını vermek için aşağıdaki iki teoreme ihtiyaç vardır. İlk teorem lineer kesirli türevli denklemlerin (2.30) çözümünün varlığı ve tekliğini gösterir. Diğer teorem ise (2.31) denkleminin daha genelleştirilmiş hali olan

$$\begin{cases} D^{\beta_n} y(x) = f(x,y), \\ y^{(k)}(a) = y_k, \quad k = 1,2,\dots,\beta_n - 1. \end{cases} \tag{2.32}$$

denklemi ile ilgilidir.

Teorem 2.6.1. Eğer $f(x) \in L_1(a,b)$, $a_{n-j}, (j = 1,2, \dots n)$, $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli fonksiyonlar ise, (2.30)-(2-31) başlangıç-değer problemi $y(x) \in L_1(a,b)$ tek bir çözüme sahiptir. Burada $f(x) \in L_1(a,b)$ ifadesi $\int_a^b |f(x)| dx < \infty$, $a < x < b < \infty$ anlamına gelir.

Teorem 2.6.2. $D \subset \mathbb{R}^2$ ve $f(x,y)$ reel değerli Lipschitz şartlarını sağlayan sürekli fonksiyon olsun. Yani,

$$|f(x,y) - f(x,z)| \le L|y - z|, \text{ öyle ki, } |f(x,y)| \le M < \infty, \quad \forall (x,y) \in D.$$

(2.30) probleminin çözümü sürekli olup $M \subset D$ bölgesinde vardır ve tekdir. Teoremlerin detaylı ispatları Podlubny'nin kitabında vardır (Podlubny 1999).

Tanım 2.6.4. (Fuzzy İntegral): Fuzzy integral

$$\int_a^b y(t)dt, \quad a,b \in \mathbb{R},$$

her $r \in [0,1]$ için

$$\left[\int_a^b y(t)dt\right]^r = \left[\int_a^b \underline{y}(t;r)dt\,, \int_a^b \overline{y}(t;r)dt\right], \tag{2.33}$$

olarak tanımlanır, ve sağdaki Lebesgue integrali mevcuttur. Burada $\underline{y}(t;r), \overline{y}(t;r) \in C\left(\left((0,a], \mathbb{R}\right) \cap L^1\left((0,a), \mathbb{R}\right)\right)$ dir.

Tanım 2.6.5. (Fuzzy Süreç): Bir $y: I \longrightarrow \mathbb{E}$ dönüşümü bir fuzzy süreç olarak adlandırılır.

$$[y(t)]^r = \left[\underline{y}(t;r), \overline{y}(t;r)\right], \; t \in I, \quad 0 < r \leq 1, \tag{2.34}$$

göz önüne alalım. Fuzzy bir süreç y'in Seikkala türevi $y'(t)$ ile tanımlanır

$$[y'(t)]^r = \left[\underline{y}'(t;r), \overline{y}'(t;r)\right], \; t \in I, \;\; 0 < r \leq 1, \tag{2.35}$$

sağlanan denklemin bir fuzzy sayısı bir $y'(t) \in \mathbb{E}$ tanımlar.

Tanım 2.6.7. (Fuzzy Cauchy Problemi):

$0 < \beta < 1$ mertebeden fuzzy kesirli diferansiyel denklem $\left(D_{a^+}^{\beta} y\right)(t) = f\big(t, y(t)\big)$'yi göz önüne alalım, burada y, t'nin fuzzy fonksiyonu, $f(t, y(t))$ net değişken t ve fuzzy değişken y'nin bir fuzzy fonksiyonudur ve $D_{a^+}^{\beta} y$, y'nin fuzzy fonksiyonudur. Bir başlangıç değeri $\left(D_{a^+}^{\beta-1} y\right)(t_0) = {}^{RL}y_0^{(\beta-1)} \in \mathbb{E}^n$ verilirse, β mertebeden bir fuzzy Cauchy problemi elde edilir ve

$$\begin{cases} \left(D_{a^+}^{\beta} y\right)(t) = f\big(t, y(t)\big), \;\; t \in [t_0, T] \\ \left(D_{a^+}^{\beta-1} y\right)(t_0) = y_0^{(\beta-1)} \in \mathbb{E}^n \end{cases}, \tag{2.36}$$

şeklindedir. Denklem (2.36) için tek çözüm bulunmasının yeterli şartları şunlardır:

1. f'in sürekliliği,
2. Lipschitz şartını sağlaması,

$$D\left(f(t,x(t)),f(t,y(t))\right)\leq LD(x(t),y(t)),\ \text{her } L>0 \text{ için.}$$

Şimdi, $y(t)$, fuzzy Cauchy probleminin bir çözümü olarak, $D_{a^+}^{\beta}y$ mevcut ama ayrıca denklem (2.36) sağlanması gerekir. Öncelikle $f(t,y(t))$'nin hesaplanması gerekir. $f(t,y(t))$'nin r-seviyeleri aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$[f(t,y(t))]^r=\left[\underline{f}(t,y(t);r),\overline{f}(t,y(t);r)\right],$$

burada her $t\in I$, $r\in[0,1]$ için

$$\underline{f}(t,y(t);r)=\min\{f(t,y)|y\in[y(t)]^r\},$$
$$\overline{f}(t,y(t);r)=\max\{f(t,y)|y\in[y(t)]^r\}.$$

y'yi denklem (2.36)'nin her çözümü olduğunu kabul edelim, $D_{a^+}^{\beta}y$ mevcut ise ve

$$\begin{cases}\left(D_{a^+}^{\beta}\underline{y}\right)(t;r)=\underline{f}(t,y(t);r)\\ \left(D_{a^+}^{\beta-1}\underline{y}\right)(t_0;r)=\underline{y}_0^{(\beta-1)}\in\mathbb{E}^n\text{'}\end{cases}$$
$$\begin{cases}\left(D_{a^+}^{\beta}\overline{y}\right)(t;r)=\overline{f}(t,y(t);r)\\ \left(D_{a^+}^{\beta-1}\overline{y}\right)(t_0;r)=\overline{y}_0^{(\beta-1)}\in\mathbb{E}^n\text{'}\end{cases}$$

burada

$$\left[\left(D_{a^+}^{\beta-1}y\right)(t_0)\right]^r = \left[\left(D_{a^+}^{\beta-1}\underline{y}\right)(t_0;r), \left(D_{a^+}^{\beta-1}\overline{y}\right)(t_0;r)\right],$$

dir.

Tanım 2.6.8. (Fuzzy Başlangıç Değer Problemi):

$0 < \beta < 1$ mertebeden fuzzy başlangıç değeri ile birlikte verilen

$$\begin{cases} \left(D_{a^+}^{\beta}y\right)(t) = f\big(t, y(t)\big), \;\; t \in [t_0, T] \\ \left(D_{a^+}^{\beta-1}y\right)(t_0) = y_0^{(\beta-1)} \in \mathbb{E}^n \end{cases}, \tag{2.37}$$

diferansiyel denklemini göz önüne alalım, burada y, t'de bir fuzzy fonksiyondur, $f(t, y(t))$ net değişken t'nin ve fuzzy değişken y'nin bir fuzzy fonksiyonudur, $D_{a^+}^{\beta}y$, y'in fuzzy türevidir ve $\left(D_{a^+}^{\beta-1}y\right)(t_0) = y_0^{(\beta-1)}$ bir paralel ya da bir paralelkenar şeklinde fuzzy sayısıdır $[y(t)]^r$ ile y'nin fuzzy fonksiyonunu gösteriyoruz. Öyle ki, $t \in [t_0, T]$ için $y(t)$ ve r-seviyesi kümesi için

$$[y(t)]^r = \left[\underline{y}(t;r), \overline{y}(t;r)\right], \;\; [y(t_0)]^r = \left[\underline{y}(t_0;r), \overline{y}(t_0;r)\right], r \in (0,1], \tag{2.38}$$

dir. Burada

$$[f(t, y)]^r = \left[\underline{f}(t, y(t); r), \overline{f}(t, y(t); r)\right],$$

yazabiliriz. Çünkü $\left(D_{a^+}^{\beta}y\right)(t) = f(t, y(t))$ dir. Bu durumda,

$$\underline{f}(t, y(t); r) = F\left[t, \underline{y}(t;r), \overline{y}(t;r))\right], \tag{2.39}$$

$$\overline{f}(t,y(t);r) = G\left[t,\underline{y}(t;r),\overline{y}(t;r)\right], \qquad (2.40)$$

eşitlikleri yazılabilir. Zadeh'in Genişleme Prensibini kullanarak, üyelik fonksiyonumuz

$$f\big(t,y(t)\big)(s) = \sup_{s\in\mathbb{R}}\{y(t)(\tau)|s = f(t,\tau)\}, \qquad (2.41)$$

vardır öyleki $f\big(t,y(t)\big)$ fuzzy sayısıdır

$$\left[f\big(t,y(t)\big)\right]^r = \left[\underline{f}(t,y(t);r),\overline{f}(t,y(t);r)\right], \quad r \in [0,1], \qquad (2.42)$$

burada

$$\underline{f}(t,y(t);r) = \min\{f(t,y)|y \in [y(t)]^r\}, \qquad (2.43)$$

$$\overline{f}(t,y(t);r) = \max\{f(t,y)|y \in [y(t)]^r\}, \qquad (2.44)$$

dır.

Tanım 2.6.9. Bir $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_F$ fonksiyonu fuzzy sürekli bir fonksiyondur. Eğer keyfi bir sabit $t_0 \in R$ ve $\epsilon > 0$, $\delta > 0$ için $|t - t_0| < \delta \Longrightarrow D|f(t), f(t_0)| < \epsilon$ mevcuttur.

2.7. Tip-I Düzgün Olmayan Fuzzy Riemann İntegrali

Bu alt bölümde, tip-I düzgün olmayan fuzzy Riemann integrali tanımlayalım (Hsien-Chung 1998).

Tanım 2.7.1. A tüm fuzzy sayıların bir kümesi, A_{cl} tüm kapalı fuzzy sayıların bir kümesi, A_b de tüm sınırlı fuzzy sayıların bir kümesi olsun,

I. $f: X \longrightarrow AI$ ise $f(x)$ bir fuzzy-değerli fonksiyondur,

II. $f: X \longrightarrow A_{cl}$ ise $f(x)$ bir kapalı-fuzzy-değerli fonksiyondur,

III. $f: X \longrightarrow A_b$ ise $f(x)$ bir sınırlı-fuzzy-değerli fonksiyondur.

Tanım 2.7.2. $[f(x)]^r = \left[\underline{f}(x;r), \overline{f}(x;r)\right]$ göz önüne alalım,

(i) $f(x)$, $[a, +\infty)$ üzerinde kapalı- ve sınırlı-fuzzy-değerli fonksiyon olsun. Her r için $[a, +\infty)$ üzerinde $\underline{f}(x;r)$ ve $\overline{f}(x;r)$ düzgün olmayan Riemann-integrallenebilen olsunlar.

$$A_r = \left[\int_a^{+\infty} f(x)dx\right]^r = \left[\int_a^{+\infty} \underline{f}(x;r)dx\,, \int_a^{+\infty} \overline{f}(x;r))dx\right], \tag{2.45}$$

dir. O zaman $f(x)$, $[a, +\infty)$ üzerinde tip-I ile düzgün olmayan fuzzy Riemann-integrallenebilendir, $[a, +\infty)$ üzerinde $f(x) \in \mathcal{IFR}_I$ olarak belirtilir ve her $r \in A_0$ için $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ üyelik fonksiyonu

$$\mu_{\int_a^{+\infty} f(x)dx}(y) = sup_{0\le r\le 1}\{r|A_r(y)\},$$

olarak tanımlanır.

(ii) $f(x)$, $(-\infty, a]$ üzerinde kapalı- ve sınırlı-fuzzy-değerli fonksiyon olsun. Her r için $(-\infty, a]$ üzerinde $\underline{f}(x;r)$ ve $\overline{f}(x;r)$ düzgün olmayan Riemann-integrallenebilen olsunlar.

$$A_r = \left[\int_{-\infty}^{a} f(x)dx\right]^r = \left[\int_{-\infty}^{a} \underline{f}(x;r)dx\,, \int_{-\infty}^{a} \overline{f}(x;r)dx\right], \tag{2.46}$$

dir. O zaman $f(x)$, $(-\infty, a]$ üzerinde tip-I ile düzgün olmayan fuzzy Riemann-integrallenebilendir, $(-\infty, a]$ üzerinde $f(x) \in \mathcal{IFR}_I$ olarak belirtilir ve her $r \in A_0$ için $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ üyelik fonksiyonu

$$\mu_{\int_{-\infty}^{a} f(x)dx}(y) = sup_{0 \le r \le 1}\{r | A_r(y)\},$$

olarak tanımlanır.

(iii) $f(x)$, $(-\infty, +\infty)$ üzerinde kapalı- ve sınırlı-fuzzy-değerli fonksiyon olsun. Her r için $(-\infty, +\infty)$ üzerinde $\underline{f}(x;r)$ ve $\overline{f}(x;r)$ düzgün olmayan Riemann-integrallenebilen olsunlar.

$$A_r = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx\right]^r = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \underline{f}(x;r)dx\,, \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f}(x;r)dx\right], \tag{2.47}$$

dir. O zaman $f(x)$, $(-\infty, +\infty)$ üzerinde tip-I ile düzgün olmayan fuzzy Riemann-integrallenebilendir, $(-\infty, +\infty)$ üzerinde $f(x) \in \mathcal{IFR}_I$ olarak belirtilir ve her $r \in A_0$ için $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ üyelik fonksiyonu

$$\mu_{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx}(y) = sup_{0 \le r \le 1}\{r | A_r(y)\},$$

olarak tanımlanır.

Teorem 2.7.1. $f(x)$, $[a, +\infty)$ (ya da $(-\infty, a]$) üzerinde kapalı- ve sınırlı-fuzzy-değerli fonksiyon olsun. Her sabit r ve her $a \le b$ için $[a, b]$ üzerinde $\underline{f}(x;r)$ ve $\overline{f}(x;r)$ Riemann-integrallenebilir olduğunu farz edelim ve iki pozitif sabit $\underline{M}(r)$ ve $\overline{M}(r)$ mevcuttur öyle ki her $a \le b$ için $\int_a^b \left|\underline{f}(x;r)\right| dx \le \underline{M}(r)$ ve $\int_a^b \left|\overline{f}(x;r)\right| dx \le \overline{M}(r)$ dir. O zaman $[a, +\infty)$ (ya da $(-\infty, a]$) üzerinde $f(x) \in \mathcal{IFR}_I$ ve düzgün olmayan fuzzy Riemann-integral $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ (ya da $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$) bir kapalı fuzzy kümedir.

$$\left[\int_a^{+\infty} f(x)dx\right]^r = \left[\int_a^{+\infty} \underline{f}(x;r)dx\,, \int_a^{+\infty} \overline{f}(x;r)dx\right], \tag{2.48}$$

yada

$$\left[\int_{-\infty}^{a} f(x)dx\right]^r = \left[\int_{-\infty}^{a} \underline{f}(x;r)dx\,, \int_{-\infty}^{a} \overline{f}(x;r)dx\right]. \tag{2.49}$$

Teorem 2.7.2. $f(x)$, $(-\infty,+\infty)$ üzerinde kapalı- ve sınırlı-fuzzy-değerli fonksiyon olsun. Farz edelim ki her r için $(-\infty,+\infty)$ üzerinde $\underline{f}(x;r)$ ve $\overline{f}(x;r)$ Riemann-integrallenebilen olsun, O zaman $(-\infty,+\infty)$ üzerinde $f(x) \in \mathcal{IFR}_I$ ve düzgün olmayan fuzzy Riemann-integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ bir kapalı fuzzy kümedir.

$$\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx\right]^r = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \underline{f}(x;r)dx\,, \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f}(x;r)dx\right], \tag{2.50}$$

2.8. Riemann-Liouvillenin H-türevlenebilirliği

Bu bölümde, Hukuhara farkı altında fuzzy Riemann-Liouville kesirli türevlerinin ve integrallerinin tanımını vereceğiz (Kilbas *et al.* 2006; Pudlubny 1999; Bede and Gal 2005).

- $L_p^{\mathbb{F}}(a,b), 1 \le p \le \infty$ tüm fuzzy değerli ölçülebilen f fonksiyonların $[a,b] \subset \mathbb{R}$ üzerinde kümesidir burada $\|f\|_p = \left(\int_0^1 \left(d(f(t),0)\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$.
- $L^{\mathbb{F}}(a,b)$ tüm fuzzy değerli ölçülebilen f fonksiyonların $[a,b] \subset \mathbb{R}$ üzerinde kümesidir.
- $C^{\mathbb{F}}[a,b]$ fuzzy değerli fonksiyonların bir alanıdır ki $[a,b] \subset \mathbb{R}$ üzerinde süreklidir.
- $C_n^{\mathbb{F}}[a,b]$ bütün fuzzy-değerli fonksiyonların kümesini gösterir, ki n mertebeye kadar süreklidir.
- $AC^{\mathbb{F}}[a,b]$ tüm fuzzy-değerli fonksiyonların kümesini gösterir, ki kesinlikle süreklidir.

Farz edelim ki $\mathbb{E} = C^{\mathbb{F}}[a,b] \cap L^{\mathbb{F}}(a,b)$ olsun.

Şimdi, aşağıdaki gibi fuzzy değerli fonksiyonun, fuzzy Riemann-Liouville integralini tanımlıyoruz:

Tanım 2.8.1. (Fuzzy Riemann-Liouville Kesirli İntegrali): Farz edelim ki $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{E}$ olsun. Fuzzy değerli f fonksiyonun fuzzy Riemann-Liouville integrali

$$\left(I_{a^+}^{\beta} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\beta}}, \quad x > a, \;\; 0 < \beta \leq 1, \tag{2.51}$$

şekilinde tanımlanır. Her $0 \leq r \leq 1$ için $[f(x)]^r = \left[\underline{f}(x;r), \overline{f}(x;r)\right]$ şeklide f fuzzy değerli fonksiyonu r-kesim temsilini düşünelim, o zaman esaslı f fuzzy değerli fonksiyonunun Riemann-Liouville integralin alt ve üst fonksiyonları ile aşağıdaki gibi gösteriyoruz:

Teorem 2.8.1. Farz edelim ki $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{E}$ bir fuzzy değerli fonksiyon olsun. f fuzzy değerli fonksiyonun fuzzy Riemann-Liouville integrali aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\left[I_{\alpha^+}^{\beta} f(x)\right]^r = \left[\left(I_{\alpha^+}^{\beta} \underline{f}\right)(x;r), \left(I_{\alpha^+}^{\beta} \overline{f}\right)(x;r)\right], \quad 0 \leq r \leq 1, \tag{2.52}$$

burada

$$\left(I_{\alpha^+}^{\beta} \underline{f}\right)(x;r) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^x \frac{\underline{f}(t;r)dt}{(x-t)^{1-\beta}}, \quad 0 \leq r \leq 1, \tag{2.53}$$

ve

$$\left(I_{\alpha^+}^{\beta} \overline{f}\right)(x;r) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^x \frac{\overline{f}(t;r)dt}{(x-t)^{1-\beta}}, \quad 0 \leq r \leq 1. \tag{2.54}$$

İspat. İspat **(**Arshad and Lupulescu 2011)'de verilmiştir.

$\beta = 1$ ve fuzzy değerli ölçülebilir fonksiyonu için, her zamanki gibi fuzzy integrali kapsamaktadır.

Şimdi, $0 < \beta < 1$ mertebeden fuzzy değerli fonksiyon f'nin fuzzy Riemann-Liouville kesirli türevlerini tanımlıyoruz.

Tanım 2.8.2. (Fuzzy Riemann-Liouville Kesirli Türevleri):

Farz edelim ki $f:(a,b) \longrightarrow \mathbb{E}$ bir fuzzy değerli fonksiyon olsun. Ve $x_0 \in (a,b)$ ve $\Phi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^\beta}$ olsun. Diyelim ki $f(x)$, x_0'da $0 < \beta < 1$ mertebeden Riemann-Liouville H-türevlenebilirdir, burada bir $\left({}^{RL}D_{a^+}^{\beta} f\right)(x_0) \in C^{\mathbb{F}}[a,b]$ öyesi varsa, öyle ki her $h > 0$ yeterince küçükse

i. $$\left({}^{RL}D_{a^+}^{\beta} f\right)(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\Phi(x_0+h) \ominus \Phi(x_0)}{h} = lim_{h \to 0^+} \frac{\Phi(x_0) \ominus \Phi(x_0-h)}{h}, \tag{2.55}$$

ya da

ii. $$\left({}^{RL}D_{a^+}^{\beta} f\right)(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\Phi(x_0) \ominus \Phi(x_0+h)}{-h} = lim_{h \to 0^+} \frac{\Phi(x_0-h) \ominus \Phi(x_0)}{-h}, \tag{2.56}$$

ya da

iii. $$\left({}^{RL}D_{a^+}^{\beta} f\right)(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\Phi(x_0+h) \ominus \Phi(x_0)}{h} = lim_{h \to 0^+} \frac{\Phi(x_0-h) \ominus \Phi(x_0)}{-h}, \tag{2.57}$$

ya da

iv. $$\left({}^{RL}D_{a^+}^{\beta} f\right)(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\Phi(x_0) \ominus \Phi(x_0+h)}{-h} = lim_{h \to 0^+} \frac{\Phi(x_0) \ominus \Phi(x_0-h)}{h}, \tag{2.58}$$

dır. Basitlik için, eğer bu tanım 2.8.2'de durum (i) gibi türevlenebilirse biz fuzzy-değerli fonksiyon f'nin, ${}^{RL}[(i) - \beta]$-türevlenebilir olduğunu söyleyebiliriz, eğer bu tanım

2.8.2'de durum (ii) gibi türevlenebilirse fuzzy-değerli fonksiyon f'nin, ${}^{RL}[(ii)-\beta]$-türevlenebilir olduğunu söyleyebiliriz (Allahviranloo *et al.* 2012).

Teorem 2.8.2. Farz edelim ki $f:(a,b)\longrightarrow \mathbb{E}$ bir fuzzy değerli fonksiyon olsun. $x_0 \in (a,b)$ ve $0<\beta<1$ olsun. Öyle ki her $0\le r\le 1$ için:

i. Eğer f, ${}^{RL}[(i)-\beta]$-türevlenebilir fuzzy değerli fonksiyon ise, o zaman

$$\left[{}^{RL}D_{\alpha^+}^{\beta} f(x_0)\right]^r = \left[\left({}^{RL}D_{\alpha^+}^{\beta}\underline{f}\right)(x_0;r), \left({}^{RL}D_{\alpha^+}^{\beta}\overline{f}\right)(x_0;r)\right], \tag{2.59}$$

dir. ve

ii. Eğer f, ${}^{RL}[(ii)-\beta]$-türevlenebilir fuzzy değerli fonksiyon ise, o zaman

$$\left[{}^{RL}D_{\alpha^+}^{\beta} f(x_0)\right]^r = \left[\left({}^{RL}D_{\alpha^+}^{\beta}\overline{f}\right)(x_0;r), \left({}^{RL}D_{\alpha^+}^{\beta}\underline{f}\right)(x_0;r)\right], \tag{2.60}$$

dir. burada

$$\left({}^{RL}D_{\alpha^+}^{\beta}\underline{f}\right)(x_0;r) = \left[\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{\underline{f}(t;r)dt}{(x-t)^{\beta}}\right]_{x=x_0}, \tag{2.61}$$

ve

$$\left({}^{RL}D_{\alpha^+}^{\beta}\overline{f}\right)(x_0;r) = \left[\frac{1}{\Gamma(1-\beta))}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{\overline{f}(t;r)dt}{(x-t)^{\beta}}\right]_{x=x_0}, \tag{2.62}$$

dır.

İspat: Sadece durum ${}^{RL}[(i)-\beta]$-türevlenebilir için ispatlıyoruz ve durum ${}^{RL}[(ii)-\beta]$-türevlenebilir için bir önceki ile tamamen aynıdır ve dolayısıyla göz ardı edilir. f'nin

${}^{RL}[(i)-\beta]$-türevlenebilirini ve $x_0 \in (a,b)$ göz önüne alalım, o zaman aşağıdaki

$$[\Phi(x_0+h) \ominus \Phi(x_0)]^r = \left[\underline{\Phi}(x_0+h;r) \ominus \underline{\Phi}(x_0;r), \overline{\Phi}(x_0+h;r) \ominus \overline{\Phi}(x_0;r)\right],$$

$$[\Phi(x_0) \ominus \Phi(x_0-h)]^r = \left[\underline{\Phi}(x_0;r) \ominus \underline{\Phi}(x_0-h;r), \overline{\Phi}(x_0;r) \ominus \overline{\Phi}(x_0-h;r)\right],$$

elde edilir, $\frac{1}{h}$ ile çarpılırsa aşağıdaki

$$\frac{[\Phi(x_0+h)\ominus\Phi(x_0)]^r}{h} = \left[\frac{\underline{\Phi}(x_0+h;r)\ominus\underline{\Phi}(x_0;r)}{h}, \frac{\overline{\Phi}(x_0+h;r)\ominus\overline{\Phi}(x_0;r)}{h}\right],$$

$$\frac{[\Phi(x_0)\ominus\Phi(x_0-h)]^r}{h} = \left[\frac{\underline{\Phi}(x_0;r)\ominus\underline{\Phi}(x_0-h;r)}{h}, \frac{\overline{\Phi}(x_0;r)\ominus\overline{\Phi}(x_0-h;r)}{h}\right],$$

elde edilir, Limit alarak

$$\left[\left({}^{RL}D_{a^+}^{\beta} f\right)(x_0)\right]^r = \left[\left({}^{RL}D_{a^+}^{\beta}\right) f(x_0;r), \left({}^{RL}D_{a^+}^{\beta}\right) f(x_0;r)\right],$$

elde edilir, ve durum (i) için teorem ispatlanır.

Lemma 2.8.3. $0<\beta<1$ ve $f(x) \in L_p^{\mathbb{F}}(a,b)$, $1 \le p < \infty$ ise, o zaman aşağıdaki eşitlik ${}^{RL}[(i)-\beta]$- türevlenebilir durum için $[a,b]$'nin her noktasında sağlanıyor:

$$\left[{}^{RL}D_{\alpha^+}^{\beta} I_{a^+}^{\beta} f(x)\right]^r = \left[\underline{f}(x;r), \overline{f}(x;r)\right], \quad 0 \le r \le 1, \tag{2.63}$$

ve aşağıdaki eşitlik ${}^{RL}[(ii)-\beta]$-türevlenebilir durum için $[a,b]$'nin her değerine göre sağlanıyor:

$$\left[{}^{RL}D_{\alpha^+}^{\beta} I_{a^+}^{\beta} f(x)\right]^r = \left[\overline{f}(x;r), \underline{f}(x;r)\right], \quad 0 \le r \le 1. \tag{2.64}$$

Lemma 2.8.4. Farz edelim ki $f(x) \in L_p^{\mathbb{F}}(a,b)$, $f_{1-\beta}(x) \in AC^{\mathbb{F}}[a,b]$ ve $0 < \beta < 1$ olsun, o zaman

$$\left(I_{a^+}^{\beta}\, {}^{RL}D_{a^+}^{\beta} f\right)(x) = f(x) \ominus \frac{f_{1-\beta}(a)}{\Gamma(\beta)}(x-a)^{\beta-1}, \tag{2.65}$$

her ${}^{RL}[(i)-\beta]$-türevlenebilir durum için vardır ve

$$\left(I_{a^+}^{\beta}\, {}^{RL}D_{a^+}^{\beta} f\right)(x) = -\left(\frac{f_{1-\beta}(a)}{\Gamma(\beta)}(x-a)^{\beta-1}\right) \ominus \left(-f(x)\right), \tag{2.66}$$

her ${}^{RL}[(ii)-\beta]$-türevlenebilir durum için vardır, burada $f_{1-\beta}(a) = \left(I_{a^+}^{1-\beta} f\right)(a)$ ve bahsedilen Hukuhara farklar mevcuttur. Ayrıca, $-[f(x)]^r = \left[-\overline{f}(x;r), -\underline{f}(x;r)\right]$.

İspat: ${}^{RL}[(i)-\beta]$-türevlenebilir durum için

$$\left[\left(I_{a^+}^{\beta}\, {}^{RL}D_{a^+}^{\beta} f\right)(x)\right]^r = \left[\left(I_{a^+}^{\beta}\, {}^{RL}D_{a^+}^{\beta} \underline{f}\right)(x;r), \left(I_{a^+}^{\beta}\, {}^{RL}D_{a^+}^{\beta} \overline{f}\right)(x;r)\right] = \left[\underline{f}(x;r) \ominus \frac{\underline{f}_{1-\beta}(a)}{\Gamma(\beta)}(x-a)^{\beta-1}, \overline{f}(x;r) \ominus \frac{\overline{f}_{1-\beta}(a)}{\Gamma(\beta)}(x-a)^{\beta-1}\right],$$

vardır ve ${}^{RL}[(ii)-\beta]$-türevlenebilir durum için

$$\left[\left(I_{a^+}^{\beta}\, {}^{RL}D_{a^+}^{\beta} f\right)(x)\right]^r = \left[\left(I_{a^+}^{\beta}\, {}^{RL}D_{a^+}^{\beta} \overline{f}\right)(x;r), \left(I_{a^+}^{\beta}\, {}^{RL}D_{a^+}^{\beta} \underline{f}\right)(x;r)\right] = \left[\overline{f}(x;r) \ominus \frac{\overline{f}_{1-\beta}(a)}{\Gamma(\beta)}(x-a)^{\beta-1}, \underline{f}(x;r) \ominus \frac{\underline{f}_{1-\beta}(a)}{\Gamma(\beta)}(x-a)^{\beta-1}\right],$$

vardır. Her $0 \le r \le 1$ için ispat tamamlanır.

