GENİŞLEMEYEN VE QUASİ GENİŞLEMEYEN KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLER İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ SABİT NOKTA YAKLAŞIMLARI

Makbule KAPLAN

Doktora Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Topoloji Bilim Dalı
Prof. Dr. Abdullah KOPUZLU
2014

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

GENİŞLEMEYEN VE QUASİ GENİŞLEMEYEN KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLER İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ SABİT NOKTA YAKLAŞIMLARI

Makbule KAPLAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI
Topoloji Bilim Dalı

ERZURUM
2014

T.C.

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAY FORMU

GENİŞLEMEYEN VE QUASİ GENİŞLEMEYEN KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLER İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ SABİT NOKTA YAKLAŞIMLARI

Prof. Dr. Abdullah KOPUZLU danışmanlığında, Makbule KAPLAN tarafından hazırlanan bu çalışma 01/12/2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Topoloji Bilim Dalı'nda Doktora tezi olarak **oybirliği** ile kabul edilmiştir.

Başkan	: Prof.Dr. Murat ÖZDEMİR	*İmza*	:
Üye	: Prof.Dr. Abdullah KOPUZLU	*İmza*	:
Üye	: Prof.Dr. Sezgin AKBULUT	*İmza*	:
Üye	: Doç.Dr. Zülfigar AKDOĞAN	*İmza*	:
Üye	: Doç.Dr. Tamer UĞUR	*İmza*	:

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu 09/12/2014 tarih ve 48/1608 nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. İhsan **EFEOĞLU**
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Doktora Tezi

GENİŞLEMEYEN VE QUASİ GENİŞLEMEYEN KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLER İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ SABİT NOKTA YAKLAŞIMLARI

Makbule KAPLAN

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Topoloji Bilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Abdullah KOPUZLU

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünden sonra kuramsal temeller adını alan ikinci bölümde, çalışmamızda kullanacağımız temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde çok bilinen sabit nokta yöntemleri tek değerli ve çok değerli dönüşümler için gözönüne alınmıştır.

Çalışmamızın esasını teşkil eden ve Araştırma Bulguları adını alan dördüncü bölümde düzgün konveks Banach uzaylarında tanımlı küme değerli dönüşümler için yeni üç adım iterasyon şeması teşkil ettik ve bu şemanın uygun şartlar altında güçlü ve zayıf yakınsaması üzerine çalıştık. Daha sonra yukarıda bahsedilen üç adım iterasyonunu hata terimli olarak yeniden yazarak quasi genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktasına güçlü ve zayıf yakınsama teoremleri verdik.

2014, 89 sayfa

Anahtar Kelimeler: Küme değerli genişlemeyen dönüşümler, düzgün konveks Banach uzayı, güçlü ve zayıf yakınsaklık

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

GENERALIZED FIXED POINT ITERATIVE APPROXIMATIONS FOR NONEXPANSIVE AND QUASI NONEXPANSIVE MULTIVALUED MAPPINGS

Makbule KAPLAN

AtatURK University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Department of Topology

Supersivor: Prof. Dr. Abdullah KOPUZLU

This thesis consists of five sections.Next the introduction part there are some basic definitions and theorems which we used in second sections which is called theoretical foundations of thesis. In the three section, Well-known fixed point iterative process are considered for single and multi-valued mappings.

Which constitute the basic of our work and in the forth section which is called research findings, we have established a new three step iteration scheme for multivalued nonexpansive mappings defined in uniformly convex Banach spaces and have studied onto strong and weak convergence for the proposed under some suitable conditions. Then we rewrited as error term of the above mentioned three step iterations introduced strong and weak convergences theorems to fixed points of multivalued quasi nonexpansive mappings.

2014, 89 pages

Keywords: nonexpansive multivalued mappings, uniformly convex space, proximity maps, strongly and weak convergence.

TEŞEKKÜR

Doktora tezi olarak sunduğum bu çalışma, Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Bu tez konusunu çalışmamı sağlayan, çalışmalarımda ve tezin hazırlanışında bana her türlü kolaylığı sağlayan, bilgi ve tecrübeleriyle beni destekleyen çok değerli hocalarım Sayın Prof. Dr. Abullah KOPUZLU'ya ve Sayın Prof. Dr. Murat ÖZDEMİR'e en içten dileklerimle teşekkürlerimi arz ederim.

Doktora öğrenimim sürecinde ilgiyi ve yardımı esirgemeyen anabilim dalımızın değerli öğretim üyelerine ve bana her türlü kolaylığı sağlayan Sinop Üniversitesi öğretim üyelerine teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, çalışmalarım esnasında kendilerinden görmüş olduğum destek ve güvenden dolayı aileme ve dostlarıma en içten diklerimle teşekkürlerimi sunarım.

Makbule KAPLAN

Kasım, 2014

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

2^C	C nin kuvvet kümesi
$\mathbb{R}^n$	n-boyutlu Öklid uzayı
B_B	Kapalı birim yuvar
$\overline{D}(x_0;r)$	x_0 merkezli ve r yarıçaplı kapalı yuvar
$D'(x_0;r)$	x_0 merkezli ve r yarıçaplı delik yuvar
N^*	N normlu uzayının duali
S_B	Birim yuvar yüzeyi
l_1	Yakınsak dizilerin kümesi
l_∞	Sınırlı dizilerin kümesi
$x_n \to x$	x_n nin x e kuvvetli yakınsaması
$x_n \rightharpoonup x$	x_n nin x e zayıf yakınsaması
$\mathbb{C}$	Kompleks Sayılar Kümesi
C(X)	X in kapalı alt kümelerinin ailesi
CB(X)	X in kapalı sınırlı alt kümelerinin ailesi
Dim(N)	N nin boyutu
Dom(T)	T dönüşümünün tanım kümesi
Graph(T)	T dönüşümünün grafiği
Im(F)	T dönüşümünün görüntü kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$Z(C)$	C nin Chebyshev merkezi
$C(N,\mathbb{R})$	Sürekli lineer fonksiyonellerin uzayı
$D(x_0;r)$	x_0 merkezli ve r yarıçaplı açık yuvar
$F(T)$	T dönüşümünün sabit noktası kümesi
$K(X)$	X in kompakt alt kümelerinin ailesi
$P(X)$	X in proximinal alt kümelerinin ailesi
$S(x_0;r)$	x_0 merkezli ve r yarıçaplı yuvar yüzeyi
$T: X \multimap Y$	X den Y ye küme değerli dönüşüm

$d(x, C)$	x den C ye olan uzaklık
$r(C)$	C nin Chebyshev yarıçapı

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

19. yüzyılın sonlarında özellikle diferansiyel denklemlerin çözümlerine yaklaşmak için kullanılan sabit nokta teorisi ile ilgili çalışmalar üç ayrı başlık altında toplanabilir. Bunlar 1912 yılında Brouwer sabit nokta teoremi ile gelişmeye başlayan topolojik sabit nokta teorisi, Tarski sabit nokta teoremi ile başlayan ayrık sabit nokta teorisi ve 1922'de Banach sabit nokta teoremi ile gelişen metrik sabit nokta teorisidir.

Banach'ın literatürde 'Daraltan Dönüşüm Prensibi' olarak bilinen yöntemi matematikte bazı problemlerin çözümlerinin varlık ve tekliğini garanti etmek için sıkça kullanılan bir araç olmuştur. Bu yöntem birçok araştırmacı tarafından genelleştirilmiştir. 1969 da Nadler, Hausdorff metriğini kullanarak küme değerli dönüşümler için daraltan dönüşümü tanımlayıp buna bağlı olarak Banach'ın daraltan dönüşüm prensibinin küme değerli versiyonunu ispatlamıştır. Küme değerli dönüşümler için sabit nokta teorisi, Nadler'in bu teoreminden sonra gelişmeye başlamıştır. Tek değerli dönüşümler için mevcut sabit nokta teorisine paralel olarak küme değerli dönüşümler için sabit nokta teorisinin de diferensiyel ve integral denklemler, kontrol teorisi, konveks optimizasyon ve ekonomi alanlarında çeşit uygulamaları ortaya çıkmıştır.

Küme değerli sabit nokta teorisindeki öne çıkan çalışmalar, Markin'in 1973 yılında Hilbert uzayında yaptığı ve Browder'ın 1976 yılında zayıf sürekli duality dönüşümlere sahip uzaylarda yaptığı çalışmalardır. 1978 yılında Lami Dozo, bu sonuçları Opial şartını sağlayan bir Banach uzaylarına genelleştirmiştir. Diğer taraftan 1974'te Lim, düzgün konvesk Banach uzayında tanımlı küme değerli genişlemeyen dönüşümler için bir sabit nokta teoremi vermiştir.1990 da Kirk ve Massa, herhangi bir Banach uzayında sabit noktanın varlığını ispatlayarak Lim'in verdiği teoremi genelleştirmişlerdir. 1998 yılında ise Mizoguchi ve Takahashi bazı daraltan şartlar altında küme değerli dönüşümler için sabit noktanın varlığını göstermişlerdir.

Sastry and Babu (2005), Mann ve Ishikawa iterasyonlarının küme değerli dönüşümler için iterasyon şemasını ve Jung (2007) de, Halpern iterasyonunu küme değerli dönüşümler için iterasyon şemasını teşkil etmişlerdir. Panyanak (2007) de, Sastry and Babu (2005)'nun sonuçlarını düzgün konveks Banach uzaylarına, Song and Cho (2011), Jung'ın sonuçlarını Reflexive bir Banach uzayına genelleştirmişlerdir.

Sahahzad and Zegeye (2009) da, küme değerli quasi genişlemeyen dönüşümler için Sastry and Babu (2005), Song and Wang (2008) ve Panyanak (2007)'ın sonuçlarını genelleştirmişlerdir. Cholamjiak ve Suantai (2010) da, Suantai (2012) de küme değerli quasi genişlemeyen dönüşümler için yeni iterasyon şemaları teşkil etmişlerdir.

Biz bu tezde önce küme değerli dönüşümler için yeni üç adım iterasyon şeması teşkil ettik. Düzgün konveks Banach uzaylarında tanımlı küme değerli genişlemeyen dönüşümler için güçlü ve zayıf yakınsama teoremleri verdik. Ayrıca yukarda bahsettiğimiz üç adım iterasyon şemasının hata terimli versiyonunu quasi genişlemeyen küme değerli dönüşümler için de teşkil ederek bu tip dönüşümler için yine güçlü ve zayıf yakınsama teoremleri ispatladık.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Genel Kavramlar

Tezimizin ilk bölümünde, ileride kullanacağımız temel tanım ve kavramları vereceğiz.

Tanım 2.1.1: X boş olmayan bir küme olsun. $d: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y, z \in X$ için

(M1) $d(x,y) = 0 \iff x = y$,
(M2) $d(x,y) = d(y,x)$,
(M3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

şartları sağlanıyorsa d ye X üzerinde bir metrik ve d ile birlikte X e metrik uzay denir ve $X = (X,d)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.2: (X,d) bir metrik uzay, $x_0 \in X$ ve $r > 0$ bir reel sayı olsun.

a) $D(x_0;r) = \{x \in X: d(x,x_0) < r\}$ kümesine x_0 merkezli ve r yarıçaplı açık yuvar,
b) $\overline{D}(x_0;r) = \{x \in X: d(x,x_0) \leq r\}$ kümesine x_0 merkezli ve r yarıçaplı kapalı yuvar,
c) $D'(x_0;r) = \{x \in X: 0 < d(x,x_0) < r\}$ kümesine x_0 merkezli ve r yarıçaplı delik yuvar ve
d) $S(x_0;r) = \{x \in X: d(x,x_0) = r\}$ kümesine x_0 merkezli ve r yarıçaplı yuvar yüzeyi denir.

$D(x_0;r) = \{x \in X: d(x,x_0) < r\}$ açık yuvarına bazen x_0 ın $r-$civarı veya komşuluğu da denir.

Tanım 2.1.3: (X, d) bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Her $x \in A$ için $D(x; r) \subseteq A$ olacak şekilde bir r pozitif sayısı varsa A ya X in açık alt kümesi denir. X in B alt kümesinin X deki tümleyeni yani $B^t = X - B$, X de açıksa B ye kapalı küme denir.

Tanım 2.1.4: (X, d) bir metrik uzay ve (x_n), X de bir dizi olsun.

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, (x_n) dizisine X de yakınsak denir ve x e de, (x_n) dizisinin limiti adı verilir. $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ veya $x_n \to x$ simgelerinden biri ile gösterilir.

Tanım 2.1.5: (X, d) bir metrik uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. Herhangi bir $\varepsilon \geq 0$ için $m, n \geq n_0$ olduğunda

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0\ (\varepsilon)$ sayısı varsa, (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir. X deki her Cauchy dizisi yakınsak ise yani $x_n \to x \in X$ ise (X, d) metrik uzayına tam metrik uzay denir.

Tanım 2.1.6: (X, d) bir metrik uzay olsun. X deki her dizi yakınsak bir alt diziye sahipse, X uzayına kompakt metrik uzay denir.

Tanım 2.1.7: (X, d) ve (Y, ρ) iki metrik uzay, $f: X \to Y$ bir dönüşüm ve $x_0 \in X$ olsun. Her bir $\varepsilon > 0$ sayısı için,

$$d(x, x_0) < \delta \text{ olduğunda } \rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

veya denk bir ifade ile

$$f(D(x_0;\delta)) \subseteq D(f(x_0);\varepsilon)$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f ye x_0 noktasında süreklidir denir. f, X in her noktasında sürekli ise f ye X de süreklidir denir.

Tanım 2.1.8: X boş olmayan bir küme ve τ, X in alt kümelerinin bir ailesi olsun.

T1) $X, \emptyset \in \tau$ dur.
T2) τ ya ait keyfi sayıdaki kümenin birleşimi τ ya aittir.
T3) τ ya ait sonlu sayıda kümenin kesişimi τ ya aittir.

şartları sağlanıyorsa, τ ya X üzerinde bir topoloji denir. Bu τ topolojisi ile beraber X e de topolojik uzay adı verilir ve (X,τ) ile gösterilir.

(X,d) metrik uzayının tüm açık alt kümelerinin ailesi τ olsun. Bu durumda τ ailesi X de bir topolojidir. Bu topolojiye metrik topoloji denir. O halde, her metrik uzay bir topolojik uzaydır.

Tanım 2.1.9: (X,τ) topolojik bir uzay ve $x \in X$ olsun. X in V alt kümesi aşağıdaki şartları sağlıyorsa V ye x in bir civarı (komşuluğu) denir.

a) $x \in V$ dir.
b) $x \in U \subset V$ olacak şekilde $U \in \tau$ vardır.

Bu tanıma göre x i ihtiva eden ve V de ihtiva edilen açık bir küme varsa V ye x in civarı denir. $x \in U \subset V$ de özel olarak $V = U$ alınırsa x i ihtiva eden her açık küme x in bir civarı olur.

Tanım 2.1.10: L, F ($\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) cismi üzerinde bir lineer uzay ve $A \subseteq L$ olsun. Her $x, y \in A$ için

$$B = \{z \in L: z = \alpha x + (1-\alpha)y, 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A$$

ise, A kümesine konvekstir denir.

Tanım 2.1.11: N bir lineer uzay olsun. $\|.\|: N \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun x deki değerini $\|x\|$ $i$le gösterelim. Bu fonksiyon için

N1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$
N2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ $(\alpha \in F)$
N3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartları sağlanıyorsa, $\|.\|$ fonksiyonuna N de norm ve N ye de bu normla birlikte normlu uzay adı verilir ve $(N, \|.\|)$ ile gösterilir.

$(N, \|.\|)$ normlu uzay olsun. $d(x,y) = \|x-y\|$ olarak tanımlanan d metriğine, norm metriği denir. Her normlu uzay bir metrik uzaydır. Norm metriğine göre açıkların τ ailesi N için bir topolojidir. Bu topolojiye norm topolojisi denir. Normlu uzaylar aynı zamanda topolojik uzaylardır.

Tanım 2.1.12: N bir normlu lineer uzay olsun. N de tanımlı tüm sürekli ve reel değerli lineer fonksiyonellerin kümesini $C(N,\mathbb{R})$ ile gösterelim. Yani $C(N,\mathbb{R}) = \{T\colon\ T: N \to \mathbb{R}\ \ l$ineer ve sürekli$\}$ olsun. $\forall x \in N$ ve $T_1, T_2 \in C(N,\mathbb{R})$ için

$$(T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x), (\alpha T_1)(x) = \ \alpha T_1(x)$$

ve

$$\|T\| = sup\{|T(x)|: \|x\| \leq 1\}$$

olarak tanımlanırsa $C(N,\mathbb{R})$ bir normlu lineer uzay oluşturur. Bu $C(N,\mathbb{R})$ uzayına N in topolojik duali denir ve N^* ile gösterilir.

Tanım 2.1.13: $(N, \|.\|)$ bir normlu uzay ve (x_n), N de bir dizi olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$$

olacak şekilde bir $x \in N$ varsa, (x_n) dizisi x e kuvvetli yakınsar (veya norma göre yakınsaktır) denir ve bu durum

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

ya da kısaca $x_n \to x$ ile gösterilir. Burada x noktasına (x_n) dizisinin kuvvetli limiti adı verilir.

Tanım 2.1.14: N normlu uzay ve (x_n), N de bir dizi olsun. Eğer her $f \in N^*$ için,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$$

olacak şekilde bir $x \in N$ varsa, (x_n) dizisi x e zayıf yakınsar denir ve $x_n \rightharpoonup x$ şeklinde yazılır. Burada x e, (x_n) dizisinin zayıf limiti adı verilir.

Kuvvetli yakınsaklık ile zayıf yakınsaklık arasındaki ilişkiyi gösteren teoremi verelim.

Teorem 2.1.15: N normlu uzay ve (x_n), N de bir dizi olsun. Bu durumda,

(a) (x_n) kuvvetli yakınsak ise aynı zamanda zayıf yakınsaktır.
(b) $\dim(N) < \infty$ ise, (x_n) nın zayıf yakınsaklığı kuvvetli yakınsaklığını gerektirir (Kreyszig 1989).

Tanım 2.1.16: N normlu uzay olsun. N, norm metriğine göre tam ise N ye Banach uzayı denir.

N nin normlu reel veya kompleks lineer uzay oluşuna göre Banach uzayına, reel veya kompleks Banach uzay adı verilir. Matematiksel açıdan en önemli metrik uzaylar tam olan metrik uzaylardır. Böylece en önemli normlu uzaylar, Banach uzaylardır.

Tanım 2.1.17: L, F cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. $\langle\ ,\ \rangle: L \times L \to F$ fonksiyonu her $x, y, z \in L$ ve $\alpha \in F$ için

İ1) $\langle x, x\rangle \geq 0$ ve $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = \theta$
İ2) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$
İ3) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$
İ4) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

şartlarını sağlıyorsa $\langle\ ,\ \rangle$ fonksiyonuna iç çarpım fonksiyonu (veya iç çarpım) denir. Üzerinde iç çarpım fonksiyonunun tanımlandığı vektör uzayına iç çarpım uzayı (veya ön Hilbert uzayı) denir ve $(L, \langle\ ,\ \rangle)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.18: L bir iç çarpım uzayı ve $\|\ \ \|$, iç çarpım normu olsun. $d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y\rangle}$ olarak tanımlanırsa, (L, d) bir metrik uzay olur. İç çarpım normuyla tanımlanan bu d metriğine göre L iç çarpım uzayı tam ise, L ye Hilbert uzayı denir.

Hilbert uzayları, özel bir normdan elde edilmiş Banach uzaylarıdır. Tezimizin bundan sonraki bölümlerinde Hilbert uzaylarını H ve Banach uzaylarını B ile göstereceğiz.

Tanım 2.1.19: B bir Banach uzayı olsun. Eğer $x \neq y$ olmak üzere her $x, y \in S_B = \{x \in B: \|x\| = 1\}$ ve her $\lambda \in (0,1)$ için

$$\|(1 - \lambda)x + \lambda y\| < 1$$

şartı sağlanıyorsa, B Banach uzayına kesin konveks (strict convex) uzay denir (O'Regan *et al.* 2009).

Bu tanım B deki S_B birim yuvarı yüzeyine ait birbirinden farklı x ve y noktalarının orta noktasının S_B de olmadığını gösterir. Bir başka deyişle, eğer $x, y \in S_B$ ve $\|x\| = \|y\| = \|(x+y)/2\|$ ise $x = y$ dir.

Örnek 2.1.20: $B = \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $\|x\|_2 = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{1/2}$ normu verilsin. Bu durumda B kesin konvekstir. Bunu görmek için,

$$x = (1,0,0,\dots,0) \text{ ve } y = (0,-1,0,\dots,0)$$

olarak seçilirse $x \neq y$, $\|x\|_2 = 1 = \|y\|_2$ iken $\|x+y\|_2 < 1$ dir.

Örnek 2.1.21: $B = \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$ normu verilsin. Bu durumda B kesin konveks değildir. Gerçekten $x = (1,0,0,,\dots,0)$ ve $y = (0,1,0,0,\dots,0)$ olarak seçilirse $x \neq y$, $\|x\|_1 = 1 = \|y\|_1$ olduğu halde $\|x+y\|_1 = 2$ dir.

B Banach uzayının normunun temel özelliği konveks olmasıdır. Yani her $x, y \in B$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$\|(1-\lambda)x + \lambda y\| \leq (1-\lambda)\|x\| + \lambda\|y\|$$

şartını sağlamasıdır**.** Eğer $x \neq y$ alınırsa $\lambda \in (0,1)$ için bu ifade

$$\|(1-\lambda)x + \lambda y\| < (1-\lambda)\|x\| + \lambda\|y\| \tag{2.1}$$

şeklinde olur. B Banach uzayında S_B birim yuvar yüzeyini göz önüne alalım. Eğer $x, y \in S_B$ ve $x \neq y$ ise, her $\lambda \in (0,1)$ için (2.1) eşitsizliği

$$\|(1-\lambda)x+\lambda y\|<1$$

eşitsizliğine dönüşür. Bu son ifade bize S_B birim yuvar yüzeyinin doğru parçası içermediğini ve dolayısıyla normun kesin konveks olduğunu gösterir.

B normlu uzayının kesin konveksliği, $\|x-y\|\geq\varepsilon>0$ olmak üzere $x,y\in S_B$ noktalarını birleştiren doğru parçasının orta noktasının, S_B birim yuvar yüzeyinde olmadığını ifade eder, yani

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|<1$$

dir. Böyle uzaylarda S_B birim yuvar yüzeyi ile $(x+y)/2$ orta noktası arasındaki uzaklık, yani $1-\|(x+y)/2\|$ hakkındaki bilgiye sahip değiliz. $1-\|(x+y)/2\|$ uzunluğu hakkında daha fazla fikir sahibi olmak için, kesin konvekslikten daha güçlü bir özellik olan düzgün konveksliğe ihtiyaç vardır.

Tanım 2.1.22: B bir Banach uzayı olsun. Her $\varepsilon>0$ ve $\|x\|\leq 1$, $\|y\|\leq 1$ ve $\|x-y\|\geq\varepsilon$ şartlarını sağlayan her $x,y\in B$ için

$$\frac{1}{2}\|x+y\|\leq 1-\delta(\varepsilon)$$

olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon)>0$ varsa, B ye düzgün konveks uzay adı verilir (Aksoy and Khamsi 1990).

Bu tanım, $x,y\in B_B=\{x\in B:\|x\|\leq 1\}$ ve $\|x-y\|\geq\varepsilon>0$ için $(x+y)/2$ orta noktasının S_B den bir δ uzaklığında ve B_B kapalı birim yuvarının içinde olduğunu ifade eder.

Örnek 2.1.23: Her H Hilbert uzayı düzgün konvekstir. Gerçekten her $x, y \in H$ için paralel kenar kuralı

$$\|x + y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) - \|x - y\|^2$$

eşitliğini verir. $x \neq y$ olmak üzere $x, y \in B_H$ ve $\|x - y\| \geq \varepsilon$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$\|x + y\|^2 \leq 4 - \varepsilon^2$$

eşitsizliği elde edilir ve eğer, $\delta(\varepsilon) = 1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}$ olarak seçilirse

$$\left\|\frac{(x + y)}{2}\right\| \leq 1 - \delta(\varepsilon)$$

olarak bulunur. O halde, H düzgün konveks uzaydır.

Tezimizin bundan sonraki bölümlerinde düzgün konveks Banach uzaylarını E ile göstereceğiz.

Örnek 2.1.24: $l_1 = \{x : x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)$ ve $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty\}$ ve $l_\infty = \{x : x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)$ ve $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, sınırlıdır$\}$ uzayları sırasıyla $\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ ve $\|x\| = sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$ normlarına göre düzgün konveks uzaylar değildir. Bunu göstermek için, $x = (1,0,0,0 \dots)$, $y = (0, -1, 0, 0, \dots) \in l_1$ ve $\varepsilon = 1$ olarak alalım. Bu durumda

$$\|x\|_1 = 1,\ \|y\|_1 = 1,\ \|x - y\|_1 = 2 > 1 = \varepsilon$$

dir. Ancak $\left\|\frac{(x+y)}{2}\right\|_1 = 1$ dir ve $\left\|\frac{(x+y)}{2}\right\|_1 \leq 1 - \delta$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı yoktur. Bu nedenle l_1 düzgün konveks uzay değildir. Benzer şekilde, $\varepsilon = 1$ ve $x = (1,1,1,0,0,..)$, $y = (1,1,-1,0,0,...) \in l_\infty$ olarak alınırsa,

$$\|x\|_\infty = 1,\ \|y\|_\infty = 1,\ \|x-y\|_\infty = 2 > 1 = \varepsilon$$

olur. $\left\|\frac{(x+y)}{2}\right\|_\infty = 1$ olduğundan, l_∞ uzayı düzgün konveks değildir.

Aşağıdaki teorem kesin konveks ve düzgün konveks uzaylar arasındaki bağıntıyı göstermektedir.

Teorem 2.1.25: Her düzgün konveks Banach uzayı, kesin konveks uzaydır (O'Regan *et al.* 2009).

Örnek 2.1.26: $B = c_0 = \{x : x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots) : \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, sıfıra yakınsaktır$\}$ uzayı ve $\beta > 0$ olsun. Her $x = \{x_i\} \in c_0$ için $\|\ \ \|_\beta$ normu

$$\|\ \ \|_\beta = \|x\|_{c_0} + \beta\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{x_i}{i}\right)^2\right)^{1/2}$$

şeklinde tanımlansın. $(c_0, \|\ \ \|_\beta)$ uzayı $\beta > 0$ için kesin konveks fakat düzgün konveks değildir. Eğer c_0 uzayı alışılmış norm ile verilirse, kesin konveks uzay olmaz.

Tanım 2.1.27: X bir lineer uzay olsun. Bir $x \in X$ için

$$g_x : X^* \to \mathbb{R},\ \ g_x(f) = f(x)$$

şeklinde bir g_x fonksiyoneli tanımlayalım. f lineer olduğundan bu g_x fonksiyonelinin de lineer olduğu ya da diğer bir deyişle $g_x \in X^{**}$ olduğu kolayca görülebilir. Böylece bir $x \in X$ için bir $g_x \in X^{**}$ öğesinin var olduğu anlaşılır. Bu durumda

$$G: X \to X^{**}, G(x) = g_x$$

dönüşümü tanımlanabilir. Bu G dönüşümüne X uzayından X^{**} uzayı içine doğal dönüşüm adı verilir.

Tanım 2.1.28: N normlu bir uzay olsun Bu durumda G doğal dönüşümü örten yani

$$G(N) = N^{**}$$

ise, N uzayına yansımalı (reflexive) uzay denir.

Tanım 2.1.29: (X, d) metrik uzay olsun. Eğer $x \neq y$ olmak üzere herhangi $x, y \in X$ için

$$d(x,z) + d(z,y) = d(x,y)$$

olacak şekilde $z \in X$ var ve $x \neq y \neq z$ ise, (X, d) metrik uzayına metriksel konvekstir denir (Assad and Kirk 1972).

Metrik konveks kavramı ilk olarak 1953'te K. Menger tarafından verilmiştir.

Lemma 2.1.30: Eğer K, (X, d) tam ve metriksel konveks metrik uzayınn boş olmayan kapalı bir alt kümesi ise, bu durumda herhangi $x \in K$ ve $y \notin K$ için

$$d(x,z) + d(z,y) = d(x,y)$$

olacak şekilde bir $z \in \partial K$ noktası vardır (Assad and Kirk 1972).

Tanım 2.1.31: X konveks bir metrik uzay olsun. Eğer $diam(K) > 0$ olmak üzere X in kapalı konveks sınırlı alt kümesi için

$$sup\{|p - x|: x \in K\} < diam(K)$$

olacak şekilde bir $p \in K$ noktası varsa X konveks metrik uzayı normal yapılıdır denir (O'Regan *et al*. 2009).

2.2. Metrik Projeksiyon ve Opial Şartı

$K,\ N$ normlu uzayının boş olmayan bir alt kümesi ve $x \in N$ olsun. Eğer

$$\|x - y_0\| = d(x, K)$$

olacak şekilde bir $y_0 \in K$ elemanı varsa, y_0 a x için en iyi yaklaşım denir. Burada $d(x, K) = inf_{y \in K}\|x - y\|$ dir. $d(x, K)$ sayısına, x den K ye uzaklık denir. $x \in N$ olmak üzere en iyi yaklaşımların kümesi

$$P_K(x) = \{y \in K: \|x - y\| = d(x, K)\}$$

ile gösterilir. Bu durumda 2^K, K nin kuvvet kümesi olmak üzere N den 2^K ye bir P_K dönüşümü tanımlayabiliriz. Bu P_K dönüşümüne K üzerine metrik projeksiyon denir. Metrik projeksiyon, en yakın nokta dönüşümü veya proximity dönüşümü olarakta bilinir.

Tanım 2.2.1: $K,\ B$ Banach uzayının boş olmayan konveks bir alt kümesi olsun. Eğer her $x \in B$ için en az bir $y \in K$ en iyi yaklaşım varsa K kümesine proximinal küme denir (Agarwal *et al*. 2009).

Teorem 2.2.2: X bir iç çarpım uzayı ve K, X in tam ve konveks alt kümesi olsun. Bu durumda $x \in X$ keyfi fakat sabit olmak üzere

$$\delta = \|x - y_0\| = inf\{\|x - y\|: y \in K\}$$

olacak şekilde bir tek $y_0 \in K$ vardır (Bayraktar 2000).

İspat: Önce böyle bir $y_0 \in K$ ın varlığını gösterelim. Bunun için

$$\|x - y_n\| \to \delta$$

olacak şekilde K da bir (y_n) dizisinin olduğunu kabul edelim. İddia ediyoruz ki bu (y_n) dizisi Cauchy dizisidir. Gerçekten,

$$\|y_m - y_n\| = \|y_m - x + x - y_n\|$$

olduğuna dikkat edilir ve paralel kenar kanunundan dolayı,

$$\|(y_m - x) + (x - y_n)\|^2 + \|(y_m - x) - (x - y_n)\|^2 = 2\|y_m - x\|^2 + 2\|x - y_n\|^2$$

yazılırsa buradan

$$\begin{aligned}\|y_m - y_n\|^2 &= 2\|y_m - x\|^2 + 2\|x - y_n\|^2 - \|(y_m + y_n) - 2x\|^2 \\ &= 2\|y_m - x\|^2 + 2\|x - y_n\|^2 - 4\left\|\tfrac{1}{2}(y_m + y_n) - x\right\|^2\end{aligned}$$

bulunur. K konveks olduğundan

$$\tfrac{1}{2}(y_m + y_n) = \tfrac{1}{2}y_m + \tfrac{1}{2}y_n \in K$$

dır. δ nın tanımından dolayı

$$\left\|\frac{1}{2}(y_m + y_n) - x\right\| \geq \delta$$

dır. Buradan

$$\|y_m - y_n\|^2 \leq 2\|y_m - x\|^2 + 2\|x - y_n\|^2 - 4\delta^2$$

elde edilir. $m, n \to \infty$ iken eşitsizliğin sağ tarafı $\to 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2 = 0$ olur. O halde (y_n), K da bir Cauchy dizisidir. K tam olduğundan uygun bir $y_0 \in K$ için $y_n \to y_0$ dır. Bu taktirde $y_n - x \to y_0 - x$ ve dolayısıyla $\|y_n - x\| \to \|y_0 - x\|$ dir. Limitin tekliğinden dolayı $\|y_0 - x\| = \delta$ dır.

Şimdi y_0 ın tekliğini gösterelim. Farzedelim ki $z_0 \in K$ ve $\|z_0 - x\| = \delta$ dır. Göstermeliyiz ki $y_0 = z_0$ dır.

$$\begin{aligned}
\|y_0 - z_0\|^2 &= \|(y_0 - x) - (z_0 - x)\|^2 \\
&= 2\|y_0 - x\|^2 + 2\|z_0 - x\|^2 - \|(y_0 + z_0) - 2x\|^2 \\
&= 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\left\|\frac{1}{2}(y_0 + z_0) - x\right\|^2 \\
&\leq 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2 = 0
\end{aligned}$$

elde edilir.

Önerme 2.2.3: X normlu bir uzay ve K, X in boştan farklı bir alt kümesi olsun. Bu durumda

(a) Her $x \in X$ için $P_K(x) \neq \emptyset$ ise K proximinaldır.

(b) Eğer K konveks bir küme ise en iyi yaklaşımlar kümesi de konvekstir (Takahashi 1970).

Şimdi proximinal kümeler üzerine bazı temel sonuçlar verelim.

Önerme 2.2.4: K, B Banach uzayının proximinal bir alt kümesi olsun. Bu durumda K kapalıdır (Takahashi 1970).

İspat: K nın kapalı olmadığını farzedelim. O halde $x \notin K$, $x \in B$ ve $x_n \to x$ olacak şekilde K da bir (x_n) dizisi vardır.

$$d(x,K) \leq \|x_n - x\| \to 0$$

olduğundan, $d(x,K) = 0$ olur. $x \notin K$ olduğundan, her $y \in K$ için

$$\|x - y\| > 0$$

dır. Bundan dolayı $P_K(x) = \emptyset$ olur. Bu da $P_K(x) \neq \emptyset$ olmasıyla çelişir.

Teorem 2.2.5: K, E kesin konveks bir Banach uzayının boş olmayan konveks bir alt kümesi olsun. Bu durumda her $x \in E$ için, K en fazla bir en iyi yaklaşıma sahiptir (Reich 1984).

İspat: Bir $x \in E$ için, $y_1, y_2 \in K$ şeklinde en iyi yaklaşım olduğunu farz edelim. En iyi yaklaşımların kümesi konveks olduğundan, $\frac{(y_1+y_2)}{2}$ de x için en iyi yaklaşımdır. $r := d(x,K)$ olsun. Bu durumda,

$$0 \leq r = \|x - y_1\| = \|x - y_2\| = \left\| x - \frac{(y_1 + y_2)}{2} \right\|$$

olur ve buradan

$$\|(x - y_1) + (x - y_2)\| = 2r = \|x - y_1\| + \|x - y_2\|$$

elde edilir. E nin kesin konveksliğinden,

$$x - y_1 = t(x - y_2), \quad t \geq 0$$

yazılır. Bu bağıntıda norm alınırsa, $r = tr$ elde edilir. Örneğin, $t = 1$ alınırsa $y_1 = y_2$ bulunur.

Önerme 2.2.6: K, H Hilbert uzayının boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi ve P_K, H den K üzerine bir metrik projeksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır:

(a) P_K idempotenttir. Yani her $x \in H$ için $P_K\big(P_K(x)\big) = P_K(x)$ dir.
(b) P_K firmly genişlemeyendir. Yani her $x, y \in H$ için

$$\langle x - y, P_K(x) - P_K(y)\rangle \geq \|P_K(x) - P_K(y)\|^2$$

dir.
(c) P_K genişlemeyendir. Yani her $x, y \in H$ için $\|P_K(x) - P_K(y)\| \leq \|x - y\|$ dir.
(d) P_K monotondur. Yani her $x, y \in H$ için $\langle P_K(x) - P_K(y), x - y\rangle \geq 0$ dir.
(e) P_K demicloseddur. Yani $x_n \rightharpoonup x_0$ ve $P_K(x_n) \to y_0$ ise $P_K(x_0) = y_0$ dir (Takahashi 1970).

Şimdi teoremlerimizde kullanacağımız Opial şartını verelim.

Tanım 2.2.7: $(B, \|.\|)$ bir Banach uzayı ve (x_n), B de bir dizi olsun. (x_n) e zayıf yakınsak olması $(x_n \rightharpoonup x)$, her $y \neq x$ için

$$\limsup_{n\to\infty}\|x_n - x\| < \limsup_{n\to\infty}\|x_n - y\|$$

olmasını gerektiriyorsa, bu durumda B Opial şartını sağlıyor denir (Opial 1967).

Bu eşitsizlikteki 'limsup' ifadeleri 'liminf' ile yer değiştirirse, benzer bir şart elde edilir. Yine aynı eşitsizlikte '<' kesin eşitsizliği yerine '≤' alınırsa, zayıf Opial şartı olarak adlandırılan şart elde edilir.

Hilbert uzayları ve l^p $(1 < p < \infty)$ uzayları Opial şartını sağlayan Banach uzaylarıdır.

Örnek 2.2.8: Her Hilbert uzayı Opial Şartını sağlar. Yani H hilbert uzayında (x_n) dizisi $x \in H$ a zayıf yakınsarsa, her $y \in H$ ve $y \neq x$ için

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_n - x\| < \limsup_{n\to\infty} \|x_n - y\|$$

elde edilir. Aslında, her zayıf yakınsak dizinin sınırlı olması gerektiğinden, $\limsup_{n\to\infty} \|x_n - x\|$ ve $\limsup_{n\to\infty} \|x_n - y\|$ sonludur. Buradan

$$\|x_n - y\|^2 = \|x_n - x + x - y\|^2 = \|x_n - x\|^2 + \|x - y\|^2 + 2\langle x_n - x, x - y\rangle$$

olup bu ifade düzenlenirse,

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_n - y\|^2 > \limsup_{n\to\infty} \|x_n - x\|^2$$

elde edilir.

2.3. Tek Değerli Dönüşümler ve Sabit Nokta Teorisi

Bu başlık altında bazı temel tanımlar ve sabit nokta teorisinin temel teoremlerini vereceğiz.

Tanım 2.3.1: X boş olmayan bir küme ve $T: X \to X$ herhangi bir dönüşüm olsun. Eğer $Tx = x$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, bu x noktasına T nin sabit noktası denir. Yani $Tx = x \ (x \in X)$ denkleminin çözümü, T nin bir sabit noktasıdır. T nin tüm sabit noktalarının kümesi $F(T)$ veya ($Fix(T)$ ve F_T) ile gösterilir.

Örnek 2.3.2: $X = [0,1]$ olmak üzere $T: X \to X,\ Tx = 4 - 3x$ biçiminde tanımlanan dönüşümün sabit noktası $x = 1$ dir.

Örnek 2.3.3: $X \neq \emptyset$ olmak üzere $I: X \to X$ şeklindeki özdeş dönüşümü için X in her bir noktası bir sabit noktadır.

Örnek 2.3.4: $T: (0, \infty) \to (0, \infty),\ Tx = \frac{2x}{5}$ dönüşümünün sabit noktası yoktur.

Yukarıdaki örneklerden de görüldüğü gibi her dönüşümün sabit noktası olmak zorunda değildir. Dönüşümlerin sabit noktalarını garantilemek için çalışılan uzay veya dönüşüm üzerine ek şartlar konulmalıdır.

Tanım 2.3.5: (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için,

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y) \tag{2.2}$$

olacak şekilde bir $k \geq 0$ sabiti varsa, T ye Lipschitzian dönüşüm denir. (2.2) eşitsizliğine Lipschitz şartı ve bu şartı sağlayan en küçük k değerine de Lipschitz sabiti denir. Eğer (2.2) eşitsizliği $0 \leq k < 1$ olması halinde sağlanıyorsa T ye daraltan dönüşüm veya büzülme dönüşümü denir. Eğer (2.2) eşitsizliği $k = 1$ olması halinde sağlanıyorsa T ye genişlemeyen dönüşüm denir.

Örnek 2.3.6: $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$ ve $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $Tx = 2x$ olsun. Bu durumda,

$$d(Tx, Ty) = |2x - 2y| = 2|x - y| = 2d(x, y)$$

dır. Burada $k \geq 2$ için T lipschitz şartını sağlar.

Tam olmayan metrik uzaylarda tanımlanan daraltan dönüşümlerin sabit noktaya sahip olması gerekmez.

Örnek 2.3.7: $X = (0,1]$ olmak üzere $T: X \to X$ ve $Tx = \frac{2x}{5}$ dönüşümünü alalım. Bu durumda,

$$d(Tx, Ty) = \left|\frac{2x}{5} - \frac{2y}{5}\right| = \frac{2}{5}|x - y| = \frac{2}{5}d(x, y)$$

olduğundan $k = \frac{2}{5}$ için T dönüşümü daraltandır. Fakat T nin, X de bir sabit noktası yoktur. Çünkü sabit noktanın tanımı gereği $Tx = x$ den, $x = 0$ olur. Burada $x = 0 \notin (0,1] = X$ olduğundan dolayı, T nin X de bir sabit noktası yoktur.

Herhangi bir Banach uzayında tanımlanan genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarının olması gerekmez. Bu nedenle ya uzay üzerine ya da dönüşüm üzerine bazı ek şartlar konulmalıdır. 1965 yılında Browder, Göhde ve Kirk düzgün konveks bir Banach uzayının kapalı, sınırlı ve konveks alt kümesi üzerinde tanımlı genişlemeyen bir dönüşümün sabit noktaya sahip olduğunu ispatlamıştır.

Örnek 2.3.8: $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$ ve $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $Tx = x - 5$ olsun. O halde

$$d(Tx, Ty) = |x - 5 - y + 5| = |x - y| = d(x, y)$$

olduğundan her $x, y \in X$ için $d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$ şartı sağlanır. Dolayısıyla T genişlemeyen bir dönüşümdür. Fakat bu dönüşümün bir sabit noktası yoktur.