2.8.1. Riemann-Liouville H-türevlenebilirliği Altında Fuzzy Kesirli Diferansiyel Denklemler

Burada, Riemann-Liouville H-türevlenebilirliğin her tip altında orijinal belirsiz fuzzy kesirli diferansiyel denklemin integral formunu araştıracağız. Öncelikle aşağıdaki belirsiz fuzzy kesirli diferansiyel denklemi göz önüne alalım:

$$\begin{cases} \left({}^{RL}D_{\alpha^+}^{\beta} y\right)(x) = f\big(x, y(x)\big) \\ \left({}^{RL}D_{\alpha^+}^{\beta-1} y\right)(x_0) = {}^{RL}y_0^{(\beta-1)} \in \mathbb{E},\ x_0 \in [a,b] \end{cases}, \tag{2.67}$$

burada $f: (a,b) \times \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ sürekli fuzzy-değerli fonksiyondur ve $x_0 \in [a,b]$ dır.

Lemma 2.8.1.1. $0 < \beta < 1$ ve her $x_0 \in \mathbb{R}$ için fuzzy kesirli diferansiyel denklem (2.67) aşağıdaki integral denklemlerin birine eşdeğerdir:

Eğer $y(t)$, ${}^{RL}[(i) - \beta]$-türevlenebilirse,

$$y(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \left[{}^{RL}y_0^{\beta-1} (x - x_0)^{\beta-1} + \int_{x_0}^{x} \frac{f\big(t, y(t)\big)dt}{(x-t)^{\beta-1}} \right], x \in [x_0, b], \tag{2.68}$$

dir, ve eğer $y(t)$, ${}^{RL}[(ii) - \beta]$-türevlenebilirse,

$$y(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \left[{}^{RL}y_0^{\beta-1} (x - x_0)^{\beta-1} \ominus (-1) \int_{x_0}^{x} \frac{f\big(t, y(t)\big)dt}{(x-t)^{\beta-1}} \right], x \in [x_0, b], \tag{2.69}$$

dir.

İspat. Lemma 2.8.4’i kullanarak ispat açıktır.

2.8.2. Çözümlerin Belirlenmesi

Şimdi, fuzzy lineer kesirli diferansiyel denklemleri için açık çözümleri Riemann-Liouville altında H-türevleri ile ilgili Volterra integral denklemine göre önerilen Lemma 2.8.1.1 ile elde ederiz. Bu amaçla aşağıdaki belirsiz fuzzy kesirli diferansiyel denklemi göz önüne alalım.

$$\begin{cases} \left({}^{RL}D_{\alpha^+}^{\beta} y\right)(x) = \mu y(x) + f(x), \\ \left({}^{RL}D_{\alpha^+}^{\beta-1} y\right)(a) = {}^{RL}y_0^{(\beta-1)} \end{cases}, \tag{2.70}$$

burada $\mu > 0$ ve ${}^{RL}[(i) - \beta]$-türevlenebiliri kullanırız. Dolasıyla, Lemma 2.8.1.1'in uygulanmasıyla denklem (2.70) aşağıdaki Volterra integral denkleme denkdir:

$$y(x) = \frac{{}^{RL}y_0^{(\beta-1)}(x-a)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} + \frac{\mu}{\Gamma(\beta)}\int_a^x \frac{y(t)}{(x-t)^{\beta-1}}\,dt + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\beta-1}}\,dt, \tag{2.71}$$

Bahsedilen fuzzy Volterra integral denklemini çözmek için, ardışık yaklaşım yöntemini kabul ediyoruz. Bu yüzden, bu yaklaşıma göre ayarlıyalım:

$$y_0(x) = \frac{{}^{RL}y_0^{(\beta-1)}(x-a)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}, \tag{2.72}$$

$$y_{n+1}(x) = y_0(x) + \frac{\mu}{\Gamma(\beta)}\int_a^x \frac{y_n(t)}{(x-t)^{\beta-1}}\,dt + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\beta-1}}\,dt, \tag{2.73}$$

tanım 2.8.1'i kullanarak $y_1(x)$'i buluruz

$$y_1(x) = y_0(x) + \mu\left(I_{a^+}^{\beta} y_0\right)(x) + \left(I_{a^+}^{\beta} f\right)(x), \tag{2.74}$$

yani

$$y_1(x) = {}^{RL}y_0^{(\beta-1)} \sum_{k=1}^{2} \frac{\mu^{k-1}(x-a)^{\beta k-1}}{\Gamma(\beta k)} + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\beta-1}} dt, \quad (2.75)$$

olur. Bu şekilde devam edersek, $y_n(x)$'i aşağıdaki gibi bulabiliriz

$$y_n(x) = {}^{RL}y_0^{(\beta-1)} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\mu^{k-1}(x-a)^{\beta k-1}}{\Gamma(\beta k)} + \int_a^x \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{\mu^{k-1}(x-t)^{\beta k-1}}{\Gamma(\beta k)}\right] f(t)dt, \quad (2.76)$$

Sonra, limiti $n \longrightarrow \infty$ alıp ve toplamda indeks k'nin yerine $k-1$'i yazarsak

$$y(x) = {}^{RL}y_0^{(\beta-1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^{k}(x-a)^{\beta k+\beta-1}}{\Gamma(\beta k+\beta)} + \int_a^x \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^{k}(x-t)^{\beta k+\beta-1}}{\Gamma(\beta k+\beta)}\right] f(t)dt, \quad (2.77)$$

elde edilir. Son olarak, $E_{\beta,\beta}(z)$ Mittag-Leffler fonksiyon tanımının uygulanmasıyla, aşağıdaki:

$$y(x) = {}^{RL}y_0^{(\beta-1)}(x-a)^{\beta-1}E_{\beta,\beta}\left[\mu(x-a)^{\beta}\right] + \int_a^x (x-t)^{\beta-1}E_{\beta,\beta}\left[\mu(x-t)^{\beta}\right]f(t)dt, \quad (2.78)$$

elde edilir. Kolaylıkla açık çözümü ${}^{RL}[(ii)-\beta]$-türevlenebilir altında ve $\mu < 0$ varsayımı ile aşağıdaki gibi

$$y(x) = {}^{RL}y_0^{(\beta-1)}(x-a)^{\beta-1}E_{\beta,\beta}\left[\mu(x-a)^{\beta}\right] \ominus \int_a^x (-1)(x-t)^{\beta-1}E_{\beta,\beta}\left[\mu(x-t)^{\beta}\right]f(t)dt, \quad (2.79)$$

genişletebiliriz (Allahviranloo *et al*. 2012).

Örnek 2.8.2.1. Aşağıdaki kesirli diferansiyel denklemi düşünelim

$$\begin{cases} \left({}^{RL}D^{\beta}_{\alpha^+}y\right)(x) = \mu y(x),\ 0 < \beta < 1 \\ \left({}^{RL}D^{\beta-1}_{\alpha^+}y\right)(a) = {}^{RL}y_0^{(\beta-1)} \in \mathbb{E} \end{cases},$$

$y(x)$ ve $f(x)$ fuzzy değer fonksiyonudur. O zaman, $\mu \in \mathbb{R}$ için iki durumu göz önüne alıyoruz.

Durum I. $\mu \in \mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$ olsun, o zaman ${}^{RL}[(i) - \beta]$-türevlenebilir ve denklem (2.78)'i kullanarak, aşağıdaki gibi çözüm

$$\begin{cases} \underline{y}(x;r) = {}^{RL}\underline{y}_0^{(\beta-1)} x^{\beta-1} E_{\beta,\beta}\left[\mu x^{\beta}\right], & 0 \le r \le 1 \\ \overline{y}(x;r) = {}^{RL}\overline{y}_0^{(\beta-1)} x^{\beta-1} E_{\beta,\beta}\left[\mu x^{\beta}\right], & 0 \le r \le 1 \end{cases}, \tag{2.80}$$

elde edilir.

Durum II. $\mu \in \mathbb{R}^- = (-\infty, 0)$ olsun, o zaman ${}^{RL}[(ii) - \beta]$-türevlenebiliri ve denklem (2.79)'u uygulayarak, (2.80) çözümüne benzer bir çözüm elde edilecektir.

Örnek 2.8.2.2. Aşağıdaki alt kesirli diferansiyel denklemi düşünelim

$$\begin{cases} \left({}^{RL}D^{\beta}_{\alpha^+}y\right)(x) = \mu y(x) + f(x),\ 0 < \beta < 1 \\ \left({}^{RL}D^{\beta-1}_{\alpha^+}y\right)(a) = {}^{RL}y_0^{(\beta-1)} \in \mathbb{E} \end{cases},$$

$y(x)$ ve $f(x)$ fuzzy değer fonksiyonudurlar. O zaman örnek 2.8.2.1 gibi, $\mu \in \mathbb{R}$ için iki durumu göz önüne alıyoruz.

Durum I. $\mu \in \mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$ olsun, o zaman ${}^{RL}[(i) - \beta]$-türevlenebilir ve denklem (2.78)'i kullanarak, çözüm aşağıdaki gibidir

$$\begin{cases} \underline{y}(x;r) = {}^{RL}\underline{y}_0^{(\beta-1)}(r)x^{\beta-1}E_{\beta,\beta}\left[\mu(x)^{\beta}\right] + \int_0^x (x-t)^{\beta-1}E_{\beta,\beta}\left[\mu(x-t)^{\beta}\right]\underline{f}(t;r)dt \\ \overline{y}(x;r) = {}^{RL}\overline{y}_0^{(\beta-1)}(r)x^{\beta-1}E_{\beta,\beta}\left[\mu(x)^{\beta}\right] + \int_0^x (x-t)^{\beta-1}E_{\beta,\beta}\left[\mu(x-t)^{\beta}\right]\overline{f}(t;r)dt \end{cases}, \tag{2.81}$$

Durum II. $\mu \in \mathbb{R}^- = (-\infty, 0)$ olsun, o zaman ${}^{RL}[(ii) - \beta]$-türevlenebilir ve denklem (2.79)’u uygulayarak, (2.81) çözümüne benzer bir çözüm elde edilecektir.

2.9. Caputo-tipi H-türevlenebilirliği

Fuzzy Caputo-tipi türev tanımı detaylı bir şekilde M. Caputo tarafından ve bazı kaynaklarda verilmiştir (Caputo 1967; Kilbast *et al*. 2006). Bu yüzden, sadece çalışmamızda kullanacağımız özellikler verilecektir. Bu bölümde, Hukuhara farkı altında fuzzy Caputo-tipi kesirli türevi tanımlıyoruz. Fuzzy çerçevesinde kesirli olmayan benzer tanımları ve ifadeleri üretmek için çalışıyoruz (Pudlubny 1999).

Tanım 2.9.1 (Fuzzy Caputo-tipi Kesirli Türev). $f \in L^{\mathbb{F}}(a,b) \cap C^{\mathbb{F}}[a,b]$ bir fuzzy küme-değer fonksiyonu olsun. Ardından f'in x'de fuzzy Caputo-tipi kesirli türevlenebilir olduğu söylenir o zaman

$$\left({}^{C}D_{a^+}^{\beta} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int_a^x \frac{f'(t)}{(x-t)^{\beta}}dt, \tag{2.82}$$

burada $0 < \beta < 1$, (Ahmadian *et al*. 2013).

$a \geq 0$ ile $\beta > 0$ mertebeli $f(x)$’in Caputo-tipi anlamda kesirli türevi her $m-1 < \beta \leq m,\ m \in \mathbb{N}, x \geq a, f \in C_{-1}^{m}$ için

$${}^{C}D_{a^+}^{\beta} f(x) = I_{a^+}^{m-\beta}\,{}^{C}D_{a^+}^{m} f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\beta)}\int_a^x (x-t)^{m-\beta-1} f^{(m)}(t)dt, \tag{2.83}$$

şeklinde tanımlanır. Yani genel olarak $I_{a^+}^{m-\beta}\,{}^{C}D_{a^+}^{m} \neq {}^{C}D_{a^+}^{m} I_{a^+}^{m-\beta}$ dır.

Aşağıdaki Caputo-tipi kesirli türevinin iki temel özellikleri şunlardır:

1. $f \in C_{-1}^{m},\ m \in \mathbb{N}$ olsun, O zaman ${}^{C}D_{a^+}^{\beta} f,\ 0 \leq \beta \leq m,$ iyi tanımlanmıştır ve ${}^{C}D_{a^+}^{\beta} f \in C_{-1}$.
2. $m-1 < \beta \leq m,\ m \in \mathbb{N}$ ve $f \in C_{\mu}^{m},\ \mu \geq -1$ olsun. O zaman

$$\left(I_{a^+}^{\beta}\,{}^{C}D_{a^+}^{\beta} f\right)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{k}(a) \frac{(x-a)^k}{k!},\ \ a \geq 0, \tag{2.84}$$

3. $\left({}^{C}D_{a^+}^{\beta} I_{a^+}^{\beta}\right)\big(f(x)\big) = f(x),$
4. ${}^{C}D_{a^+}^{\beta} b = 0$, b sabittir,
5. ${}^{C}D_{a^+}^{\beta} x^{\alpha} =$

$$\begin{cases} 0, & \text{her } \beta \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ ve } \beta < m \text{ için} \\ \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1-\beta)} x^{\alpha-\beta}, & \text{her } \beta \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ ve } \beta \geq m \text{ ya } \beta \notin \mathbb{N} \text{ ve } \beta > m-1 \text{ için} \end{cases}$$

Lemma 2.9.1. $f(x)$ sürekli bir fonksiyon ve $[0, b]$ farklılaşma aralığı (entegrasyon) üzerinde bağımsız değişken x'e göre n.defa türevlenebilir olsun. O zaman aşağıdaki ilişki sağlanıyor:

$${}^{C}D_{a^+}^{\beta} f(x) = {}^{RL}D_{a^+}^{\beta}\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} {f_0}^{(k)}\right),\ \ n-1 < \beta < n,\ n \in \mathbb{N}, \tag{2.85}$$

burada, ${f_0}^{(k)} = \left.\frac{d^k f(x)}{dx^k}\right|_{x=0}$ ve ${}^{C}D_{a^+}^{\beta}$ Caputo türev operatörüdür, ${}^{RL}D_{\alpha^+}^{\beta}$ daha yaygın Riemann-Liouville kesirli türev operatörüdür aşağıdaki gibi tanımlanır:

$${}^{RL}D_{a^+}^{\beta} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-n+\beta}} dt. \tag{2.86}$$

İspat. $I^{\beta}_{\alpha^+}$ Riemann-Liouville integral operatörü ve ${}^{C}D^{\beta}_{\alpha^+}$ Caputo-tipi türev operatörü aşağıdaki ilişki içindedir

$$I^{\beta}_{a^+}\,{}^{C}D^{\beta}_{a^+}f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}f_0{}^{(k)},\;\; n-1 < \beta < n,\; n \in \mathbb{N},$$

ve $I^{\beta}_{\alpha^+}$, ${}^{RL}D^{\beta}_{\alpha^+}$ operatörleri birbirine tersi ve bu nedenle, ispat tamamlanır.

Şimdi, fuzzy değerli fonksiyon $f(x)$ için $0 < \beta < 2, \beta \neq 1$ mertebeli Caputo-tipi fuzzy kesirli türevleri tanımlıyoruz.

Tanım 2.9.2. Farz edelim ki $f \in L^{\mathbb{F}}(a,b) \cap C^{\mathbb{F}}[a,b]$ bir fuzzy değerli fonksiyon olsun. $x_0 \in (a,b)$ ve $\Phi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\beta}}$ olsun. Diyelim ki $f(x)$, x_0'da $0 < \beta < 1$ mertebeden Caputo-tipi H-türevlenebilirdir, eğer bir $\left({}^{C}D^{\beta}_{a^+}f\right)(x_0) \in C^{\mathbb{F}}[a,b]$ öyesi varsa, öyle ki her $h > 0$, yeterince küçükse

i. $$ {}^{C}D^{\beta}_{\alpha^+}f(x_0) = \lim_{h\to 0^+}\frac{\Phi(x_0+h)\ominus\Phi(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{\Phi(x_0)\ominus\Phi(x_0-h)}{h}, \tag{2.87}$$

ya da

ii. $$ {}^{C}D^{\beta}_{\alpha^+}f(x_0) = \lim_{h\to 0^+}\frac{\Phi(x_0)\ominus\Phi(x_0+h)}{-h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{\Phi(x_0-h)\ominus\Phi(x_0)}{-h}, \tag{2.88}$$

ya da

iii. $$ {}^{C}D^{\beta}_{\alpha^+}f(x_0) = \lim_{h\to 0^+}\frac{\Phi(x_0+h)\ominus\Phi(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{\Phi(x_0-h)\ominus\Phi(x_0)}{-h}, \tag{2.89}$$

ya da

iv. $${}^{C}D^{\beta}_{a^+}f(x_0) = \lim_{h\to 0^+}\frac{\Phi(x_0)\ominus\Phi(x_0+h)}{-h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{\Phi(x_0)\ominus\Phi(x_0-h)}{h}, \qquad (2.90)$$

dır (Ahmadian *et al*. 2013).

Dikkat: Basitlik için, eğer bu tanım 2.9.2'de durum (i) gibi türevlenebilirse biz fuzzy-değerli fonksiyon f'nin, ${}^{C}[(i)-\beta]$-türevlenebilir olduğunu söyleyebiliriz, eğer bu tanım 2.9.2'de durum (ii) gibi türevlenebilirse fuzzy-değerli fonksiyon f'nin, ${}^{C}[(ii)-\beta]$-türevlenebilir olduğunu söyleyebiliriz.

Teorem 2.9.2. (Salahshour *et al*. 2012) Farz edelim ki $0<\beta<1$ ve $f \in AC^{\mathbb{F}}[a,b]$ olsun, o zaman fuzzy Caputo türevi aşağıdaki gibi fuzzy kesirli Riemann-Liouville integrali operatörünü kullanarak ifade edilebilir ve tüm $0 \le r \le 1$ için:

i. Eğer $f, {}^{C}[(i)-\beta]$-türevlenebilir fuzzy değerli fonksiyon ise, o zaman

$$\left[{}^{C}D^{\beta}_{a^+}f(x)\right]^r = \left[I^{1-\beta}_{a^+}{}^{C}Df(x)\right]^r = \left[\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\frac{d}{dx}\int_a^x\frac{\underline{f}(t;r)dt}{(x-t)^\beta}, \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\frac{d}{dx}\int_a^x\frac{\overline{f}(t;r)dt}{(x-t)^\beta}\right], \qquad (2.91)$$

dır. ve

ii. Eğer $f, {}^{C}[(ii)-\beta]$-türevlenebilir fuzzy değerli fonksiyon ise, o zaman

$$\left[{}^{C}D^{\beta}_{a^+}f(x)\right]^r = \left[I^{1-\beta}_{a^+}{}^{C}Df\right]^r = \left[\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\frac{d}{dx}\int_a^x\frac{\overline{f}(t;r)dt}{(x-t)^\beta}, \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\frac{d}{dx}\int_a^x\frac{\underline{f}(t;r)dt}{(x-t)^\beta}\right], \qquad (2.92)$$

dır.

İspat. ${}^{C}[(i)-\beta]$-türevlenebilir fuzzy değerli fonksiyon $f(x)$'i düşünelim ve $x_0 \in (0,b)$ için,

$$[\Phi(x_0+h)\ominus\Phi(x_0)]^r = \left[\underline{\Phi}(x_0+h;r)-\underline{\Phi}(x_0;r), \overline{\Phi}(x_0+h;r)-\overline{\Phi}(x_0;r)\right],$$

$$[\Phi(x_0)\ominus\Phi(x_0+h)]^r = \left[\underline{\Phi}(x_0;r)-\underline{\Phi}(x_0-h;r), \overline{\Phi}(x_0;r)-\overline{\Phi}(x_0-h;r)\right],$$

elde edilir, $\frac{1}{h}$ ile her iki tarafı çarparak

$$\left[\frac{\Phi(x_0+h)\ominus\Phi(x_0)}{h}\right]^r = \left[\frac{\underline{\Phi}(x_0+h;r)-\underline{\Phi}(x_0;r)}{h}, \frac{\overline{\Phi}(x_0+h;r)-\overline{\Phi}(x_0;r)}{h}\right],$$

$$\left[\frac{\Phi(x_0)\ominus\Phi(x_0+h)}{h}\right]^r = \left[\frac{\underline{\Phi}(x_0;r)-\underline{\Phi}(x_0-h;r)}{h}, \frac{\overline{\Phi}(x_0;r)-\overline{\Phi}(x_0-h;r)}{h}\right],$$

elde edilir, Limit alınarak

$$\left[{}^{RL}D_{a^+}^{\beta} G(x_0)\right]^r = \left[{}^{RL}D_{a^+}^{\beta}\underline{\Phi}(x_0;r), {}^{RL}D_{a^+}^{\beta}\overline{\Phi}(x_0;r)\right],$$

ve Lemma 2.8.1.1‘i kullanarak

$$\left[{}^{C}D_{a^+}^{\beta} f(x_0)\right]^r = \left[{}^{C}D_{a^+}^{\beta}\underline{f}(x_0;r), {}^{C}D_{a^+}^{\beta}\overline{f}(x_0;r)\right],$$

elde edilir. Durum (i) için teoremi ispatlamış olmuş. Diğer durumlarda, ispat öncekine benzer ve benzer şekilde yapılır.

Teorem 2.9.3. $f \in C^{\mathbb{F}}[a,b]$ göz önüne alalım, o zaman aşağıdakiler sağlanır:

Eğer f, ${}^{C}[(i)-\beta]$-türevlenebilir ise o zaman

$$\left(I_{a^+}^{\beta}\,{}^{C}D_{a^+}^{\beta} f\right)(x) = f(x)\ominus f(a),\ 0<\beta<1, \tag{2.93}$$

dir, ve eğer f, ${}^{C}[(ii)-\beta]$-türevlenebilir ise o zaman

$$\left(I_{a^+}^{\beta}\,{}^{C}D_{a^+}^{\beta} f\right)(x) = -f(a)\ominus\left(-f(x)\right),\ 0<\beta<1, \tag{2.94}$$

dir.

İspat: Reel-değerli fonksiyonlar $\underline{f}$ ve $\overline{f}$ için,

$$\left(I_{a^+}^{\beta}\,{}^{C}D_{a^+}^{\beta}\underline{f}\right)(x;r) = \underline{f}(x;r) - \underline{f}(a;r),$$

$$\left(I_{a^+}^{\beta}\,{}^{C}D_{a^+}^{\beta}\overline{f}\right)(x;r) = \overline{f}(x;r) - \overline{f}(a;r),$$

ve ${}^{C}[(i) - \beta]$-türevlenebilir durum için

$$\left[\left(I_{a^+}^{\beta}\,{}^{C}D_{a^+}^{\beta}f\right)(x)\right]^r = \left[\left(I_{a^+}^{\beta}\,{}^{C}D_{a^+}^{\beta}\underline{f}\right)(x;r), \left(I_{a^+}^{\beta}\,{}^{C}D_{a^+}^{\beta}\overline{f}\right)(x;r)\right] = \left[\underline{f}(x;r) \ominus \underline{f}(a;r), \overline{f}(x;r) \ominus \overline{f}(a;r)\right],$$

vardır ve ${}^{C}[(ii) - \beta]$-türevlenebilir durum için

$$\left[\left(I_{a^+}^{\beta}\,{}^{C}D_{a^+}^{\beta}f\right)(x)\right]^r = \left[\left(I_{a^+}^{\beta}\,{}^{C}D_{a^+}^{\beta}\overline{f}\right)(x;r), \left(I_{a^+}^{\beta}\,{}^{C}D_{a^+}^{\beta}\underline{f}\right)(x;r)\right] = \left[\overline{f}(x;r) \ominus \overline{f}(a;r), \underline{f}(x;r) \ominus \underline{f}(a;r)\right],$$

vardır. Her $0 \leq r \leq 1$ için ispat tamamlanır.

2.9.1. Caputo-tipi H-türevlenebilirliği Altında Fuzzy Kesirli Diferansiyel Denklemler

Şimdi, Orijinal fuzzy kesirli diferansiyel denklemlerine karşılık gelen eşdeğer Volterra integral formunu kullanarak Caputo-tipi H-türevlenebilirliği altında fuzzy kesirli diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini araştıralım.

Öncelikle, aşağıdaki $0 < \beta < 1$ mertebeli fuzzy kesirli diferansiyel denklemi

$$\begin{cases} \left({}^{C}D_{a^+}^{\beta}y\right)(x) = f\big(x, y(x)\big) \\ y(a) \in \mathbb{E} \end{cases}, \tag{2.95}$$

fuzzy başlangıç koşulu ile verebiliriz.

Lemma 2.9.1.1. (Lakshmikantham and Vasundhara Devi 2008) Farz edelim ki $g \in [\Omega, \mathbb{R}]$ olsun. Burada Ω açık bir kümedir, $\mathbb{R}^2$'ye ait (x, u) sıralı çiftleri vardır ve $(x_0, u_0) \in \Omega$. Bu $\left({}^{C}D_{a^+}^{\beta}u\right)(x) = g(x, u),\ u_0(x) = u_0$'ın maksimal çözümü $r(x)$'in varlığını en büyük $[x_0, x_0 + \eta]$ aralğında olduğunu farz edelim. $[x_0, x_1]$, $[x_0, x_0 + \eta]$'da kompakt bir aralık olsun. O zaman, bir $\epsilon_0 > 0$ vardır öyle ki her $0 < \epsilon < \epsilon_0$ için, $\left({}^{C}D_{a^+}^{\beta}u\right)(x) = g(x, u) + \epsilon,\ u_0(x) = u_0 + \epsilon$'nin maksimal çözümü $r(x, \epsilon)$, $[x_0, x_1]$ üzerinde mevcut ve $\lim_{\epsilon \to \infty} r(x, \epsilon) = r(x)$, $[x_0, x_1]$ üzerinde uniformdur.

Lemma 2.9.1.2. (Lakshmikantham and Vasundhara Devi 2008) Farz edelim ki $m: [x_0, x_0 + \eta] \longrightarrow [0, \infty]$ yerel olarak sürekli Hölder olsun, $g \in C\big[[x_0, x_0 + \eta] \times [0, \infty], [0, \infty]\big]$ ve her $x_0 \le x \le x_0 + \eta$ için,

$$D^{\beta}m(x) \le g\big(x, m(x)\big).$$

$r(x)$, $[x_0, x_0 + \eta]$ üzerinde $D^{\beta}u = g(x, u),\ u_0 \ge 0$'ın maksimum çözümü olsun. O zaman

$$m(x) \le r(x), x_0 \le x \le x_0 + \eta,$$

olur. Aşağıdaki lemma fuzzy kesirli diferansiyel denklemleri, fuzzy Volterra integral denklemlerine dönüştürür.

Lemma 2.9.1.3. $0 < \beta < 1$ ve her $x_0 \in \mathbb{R}$ için fuzzy kesirli diferansiyel denklem (2.95) aşağıdaki integral denklemlerin birine eşdeğerdir:

$y(t)$, ${}^{C}[(i)-\beta]$-türevlenebilirse,

$$y(x) = y(a) + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^x \frac{f(t, y(t))dt}{(x-t)^{1-\beta}}, x \in [a,b], \tag{2.96}$$

dir, ve $y(t)$, ${}^{C}[(ii)-\beta]$-türevlenebilirse,

$$y(x) = y(a) \ominus \frac{-1}{\Gamma(\beta)} \int_a^x \frac{f(t, y(t))dt}{(x-t)^{1-\beta}}, x \in [a,b], \tag{2.97}$$

dir.

İspat: İspat, Teorem 2.9.3'ü kullanarak hemen elde edilir.

Teorem 2.9.1.4. (Bede and Gal 2005; Wu, *et al.*1996) farz edelim ki aşağıdaki koşullar sağlanır:

a) $R_0 = [x_0, x_0 + p] \times \overline{B}(y_0, q), p, q > 0$, $y_0 \in \mathbb{E}$, burada $\overline{B}(y_0, q) = \{y \in \mathbb{E} | d(y, y_0) \leq q\}$, $\mathbb{E}$ kapalı bir topu ifade eder ve $f: R_0 \longrightarrow \mathbb{E}$ sürekli bir fonksiyon olsun öyle ki her $(x, y) \in R_0$ için $d\left(\tilde{0}, f(x, y)\right) = \|f(x, y)\| \leq M$ dir ($\tilde{0}$ fuzzy sıfırdır öyle ki bir tekildir).

b) $g: [x_0, x_0 + p] \times [0, q] \longrightarrow \mathbb{E}$, öyle ki $g(x, 0) \equiv 0$ ve $\forall x \in [x_0, x_0 + p]$, $0 \leq u \leq q$ için $0 \leq g(x, u) \leq M_1$, öyle ki $g(x, u)$, u'da azalmayan ve g başlangıç-değer problem $\left({}^{C}D_{a^+}^{\beta} u\right)(x) = f(x, u(x))$, $u(x_0) = 0$'da sadece çözümü $[x_0, x_0 + p]$ üzerinde $u(x) \equiv 0$ dır.

c) $\forall (x, y), (x, z) \in R_0$, $x_1, x_2, s \in [x_0, x_0 + p]$ için $d\left(\frac{f(x,y)}{(x_1-s)^{1-\beta}}, \frac{f(x,z)}{(x_2-s)^{1-\beta}}\right) < \left|(x_1 - s)^{\beta-1} - (x_2 - s)^{\beta-1}\right|. g(x, d(y, z))$ ve $d(y, z) \leq q$.

d) $d > 0$ mevcuttur öyle ki $x \in [x_0, x_0 + d]$, $\hat{y}_n: [x_0, x_0 + d] \longrightarrow \mathbb{E}$ dizisi $y_0(x) = y_0$, $\hat{y}_{n+1}(x) = \hat{y}_0 \ominus \frac{-1}{\Gamma(\beta)} \int_{x_0}^{x} \frac{f(t, \hat{y}_n)}{(x-t)^{1-\beta}} dt$ tarafından her $n \in \mathbb{N}$ için verilmiştir.

O zaman, aşağıdaki fuzzy kesirli diferansiyel denkleminin

$$\begin{cases} \left({}^{C}D_{a^+}^{\beta}y\right)(x) = f\big(x, y(x)\big) \\ y(x_0) = y_0 \in \mathbb{E} \end{cases}, \tag{2.98}$$

iki çözümü elde edilir. ve ${}^{C}[(i)-\beta]$-türevlenebilir ise (2.98) denklem aşağıdaki

$$y: [x_0, x_0 + r] \longrightarrow B(y_0, q),$$
$$y_0(x) = y_0, \quad y_{n+1}(x) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{x_0}^{x} \frac{f\big(t, y_n(t)\big)}{(x-t)^{1-\beta}} dt, \ 0 < \beta \le 1,$$

ardışık iterasyon Volterra integral denklemine yakınsar ve ${}^{C}[(ii)-\beta]$-türevlenebilir ise (2.98) denklem aşağıdaki

$$\hat{y}: [x_0, x_0 + r] \longrightarrow B(y_0, q),$$
$$\hat{y}_0(x) = y_0, \quad \hat{y}_{n+1}(x) = y_0 \ominus \frac{-1}{\Gamma(\beta)} \int_{x_0}^{x} \frac{f\big(t, \hat{y}_n(t)\big)}{(x-t)^{1-\beta}} dt, \ 0 < \beta \le 1,$$

Volterra integral denklemine yakınsar, burada $r = \min\left\{p, \left(\frac{q\Gamma(\beta+1)}{M}\right)^{\frac{1}{\beta}}, \left(\frac{q\Gamma(\beta+1)}{M_1}\right)^{\frac{1}{\beta}}, q\right\}$.

İspat: ispat **(**Salahshour *et al.* 2012)'de verilmiştir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Fuzzy Laplace Dönüşümü İle Fuzzy Kesirli Diferensiyel Denklemlerin Çözümü

Bu bölümde, fuzzy değerli fonksiyonu için fuzzy Laplace dönüşümünü tanımlayalım. Ayrıca, fuzzy Laplace dönüşümünün özelliklerini dikkate alacağız, sonra bir türev teoremi ile, kesirli türevi ve ilgili fuzzy-değerli bir fonksiyonun Laplace dönüşümü arasındaki bağlantı verilmiştir (Salahshour *et al.* 2012).

İlk olarak, Allahviranloo ve Barkhordari (Allahviranloo *et al.* 2010) tarafından fuzzy değerli fonksiyonlar için Laplace dönüşümü önerilmiştir ve bazı tanınmış özellikleri incelenmiştir.

Tanım 3.1.1. (Allahviranloo *et al.* 2010) f sürekli fuzzy değerli fonksiyonu olsun. Bu düzgün olmayan bir fuzzy Riemann-integrallenebilen $f(x)\odot e^{-sx}$'ni $[0,\infty)$ üzerinde olduğunu farz edelim, o zaman $\int_0^\infty f(x)\odot e^{-sx}\,dx$'e fuzzy Laplace dönüşümü denir ve

$$\mathcal{L}\{f(x)\}(s) = \int_0^\infty f(x)\odot e^{-sx}\,dx,\quad (p > 0 \text{ ve tamsayı}), \tag{3.1}$$

ile gösterilir. İkinci bölümdeki teoremlerden dolayı, $0 \le r \le 1$ için:

$$\left[\int_0^\infty f(x)\odot e^{-sx}\right]^r = \left[\int_0^\infty \underline{f}(x;r)\odot e^{-sx}, \int_0^\infty \overline{f}(x;r)\odot e^{-sx}\right],$$

olur. Ayrıca klasik Laplace dönüşümünün tanımını kullanarak

$$\mathcal{L}\left\{\underline{f}(x;r)\right\}(s) = \int_0^\infty \underline{f}(x;r)\odot e^{-sx}\,dx \text{ ve } \mathcal{L}\{\overline{f}(x;r)\} = \int_0^\infty \overline{f}(x;r)\odot e^{-sx}\,dx,$$

ve

$$[\mathcal{L}\{f(x)\}]^r = \left[\mathcal{L}\left\{\underline{f}(x;r)\right\}, \mathcal{L}\{\overline{f}(x;r)\}\right],$$

elde edilir.

Tanım 3.1.2. Ters fuzzy Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(x)\} = \mathcal{L}_s^{-1}\{F(s)\}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(s) \odot e^{sx}ds \quad (s \in \mathbb{R},\ Re(s) = \gamma), \qquad (3.2)$$

şekilde tanımlanır. İkinci bölümdeki teoremlerden dolayı, $0 \leq r \leq 1$ için:

$$\left[\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(s) \odot e^{sx}ds\right]^r = \left[\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \underline{F}(s) \odot e^{sx}ds, \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \overline{F}(s) \odot e^{sx}ds\right],$$

olur. Ayrıca klasik ters Laplace dönüşümünün tanımını kullanarak

$$\mathcal{L}_s^{-1}\{\underline{F}(s;r)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \underline{F}(s) \odot e^{sx}ds \text{ ve } \mathcal{L}_s^{-1}\{\underline{F}(s;r)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \overline{F}(s) \odot e^{sx}ds,$$

ve

$$[\mathcal{L}_s^{-1}\{F(s)\}]^r = \left[\mathcal{L}_s^{-1}\{\underline{F}(s;r)\}, \mathcal{L}_s^{-1}\{\overline{F}(s;r)\}\right],$$

elde edilir.

Teorem 3.1.1. (Allahviranloo *et al.* 2010) f ve g sürekli fuzzy-değerli fonksiyonlar olsun. c_1 ve c_2 keyfi sabitler olmak üzere

$$\mathcal{L}\{(c_1 \odot f(x)) \oplus (c_2 \odot g(x))\} = c_1 \odot \mathcal{L}\{f(x)\} \oplus c_2 \odot \mathcal{L}\{g(x)\},$$

olur.

Lemma 3.1.2. f, $[0,\infty)$'da sürekli fuzzy-değerli fonksiyon ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun. O zaman

$[\lambda \odot \mathcal{L}\{f(x)\}]^r = \lambda \odot [\mathcal{L}\{f(x)\}]^r$ dir.

Lemma 3.1.3. f sürekli bir fuzzy-değerli fonksiyon ve $g(x) \geq 0$ reel değerli bir fonksiyon olsun. Burada $\big(f(x) \odot g(x)\big) \odot e^{-sx}$, $[0,\infty)$ üzerinde düzgün olmayan bir fuzzy Riemann-integrallenebilen olduğunu düşünelim, o zaman

$$\int_0^\infty \big([f(x)]^r \odot g(x)\big) \odot e^{-sx} dx =$$
$$\Big[\int_0^\infty \big(f(x;r) g(x)\big)\, e^{-sx} dx, \int_0^\infty \big(f(x;r) g(x)\big)\, e^{-sx} dx\Big],$$

olur.

Teorem 3.1.4. (İlk Dönüşüm Teoremi): f sürekli bir fuzzy-değerli fonksiyon olsun ve $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s)$, O zaman:

$$\mathcal{L}\{e^{ax} \odot f(x)\} = F(s-a),$$

olur. Burada e^{ax} reel değerli bir fonksiyondur.

$$u_a(x) = \begin{cases} 1, & x \geq a \\ 0, & x < a \end{cases}$$

elektrik sisteminde meydana gelen önemli bir fonksiyon (gecikmeli) birim basamak fonksiyonudur.

Teorem 3.1.5. (İkinci Dönüşüm Teoremi): $F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\}$ olduğunu düşünelim. O zaman

$$\mathcal{L}\{u_a(x) \odot f(x-a)\} = e^{-as} \odot F(s),\ a \geq 0,$$

olur.

İspat: Fuzzy Laplace dönüşümünün tanımından dolayı

$$\int_0^\infty (u_a(x) \odot f(x-a)) \odot e^{-sx}\, dx = \int_0^\infty f(x-a) \odot e^{-sx}\, dx,$$

olur ve $\tau = t - a$ yazarsak, sağ taraftaki integral

$$\int_0^\infty f(\tau) \odot e^{-s(\tau+a)}\, d\tau = e^{-sa} \odot \int_0^\infty f(\tau) \odot e^{-s\tau}\, d\tau = e^{-sa} \odot F(s),$$

olur.

3.1.1. Riemann–Liouville H- türevlenebilirliği Altında Fuzzy Kesirli Diferansiyel Denklemler

Aşağıdaki $m-1 < \beta < m$ mertebeden fuzzy kesirli diferansiyel denklemi, başlangıç koşulu ile

$$\begin{cases} \left({}^{RL}D_{a^+}^{\beta} y\right)(x) = f\big(x, y(x)\big) \\ \left({}^{RL}D_{a^+}^{\beta-1} y\right)(x_0) = {}^{RL}y_0^{(\beta-1)} \in \mathbb{E} \end{cases}, \tag{3.3}$$

problemi olduğunu düşünelim, burada $y \in C^{\mathbb{F}}(a,b) \cap L^{\mathbb{F}}(a,b)$ ve $x_0 \in (a,b)$ dır.

Fuzzy kesirli diferansiyel denklemlerini çözmek için, $\left({}^{RL}D_{a^+}^{\beta} y\right)(x)$, yani y'nin Riemann-Liouville H-türevinin fuzzy Laplace dönüşümünün bilinmesi gerekir. $\mathcal{L}\left\{\left({}^{RL}D_{a^+}^{\beta} y\right)(x)\right\}$'den dolayı $\mathcal{L}\{y(x)\}$ tarafından terimleri yazılabilir:

Teorem 3.1.1.1. (Türev Teoremi): $y \in C_m^{\mathbb{F}}[0,\infty] \cap L^{\mathbb{F}}[0,\infty]$ düşünelim. O zaman:

y, ${}^{RL}[(i)-\beta]$-türevlenebilir ise

$$\mathcal{L}\left\{{}^{RL}D_{a^+}^{\beta}y(x)\right\} = s^{\beta}\mathcal{L}\{y(x)\} - \sum_{k=1}^{m} s^{k-1}\left({}^{RL}D_{a^+}^{\beta-k}y\right)(0),\ m-1<\beta<m, \quad (3.4)$$

dir ve y, ${}^{RL}[(ii)-\beta]$-türevlenebilir ise

$$\mathcal{L}\left\{{}^{RL}D_{a^+}^{\beta}y(x)\right\} = -\sum_{k=1}^{m} s^{k-1}\left({}^{RL}D_{a^+}^{\beta-k}y\right)(0) \ominus \left(-s^{\beta}\mathcal{L}\{y(x)\}\right),\ m-1<\beta<m, \quad (3.5)$$

dir.

İspat: Keyfi sabit $r \in [0,1]$ için

$$\left[s^{\beta}\mathcal{L}\{y(x)\} - \sum_{k=1}^{m} s^{k-1}\left({}^{RL}D_{a^+}^{\beta-k}y\right)(0)\right]^r =$$
$$\left[s^{\beta}\mathcal{L}\left\{\underline{y}(x;r)\right\} - \sum_{k=1}^{m} s^{k-1}\left({}^{RL}D_{a^+}^{\beta-k}\underline{y}\right)(0;r), s^{\beta}\mathcal{L}\{\overline{y}(x;r)\} - \sum_{k=1}^{m} s^{k-1}\left({}^{RL}D_{a^+}^{\beta-k}\overline{y}\right)(0;r)\right],$$

olsun. Mademki y,${}^{RL}[(i)-\beta]$-türevlenebilirdir, o halde

$$\left[\left({}^{RL}D_{a^+}^{\beta}y\right)(x)\right]^r = \left[\underline{\left({}^{RL}D_{a^+}^{\beta}y\right)}(x;r), \overline{\left({}^{RL}D_{a^+}^{\beta}y\right)}(x;r)\right] =$$
$$\left[\left({}^{RL}D_{a^+}^{\beta}\underline{y}\right)(x;r), \left({}^{RL}D_{a^+}^{\beta}\overline{y}\right)(x;r)\right], \quad (3.6)$$

elde edilir. Buradan

$$\mathcal{L}\left\{\underline{\left({}^{RL}D_{a^+}^{\beta}y\right)}(x;r)\right\} = \mathcal{L}\left\{\left({}^{RL}D_{a^+}^{\beta}\underline{y}\right)(x;r)\right\} =$$
$$s^{\beta}\mathcal{L}\left\{\underline{y}(x;r)\right\} - \sum_{k=1}^{m} s^{k-1}\left({}^{RL}D_{a^+}^{\beta-k}\underline{y}\right)(0;r),$$
$$\mathcal{L}\left\{\overline{\left({}^{RL}D_{a^+}^{\beta}y\right)}(x;r)\right\} = \mathcal{L}\left\{\left({}^{RL}D_{a^+}^{\beta}\overline{y}\right)(x;r)\right\} =$$
$$s^{\beta}\mathcal{L}\{\overline{y}(x;r)\} - \sum_{k=1}^{m} s^{k-1}\left({}^{RL}D_{a^+}^{\beta-k}\overline{y}\right)(0;r),$$

elde vardır. O zaman,

$$\left[s^{\beta}\mathcal{L}\{y(x)\} - \sum_{k=1}^{m} s^{k-1}\left({}^{RL}D_{a^+}^{\beta-k}y\right)(0)\right]^r =$$
$$\left[s^{\beta}\mathcal{L}\left\{\underline{y}(x;r)\right\} - \sum_{k=1}^{m} s^{k-1}\left({}^{RL}D_{a^+}^{\beta-k}\underline{y}\right)(0;r), s^{\beta}\mathcal{L}\{\overline{y}(x;r)\} -\right.$$
$$\left.\sum_{k=1}^{m} s^{k-1}\left({}^{RL}D_{a^+}^{\beta-k}\overline{y}\right)(0;r)\right] = \left[\mathcal{L}\left\{\left({}^{RL}D_{a^+}^{\beta}\underline{y}\right)(x;r)\right\}, \mathcal{L}\left\{\left({}^{RL}D_{a^+}^{\beta}\overline{y}\right)(x;r)\right\}\right],$$

olur. $\mathcal{L}$'nin lineerlik özelliğinden

$$\left[s^{\beta}\mathcal{L}\{y(x)\} - \sum_{k=1}^{m} s^{k-1}\left({}^{RL}D_{a^+}^{\beta-k}y\right)(0)\right]^r = \mathcal{L}\left\{\left({}^{RL}D_{a^+}^{\beta}\underline{y}\right)(x;r), \left({}^{RL}D_{a^+}^{\beta}\overline{y}\right)(x;r)\right\},$$

düşünelim, (3.6) denklemini kullanarak,

$$\left[s^{\beta}\mathcal{L}\{y(x)\} - \sum_{k=1}^{m} s^{k-1}\left({}^{RL}D_{a^+}^{\beta-k}y\right)(0)\right]^r = \left[\mathcal{L}\left\{\left({}^{RL}D_{a^+}^{\beta}y\right)(x)\right\}\right]^r\text{'yi}$$

elde edilir. Şimdi y'nin ${}^{RL}[(ii)-\beta]$-türevlenebilir olduğunu kabul edelim, o zaman keyfi sabit $r \in [0,1]$ için

$$\left[-\sum_{k=1}^{m} s^{k-1}\left({}^{RL}D_{a^+}^{\beta-k}y\right)(0) \ominus \left(-s^{\beta}\mathcal{L}\{y(x)\}\right)\right]^r =$$
$$\left[-\sum_{k=1}^{m} s^{k-1}\underline{\left({}^{RL}D_{a^+}^{\beta-k}y\right)}(0;r) \ominus\right.$$
$$\left.\left(-s^{\beta}\mathcal{L}\left\{\underline{y}(x;r)\right\}\right), -\sum_{k=1}^{m} s^{k-1}\overline{\left({}^{RL}D_{a^+}^{\beta-k}y\right)}(0;r) \ominus \left(-s^{\beta}\mathcal{L}\{\overline{y}(x;r)\}\right)\right],$$

elde edilir, Çünkü f, ${}^{RL}[(ii)-\beta]$-türevlenebilirdir. Buradan

$$\left[\left({}^{RL}D^{\beta}_{a^+}y\right)(x)\right]^r = \left[\underline{\left({}^{RL}D^{\beta}_{a^+}y\right)}(x;r), \overline{\left({}^{RL}D^{\beta}_{a^+}y\right)}(x;r)\right] =$$
$$\left[\left({}^{RL}D^{\beta}_{a^+}\underline{y}\right)(x;r), \left({}^{RL}D^{\beta}_{a^+}\overline{y}\right)(x;r)\right],$$

elde edilir. Böylece,

$$\left[-\sum_{k=1}^{m} s^{k-1}\left({}^{RL}D^{\beta-k}_{a^+}y\right)(0) \ominus \left(-s^{\beta}\mathcal{L}[y(x)]\right)\right]^r =$$
$$\left[-\sum_{k=1}^{m} s^{k-1}\left({}^{RL}D^{\beta-k}_{a^+}\underline{y}\right)(0;r) \ominus\right.$$
$$\left.\left(-s^{\beta}\mathcal{L}\left[\underline{y}(x;r)\right]\right), -\sum_{k=1}^{m} s^{k-1}\left({}^{RL}D^{\beta-k}_{a^+}\overline{y}\right)(0;r) \ominus \left(-s^{\beta}\mathcal{L}[\overline{y}(x;r)]\right)\right] =$$
$$\left[\mathcal{L}\left\{\left({}^{RL}D^{\beta}_{a^+}\underline{y}\right)(x;r)\right\}, \mathcal{L}\left\{\left({}^{RL}D^{\beta}_{a^+}\overline{y}\right)(x;r)\right\}\right],$$

olur, Yani,

$$\left[-\sum_{k=1}^{m} s^{k-1}\left({}^{RL}D^{\beta-k}_{a^+}y\right)(0) \ominus \left(-s^{\beta}\mathcal{L}[y(x)]\right)\right]^r =$$
$$\left[\mathcal{L}\left\{\left({}^{RL}D^{\beta}_{a^+}\underline{y}\right)(x;r)\right\}, \mathcal{L}\left\{\left({}^{RL}D^{\beta}_{a^+}\overline{y}\right)(x;r)\right\}\right],$$

dır. O zaman

$$\left[-\sum_{k=1}^{m} s^{k-1}\left({}^{RL}D^{\beta-k}_{a^+}y\right)(0) \ominus \left(-s^{\beta}\mathcal{L}[y(x)]\right)\right]^r = \left[\mathcal{L}\left\{\left({}^{RL}D^{\beta}_{a^+}y\right)(x;r)\right\}\right]^r,$$

olur.

3.1.1.1. Çözümlerin Belirlenmesi

Bu alt bölümde, fuzzy kesirli diferansiyel denklem (3.3)'ü çözmek için fuzzy Laplace dönüşümü ve tersini vereceğiz. Denklem (3.3)'ün her iki tarafının Laplace dönüşümünü alınarak

$$\mathcal{L}\left\{\left({}^{RL}D_{a^+}^{\beta}y\right)(x)\right\} = \mathcal{L}\{f(x, y(x))\}, \tag{3.7}$$

elde edilir. Ardından, Riemann-Liouville H-türevlenebilirliğinin türlerine göre aşağıdaki durumlar vardır:

Durum I: $y(x)$'nin bir ${}^{RL}[(i)-\beta]$-türevlenebilir olduğunu ele alalım, o zaman denklem (3.7) aşağıdaki gibi alt ve üst fonksiyonlara dayalı her $0 \le r \le 1$ için genişletilir:

$$\begin{cases} \mathcal{L}\left\{\underline{f}(x, y(x); r)\right\} = s^{\beta}\mathcal{L}\left\{\underline{y}(x; r)\right\} - \sum_{k=0}^{m-1} s^k \left({}^{RL}D_{a^+}^{\beta-k-1}\underline{y}\right)(0; r), m-1 < \beta < m \\ \mathcal{L}\{\overline{f}(x, y(x); r)\} = s^{\beta}\mathcal{L}\{\overline{y}(x; r)\} - \sum_{k=0}^{m-1} s^k \left({}^{RL}D_{a^+}^{\beta-k-1}\overline{y}\right)(0; r), m-1 < \beta < m \end{cases}, \tag{3.8}$$

burada

$$\begin{cases} \underline{f}(x, y(x); r) = min\left\{f(x, y(x)) \middle| y(x) \in \left[\underline{y}(x; r), \overline{y}(x; r)\right]\right\} \\ \overline{f}(x, y(x); r) = max\left\{f(x, y(x)) \middle| y(x) \in \left[\underline{y}(x; r), \overline{y}(x; r)\right]\right\} \end{cases},$$

dir. (3.8) Lineer sistemini çözmek ve basitleştirmek için

$$\begin{cases} \mathcal{L}\left\{\underline{y}(x; r)\right\} = H_1(s; r) \\ \mathcal{L}\{\overline{y}(x; r)\} = K_1(s; r) \end{cases},$$

alalım, burada $H_1(s;r)$ ve $K_1(s;r)$ (3.8) sisteminin çözümleridir. Ters fuzzy Laplace dönüşümünü kullanarak $\underline{y}(x;r)$ ve $\overline{y}(x;r)$

$$\begin{cases} \underline{y}(x;r) = \mathcal{L}^{-1}\{H_1(s;r)\} \\ \overline{y}(x;r) = \mathcal{L}^{-1}\{K_1(s;r)\} \end{cases},$$

şeklinde hesaplanmıştır.

Durum II: $y(x)$'nin bir ${}^{RL}[(ii)-\beta]$-türevlenebilir olduğunu ele alalım, o zaman denklem (3.3) aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{cases} \mathcal{L}\left\{\underline{f}(x,y(x);r)\right\} = s\mathcal{L}\left\{\underline{y}(x;r)\right\} - \sum_{k=0}^{m-1} s^k \left({}^{RL}D_{a^+}^{\beta-k-1}\underline{y}\right)(0;r) \\ \mathcal{L}\{\overline{f}(x,y(x);r)\} = s\mathcal{L}\{\overline{y}(x;r)\} - \sum_{k=0}^{m-1} s^k\left({}^{RL}D_{a^+}^{\beta-k-1}\overline{y}\right)(0;r) \end{cases}, \tag{3.9}$$

burada

$$\begin{cases} \underline{f}(x,y(x);r) = min\left\{f\big(x,y(x)\big)\Big|y(x) \in \left[\underline{y}(x;r),\overline{y}(x;r)\right]\right\} \\ \overline{f}(x,y(x);r) = max\left\{f\big(x,y(x)\big)\Big|y(x) \in \left[\underline{y}(x;r),\overline{y}(x;r)\right]\right\} \end{cases},$$

dir. (3.9) lineer sistemini çözmek ve basitleştirmek için

$$\begin{cases} \mathcal{L}\left\{\underline{y}(x;r)\right\} = H_2(s;r) \\ \mathcal{L}\{\overline{y}(x;r)\} = K_2(s;r) \end{cases},$$

alalım, burada $H_2(s;r)$ ve $K_2(s;r)$, (3.9) sisteminin çözümleridir. Ters fuzzy Laplace dönüşümünü kullanarak $\underline{y}(x;r)$ ve $\overline{y}(x;r)$

$$\begin{cases} \underline{y}(x;r) = \mathcal{L}^{-1}\{H_2(s;r)\} \\ \overline{y}(x;r) = \mathcal{L}^{-1}\{K_2(s;r)\} \end{cases},$$

şeklinde hesaplanmıştır.

3.1.2. Caputo-tipi H-türevlenebilirliği Altında Fuzzy Kesirli Diferansiyel Denklemler

Aşağıdaki $m-1<\beta\leq m$ mertebeden fuzzy kesirli diferansiyel denklemi başlangıç koşulu ile

$$\begin{cases} \left({}^{C}D_{a^+}^{\beta}y\right)(x) = f\big(x,y(x)\big), \;\; m-1<\beta\leq m \\ y^{(k)}(0) = y_0^{(k)} \in \mathbb{E}, \;\; k=0,\dots,m-1 \end{cases}, \tag{3.10}$$

problemi düşünelim. Burada $y \in C^{\mathbb{F}}(a,b) \cap L^{\mathbb{F}}(a,b)$ ve $x_0 \in (a,b)$ dır.

Fuzzy kesirli diferansiyel denklemlerini çözmek için, $\left({}^{C}D_{a^+}^{\beta}y\right)(x)$, yani y'nin Caputo-tipi H-türevinin fuzzy Laplace dönüşümünün bilinmesi gerekir. $\mathcal{L}\left\{\left({}^{C}D_{a^+}^{\beta}y\right)(x)\right\}$'den dolayı $\mathcal{L}\{y(x)\}$ tarafından terimleri yazılabilir:

Teorem 3.1.2.1. (Türev Teoremi): Farz edelim ki $y \in C_m^{\mathbb{F}}[0,\infty] \cap L^{\mathbb{F}}[0,\infty]$ olsun, o zaman:

$y^{(m-1)}(x)$, ${}^{C}[(i)-\beta]$-türevlenebilir ise

$$\mathcal{L}\left\{{}^{C}D_{a^+}^{\beta}y(x)\right\} = s^{\beta}\mathcal{L}\{y(x)\} \ominus \sum_{k=0}^{m-1} s^{\beta-k-1}y^{(k)}(0), \;\; m-1<\beta\leq m, \tag{3.11}$$

dir. Ve $y^{(m-1)}(x)$, ${}^{C}[(ii)-\beta]$-türevlenebilir ise

$$\mathcal{L}\left\{{}^{C}D_{a^+}^{\beta}y(x)\right\} = -\sum_{k=0}^{m-1} s^{\beta-k-1}y^{(k)}(0) \ominus \left(-s^{\beta}\mathcal{L}y(x)\right), \;\; m-1<\beta\leq m, \quad (3.12)$$

dir.