Tanım 2.3.9: N bir normlu uzay, K da N nin boş olmayan bir alt kümesi ve $T: K \to K$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $p \in F(T) \neq \emptyset$ ve her $x \in K$ için

$$\|Tx - p\| \leq \|x - p\|$$

ise T ye quasi genişlemeyen dönüşüm denir (Petryshyn and Williamson 1973).

$F(T) \neq \emptyset$ olması durumunda, genişlemeyen dönüşümler de quasi genişlemeyen dönüşümlerdir. Fakat tersi doğru değildir.

Örnek 2.3.10: $X = l_\infty$ ve $K = B_X$ olsun. Her $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \in K$ için $T: K \to K$ dönüşümünü

$$Tx = (0, x_1^2, x_2^2, x_3^2, \ldots)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu dönüşüm lineer olmayan sürekli bir dönüşümdür ve $F(T) = \{0\}$ dır. Ayrıca her $x \in K$ için

$$\|Tx - 0\|_\infty = \|(0, x_1^2, x_2^2, x_3^2, \ldots)\|_\infty \leq \|(x_1, x_2, x_3, \ldots)\|_\infty = \|x - p\|_\infty$$

dır. Yani T bir quasi genişlemeyen dönüşümdür. Ancak T genişlemeyen değildir. Gerçekten de $x = (1/2\,, 1/2\,, \ldots)$ ve $y = (3/4\,, 3/4\,, \ldots)$ alınırsa,

$$\|Tx - Ty\|_\infty = \left\|0, \frac{5}{16}, \frac{5}{16}, \ldots\right\|_\infty = \frac{5}{16} > \frac{1}{4} = \|x - y\|_\infty$$

elde edilir. Bu ise T dönüşümünün genişlemeyen olmadığını gösterir.

Tanım 2.3.11: B bir Banach uzay, K da B nin boş olmayan sınırlı bir alt kümesi olsun. $x \in K$ için, $r_x(K) = sup\{\|x - y\|: y \in K\}$ olmak üzere, K nin Chebyshev yarıçapı ve Chebyshev merkezi sırasıyla $r(K)$ ve $\mathrm{Z}(K)$ ile gösterilir ve

$$r(K) = inf\{r_x(K): x \in K\} \text{ ve } \mathrm{Z}(K) = \{x \in K: r_x(K) = r(K)\}$$

olarak tanımlanır (Sahu *et al.* 2009).

Önerme 2.3.12: B bir Banach uzay, K da B nin zayıf kompakt konveks bir alt kümesi olsun. Bu durumda $\mathrm{Z}(K)$, K nın boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesidir (Prus 2001).

Önerme 2.3.13: B bir Banach uzay, K da B nin zayıf kompakt konveks bir alt kümesi ve $diam(K) > 0$ olsun. Farzedelim ki K normal yapıya sahiptir. Bu durumda

$$diam\big(\mathrm{Z}(K)\big) < diam(K)$$

dir (Prus 2001).

Tanım 2.3.14: B bir Banach uzay ve K da B nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. $x \in K$ olmak üzere x in K ya göre inward kümesi

$$I_K(x) = \{x + t(y - x) : y \in K \text{ ve } t \geq 0\}$$

şeklinde tanımlanır. $\overline{I_K(x)}$ ile $I_K(x)$ in kapanışı gösterilir (Sahu *et al.* 2009).

$T: K \to B$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x \in K$ için $Tx \in I_K(x)$ ise T ye inward dönüşüm, $Tx \in \overline{I_K(x)}$ ise T ye zayıf inward dönüşüm denir.

Teorem 2.3.15: B bir Banach uzay, K da B nin boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi ve $T: K \to B$ daraltan dönüşümü zayıf inward olsun. Bu durumda T nin K da tek bir sabit noktası vardır (Caristi 1976).

Önerme 2.3.16: K, B Banach uzayının boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi ve $T: K \to B$ genişlemeyen dönüşümü zayıf inward olsun. Bu durumda $u \in K$ ve $t \in (0,1)$ için

$$x_t = (1-t)u + Tx_t$$

olacak şekilde bir $x_t \in K$ noktası vardır. Eğer K sınırlı ise, bu durumda $t \to 1$ iken $x_t - Tx_t \to 0$ dır (Caristi 1976).

İspat: t bir sabiti olmak üzere $T_t\colon K \to B$ daraltan dönüşümünü

$$T_t x = (1-t)u + tTx \tag{2.3}$$

şeklinde tanımlayalım. Teorem 2.3.15 den,

$$x_t = T_t x_t = (1-t)u + tTx_t$$

olacak şekilde bir $x_t \in K$ noktası vardır. Eğer K sınırlı ise, bu durumda $t \to 1$ iken

$$\| x_t - T\, x_t\| = (1-t)\|u - T\, x_t\| \leq (1-t)diam(K) \to 0$$

elde edilir.

Sonuç 2.3.17: K, B Banach uzayının boş olmayan kapalı konveks sınırlı bir alt kümesi ve $T\colon K \to K$ genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Bu durumda $\lim_{n\to\infty}\|x_n - Tx_n\| = 0$ olacak şekilde K da bir (x_n) dizisi vardır (Caristi 1976).

İspat: $t \in (0,1)$ olmak üzere, (2.3) de tanımlanan $T_t\colon K \to K$ dönüşümü daraltan olduğundan bu dönüşümün K da bir tek sabit noktası vardır. Dolayısıyla önerme 2.3.16 dan sonuç açıktır.

Tanım 2.3.18: K, B Banach uzayının boş olmayan bir alt kümesi ve $T\colon K \to B$ bir dönüşüm olsun. Eğer K daki bir (x_n) dizisi u ya zayıf, Tx_n de v ye güçlü yakınsadığında $Tu = v$ oluyorsa bu durumda T, $v \in B$ de demicloseddır denir.

Teorem 2.3.19: B, Opial şartını sağlayan bir Banach uzay ve K da B nin boş olmayan zayıf kompakt bir alt kümesi ve $T: K \to B$ genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Bu durumda $I - T$ dönüşümü B de demicloseddir (Bruck 1981).

İspat: (x_n), K da bir dizi, $x_n \rightharpoonup x \in K$ ve $y \in B$ için $\lim_{n\to\infty}\|(I-T)x_n - y\| = 0$ olsun. $(I-T)x = y$ olduğunu gösterelim. Bunun için

$$\|x_n - Tx - y\| \leq \|x_n - Tx_n - y\| + \|Tx_n - Tx\|,$$

olur. Buradan

$$\liminf_{n\to\infty}\|x_n - Tx - y\| \leq \liminf_{n\to\infty}\|x_n - x\|$$

elde edilir. Opial şartından,

$$\liminf_{n\to\infty}\|x_n - x\| < \liminf_{n\to\infty}\|x_n - (Tx + y)\|$$

olur. Bu da bir çelişkidir. Bundan dolayı $(I-T)x = y$ dir.

Sonuç 2.3.20: B Opial şartını sağlayan bir Banach uzay ve K da B nin boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi ve $T: K \to B$ genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Bu durumda $I - T$ dönüşümü demicloseddir (Bruck 1981).

Önerme 2.3.21: K, E düzgün konveks Banach uzayının boş olmayan konveks sınırlı bir alt kümesi ve $T: K \to E$ genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Bu durumda bir $\varepsilon > 0$ olmak üzere $x_0,\ x_1 \in K$ için $\|x_0 - Tx_0\| \leq \zeta(\varepsilon)$ ve $\|x_1 - Tx_1\| \leq \zeta(\varepsilon)$ olduğunda her $x \in co(\{x_0, x_1\}) = \{\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 : x_i \in K, \alpha_i \geq 0 \text{ ve } \sum_{i=0}^{1}\alpha_i = 1\}$ için $\|x - Tx\| < \varepsilon$ olacak şekilde $\zeta(\varepsilon) > 0$ pozitif sayısı vardır (Bruck 1981).

Önerme 2.3.22: $B,$ Opial şartını sağlayan bir Banach uzayı, K da B nin boş olmayan zayıf kompakt bir alt kümesi olsun. $T: K \to K$ dönüşümü için $F(T) \neq \emptyset$ olmak üzere $I - T$ sıfırda demiclosed ve (x_n), K da bir dizi olsun. Eğer

(a) Her $p \in F(T)$ için $\lim_{n\to\infty}\|x_n - p\|$ vardır
(b) (x_n) yaklaşık sabit nokta dizisidir, yani $\lim_{n\to\infty}\|x_n - Tx_n\| = 0$ dir.

şartları sağlanıyorsa (x_n) dizisi T nin bir sabit noktasına zayıf yakınsar (Goebel and Kirk 1990).

İspat: K zayıf kompakt olduğundan, (x_n) nin zayıf yakınsak bir $\left(x_{n_j}\right)$ alt dizisi vardır. $\left(x_{n_j}\right)$ nin p ye zayıf yakınsadığını farz edelim. $\left(x_{n_j}\right) \subset K$ ve K zayıf kapalı olduğundan $p \in K$ olur. (b) den, $\lim_{n\to\infty}\|x_n - Tx_n\| = 0$ ve $I - T$ sıfırda demiclosed olduğundan $p \in F(T)$ olacak şekilde $(I - T)p = 0$ vardır. İspatı tamamlamak için (x_n) dizisinin T nin bir sabit noktasına zayıf yakınsadığını gösterelim. Bunun için $\omega_\omega\big((x_n)\big)$ nin sadece p noktasından oluştuğunu göstermek yeterlidir. (x_n) nin p den farklı bir q noktasına zayıf yakınsayan başka bir $\left(x_{n_k}\right)$ alt dizisi olduğunu kabul edelim. p olması durumunda, $q \in K$ ve $q \in F(T)$ olmalıdır. (a) dan, $\lim_{n\to\infty}\|x_n - p\|$ ve $\lim_{n\to\infty}\|x_n - q\|$ limitleri vardır. X Opial şartını sağladığından,

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - p\| = lim_{j\to\infty}\left\|x_{n_j} - p\right\| < lim_{j\to\infty}\left\|x_{n_j} - q\right\| = lim_{n\to\infty}\|x_n - q\|,$$
$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - q\| = lim_{k\to\infty}\left\|x_{n_k} - q\right\| < lim_{k\to\infty}\left\|x_{n_k} - p\right\| = lim_{n\to\infty}\|x_n - p\|,$$

elde edilir. Bu da bir çelişkidir. Bu nedenle $p = q$ ve (x_n) dizisi p ye zayıf yakınsar.

Şimdi düzgün konveks Banach uzaylarında genişlemeyen dönüşümler için demiclosedness prensibini genelleştiren teoremi verelim.

Teorem 2.3.23: K, E düzgün konveks Banach uzayının boş olmayan kapalı konveks sınırlı bir alt kümesi ve $T: K \to E$ genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Bu durumda $I - T$, E üzerinde demicloseddir (Browder *et al*. 1965).

Teorem 2.3.24: K, E düzgün konveks Banach uzayının boş olmayan kapalı konveks sınırlı bir alt kümesi ve $T: K \to E$ genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Bu durumda $(I - T)(K)$ kapalıdır (Browder 1965).

Genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarının varlığı ile ilgili aşağıdaki teoremleri verelim.

Teorem 2.3.25: B Opial şartlı bir Reflexive Banach uzay olsun. K da B nin boş olmayan kapalı konveks sınırlı bir alt kümesi ve $T: K \to K$ bir genişlemeyen dönüşüm olsun. Bu durumda T, K da bir sabit noktaya sahiptir (Browder 1965).

Şimdi de genişlemeyen dönüşümler için bazı temel varlık teoremlerini ve ispatlarını verelim.

Teorem 2.3.26: B bir Banach uzay, K da B nin boş olmayan kapalı konveks sınırlı bir alt kümesi ve $T: K \to B$ genişlemeyen dönüşümü zayıf inward olsun. Eğer $I - T$ kapalı ise bu durumda T, K da bir sabit noktaya sahiptir (Agarwal *et al.*2009).

İspat: Önerme 2.3.16 dan, $t \to 1$ iken $x_t - Tx_t \to 0$ dir. Dolayısıyla 0, $(I - T)(K)$ nin kapanışında bulunur. $I - T$ kapalı olduğundan, $(I - T)v = 0$ olacak şekilde bir $v \in K$ vardır.

Teorem 2.3.27: B Opial şartlı bir reflexive Banach uzay olsun. K da B nin boş olmayan kapalı konveks sınırlı bir alt kümesi ve $T: K \to K$ genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Bu durumda T, K da bir sabit noktaya sahiptir (O'Regan *et al.* 2009).

İspat: Sonuç 2.3.17 den $\lim_{n\to\infty}\|x_n - Tx_n\| = 0$ olacak şekilde K da bir (x_n) dizisi vardır. B reflexive olduğundan, $x_{n_k} \rightharpoonup x \in K$ olacak şekilde (x_n) nin bir $\left(x_{n_k}\right)$ alt dizisi vardır. Sonuç 2.3.20 den, $I - T$ sıfırda demicloseddur. Yani, $x_{n_k} \rightharpoonup x \in K$ ve $x_{n_k} - Tx_{n_k} \to 0$ olduğunda $x - Tx = 0$ olur. Dolayısıyla x, T nin bir sabit noktasıdır.

Teorem 2.3.28: E düzgün konveks Banach uzay ve K da E nin boş olmayan kapalı konveks sınırlı bir alt kümesi olsun. Bu durumda her $T: K \to K$ genişlemeyen dönüşümü K da bir sabit noktaya sahiptir (Browder and Göhde 1965).

İspat: Teorem 2.3.24'den $(I - T)(K)$ kapalıdır. Teorem 2.3.26'dan T nin K da sabit noktası vardır.

Sonuç 2.3.29: H bir Hilbert uzay ve K da H nın boş olmayan kapalı konveks sınırlı bir alt kümesi olsun. Bu durumda her $T: K \to K$ genişlemeyen dönüşümü K da bir sabit noktaya sahiptir (Browder 1965).

Teorem 2.3.30: B bir Banach uzay ve K, normal yapılı B nin boş olmayan zayıf kompakt konveks bir alt kümesi olsun. Bu durumda her $T: K \to K$ genişlemeyen dönüşümü K da bir sabit noktaya sahiptir (Kirk 1965).

İspat: $\mathcal{F} = \{D_\alpha \subset K: D_\alpha,\ T(D_\alpha) \subset D_\alpha$ olacak şekilde boş olmayan kapalı konveks bir küme $\}$ olsun. $K \in \mathcal{F}$ olduğundan, $\mathcal{F}$ boştan farklı ve içerme bağıntısına göre kısmi sıralıdır. Zorn lemmasından, $\mathcal{F}$ nin K_0 gibi bir minimal elemanı vardır. K_0 ın sadece bir elemanı olduğunu gösterelim. Aksine K_0 ın iki elemanı olduğunu kabul edelim. Dolayısıyla $diam(K_0) > 0$ dır. K_0 zayıf kompakt konveks olduğundan, $\mathrm{Z}(K_0)$ boştan farklıdır. $x_0 \in \mathrm{Z}(K_0)$ olsun. Bu durumda $x \in K_0$ için

$$\|Tx_0 - Tx\| \le \|x_0 - x\| \le r_{x_0}(K_0) = r(K_0)$$

vardır. Yani Tx, $B = B_{r(K_0)}[Tx_0]$ de bulunur. Böylece $T(K_0) \subset B$ ve dolayısıyla $T(B \cap K_0) \subset B \cap K_0$ olur. K_0 ın minimalliği $K_0 \subset B$ olması anlamına gelir. Dolayısıyla $r_{Tx_0}(K_0) \leq r(K_0)$ dır. $r(K_0) \leq r_{Tx_0}(K_0)$ olduğundan, $r(K_0) = r_{Tx_0}(K_0)$ elde edilir. Bundan dolayı $Tx_0 \in Ƶ(K_0)$ dır. Yani $Ƶ(K_0)$, T tarafından kendi içine dönüşür. Önerme 2.3.11 den, $T\big(Ƶ(K_0)\big) \subseteq Ƶ(K_0)$ olacak şekilde $Ƶ(K_0)$, K_0 ın boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesidir. $Ƶ(K_0) \in \mathcal{F}$ dır. Ayrıca Önerme 2.3.13 den $Ƶ(K_0)$, K_0 da bulunur. Bu ise K_0 ın minimal olması ile çelişir. Bu nedenle K_0 tek bir noktadan oluşur ve dolayısıyla T nin K da bir sabit noktası vardır.

Kendi üzerine olmayan genişlemeyen dönüşümlerin bir sabit noktası olduğunu gösteren bir örnek verelim.

Örnek 2.3.31: $X = \mathbb{R}$, $K = [-1,1]$ ve $x \in K$ olmak üzere $T: K \to X$ dönüşümü $Tx = 1 - x$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $T(-1) = 2 \notin K$ dir, yani T kendi üzerine bir dönüşüm değildir. Fakat T nin K da bir sabit noktası vardır.

Browder'in varlık teoremindeki K nın sınırlı olma şartının (kendi üzerine olmayan genişlemeyen dönüşümlerde) gerekli olmadığını gösteren bir örnek verelim.

Örnek 2.3.32: $X = \mathbb{R}$, $K = \mathbb{R}^+$ ve $x \in K$ olmak üzere $T: K \to X$ dönüşümü $Tx = 1/(1 + x)$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda T genişlemeyendir ve sınırlıdır. $T(K) = (0,1]$ ve $Tx = x = \big(\sqrt{5} - 1\big)/2$ dir. Ancak K sınırsızdır.

Teorem 2.3.33: E düzgün konveks Banach uzayı, K da E nin boş olmayan kapalı konveks alt kümesi ve $T: K \to K$ bir genişlemeyen dönüşüm olsun. Bu durumda T nin K da en az bir sabit noktası vardır (Berinde 2006).

2.4. Küme Değerli Dönüşümler ve Sabit Nokta Teorisi

Tezimizin bu bölümünde küme değerli sabit nokta teorisi ile ilgili tanım ve önemli teoremleri vereceğiz.

X bir metrik uzay olmak üzere 2^X ile X in tüm alt kümelerinin ailesini; $CB(X)$ ile X in boş olmayan tüm kapalı ve sınırlı alt kümelerinin ailesini; $C(X)$ ile X in boş olmayan kapalı alt kümelerinin ailesini; $K(X)$ ile X in boş olmayan kompakt alt kümelerinin ailesi ve $P(X)$ ile de X in boş olmayan proximinal alt kümelerinin ailesini göstereceğiz.

Tanım 2.4.1: X ve Y boştan farklı iki küme olsun. $T: X \to 2^Y$ fonksiyonuna küme değerli dönüşüm denir. Bu fonksiyon $T: X \multimap Y$ şeklinde gösterilir (Ansari 2010).

$T: X \to 2^Y$ küme değerli dönüşümü, X kümesinden alınan her bir x elemanına Y nin bir $T(x)$ alt kümesini karşılık getirir. Eğer her bir $x \in X$ e karşılık gelen $T(x)$ tek noktadan oluşuyorsa, T tek değerli dönüşüm olur.

Verilen bir $f: X \to Y$ tek değerli dönüşümü yardımıyla her $x \in X$ için $T(x) = \{f(x)\}$ şeklinde küme değerli bir dönüşüm tanımlanabilir. $T(x) \neq \emptyset$ olacak şekilde en az bir $x \in X$ varsa T ye has (proper) denir. Bu durumda T nin tanım kümesi

$$Dom(T) = \{x \in X : T(x) \neq \emptyset\}$$

ile ve grafiği de

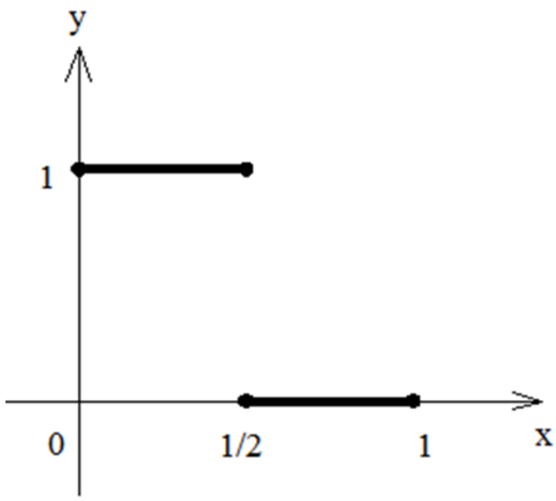
$$Graph(T) = \{(x, y) \in X \times Y : y \in T(x)\}$$

şeklinde tanımlanır. Küme değerli dönüşümlerle ile ilgili birkaç örnek verelim.