İspat. Keyfi sabit $r \in [0,1]$ için

$$\left[s^{\beta}\mathcal{L}\{y(x)\} - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\beta-k-1}y^{(k)}(0)\right]^{r} =$$
$$\left[s^{\beta}\mathcal{L}\left\{\underline{y}(x;r)\right\} - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\beta-k-1}\underline{y}^{(k)}(0;r)\,, s^{\beta}\mathcal{L}\left\{\underline{y}(x;r)\right\} - \right.$$
$$\left.\sum_{k=0}^{m-1} s^{\beta-k-1}\underline{y}^{(k)}(0;r)\right], \quad (3.13)$$

elde edilir. Madem ki $y^{(m-1)}(x)$, ${}^{C}[(ii)-\beta]$-türevlenebilirdir,

$$\left[\left({}^{C}D_{a^+}^{\beta}y\right)(x)\right]^{r} = \left[\underline{\left({}^{C}D_{a^+}^{\beta}y\right)}(x;r), \overline{\left({}^{C}D_{a^+}^{\beta}y\right)}(x;r) = \left[\left({}^{C}D_{a^+}^{\beta}\underline{y}\right)(x;r), \left({}^{C}D_{a^+}^{\beta}\overline{y}\right)(x;r)\right]\right],$$

olsun. Bu nedenle,

$$\underline{\left({}^{C}D_{a^+}^{\beta}y\right)}(x;r) = \left({}^{C}D_{a^+}^{\beta}\underline{y}\right)(x;r) = s^{\beta}\mathcal{L}\left\{\underline{y}(x;r)\right\} - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\beta-k-1}\underline{y}^{(k)}(0;r),$$
$$\overline{\left({}^{C}D_{a^+}^{\beta}y\right)}(x;r) = \left({}^{C}D_{a^+}^{\beta}\overline{y}\right)(x;r) = s^{\beta}\mathcal{L}\left\{\underline{y}(x;r)\right\} - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\beta-k-1}\underline{y}^{(k)}(0;r),$$

olur. O zaman,

$$\left[s^{\beta}\mathcal{L}\{y(x)\} \ominus \sum_{k=0}^{m-1} s^{\beta-k-1}y^{(k)}(0)\right]^{r} = \left[\mathcal{L}\left\{\left({}^{C}D_{a^+}^{\beta}\underline{y}\right)(x;r)\right\}, \mathcal{L}\left\{\left({}^{C}D_{a^+}^{\beta}\overline{y}\right)(x;r)\right\}\right],$$

olur. Böylece

$$\left[s^{\beta}\mathcal{L}\{y(x)\} \ominus \sum_{k=0}^{m-1} s^{\beta-k-1}y^{(k)}(0)\right]^{r} = \mathcal{L}\left\{\left[\left({}^{C}D_{a^+}^{\beta}\underline{y}\right)(x;r), \left({}^{C}D_{a^+}^{\beta}\overline{y}\right)(x;r)\right]\right\},$$

elde edilir. Buradan

$$s^{\beta}\mathcal{L}\{y(x)\} \ominus \sum_{k=0}^{m-1} s^{\beta-k-1}y^{(k)}(0) = \mathcal{L}\left\{\left({}^{C}D_{a^{+}}^{\beta}y\right)(x)\right\},$$

elde edilir. Şimdi, farz edelim ki $y^{(m-1)}(x)$, ${}^{C}[(ii)-\beta]$-türevlenebilirdir, o zaman keyfi sabit $r \in [0,1]$ için

$$\left[-\sum_{k=0}^{m-1} s^{\beta-k-1}y^{(k)}(0) \ominus \left(-s^{\beta}\mathcal{L}\{y(x)\}\right)\right]^{r} = \left[-\left({}^{C}D_{a^{+}}^{\beta}\overline{y}\right)(x;r), -\left({}^{C}D_{a^{+}}^{\beta}\underline{y}\right)(x;r)\right],$$

olsun,

$$-\left({}^{C}D_{a^{+}}^{\beta}\overline{y}\right)(x;r) = -\sum_{k=0}^{m-1} s^{\beta-k-1}\overline{y}^{(k)}(0) \ominus \left(-s^{\beta}\mathcal{L}\{\overline{y}(x)\}\right),$$
$$-\left({}^{C}D_{a^{+}}^{\beta}\overline{y}\right)(x;r) = -\sum_{k=0}^{m-1} s^{\beta-k-1}\underline{y}^{(k)}(0) \ominus \left(-s^{\beta}\mathcal{L}\left\{\underline{y}(x)\right\}\right).$$

Mademki $y^{(m-1)}(x)$, ${}^{C}[(ii)-\beta]$-türevlenebilirdir,

$$\left[\left({}^{C}D_{a^{+}}^{\beta}y\right)(x)\right]^{r} = \left[\overline{\left({}^{C}D_{a^{+}}^{\beta}y\right)}(x;r), \underline{\left({}^{C}D_{a^{+}}^{\beta}y\right)}(x;r)\right] = \left[\left({}^{C}D_{a^{+}}^{\beta}\overline{y}\right)(x;r), \left({}^{C}D_{a^{+}}^{\beta}\overline{y}\right)(x;r)\right],$$

ve bu nedenle,

$$\left[-\sum_{k=0}^{m-1} s^{\beta-k-1}y^{(k)}(0) \ominus \left(-s^{\beta}\mathcal{L}\{y(x)\}\right)\right]^{r} =$$
$$\left[s^{\beta}\mathcal{L}\{\overline{y}(x;r)\} - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\beta-k-1}\overline{y}^{(k)}(0;r)\,, s^{\beta}\mathcal{L}\left\{\underline{y}(x;r)\right\} - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\beta-k-1}\underline{y}^{(k)}(0;r)\right],$$

olur, bu yüzden

$$\left[-\sum_{k=0}^{m-1} s^{\beta-k-1}y^{(k)}(0) \ominus \left(-s^{\beta}\mathcal{L}\{y(x)\}\right)\right]^{r} = \left[\mathcal{L}\left\{{}^{C}D_{a^{+}}^{\beta}\overline{y}(x;r)\right\}, \mathcal{L}\left\{{}^{C}D_{a^{+}}^{\beta}\underline{y}(x;r)\right\}\right],$$

elde edilir. Böylece,

$$\sum_{k=0}^{m-1} s^{\beta-k-1} y^{(k)}(0) \ominus \left(-s^{\beta}\mathcal{L}\{y(x)\}\right) = \mathcal{L}\left\{{}^{C}D_{a^+}^{\beta} y(x)\right\},$$

Olur. Böylece ispat tamamlanır.

3.1.2.1. Çözümlerin Belirlenmesi

Bu alt bölümde, fuzzy kesirli diferansiyel denklem (3.10)'u çözmek için fuzzy Laplace dönüşümünü ve tersini vereceğiz. Denklem (3.10)'un her iki tarafından Laplace dönüşümünü alarak, aşağıdaki

$$\mathcal{L}\left\{\left({}^{C}D_{a^+}^{\beta} y\right)(x)\right\} = \mathcal{L}\{f(x, y(x))\}, \tag{3.14}$$

elde edilir. Ardından, Caputo-tipi H-türevlenebilirliğin türlerine göre aşağıdaki durumlarda vardır:

Durum I: $y(x)$'in bir ${}^{C}[(i)-\beta]$-türevlenebilir olduğunu göz önüne alalım, o zaman denklem (3.14) aşağıdaki gibi alt ve üst fonksiyonlara dayalı her $0 \le r \le 1$ için genişletilir:

$$\begin{cases} \mathcal{L}\left\{\underline{f}(x, y(x))\right\} = s^{\beta}\mathcal{L}\left\{\underline{y}(x;r)\right\} - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\beta-k-1}\underline{y}^{(k)}(0;r), & m-1 < \beta \le m \\ \mathcal{L}\{\overline{f}(x, y(x))\} = s^{\beta}\mathcal{L}\{\overline{y}(x;r)\} - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\beta-k-1}\overline{y}^{(k)}(0;r), & m-1 < \beta \le m \end{cases}, \tag{3.15}$$

burada

$$\begin{cases} \underline{f}(x, y(x); r) = min\left\{f(x, y(x)) \middle| y(x) \in \left[\underline{y}(x;r), \overline{y}(x;r)\right]\right\} \\ \overline{f}(x, y(x); r) = max\left\{f(x, y(x)) \middle| y(x) \in \left[\underline{y}(x;r), \overline{y}(x;r)\right]\right\} \end{cases},$$

dir. (3.15) Lineer sistemini çözmek ve basitleştirmek için

$$\begin{cases} \mathcal{L}\left\{\underline{y}(x;r)\right\} = H_1(s;r) \\ \mathcal{L}\{\overline{y}(x;r)\} = K_1(s;r) \end{cases},$$

alalım. Burada $H_1(s;r)$ ve $K_1(s;r)$, (3.15) sisteminin çözümleridir. Fuzzy ters Laplace dönüşümünü kullanarak $\underline{y}(x;r)$ ve $\overline{y}(x;r)$

$$\begin{cases} \underline{y}(x;r) = \mathcal{L}^{-1}\{H_1(p;r)\} \\ \overline{y}(x;r) = \mathcal{L}^{-1}\{K_1(p;r)\} \end{cases},$$

şeklinde hesaplanmıştır.

Durum II: $y(x)$'nin bir ${}^{C}[(ii)-\beta]$-türevlenebilir olduğunu ele alalım, o zaman denklem (3.14) aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{cases} \mathcal{L}\left\{\underline{f}\big(x,y(x)\big)\right\} = s\mathcal{L}\left\{\underline{y}(x;r)\right\} - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\beta-k-1}\underline{y}^{(k)}(0;r), \;\; m-1<\beta\le m \\ \mathcal{L}\left\{\overline{f}\big(x,y(x)\big)\right\} = s\mathcal{L}\{\overline{y}(x;r)\} - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\beta-k-1}\overline{y}^{(k)}(0;r), \;\; m-1<\beta\le m \end{cases}, \quad (3.16)$$

burada

$$\begin{cases} \underline{f}(x,y(x);r) = min\left\{f\big(x,y(x)\big)\Big|y(x)\in\left[\underline{y}(x;r),\overline{y}(x;r)\right]\right\} \\ \overline{f}(x,y(x);r) = max\left\{f\big(x,y(x)\big)\Big|y(x)\in\left[\underline{y}(x;r),\overline{y}(x;r)\right]\right\} \end{cases},$$

dir. (3.16) lineer sistemini çözmek ve basitleştirmek için

$$\begin{cases} \mathcal{L}\left\{\underline{y}(x;r)\right\} = H_2(s;r) \\ \mathcal{L}\{\overline{y}(x;r)\} = K_2(s;r) \end{cases},$$

alalım. Burada $H_2(s;r)$ ve $K_2(s;r)$ (3.16) sisteminin çözümleridir. Fuzzy ters Laplace dönüşümünü kullanarak $\underline{y}(x;r)$ ve $\overline{y}(x;r)$

$$\begin{cases} \underline{y}(x;r) = \mathcal{L}^{-1}\{H_2(s;r)\} \\ \overline{y}(x;r) = \mathcal{L}^{-1}\{K_2(s;r)\} \end{cases},$$

şeklinde hesaplanmıştır.

3.2. Kesirli Euler Yöntemi İle Fuzzy Kesirli Başlangıç Değer Probleminin Çözümleri

Bu bölümde, fuzzy kesirli başlangıç değer problemini çözmek için Caputo-tipi fuzzy kesirli türevi altında bir modifiye edilmiş kesirli Euler yöntemini sunuyoruz. Modifiye edilmiş kesirli Euler yöntemi bir genelleştirilmiş Taylor formülünün basitleştirilmişidir ve bir modifiye edilmiş yamuk kuralı başlangıç değer problemini çözmek için $\beta \in (0,1)$ mertebeli fuzzy kesirli diferansiyel denklem altında uygulanır.

3.2.1. Modifiye Edilmiş Yamuk Kuralı

Bu alt bölümde de, modifiye edilmiş yamuk kuralını sunuyoruz, Bu kural kesirli integral $I^{\beta} f(x)$'i tahmin etmek için belirli noktalarda değer fonksiyon toplam ağırlığı ile uygulanılır. $[0,b]$ aralığı adım boyutu $h = \frac{b}{N}$, her $j = 0,1,\dots,N$ için $x_j = jh$ düğümlerin kullanmasıyla N kadar alt $\left[x_j, x_{j+1}\right]$ aralıklarınına bölelim. Modifiye edilmiş yamuk kuralı

$$T(f,h,\beta) = \left((N-1)^{\beta+1} - (N-\beta-1)N^{\beta}\right)\frac{h^{\beta} f(0)}{\Gamma(\beta+2)} + \frac{h^{\beta} f(b)}{\Gamma(\beta+2)} + \sum_{j=1}^{N-1}\left((N-j+1)^{\beta+1} - 2(N-j)^{\beta+1} + (N-j-1)^{\beta+1}\right)\frac{h^{\beta} f(x_j)}{\Gamma(\beta+2)}, \tag{3.17}$$

kesirli integrali

$$\left(I^{\beta} f(x)\right)(b) = T(f,h,b) - E_T(f,h,b),\ \ b > 0, \beta > 0, \tag{3.18}$$

elde eder. Ayrıca, $f(x) \in C^2[0,b]$ ise, sabit C_β yalnızca β'ya bağlıdır dolaysıyla hata terimi $E_T(f,h,b)$

$$|E_T(f,h,b)| \leq C_\beta \|f''\|_\infty b^\beta h^2 = O(h^2), \tag{3.19}$$

olur. $\beta = 1$ ise bu açıktır, o zaman modifiye edilmiş yamuk kuralı (3.17) klasik yamuk kuralına dönüşür. Bu kural her β ve h değerleri için hesaplanmasına benzerdir (Odibat 2006).

3.2.2. Genelleştirilmiş Taylor Formülü

Genelleştirilmiş Taylor formülü, Caputo-tipi kesirli türevi altında aşağıdaki gibi tanıtılmıştır (Odibat and Shawagfeh 2007).

Teorem 3.2.2.1 (Genelleştirilmiş Ortalama Değer Teoremi). $f(x) \in \mathbb{C}^{\mathbb{F}}[0,b]$ ve her $0 < \beta \leq 1$ için ${}^{C}D_{0^+}^{\beta} f(x) \in C(0,b]$ olsun. O zaman

$f(x)$, ${}^{C}[(i) - \beta]$-türevlenebilirse,

$$f(x) = f(0^+) + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\left({}^{C}D_{0^+}^{\beta} f\right)(x_0).\,x^\beta, \tag{3.20}$$

dir. Ve $f(x)$, ${}^{C}[(ii) - \beta]$-türevlenebilirse,

$$f(x) = f(0^+) \ominus (-1)\frac{1}{\Gamma(\beta)}\left({}^{C}D_{0^+}^{\beta} f\right)(x_0).\,x^\beta, \tag{3.21}$$

dir. Burada $x_0 \in [0, x]$, $\forall x \in (0, b]$ dır.

İspat. Riemann-Liouville kesirli integral operatörün ve Caputo kesirli türev operatörün tanımlarından

$$\left(I^{\beta}\, {}^{C}D_{0^+}^{\beta} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^x (x-t)^{\beta-1} \left({}^{C}D_{0^+}^{\beta} f\right)(t) dt,$$

elde edilir, integraller için ortalama değer teoreminin uygulamasıyla her $0 \leq x_0 \leq x$ için

$$\left(I^{\beta}\, {}^{C}D_{0^+}^{\beta} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \left({}^{C}D_{0^+}^{\beta} f\right)(x_0) \int_0^x (x-t)^{\beta-1}\, dt = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \left({}^{C}D_{0^+}^{\beta} f\right)(x_0).x^{\beta},$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\left(I^{\beta}\, {}^{C}D_{0^+}^{\beta} f\right)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0^+) \frac{x^k}{k!},\ x > 0,$$

denkleminden

$$\left(I^{\beta}\, {}^{C}D_{0^+}^{\beta} f\right)(x) = f(x) - f(0^+),$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$f(x) = f(0^+) + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \left({}^{C}D_{0^+}^{\beta} f\right)(x_0).x^{\beta},$$

olur. $\beta = 1$ için bu durumda, genelleştirilmiş ortalama değer teoremi klasik ortalama değer teoremine düşnüşür. Önceden genelleştirilmiş Taylor formülünü Caputo anlamında sunduk.

Teorem 3.2.2.2. Her $0 < \beta \leq 1$ için $\left({}^{C}D_{0^+}^{n\beta} f\right)(x), \left({}^{C}D_{0^+}^{(n+1)\beta} f\right)(x) \in \mathbb{C}^{\mathbb{F}}(0, a]$ olsun. O zaman

$$\left(I^{n\beta}\, {}^{C}D_{0^+}^{n\beta} f\right)(x) - \left(I^{(n+1)\beta}\, {}^{C}D_{0^+}^{(n+1)\beta} f\right)(x) = \frac{x^{n\beta}}{\Gamma(n\beta+1)} \left({}^{C}D_{0^+}^{n\beta} f\right)(0^+), \tag{3.22}$$

dir. Burada

$${}^{C}D_{0^+}^{n\beta} = \underbrace{{}^{C}D_{0^+}^{\beta}\, {}^{C}D_{0^+}^{\beta} \ldots {}^{C}D_{0^+}^{\beta}}_{n \text{ defa}},$$

olur.

İspat. İspat etmek için Riemann-Liouville fuzzy kesirli integral operatörü ve Caputo fuzzy kesirli türev operatörü uygulanabilinir ve

$$\left(I^{n\beta}\, {}^{C}D_{0^+}^{n\beta} f\right)(x) - \left(I^{(n+1)\beta}\, {}^{C}D_{0^+}^{(n+1)\beta} f\right)(x) =$$

$$I^{n\beta} \left(\left({}^{C}D_{0^+}^{n\beta} f\right)(x) - \left(I^{\beta}\, {}^{C}D_{0^+}^{\beta}\right)\left({}^{C}D_{0^+}^{n\beta} f\right)(x) \right) = I^{n\beta} \left(\left({}^{C}D_{0^+}^{n\beta} f\right)(x) - \left(\left({}^{C}D_{0^+}^{n\beta} f\right)(x) - \right.\right.$$

$$\left.\left. \left({}^{C}D_{0^+}^{n\beta} f\right)(0^+) \right)\right) = I^{n\beta}\left({}^{C}D_{0^+}^{n\beta} f\right)(0^+) = \frac{x^{n\beta}}{\Gamma(n\beta+1)} \left({}^{C}D_{0^+}^{n\beta} f\right)(x_0),$$

elde edilir.

Teorem 3.2.2.3. (Genelleştirilmiş Taylor Formülü). $f(x) \in C^{\mathbb{F}}[0, b] \cap L^{\mathbb{F}}[0, b]$ olsun ve farz edelim ki her $k = 0,1, \ldots, n+1$ için ${}^{C}D_{0^+}^{k\beta} f(x) \in C^{\mathbb{E}}[0, b]$ dir. Burada $0 < \beta < 1$, $x_0 \in [0, x]$ ve $x \in (0, b]$. O zaman

$$[f(x)]^r = \left[\underline{f}(x; r), \overline{f}(x; r)\right],$$

$$\underline{f}(x; r) = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^{i\beta}}{\Gamma(i\beta+1)}\, {}^{C}D_{0^+}^{i\beta} \underline{f}(0; r) + \frac{{}^{C}D_{0^+}^{(n+1)\beta} \underline{f}(x_0; r)}{\Gamma((n+1)\beta+1)} x^{(n+1)\beta}, \tag{3.23}$$

$$\overline{f}(x;r)=\sum_{i=0}^{n}\frac{x^{i\beta}}{\Gamma(i\beta+1)}\,{}^{C}D_{0^+}^{i\beta}\overline{f}(0;r)+\frac{{}^{C}D_{0^+}^{(n+1)\beta}\overline{f}(x_0;r)}{\Gamma((n+1)\beta+1)}x^{(n+1)\beta}, \qquad (3.24)$$

olur. Burada her $i=0,1,\dots,n$ için ${}^{C}D_{0^+}^{i\beta}\underline{f}(0;r)={}^{C}D_{0^+}^{i\beta}\underline{f}(x;r)\Big|_{x=0}$ ve ${}^{C}D_{0^+}^{i\beta}\overline{f}(0;r)={}^{C}D_{0^+}^{i\beta}\overline{f}(x;r)\Big|_{x=0}$ olur.

İspat.

$$\left(I^{n\beta}\,{}^{C}D_{0^+}^{n\beta}f\right)(x)-\left(I^{(n+1)\beta}\,{}^{C}D_{0^+}^{(n+1)\beta}f\right)(x)=\frac{x^{n\beta}}{\Gamma(n\beta+1)}\left({}^{C}D_{0^+}^{n\beta}f\right)(0^+),$$

kullanılarak

$$\sum_{i=0}^{n}\left(I^{i\beta}\,{}^{C}D_{0^+}^{i\beta}\underline{f}(x;r)-I^{(i+1)\beta}\,{}^{C}D_{0^+}^{(i+1)\beta}\underline{f}(x;r)\right)=\sum_{i=0}^{n}\frac{x^{i\beta}}{\Gamma(i\beta+1)}\,{}^{C}D_{0^+}^{i\beta}\underline{f}(x_0;r),$$

elde edilir, yani

$$\underline{f}(x;r)-I^{(n+1)\beta}\,{}^{C}D_{0^+}^{(n+1)\beta}\underline{f}(x;r)=\sum_{i=0}^{n}\frac{x^{i\beta}}{\Gamma(i\beta+1)}\,{}^{C}D_{0^+}^{i\beta}\underline{f}(x_0;r), \qquad (3.25)$$

integraller için ortalama değer teoreminni uygulanmasıyla

$$I^{(n+1)\beta}\,{}^{C}D_{0^+}^{(n+1)\beta}\underline{f}(x;r)=\frac{{}^{C}D_{0^+}^{(n+1)\beta}\underline{f}(x_0;r)}{\Gamma((n+1)\beta+1)}\int_0^x(x-t)^{(n+1)\beta}dt=\frac{{}^{C}D_{0^+}^{(n+1)\beta}\underline{f}(x_0;r)}{\Gamma((n+1)\beta+1)}x^{(n+1)\beta}, \qquad (3.26)$$

elde edilir. Şimdi (3.25)’de (3.26)’ı yerine yazarsak ispat tamamlanır.

3.2.3. Kesirli Mertebeli Fuzzy Başlangıç Değer Probleminin Çözümü

Bu bölümde, Caputo-tipi fuzzy kesirli türev altında kesirli mertebeli fuzzy başlangıç değer problemini çözmek için modifiye edilmiş kesirli Euler yöntemi ifade edilecektir. Bu yöntem, kesirli Euler metodu kullanılan her adımında bir tahmin esas alınmaktadır ve bir sonlu değeri elde etmek için düzeltme yaparak için modifiye yamuk kuralı kullanılan her adımda Odibat ve Momani tarafından fuzzy olmayan anlamında önerilmiştir. Bu amaca yönelik olarak, aşağıdaki fuzzy kesirli başlangıç değer problemini dikkate alalım (Mazandarani and Vahidian Kamyad 2013; Odibat and Momani 2008).

$$\begin{cases} {}^{C}D_{0^+}^{\beta}\tilde{y}(x) = f(x,\tilde{y}), \ x \in [0,b], \beta \in (0,1] \\ \tilde{y}(0) = \tilde{y}_0 \in \mathbb{E} \end{cases}, \tag{3.27}$$

Fuzzy kesirli başlangıç değer problem (3.27) aşağıdaki başlangıç değer problemleri ile eşdeğerliği kabul edilebilir

$$\begin{cases} {}^{C}D_{0^+}^{\beta}\underline{y}(x;r) = \underline{f}(x,\tilde{y}) = \underline{f}\left(x,\underline{y}(x;r),\overline{y}(x;r)\right) \\ {}^{C}D_{0^+}^{\beta}\overline{y}(x;r) = \overline{f}(x,\tilde{y}) = \overline{f}\left(x,\underline{y}(x;r),\overline{y}(x;r)\right), \quad x \in [0,b], \beta \in (0,1] \\ \underline{y}(0;r) = \underline{y}_0, \ \overline{y}(0;r) = \overline{y}_0 \end{cases}, \tag{3.28}$$

(3.27)’deki başlangıç değer problemleri aşağıdaki integral denklemlere eşdeğer olabilir

$$\begin{cases} \underline{y}(x;r) = I^{\beta}\underline{f}\left(x,\underline{y}(x;r),\overline{y}(x;r)\right) + \underline{y}(0;r) \\ \overline{y}(x;r) = I^{\beta}\overline{f}\left(x,\underline{y}(x;r),\overline{y}(x;r)\right) + \overline{y}(0;r) \end{cases}, \ \ x \in [0,b], \beta \in (0,1]. \tag{3.29}$$

Farz edelim ki problem (3.27)’in çözümünü bulmak için $[0,b]$ istediğimiz aralık olsun. Aslında, fuzzy başlangıç değer problem (3.27)’i sağlayan bir $\tilde{y}(x)$ fonksiyonu bulamayacağız. Bunun yerine, $\left\{\left(x_j, y\left(x_j\right)\right)\right\}$ noktalar kümesi oluşturulur ve noktalar yakınlaştırmamız için kullanılır. Kolaylık olması için, $[0, b]$ aralığı adım boyutu $h = \frac{b}{N}$ her $j = 0,1, \dots, N$ için $x_j = jh$ düğümleri kullanmasıyla N kadar alt $[x_j, x_{j+1}]$ aralıklarına bölelim, farz edelim ki $\tilde{y}, {}^{C}D_{0^+}^{\beta}\tilde{y}, {}^{C}D_{0^+}^{2\beta}\tilde{y} \in \mathbb{C}^{\mathbb{F}}[0, b]$ olsun ve $x_0 = 0$ ile ilgili $\tilde{y}(x)$ genişletmek için genelleştirilmiş Taylor formülünü kullanıyoruz. Her x değeri için bir c_1 değer vardır, dolaysıyla

$$\begin{cases} \underline{y}(x;r) = \underline{y}(x_0;r) + \frac{x^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} {}^{C}D_{0^+}^{\beta}\underline{y}(x_0;r) + \frac{{}^{C}D_{0^+}^{2\beta}\underline{y}(c_1;r)}{\Gamma(2\beta+1)} x^{2\beta} \\ \overline{y}(x;r) = \overline{y}(x_0;r) + \frac{x^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} {}^{C}D_{0^+}^{\beta}\overline{y}(x_0;r) + \frac{{}^{C}D_{0^+}^{2\beta}\overline{y}(c_1;r)}{\Gamma(2\beta+1)} x^{2\beta} \end{cases}, \tag{3.30}$$

olur. O zaman ${}^{C}D_{0^+}^{\beta}\tilde{y}(x_0;r) = f\left(x_0, \tilde{y}(x_0)\right)$ ve $x_1 = h$, denklem (3.30)'de yerine yazılırsa, Sonuç $\tilde{y}(x_1)$ için

$$\begin{cases} \underline{y}(x_1;r) = \underline{y}(x_0;r) + \frac{h^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} \underline{f}\left(x_0, \underline{y}(x_0), \overline{y}(x_0)\right) + \frac{h^{2\beta}}{\Gamma(2\beta+1)} {}^{C}D_{0^+}^{2\beta}\underline{y}(c_1;r) \\ \overline{y}(x_1;r) = \overline{y}(x_0;r) + \frac{h^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} \overline{f}\left(x_0, \underline{y}(x_0), \overline{y}(x_0)\right) + \frac{h^{2\beta}}{\Gamma(2\beta+1)} {}^{C}D_{0^+}^{2\beta}\overline{y}(c_1;r) \end{cases}, \tag{3.31}$$

elde edilir. h adımı yeteri kadar küçük seçilirse, o zaman ikinci dereceden terimi (içeren $h^{2\beta}$) ihmal edilebilir ve

$$\begin{cases} \underline{y}(x_1;r) = \underline{y}(x_0;r) + \frac{h^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} \underline{f}\left(x_0, \underline{y}(x_0), \overline{y}(x_0)\right) \\ \overline{y}(x_1;r) = \overline{y}(x_0;r) + \frac{h^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} \overline{f}\left(x_0, \underline{y}(x_0), \overline{y}(x_0)\right) \end{cases},$$

elde edilir. İşlem bu şekilde devam edilir ve çözüm $\tilde{y}(x)$ yaklaşık noktaları için bir dizi oluşturur. Kesirli Euler yöntemi için genel formül her $j = 0,1, \dots, N$ için

$$x_{j+1} = x_j + h,$$

$$\begin{cases} \underline{y}(x_{j+1};r) = \dfrac{h^{\beta}\underline{f}\left(x_j,\underline{y}(x_j;r),\overline{y}(x_j;r)\right)}{\Gamma(\beta+1)} + \underline{y}(x_j;r) \\ \overline{y}(x_{j+1};r) = \dfrac{h^{\beta}\overline{f}\left(x_j,\underline{y}(x_j;r),\overline{y}(x_j;r)\right)}{\Gamma(\beta+1)} + \overline{y}(x_j;r) \end{cases}, \ \beta \in (0,1]\,, \qquad (3.32)$$

dir.

3.2.4. Algoritma

Bu bölümde, fuzzy başlangıç değer problem (3.27)'in sayısal çözümü için temel algoritma elde edilecektir. Yeni algoritma modifiye edilmiş yamuk kuralına ve fuzzy kesirli Euler yöntemine dayanmaktadır.

$g(x)$ net sürekli bir fonksiyon ve $[0,b]$ farklılaşma aralığı (entegrasyon) üzerinde bağımsız değişken x'in n.defa türevlenebileni olsun. $[0,b]$ aralığında adım boyutu $h=\frac{b}{N}$ her $j=0,1,\dots,N$ için $x_j=jh$ düğümlerin kullanmasıyla N kadar alt $\left[x_j,x_{j+1}\right]$ aralıklarına bölelim. Aşağıdaki Riemann-Liouville integrali düşünelim

$$I^{\beta}g(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^x \frac{g(t)}{(x-t)^{1-\beta}}dt, \quad x,\beta \in \mathbb{R}^{+},$$

modifiye edilmiş yamuk kuralının kullanılmasıyla

$$I^{\beta}g(b) = T(g,h,\beta) - O(h^2),$$

olur. Burada

$$T(g,h,\beta) = \left((N-1)^{\beta+1} - (N-\beta-1)N^{\beta}\right)\frac{h^{\beta}g(0)}{\Gamma(\beta+2)} + \frac{h^{\beta}g(b)}{\Gamma(\beta+2)} + \sum_{j=1}^{N-1}\left((N-j+1)^{\beta+1} - 2(N-j)^{\beta+1} + (N-j-1)^{\beta+1}\right)\frac{h^{\beta}g(x_j)}{\Gamma(\beta+2)},$$

dir. (3.29)'la $x = x_1$ yerine yazılarak ve $h = x_1 - x_0$ ile modifiye edilmiş yamuk kuralı tarafından $I^\beta \underline{f}\left(x, \underline{y}(x;r), \overline{y}(x;r)\right)$ ve $I^\beta \overline{f}\left(x, \underline{y}(x;r), \overline{y}(x;r)\right)$'nin yaklaşımlarını

$$\begin{cases} \underline{y}(x_1;r) = \beta \frac{h^\beta \underline{f}\left(x_0,\underline{y}(x_0;r),\overline{y}(x_0;r)\right)}{\Gamma(\beta+2)} + \frac{h^\beta \underline{f}\left(x_1,\underline{y}(x_1;r),\overline{y}(x_1;r)\right)}{\Gamma(\beta+2)} + \underline{y}(0;r) \\ \overline{y}(x_1;r) = \beta \frac{h^\beta \overline{f}\left(x_0,\underline{y}(x_0;r),\overline{y}(x_0;r)\right)}{\Gamma(\beta+2)} + \frac{h^\beta \overline{f}\left(x_1,\underline{y}(x_1;r),\overline{y}(x_1;r)\right)}{\Gamma(\beta+2)} + \overline{y}(0;r) \end{cases}, \beta \in (0,1], \quad (3.33)$$

elde ederiz. (3.32)'de $\underline{y}(x_1;r)$ ve $\overline{y}(x_1;r)$'in tahminiyle ve (3.33)'de içinde yerine yazılmasıyla,

$$\underline{y}(x_1;r) = \beta \frac{h^\beta \underline{f}\left(x_0,\underline{y}(x_0;r),\overline{y}(x_0;r)\right)}{\Gamma(\beta+2)} + \frac{h^\beta \underline{f}\left(x_1, \frac{h^\beta \underline{f}\left(x_0,\underline{y}(x_0;r),\overline{y}(x_0;r)\right)}{\Gamma(\beta+1)} + \underline{y}(x_0;r), \frac{h^\beta \overline{f}\left(x_0,\underline{y}(x_0;r),\overline{y}(x_0;r)\right)}{\Gamma(\beta+1)} + \overline{y}(x_0;r)\right)}{\Gamma(\beta+2)} + \underline{y}(0;r), \quad \beta \in (0,1],$$

$$(3.34)$$

$$\overline{y}(x_1;r) = \beta \frac{h^\beta \overline{f}\left(x_0,\underline{y}(x_0;r),\overline{y}(x_0;r)\right)}{\Gamma(\beta+2)} + \frac{h^\beta \overline{f}\left(x_1, \frac{h^\beta \underline{f}\left(x_0,\underline{y}(x_0;r),\overline{y}(x_0;r)\right)}{\Gamma(\beta+1)} + \underline{y}(x_0;r), \frac{h^\beta \overline{f}\left(x_0,\underline{y}(x_0;r),\overline{y}(x_0;r)\right)}{\Gamma(\beta+1)} + \overline{y}(x_0;r)\right)}{\Gamma(\beta+2)} + \overline{y}(0;r), \quad \beta \in (0,1],$$

elde edilir. Son olarak, $\left\{x_j = jh: j = 2,3,\ldots,N \text{ ve } h = \frac{b}{N}\right\}$ ile $\beta \in (0,1)$, $x_j \in [0,b]$ için modifiye edilmiş kesirli Euler yöntemi aşağıdaki gibi ifade edilebilir (Odibat *et al.* 2008):

$$\underline{y}(x_j;r) = \left((j-1)^{\beta+1} - (j-\beta-1)j^{\beta}\right)\frac{h^{\beta}\underline{f}\left(x_0,\underline{y}(x_0;r),\overline{y}(x_0;r)\right)}{\Gamma(\beta+2)} + \frac{h^{\beta}}{\Gamma(\beta+2)}\sum_{i=1}^{j-1}\Bigg(\big((j-i+1)^{\beta+1} - 2(j-i)^{\beta+1} + (j-i-1)^{\beta+1}\big)\underline{f}\left(x_i,\underline{y}(x_i;r),\overline{y}(x_i;r)\right)\Bigg) + \frac{h^{\beta}\underline{f}\left(x_j,\frac{h^{\beta}\underline{f}\left(x_{j-1},\underline{y}(x_{j-1};r),\overline{y}(x_{j-1};r)\right)}{\Gamma(\beta+1)}+\underline{y}(x_{j-1};r),\frac{h^{\beta}\overline{f}\left(x_{j-1},\underline{y}(x_{j-1};r),\overline{y}(x_{j-1};r)\right)}{\Gamma(\beta+1)}+\overline{y}(x_{j-1};r)\right)}{\Gamma(\beta+2)} + \underline{y}(x_0;r), \tag{3.35}$$

$$\overline{y}(x_j;r) = \left((j-1)^{\beta+1} - (j-\beta-1)j^{\beta}\right)\frac{h^{\beta}\overline{f}(x_0,\underline{y}(x_0;r),\overline{y}(x_0;r))}{\Gamma(\beta+2)} + \frac{h^{\beta}}{\Gamma(\beta+2)}\sum_{i=1}^{j-1}\Bigg(\big((j-i+1)^{\beta+1} - 2(j-i)^{\beta+1} + (j-i-1)^{\beta+1}\big)\overline{f}\left(x_i,\underline{y}(x_i;r),\overline{y}(x_i;r)\right)\Bigg) + \frac{h^{\beta}\overline{f}\left(x_j,\frac{h^{\beta}\underline{f}\left(x_{j-1},\underline{y}(x_{j-1};r),\overline{y}(x_{j-1};r)\right)}{\Gamma(\beta+1)}+\underline{y}(x_{j-1};r),\frac{h^{\beta}\overline{f}\left(x_{j-1},\underline{y}(x_{j-1};r),\overline{y}(x_{j-1};r)\right)}{\Gamma(\beta+1)}+\overline{y}(x_{j-1};r)\right)}{\Gamma(\beta+2)} + \overline{y}(x_0;r).$$

3.3. Varyasyonel İterasyon Yöntemi İle Fuzzy Kesirli Diferensiyel Denklemlerin Çözümü

He'yin varyasyonel iterasyon yönteminin temel kavramlarını göstermek için

$$T[y(x)]^r = [g(x)]^r, \;\; x \in I, r \in [0,1], \tag{3.36}$$

fuzzy sistemi düşünelim, burada T keyfi $I \subseteq R$ üzerinde tanımlı, yeterince düzgün fuzzy fonksiyonlar y üzerinde çalışan bir diferansiyel operatördür. Fuzzy fonksiyon g verilmiştir ve tüm $x \in I$ için tanımlıdır. T operatörü aşağıdaki lineer ve non-lineer operatörlerine ayrılmak üzere varyasyonel iterasyon yöntemini basitleştirir,

$$\begin{cases} L\left[\underline{y}(x;r)\right] + N\left[\underline{y}(x;r)\right] = \underline{g}(x;r) \\ L[\overline{y}(x;r)] + N[\overline{y}(x;r)] = \overline{g}(x;r) \end{cases}, \tag{3.37}$$

burada L bir lineer operatör, N bir non-lineer operatör ve $g(x)$'de fuzzy sürekli bir fonksiyondur.

Varyasyonel iterasyon yönteminin iterasyoneli tarifi ile (3.37)'in bir düzeltme fonksiyoneli

$$\begin{cases} \underline{y}_{n+1}(x;r) = \underline{y}_n(x;r) + I_{0^+}^{\beta}\left[\lambda\left(L\left[\underline{y}_n(\xi;r)\right] + \underline{N}\left[\underline{\tilde{y}}_n(\xi;r)\right] - \underline{g}(\xi;r)\right)\right] \\ \overline{y}_{n+1}(x;r) = \overline{y}_n(x;r) + I_{0^+}^{\beta}\left[\lambda\left(L\left[\overline{y}_n(\xi;r)\right] + N\left[\overline{\tilde{y}}_n(\xi;r)\right] - \overline{g}(\xi;r)\right)\right] \end{cases}, \tag{3.38}$$

dir. Fuzzy Riemann-Liouville'nin entegral tanımı ile denklem (3.38),

$$\begin{cases} \underline{y}_{n+1}(x;r) = \underline{y}_n(x;r) + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^x (x-\xi)^{\beta-1}\lambda\left(L\left[\underline{y}_n(\xi;r)\right] + \underline{N}\left[\underline{\tilde{y}}_n(\xi;r)\right] - \underline{g}(\xi;r)\right) d\xi \\ \overline{y}_{n+1}(x;r) = \overline{y}_n(x;r) + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^x (x-\xi)^{\beta-1}\lambda\left(L\left[\underline{y}_n(\xi;r)\right] + \underline{N}\left[\underline{\tilde{y}}_n(\xi;r)\right] - \underline{g}(\xi;r)\right) d\xi \end{cases}, \tag{3.39}$$

şeklide elde edilir. Ve (Jumarie 2009)'dakı Lemma 2.1 ile denklem (3.38),

$$\begin{cases} \underline{y}_{n+1}(x;r) = \underline{y}_n(x;r) + \frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\int_0^x \lambda\left(L\left[\underline{y}_n(\xi;r)\right] + \underline{N}\left[\underline{\tilde{y}}_n(\xi;r)\right] - \underline{g}(\xi;r)\right) (d\xi)^{\beta} \\ \overline{y}_{n+1}(x;r) = \overline{y}_n(x;r) + \frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\int_0^x \lambda\left(L\left[\underline{y}_n(\xi;r)\right] + \underline{N}\left[\underline{\tilde{y}}_n(\xi;r)\right] - \underline{g}(\xi;r)\right) (d\xi)^{\beta} \end{cases}, \tag{3.40}$$

şeklide elde edilir. Burada λ varyasyonel teorisiyle belirlenen Lagrange çarpanıdır, $\underline{\tilde{y}}_n$, $\overline{\tilde{y}}_n$ fonksiyonlar ki $\delta\underline{\tilde{y}}_n = 0$ ve $\delta\overline{\tilde{y}}_n = 0$ varyasyonu göstermektediler (He 2007). Lagrange çarpanı belirlendikten sonra, ardışık $\underline{y}_{n+1}$ ve $\overline{y}_{n+1}$ yaklaşımları bir başlangıç fonksiyonlar $\underline{y}_0$ ve $\overline{y}_0$'ı kullanılarak hesaplanacaktır. Sonuç olarak, çözümlerden limiti alınarak,

$$\begin{cases} \underline{y}(x;r) = lim_{n\to\infty}\, \underline{y}_n(x;r) \\ \overline{y}(x;r) = lim_{n\to\infty}\, \overline{y}_n(x;r) \end{cases}, \tag{3.41}$$

fuzzy çözümler elde edilecektir (Khodadadi and Celik 2013).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde, fuzzy Laplace dönüşümü, kesirli Euler yöntemi ve varyasyon iterasyon yöntemiyle fuzzy kesirli diferansiyel denklemlerin nümerik çözülebilirliğinin gösterilebilmesi için bazı denklem modelleri üzerinde çalışılmıştır. Seçilen denklemler örnek modeller olup literatürde bilinir denklemlerdir.

Örnek 4.1. (Fuzzy kesirli nükleer bozunma denklemi): Aşağıdaki fuzzy kesirli diferansiyel denklemi düşünelim

$$\begin{cases} \left({}^{RL}D_{0^+}^{\beta} y\right)(x) = -1 \odot y(x), \;\; \beta > 0, 0 < x \\ \left({}^{RL}D_{0^+}^{\beta-1} y\right)(0) = {}^{RL}y_0^{(\beta-1)} \in \mathbb{E} \end{cases}. \tag{4.1}$$

Burada $y(x)$ bir radyoaktif içinde mevcut radyo nükleotidlerin sayısıdır (Salahshour *et al*. 2012). Denklemin tam çözümü $y(x) = \sum_{k=0}^{m-1} x^{\beta-k-1} E_{\beta,\beta-k}(-x^{\beta})\left({}^{RL}D_{0^+}^{\beta-k-1} y\right)(0)$ dır.

Durum II. $\lambda \in \mathbb{R}^{-} = (-\infty, 0)$ alalım, sonra yukarıdaki denklemin her iki tarafına Laplace dönüşümünü uygulayarak,

$$\mathcal{L}\left\{\left({}^{RL}D_{0^+}^{\beta} y\right)(x)\right\} = \mathcal{L}\{-1 \odot y(x)\},$$

ve ${}^{RL}[(ii) - \beta]$-türevlenebiliri kullanılarak, her $0 \leq r \leq 1$ için

$$\begin{cases} -\mathcal{L}\left\{\underline{y}(x;r)\right\} = s^{\beta}\mathcal{L}\left\{\underline{y}(x;r)\right\} - \sum_{k=0}^{m-1} s^{k}\left({}^{RL}D_{0^+}^{\beta-k-1}\underline{y}\right)(0;r), \; m-1 < \beta < m \\ -\mathcal{L}\{\overline{y}(x;r)\} = s^{\beta}\mathcal{L}\{\overline{y}(x;r)\} - \sum_{k=0}^{m-1} s^{k}\left({}^{RL}D_{0^+}^{\beta-k-1}\overline{y}\right)(0;r), \; m-1 < \beta < m \end{cases},$$

elde ederiz. Sonra

$$\begin{cases} \left(s^{\beta}+1\right)\mathcal{L}\left\{\underline{y}(x;r)\right\} = \sum_{k=0}^{m-1} s^{k}\left({}^{RL}D_{0^+}^{\beta-k-1}\underline{y}\right)(0;r), & 0 \le r \le 1 \\ \left(s^{\beta}+1\right)\mathcal{L}\{\overline{y}(x;r)\} = \sum_{k=0}^{m-1} s^{k}\left({}^{RL}D_{0^+}^{\beta-k-1}\overline{y}\right)(0;r), & 0 \le r \le 1 \end{cases}, \tag{4.2}$$

elde edilir. Sonuç olarak, (4.2)'in her iki tarafına fuzzy ters Laplace dönüşümünü uygulayalım

$$\begin{cases} \underline{y}(x;r) = \sum_{k=0}^{m-1} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^k}{s^{\beta}+1}\right\}\left({}^{RL}D_{0^+}^{\beta-k-1}\underline{y}\right)(0;r), & 0 \le r \le 1 \\ \overline{y}(x;r) = \sum_{k=0}^{m-1} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^k}{s^{\beta}+1}\right\}\left({}^{RL}D_{0^+}^{\beta-k-1}\overline{y}\right)(0;r), & 0 \le r \le 1 \end{cases},$$

ve öncelikle fuzzy Laplace dönüşümün tersine göre, fuzzy Laplace dönüşümü için aşağıdaki formülü kullanırız

$$\mathcal{L}\left\{x^{\mu-1}E_{\nu,\mu}(\delta x^{\nu})\right\} = \frac{s^{\nu-\mu}}{s^{\nu}-\delta}, \; (\nu > 0, \; \mu > 0, \; \delta, s \in \mathbb{C}, Re(s) > 0, \left|\frac{\delta}{s^{\nu}}\right| < 1), \tag{4.3}$$

burada

$$E_{\nu,\mu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\nu n+\mu)}, \; (z \in \mathbb{C}, \nu > 0, \mu \in \mathbb{R}),$$

Mittag-Leffler fonksiyonunun tanımıdır. (4.3)'e Uygun olarak, her $\mu = \beta - k$, $\nu = \beta$ ve $\delta = \lambda$ için

$$\mathcal{L}\left\{x^{\beta-k-1}E_{\beta,\beta-k}\left(-x^{\beta}\right)\right\} = \frac{s^k}{s^{\beta}+1},$$

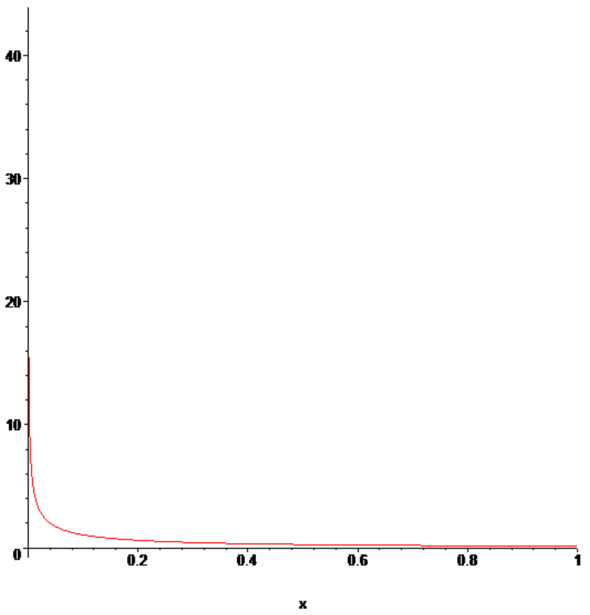
elde edilir. Son olarak, fuzzy kesirli diferansiyel denkleminin çözümü aşağıdaki gibidir:

$$\begin{cases} \underline{y}(x;r) = \sum_{k=0}^{m-1} x^{\beta-k-1}E_{\beta,\beta-k}\left(-x^{\beta}\right)\left({}^{RL}D_{0^+}^{\beta-k-1}\underline{y}\right)(0;r), & 0 \le r \le 1 \\ \overline{y}(x;r) = \sum_{k=0}^{m-1} x^{\beta-k-1}E_{\beta,\beta-k}\left(-x^{\beta}\right)\left({}^{RL}D_{0^+}^{\beta-k-1}\overline{y}\right)(0;r), & 0 \le r \le 1 \end{cases}.$$

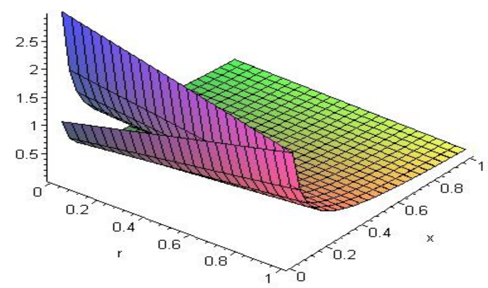
Özel durum için, $\beta = 0.5$ ve $\left({}^{RL}D_{0^+}^{-0,5}y\right)(0;r) = [1]^r = [0.5 + 0.5r, 1.5 - 0.5r]$ ele alalım. O zaman Durum II'in aşağıdaki gibi çözümü elde edilir:

$$[y(x)]^r = [0.5 + 0.5r, 1.5 - 0.5r] \odot x^{-0.5}E_{0.5,0.5}(-x^{0.5}).$$

Ve özellikle tam çözüm $y(x) = x^{-0.5}E_{0.5,0.5}(-x^{0.5})$ dir.



Şekil 4.1. Tam çözüm



Şekil 4.2. Fuzzy sayısal çözümler $[y(x)]^r$, $0 \leq r \leq 1$

Çizelge 4.1. Fuzzy sayısal çözümler $\underline{y}(x;r),\ \ 0 \leq r \leq 1$

	$\underline{y}(x;r)$											y_{Tam}
$x \backslash r$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	
0.0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0.1	0.5303	0.5833	0.6363	0.6894	0.7424	0.7954	0.8484	0.9015	0.9545	1.0075	1.0605	1.0605
0.2	0.3089	0.3398	0.3707	0.4016	0.4324	0.4633	0.4942	0.5251	0.556	0.5869	0.6178	0.6178
0.3	0.2190	0.2409	0.2628	0.2847	0.3066	0.3285	0.3504	0.3723	0.3942	0.4161	0.4380	0.4380
0.4	0.1692	0.1862	0.2031	0.2200	0.2369	0.2538	0.2708	0.2877	0.3046	0.3215	0.3385	0.3385
0.5	0.1374	0.1511	0.1648	0.1786	0.1923	0.2060	0.2198	0.2335	0.2473	0.2610	0.2747	0.2747
0.6	0.1152	0.1267	0.1382	0.1497	0.1612	0.1728	0.1843	0.1958	0.2073	0.2188	0.2303	0.2303
0.7	0.0988	0.1087	0.1186	0.1285	0.1383	0.1482	0.1581	0.1680	0.1779	0.1878	0.1976	0.1976
0.8	0.0863	0.0949	0.1035	0.1121	0.1208	0.1294	0.1380	0.1467	0.1553	0.1639	0.1725	0.1725
0.9	0.0763	0.084	0.0916	0.0992	0.1069	0.1145	0.1221	0.1298	0.1374	0.1451	0.1527	0.1527
1.0	0.0683	0.0751	0.0820	0.0888	0.0956	0.1025	0.1093	0.1161	0.1229	0.1298	0.1366	0.1366

Çizelge 4.2. Fuzzy sayısal çözümler $\underline{y}(x;r),\ \ 0 \leq r \leq 1$

	$\underline{y}(x;r)$											y_{Tam}
$x \backslash r$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	
0.0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0.1	1.5908	1.5378	1.4848	1.4317	1.3787	1.3257	1.2727	1.2196	1.1666	1.1136	1.0605	1.0605
0.2	0.9267	0.8958	0.8649	0.8340	0.8031	0.7722	0.7413	0.7104	0.6796	0.6487	0.6178	0.6178
0.3	0.6571	0.6352	0.6133	0.5914	0.5695	0.5476	0.5257	0.5038	0.4819	0.4599	0.4380	0.4380
0.4	0.5077	0.4908	0.4738	0.4569	0.4400	0.4231	0.4061	0.3892	0.3723	0.3554	0.3385	0.3385
0.5	0.4121	0.3984	0.3846	0.3709	0.3571	0.3434	0.3297	0.3159	0.3022	0.2885	0.2747	0.2747
0.6	0.3455	0.3340	0.3225	0.3110	0.2994	0.2879	0.2764	0.2649	0.2534	0.2419	0.2303	0.2303
0.7	0.2964	0.2866	0.2767	0.2668	0.2569	0.2470	0.2372	0.2273	0.2174	0.2075	0.1976	0.1976
0.8	0.2588	0.2502	0.2416	0.2329	0.2243	0.2157	0.2070	0.1984	0.1898	0.1812	0.1725	0.1725
0.9	0.2290	0.2214	0.2138	0.2061	0.1985	0.1909	0.1832	0.1756	0.1680	0.1603	0.1527	0.1527
1.0	0.2049	0.1981	0.1912	0.1844	0.1776	0.1708	0.1639	0.1571	0.1503	0.1434	0.1366	0.1366

Örnek 4.2. (Fuzzy kesirli nükleer bozunma denklemi): Aşağıdaki fuzzy kesirli diferansiyel denklemi düşünelim

$$\begin{cases} \left({}^{RL}D_{0^+}^{\beta} y\right)(x) = (-1) \odot y(x) \oplus (x+1), \ \ \beta > 0, 0 < x \\ \left({}^{RL}D_{0^+}^{\beta-1} y\right)(0) = {}^{RL}y_0^{(\beta-1)} \in \mathbb{E} \end{cases}, \tag{4.4}$$

(Salahshour *et al*. 2012). Tam çözüm

$$y(x)=\int_0^x (x-t)^{-0.5}E_{0.5,0.5}(-(x-t)^{0.5})(t+1)\,dt+x^{-0.5}E_{0.5,0.5}(-x^{0.5}),$$

ile verilmiştir.

Yukarıdaki denklemin her iki tarafına Laplace dönüşümünü uygulayarak,

$$\mathcal{L}\left\{\left({}^{RL}D_{0^+}^{\beta}y\right)(x)\right\}=\mathcal{L}\{(-1)\odot y(x)\oplus(x+1)\},$$

elde edilir. ${}^{RL}[(ii)-\beta]$-türevlenebilirliği ve Teorem 3.1.1.1'i uygulayarak, her $0\le r\le 1$ ve $m-1<\beta<m$ için

$$\begin{cases}-\mathcal{L}\left\{\underline{y}(x;r)\right\}+\mathcal{L}\{x\}+\mathcal{L}\{1\}=s^{\beta}\mathcal{L}\left\{\underline{y}(x;r)\right\}-\sum_{k=0}^{m-1}s^{k}\left({}^{RL}D_{0^+}^{\beta-k-1}\underline{y}\right)(0;r)\\ -\mathcal{L}\{\overline{y}(x;r)\}+\mathcal{L}\{x\}+\mathcal{L}\{1\}=s^{\beta}\mathcal{L}\{\overline{y}(x;r)\}-\sum_{k=0}^{m-1}s^{k}\left({}^{RL}D_{0^+}^{\beta-k-1}\overline{y}\right)(0;r)\end{cases},$$

elde edilir.

$$\begin{cases}\left(s^{\beta}+1\right)\mathcal{L}\left\{\underline{y}(x;r)\right\}=\mathcal{L}\{x\}+\mathcal{L}\{1\}+\sum_{k=0}^{m-1}s^{k}\left({}^{RL}D_{0^+}^{\beta-k-1}\underline{y}\right)(0;r),\ \ 0\le r\le 1\\ \left(s^{\beta}+1\right)\mathcal{L}\{\overline{y}(x;r)\}=\mathcal{L}\{x\}+\mathcal{L}\{1\}+\sum_{k=0}^{m-1}s^{k}\left({}^{RL}D_{0^+}^{\beta-k-1}\overline{y}\right)(0;r),\ \ 0\le r\le 1\end{cases},$$

Laplace dönüşümlerin yerine eşitliğini yazarak

$$\begin{cases}\left(s^{\beta}+1\right)\mathcal{L}\left\{\underline{y}(x;r)\right\}=\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}+\sum_{k=0}^{m-1}s^{k}\left({}^{RL}D_{0^+}^{\beta-k-1}\underline{y}\right)(0;r),\ \ 0\le r\le 1\\ \left(s^{\beta}+1\right)\mathcal{L}\{\overline{y}(x;r)\}=\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}+\sum_{k=0}^{m-1}s^{k}\left({}^{RL}D_{0^+}^{\beta-k-1}\overline{y}\right)(0;r),\ \ 0\le r\le 1\end{cases}, \quad (4.5)$$

elde edilir, (4.5)'in her iki tarafında fuzzy ters Laplace dönüşümünün uygulayarak,

$$\begin{cases} \underline{y}(x;r) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^\beta+1)}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^\beta+1)}\right\} + \sum_{k=0}^{m-1}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^k}{(s^\beta+1)}\right\}\left({}^{RL}D_{0^+}^{\beta-k-1}\underline{y}\right)(0;r) \\ \overline{y}(x;r) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^\beta+1)}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^\beta+1)}\right\} + \sum_{k=0}^{m-1}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^k}{(s^\beta+1)}\right\}\left({}^{RL}D_{0^+}^{\beta-k-1}\overline{y}\right)(0;r) \end{cases}, \tag{4.6}$$

elde edilir ve fuzzy kesirli diferansiyel denkleminin çözümü

$$\underline{y}(x;r) =$$
$$\int_0^x (x-t)^{\beta-1}E_{\beta,\beta}\left(-(x-t)^\beta\right)(t+1)\,dt +$$
$$\sum_{k=0}^{m-1} x^{\beta-k-1}E_{\beta,\beta-k}\left(-x^\beta\right)\left({}^{RL}D_{0^+}^{\beta-k-1}\underline{y}\right)(0;r),$$
$$\overline{y}(x;r) =$$
$$\int_0^x (x-t)^{\beta-1}E_{\beta,\beta}\left(-(x-t)^\beta\right)(t+1)\,dt +$$
$$\sum_{k=0}^{m-1} x^{\beta-k-1}E_{\beta,\beta-k}\left(-x^\beta\right)\left({}^{RL}D_{0^+}^{\beta-k-1}\overline{y}\right)(0;r).$$

olur. Özel durum için, $\beta = 0.5$ ve $\left({}^{RL}D_{0^+}^{-0,5}y\right)(0;r) = [1]^r = [0.5+0.5r, 1.5-0.5r]$ ele alalım, o zaman aşağıdaki gibi çözüm elde edilir:

$$[y(x)]^r = \int_0^x (x-t)^{-0.5}E_{0.5,0.5}(-(x-t)^{0.5})(t+1)\,dt + [0.5+0.5r, 1.5-0.5r] \odot$$
$$x^{-0.5}E_{0.5,0.5}(-x^{0.5}) =$$
$$\frac{4}{3\sqrt{\pi}}\sqrt{x}\text{hypergeom}([1];[2.5];x) - \frac{1}{2}x^2\text{hypergeom}([1];[3];x) +$$
$$\frac{2}{3\sqrt{\pi}}\sqrt{x}\text{hypergeom}([1];[1.5];x) - x\text{hypergeom}([1];[2];x) + [0.5+0.5r, 1.5-$$
$$0.5r]\left(\frac{1}{\sqrt{\pi t}} - e^x erfc(\sqrt{x})\right).$$

Burada hypergeom aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$\text{hypergeom}([a_1, a_2, \ldots]; [b_1, b_2, \ldots]; z)$ hipergeometrik fonksiyonunu temsil eder. Hipergeometrik fonksiyonu karmaşık argümanlar a_i, b_j ve z için tanımlanmıştır.

$a = [a_1, a_2, \ldots, a_p]$ ve $b = [b_1, b_2, \ldots, b_q]$ için p, q mertebeli Hipergeometrik fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır

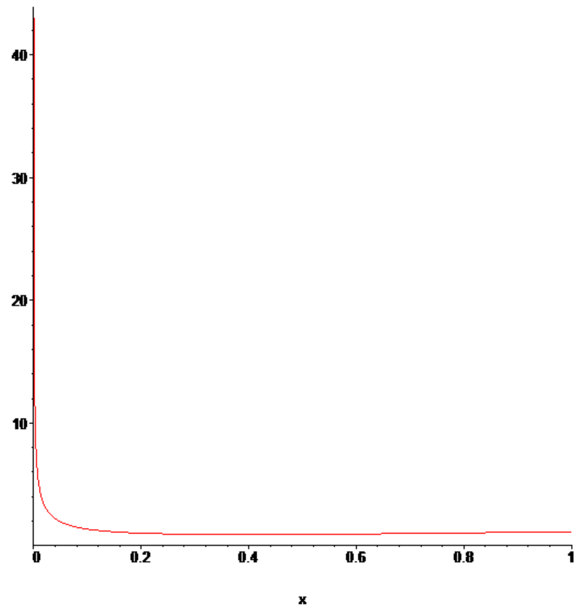
$$ {}_pF_q(a; b; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n (a_2)_n \cdots (a_p)_n}{(b_1)_n (b_2)_n \cdots (b_q)_n} \frac{z^n}{n!}, $$

burada $|z| < 1$ ve $(c)_n$, $n \in \mathbb{N}$ Pochhammer sembolüdür,

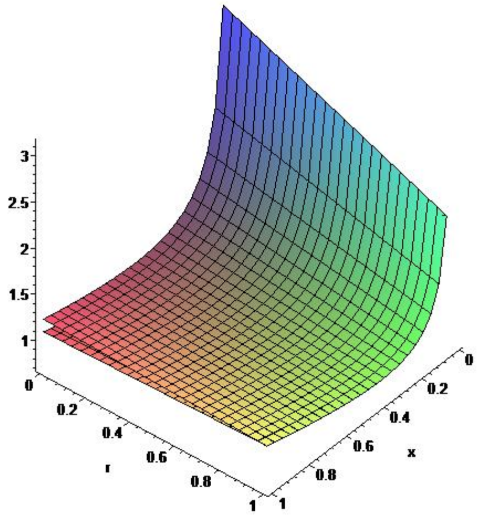
$$ (c)_n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ c(c+1)\ldots(c+n-1) & n > 0 \end{cases}, $$

ile tanımlanır (Kilbas *et al.* 2006).