Örnek 2.4.2 a) $X = [0,1]$ ve $T: X \multimap X$ dönüşümü

$$T(x) = \begin{cases} 1, & x < \frac{1}{2} \\ \{0,1\}, & x = \frac{1}{2} \\ 0, & x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

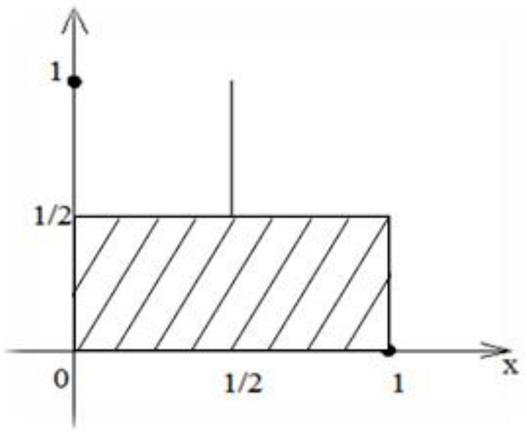
şeklinde tanımlansın. Bu durumda T küme değerli bir dönüşümdür ve aşağıdaki grafiğe sahiptir.



b) $X = [0,1]$ ve $T: X \multimap X$ dönüşümü

$$T(x) = \begin{cases} \left[0, \frac{1}{2}\right] & , x \neq \frac{1}{2} \\ [0,1] & , x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

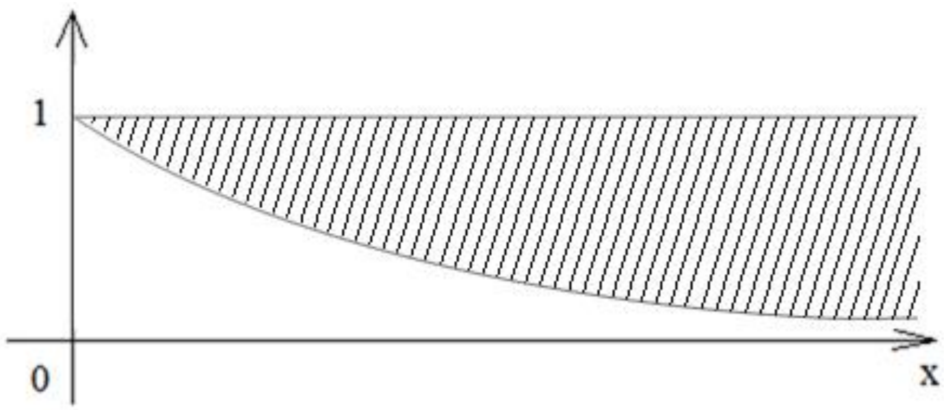
şeklinde tanımlansın. Bu durumda T küme değerli bir dönüşümdür ve aşağıdaki grafiğe sahiptir.



c) $X = \mathbb{R}_+$, $Y = \mathbb{R}$ ve $T: X \multimap Y$ dönüşümü

$$T(x) = [e^{-x}, 1], \quad \forall x \in X$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda T nin garfiği aşağıdadır.



Tanım 2.4.3: $T: X \to 2^X$ küme değerli bir dönüşüm olsun. Eğer bir $x \in X$ için $x \in T(x)$ oluyorsa x e T nin bir sabit noktası denir (Nadler 1969).

Küme değerli dönüşümlerin sabit noktaları ile ilgili birkaç örnek verelim.

Örnek 2.4.4: $K = [0, \infty)$ olmak üzere $T: K \to CB(K)$ dönüşümü

$$T(x)=\begin{cases}\{0\}, & x\leq 1\\ \left[x-\frac{3}{4},x-\frac{1}{3}\right], & x>1\end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $x=0$ bu dönüşümün tek sabit noktasıdır.

Örnek 2.4.5: $T:[0,1]\rightarrow 2^{[0,1]}$ dönüşümü

$$T(x)=\begin{cases}\{1\}, & x<\frac{1}{2}\\ \{0,1\}, & x=\frac{1}{2}\\ \{0\}, & x>\frac{1}{2}\end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu dönüşümün sabit noktası yoktur.

Örnek 2.4.6: $T:[0,\infty)\rightarrow 2^{[0,\infty)}$ olmak üzere $T(x)=[0,x]$ fonksiyonu için her bir $x\in[0,\infty)$ noktası aynı zamanda bir sabit noktadır.

Örnek 2.4.7: $T:\mathbb{R}\rightarrow 2^{\mathbb{R}}$ olmak üzere $T(x)=\begin{cases}[-1,1], & x\neq 0\\ \{0\}, & x=0\end{cases}$ dönüşümü için $x=0$ ve her bir $x\in[-1,1]$, bir sabit noktadır.

2^X in boş olmayan A ve B alt kümeleri verilsin. $x\in A$ için

$$d(x,B)=inf_{y\in B}d(x,y)$$

sayısına x in B kümesine olan uzaklığı denir. Diğer taraftan eğer

$$\delta(A,B)=sup_{x\in A}d(x,B)=sup_{x\in A}inf_{y\in B}d(x,y)$$

tanımlanırsa, $\delta(A, B)$ aşağıdaki özelliklere sahiptir.

Önerme 2.4.8: (X, d) bir metrik uzay ve $A, B, C \in CB(X)$ olsun. Bu durumda

(a) $\delta(A, B) = 0 \Leftrightarrow A \subset B$dir
(b) $B \subset C \Longrightarrow \delta(A, C) \leq \delta(A, B)$ dir
(c) $\delta(A \cup B, C) = max\{\delta(A, C), \delta(B, C)\}$ dir
(d) $\delta(A, B) \leq \delta(A, C) + \delta(C, B)$ dir (Ansari 2010).

İspat: (a) δ nın tanımından,

$$\delta(A, B) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sup d(x, B) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in A \quad d(x, B) = 0$$

dır. B, X de kapalı olduğundan

$$d(x, B) = 0 \Leftrightarrow x \in B$$

dir. Böylece

$$\delta(A, B) = 0 \Leftrightarrow A \subset B$$

elde edilir.

(b) $B \subseteq C$ olsun. Her $x \in X$ için $d(x, C) \leq d(x, B)$ dir. Bu durumda her $x \in A$ için $d\,(x, C) \leq d(x, B)$ eşitsizliği sağlandığından $\delta(A, C) \leq \delta(A, B)$ dir.
(c) $\delta(A \cup B, C) = \sup_{x \in A \cup B} d(x, C) = max\{sup_{x \in A}\, d(x, C), sup_{x \in B}\, d(x, C)\}$ dir.
(d) $a \in A$, $b \in B$ ve $c \in C$ olsun. Bu durumda

$$d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$$

yazılır. Burada $b \in B$ üzerinden infimum alınırsa

$$d(a,B) \leq d(a,c) + d(c,B)$$

elde edilir. $d(c,B) \leq \delta(C,B)$ olduğundan

$$d(a,B) \leq d(a,c) + \delta(C,B)$$

olur. Son eşitsizlikte $c \in C$ üzerinden infimum alınırsa,

$$d(a,B) \leq d(a,C) + \delta(C,B)$$

elde edilir. Yine $d(a,C) \leq \delta(A,C)$ olduğundan

$$d(a,B) \leq \delta(A,C) + \delta(C,B)$$

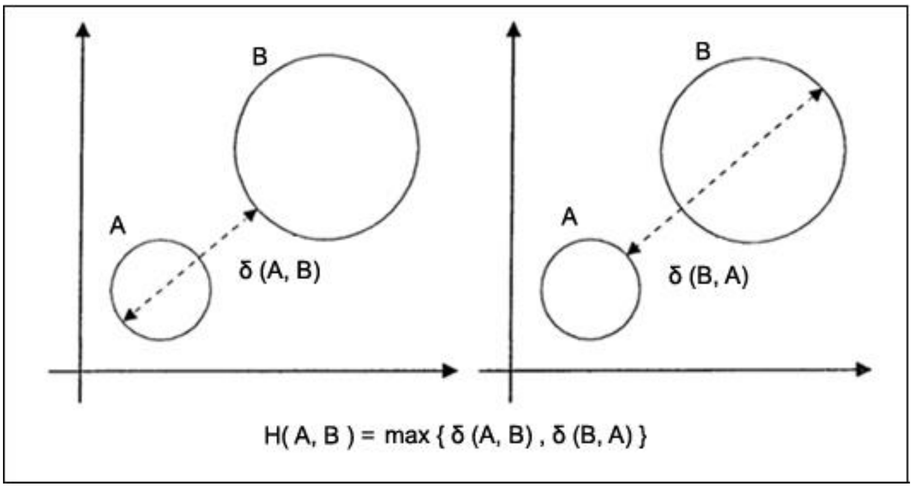
olur. Son eşitsizlikte $a \in A$ üzerinden supremum alınırsa,

$$\delta(A,B) \leq \delta(A,C) + \delta(C,B)$$

elde edilir.

Yukarıda tanımlanan δ bir metrik değildir. Örneğin $\mathbb{R}$ de '$\{0\}$ ile $[0,\infty)$ arasındaki uzaklık nedir?' sorusuna verilecek cevap sonsuzdur. Bu nedenle δ nin kullanımını sınırlı kümelere kısıtlayacağız. Ayrıca yine '$\delta(\emptyset,\{0\})$ uzaklığı nedir?' ve '$\delta\big((0,1),[0,1]\big)$ uzaklığı nedir?' sorularına verilecek cevaplar sırasıyla sonsuz ve sıfırdır. Bu nedenle δ nın kullanımını boştan farklı ve kapalı kümelere kısıtlayacağız. Şunu da belirtelim ki δ simetrik değildir.

(X,d) bir metrik uzay, A ve B de X in kapalı ve sınırlı iki alt kümesi olsun. $H: CB(X) \times CB(X) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $H(A,B) = max\{\delta(A,B), \delta(B,A)\}$ olarak tanımlanırsa H ın *CB(X)* üzerinde bir metrik olduğu aşağıdaki teoremde gösterilmiştir. Bu metriğe Hausdorff metriği denir. Eğer (X,d) tam metrik uzay ise $(CB(X),H)$ ve $(K(X),H)$ metrik uzayları da tamdır.



Şekil 2.1. Hausdorff metriğinde iki kümenin birbirine olan uzaklığı

Teorem 2.4.9: (X, d) bir metrik uzay olsun. Bu taktirde H, $CB(X)$ üzerinde bir metriktir (Ansari 2010).

İspat: $A, B, C \in CB(X)$ olsun.

(i) H nın tanımından $H(A, B) \geq 0$ olduğu açıktır.

(ii) $H(A, B) = 0 \Leftrightarrow max\{\delta(A, B), \delta(B, A)\} = 0$

$\Leftrightarrow \delta(A, B) = 0$ ve $\delta(B, A) = 0$

$\Leftrightarrow A \subset B$ ve $B \subset A$

$\Leftrightarrow A = B$

(iii) H nın tanımından,

$$\begin{aligned} H(A, B) &= max\{\delta(A, B), \delta(B, A)\} \\ &= max\{\delta(B, A), \delta(A, B)\} \\ &= H(B, A) \end{aligned}$$

olduğu görülür.

(iv) Önerme 2.4.8 in (d) şıkkından,

$$\begin{aligned} H(A,B) &= max\{\delta(A,B),\delta(B,A)\} \\ &\leq max\{\delta(A,C)+\delta(C,B),\delta(B,C)+\delta(C,A)\} \\ &\leq max\{\delta(A,C),\delta(C,A)\}+max\{\delta(B,C),\delta(C,B)\} \\ &= H(A,C)+H(C,B) \end{aligned}$$

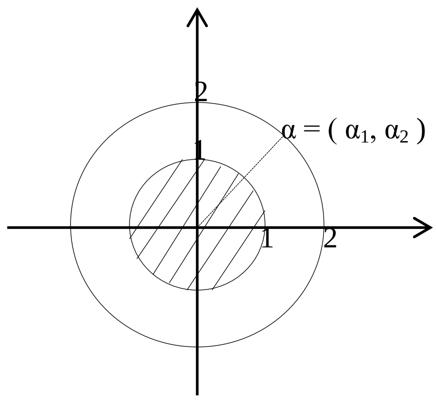
elde edilir.

Örnek 2.4.10 a) $X=\mathbb{R}$, $A=[1,2]$ ve $B=[2,3]$ olsun. Bu durumda

$$\delta(A,B)=\sup_{a\in A} d(a,B)=1 \quad \text{ve} \quad \delta(B,A)=\sup_{b\in B} d(b,A)=1$$

dır. Bundan dolayı $H(A,B)=max\{\delta(A,B),\delta(B,A)\}=1$ olur.

b) $\mathbb{R}^2$ de $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2}\leq 2\right\}$ ve $B=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^{\mathbf{2}} : \sqrt{x^2+y^2}\leq 1\right\}$



kümeleri göz önüne alalım. $B\subset A$ olduğundan, $d(b,A)=0$ dır. Buradan $\delta(B,A)=0$ bulunur. Her bir $a\in A\backslash B$ için $d(a,B)=\sqrt{a_1^2+a_2^2}-1$ olacağından $\delta(A,B)=sup_{a\in A}d(a,B)=1$ bulunur. Buna göre

$$H(A,B)=max\{\delta(A,B),\delta(B,A)\}=1$$

bulunur.

Tanım 2.4.11: $T: X \multimap Y$ küme değerli bir dönüşüm ve A, X in boş olmayan bir alt kümesi olsun. A nın T altındaki görüntüsü

$$T(A) = \bigcup_{x \in A} T(x)$$

olarak tanımlanır. Eğer $A = \emptyset$ ise $T(\emptyset) = \emptyset$ dır (Ansari 2010).

Tanım 2.4.12: $T: X \multimap Y$ küme değerli bir dönüşüm olsun. Bu durumda her $y \in Y$ için T^{-1} ters dönüşümü

$$T^{-1}(y) = \{x \in X : y \in T(x)\}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca B, Y nin bir alt kümesi olsun. Sırasıyla B nin T altındaki $T^{-1}(B)$ üst ters görüntüsü ve $T_{+}^{-1}(B)$ alt ters görüntüsü sırasıyla

$$T^{-1}(B) = \{x \in X : T(x) \cap B \neq \emptyset\} \text{ ve } T_{+}^{-1}(B) = \{x \in X : T(x) \subseteq B\}$$

şeklinde tanımlanır. $T^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ ve $T_{+}^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ dır. T^{-1} in tersinin tanımından,

$(T^{-1})^{-1} = T$ ve $y \in T(x) \Leftrightarrow x \in T^{-1}(y)$ dir.

Örnek 2.4.13: $X = Y = \mathbb{R}_{+}$ ve $T: X \multimap Y$ küme değerli dönüşümü her $x \in X$ için

$$T(x) = [0, x]$$

olarak tanımlansın. $T(\mathbb{R}_{+}) = \mathbb{R}_{+}$ olduğundan, T^{-1} dönüşümü yarım eksen üzerinde tanımlanır. Herhangi $y \in \mathbb{R}_{+}$ için

$$T^{-1}(y) = \{x \in X : y \in [0, x]\} = [y, +\infty)$$

olur.

Tek değerli dönüşümler için tanımlanan süreklilik tanımı küme değerli dönüşümler için yeterli değildir.

Tanım 2.4.14: X ve Y iki metrik uzay ve $T: X \multimap Y$ küme değerli dönüşüm olsun. Eğer x_0 a yakınsayan $x_n \in Dom(T)$ elemanlarının bir dizisi ve bir $y \in T(x_0)$ için y ye yakınsayan $y_n \in T(x_n)$ elemanlarının bir dizisi varsa, $x_0 \in Dom(T)$ noktasında alttan yarı süreklidir denir (Ansari 2010).

Eğer T, $Dom(T)$ nın her noktasında alttan yarı sürekli ise X üzerinde alttan yarı süreklidir denir. Alttan yarı sürekliliğin yukarıdaki tanımından aşağıdakiler çıkarılabilir:

$y_0 \in T(x_0)$ ve $V(y_0)$, y_0ın herhangi bir komşuluğu olsun. Eğer her $x \in D(x_0; \delta)$ için $T(x) \cap V(y_0) \neq \emptyset$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ varsa T, x_0 noktasında alttan yarı süreklidir.

Aşağıdaki örnekler üstten ve altan yarı süreklilik kavramlarının denk olmadığını gösterir.

Örnek 2.4.15 a) $X = [0,1]$ alışılmış metriğe göre bir metrik uzay ve $T: X \multimap X$ dönüşümü

$$T(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right], & x = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}(x+1), & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda T üstten yarı süreklidir fakat alttan yarı sürekli değildir.

b) $X = [0,1]$ alışılmış metriğe göre bir metrik uzay ve $T: X \multimap X$ dönüşümü

$$T(x) = \begin{cases} [0, x], & 0 \leq x < 1 \\ \{0\}, & x = 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda alttan yarı süreklidir fakat üstten yarı sürekli değildir.

Eğer T dönüşümü her $x \in X$ noktasında sürekli ise X üzerinde süreklidir denir. Bu süreklilik tanımlarını kullanarak küme değerli dönüşümlerin üstten ve alttan yarı sürekli olduğunu göstermek kolay değildir. Bu nedenle aşağıdaki teoremleri verelim.

Teorem 2.4.16: X ve Y iki metrik uzay olsun. $T: X \multimap Y$ dönüşümün altan yarı sürekli olması için gerek ve yeter şart Y nin her açık U alt kümesinin, $T^{-1}(U)$ ters görüntüsünün X de açık olmasıdır (Ansari 2010).

Sonuç 2.4.17: X ve Y iki metrik uzay olsun. $T: X \multimap Y$ dönüşümün altan yarı sürekli olması için gerek ve yeter şart Y nin her kapalı V alt kümesi için $\mathrm{T}_{+}^{-1}(\mathrm{V})$ kapalı olmasıdır.

Tanım 2.4.18: X ve Y iki metrik uzay ve $T: X \multimap Y$ küme değerli dönüşüm olsun. Eğer T dönüşümü $x_0 \in X$ noktasında hem üstten yarı sürekli hem de alttan yarı sürekli ise bu noktada süreklidir denir (Ansari 2010).

Tanım 2.4.19: X ve Y iki metrik uzay ve $T: X \multimap Y$ küme değerli olsun. U, $T(x_0)$ ın herhangi bir komşuluğu olmak üzere eğer her $x \in D(x_0; \delta)$ için $T(x) \subseteq U$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa $x_0 \in Dom(T)$ noktasında üstten yarı süreklidir denir (Ansari 2010).

Eğer T, $Dom(T)$ nın her noktasında üstten yarı sürekli ise X üzerinde üstten yarı süreklidir.

Her $x \in X$ için $T(x)$ kompakt olduğunda, T nin x_0 noktasında üstten yarı sürekli olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in D(x_0;\delta)$ için $T(x) \subseteq D(T(x);\varepsilon)$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısının bulunmasıdır.

Tanım 2.4.20: (X, d_1) ve (Y, d_2) iki metrik uzay ve $T: X \to K(Y)$ küme değerli bir dönüşüm olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $x, y \in X$ için $d(x,y) < \delta$ olduğunda $H(T(x), T(y)) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa T dönüşümü Hausdorff süreklidir denir (Ansari 2010).

Teorem 2.4.21: X ve Y iki metrik uzay olsun. $T: X \to K(Y)$ dönüşümünün Hausdorff sürekli olması için gerek ve yeter şart $T: X \multimap Y$ küme değerli dönüşümü kompakt değerli ve X üzerinde hem üstten yarı sürekli hem de alttan yarı sürekli olmalıdır (Ansari 2010).

Teorem 2.4.22: Bir $T: X \to C(Y)$ dönüşümünün Hausdorff sürekli olması için gerek ve yeter şart hem üstten yarı sürekli hem de alttan yarı sürekli olmalıdır (Gorniewicz 1999).

İspat: T nin Hausdorff sürekli olduğunu ve U nun, Y de açık bir alt küme olduğunu kabul edelim. İlk olarak

$$T^{-1}(U) = \{x \in X |\, T(x) \subset U\}$$

kümesinin açık olduğunu ispatlayalım. $x_0 \in T^{-1}(U)$ olsun. Bu durumda $T(x_0) \subset U$ dır. $T(x_0)$ kompakt olduğundan, $D(T(x_0);\varepsilon) \subset U$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ sayısı vardır. T, Hausdorff sürekli olduğundan, her $x \in D(x_0;\delta)$ için $H(T(x_0), T(x)) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulabiliriz. Bu da $T(x) \subset D(T(x_0);\varepsilon) \subset U$ anlamına gelir. Böylece $D(x_0;\delta) \subset T^{-1}(U)$ ve $T^{-1}(U)$ açıktır. Şimdi de $T_+^{-1}(U) = \{x \in U |\, T(x) \cap U \neq \emptyset\}$ kümesinin de açık olduğunu gösterelim. $x_0 \in T_+^{-1}(U)$ olsun. Dolayısıyla $T(x_0) \cap U \neq \emptyset$ olur. $y_0 \in T(x_0) \cap U$ olsun. $D(y_0;\varepsilon) \subset U$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ alalım. O halde her $x \in D(x_0;\delta)$ için

$$H\big(T(x_0),T(x)\big) < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde $\delta > 0$ bulabiliriz. $T(x) \cap D(y_0;\varepsilon) \neq \emptyset$ olduğunu iddia ediyoruz. Aksine $T(x) \cap D(y_0;\varepsilon) = \emptyset$ olduğunu kabul edelim. Diğer yandan,

$$T(x_0) \subset D(T(x);\tfrac{\varepsilon}{2})$$

dir. Bu nedenle, $y_0 \in D(T(x_0);\frac{\varepsilon}{2})$ ve $d(y_0,z_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde $z_0 \in T(x)$ vardır. Bu da $z_0 \in D(y_0;\varepsilon)$ olduğunu gösterir. Bu bir çelişkidir.

Şimdi T nin hem üstten yarı sürekli hem de alttan yarı sürekli olduğunu kabul edelim. $\varepsilon > 0$, $x_0 \in X$ ve $U = D(T(x_0);\varepsilon)$ olsun. $T^{-1}(U)$ ve $T_+^{-1}(U)$ kümeleri açıktır ve $x_0 \in T^{-1}(U) \cap T_+^{-1}(U)$ dır. $V = T^{-1}(U) \cap T_+^{-1}(U)$ olsun. Bu durumda, her $x \in V$ için

$$T(x) \subset D(T(x_0);\varepsilon)$$

olacak şekilde x_0 ın bir açık komşuluğudur. Her $x \in D(x_0;\delta)$ için $D(x_0;\delta) \subset V$ ve $T(x_0) \subset D(T(x),\varepsilon)$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısına bakalım. $i = 1,2,..,n$ olmak üzere $D(y_i;\varepsilon)$ n açık yuvarı ile kompakt kümeyi örtebileceğimizi bulalım. $D(x_0;\delta) \subset V$ ve T alttan yarı sürekli olduğundan, $T(x_0) = \bigcup_{i=1}^{n} D(y_i;\varepsilon) \subset D(T(x_0);\frac{\varepsilon}{2})$ dir. Her $x \in D(x_0;\delta_i)$ için

$$T(x) \cap D(y_i;\tfrac{\varepsilon}{2}) \neq \emptyset$$

olacak şekilde $D(x_0;\delta_i) \subset V$ açık yuvarları vardır. $\delta = \min\{\delta_1,\dots,\delta_n\}$ olsun. O halde $D(x_0;\delta) \subset V$ dir ve her bir $y \in T(x_0)$ bir i için $D(y_i;\frac{\varepsilon}{2})$ yuvarına aittir. Üstelik, herhangi bir $x \in D(x_0;\delta)$ için $T(x) \cap D(y_i;\frac{\varepsilon}{2}) \neq \emptyset$ dır. Bu nedenle her bir $x \in D(x_0;\delta)$ ve $y \in T(x_0)$ için

$$d(y, T(x)) \leq d(y, y_i) + d(y_i, T(x_i)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olacak şekilde $i = 1,2,..,n$ vardır. Bu nedenle her $x \in D(x_0, \delta)$ için $T(x_0) \subset D(T(x); \varepsilon)$ dır. Bu da ispatı tamamlar.

T sadece ya üstten yarı sürekli ya da sadece alttan yarı sürekli ise, genelde T Hausdorff sürekli değildir.

Örnek 2.4.23: $X = Y = [0,1]$ olsun. T: [0,1] → $C([0,1])$ dönüşümü

$$T(x) = \begin{cases} [0,1], & x \neq 0 \\ \{0\}, & x = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda T kompakt değerli ve alttan yarı süreklidir. Fakat her $x \neq 0$ için

$$H(T(0), T(x)) = 1$$

dir. Bu nedenle T, Hausdorff sürekli değildir.

Teorem 2.4.24: $T: X \to B(X)$ dönüşümü Hausdorff sürekli olsun. Bu durumda T, alttan yarı süreklidir (Gorniewicz 1999).

Örnek 2.4.25: $X = \mathbb{R}$ Öklid uzayı ve $Y = \mathbb{R}^2$ de $d(x, y) = \frac{\|x-y\|}{1+\|x-y\|}$ sınırlı metriği ile verilsin. $T: \mathbb{R} \to B(\mathbb{R}^2) = 2^{\mathbb{R}^2/\{0\}}$ dönüşümü her $t \in \mathbb{R}$ için

$$T(t) = \{(t, y) | y \in \mathbb{R}\}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda

$$H(T(t), T(t')) \leq 2|t - t'|$$

dır ve dolayısıyla T Hausdorff süreklidir.

$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \|y\| < 1/x$ ya da $x = 0\}$ olsun. Bu durumda U, $\mathbb{R}^2$ nin açık bir alt kümesidir fakat $T^{-1}(U) = \{0\}$ kümesi $\mathbb{R}$ de açık değildir. Dolayısıyla T, üstten yarı sürekli değildir.

Örnek 2.4.26: $X = [0,1]$ alışılmış metriğe göre bir metrik uzay olsun. $T: X \multimap X$ dönüşümü

$$T(x) = \begin{cases} \{1\}, & x < \frac{1}{2} \\ [0,1], & x = \frac{1}{2} \\ \{0\}, & x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda T üstten yarı süreklidir fakat Hausdorff sürekli değildir.

Şimdi Hausdorff metriği kullanılarak oluşturulan bazı özel dönüşüm sınıflarını verelim.

Tanım 2.4.27: (X, d_1) ve (Y, d_2) iki metrik uzay ve $T: X \to CB(Y)$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$H(T(x), T(y)) \leq \alpha d_1(x, y)$$

olacak şekilde bir $\alpha \geq 0$ sabiti varsa, T dönüşümüne küme değerli Lipschitzian dönüşüm denir. Ayrıca α sabitine de Lipschitz sabiti denir (Ansari 2010).

Tanım 2.4.28: (X, d_1) ve (Y, d_2) iki metrik uzay ve $T: X \to CB(Y)$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$H(T(x),T(y)) \leq \alpha d_1(x,y)$$

olacak şekilde bir $0 \leq \alpha < 1$ sabiti varsa, T ye küme değerli daraltan dönüşüm denir (Ansari 2010).

Örnek 2.4.29: $X = [0,1]$ kümesi alışılmış metrikle bir metrik uzay ve $f: X \to X$ dönüşümü

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}x + 1, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Her $x \in X$ için $T: X \multimap X$ dönüşümü $T(x) = \{0\} \cup \{f(x)\}$ olarak tanımlayalım. Bu durumda T küme değerli daraltan bir dönüşümdür. T nin sabit noktaları 0 ve $\frac{2}{3}$ dür.

Tanım 2.4.30: (X, d_1) ve (Y, d_2) iki metrik uzay ve $T: X \to CB(Y)$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$H(T(x),T(y)) \leq d_1(x,y)$$

ise, T ye küme değerli genişlemeyen dönüşüm denir (Ansari 2010).

Tanım 2.4.31: $(\mathrm{X}, \mathrm{d}_1)$ ve $(\mathrm{Y}, \mathrm{d}_2)$ iki metrik uzay ve $T: X \to CB(Y)$ bir dönüşüm olsun. $F(T) \neq \emptyset$ olmak üzere, eğer her $x \in X$ ve her $p \in F(T)$ için

$$H\big(T(x),T(p)\big) \leq d(x,p)$$

ise T ye küme değerli quasi genişlemeyen dönüşüm denir (Shiau *et al.*1975).

$F(T) \neq \emptyset$ olmak üzere her genişlemeyen küme değerli T dönüşümü quasi genişlemeyendir. Fakat her quasi genişlemeyen dönüşüm genişlemeyen olmayabilir.

Örnek 2.4.32: $X = [0, \infty)$ olmak üzere $T: X \to CB(X)$ dönüşümü

$$T(x) = \begin{cases} \{0\}, & x \leq 1 \\ \left[x - \frac{3}{4}, x - \frac{1}{3}\right], & x > 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $F(T) = \{0\}$ ve her x için $H\big(T(x), T(0)\big) \leq |x - 0|$ dır. Böylece T quasi genişlemeyendir. Şayet $x = 2, y = 1$ alınırsa $H\big(T(x), T(y)\big) > |x - y| = 1$ olur. Bu nedenle T genişlemeyen değildir.

Küme değerli sabit nokta teorisinde bazı teoremleri ve ispatlarını aşağıda vereceğiz. Küme değerli fonksiyonlar ile ilgili ilk sabit nokta teoremi 1969'da Nadler tarafından verilmiştir. Nadler'in teoremi, Banach'ın teoreminin küme değerli fonksiyonlara bir genişlemesidir.

Teorem 2.4.33: (X, d) tam metrik uzay olsun. Eğer $T: X \to CB(X)$ küme değerli daraltan ise T, bir sabit noktaya sahiptir (Nadler 1969).

İspat: α, T için Lipschitz sabiti ve $x_0 \in X$ olsun. $x_1 \in T(x_0)$ olarak seçelim. $T(x_0), T(x_1) \in CB(X)$ ve $x_1 \in T(x_0)$ olduğundan,

$$d(x_1, x_2) \leq H\big(T(x_0), T(x_1)\big) + \alpha$$

olacak şekilde bir $x_2 \in T(x_1)$ noktası vardır. $T(x_1), T(x_2) \in CB(X)$ ve $x_2 \in T(x_1)$ olduğundan

$$d(x_2, x_3) \leq H\big(T(x_1), T(x_2)\big) + \alpha^2$$

olacak şekilde bir $x_3 \in T(x_2)$ noktası vardır. Bu şekilde devam ettirilirse, her $n \geq 1$ için

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq H\big(T(x_{n-1}), T(x_n)\big) + \alpha^n$$

olacak şekilde X in noktalarının (x_n) dizisi oluşturulur. Her $n \geq 1$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &\leq H\big(T(x_{n-1}), T(x_n)\big) + \alpha^n \\ &\leq \alpha d(x_{n-1}, x_n) + \alpha^n \\ &\leq \alpha\big[H\big(T(x_{n-2}), T(x_{n-1})\big) + \alpha^{n-1}\big] + \alpha^n \\ &\leq \alpha^2\, d(x_{n-2}, x_{n-1}) + 2\alpha^n \\ &\;\;\vdots \\ &\leq \alpha^n\, d(x_0, x_1) + n\alpha^n \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise herhangi m ve n için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+m}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+m-1}, x_{n+m}) \\ &\leq \alpha^n\, d(x_0, x_1) + n\alpha^n + \alpha^{n+1}\, d(x_0, x_1) + (n+1)\alpha^{n+1} + \cdots \\ &\quad + \alpha^{n+m-1}\, d(x_0, x_1) + (n+1)\alpha^{n+m-1} \\ &= \textstyle\sum_{k=n}^{n+m-1} \alpha^k d(x_0, x_1) + \sum_{k=n}^{n+m-1} k\alpha^k \end{aligned}$$

olduğunu gösterir. Yani (x_n) dizisi bir Cauchy dizisidir. (X, d) tam olduğundan, (x_n) dizisi bir $x \in X$ noktasına yakınsar. T, H-sürekli olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} H(T(x_n), T(x)) = 0$$

şeklindedir. Ayrıca $x_n \in T(x_{n-1})$ olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, T(x)) = \lim_{n\to\infty} inf\{d(x_n, y): y \in T(x)\} = 0$$

olur. Bu ise

$$d(x, T(x)) = inf\{d(x, y): y \in T(x)\} = 0$$

anlamına gelir. $T(x)$ kapalı olduğundan, $x \in T(x)$ dir.

Dans, Hegedüs ve Medvegyev (1983) tarafından verilen küme değerli sabit nokta teoremini aşağıda verelim.

Teorem 2.4.34: (X, d) tam bir metrik uzay ve $T: X \multimap X$ küme değerli dönüşümü her $x \in X$ için $T(x)$ kapalı, her $x \in X$ için $x \in T(x)$ ve her $x, y \in X$ için $y \in T(x)$ ise $T(y) \subseteq T(x)$ şartlarını sağlasın. (x_n) dizisi

$$x_2 \in T(x_1), x_3 \in T(x_2), \ldots, x_n \in T(x_{n-1}), \ldots \tag{2.4}$$

şeklinde oluşturulmuş ve $d(x_n, x_{n+1}) \to 0$ olsun. Bu durumda T küme değerli dönüşümün, $T(\bar{x}) = \{\bar{x}\}$ anlamında bir $\bar{x} \in X$ sabit noktası vardır (Dans *et al.*1983).

(2.4)'de kullanılan iterasyon metodu genelleştirilmiş Picard İterasyonu olarak adlandırılır.

Şimdi Nadler teoreminin bir genellemesini vereceğiz.

Teorem 2.4.35: (X, d) tam ve metriksel konveks metrik uzay, K da X in boş olmayan kapalı bir alt kümesi ve $T: K \to CB(X)$ daraltan bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$H(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

dir. Burada k $\in (0,1)$ dir. Eğer her $x \in \partial K$ için $Tx \subset K$ ise, bu durumda T nin K da bir sabit noktası vardır (Assad and Kirk 1972).

İspat: Aşağıdaki şekilde K da bir (p_n) dizisi teşkil edelim:

$p_0 \in K$ ve $p_1' \in Tp_0$ olsun. Eğer $p_1' \in K$ ise, $p_1' = p_1$ olsun. Aksi taktirde

$$d(p_0, p_1) + d(p_1, p_1') = d(p_0, p_1')$$

olacak şekilde bir $p_1 \in \partial K$ noktası seçelim. Böylece, $p_1 \in K$ dir. Lemma 3.2.4 den,

$$d(p_1', p_2') \leq H(Tp_0, Tp_1) + k$$

olacak şekilde $p_2' \in Tp_1$ seçebiliriz. Bu durumda, eğer $p_2' \in K$ ise, $p_2' = p_2$ olsun. Aksi taktirde

$$d(p_1, p_2) + d(p_2, p_2') = d(p_1, p_2')$$

olacak şekilde $p_2 \in \partial K$ olsun. Bu şekilde devam ettirilirse, (p_n)ve (p_n') dizileri elde edilir. Öyle ki $n \in \mathbb{N}$ için

(i) $p_{n+1}' \in Tp_n$;
(ii) $d(p_{n+1}', p_n') \leq H(Tp_n, Tp_{n-1}) + k^n$,

dir. Burada eğer $p_{n+1}' \in K$ ise $p_{n+1}' = p_{n+1}$ dır veya eğer

$$p_{n+1}' \notin K \text{ ve } p_{n+1} \in \partial K \text{ ise } d(p_n, p_{n+1}) + d(p_{n+1}, p_{n+1}') = d(p_n, p_{n+1}') \tag{2.5}$$

dir. Şimdi

$$\begin{aligned} P &:= \{p_i \in (p_n) : p_i = p_i'\} \\ Q &:= \{p_i \in (p_n) : p_i \neq p_i'\} \end{aligned}$$

olarak şeçelim. Eğer bazı i ler için $p_i \in Q$ ise, bu durumda $p_{i+1} \in P$ nin sınır şartı olsun.

$n \geq 2$ için $d(p_n, p_{n+1})$ uzaklığını kuralım. Bunun için aşağıdaki üç durumu gözününe alalım:

1. Durum $p_n \in P$ ve $p_{n+1} \in P$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} d(p_n, p_{n+1}) = d(p_n', p_{n+1}') &\leq H(Tp_n, Tp_{n-1}) + k^n \\ &\leq kd(p_n, p_{n-1}) + k^n \end{aligned}$$

yazılır.

2. Durum $p_n \in P$ ve $p_{n+1} \in Q$ olsun. (2.5) den,

$$\begin{aligned} d(p_n, p_{n+1}) &\leq d(p_n, p_{n+1}') = d(p_n', p_{n+1}') \\ &\leq H(Tp_{n-1}, Tp_n) + k^n \\ &\leq kd(p_{n-1}, p_n) + k^n \end{aligned}$$

yazılır.

3. Durum $p_n \in Q$ ve $p_{n+1} \in P$ olsun. Yukarıdaki işlemlerden, (p_n) nin iki ardışık terimi Q da olamaz. Bundan dolayı $p_{n-1} \in P$ ve $p_{n-1}' = p_{n-1}$ dir. Bunu kullanarak,

$$\begin{aligned} d(p_n, p_{n+1}) &\leq d(p_n, p_n') + d(p_n', p_{n+1}) \\ &= d(p_n, p_n') + d(p_n', p_{n+1}') \\ &\leq d(p_n, p_n') + H(Tp_{n-1}, Tp_n) + k^n \\ &\leq d(p_n, p_n') + \alpha d(p_{n-1}, p_n) + k^n \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&< d(p_{n-1}, p'_n) + k^n \\
&= d(p'_{n-1}, p'_n) + k^n \\
&\leq H(Tp_{n-2}, Tp_{n-1}) + k^{n-1} + k^n \\
&\leq kd(p_{n-2}, p_{n-1}) + k^{n-1} + k^n
\end{aligned}
$$

elde edilir. Yalnız diğer ihtimal, $p_n \in Q$ ve $p_{n+1} \in Q$ oluşamaz. Bu yüzden, $n \geq 2$ için

$$
d(p_n, p_{n+1}) = \begin{cases} kd(p_n, p_{n-1}) + k^n, & \text{veya} \\ kd(p_{n-2}, p_{n-1}) + k^n + k^{n-1} \end{cases} \tag{2.6}
$$

vardır. $\delta \coloneqq k^{-1/2} max\{d(p_0, p_1), d(p_1, p_2)\}$ olarak belirleyelim. Şimdi

$$
d(p_n, p_{n+1}) \leq k^{n/2}(\delta + 1), \qquad n \in \mathbb{N} \tag{2.7}
$$

olduğunu ispatlayalım. $n = 1$ için

$$
d(p_1, p_2) \leq k^{1/2}(\delta + 1)
$$

olur. $n = 2$ için, her bir durumu ayrı ayrı ele alıp ve (2.6) kullanırsak,

$$
\begin{aligned}
d(p_2, p_3) &\leq kd(p_1, p_2) + k^2 \\
&\leq kk^{1/2}(\delta + 1) + k^2 \\
&\leq k(\delta + 2) \ ;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d(p_2, p_3) &\leq kd(p_0, p_1) + k^2 + k \\
&\leq k\left(k^{1/2}\delta + k + 1\right) \\
&\leq k(\delta + 2)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Şimdi de $1 \leq n \leq m$ için (2.7) nin sağlandığını farzedelim. $m \geq 2$ için

$$
\begin{aligned}
d(p_m, p_{m+1}) &\le kd(p_m, p_{m+1}) + k^{m+1} \\
&\le k\left[k^{m/2}(\delta + m)\right] + k^{m+1} \\
&\le k^{(m+1)/2}(\delta + m) + k^{(m+1)/2}k^{(m+1)/2} \\
&\le k^{(m+1)/2}[\delta + (m+1)]
\end{aligned}
$$

veya

$$
\begin{aligned}
d(p_{m+1}, p_{m+2}) &\le kd(p_{m-1}, p_m) + k^{m+1} + k^m \\
&\le k\left[k^{(m-1)/2}(\delta + m - 1)\right] + k^{m+1} + k^m \\
&\le k^{(m+1)/2}(\delta + m - 1) + k^{(m+1)/2}k^{(m+1)/2} + k^{(m+1)/2}k^{(m-1)/2} \\
&\le k^{(m+1)/2}(\delta + m - 1) + k^{(m+1)/2} + k^{(m+1)/2} \\
&= k^{(m+1)/2}(\delta + m + 1)
\end{aligned}
$$

olduğu görülür. Bu da her $n \in \mathbb{N}$ için (2.7) nin sağlandığını gösterir. (2.7) kullanılarak,

$$
d(p_n, p_m) \le \delta \sum_{i=m}^{\infty}\left(k^{1/2}\right)^i + \sum_{i=m}^{\infty} i\left(k^{1/2}\right)^i, \qquad n > m \ge 1
$$

elde edilir. Bu ise (p_n) nin bir Cauchy dizisi olduğu anlamına gelir. K kapalı olduğundan, (p_n) dizisi bir $z \in K$ noktasına yakınsar. (p_n) seçimimizden, $p_{n_i} \in P$ olacak şekilde (p_n) nin bir $\left(p_{n_i}\right)$ alt dizisi vardır. Yani $i = 1,2, \ldots$ için, $p_{n_i} = p'_{n_i}$ dir. $p_{n_i-1} \to z$ ve (i) den $i \in \mathbb{N}$ için $p'_{n_i} \in Tp_{n_i-1}$ olur, bu da H Hausdorff metrikte $i \to \infty$ iken $Tp_{n_i-1} \to Tz$ anlamına gelir.

$$
d\left(p_{n_i}, Tz\right) \le H\left(Tp_{n_i-1}, Tz\right) \to 0, \qquad n \to \infty
$$

olduğundan, $d(z, Tz) = 0$ olur. Tz kapalı olduğundan, $z \in Tz$ dir.

(X, d) tam olmayan metrik uzay ise $T: X \multimap X$ küme değerli dönüşümü, Teorem 2.4.34 ün şartlarını sağlamasına rağmen sabit noktası yoktur (Ansari 2010).

Teorem 2.4.36: (X, d) tam metrik uzay ve X üzerinde $f: X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ has, alttan sınırlı ve alttan yarı sürekli fonksiyonel olsun. $T: X \multimap X$ küme değerli dönüşümü olmak üzere her $x \in X$ için

$$f(y) + d(x, y) \leq f(x)$$

şartını sağlayacak şekilde $y \in T(x)$ vardır. Öyleyse, T nin bir $\bar{x} \in X$ sabit noktası vardır yani, $\bar{x} \in T(\bar{x})$ ve $f(\bar{x}) < +\infty$ dir (Caristi and Kirk 1975).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. İterasyon Metodları

Bir dönüşümün sabit noktasını veya noktalarını bulurken çeşitli iterasyon metodları kullanılır. Yaygın olarak bilinen birkaç sabit nokta iterasyon yönteminden bahsedelim.