Ve özellikle tam çözüm $y(x) = \int_0^x (x-t)^{-0.5} E_{0.5,0.5}(-(x-t)^{0.5})(t+1)\,dt + x^{-0.5} E_{0.5,0.5}(-x^{0.5})$ dir.



Şekil 4.3. Tam çözüm



Şekil 4.4. Fuzzy sayısal çözümler $[y(x)]^r, 0 \leq r \leq 1$

Çizelge 4.3. Fuzzy sayısal çözümler $\underline{y}(x;r)$, $0 \leq r \leq 1$

	$\underline{y}(x;r)$											y_{Tam}
x \ r	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	
0.0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0.1	0.8263	0.8793	0.9323	0.9854	1.0384	1.0914	1.1445	1.1975	1.2505	1.3035	1.3566	1.3566
0.2	0.7167	0.7476	0.7785	0.8094	0.8402	0.8711	0.902	0.9329	0.9638	0.9947	1.0256	1.0256
0.3	0.7169	0.7388	0.7608	0.7827	0.8046	0.8265	0.8484	0.8703	0.8922	0.9141	0.9360	0.9360
0.4	0.7484	0.7653	0.7822	0.7991	0.8161	0.8330	0.8499	0.8668	0.8837	0.9007	0.9176	0.9176
0.5	0.7932	0.8069	0.8206	0.8344	0.8481	0.8618	0.8756	0.8893	0.9031	0.9168	0.9305	0.9305
0.6	0.8451	0.8566	0.8681	0.8796	0.8912	0.9027	0.9142	0.9257	0.9372	0.9487	0.9603	0.9603
0.7	0.9013	0.9112	0.9211	0.9310	0.9409	0.9507	0.9606	0.9705	0.9804	0.9903	1.0002	1.0002
0.8	0.9605	0.9692	0.9778	0.9864	0.995	1.0037	1.0123	1.0209	1.0295	1.0382	1.0468	1.0468
0.9	1.0218	1.0295	1.0371	1.0447	1.0524	1.0600	1.0676	1.0753	1.0829	1.0905	1.0982	1.0982
1.0	1.0848	1.0916	1.0984	1.1052	1.1121	1.1189	1.1257	1.1326	1.1394	1.1462	1.1531	1.1531

Çizelge 4.4. Fuzzy sayısal çözümler $\overline{y}(x;r),\ \ 0 \le r \le 1$

x \ r	$\overline{y}(x;r)$											y_{Tam}
	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	
0.0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0.1	1.8868	1.8338	1.7808	1.7278	1.6747	1.6217	1.5687	1.5156	1.4626	1.4096	1.3566	1.3566
0.2	1.3345	1.3036	1.2727	1.2418	1.2109	1.1800	1.1491	1.1182	1.0874	1.0565	1.0256	1.0256
0.3	1.1550	1.1331	1.1112	1.0893	1.0674	1.0455	1.0236	1.0017	0.9798	0.9579	0.9360	0.9360
0.4	1.0868	1.0699	1.0530	1.0361	1.0191	1.0022	0.9853	0.9684	0.9514	0.9345	0.9176	0.9176
0.5	1.0679	1.0542	1.0404	1.0267	1.0129	0.9992	0.9855	0.9717	0.958	0.9443	0.9305	0.9305
0.6	1.0754	1.0639	1.0524	1.0409	1.0294	1.0178	1.0063	0.9948	0.9833	0.9718	0.9603	0.9603
0.7	1.0990	1.0891	1.0792	1.0693	1.0594	1.0496	1.0397	1.0298	1.0199	1.0100	1.0002	1.0002
0.8	1.1331	1.1244	1.1158	1.1072	1.0986	1.0899	1.0813	1.0727	1.0640	1.0554	1.0468	1.0468
0.9	1.1745	1.1669	1.1592	1.1516	1.1440	1.1363	1.1287	1.1211	1.1134	1.1058	1.0982	1.0982
1.0	1.2214	1.2145	1.2077	1.2009	1.1940	1.1872	1.1804	1.1736	1.1667	1.1599	1.1531	1.1531

Örnek 4.3. (Fuzzy kesirli nükleer bozunma denklemi): Aşağıdaki fuzzy kesirli diferansiyel denklemi düşünelim

$$\begin{cases} \left({}^{C}D_{0^+}^{\beta}y\right)(x) = -1 \odot y(x), \quad 0 < x \\ y^{(k)}(0) = y_0^{(k)} \in \mathbb{E},\ k = 0, \dots, m-1 \end{cases}, \tag{4.7}$$

burada, $y(x)$ bir radyoaktif içinde mevcut radyon nüklidlerin sayısıdır (Ahmadian *et al.* 2013). Ve denklemin tam çözümü $y(x) = \sum_{k=0}^{m-1} x^k E_{\beta,k+1}(-x^{\beta}) y^{(k)}(0)$ dır.

Durum II. $-1 \in \mathbb{R}^- = (-\infty, 0)$ alalım, sonra yukarıdaki denklemin her iki tarafına Laplace dönüşümünü uygulayarak,

$$\mathcal{L}\left\{\left({}^{C}D_{0^+}^{\beta}y\right)(x)\right\} = \mathcal{L}\{-1 \odot y(x)\}, \tag{4.8}$$

ve ${}^{C}[(ii) - \beta]$-türevlenebilirliği kullanılarak,

$$\begin{cases} -\mathcal{L}\left\{\underline{y}(x;r)\right\} = s^{\beta}\mathcal{L}\left\{\underline{y}(x;r)\right\} - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\beta-k-1}\underline{y}^{(k)}(0;r), & m-1<\beta\leq m \\ -\mathcal{L}\{\overline{y}(x;r)\} = s^{\beta}\mathcal{L}\{\overline{y}(x;r)\} - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\beta-k-1}\overline{y}^{(k)}(0;r), & m-1<\beta\leq m \end{cases},$$

elde ederiz. Sonra manipülasyonları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{cases} \left(s^{\beta}+1\right)\mathcal{L}\left\{\underline{y}(x;r)\right\} = \sum_{k=0}^{m-1} s^{\beta-k-1}\underline{y}^{(k)}(0;r), & 0\leq r\leq 1 \\ \left(s^{\beta}+1\right)\mathcal{L}\{\overline{y}(x;r)\} = \sum_{k=0}^{m-1} s^{\beta-k-1}\overline{y}^{(k)}(0;r), & 0\leq r\leq 1 \end{cases}. \tag{4.9}$$

Sonuç olarak, (4.9)'un her iki tarafına fuzzy ters Laplace dönüşümünü uygulayalım

$$\begin{cases} \underline{y}(x;r) = \sum_{k=0}^{m-1} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{\beta-k-1}}{s^{\beta}+1}\right\}\underline{y}^{(k)}(0;r), & 0\leq r\leq 1 \\ \overline{y}(x;r) = \sum_{k=0}^{m-1} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{\beta-k-1}}{s^{\beta}+1}\right\}\overline{y}^{(k)}(0;r), & 0\leq r\leq 1 \end{cases}.$$

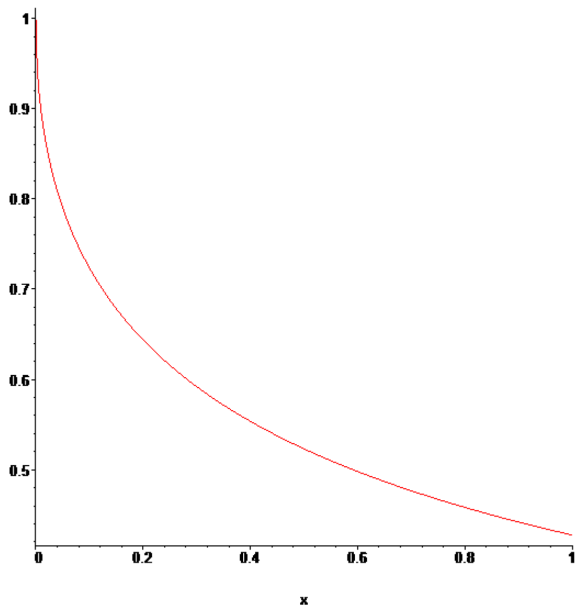
Son olarak, fuzzy kesirli diferansiyel denklemin çözümü aşağıdaki gibidir:

$$\begin{cases} \underline{y}(x;r) = \sum_{k=0}^{m-1} x^{k}E_{\beta,k+1}(-x^{\beta})\underline{y}^{(k)}(0;r), & 0\leq r\leq 1 \\ \overline{y}(x;r) = \sum_{k=0}^{m-1} x^{k}E_{\beta,k+1}(-x^{\beta})\overline{y}^{(k)}(0;r), & 0\leq r\leq 1 \end{cases}. \tag{4.10}$$

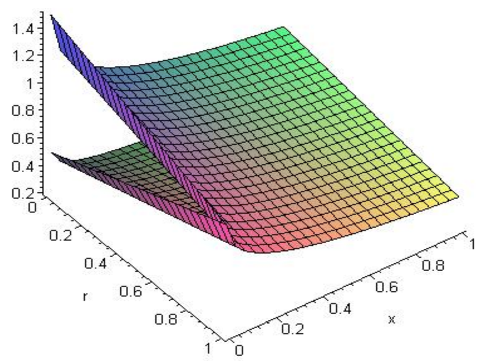
Özel durum için, $\beta = 0.5$ ve $[y(0)]^{r} = [0.5+0.5r, 1.5-0.5r]$ ede alalım. O zaman Durum II'nin aşağıdaki gibi çözümü elde edilir:

$[y(x)]^{r} = [0.5+0.5r, 1.5-0.5r] \odot E_{0.5,1}(-x^{0.5}) = [0.5+0.5r, 1.5-0.5r] \odot \left(e^{x} + e^{x}\left(-1+erfc\left(\sqrt{x}\right)\right)\right).$

Ve özellikle tam çözüm $y(x) = E_{0.5,1}(-x^{0.5})$ dir.



Şekil 4.5. Tam çözüm



Şekil 4.6. Fuzzy yaklaşık çözümler $[y(x)]^r, 0 \leq r \leq 1$

Çizelge 4.5. Fuzzy sayısal çözümler $\underline{y}(x;r), \quad 0 \le r \le 1$

	$\underline{y}(x;r)$											y_{Tam}
x \ r	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	
0.0	0.5000	0.5500	0.6000	0.6500	0.7000	0.7500	0.8000	0.8500	0.9000	0.9500	1.0000	1.0000
0.1	0.3618	0.3980	0.4341	0.4703	0.5065	0.5427	0.5789	0.6150	0.6512	0.6874	0.7236	0.7236
0.2	0.3219	0.3541	0.3863	0.4185	0.4507	0.4828	0.5150	0.5472	0.5794	0.6116	0.6438	0.6438
0.3	0.2960	0.3256	0.3552	0.3848	0.4144	0.4440	0.4736	0.5032	0.5328	0.5624	0.5920	0.5920
0.4	0.2768	0.3045	0.3322	0.3598	0.3875	0.4152	0.4429	0.4706	0.4982	0.5259	0.5536	0.5536
0.5	0.2616	0.2877	0.3139	0.3401	0.3662	0.3924	0.4185	0.4447	0.4708	0.4970	0.5232	0.5232
0.6	0.2490	0.2739	0.2988	0.3237	0.3486	0.3735	0.3984	0.4233	0.4482	0.4731	0.4980	0.4980
0.7	0.2384	0.2622	0.2860	0.3099	0.3337	0.3575	0.3814	0.4052	0.429	0.4529	0.4767	0.4767
0.8	0.2291	0.2520	0.2749	0.2979	0.3208	0.3437	0.3666	0.3895	0.4124	0.4353	0.4582	0.4582
0.9	0.2210	0.2431	0.2652	0.2873	0.3094	0.3315	0.3536	0.3757	0.3978	0.4199	0.4420	0.4420
1.0	0.2138	0.2352	0.2566	0.2779	0.2993	0.3207	0.3421	0.3634	0.3848	0.4062	0.4276	0.4276

Çizelge 4.6. Fuzzy sayısal çözümler $\overline{y}(x;r), \quad 0 \le r \le 1$

	$\overline{y}(x;r)$											y_{Tam}
x \ r	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	
0.0	1.5000	1.4500	1.400	1.3500	1.3000	1.2500	1.2000	1.1500	1.1000	1.0500	1.0000	1.0000
0.1	1.0854	1.0492	1.0130	0.9768	0.9407	0.9045	0.8683	0.8321	0.7959	0.7598	0.7236	0.7236
0.2	0.9657	0.9335	0.9013	0.8691	0.8369	0.8047	0.7725	0.7404	0.7082	0.6760	0.6438	0.6438
0.3	0.8880	0.8584	0.8288	0.7992	0.7696	0.7400	0.7104	0.6808	0.6512	0.6216	0.5920	0.5920
0.4	0.8304	0.8027	0.7750	0.7474	0.7197	0.6920	0.6643	0.6366	0.6090	0.5813	0.5536	0.5536
0.5	0.7847	0.7586	0.7324	0.7063	0.6801	0.6539	0.6278	0.6016	0.5755	0.5493	0.5232	0.5232
0.6	0.7470	0.7221	0.6972	0.6723	0.6474	0.6225	0.5976	0.5727	0.5478	0.5229	0.498	0.4980
0.7	0.7151	0.6912	0.6674	0.6435	0.6197	0.5959	0.5720	0.5482	0.5244	0.5005	0.4767	0.4767
0.8	0.6874	0.6645	0.6415	0.6186	0.5957	0.5728	0.5499	0.5270	0.5041	0.4812	0.4582	0.4582
0.9	0.6630	0.6409	0.6188	0.5967	0.5746	0.5525	0.5304	0.5083	0.4862	0.4641	0.4420	0.4420
1.0	0.6414	0.6200	0.5986	0.5772	0.5559	0.5345	0.5131	0.4917	0.4703	0.4490	0.4276	0.4276

Örnek 4.4. (Fuzzy kesirli nükleer bozunma denklemi): Aşağıdaki fuzzy kesirli diferansiyel denklemi düşünelim

$$\begin{cases} \left({}^{C}D_{0^+}^{\beta}y\right)(x) = (-1)\odot y(x) \oplus (x+1), 0 < \beta, 0 < x \\ y^{(k)}(x_0) = y_0^{(k)} \in \mathbb{E},\ k = 0, \dots, m-1 \end{cases}, \tag{4.11}$$

(Ahmadian *et al*. 2013). Tam çözüm

$$y(x) = \int_0^x (x-t)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}\left(-(x-t)^\beta\right)(t+1)\,dt + \sum_{k=0}^{m-1} x^k E_{\beta,k+1}\left(-x^\beta\right) y^{(k)}(0),$$

ile verilmiştir.

Yukarıdaki denklemin her iki tarafına Laplace dönüşümünü uygulayarak,

$$\mathcal{L}\left\{\left({}^{C}D_{0^+}^{\beta} y\right)(x)\right\} = \mathcal{L}\{(-1) \odot y(x) \oplus (x+1)\}, \tag{4.12}$$

elde edilir. ${}^{C}[(ii)-\beta]$-türevlenebilirliği ve Teorem 3.1.2.1'i uygulayarak, aşağıdaki her $0 \le r \le 1$ ve $m-1 < \beta \le m$ için

$$\begin{cases} -\mathcal{L}\left\{\underline{y}(x;r)\right\} + \mathcal{L}\{x\} + \mathcal{L}\{1\} = s^\beta \mathcal{L}\left\{\underline{y}(x;r)\right\} - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\beta-k-1} \underline{y}^{(k)}(0;r) \\ -\mathcal{L}\{\overline{y}(x;r)\} + \mathcal{L}\{x\} + \mathcal{L}\{1\} = s^\beta \mathcal{L}\{\overline{y}(x;r)\} - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\beta-k-1} \overline{y}^{(k)}(0;r) \end{cases},$$

elde edilir.

$$\begin{cases} \left(s^\beta + 1\right)\mathcal{L}\left\{\underline{y}(x;r)\right\} = \mathcal{L}\{x\} + \mathcal{L}\{1\} + \sum_{k=0}^{m-1} s^{\beta-k-1} \underline{y}^{(k)}(0;r), \ \ 0 \le r \le 1 \\ \left(s^\beta + 1\right)\mathcal{L}\{\overline{y}(x;r)\} = \mathcal{L}\{x\} + \mathcal{L}\{1\} + \sum_{k=0}^{m-1} s^{\beta-k-1} \overline{y}^{(k)}(0;r), \ \ 0 \le r \le 1 \end{cases},$$

Laplace dönüşümlerin yerine eşitliğini yazarak

$$\begin{cases} \left(s^\beta + 1\right)\mathcal{L}\left\{\underline{y}(x;r)\right\} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} + \sum_{k=0}^{m-1} s^{\beta-k-1} \underline{y}^{(k)}(0;r), \ \ 0 \le r \le 1 \\ \left(s^\beta + 1\right)\mathcal{L}\{\overline{y}(x;r)\} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} + \sum_{k=0}^{m-1} s^{\beta-k-1} \overline{y}^{(k)}(0;r), \ \ 0 \le r \le 1 \end{cases}, \tag{4.13}$$

elde edilir, (4.13)'ün her iki tarafında Laplace dönüşümün tersini uygulayarak,

$$\begin{cases} \underline{y}(x;r) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^\beta+1)}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^\beta+1)}\right\} + \sum_{k=0}^{m-1} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{\beta-k-1}}{(s^\beta+1)}\right\} \underline{y}^{(k)}(0;r), \\ \overline{y}(x;r) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^\beta+1)}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^\beta+1)}\right\} + \sum_{k=0}^{m-1} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{\beta-k-1}}{(s^\beta+1)}\right\} \overline{y}^{(k)}(0;r), \end{cases}, \quad (4.14)$$

elde edilir ve fuzzy kesirli diferansiyel denkleminin çözümü

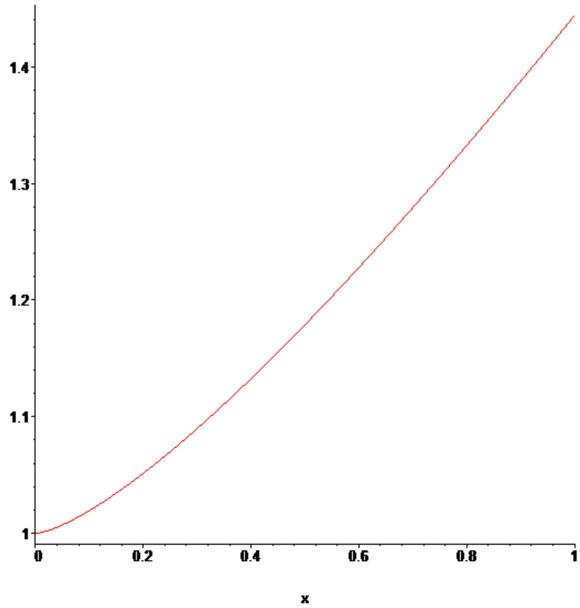
$$\begin{cases} \underline{y}(x;r) = \int_0^x (x-t)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}\left(-(x-t)^\beta\right)(t+1)\,dt + \sum_{k=0}^{m-1} x^k E_{\beta,k+1}(-x^\beta)\underline{y}^{(k)}(0;r) \\ \overline{y}(x;r) = \int_0^x (x-t)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}\left(-(x-t)^\beta\right)(t+1)\,dt + \sum_{k=0}^{m-1} x^k E_{\beta,k+1}(-x^\beta)\overline{y}^{(k)}(0;r) \end{cases}$$

,

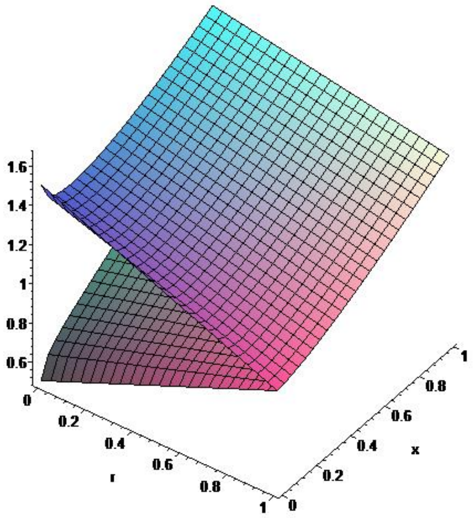
olur. Özel durum için, $\beta = 0.5$ ve $[y(0)]^r = [0.5 + 0.5r, 1.5 - 0.5r]$ ele alalım. O zaman aşağıdaki gibi çözüm elde edilir:

$[y(x)]^r = \int_0^x (x-t)^{-0.5} E_{0.5,0.5}(-(x-t)^{0.5})(t+1)\,dt + [0.5 + 0.5r, 1.5 - 0.5r] \odot E_{0.5,1}(-x^{0.5})$.

Ve özellikle tam çözüm $y(x) = \int_0^x (x-t)^{-0.5} E_{0.5,0.5}(-(x-t)^{0.5})(t+1)\,dt + E_{0.5,1}(-x^{0.5})$ dir.



Şekil 4.7. Tam çözüm



Şekil 4.8. Fuzzy yaklaşık çözümler $[y(x)]^r,\ \ 0 \leq r \leq 1$

Çizelge 4.7. Fuzzy sayısal çözümler $\underline{y}(x;r),\ \ 0 \leq r \leq 1$

	$\underline{y}(x;r)$											y_{Tam}
x \ r	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	
0.0	0.5000	0.5500	0.6000	0.6500	0.7000	0.7500	0.8000	0.8500	0.9000	0.9500	1.0000	1.0000
0.1	0.6578	0.6940	0.7302	0.7663	0.8025	0.8387	0.8749	0.9111	0.9472	0.9834	1.0196	1.0196
0.2	0.7297	0.7619	0.7941	0.8263	0.8584	0.8906	0.9228	0.9550	0.9872	1.0194	1.0516	1.0516
0.3	0.7939	0.8235	0.8531	0.8827	0.9123	0.9419	0.9715	1.0011	1.0307	1.0603	1.0899	1.0899
0.4	0.8559	0.8836	0.9113	0.9390	0.9667	0.9943	1.0220	1.0497	1.0774	1.1051	1.1327	1.1327
0.5	0.9174	0.9435	0.9697	0.9959	1.0220	1.0482	1.0743	1.1005	1.1266	1.1528	1.1790	1.1790
0.6	0.9789	1.0038	1.0287	1.0536	1.0785	1.1034	1.1283	1.1532	1.1781	1.2030	1.2279	1.2279
0.7	1.0409	1.0647	1.0885	1.1124	1.1362	1.1601	1.1839	1.2077	1.2316	1.2554	1.2792	1.2792
0.8	1.1034	1.1263	1.1492	1.1721	1.195	1.2179	1.2409	1.2638	1.2867	1.3096	1.3325	1.3325
0.9	1.1665	1.1886	1.2107	1.2328	1.2549	1.2770	1.2991	1.3212	1.3433	1.3654	1.3875	1.3875
1.0	1.2302	1.2516	1.2730	1.2944	1.3158	1.3371	1.3585	1.3799	1.4013	1.4227	1.4440	1.4440

Çizelge 4.8. Fuzzy sayısal çözümler $\overline{y}(x;r),\ \ 0 \leq r \leq 1$

$x \backslash r$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	y_{Tam}
	$\overline{y}(x;r)$											
0.0	1.5000	1.4500	1.4000	1.3500	1.3000	1.2500	1.2000	1.1500	1.1000	1.0500	1.0000	1.0000
0.1	1.3814	1.3452	1.3090	1.2728	1.2367	1.2005	1.1643	1.1281	1.0920	1.0558	1.0196	1.0196
0.2	1.3735	1.3413	1.3091	1.2769	1.2447	1.2125	1.1803	1.1482	1.1160	1.0838	1.0516	1.0516
0.3	1.3860	1.3564	1.3268	1.2971	1.2675	1.2379	1.2083	1.1787	1.1491	1.1195	1.0899	1.0899
0.4	1.4095	1.3819	1.3542	1.3265	1.2988	1.2711	1.2435	1.2158	1.1881	1.1604	1.1327	1.1327
0.5	1.4405	1.4144	1.3882	1.3621	1.3359	1.3097	1.2836	1.2574	1.2313	1.2051	1.1790	1.1790
0.6	1.4769	1.4520	1.4271	1.4022	1.3773	1.3524	1.3275	1.3026	1.2777	1.2528	1.2279	1.2279
0.7	1.5176	1.4937	1.4699	1.4461	1.4222	1.3984	1.3746	1.3507	1.3269	1.3031	1.2792	1.2792
0.8	1.5616	1.5387	1.5158	1.4929	1.4700	1.4471	1.4242	1.4012	1.3783	1.3554	1.3325	1.3325
0.9	1.6085	1.5864	1.5643	1.5422	1.5201	1.4980	1.4759	1.4538	1.4317	1.4096	1.3875	1.3875
1.0	1.6578	1.6364	1.6151	1.5937	1.5723	1.5509	1.5296	1.5082	1.4868	1.4654	1.4440	1.4440

Örnek 4.5. Aşağıdaki fuzzy kesirli başlangıç değer problemi düşünelim

$$\begin{cases} {}^{C}D_{0^+}^{\beta} y(x) = (-1) \odot y(x), \ \ x \in [0,1] \\ y(0) = y_0 \end{cases}, \tag{4.15}$$

burada $[y(x_0)]^r = y_0 = (0.5,1,1.5) = [0.5 + 0.5r, 1.5 - 0.5r]$ ve $0 < \beta \leq 1$ (Mazandarani and Vahidian Kamyad 2013).

Denklemin tam çözümü $y(x) = E_{\beta,1}(-x^{\beta})$ dır. Ve ${}^{C}[(ii) - \beta]$-türevlenebilire göre ve modifiye edilmiş kesirli Euler yöntemini kullanılarak, fuzzy kesirli başlangıç değer problem (4.15) için yaklaşık çözümü $h = 0.1$ ve $\beta = \frac{3}{4}$ ile elde edelim:

Her $x_j = jh$: $\ \ j = 0,1, \dots ,10$, için

$$\begin{cases} \underline{f}\left(x_j, \underline{y}(x_j;r), \overline{y}(x_j;r)\right) = -\underline{y}(x_j;r) \\ \overline{f}\left(x_j, \underline{y}(x_j;r), \overline{y}(x_j;r)\right) = -\overline{y}(x_j;r) \end{cases},$$

dır.

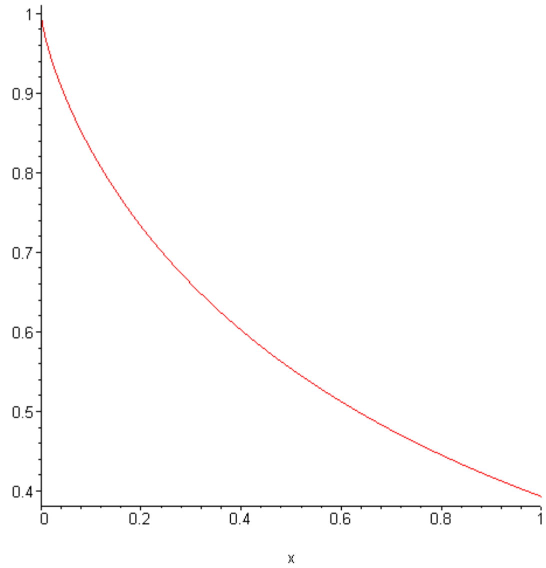
$$\begin{cases}\underline{y}(x_0;r) = 0.5 + 0.5r \\ \overline{y}(x_0;r) = 1.5 - 0.5r\end{cases},$$

$$\begin{cases}\underline{y}(x_1;r) = -\beta\,\frac{h^{\beta}(0.5+0.5r)}{\Gamma(\beta+2)} + \frac{h^{\beta}\left(-\frac{h^{\beta}(0.5+0.5r)}{\Gamma(\beta+1)}+(0.5+0.5r)\right)}{\Gamma(\beta+2)} + (0.5+0.5r), \quad \beta\in(0,1] \\ \overline{y}(x_1;r) = -\beta\,\frac{h^{\beta}(1.5-0.5r)}{\Gamma(\beta+2)} + \frac{h^{\beta}\left(-\frac{h^{\beta}(1.5-0.5r)}{\Gamma(\beta+1)}+(1.5-0.5r)\right)}{\Gamma(\beta+2)} + (1.5-0.5r), \quad \beta\in(0,1]\end{cases},$$

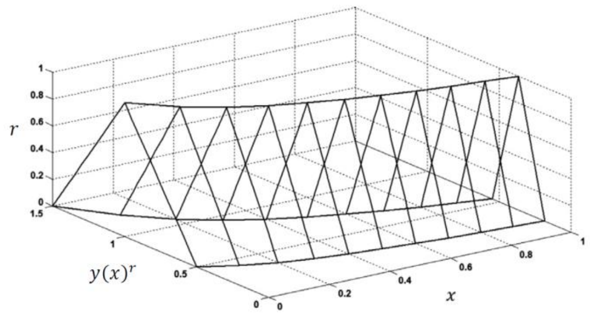
ve her $j = 2,3,\dots,10$ için:

$$\underline{y}(x_j;r) = \left((j-1)^{\beta+1} - (j-\beta-1)j^{\beta}\right)\frac{h^{\beta}\left(-\underline{y}(x_0;r)\right)}{\Gamma(\beta+2)} + \frac{h^{\beta}}{\Gamma(\beta+2)}\sum_{i=1}^{j-1}\left(\left((j-i+1)^{\beta+1} - 2(j-i)^{\beta+1} + (j-i-1)^{\beta+1}\right)\left(-\underline{y}(x_i;r)\right)\right) + \frac{h^{\beta}\left(-\frac{h^{\beta}\left(-\underline{y}(x_{j-1};r)\right)}{\Gamma(\beta+1)}+\underline{y}(x_{j-1};r)\right)}{\Gamma(\beta+2)} + \underline{y}(x_0;r),$$

$$\overline{y}(x_j;r) = \left((j-1)^{\beta+1} - (j-\beta-1)j^{\beta}\right)\frac{h^{\beta}\left(-\overline{y}(x_0;r)\right)}{\Gamma(\beta+2)} + \frac{h^{\beta}}{\Gamma(\beta+2)}\sum_{i=1}^{j-1}\left(\left((j-i+1)^{\beta+1} - 2(j-i)^{\beta+1} + (j-i-1)^{\beta+1}\right)\left(-\overline{y}(x_i;r)\right)\right) + \frac{h^{\beta}\left(-\frac{h^{\beta}\left(-\overline{y}(x_{j-1};r)\right)}{\Gamma(\beta+1)}+\overline{y}(x_{j-1};r)\right)}{\Gamma(\beta+2)} + \overline{y}(x_0;r).$$



Şekil 4.9. Tam çözüm



Şekil 4.10. Fuzzy kesirli başlangıç değer problemi için fuzzy yaklaşık çözüm

Çizelge 4.9. Fuzzy kesirli başlangıç değer problemi için fuzzy yaklaşık çözüm $\underline{y}(x_j; r)$.