Picard iterasyonu: (X, d) bir metrik uzay, $K \subseteq X$ kapalı bir küme ve $T : K \to K$ bir dönüşüm olsun. $x_0 \in X$ olmak üzere Picard iterasyonu

$$x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0, \ \ n = 1,2, \dots$$

şeklinde tanımlanır (Picard 1890). Picard iterasyonu bazen ardışık yaklaşıklar dizisi (sequence of successive approximations) olarak da adlandırılır.

Tam metrik uzayda tanımlı daraltan dönüşümlerin sabit noktalarına yaklaşımı için kullanılan iterasyonlardan biri de Picard iterasyonudur. Daraltan dönüşüm yerine farklı sınıftan bir dönüşüm alınırsa, Picard iterasyonu dönüşümün sabit noktasına yakınsamayabilir.

Krasnoselskij iterasyonu: $(N, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve $T : N \to N$ bir dönüşüm olsun. $x_0 \in N$ ve $\lambda \in [0,1]$ için Krasnoselskij iterasyonu,

$$x_{n+1} = (1 - \lambda)x_n + \lambda T x_n, \ \ n = 0,1,2, \dots$$

şeklinde tanımlanır. Bu iterasyon $\lambda = 1$ için Picard iterasyonuna indirgenir (Krasnoselskij 1955).

Mann iterasyonu: W. R. Mann tarafından 1953 yılında kurulmuş ve Banach daralma ilkesini sağlamayan dönüşümlerin sabit noktalarını elde etmek için kullanılmıştır. N bir normlu uzay, $K \subseteq N$ boş olmayan konveks bir küme, $T: K \to K$ bir dönüşüm ve $x_0 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere Mann iterasyonu,

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T x_n\ , \ \ n = 0,1,2, \dots$$

şeklinde tanımlanır (Mann 1953).

W. R. Mann'ın sonuçları, 1971 yılında Franks ve Marzec tarafından ve Franks ve Marzec'in sonuçları da 1974 yılında B. E. Rhoades tarafından genişletilmiştir. 1974 yılında B. E. Rhoades, kapalı ve sınırlı bir aralıktan yine bu aralığa tanımlı bir dönüşüm (self-map) için Mann iterasyonunun bu dönüşümün sabit noktasına yakınsadığını göstermiştir.

Sastry and Babu (2005)'de, Mann iterasyonunu küme değerli dönüşümler için aşağıdaki gibi tanımlamış ve aşağıdaki teoremi vermişlerdir.

(I) $T: X \to P(X)$ küme değerli bir dönüşüm ve $p \in F(T)$ olsun. $x_0 \in X$ olmak üzere Mann iterasyon şeması

$$x_{n+1} = \alpha_n y_n + (1 - \alpha_n)x_n\ , \qquad \alpha_n \in [0,1],\ n \geq 0 \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlansın. Burada $\|y_n - p\| = d(p, Tx_n)$ olacak şekilde $y_n \in Tx_n$ dir.

Teorem 3.1.1: K, H Hilbert uzayının kompakt konveks alt kümesi olsun. $T: K \to P(K)$ genişlemeyen dönüşüm ve p, T nın sabit noktası olsun. (α_n), $0 \leq \alpha_n < 1$ ve $\sum \alpha_n = \infty$ şartlarını sağlasın. Bu durumda (3.1) de tanımlanan Mann iterasyon dizisi, T nın bir p sabit noktasına yakınsar (Sastry and Babu 2005).

Ishikawa iterasyonu: 1974 yılında S. Ishikawa tarafından kurulmuş ve Lipschitzian ve pseudocontractive dönüşümler için Mann iterasyon yönteminin yetersizliği durumunda yeni bir iterasyon metodu olarak oluşturulmuştur. Bu iterasyon ilk olarak bir Hilbert uzayının konveks ve kompakt alt kümesi üzerinde tanımlı Lipschitzian ve pseudocontractive bir dönüşümün sabit noktaya kuvvetli yakınsadığını göstermek amacıyla kullanılmıştır (Berinde 2006). X bir normlu uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan konveks alt küme, $T: K \to K$ bir dönüşüm ve $x_0 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere Ishikawa iterasyonu,

$$\begin{cases} y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T x_n, \\ x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n, \end{cases} \qquad n \geq 0, \tag{3.2}$$

şeklinde tanımlanır (Ishikawa 1974). (3.2) eşitliği ile verilen iterasyonda $\beta_n = 0$ alınırsa, bu iterasyon Mann iterasyonuna indirgenir. Buna rağmen Mann ve Ishikawa iterasyonları için yakınsama sonuçları arasında genel bir bağ yoktur (Berinde 2006).

B. E. Rhoades ve Ş. M. Şoltuz, 2003-2004 yıllarında dönüşümlerin çeşitli sınıfları için Ishikawa iterasyonunun yakınsaklığının, Mann iterasyonunun yakınsaklığına denk olduğunu göstermişlerdir.

Sastry and Babu (2005)'de, Ishikawa iterasyonunu küme değerli dönüşümler için aşağıdaki gibi tanımlamış ve aşağıdaki teoremi ifade etmişlerdir.

(II) $T: X \to P(X)$ küme değerli bir dönüşüm ve $p \in F(T)$ olsun. $x_0 \in X$ olmak üzere Ishikawa iterasyon şeması

$$\begin{cases} y_n = \beta_n z_n + (1-\beta_n)x_n\,, & \beta_n \in [0,1], \\ x_{n+1} = \alpha_n z'_n + (1-\alpha_n)x_n\,, & \alpha_n \in [0,1], \end{cases} \qquad n \geq 0 \tag{3.3}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\|z_n - p\| = d(p, Tx_n)$ olacak şekilde $z_n \in Tx_n$ ve $\|z'_n - p\| = d(p, Ty_n)$ olacak şekilde $z'_n \in Ty_n$ vardır.

Teorem 3.1.2: K, H Hilbert uzayının kompakt konveks alt kümesi olsun. $T: K \to P(K)$ genişlemeyen dönüşüm ve bir $p \in F(T)$ olsun. $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$, $0 \leq \alpha_n, \beta_n < 1$, $\beta_n \to 0$ ve $\sum \alpha_n \beta_n = \infty$ şartlarını sağlasın. Bu durumda (3.3) de tanımlanan Ishikawa iterasyon dizisi T nın bir p sabit noktasına yakınsar (Sastry and Babu 2005).

Song and Wang (2008)'de, Lemma 3.2.4 e dayanarak (II) Ishikawa iterasyonunu

$$\begin{cases} x_0 = x \in K \\ y_n = (1 - b_n)x_n + b_n z_n \\ x_{n+1} = (1 - a_n)x_n + a_n u_n \end{cases} \tag{3.4}$$

şeklinde tanımlamıştır. Burada $\|z_n - u_n\| \leq H(Tx_n, Ty_n) + \eta_n$ ve $\|z_{n+1} - u_n\| \leq H(Tx_{n+1}, Ty_n) + \eta_n$ olacak şekilde $z_n \in Tx_n$ ve $u_n \in Ty_n$ dır. $0 \leq a_n, b_n < 1$ olmak üzere (a_n), (b_n) reel dizileri, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ ve $\sum a_n b_n = \infty$ şartlarını sağlar.

Teorem 3.1.3: K, E düzgün konveks Banach uzayının boş olmayan kompakt konveks bir alt kümesi olsun. $T: K \to CB(K)$ genişlemeyen dönüşüm ve $F(T) \neq \emptyset$ olmak üzere her $p \in F(T)$ için $T(p) = \{p\}$ olsun. (α_n) ve (β_n), $0 \leq \alpha_n, \beta_n < 1$, $\beta_n \to 0$ ve $\sum \alpha_n \beta_n = \infty$ şartlarını sağlasın. Bu durumda (3.4) de tanımlanan Ishikawa iterasyon dizisi T nın bir sabit noktasına yakınsar (Song and Wang 2008).

Shahzad and Zegeye (2009)'da, Sastry and Babu (2005), Song and Wang (2008), Panyanak (2007)'ın sonuçlarını genişleterek Ishikawa iterasyon şemasını küme değerli quasi genişlemeyen dönüşümler için aşağıdaki gibi yeniden ifade etmişlerdir:

(III) $T: K \to CB(K)$ küme değerli bir dönüşüm, $\alpha_n, \beta_n \in [0,1]$ olsun. (x_n) Ishikawa iterasyon şeması

$$\begin{cases} x_0 \in K \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n z_n \quad \forall n \geq 0 \\ x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n z'_n \end{cases} \tag{3.5}$$

şeklinde tanımlansın. Burada $z_n \in Tx_n$ ve $z'_n \in Ty_n$ dir.

Tanım 3.1.4 : K, B Banach uzayının boş olmayan konveks bir alt kümesi ve $F(T) \neq \emptyset$ olmak üzere $T: K \to CB(K)$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $t \in (0, \infty)$ için $f(0) = 0$ ve $f(t) > 0$ olacak şekilde azalmayan bir $f: [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonu var ve her $x \in K$ için

$$d(x, Tx) \geq f(d(x, F(T))$$

ise, T ye *(I)* şartını sağlıyor denir (Senter and Dotson 1974).

Tanım 3.1.5: K, B Banach uzayının boş olmayan konveks bir alt kümesi ve $F(T) \neq \emptyset$ olmak üzere $T_1, T_2: K \to CB(K)$ iki dönüşüm olsun. Eğer her $t \in (0, \infty)$ için $f(0) = 0$ ve $f(t) > 0$ olacak şekilde azalmayan bir $f: [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonu var ve her $x \in K$ için

$$\tfrac{1}{2}(\|x - T_1x\| + \|x - T_2x\|) \geq f(d(x, F(T))$$

ise, T_1ve T_2 dönüşümleri *(II)* şartını sağlıyor denir (Khan and Fukhar-ud-in 2005).

Teorem 3.1.6: K, E düzgün konveks Banach uzayının boş olmayan kapalı konveks alt kümesi, $T: K \to CB(K)$ quasi genişlemeyen bir dönüşüm ve $F(T) \neq \emptyset$ olmak üzere her $p \in F(T)$ için $T(p) = \{p\}$ olsun. $\alpha_n, \beta_n \in [a, b] \subset (0,1)$ ve T nin *(I)* şartını sağladığını farzedelim. Bu durumda (3.5) de tanımlanan Ishikawa iterasyon dizisi T nın bir sabit noktasına güçlü yakınsar (Shahzad and Zegeye 2009).

Ayrıca her $y \in F(T)$ için $T(y) = \{y\}$ şartını kaldırarak iterasyon şemasını (IV) deki gibi ifade etmişlerdir.

(IV) $T: K \to P(K)$ küme değerli bir dönüşüm ve $P_T(x) = \{y \in K: \|x - y\| = d(x, Tx)\}$ olsun. (x_n) İshikawa iterasyon şeması,

$$\begin{cases} x_0 \in K \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n z_n \qquad \forall n \geq 0 \\ x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n z_n' \end{cases} \tag{3.6}$$

şeklinde tanımlansın. Burada $\alpha_n, \beta_n \in [0,1]$, $z_n \in P_T(x_n)$ ve $z_n' \in P_T(y_n)$ dir.

Teorem 3.1.7: K, E düzgün konveks Banach uzayının boş olmayan kapalı konveks alt kümesi, $F(T) \neq \emptyset$ olmak üzere $T: K \to P(K)$ küme değerli bir dönüşüm ve P_T genişlemeyen olsun. $\alpha_n, \beta_n \in [a,b] \subset (0,1)$ ve T nin *(I)* şartını sağladığını farzedelim. Bu durumda (3.6) tanımlanan (x_n) Ishikawa iterasyon dizisi T nın bir sabit noktasına güçlü yakınsar (Shahzad and Zegeye 2009).

Yukarda verilen iterasyon yöntemlerinin hata terimli versiyonları üzerine de birçok çalışma yapılmıştır.

Cholamijak ve Suantai (2008)'de, düzgün konveks Banach uzaylarında tanımlı küme değerli quasi genişlemeyen iki dönüşüm için hata terimli iki yeni iterasyon yöntemini tanımlamış ve önerdikleri bu iterasyon şeması ile güçlü yakınsaklık teoremleri elde etmişlerdir. Ayrıca Banach uzaylarında tanımlı küme değerli iki quasi genişlemeyen dönüşümün ortak sabit noktasını bulmak için başka bir hata terimli iki adım iterasyon şeması tanıtmışlardır. Söz konusu iterasyon şemaları ve bu şemaların yakınsaklığı ile ilgili teoremler sırasıyla aşağıdaki gibidir;

(V) K, E Banach uzayının boş olmayan konveks alt kümesi, $\alpha_n, \beta_n, \alpha_n', \beta_n' \in [0,1]$ ve (u_n),(v_n) dizileri K da sınırlı olmak üzere $T_1, T_2: K \to CB(K)$ küme değerli quasi genişlemeyen iki dönüşüm olsun. $x_0 \in K$ olmak üzere, (x_n) dizisi

$$\begin{cases} y_n = \alpha_n' z_n' + \beta_n' x_n + (1-\alpha_n'-\beta_n')u_n \\ x_{n+1} = \alpha_n z_n + \beta_n x_n + (1-\alpha_n-\beta_n)v_n \end{cases} \tag{3.7}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $z_n' \in T_1 x_n$ ve $z_n \in T_2 y_n$ dir.

Teorem 3.1.8: E düzgün konveks Banach uzay, K da E nin boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi olsun. $T_1, T_2: K \to CB(K)$ quasi genişlemeyen iki dönüşüm ve $F(T_1) \cap F(T_2) \neq \emptyset$ olmak üzere her $p \in F(T_1) \cap F(T_2)$ için $T_1 p = \{p\} = T_2 p$ olsun. Eğer

(i) T_1ve T_2, *(II)* şartını sağlar
(ii) $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\alpha_n-\beta_n) < \infty$ ve (ii) $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\alpha'_n-\beta'_n) < \infty$,
(iii) $0 < l \leq \alpha_n, \alpha'_n \leq k < 1$,

şartlarını sağlıyorsa (3.7) de tanımlanan (x_n) dizisi $F(T_1) \cap F(T_2)$ nin bir elemanına güçlü yakınsar (Cholamijak and Suantai 2008).

(VI) $T_1, T_2: K \to P(K)$ küme değerli iki dönüşüm ve $P_{T_i}x = \{y \in T_i x: \|x-y\| = d(x, T_i x)\}$, $i = 1,2$ olsun. $x_0 \in K$ olmak üzere, (x_n) dizisi

$$\begin{cases} y_n = \alpha'_n z'_n + \beta'_n x_n + (1-\alpha'_n-\beta'_n)u_n \\ x_{n+1} = \alpha_n z_n + \beta_n x_n + (1-\alpha_n-\beta_n)v_n \end{cases} \tag{3.8}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $z'_n \in P_{T_1}x_n$ ve $z_n \in P_{T_2}y_n$ dir.

Teorem 3.1.9: E düzgün konveks Banach uzay, K da E nin boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi, $F(T_1) \cap F(T_2) \neq \emptyset$ olmak üzere $T_1, T_2: K \to P(K)$ küme değerli iki dönüşüm ve P_{T_1}, P_{T_2} genişlemeyen olsun.

(i) T_1 ve T_2, *(II)* şartını sağlar
(ii) $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\alpha_n-\beta_n) < \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\alpha'_n-\beta'_n) < \infty$,
(iii) $0 < l \leq \alpha_n, \alpha'_n \leq k < 1$,

şartlarının sağlandığını farzedelim. Bu durumda (3.8) de tanımlanan (x_n) dizisi $F(T_1) \cap F(T_2)$ nin bir elemanına güçlü yakınsar (Cholamijak and Suantai 2008).

3.2. Özel Dönüşüm Sınıfları

Bu bölümde ise çalışmamızın temel sonuçlarını elde etmek için kullandığımız tanım ve lemmaları vereceğiz.

Tanım 3.2.1: K, B Banach uzayının boş olmayan konveks bir alt kümesi ve $T: K \to CB(K)$ bir dönüşüm olsun. (x_n) dizisi K da olmak üzere $n \to \infty$ iken $d(x_n, Tx_n) \to 0$ olduğunda, $x_{n_k} \to p \in K$ olacak şekilde (x_n) dizisinin (x_{n_k}) bir alt dizisi varsa, T dönüşümüne hemicompactır denir (Cholamjiak and Suantai 2011).

Şayet K kompakt ise, $T: K \to CB(K)$ küme değerli her dönüşüm hemicompactır.

Tanım 3.2.2: K, B Banach uzayının boş olmayan bir alt kümesi ve $T: K \to P(K)$ küme değerli bir dönüşüm olsun. Eğer K daki (x_n) dizisi x e zayıf ve $y_n \in Tx_n$ olacak şekilde (y_n) dizisi y e kuvvetli yakınsadığında $y \in Tx$ oluyor ise T, y de demicloseddir denir (Khan *et al.* 2008).

Lemma 3.2.3: $A, B \in CB(X)$ olsun. Herhangi bir $a \in A$ için

$$d(a, B) \leq H(A, B)$$

dir (Dube 1975).

Lemma 3.2.4: $A, B \in CB(X)$ ve $a \in A$ olsun. Eğer $\eta > 0$ ise, $d(a, b) \leq H(A, B) + \eta$ olacak şekilde $b \in B$ vardır (Nadler 1969).

İspat: $a \in A$ ve bir $\eta > 0$ verilsin. İnfimum tanımından

$$d(a, b) \leq d(a, B) + \eta$$

olacak şekilde bir $b \in B$ vardır.

$$d(a,B) \leq \delta(A,B) = sup\{d(a,B): a \in A\} \leq H(A,B)$$

olduğundan

$$d(a,b) \leq H(A,B) + \eta$$

elde edilir.

Lemma 3.2.5: T: K → P(K) küme değerli bir dönüşüm ve $P_T(x) = \{y \in Tx: \|x - y\| = d(x,Tx)\}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

1) $x \in F(T)$;
2) $P_T(x) = \{x\}$;
3) $x \in F(P_T)$.

Üstelik, $F(T) = F(P_T)$ dir (Song and Cho 2011).

İspat: 1) $\Longrightarrow$ 2). $x \in Tx$ olduğundan, $d(x,Tx) = 0$ olur. Dolayısıyla, herhangi bir $y \in P_T(x)$ için, $\|x - y\| = d(x,Tx) = 0$ olur ve bu nedenle $x = y$ dir. Yani, $P_T(x) = \{x\}$ olarak bulunur.

2) $\Longrightarrow$ 3) Açıktır.

3) $\Longrightarrow$ 1). $x \in P_T(x)$ olduğundan, $d(x,Tx) = \|x - x\| = 0$ olur ve böylece Tx in kapalılığından $x \in Tx$ yazılır.

Lemma 3.2.6: (s_n) ve (t_n) negatif olmayan iki dizi olmak üzere her $n \geq 1$ için

$$s_{n+1} \leq s_n + t_n$$

eşitsizliğini sağlasın. Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} t_n < \infty$ ise bu durumda $\lim_{n\to\infty} s_n$ limiti vardır (Tan and Xu 1993).

İspat: Her $n, m \geq 1$ için,

$$s_{n+m+1} \leq s_{n+m} + t_{n+m} \leq \cdots \leq s_n + \sum_{j=n}^{n+m} t_j$$

bulunur. Dolayısıyla $\overline{lim_m} s_m \leq s_n + \sum_{j=n}^{\infty} t_j$ olur. Böylece $\overline{lim_m} s_m \leq \underline{lim_n} s_n$ elde edilir.

Lemma 3.2.7: E düzgün konveks Banach uzayı ve $n \geq 1$ için $0 < p \leq t_n \leq q < 1$ olsun. (x_n) ve (y_n), E de iki dizi olmak üzere uygun bir $r > 0$ için,

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_n\| \leq r, \ \limsup_{n\to\infty} \|y_n\| \leq r \text{ ve } \lim_{n\to\infty} \|t_n x_n + (1 - t_n) y_n\| = r$$

şartları sağlansın. Bu durumda $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$ (Schu 1991).

İspat: $r = 0$ için ispat açıktır. $r > 0$ olsun. Kabul edelim ki $(x_n - y_n)$ dizisi sıfıra yakınsaktır. Bu durumda $(x_n - y_n)$ dizisinin $inf_i \|x_{n_i} - y_{n_i}\| > 0$ olacak şekilde $(x_{n_i} - y_{n_i})$ alt dizisi vardır. $limsup_{n\to\infty} \|x_n\| \leq r$ ve $limsup_{n\to\infty} \|y_n\| \leq r$ olduğundan $\|x_{n_i}\| \leq s$, $\|y_{n_i}\| \leq s$ olacak şekilde (n_i) alt dizisi için $s \in (r, r+1)$ olduğunu kabul edebiliriz. Her $i \in \mathbb{N}$ için

$$2p(1-q)\delta_X\left(\frac{\varepsilon}{s}\right) < 1 \text{ ve } \|x_{n_i} - y_{n_i}\| \geq \varepsilon > 0$$

olacak şekilde $s \geq \varepsilon > 0$ seçebiliriz. E düzgün konveks olduğundan her $t \in (0,1)$, $r > 0$, $x, y \in E$, $\|x\| \leq s$ ve $\|y\| \leq s$ için

$$\|tx + (1-t)y\| \leq s\left[1 - 2min\{t, 1-t\}\delta_X\left(\frac{\|x-y\|}{s}\right)\right] \tag{3.9}$$

elde edilir. (3.9) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \left\|t_{n_i}x_{n_i} + \left(1-t_{n_i}\right)y_{n_i}\right\| &\leq s\left[1 - 2t_{n_i}\left(1-t_{n_i}\right)\delta_X\left(\frac{\varepsilon}{s}\right)\right] \\ &\leq s\left[1 - 2p(1-q)\delta_X\left(\frac{\varepsilon}{s}\right)\right] \\ &< \mathrm{r} \end{aligned}$$

olur ki bu durum hipotezle çelişmektedir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Çalışmamızın bu kısmında küme değerli genişlemeyen dönüşümler için yeni üç adım iterasyon şemasını aşağıdaki gibi teşkil ettik: N normlu bir uzay ve K, N nin boştan farklı kapalı bir alt kümesi ve $T: K \to P(K)$ küme değerli bir dönüşüm olsun. $x_0 \in K$ olmak üzere

$$\begin{cases} z_n = (1-\gamma_n)x_n + \gamma_n v_n \\ y_n = (1-\beta_n)v_n + \beta_n w_n \\ x_{n+1} = (1-\alpha_n)v_n + \alpha_n u_n \end{cases} \tag{4.1}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada $v_n \in P_T(x_n)$, $u_n \in P_T(y_n)$, $w_n \in P_T(z_n)$ ve $\gamma_n, \beta_n, \alpha_n \in [a,b] \subset (0,1)$ dır. Bu çalışmada (4.1) de verdiğimiz iterasyon şeması ile uygun şartlar altında küme değerli genişlemeyen bir dönüşümün sabit noktalarına güçlü ve zayıf yakınsamasını inceleyeceğiz.

4.1. Küme Değerli Genişlemeyen Dönüşümler için Güçlü ve Zayıf Yakınsama Teoremleri

Çalışmamızın ana kısmı olan bu bölümde temel sonuçlar elde ettiğimiz teoremleri ve ispatlarını verelim.

Lemma 4.1.1: N normlu bir uzay ve K da N nin boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi olsun. $F(T) \neq \emptyset$, P_T genişlemeyen bir dönüşüm ve $T: K \to P(K)$ küme değerli genişlemeyen dönüşüm olsun. (x_n) dizisini (4.1) deki gibi tanımlayalım. Bu durumda her $p \in F(T)$ için $\lim_{n\to\infty} \|x_n - p\|$ limiti vardır.

İspat: $p \in F(T)$ olsun. (4.1) den

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p\| &= \|(1-\alpha_n)v_n + \alpha_n u_n - p\| \\ &\leq (1-\alpha_n)\|v_n - p\| + \alpha_n \|u_n - p\| \\ &\leq (1-\alpha_n)H\big(P_T(x_n), P_T(p)\big) + \alpha_n H\big(P_T(y_n), P_T(p)\big) \end{aligned}$$

$$\leq (1-\alpha_n)\|x_n - p\| + \alpha_n\|y_n - p\| \tag{4.2}$$

dir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \|y_n - p\| &= \|(1-\beta_n)v_n + \alpha_n w_n - p\| \\ &\leq (1-\beta_n)\|v_n - p\| + \beta_n\|w_n - p\| \\ &\leq (1-\beta_n)H\big(P_T(x_n), P_T(p)\big) + \beta_n H\big(P_T(z_n), P_T(p)\big) \\ &\leq (1-\beta_n)\|x_n - p\| + \beta_n\|z_n - p\| \end{aligned} \tag{4.3}$$

ve

$$\begin{aligned} \|z_n - p\| &= \|(1-\gamma_n)x_n + \gamma_n v_n - p\| \\ &\leq (1-\gamma_n)\|x_n - p\| + \gamma_n\|v_n - p\| \\ &\leq (1-\gamma_n)\|x_n - p\| + \gamma_n H\big(P_T(x_n), P_T(p)\big) \\ &\leq (1-\gamma_n)\|x_n - p\| + \gamma_n\|x_n - p\| \\ &= \|x_n - p\| \end{aligned} \tag{4.4}$$

dir. (4.4) eşitsizliği (4.3) de yerine yazılırsa

$$\|y_n - p\| \leq (1-\beta_n)\|x_n - p\| + \beta_n\|x_n - p\| = \|x_n - p\| \tag{4.5}$$

elde edilir. Böylece,

$$\|x_{n+1} - p\| \leq (1-\alpha_n)\|x_n - p\| + \alpha_n\|x_n - p\| = \|x_n - p\|$$

dir. Dolayısıyla, $(\|x_n - p\|)$ dizisi azalandır. O halde her $p \in F(T)$ için $\lim_{n\to\infty}\|x_n - p\|$ limiti vardır.

Lemma 4.1.2: E düzgün konveks Banach uzayı ve K da E nin boş olmayan kapalı konveks alt kümesi olsun. $F(T) \neq \emptyset$, P_T genişlemeyen bir dönüşüm ve $T: K \to P(K)$

küme değerli genişlemeyen dönüşüm olsun. (x_n) iterasyon dizisini (4.1) deki gibi tanımlayalım. Bu durumda $\lim_{n\to\infty} d(x_n, Tx_n) = 0$ dır.

İspat: Lemma 4.1.1 den, her $p \in F(T)$ için $\lim_{n\to\infty}\|x_n - p\|$ limiti vardır. Bir $c \geq 0$ için $\lim_{n\to\infty}\|x_n - p\| = c$ olduğunu kabul edelim.

$$\operatorname*{limsup}_{n\to\infty}\|v_n - p\| \leq \operatorname*{limsup}_{n\to\infty} H(P_T(x_n), P_T(p)) \leq \operatorname*{limsup}_{n\to\infty}\|x_n - p\| = c$$

den

$$\operatorname{limsup}_{n\to\infty}\|v_n - p\| \leq c \tag{4.6}$$

olur. Benzer şekilde (4.4) ve (4.5) den

$$\operatorname{limsup}_{n\to\infty}\|u_n - p\| \leq c \tag{4.7}$$

ve

$$\operatorname{limsup}_{n\to\infty}\|w_n - p\| \leq c \tag{4.8}$$

yazılır. (4.6) ve (4.7) eşitsizliklerine Lemma 3.2.7 uygulandığında,

$$\lim_{n\to\infty}\|v_n - u_n\| = 0$$

elde edilir. (4.5) eşitsizliğinin üst limiti alınırsa

$$\operatorname{limsup}_{n\to\infty}\|y_n - p\| \leq c \tag{4.9}$$

bulunur. Ayrıca

$$\|x_{n+1} - p\| = \|(1-\alpha_n)v_n + \alpha_n u_n - p\|$$

$$= \|(v_n - p) + \alpha_n(u_n - v_n)\|$$
$$\leq \|v_n - p\| + \alpha_n\|u_n - v_n\|$$

şeklinde düzenlenirse

$$c \leq \text{liminf}_{n\to\infty}\|v_n - p\| \tag{4.10}$$

bulunur. (4.6) ve (4.10) eşitsizliklerinden

$$\lim_{n\to\infty}\|v_n - p\| = c$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}\|v_n - p\| &\leq \|v_n - u_n\| + \|u_n - p\| \\ &\leq \|v_n - u_n\| + H\big(P_T(y_n), P_T(p)\big) \\ &\leq \|v_n - u_n\| + \|y_n - p\|\end{aligned}$$

şeklinde düzenlenirse

$$c \leq \text{liminf}_{n\to\infty}\|y_n - p\| \tag{4.11}$$

elde edilir. (4.9) ve (4.11) eşitsizliklerinden,

$$\lim_{n\to\infty}\|y_n - p\| = c$$

olur. (4.6) ve (4.8) eşitsizliklerine lemma 3.2.7 uygulandığında,

$$\lim_{n\to\infty}\|v_n - w_n\| = 0$$

elde edilir. (4.4) eşitsizliğinin üst limiti alınırsa,

$$\limsup_{n\to\infty}\|z_n - p\| \leq c \tag{4.12}$$

bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned}\|v_n - p\| &\leq \|v_n - w_n\| + \|w_n - p\| \\ &\leq \|v_n - w_n\| + H\big(P_T(z_n), P_T(p)\big) \\ &\leq \|v_n - w_n\| + \|z_n - p\|\end{aligned}$$

eşitsizliğinden,

$$c \leq \liminf_{n\to\infty}\|z_n - p\| \tag{4.13}$$

olur. (4.12) ve (4.13) eşitsizliklerinden,

$$\lim_{n\to\infty}\|z_n - p\| = c$$

bulunur. Lemma 3.2.7 tekrar uygulandığında,

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - v_n\| = 0 \tag{4.14}$$

olur. Diğer taraftan $d(x_n, Tx_n) \leq \|x_n - v_n\|$ olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, Tx_n) = 0$$

elde edilir.

(4.1) de verdiğimiz iterasyon şeması ile küme değerli genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktasına güçlü yakınsaması ile ilgili teoremleri verelim.

Teorem 4.1.3: B reel Banach uzayı ve K da B nin boş olmayan kapalı konveks alt kümesi olsun. $F(T) \neq \emptyset$, P_T genişlemeyen bir dönüşüm ve $T: K \to P(K)$ genişlemeyen küme değerli dönüşüm olsun. (x_n) iterasyon dizisini (4.1) deki gibi tanımlayalım. Bu durumda (x_n) dizisinin, $F(T)$ nin bir sabit noktasına güçlü yakınsaması için gerek ve yeter şart

$$\liminf_{n\to\infty} d(x_n, F(T)) = 0$$

olmasıdır.

İspat: Gerekliliği açıktır. Tersine, $\liminf_{n\to\infty} d(x_n, F(T)) = 0$ olduğunu farzedelim. Lemma 4.1.1 den,

$$\|x_{n+1} - p\| \leq \|x_n - p\|$$

yazılır. Buradan da,

$$d(x_{n+1}, F(T)) \leq d\big(x_n, F(T)\big)$$

olur ve $\lim_{n\to\infty} d(x_n, F(T))$ limiti vardır. Hipotezden, $\liminf_{n\to\infty} d(x_n, F(T)) = 0$ olduğundan, $\lim_{n\to\infty} d(x_n, F(T)) = 0$ dir.

Şimdi (x_n) nin K da bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. $\varepsilon > 0$ keyfi olsun. $\lim_{n\to\infty} d(x_n, F(T)) = 0$ olduğundan, her $n \geq n_0$ için

$$d(x_n, F(T)) < \frac{\varepsilon}{4}$$

olacak şekilde n_0 vardır. Bilhassa, $\inf\{\|x_{n_0} - p\| : p \in F(T)\} < \frac{\varepsilon}{4}$ olduğundan

$$\|x_{n_0} - p^\circ\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde $p^\circ \in F(T)$ olmalıdır. O halde $m, n \geq n_0$ için

$$\begin{aligned}\|x_{n+m} - x_n\| &\leq \|x_{n+m} - p^\circ\| + \|x_n - p^\circ\| \\ &\leq 2\|x_{n_0} - p^\circ\| \\ &< 2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon\end{aligned}$$

olur. Bu durumda (x_n) dizisi, B Banach uzayının K kapalı alt kümesinde bir Cauchy dizisidir ve bu nedenle K da yakınsaktır. $\lim_{n\to\infty} x_n = q$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}d(q, P_T(q)) &\leq d(q, x_n) + d(x_n, P_T(x_n)) + H(P_T(x_n), P_T(q)) \\ &\leq d(q, x_n) + \|x_n - v_n\| + \|x_n - q\| \\ &\to 0,\ n \to \infty\end{aligned}$$

olur. Bu da $d\big(q, P_T(q)\big) = 0$ olduğunu gösterir. P_T genişlemeyen dönüşüm olduğundan $F(P_T)$ kapalıdır. Bu nedenle $q \in F(P_T) = F(T)$ dir.

Teorem 4.1.4: E düzgün konveks Banach uzayı ve K da E nin boş olmayan kapalı konveks alt kümesi olsun. $F(T) \neq \emptyset$, P_T genişlemeyen bir dönüşüm ve $T: K \to P(K)$ genişlemeyen küme değerli dönüşümü *(I)* şartını sağlasın. (x_n) iterasyon dizisini (4.1) deki gibi tanımlayalım. Bu durumda (x_n) dizisi T nin bir sabit noktasına güçlü yakınsar.

İspat: Lemma 4.1.1 den, her $p \in F(T)$ için $\lim_{n\to\infty}\|x_n - p\|$ limiti vardır. Bir $c \geq 0$ için, bu limit c olsun. Eğer $c = 0$ ise ispatı aşikardır. $c > 0$ olduğunu farzedelim. O halde $\|x_{n+1} - p\| \leq \|x_n - p\|$ olmasından

$$inf_{p\in F(T)}\|x_{n+1} - p\| \leq inf_{p\in F(T)}\|x_n - p\|$$

eşitsizliği yazılır. Bu da $d(x_{n+1}, F(T)) \leq d(x_n, F(T))$ olduğu anlamına gelir. Böylece $\lim_{n\to\infty} d(x_n, F(T))$ vardır. Lemma 4.1.2 ve *(I)* şartını kullanarak,

$$\lim_{n\to\infty} f(\, d(x_n, F(T)) \leq \lim_{n\to\infty} d(x_n, Tx_n) = 0$$

elde ederiz. Yani

$$\lim_{n\to\infty} f(\, d\big(x_n, F(T)\big) = 0$$

dır. f azalan bir fonksiyon ve $f(0) = 0$ olduğundan, $\lim_{n\to\infty} d\big(x_n, F(T)\big) = 0$ elde edilir. Teorem 4.1.4 ün uygulanması istenen sonucu verir.

Şimdi (4.1) de verdiğimiz iterasyon şeması ile küme değerli genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktasına zayıf yakınsaması ile ilgili teoremi verelim.

Teorem 4.1.5: E düzgün konveks Banach uzayı Opial şartını sağlasın ve K da E nin boş olmayan kapalı konveks alt kümesi olsun. $F(T) \neq \emptyset$, P_T genişlemeyen bir dönüşüm ve $T: K \to P(K)$ genişlemeyen küme değerli dönüşüm olsun. (x_n) iterasyon dizisini (4.1) deki gibi tanımlayalım. $I - P_T$ sıfırda demiclosed olduğunda, (x_n) dizisi T nin bir sabit noktasına zayıf yakınsar.

İspat: $p \in F(T) = F(P_T)$ olsun. Lemma 4.1.1 in ispatında olduğu gibi, tüm $p \in F$ için $\lim_{n\to\infty}\|x_n - p\|$ limiti vardır. O halde (x_n) dizisinin $F(T)$ de bir tek zayıf alt dizisel limite sahip olduğunu ispatlayalım. Bunu ispatlamak için $z_1 \neq z_2$ olmak üzere, (x_n) dizisinin $\left(x_{n_i}\right)$ ve $\left(x_{n_j}\right)$ alt dizileri olmak üzere sırasıyla z_1 ve z_2 bu dizilerin zayıf limitleri olsun. (4.14) den $\lim_{n\to\infty}\|x_n - v_n\| = 0$ olacak şekilde $v_n \in Tx_n$ vardır. $I - P_T$ sıfırda demiclosed olduğundan, $z_1 \in F(P_T) = F(T)$ elde edilir. Aynı şekilde $z_2 \in F(T)$ olduğu ispatlanabilir. Şimdi de tekliğini ispatlayalım. Bunun için, $z_1 \neq z_2$ olduğunu farzedelim. Bu durumda Opial şartından,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\|x_n - z_1\| &= \lim_{n_i\to\infty}\left\|x_{n_i} - z_1\right\| \\ &< \lim_{n_i\to\infty}\left\|x_{n_i} - z_2\right\| \\ &= \lim_{n\to\infty}\|x_n - z_2\| \\ &= \lim_{n_j\to\infty}\left\|x_{n_j} - z_2\right\| \\ &< \lim_{n_j\to\infty}\left\|x_{n_j} - z_1\right\| \\ &= \lim_{n\to\infty}\|x_n - z_1\|\end{aligned}$$

yazılır. Bu bir çelişkidir. Bu nedenle (x_n), T de bir tek noktaya zayıf yakınsar.

4.2. Küme Değerli Quasi Genişlemeyen Dönüşümler için Güçlü ve Zayıf Yakınsama Teoremleri

K, B Banach uzayının boş olmayan konveks bir alt kümesi, $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \alpha_n', \beta_n', \gamma_n', \alpha_n'', \beta_n'', \gamma_n'' \in [0,1]$, $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = \alpha_n' + \beta_n' + \gamma_n' = \alpha_n'' + \beta_n'' + \gamma_n'' = 1$ olsun. Burada. $T: K \to P(K)$ küme değerli quasi genişlemeyen bir dönüşüm ve $P_T(x) = \{y \in Tx: \|x - y\| = d(x, Tx)\}$ olsun. $(s_n), (r_n)$ ve (t_n) dizileri K da sınırlı olmak üzere

$$\begin{cases} z_n = \alpha_n'' x_n + \beta_n'' v_n + \gamma_n'' t_n \\ y_n = \alpha_n' v_n + \beta_n' w_n + \gamma_n' r_n \\ x_{n+1} = \alpha_n u_n + \beta_n v_n + \gamma_n s_n \end{cases} \tag{4.15}$$

(x_n) iterasyon dizisi teşkil edelim. Burada $w_n \in P_T(z_n)$, $u_n \in P_T(y_n)$ ve $v_n \in P_T(x_n)$ dir.

(4.15) de verdiğimiz hata terimli iterasyon şemasının *(I)* şartını sağlayan küme değerli quasi genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktasına güçlü yakınsaması ile ilgili teoremi verelim.

Teorem 4.2.1: E düzgün konveks Banach uzayı, K da E nin boş olmayan kapalı konveks alt kümesi olsun. $F(T) \neq \emptyset$, P_T genişlemeyen bir dönüşüm ve $T: K \rightarrow P(K)$ quasi genişlemeyen küme değerli dönüşüm olsun. (x_n) iterasyon dizisini (4.15) deki gibi tanımlayalım. Farzedelim ki

i) T, *(I)* şartını sağlasın.
ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n' < \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n'' < \infty$ dir.
iii) $0 < l \leq \alpha_n, \alpha_n', \alpha_n'' \leq k < 1$ dir.

Bu durumda (x_n), T nın sabit noktasına güçlü yakınsar.

İspat: $p \in F(T)$ ve Lemma 3.2.5 den $P_T(p) = \{p\}$ dir. $(s_n), (t_n)$ ve (r_n) dizileri sınırlı olduğundan, $M = max\{sup_{n\geq 1}\|t_n - p\|, sup_{n\geq 1}\|r_n - p\|, sup_{n\geq 1}\|s_n - p\|\}$ diyelim. Bu durumda (4.15) den,

$$\begin{aligned}
\|z_n - p\| &= \|\alpha_n'' x_n + \beta_n'' v_n + \gamma_n'' t_n - p\| \\
&\leq \alpha_n''\|x_n - p\| + \beta_n''\|v_n - p\| + \gamma_n''\|t_n - p\| \\
&\leq \alpha_n''\|x_n - p\| + \beta_n'' d\big(v_n, P_T(p)\big) + \gamma_n'' M \\
&\leq \alpha_n''\|x_n - p\| + \beta_n'' H\big(P_T(x_n), P_T(p)\big) + \gamma_n'' M \\
&= (\alpha_n'' + \beta_n'')\|x_n - p\| + \gamma_n'' M \\
&\leq \|x_n - p\| + \gamma_n'' M \qquad (4.16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|y_n - p\| &= \|\alpha_n' v_n + \beta_n' w_n + \gamma_n' r_n - p\| \\
&\leq \alpha_n'\|v_n - p\| + \beta_n'\|w_n - p\| + \gamma_n'\|r_n - p\| \\
&\leq \alpha_n' d(v_n, P_T(p)) + \beta_n' d\big(w_n, P_T(p)\big) + \gamma_n' M \\
&\leq \alpha_n' H\big(P_T(x_n), P_T(p)\big) + \beta_n' H\big(P_T(z_n), P_T(p)\big) + \gamma_n' M \\
&\leq \alpha_n'\|x_n - p\| + \beta_n'\|z_n - p\| + \gamma_n' M \\
&\leq \alpha_n'\|x_n - p\| + \beta_n'\|x_n - p\| + \gamma_n' M + \beta_n'\gamma_n'' M \\
&\leq \|x_n - p\| + +\gamma_n' M + \beta_n'\gamma_n'' M \qquad (4.17)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-p\| &= \|\alpha_n u_n+\beta_n v_n+\gamma_n s_n-p\| \\ &\le \alpha_n\|u_n-p\|+\beta_n\|v_n-p\|+\gamma_n\|s_n-p\| \\ &\le \alpha_n d(u_n,P_T(p))+\beta_n d\big(v_n,P_T(p)\big)+\gamma_n M \\ &\le \alpha_n H\big(P_T(y_n),P_T(p)\big)+\beta_n H\big(P_T(x_n),P_T(p)\big)+\gamma_n M \\ &\le \alpha_n\|y_n-p\|+\beta_n\|x_n-p\|+\gamma_n M \\ &\le \alpha_n\|x_n-p\|+\beta_n\|x_n-p\|+\gamma_n M+\alpha_n\gamma_n' M+\ \alpha_n\beta_n'\gamma_n'' M \\ &\le \|x_n-p\|+(\gamma_n+\alpha_n\gamma_n'+\alpha_n\beta_n'\gamma_n'')M \\ &= \|x_n-p\|+\epsilon_n \end{aligned} \tag{4.18}$$

elde edilir. Burada $\in_n = M(\gamma_n+\alpha_n\gamma_n'+\alpha_n\beta_n'\gamma_n'')$ dir. Hipotezden, $\sum_{n=1}^{\infty} \in_n < \infty$ dir. Bu nedenle Lemma 3.2.6 dan, her $p \in F$ için $\lim_{n\to\infty}\|x_n-p\|$ limiti vardır. Dolayısıyla $(x_n), (y_n)\ ve\, (z_n)$ dizileri sınırlıdır.