	$\underline{y}(x_j;r)$											y_{Tam}
r / x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	
0.0	0.500	0.550	0.600	0.650	0.700	0.750	0.800	0.850	0.900	0.950	1.000	1.000
0.1	0.414	0.455	0.496	0.538	0.579	0.620	0.662	0.703	0.745	0.786	0.827	0.828
0.2	0.355	0.391	0.426	0.462	0.497	0.533	0.569	0.604	0.640	0.675	0.711	0.733
0.3	0.316	0.347	0.379	0.410	0.442	0.474	0.505	0.537	0.568	0.600	0.632	0.660
0.4	0.285	0.314	0.343	0.371	0.400	0.428	0.457	0.485	0.514	0.543	0.571	0.602
0.5	0.261	0.287	0.313	0.339	0.365	0.392	0.418	0.444	0.470	0.496	0.522	0.554
0.6	0.240	0.264	0.289	0.313	0.337	0.361	0.385	0.409	0.433	0.457	0.481	0.512
0.7	0.223	0.245	0.268	0.290	0.312	0.335	0.357	0.379	0.402	0.424	0.446	0.476
0.8	0.208	0.229	0.249	0.270	0.291	0.312	0.333	0.353	0.374	0.395	0.416	0.445
0.9	0.194	0.214	0.233	0.253	0.272	0.292	0.311	0.331	0.350	0.370	0.389	0.418
1.0	0.183	0.201	0.219	0.238	0.256	0.274	0.293	0.311	0.329	0.348	0.366	0.393

Çizelge 4.10. Fuzzy kesirli başlangıç değer problemi için fuzzy yaklaşık çözüm $\overline{y}(x_j; r)$.

	$\overline{y}(x_j;r)$											y_{Tam}
r / x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	
0.0	1.500	1.450	1.400	1.350	1.300	1.250	1.200	1.150	1.100	1.050	1.000	1.000
0.1	1.241	1.200	1.159	1.117	1.076	1.035	0.993	0.952	0.910	0.869	0.827	0.828
0.2	1.067	1.031	0.995	0.960	0.924	0.889	0.857	0.818	0.782	0.746	0.711	0.602
0.3	0.948	0.916	0.884	0.853	0.821	0.790	0.758	0.727	0.695	0.663	0.632	0.660
0.4	0.857	0.828	0.800	0.771	0.743	0.714	0.686	0.657	0.628	0.600	0.571	0.602
0.5	0.783	0.757	0.731	0.705	0.679	0.653	0.627	0.601	0.575	0.548	0.522	0.554
0.6	0.722	0.698	0.674	0.650	0.626	0.602	0.578	0.554	0.529	0.505	0.481	0.512
0.7	0.670	0.647	0.625	0.603	0.580	0.558	0.536	0.514	0.491	0.469	0.446	0.476
0.8	0.624	0.603	0.582	0.562	0.541	0.521	0.499	0.479	0.458	0.437	0.416	0.445
0.9	0.584	0.565	0.545	0.526	0.506	0.487	0.468	0.448	0.429	0.409	0.389	0.418
1.0	0.549	0.534	0.513	0.494	0.476	0.458	0.439	0.421	0.403	0.384	0.366	0.393

Örnek 4.6. Aşağıdaki fuzzy kesirli başlangıç değer problemi düşünelim

$$\begin{cases} {}^{C}D_{0^+}^{\beta} y(x) = \frac{9}{4}\sqrt{y(x)} + y(x), & x \in [0,1] \\ y(0) = y_0 \end{cases}, \tag{4.16}$$

burada $[y(x_0)]^r = y_0 = (0.5,1,1.5) = [0.5 + 0.5r, 1.5 - 0.5r]$ ve $0 < \beta \leq 1$ (Mazandarani and Vahidian Kamyad 2013).

${}^{C}[(i) - \beta]$-türevlenebilire göre ve modifiye edilmiş kesirli Euler yöntemini kullanılarak, fuzzy kesirli başlangıç değer problem (4.16) için yaklaşık çözümü $h = 0.1$ ve $\beta = \frac{1}{2}$ ile elde edelim:

Her $x_j = jh$: $j = 0,1, \dots ,10$, için

$$\begin{cases} \underline{f}\left(x_j, \underline{y}(x_j; r), \overline{y}(x_j; r)\right) = \frac{9}{4}\sqrt{\underline{y}(x_j; r)} + \underline{y}(x_j; r) \\ \overline{f}\left(x_j, \underline{y}(x_j; r), \overline{y}(x_j; r)\right) = \frac{9}{4}\sqrt{\overline{y}(x_j; r)} + \overline{y}(x_j; r) \end{cases},$$

dir.

$$\begin{cases} \underline{y}(x_0; r) = 0.5 + 0.5r \\ \overline{y}(x_0; r) = 1.5 - 0.5r \end{cases},$$

$$\underline{y}(x_1; r) = \beta \frac{h^{\beta}\left(\frac{9}{4}\sqrt{0.5+0.5r} + (0.5+0.5r)\right)}{\Gamma(\beta+2)} + \frac{h^{\beta}\left(\frac{h^{\beta}\left(\frac{9}{4}\sqrt{0.5+0.5r} + (0.5+0.5r)\right)}{\Gamma(\beta+1)} + (0.5+0.5r)\right)}{\Gamma(\beta+2)} + (0.5 + 0.5r), \quad \beta \in (0,1],$$

$$\overline{y}(x_1; r) = \beta \frac{h^{\beta}\left(\frac{9}{4}\sqrt{1.5-0.5r} + (1.5-0.5r)\right)}{\Gamma(\beta+2)} + \frac{h^{\beta}\left(\frac{h^{\beta}\left(\frac{9}{4}\sqrt{1.5-0.5r} + (1.5-0.5r)\right)}{\Gamma(\beta+1)} + (1.5-0.5r)\right)}{\Gamma(\beta+2)} + (1.5 - 0.5r), \quad \beta \in (0,1],$$

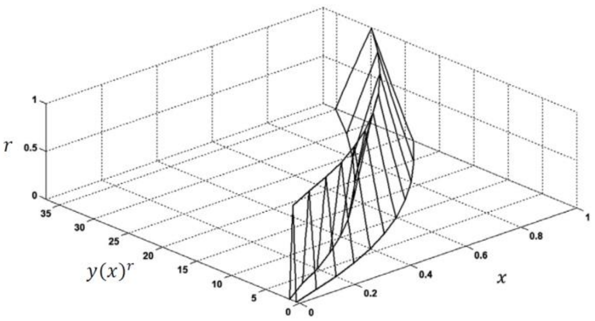
ve her $j = 2,3, \dots ,10$ için:

$$\underline{y}(x_j;r) = \left((j-1)^{\beta+1} - (j-\beta-1)j^{\beta}\right)\frac{h^{\beta}\left(\frac{9}{4}\sqrt{\underline{y}(x_0;r)} + \underline{y}(x_0;r)\right)}{\Gamma(\beta+2)} + \frac{h^{\beta}}{\Gamma(\beta+2)}\sum_{i=1}^{j-1}\Bigg(\Big((j-i+1)^{\beta+1} - 2(j-i)^{\beta+1} + (j-i-1)^{\beta+1}\Big)\left(\frac{9}{4}\sqrt{\underline{y}(x_i;r)} + \underline{y}(x_i;r)\right)\Bigg) +$$

$$\frac{h^{\beta}\left(\frac{9}{4}\sqrt{\frac{h^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}\left(\frac{9}{4}\sqrt{\underline{y}(x_{j-1};r)} + \underline{y}(x_{j-1};r)\right) + \underline{y}(x_{j-1};r) + \frac{h^{\beta}\left(\frac{9}{4}\sqrt{\underline{y}(x_{j-1};r)} + \underline{y}(x_{j-1};r)\right)}{\Gamma(\beta+1)} + \underline{y}(x_{j-1};r)}\right)}{\Gamma(\beta+2)} + \underline{y}(x_0;r),$$

$$\overline{y}(x_j;r) = \left((j-1)^{\beta+1} - (j-\beta-1)j^{\beta}\right)\frac{h^{\beta}\left(\frac{9}{4}\sqrt{\overline{y}(x_0;r)} + \overline{y}(x_0;r)\right)}{\Gamma(\beta+2)} + \frac{h^{\beta}}{\Gamma(\beta+2)}\sum_{i=1}^{j-1}\Bigg(\Big((j-i+1)^{\beta+1} - 2(j-i)^{\beta+1} + (j-i-1)^{\beta+1}\Big)\left(\frac{9}{4}\sqrt{\overline{y}(x_i;r)} + \overline{y}(x_i;r)\right)\Bigg) +$$

$$\frac{h^{\beta}\left(\frac{9}{4}\sqrt{\frac{h^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}\left(\frac{9}{4}\sqrt{\overline{y}(x_{j-1};r)} + \overline{y}(x_{j-1};r)\right) + \overline{y}(x_{j-1};r) + \frac{h^{\beta}\left(\frac{9}{4}\sqrt{\overline{y}(x_{j-1};r)} + \overline{y}(x_{j-1};r)\right)}{\Gamma(\beta+1)} + \overline{y}(x_{j-1};r)}\right)}{\Gamma(\beta+2)} + \overline{y}(x_0;r).$$



Şekil 4.11. Fuzzy kesirli başlangıç değer problemi için fuzzy yaklaşık çözüm

Çizelge 4.11. Fuzzy kesirli başlangıç değer problemi için fuzzy yaklaşık çözüm $\underline{y}(x_j;r)$

	$\underline{y}(x_j;r)$										
$x \backslash r$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.0	1.500	1.450	1.400	1.350	1.300	1.250	1.200	1.150	1.100	1.050	1.000
0.1	3.654	3.559	3.464	3.369	3.273	3.176	3.080	2.982	2.884	2.786	2.686
0.2	5.543	5.416	5.289	5.161	5.032	4.902	4.772	4.640	4.507	4.374	4.239
0.3	7.727	7.567	7.406	7.243	7.080	6.915	6.749	6.581	6.412	6.241	6.069
0.4	10.231	10.034	9.837	9.638	9.437	9.235	9.031	8.825	8.617	8.407	8.195
0.5	13.112	12.877	12.640	12.401	12.160	11.917	11.672	11.424	11.174	10.921	10.665
0.6	16.424	16.146	15.866	15.583	15.298	15.010	14.720	14.426	14.130	13.830	13.526
0.7	20.221	19.895	19.567	19.236	18.903	18.565	18.225	17.881	17.533	17.181	16.825
0.8	24.561	24.183	23.803	23.418	23.030	22.639	22.243	21.843	21.438	21.029	20.614
0.9	29.509	29.074	28.634	28.191	27.743	27.291	26.834	26.372	25.904	25.431	24.952
1.0	35.136	34.637	34.132	33.623	33.109	32.589	32.064	31.533	30.996	30.452	29.901

Çizelge 4.12. Fuzzy kesirli başlangıç değer problemi için fuzzy yaklaşık çözüm $\overline{y}(x_j;r)$

	$\overline{y}(x_j;r)$										
$x \backslash r$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.0	0.500	0.550	0.600	0.650	0.700	0.750	0.800	0.850	0.900	0.950	1.000
0.1	1.642	1.753	1.861	1.968	2.074	2.179	2.282	2.384	2.486	2.587	2.686
0.2	2.798	2.953	3.104	3.253	3.400	3.544	3.686	3.827	3.965	4.103	4.239
0.3	4.211	4.412	4.609	4.801	4.991	5.177	5.360	5.540	5.719	5.895	6.069
0.4	5.891	6.142	6.387	6.627	6.862	7.092	7.319	7.542	7.763	7.980	8.195
0.5	7.878	8.183	8.480	8.771	9.055	9.334	9.609	9.878	10.144	10.407	10.665
0.6	10.206	10.570	10.925	11.272	11.611	11.944	12.270	12.591	12.907	13.219	13.526
0.7	12.917	13.347	13.765	14.174	14.573	14.965	15.349	15.726	16.098	16.464	16.825
0.8	16.054	16.557	17.047	17.524	17.990	18.447	18.895	19.335	19.768	20.194	20.614
0.9	19.669	20.253	20.820	21.373	21.914	22.443	22.962	23.471	23.972	24.466	24.952
1.0	23.816	24.489	25.144	25.781	26.404	27.013	27.611	28.197	28.774	29.342	29.901

Örnek 4.7. (Fuzzy kesirli nükleer bozunma denklemi): Aşağıdaki fuzzy kesirli lineer diferansiyel denklemi düşünelim

$$\begin{cases} \left({}^{C}D_{0^+}^{\beta}y\right)(x) = (-1)\odot y(x), \ 0 < x, 0 < \beta \leq 1 \\ y(0) = [1]^r = [0.5 + 0.5r, 1.5 - 0.5r] \end{cases}, \tag{4.17}$$

burada $y(x)$ bir radyoaktif içinde mevcut radyon nüklidlerin sayısıdır (Ahmadian *et al.* 2013). Ve denklemin tam çözümü $y(x) = \sum_{k=0}^{m-1} x^k E_{\beta,k+1}(-x^{\beta}) y^{(k)}(0)$ dır.

Varyasyon iterasyon yöntemi ile (4.17)'in düzeltme fonksiyonunu ortaya çıkarabiliriz

$$\begin{cases} \underline{y}_{n+1}(x;r) = \underline{y}_n(x;r) + \frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\int_0^x \lambda(\xi)\left(\frac{d^\beta \underline{y}_n(\xi;r)}{d\xi^\beta} + \underline{y}_n(\xi;r)\right)(d\xi)^\beta \\ \overline{y}_{n+1}(x;r) = \overline{y}_n(x;r) + \frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\int_0^x \lambda(\xi)\left(\frac{d^\beta \overline{y}_n(\xi;r)}{d\xi^\beta} + 2\overline{y}_n(\xi;r)\right)(d\xi)^\beta \end{cases},$$

burada $\frac{\partial^\beta [y_n(\xi)]^r}{\partial \xi^\beta} = {}^C D_{0^+}^\beta [y_n(\xi)]^r$ dır ve $\lambda(\xi)$ belirsiz Lagrange çarpanı ve belirlenecektir. kesirli iterasyon teoremi ile,

$$\delta\underline{y}_{n+1}(x;r) = \delta\underline{y}_n(x;r) + \frac{\delta}{\Gamma(\beta+1)}\int_0^x \lambda(\xi)\left(\frac{d^\beta \underline{y}_n(\xi;r)}{d\xi^\beta} + \underline{y}_n(\xi;r)\right)(d\xi)^\beta =$$
$$\left(1+\lambda|_{\xi=x}\right)\delta\underline{y}_n(x;r) - \frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\int_0^x \left(\lambda_\xi^{(\beta)} + \lambda\right)\delta\underline{y}_n(\xi;r)(d\xi)^\beta,$$

$$\delta\overline{y}_{n+1}(x;r) = \delta\overline{y}_n(x;r) + \frac{\delta}{\Gamma(\beta+1)}\int_0^x \lambda(\xi)\left(\frac{d^\beta \overline{y}_n(\xi;r)}{d\xi^\beta} + \overline{y}_n(\xi;r)\right)(d\xi)^\beta =$$
$$\left(1+\lambda|_{\xi=x}\right)\delta\overline{y}_n(x;r) - \frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\int_0^x \left(\lambda_\xi^{(\beta)} + \lambda\right)\delta\overline{y}_n(\xi;r)(d\xi)^\beta,$$

bulabiliriz. Dikkat edelim ki $\delta\overline{y}_n(0;r) = 0$ ve $\delta\overline{y}_n(0;r) = 0$ dır. $\lambda(\xi)$'in,

$$1+\lambda|_{\xi=x} \text{ ve } \lambda_\xi^{(\beta)} - \lambda = 0,$$

tatmin edilmesi gerekir. Benzer bir sonuçta, $\lambda(\xi)$ kolaylıkla

$$\lambda(\xi) = -E_{\beta,1}\left((\xi-x)^\beta\right), \tag{4.18}$$

belirlenebilir. Dolaysıyla, (4.17) denklemi için aşağıdaki iterasyon formülleri

$$\begin{cases} \underline{y}_{n+1}(x;r) = \underline{y}_n(x;r) - \frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\int_0^x E_{\beta,1}\left((\xi-x)^\beta\right)\left(\frac{d^\beta \underline{y}_n(\xi;r)}{d\xi^\beta} + \underline{y}_n(\xi;r)\right)(d\xi)^\beta \\ \overline{y}_{n+1}(x;r) = \overline{y}_n(x;r) - \frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\int_0^x E_{\beta,1}\left((\xi-x)^\beta\right)\left(\frac{d^\beta \overline{y}_n(\xi;r)}{d\xi^\beta} + \overline{y}_n(\xi;r)\right)(d\xi)^\beta \end{cases},$$

elde edebiliriz. Diğer tarafta, eğer (4.18) denkleminde $\underline{y}_n(x;r)$ ve $\overline{y}_n(x;r)$ bir sınırlı varyasyon gibi kontorol edilirse, benzer bir şekildede,

$$1 + \lambda|_{\xi=x} \text{ ve } \lambda_\xi^{(\beta)} = 0,$$

Lagrange çarpanını elde edebiliriz. Benzer bir sonuçta, genel çarpanı

$$\lambda(\xi) = -1,$$

elde edilir. Bu değeri Lagrange çarpanının yerine koyarak

$$\begin{cases} \underline{y}_{n+1}(x;r) = \underline{y}_n(x;r) - \frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\int_0^x \left(\frac{d^\beta \underline{y}_n(\xi;r)}{d\xi^\beta} + \underline{y}_n(\xi;r)\right)(d\xi)^\beta \\ \overline{y}_{n+1}(x;r) = \overline{y}_n(x;r) - \frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\int_0^x \left(\frac{d^\beta \overline{y}_n(\xi;r)}{d\xi^\beta} + \overline{y}_n(\xi;r)\right)(d\xi)^\beta \end{cases},$$

elde edilir. Ve

$\underline{y}_0(x;r) = (0.5 + 0.5r),$

$\overline{y}_0(x;r) = (1.5 - 0.5r),$

ile başlayarak

$\underline{y}_1(x;r) = (0.5+0.5r)\left[1 - \frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\int_0^x \left(\frac{d^\beta}{d\xi^\beta}(1) + 1\right)(d\xi)^\beta\right] = (0.5+0.5r)\left(1 - \frac{x^\beta}{\Gamma(\beta+1)}\right),$

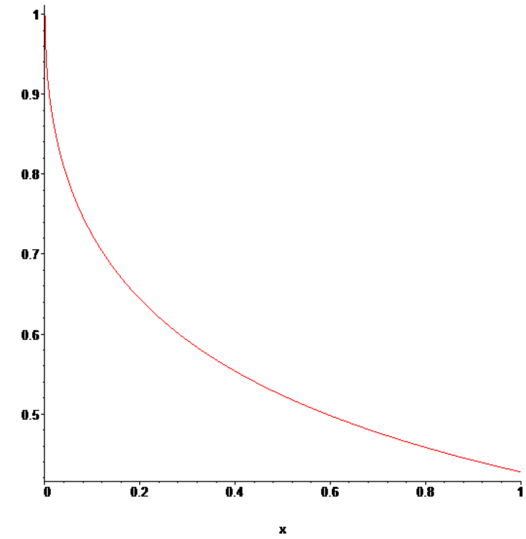
$\overline{y}_1(x;r) = (1.5-0.5r)\left[1 - \frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\int_0^x \left(\frac{d^\beta}{d\xi^\beta}(1) + 1\right)(d\xi)^\beta\right] = (1.5-0.5r)\left(1 - \frac{x^\beta}{\Gamma(\beta+1)}\right),$

$\underline{y}_2(x;r) =$
$(0.5+0.5r)\left[1 - \frac{x^\beta}{\Gamma(\beta+1)} - \frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\int_0^x \left(\frac{d^\beta}{d\xi^\beta}\left(1 - \frac{\xi^\beta}{\Gamma(\beta+1)}\right) + 1 - \frac{\xi^\beta}{\Gamma(\beta+1)}\right)(d\xi)^\beta\right] =$
$(0.5+0.5r)\left[1 - \frac{x^\beta}{\Gamma(\beta+1)} + \frac{x^\beta}{\Gamma(\beta+1)} - \frac{x^\beta}{\Gamma(\beta+1)} + \frac{x^{2\beta}}{\Gamma(2\beta+1)}\right] = (0.5+0.5r)\left(1 - \frac{x^\beta}{\Gamma(\beta+1)} + \frac{x^{2\beta}}{\Gamma(2\beta+1)}\right),$

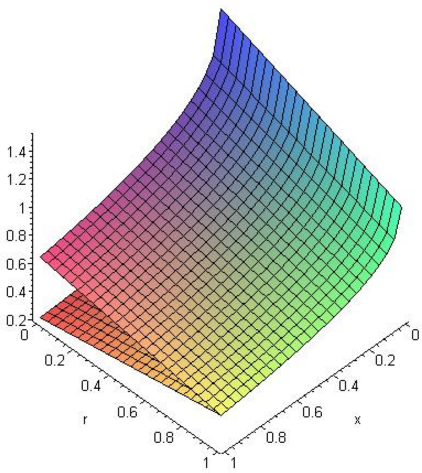
$\overline{y}_2(x;r) =$
$(1.5-0.5r)\left[1 - \frac{x^\beta}{\Gamma(\beta+1)} - \frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\int_0^x \left(\frac{d^\beta}{d\xi^\beta}\left(1 - \frac{\xi^\beta}{\Gamma(\beta+1)}\right) + 1 - \frac{\xi^\beta}{\Gamma(\beta+1)}\right)(d\xi)^\beta\right] =$
$(1.5-0.5r)\left[1 - \frac{x^\beta}{\Gamma(\beta+1)} + \frac{x^\beta}{\Gamma(\beta+1)} - \frac{x^\beta}{\Gamma(\beta+1)} + \frac{x^{2\beta}}{\Gamma(2\beta+1)}\right] = (1.5-0.5r)\left(1 - \frac{x^\beta}{\Gamma(\beta+1)} + \frac{x^{2\beta}}{\Gamma(2\beta+1)}\right),$

$\vdots$

elde edilir. n. yaklaşık çözümler tam seri çözümüne yakınsar. Dolaysıla, fuzzy yaklaşık çözümler $\underline{y}(x;r) = \lim_{n\to\infty} \underline{y}_n(x;r)$ ve $\overline{y}(x;r) = \lim_{n\to\infty} \overline{y}_n(x;r)$ elde edilir.



Şekil 4.5. Tam çözüm



Şekil 4.6. $\beta = 0.5$ ve $n = 10$ için fuzzy yaklaşık çözümler

Çizelge 4.13. Fuzzy yaklaşık çözüm $\underline{y}(x;r) \cong \underline{y}_{10}(x;r), 0 \leq r \leq 1$

$x \backslash r$	$\underline{y}(x;r)$											y_{Tam}
	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	
0.0	0.5000	0.5500	0.6000	0.6500	0.7000	0.7500	0.8000	0.8500	0.9000	0.9500	1.0000	1.0000
0.1	0.3618	0.398	0.4341	0.4703	0.5065	0.5427	0.5789	0.615	0.6512	0.6874	0.7236	0.7236
0.2	0.3219	0.3541	0.3863	0.4185	0.4507	0.4828	0.5150	0.5472	0.5794	0.6116	0.6438	0.6438
0.3	0.296	0.3256	0.3552	0.3848	0.4144	0.4440	0.4736	0.5032	0.5328	0.5624	0.5920	0.5920
0.4	0.2768	0.3045	0.3322	0.3599	0.3875	0.4152	0.4429	0.4706	0.4983	0.5259	0.5536	0.5536
0.5	0.2616	0.2878	0.3139	0.3401	0.3663	0.3924	0.4186	0.4447	0.4709	0.4971	0.5232	0.5232
0.6	0.2491	0.2740	0.2989	0.3238	0.3487	0.3736	0.3985	0.4235	0.4484	0.4733	0.4982	0.4980
0.7	0.2385	0.2624	0.2862	0.3101	0.3339	0.3578	0.3817	0.4055	0.4294	0.4532	0.4771	0.4767
0.8	0.2295	0.2524	0.2754	0.2983	0.3213	0.3442	0.3672	0.3901	0.4131	0.436	0.4590	0.4582
0.9	0.2217	0.2439	0.2661	0.2882	0.3104	0.3326	0.3547	0.3769	0.3991	0.4213	0.4434	0.4420
1.0	0.2150	0.2365	0.2580	0.2795	0.3010	0.3225	0.3440	0.3655	0.3870	0.4086	0.4301	0.4276

Çizelge 4.14. Fuzzy yaklaşık çözüm $\overline{y}(x;r) \cong \overline{y}_{10}(x;r), 0 \leq r \leq 1$

$x \backslash r$	$\overline{y}(x;r)$											y_{Tam}
	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	
0.0	1.5000	1.4500	1.4000	1.3500	1.3000	1.2500	1.2000	1.1500	1.1000	1.0500	1.0000	1.0000
0.1	1.0854	1.0492	1.0130	0.9768	0.9407	0.9045	0.8683	0.8321	0.7959	0.7598	0.7236	0.7236
0.2	0.9657	0.9335	0.9013	0.8691	0.8369	0.8047	0.7725	0.7404	0.7082	0.676	0.6438	0.6438
0.3	0.8880	0.8584	0.8288	0.7992	0.7696	0.7400	0.7104	0.6808	0.6512	0.6216	0.5920	0.5920
0.4	0.8304	0.8028	0.7751	0.7474	0.7197	0.6920	0.6643	0.6367	0.6090	0.5813	0.5536	0.5536
0.5	0.7848	0.7587	0.7325	0.7063	0.6802	0.6540	0.6279	0.6017	0.5755	0.5494	0.5232	0.5232
0.6	0.7473	0.7224	0.6975	0.6725	0.6476	0.6227	0.5978	0.5729	0.5480	0.5231	0.4982	0.4980
0.7	0.7156	0.6917	0.6679	0.644	0.6202	0.5963	0.5725	0.5486	0.5248	0.5009	0.4771	0.4767
0.8	0.6885	0.6655	0.6426	0.6196	0.5967	0.5737	0.5508	0.5278	0.5049	0.4819	0.4590	0.4582
0.9	0.6651	0.6430	0.6208	0.5986	0.5765	0.5543	0.5321	0.5099	0.4878	0.4656	0.4434	0.4420
1.0	0.6451	0.6236	0.6021	0.5806	0.5591	0.5376	0.5161	0.4946	0.4731	0.4516	0.4301	0.4276

Örnek 4.8. Aşağıdaki fuzzy kesirli Riccati diferansiyel denklemi

$$\begin{cases} {}^{C}D_{0^+}^{\beta} y(x) = 2y(x) - y^2(x) + 1, \;\; 0 < x, 0 < \beta \leq 1 \\ y(0) = [0]^r = [r-1, 1-r] \end{cases}, \tag{4.19}$$

göz önüne alalım.

$\beta = 1$ ise (4.18)'in tam çözümü $y(x) = 1 + \sqrt{2}\tanh\left(\sqrt{2}x + \frac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)\right)$ dir. $y(x)$'in genişletilmesi Taylor açılımını kullanarak $x = 0$ hakkında

$$y(x) = x + x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{3} - \frac{7x^5}{15} - \frac{7x^6}{45} + \frac{53x^7}{315} + \frac{71x^8}{315} + \cdots. \tag{4.20}$$

verilmiştir. Varyasyon iterasyon yöntemi ile (4.19)'un düzeltme fonksiyonunu ortaya çıkarabiliriz

$$\begin{cases} \underline{y}_{n+1}(x;r) = \underline{y}_n(x;r) + \frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\int_0^x \lambda(\xi)\left(\frac{d^\beta \underline{y}_n(\xi;r)}{d\xi^\beta} - 2\underline{y}_n(\xi;r) + \underline{y}_n{}^2(\xi;r) - 1\right)(d\xi)^\beta \\ \overline{y}_{n+1}(x;r) = \overline{y}_n(x;r) + \frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\int_0^x \lambda(\xi)\left(\frac{d^\beta \overline{y}_n(\xi;r)}{d\xi^\beta} - 2\overline{y}_n(\xi;r) + \overline{y}_n{}^2(\xi;r) - 1\right)(d\xi)^\beta \end{cases}$$

,

burada $\frac{\partial^\beta [y_n(\xi)]^r}{\partial \xi^\beta} = {}^C D_{0^+}^\beta [y_n(\xi)]^r$ dır. Bu sabit koşullar $\lambda'(\xi) = 0,\ 1 + \lambda(\xi) = 0$ elde edilir,

$$\lambda(\xi) = -1.$$

Bu değeri Lagrange çarpanın yerine koyarak

$$\begin{cases} \underline{y}_{n+1}(x;r) = \underline{y}_n(x;r) - \frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\int_0^x \left(\frac{d^\beta \underline{y}_n(\xi;r)}{d\xi^\beta} - 2\underline{y}_n(\xi;r) + \underline{y}_n{}^2(\xi;r) - 1\right)(d\xi)^\beta \\ \overline{y}_{n+1}(x;r) = \overline{y}_n(x;r) - \frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\int_0^x \left(\frac{d^\beta \overline{y}_n(\xi;r)}{d\xi^\beta} - 2\overline{y}_n(\xi;r) + \overline{y}_n{}^2(\xi;r) - 1\right)(d\xi)^\beta \end{cases},$$

elde edilir. Ve

$$\underline{y}_0(x;r) = (r-1)\frac{x^\beta}{\Gamma(\beta+1)},$$

$$\overline{y}_0(x;r) = (1-r)\frac{x^\beta}{\Gamma(\beta+1)},$$

ile başlayarak

$$\underline{y}_1(x;r) = (r-1)\frac{x^\beta}{\Gamma(\beta+1)} - \frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\int_0^x \left(\frac{d^\beta}{d\xi^\beta}\left((r-1)\frac{\xi^\beta}{\Gamma(\beta+1)}\right) - 2\left((r-1)\frac{\xi^\beta}{\Gamma(\beta+1)}\right) + \left((r-1)\frac{\xi^\beta}{\Gamma(\beta+1)}\right)^2 - 1\right)(d\xi)^\beta = (r-1)\frac{x^\beta}{\Gamma(\beta+1)} - \frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\int_0^x \left((r-1) - 2(r-1)\frac{\xi^\beta}{\Gamma(\beta+1)} + (r-1)^2\frac{\xi^{2\beta}}{\left(\Gamma(\beta+1)\right)^2} - 1\right)(d\xi)^\beta = (r-1)\frac{x^\beta}{\Gamma(\beta+1)} - (r-1)\frac{x^\beta}{\Gamma(\beta+1)} + 2(r-1)\frac{1}{\Gamma(2\beta+1)}x^{2\beta} - (r-1)^2\frac{\Gamma(2\beta+1)}{\left(\Gamma(\beta+1)\right)^2\Gamma(3\beta+1)}x^{3\beta} + \frac{x^\beta}{\Gamma(\beta+1)} = \frac{x^\beta}{\Gamma(\beta+1)} + 2(r-1)\frac{1}{\Gamma(2\beta+1)}x^{2\beta} - (r-1)^2\frac{\Gamma(2\beta+1)}{\left(\Gamma(\beta+1)\right)^2\Gamma(3\beta+1)}x^{3\beta},$$

$\overline{y}_1(x;r) = (1-r)\frac{x^\beta}{\Gamma(\beta+1)} - \frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\int_0^x \left(\frac{d^\beta}{d\xi^\beta}\left((1-r)\frac{\xi^\beta}{\Gamma(\beta+1)}\right) - 2\left((1-r)\frac{\xi^\beta}{\Gamma(\beta+1)}\right) + \left((1-r)\frac{\xi^\beta}{\Gamma(\beta+1)}\right)^2 - 1\right)(d\xi)^\beta = (1-r)\frac{x^\beta}{\Gamma(\beta+1)} - \frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\int_0^x \Big((1-r) - 2(1-r)\frac{\xi^\beta}{\Gamma(\beta+1)} + (1-r)^2\frac{\xi^{2\beta}}{\left(\Gamma(\beta+1)\right)^2} - 1\Big)(d\xi)^\beta = (1-r)\frac{x^\beta}{\Gamma(\beta+1)} - (1-r)\frac{x^\beta}{\Gamma(\beta+1)} + 2(1-r)\frac{1}{\Gamma(2\beta+1)}x^{2\beta} - (1-r)^2\frac{\Gamma(2\beta+1)}{\left(\Gamma(\beta+1)\right)^2\Gamma(3\beta+1)}x^{3\beta} + \frac{x^\beta}{\Gamma(\beta+1)} = \frac{x^\beta}{\Gamma(\beta+1)} + 2(1-r)\frac{1}{\Gamma(2\beta+1)}x^{2\beta} - (1-r)^2\frac{\Gamma(2\beta+1)}{\left(\Gamma(\beta+1)\right)^2\Gamma(3\beta+1)}x^{3\beta}$,

$\underline{y}_2(x;r) = \frac{x^\beta}{\Gamma(\beta+1)} + 2(r-1)\frac{1}{\Gamma(2\beta+1)}x^{2\beta} - (r-1)^2\frac{\Gamma(2\beta+1)}{\left(\Gamma(\beta+1)\right)^2\Gamma(3\beta+1)}x^{3\beta} - \frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\int_0^x \Big(\frac{d^\beta}{d\xi^\beta}\Big(\frac{\xi^\beta}{\Gamma(\beta+1)} + 2(r-1)\frac{1}{\Gamma(2\beta+1)}\xi^{2\beta} - (r-1)^2\frac{\Gamma(2\beta+1)}{\left(\Gamma(\beta+1)\right)^2\Gamma(3\beta+1)}\xi^{3\beta}\Big) - 2\left(\frac{\xi^\beta}{\Gamma(\beta+1)} + 2(r-1)\frac{1}{\Gamma(2\beta+1)}\xi^{2\beta} - (r-1)^2\frac{\Gamma(2\beta+1)}{\left(\Gamma(\beta+1)\right)^2\Gamma(3\beta+1)}\xi^{3\beta}\right) + \left(\frac{\xi^\beta}{\Gamma(\beta+1)} + 2(r-1)\frac{1}{\Gamma(2\beta+1)}\xi^{2\beta} - (r-1)^2\frac{\Gamma(2\beta+1)}{\left(\Gamma(\beta+1)\right)^2\Gamma(3\beta+1)}\xi^{3\beta}\right)^2 - 1\Big)(d\xi)^\beta = \frac{x^\beta}{\Gamma(\beta+1)} + 2(r-1)\frac{1}{\Gamma(2\beta+1)}x^{2\beta} - (r-1)^2\frac{\Gamma(2\beta+1)}{\left(\Gamma(\beta+1)\right)^2\Gamma(3\beta+1)}x^{3\beta} - \frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\int_0^x \Big(1 + 2(r-1)\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\xi^\beta - (r-1)^2\frac{1}{\left(\Gamma(\beta+1)\right)^2}\xi^{2\beta} - 2\frac{\xi^\beta}{\Gamma(\beta+1)} - 4(r-1)\frac{1}{\Gamma(2\beta+1)}\xi^{2\beta} + 2(r-1)^2\frac{\Gamma(2\beta+1)}{\left(\Gamma(\beta+1)\right)^2\Gamma(3\beta+1)}\xi^{3\beta} + \frac{\xi^{2\beta}}{\left(\Gamma(\beta+1)\right)^2} + 4(r-1)^2\frac{1}{\left(\Gamma(2\beta+1)\right)^2}\xi^{4\beta} + (r-1)^4\frac{\left(\Gamma(2\beta+1)\right)^2}{\left(\Gamma(\beta+1)\right)^4\left(\Gamma(3\beta+1)\right)^2}\xi^{6\beta} + 4(r-1)\frac{1}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(2\beta+1)}\xi^{3\beta} - 2(r-1)^2\frac{\Gamma(2\beta+1)}{\left(\Gamma(\beta+1)\right)^3\Gamma(3\beta+1)}\xi^{4\beta} - 4(r-1)^3\frac{1}{\left(\Gamma(\beta+1)\right)^2\Gamma(3\beta+1)}\xi^{5\beta} - 1\Big)(d\xi)^\beta = \frac{x^\beta}{\Gamma(\beta+1)} + 2\frac{1}{\Gamma(2\beta+1)}x^{2\beta} + 4(r-1)\frac{1}{\Gamma(3\beta+1)}x^{3\beta} - \frac{\Gamma(2\beta+1)}{(\Gamma(\beta+1))^2\Gamma(3\beta+1)}x^{3\beta} - 2(r-1)^2\frac{\Gamma(2\beta+1)}{(\Gamma(\beta+1))^2\Gamma(4\beta+1)}x^{4\beta} - 4(r-1)\frac{\Gamma(3\beta+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(2\beta+1)\Gamma(4\beta+1)}x^{4\beta} + 2(r-$

$1)^2 \frac{\Gamma(2\beta+1)\Gamma(4\beta+1)}{\left(\Gamma(\beta+1)\right)^3\Gamma(3\beta+1)\Gamma(5\beta+1)} x^{5\beta} - 4(r-1)^2 \frac{\Gamma(4\beta+1)}{(\Gamma(\beta+1))^2\Gamma(5\beta+1)} x^{5\beta} + 4(r-$

$1)^3 \frac{\Gamma(5\beta+1)}{(\Gamma(\beta+1))^2\Gamma(3\beta+1)\Gamma(6\beta+1)} x^{6\beta} - (r-1)^4 \frac{\left(\Gamma(2\beta+1)\right)^2\Gamma(6\beta+1)}{\left(\Gamma(\beta+1)\right)^4\left(\Gamma(3\beta+1)\right)^2\Gamma(7\beta+1)} x^{7\beta},$

$\overline{y}_2(x;r) = \frac{x^\beta}{\Gamma(\beta+1)} + 2(1-r)\frac{1}{\Gamma(2\beta+1)} x^{2\beta} - (1-r)^2 \frac{\Gamma(2\beta+1)}{\left(\Gamma(\beta+1)\right)^2\Gamma(3\beta+1)} x^{3\beta} -$

$\frac{1}{\Gamma(\beta+1)} \int_0^x \left(\frac{d^\beta}{d\xi^\beta} \left(\frac{\xi^\beta}{\Gamma(\beta+1)} + 2(1-r)\frac{1}{\Gamma(2\beta+1)} \xi^{2\beta} - (1-r)^2 \frac{\Gamma(2\beta+1)}{\left(\Gamma(\beta+1)\right)^2\Gamma(3\beta+1)} \xi^{3\beta} \right) - \right.$

$2\left(\frac{\xi^\beta}{\Gamma(\beta+1)} + 2(1-r)\frac{1}{\Gamma(2\beta+1)} \xi^{2\beta} - (1-r)^2 \frac{\Gamma(2\beta+1)}{\left(\Gamma(\beta+1)\right)^2\Gamma(3\beta+1)} \xi^{3\beta} \right) + \left(\frac{\xi^\beta}{\Gamma(\beta+1)} + \right.$

$\left. \left. 2(1-r)\frac{1}{\Gamma(2\beta+1)} \xi^{2\beta} - (1-r)^2 \frac{\Gamma(2\beta+1)}{\left(\Gamma(\beta+1)\right)^2\Gamma(3\beta+1)} \xi^{3\beta} \right)^2 - 1 \right) (d\xi)^\beta = \frac{x^\beta}{\Gamma(\beta+1)} +$

$2(1-r)\frac{1}{\Gamma(2\beta+1)} x^{2\beta} - (1-r)^2 \frac{\Gamma(2\beta+1)}{\left(\Gamma(\beta+1)\right)^2\Gamma(3\beta+1)} x^{3\beta} - \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} \int_0^x \left(1 + 2(1- \right.$

$r)\frac{1}{\Gamma(\beta+1)} \xi^\beta - (1-r)^2 \frac{1}{\left(\Gamma(\beta+1)\right)^2} \xi^{2\beta} - 2\frac{\xi^\beta}{\Gamma(\beta+1)} - 4(1-r)\frac{1}{\Gamma(2\beta+1)} \xi^{2\beta} +$

$2(1-r)^2 \frac{\Gamma(2\beta+1)}{\left(\Gamma(\beta+1)\right)^2\Gamma(3\beta+1)} \xi^{3\beta} + \frac{\xi^{2\beta}}{\left(\Gamma(\beta+1)\right)^2} + 4(1-r)^2 \frac{1}{\left(\Gamma(2\beta+1)\right)^2} \xi^{4\beta} + (1-$

$r)^4 \frac{\left(\Gamma(2\beta+1)\right)^2}{\left(\Gamma(\beta+1)\right)^4\left(\Gamma(3\beta+1)\right)^2} \xi^{6\beta} + 4(1-r)\frac{1}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(2\beta+1)} \xi^{3\beta} -$

$\left. 2(1-r)^2 \frac{\Gamma(2\beta+1)}{\left(\Gamma(\beta+1)\right)^3\Gamma(3\beta+1)} \xi^{4\beta} - 4(1-r)^3 \frac{1}{\left(\Gamma(\beta+1)\right)^2\Gamma(3\beta+1)} \xi^{5\beta} - 1 \right) (d\xi)^\beta = \frac{x^\beta}{\Gamma(\beta+1)} +$

$2\frac{1}{\Gamma(2\beta+1)} x^{2\beta} + 4(1-r)\frac{1}{\Gamma(3\beta+1)} x^{3\beta} - \frac{\Gamma(2\beta+1)}{(\Gamma(\beta+1))^2\Gamma(3\beta+1)} x^{3\beta} -$

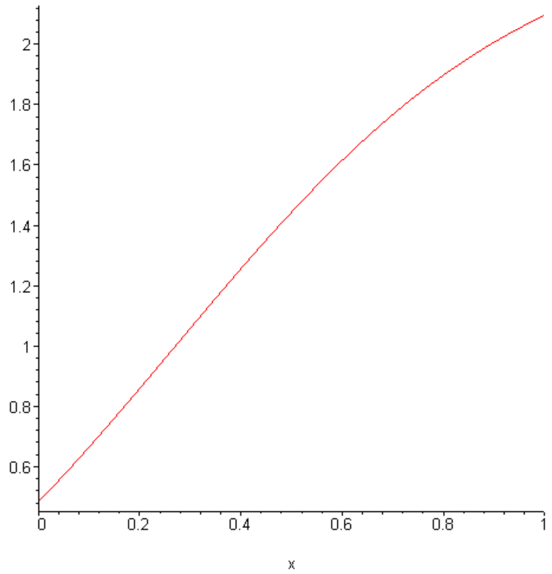
$2(1-r)^2 \frac{\Gamma(2\beta+1)}{(\Gamma(\beta+1))^2\Gamma(4\beta+1)} x^{4\beta} - 4(1-r)\frac{\Gamma(3\beta+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(2\beta+1)\Gamma(4\beta+1)} x^{4\beta} + 2(1-$

$r)^2 \frac{\Gamma(2\beta+1)\Gamma(4\beta+1)}{\left(\Gamma(\beta+1)\right)^3\Gamma(3\beta+1)\Gamma(5\beta+1)} x^{5\beta} - 4(1-r)^2 \frac{\Gamma(4\beta+1)}{(\Gamma(\beta+1))^2\Gamma(5\beta+1)} x^{5\beta} + 4(1-$

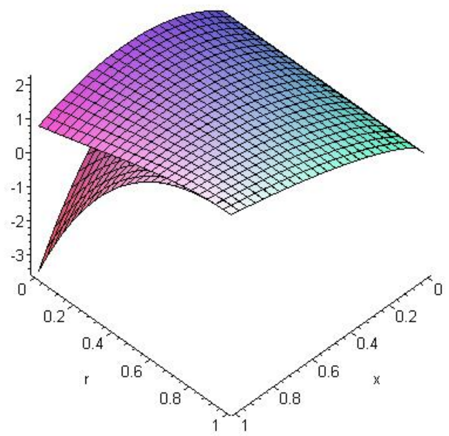
$r)^3 \frac{\Gamma(5\beta+1)}{(\Gamma(\beta+1))^2\Gamma(3\beta+1)\Gamma(6\beta+1)} x^{6\beta} - (1-r)^4 \frac{\left(\Gamma(2\beta+1)\right)^2\Gamma(6\beta+1)}{\left(\Gamma(\beta+1)\right)^4\left(\Gamma(3\beta+1)\right)^2\Gamma(7\beta+1)} x^{7\beta},$

$\vdots$

elde edilir. n. yaklaşık çözümler tam seri çözümüne yakınsar. Dolaysıla, fuzzy yaklaşık çözümler $\underline{y}(x;r) = \lim_{n\to\infty} \underline{y}_n(x;r)$ ve $\overline{y}(x;r) = \lim_{n\to\infty} \overline{y}_n(x;r)$ elde edilir.



Şekil 4.14. Tam çözüm



Şekil 4.15. $\beta = 0.5$ ve $n = 3$ için fuzzy yaklaşık çözümler

Çizelge 4.13. Fuzzy yaklaşık çözüm $\underline{y}(x;r) \cong \underline{y}_3(x;r), 0 \leq r \leq 1$

	$\underline{y}(x;r)$											y_{Tam}
x \ r	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	
0.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.4836
0.1	0.4408	0.4514	0.4615	0.4712	0.4804	0.4891	0.4974	0.5053	0.5128	0.5198	0.5265	0.6652
0.2	0.5687	0.6044	0.6375	0.6679	0.6959	0.7215	0.745	0.7663	0.7857	0.8032	0.8190	0.8591
0.3	0.5704	0.6490	0.7199	0.7835	0.8402	0.8905	0.9348	0.9736	1.0072	1.0361	1.0607	1.0586
0.4	0.4529	0.5971	0.7243	0.836	0.9332	1.017	1.0885	1.1488	1.1987	1.2393	1.2713	1.2558
0.5	0.2082	0.4455	0.6519	0.8298	0.9814	1.109	1.2148	1.3009	1.3691	1.4213	1.4593	1.4432
0.6	-0.1770	0.1864	0.4988	0.7641	0.9864	1.1698	1.3181	1.4348	1.5234	1.5871	1.6289	1.6148
0.7	-0.7200	-0.191	0.2589	0.6362	0.9480	1.2007	1.4006	1.5535	1.6647	1.7397	1.7831	1.7667
0.8	-1.4370	-0.698	-0.075	0.4419	0.8644	1.2018	1.4636	1.6587	1.7953	1.8812	1.9239	1.8970
0.9	-2.3480	-1.348	-0.512	0.1765	0.7333	1.1726	1.5077	1.7517	1.9165	2.0133	2.0527	2.0061
1.0	-3.4710	-2.155	-1.061	-0.166	0.5520	1.1119	1.5331	1.8334	2.0295	2.1371	2.1706	2.0953

Çizelge 4.14. Fuzzy yaklaşık çözüm $\overline{y}(x;r) \cong \overline{y}_3(x;r), 0 \leq r \leq 1$

	$\overline{y}(x;r)$											y_{Tam}
x \ r	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	
0.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.4836
0.1	0.5754	0.5718	0.5680	0.5639	0.5595	0.5548	0.5498	0.5445	0.5389	0.5329	0.5265	0.6652
0.2	0.9009	0.8976	0.8935	0.8883	0.8822	0.8749	0.8665	0.8567	0.8456	0.8331	0.8190	0.8591
0.3	1.1338	1.1366	1.1377	1.1370	1.1342	1.1292	1.1217	1.1113	1.0979	1.0811	1.0607	1.0586
0.4	1.2870	1.3013	1.3134	1.3229	1.3293	1.3322	1.3309	1.3248	1.3134	1.2958	1.2713	1.2558
0.5	1.3664	1.3972	1.4257	1.4511	1.4726	1.4892	1.4999	1.5035	1.4989	1.4846	1.4593	1.4432
0.6	1.3762	1.4280	1.4777	1.5244	1.5666	1.6029	1.6315	1.6506	1.6581	1.6517	1.6289	1.6148
0.7	1.3203	1.3965	1.4718	1.5447	1.6131	1.6750	1.7276	1.7681	1.7933	1.7996	1.7831	1.7667
0.8	1.2020	1.3055	1.4101	1.5136	1.6134	1.7065	1.7892	1.8572	1.9059	1.9300	1.9239	1.8970
0.9	1.0246	1.1575	1.2944	1.4325	1.5686	1.6984	1.8171	1.9187	1.9969	2.0443	2.0527	2.0061
1.0	0.7911	0.9549	1.1265	1.3028	1.4796	1.6514	1.8119	1.9534	2.0671	2.1432	2.1706	2.0953

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Uygulamalı bilimlerde karşılaşılan birçok matematik modelin analitik çözümü çok zor veya imkansız olabilir. Bu durumda yaklaşık çözümler kullanılır. Son zamanlarda yapılan çalışmaların çoğunda yaklaşık çözüme sahip sayısal yöntemler ön plana çıkmaktadır. Özellikle hızlı sonuç veren, algoritması kolay hazırlanabilen ve hassasiyeti yüksek olan yöntemler son derece ilgi çekici olup hem zamandan hem de maliyetten tasarruf sağlamaktadır. Bu durum özellikle nonlineer modellerde daha çok önem taşımaktadır.

Bu tezde, fuzzy kesirli diferansiyel denklemleri fuzzy Laplace dönüşümü, modifiye edilmiş kesirli Euler yöntemi ve varyasyonel iterasyon yöntemleri ile yaklaşık olarak çözdük. Fuzzy Laplace dönüşümü bölümünde, Riemann-Liouville ve Caputo-tipi H-türevlenebilirliği altında $0 < \beta < 1$ mertebeli fuzzy kesirli diferansiyel denklemleri çözmek için fuzzy Laplace dönüşümler incelenmiştir. Bu amaçla, Riemann-Liouville ve Caputo-tipi H-türevlenebilirliğin Hukuhara farklılığına dayalı tanıtıldı ve Kesirli türev Laplace dönüşümün türev teoremleri (Teorem 3.1.1.1 ve Teorem 3.1.2.1) şeklinde tartışıldı. Sonra, Riemann-Liouville ve Caputo-tipi H-türevlenebilirliğin altında fuzzy kesirli diferansiyel denklemlerin çözümünü araştırmak için kesirli bir tarzda bilinen bazı örnekler çözüldü. fuzzy Laplace dönüşümü linear diferensiyel denklemin çözümünde, diğer yöntemlere göre hem daha iyi sonuçlar vermiş hem de çözüme daha kolay ulaştırmıştır. Çizelge ve şekillerden anlaşılacağı üzere, fuzzy Laplace dönüşümü linear diferensiyel denklemin çözümünde diğer yöntemlere göre daha etkili bir yöntemdir. Modifiye edilmiş kesirli Euler yöntemi bölümünde de, modifiye edilmiş kesirli Euler yöntemi $\beta \in (0,1)$ mertebeli fuzzy kesirli başlangıç değer problemini çözmek için göz önüne alınmıştır. Modifiye edilmiş kesirli Euler yönteminde caputo-tipi fuzzy kesirli türevleri uygulanmıştır. Tanımında $\beta \in (n-1, n), n \in \mathbb{N}$'ye genişletilebilir. Buna ek olarak, bilinen ve daha basit bir yöntem olarak modifiye edilmiş kesirli Euler metodu ile lineer olmayan fuzzy kesirli başlangıç değer problemini çözmek için fuzzy kesirli diferansiyel denklemi çözmek tercih edilmiştir. Varyasyonel iterasyon yöntemide

Caputo-tipi kesirli türevleri ile verimli, doğru ve fuzzy kesirli diferansiyel denklemlerin çözümü için uygun olduğunu ortaya koymaktadır.

Sonuç olarak benzerlerinden daha etkili olan fuzzy Laplace dönüşümü yöntemi günümüzde çokça karşılaşılan birçok Caputo-tipi H-türevlenebilirliğin altında fuzzy kesirli linear diferansiyel denklemlerin çözümüne ve modifiye edilmiş kesirli Euler yöntemi günümüzde çokça karşılaşılan birçok Caputo-tipi H-türevlenebilirliğin altında fuzzy kesirli nonlinear diferansiyel denklemlerin çözümüne yardımcı olmaya aday yeni ve oldukça etkili bir yöntemlerdir.

KAYNAKLAR

Ahmadian A., Suleiman M., Salahshour S. and Baleanu D., 2013. A Jacobi operational matrix for solving a fuzzy linear fractional differential equation, Advances in Difference Equations, 2013:104.

Allahviranloo T. and Ahmadi MB., 2010. Fuzzy Laplace transforms. Soft Comput;14:235–243.

Allahviranloo T., Salahshour S. and Abbasbandy S., 2012. Explicit solutions of fractional differential equations with uncertainty, Soft Comput 16:297–302.

Arshad S. and Lupulescu V. 2011. On the fractional differential equations with uncertainty (original research article). Nonlinear Anal Theory Methods Appl 74:3685–3693.

Bede, B. and Gal, SG., 2005. Generalizations of the differentiability of fuzzy-number-valued functions with applications to fuzzy differential equations. Fuzzy Sets Syst. 151, 581-599.

Benghorbal, M.M, 2004. “Power Series Solutions of Fractional Differential Equations and Symbolic Derivatives and İntegrals”, Faculty of Graduate Studies (Doktora Tezi), The University of Western Ontario, Canada.

Caputo, M., 1967. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency. Part II. Geophys. J. R. Astron. Soc. 13, 529-539.

Guo M., Xue X. and Li R., 2003. Impulsive functional differential inclusions and fuzzy population models, Fuzzy Sets and Systems 138(2003), 601–615.

He Ji-H., 2007. Variational iteration method-Some recent results and new interpretations, Journal of Computational and Applied Mathematics, 207(2007), 3-17.

Hsien-Chung Wu., 1998. The improper fuzzy Riemann integral and its numerical integration, Information Sciences 111, 109-137.

Jumarie G., 2009. Table of some basic fractional calculus formulae derived from a modified Riemann–Liouvillie derivative for nondifferentiable functions. Appl. Math. Lett. 22.

Khodadadi E. and Çelik E., 2013. The variational iteration method for fuzzy fractional differential equations with uncertainty, Fixed Point Theory and Applications a SpringerOpen Journal 2013, 2013:13.

Kilbas AA., Srivastava HM and Trujillo JJ. 2006. Theory and applications of fractional differential equations. Amesterdam: Elsevier Science B.V.

Lakshmikantham V. and Vasundhara Devi J., 2008. Theory of fractional differential equations in a Banach space. Eur. J. Pure Appl. Math. Vol. 1, No. 1, 2008, (38-45).

Mazandarani M. and Vahidian Kamyad A., 2013. Modified fractional Euler method for solving Fuzzy Fractional Initial Value Problem, Commun Nonlinear Sci Numer Simulat 18, 12–21.

Miller K. S. and Ross B., 1993. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. New York: John Wiley and Sons, ISBN 0-71-58884-9.

Mittag-Leffler G.M., 1902. Sur l’integrale de Laplace-Abel, C.R. Acad. Sci. Paris (Ser. II), 136, 937-939.

Odibat Z. 2006. Approximations of fractional integral and Caputo fractional derivatives, Appl. Math. Comput. 178(2), 527-533.

Odibat Z. and Shawagfeh N. 2007. Generalized Taylor's formula. J Appl Math Comput;186(1):286–293.

Odibat Z. M. and Momani S., 2008. "An algorithm for the numerical solution of differential equations of fractional order," Journal of Applied Mathematics & Informatics, vol. 26, pp. 15–27.

Oldham K.B. and Spenier J., 1974. The Fractional Calculus, Academic Pres, New York.

Podlubny I., 1999. Fractional Differential Equations, vol. 198 of Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, San Diego, Calif, USA.

Salahshour S., Allahviranloo T. and Abbasbandy S., 2012. Solving fuzzy fractional differential equations by fuzzy Laplace transforms, Commun Nonlinear Sci Numer Simulat 17, 1372–1381.

Salahshour S., Allahviranloo T., Abbasbandy S. and Baleanu D., 2012. Existence and uniqueness results for fractional differential equations with uncertainty, Salahshour et al. Advances in Difference Equations 2012:112.

Wu, C., Song, S. and Lee, ES., 1996. Approximate solutions, existence, and uniqueness of the Cauchy problem of fuzzy differential equations. J. Math. Anal. Appl. 202, 629-644.

Zadeh L.A., 1965. Fuzzy sets. Information and Control Volume 8, Issue 3, June 1965, Pages 338–353.

Zadeh, L.A., 1961. "Part 5: Prediction and Filtering," Information Theory, IRE Transactions on, vol.7, no.3, pp.139,144, July 1961.

ÖZGEÇMİŞ

1978 yılında İran'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Iran'da tamamladı. 1997 yılında Urmia Üniversitesi Fen Bilimler Fakültesi Matematik bölümünde lisans öğrenimine başlayarak 2001 yılında mezun oldu. 2004 yılında Tebriz'in Peyam Noor Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik bilim dalında yükseklisans öğrenimine başlayarak 2006 yılında mezun oldu. 2009 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik bilim dalında direk doktora eğitimine başladı.