Şimdi de $\lim_{n\to\infty} d\big(x_n,T(x_n)\big)=0$ olduğunu gösterelim. Bunun için,

$$\lim_{n\to\infty} d\big(x_n,T(x_n)\big) \le \lim_{n\to\infty} d(x_n,P_T(x_n)) \le \lim_{n\to\infty}\|x_n-v_n\|=0$$

olduğunu göstermeliyiz. Bir $c \ge 0$ için $\lim_{n\to\infty}\|x_n-p\|=c$ olduğunu farzedelim. $S=max\{\sup_{n\in\mathbb{N}}\|s_n-v_n\|, sup_{n\in\mathbb{N}}\|r_n-w_n\|, sup_{n\in\mathbb{N}}\|t_n-v_n\|\}$ olsun.

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\|v_n-p\| &\le \mathop{limsup}_{n\to\infty} d(\,v_n,P_T(P)) \\ &\le \mathop{limsup}_{n\to\infty} H\big(P_T(x_n),P_T(p)\big) \\ &\le limsup_{n\to\infty}\|x_n-p\|\end{aligned}$$

eşitsizliğinden

$$\limsup_{n\to\infty}\|v_n - p\| \le c$$

elde edilir. Benzer şekilde $\limsup_{n\to\infty}\|u_n - p\| \le c$ ve $\limsup_{n\to\infty}\|w_n - p\| \le c$ eşitsizlikleri elde edilir. Ayrıca (4.16) ve (4.17) eşitsizliklerinin her iki yanın üst limiti alındığında, sırasıyla

$$\limsup_{n\to\infty}\|z_n - p\| \le c \text{ ve } \limsup_{n\to\infty}\|y_n - p\| \le c \tag{4.19}$$

elde edilir. Diğer yandan

$$\begin{aligned}\|u_n - p + \gamma_n(s_n - v_n)\| &\le \|u_n - p\| + \gamma_n\|s_n - v_n\|\\ &\le d(u_n, P_T(p)) + \gamma_n S\\ &\le H(P_T(y_n), P_T(p)) + \gamma_n S\\ &\le \|y_n - p\| + \gamma_n S\end{aligned}$$

olarak düzenlenirse $\limsup_{n\to\infty}\|u_n - p + \gamma_n(s_n - v_n)\| \le c$ olur. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}\|v_n - p + \gamma_n(s_n - v_n)\| &\le \|v_n - p\| + \gamma_n\|s_n - v_n\|\\ &\le d(v_n, P_T(p)) + \gamma_n S\\ &\le H(P_T(x_n), P_T(p)) + \gamma_n S\\ &\le \|x_n - p\| + \gamma_n S\end{aligned}$$

yazılır ve buradan $\limsup_{n\to\infty}\|v_n - p + \gamma_n(s_n - v_n)\| \le c$ elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left\|\alpha_n\big(u_n - p + \gamma_n(s_n - v_n)\big) + (1-\alpha_n)(v_n - p + \gamma_n(s_n - v_n))\right\|\\ &\qquad = \lim_{n\to\infty}\|x_{n+1} - p\| = c\end{aligned}$$

dir. Lemma 3.2.7 den,

$$\lim_{n\to\infty}\|u_n - v_n\| = 0 \tag{4.20}$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - p\| &= \|\alpha_n u_n + \beta_n v_n + \gamma_n s_n - p\| \\ &= \|v_n - p + \alpha_n(u_n - v_n) + \gamma_n(s_n - v_n)\| \\ &\leq \|v_n - p\| + \alpha_n\|u_n - v_n\| + \gamma_n\|s_n - v_n\| \\ &\leq \|v_n - p\| + \alpha_n\|u_n - v_n\| + \gamma_n S\end{aligned}$$

şeklinde düzenlenirse, $c \leq \operatorname{liminf}_{n\to\infty}\|v_n - p\|$ elde edilir. Bu eşitsizlik daha önceden elde ettiğimiz $limsup_{n\to\infty}\|v_n - p\| \leq c$ ile birleştirdiğimizde

$$c \leq \lim_{n\to\infty} inf\,\|v_n - p\| \leq \underset{n\to\infty}{limsup}\|v_n - p\| \leq c$$

olur ve buradan $\lim_{n\to\infty}\|v_n - p\| = c$ elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}\|v_n - p\| &\leq \|v_n - u_n\| + \|u_n - p\| \\ &\leq \|v_n - u_n\| + d(u_n, P_T(p)) \\ &\leq \|v_n - u_n\| + H\big(P_T(y_n), P_T(p)\big) \\ &\leq \|v_n - u_n\| + \|y_n - p\|\end{aligned}$$

eşitsizliğinden $c \leq \operatorname{liminf}_{n\to\infty}\|y_n - p\|$ olur ve yukarıda elde ettiğmiz $limsup_{n\to\infty}\|y_n - p\| \leq c$ eşitsizliği ile birleştirildiğinde

$$c \leq \operatorname*{liminf}_{n\to\infty}\|y_n - p\| \leq \underset{n\to\infty}{limsup}\|y_n - p\| \leq c$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\lim_{n\to\infty}\|y_n - p\| = c$$

bulunur. Ayrıca

$$y_n - p = \alpha_n'\big(v_n - p + \gamma_n'(r_n - w_n)\big) + (1 - \alpha_n')(w_n - p + \gamma_n'(r_n - w_n))$$

olarak ifade edebiliriz. Yani

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\alpha_n'\big(v_n - p + \gamma_n'(r_n - w_n)\big) + (1 - \alpha_n')(w_n - p + \gamma_n'(r_n - w_n))\right\| = c$$

dir. Şimdi de

$$\begin{aligned}\|v_n - p + \gamma_n'(r_n - w_n)\| &\leq \|v_n - p\| + \gamma_n'\|r_n - w_n\| \\ &\leq d\big(v_n, P_T(p)\big) + \gamma_n' S \\ &\leq H\big(P_T(x_n), P_T(p)\big) + \gamma_n' S \\ &\leq \|x_n - p\| + \gamma_n' S\end{aligned}$$

olarak düzenlenirse, $\limsup_{n\to\infty}\|v_n - p + \gamma_n'(r_n - w_n)\| \leq c$ bulunur. Aynı şekilde

$$\begin{aligned}\|w_n - p + \gamma_n'(r_n - w_n)\| &\leq \|w_n - p\| + \gamma_n'\|r_n - w_n\| \\ &\leq d\big(w_n, P_T(p)\big) + \gamma_n' S \\ &\leq H\big(P_T(z_n), P_T(p)\big) + \gamma_n' S \\ &\leq \|z_n - p\| + \gamma_n' S\end{aligned}$$

olarak düzenlenirse,

$$\limsup_{n\to\infty}\|w_n - p + \gamma_n'(r_n - w_n)\| \leq c$$

elde edilir. Lemma 3.2.7 den,

$$\lim_{n\to\infty}\|v_n - w_n\| = 0 \tag{4.21}$$

olur. (4.21) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}\|v_n - p\| &\leq \|v_n - w_n\| + \|w_n - p\| \\ &\leq \|v_n - w_n\| + d(w_n, P_T(p)) \\ &\leq \|v_n - w_n\| + H(P_T(z_n), P_T(p)) \\ &\leq \|v_n - w_n\| + \|z_n - p\|\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan $c \leq \liminf_{n\to\infty}\|z_n - p\|$ dir. Yukarda elde ettiğimiz $limsup_{n\to\infty}\|z_n - p\| \leq c$ eşitsizliği ile birleştirildiğinde

$$c \leq \liminf_{n\to\infty}\|z_n - p\| \leq \limsup_{n\to\infty}\|z_n - p\| \leq c$$

olur ve buradan $\lim_{n\to\infty}\|z_n - p\| = c$ olur. Bu durumda

$$z_n - p = \alpha_n''\big(x_n - p + \gamma_n''(t_n - v_n)\big) + (1 - \alpha_n'')(v_n - p + \gamma_n''(t_n - v_n))$$

şeklinde yazabiliriz. O halde

$$\lim_{n\to\infty}\big\|\alpha_n''\big(x_n - p + \gamma_n''(t_n - v_n)\big) + (1 - \alpha_n'')(v_n - p + \gamma_n''(t_n - v_n))\big\| = c$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned}\|x_n - p + \gamma_n''(t_n - v_n)\| &\leq \|x_n - p\| + \gamma_n''\|t_n - v_n\| \\ &\leq \|x_n - p\| + \gamma_n''S\end{aligned}$$

şeklinde düzenlenirse, $\limsup_{n\to\infty}\|x_n - p + \gamma_n''(t_n - v_n)\| \leq c$ elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}\|v_n - p + \gamma_n''(t_n - v_n)\| &\leq \|v_n - p\| + \gamma_n''\|t_n - v_n\| \\ &\leq d\big(v_n, P_T(p)\big) + \gamma_n''S\end{aligned}$$

$$\leq H\big(P_T(x_n), P_T(p)\big) + \gamma_n'' S$$
$$\leq \|x_n - p\| + \gamma_n'' S$$

düzenlenirse, $\limsup_{n\to\infty}\|v_n - p + \gamma_n''(t_n - v_n)\| \leq c$ elde edilir. Dolayısıyla Lemma 3.2.7 den,

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - v_n\| = 0 \tag{4.22}$$

olur. Hipotezden $\lim_{n\to\infty} d(x_n, F) = 0$ olduğunu biliyoruz. Bu nedenle her k için $\|x_{n_k} - p_k\| < \frac{1}{2^k}$ olacak şekilde F de bir (p_k) dizisi ve (x_n) nın bir (x_{n_k}) alt dizisi vardır. Bu nedenle (4.18) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\|x_{n_{k+1}} - p\| &\leq \|x_{n_{k+1}-1} - p\| + \epsilon_{n_{k+1}-1} \\
&\leq \|x_{n_{k+1}-2} - p\| + \epsilon_{n_{k+1}-2} + \epsilon_{n_{k+1}-1} \\
&\vdots \\
&\leq \|x_{n_k} - p\| + \sum_{i=0}^{n_{k+1}-n_k-1} \epsilon_{n_{k+1}+i}
\end{aligned}$$

dir. Buradan

$$\|x_{n_{k+1}} - p_k\| \leq \|x_{n_k} - p_k\| + \sum_{i=0}^{n_{k+1}-n_k-1} \epsilon_{n_{k+1}+i} < \frac{1}{2^k} + \sum_{i=0}^{n_{k+1}-n_k-1} \epsilon_{n_{k+1}+i}$$

yazılır. Şimdi de (p_k) nın K da bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. Bunun için

$$\begin{aligned}
\|p_{k+1} - p_k\| &\leq \|p_{k+1} - x_{n_{k+1}}\| + \|x_{n_{k+1}} - p_k\| \\
&< \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^k} + \sum_{i=0}^{n_{k+1}-n_k-1} \epsilon_{n_k+i}
\end{aligned}$$

$$< \frac{1}{2^{k-1}} + \sum_{i=0}^{n_{k+1}-n_k-1} \in_{n_k+i}$$

yazılır. Böylece (p_k), K da bir Cauchy dizisi olup bir $q \in K$ noktasına yakınsar. $q \in F$ olduğunu gösterelim.

$$d(p_k, T(q)) \leq d(p_k, P_T(q)) \leq H(P_T(q), P_T(p_k)) \leq \|q - p_k\|$$

eşitsizliğinde $n \to \infty$ iken $p_k \to q$ olur. Dolayısıyla $d(q, T(q)) = 0$ ve $q \in F$ dir. $\|x_{n_k} - p_k\| < \frac{1}{2^k}$ eşitsizliğinden (x_{n_k}) alt dizisi q ya güçlü yakınsar. $\lim_{n\to\infty}\|x_n - q\|$ limiti olduğundan, (x_n) dizisi q ya güçlü yakınsar. Böylece ispat tamamlanmış olur.

(4.15) de verdiğimiz hata terimli iterasyon şemasının küme değerli hemicompact quasi genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktasına güçlü yakınsaması ile ilgili teoremi verelim.

Teorem 4.2.2: E düzgün konveks Banach uzayı, K da E nin boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi olsun. $F(T) \neq \emptyset$, P_T genişlemeyen bir dönüşüm ve $T: K \to P(K)$ küme değerli quasi genişlemeyen dönüşüm olmak üzere, (x_n) iterasyon dizisini (4.15) deki gibi tanımlayalım. Şayet

i) T hemicompactır.
ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n' < \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n'' < \infty$ dır.
iii) $0 < l \leq \alpha_n, \alpha_n', \alpha_n'' \leq k < 1$ dır.

şartları sağlanıyorsa (x_n), T nın sabit noktasına güçlü yakınsar.

İspat: $p \in F(T)$ olsun. Teorem 4.2.1 nin ispatında olduğu gibi her $p \in F(T)$ için $\lim_{n\to\infty}\|x_n - p\|$ limiti vardır. Yine yukarıdaki teoremin ispatında olduğu gibi $n \to \infty$

iken $d(x_n, Tx_n) \to 0$ olduğu gösterilebilir. T hemicompact olduğundan, bir $q \in K$ için $x_{n_k} \to q$ olduğunu farzedelim. Buradan,

$$
\begin{aligned}
d\big(q, T(q)\big) &\leq d\big(q, P_T(q)\big) \\
&\leq \|q - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - z_{n_k}\| + d\left(z_{n_k}, P_T(q)\right) \\
&\leq \|q - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - z_{n_k}\| + H\left(P_T(x_{n_k}), P_T(q)\right) \\
&\leq 2\|q - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - z_{n_k}\| \to 0
\end{aligned}
$$

dır. Buradan $d\big(q, T(q)\big) = 0$ ve dolayısıyla $q \in F(T)$ dir. Her bir $p \in F(T)$ için $\lim_{n\to\infty}\|x_n - p\|$ limiti olduğundan, $n \to \infty$ iken $x_n \to q$ olur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Son olarak (4.15) de verdiğimiz hata terimli iterasyon şemasının küme değerli quasi genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktasına zayıf yakınsaması ile ilgili teoremi verelim.

Teorem 4.2.4: Edüzgün konveks Banach uzayı Opial şartını sağlasın ve K da E nin boş olmayan kapalı konveks alt kümesi olsun. $F(T) \neq \emptyset$, P_T genişlemeyen bir dönüşüm ve $T: K \to P(K)$ küme değerli quasi genişlemeyen dönüşüm olsun. Farzedelim ki $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n' < \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n'' < \infty$ ve $0 < l \leq \alpha_n, \alpha_n', \alpha_n'' \leq k < 1$ dir. Eğer $I - P_T$ sıfırda demiclosed ise, (4.15) deki gibi tanımlanan (x_n) dizisi T nin bir sabit noktasına zayıf yakınsar.

İspat: $p \in F(T) = F(P_T)$ olsun. Teorem 4.2.1 in ispatında olduğu gibi, tüm $p \in F$ için $\lim_{n\to\infty}\|x_n - p\|$ limiti var ve $\lim_{n\to\infty} d\big(x_n, T(x_n)\big) = 0$ dır. O halde (x_n) dizisinin $F(T)$ de bir tek zayıf alt dizisel limite sahip olduğunu ispatlayalım. Bunu ispatlamak için, $z_1 \neq z_2$ olmak üzere (x_n) dizisinin $\left(x_{n_i}\right)$ ve $\left(x_{n_j}\right)$ iki alt dizilerinin zayıf limitleri, sırasıyla z_1 ve z_2 olsun. (4.22) den $\lim_{n\to\infty}\|x_n - v_n\| = 0$ olacak şekilde $v_n \in Tx_n$ vardır. $I - P_T$ sıfırda demiclosed olduğundan $z_1 \in F(P_T) = F(T)$ elde edilir. Aynı şekilde $z_2 \in F(T)$ olduğu ispatlanabilir. Şimdi de tekliğini ispatlayalım. Bunun için, $z_1 \neq z_2$ olduğunu farzedelim. Bu durumda Opial's şartından,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\|x_n - z_1\| &= \lim_{n_i\to\infty}\left\|x_{n_i} - z_1\right\| \\
&< \lim_{n_i\to\infty}\left\|x_{n_i} - z_2\right\| \\
&= \lim_{n\to\infty}\|x_n - z_2\| \\
&= \lim_{n_j\to\infty}\left\|x_{n_j} - z_2\right\| \\
&< \lim_{n_j\to\infty}\left\|x_{n_j} - z_1\right\| \\
&= \lim_{n\to\infty}\|x_n - z_1\|
\end{aligned}$$

olur. Bu bir çelişkidir. Bu nedenle (x_n), T nin bir tek noktasına zayıf yakınsar.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu başlık altında tezimizin sonunda elde ettiğimiz sonuçları vereceğiz. Öncelikle güçlü yakınsama ile ilgili sonuçları verelim.

B reel Banach uzayı ve K da B nin boş olmayan kapalı konveks alt kümesi olsun. $F(T) \neq \emptyset$, P_T genişlemeyen bir dönüşüm ve $T: K \to P(K)$ küme değerli genişlemeyen dönüşüm olsun. (4.1) de tanımlanan (x_n) dizisi T nin bir sabit noktasına güçlü yakınsaması için gerek ve yeter şartın $\liminf_{n\to\infty} d(x_n, F(T)) = 0$ olduğunu Teorem 4.1.3 de verdik. Ayrıca B nin düzgün konveks Banach uzayı olması halinde ve *(I)* şartı altında (x_n) nin T nin sabit noktasına güçlü yakınsadığını Teorem 4.1.4 de ispatladık.

Diğer taraftan, E düzgün konveks Banach uzayı Opial şartını sağlasın ve K, E nin boş olmayan kapalı konveks alt kümesi olsun. $F(T) \neq \emptyset$, P_T genişlemeyen bir dönüşüm ve $T: K \to P(K)$ küme değerli genişlemeyen dönüşüm olsun. $I - P_T$ sıfırda demiclosed olduğunda, (4.1) de tanımlanan (x_n) dizisi T nin bir sabit noktasına zayıf yakınsadığını Teorem 4.1.5 de ispatladık.

Tezimizin son kısmında (4.1) iterasyonunun hata terimli versiyonu olan (4.15) iterasyonunu tanımladık ve buna bağlı olarak aşağıdaki sonuçları elde ettik: E düzgün konveks Banach uzayı, K da E nin boş olmayan kapalı konveks alt kümesi olsun. $F(T) \neq \emptyset$, P_T genişlemeyen bir dönüşüm ve $T: K \to P(K)$ küme değerli quasi genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Teorem 4.2.1 de *(I)* şartının sağlanması ve Teorem 4.2.2 de T nın hemicompact olması halinde (4.15) ile tanımlanan (x_n) dizisinin uygun şartlar altında T nın sabit noktasına güçlü yakınsadığını gösterdik.

Son olarak, E düzgün konveks Banach uzayı Opial şartını sağlasın ve K da E nin boş olmayan kapalı konveks alt kümesi olsun. $F(T) \neq \emptyset$, P_T genişlemeyen bir dönüşüm ve $T: K \to P(K)$ küme değerli quasi genişlemeyen dönüşüm olsun. $I - P_T$ sıfırda demiclosed olduğunda, (4.15) de tanımlanan (x_n) dizisinin T nin bir sabit noktasına zayıf yakınsadığını Teorem 4.2.3 de ispatladık.

Bu tezden aşağıdaki makale yapılmıştır.

Kaplan, M. and Kopuzlu, A., 2013. Three-step iterative scheme for approximating fixed points of multivalued nonexpansive mappings, Advances in Fixed Point Theory, 3(2013), No. 2, 273-285. ISSN:1927-6303

KAYNAKLAR

Abbas, M., Khan, S.H., Khan, A.R. and Agarwal, R.P., 2011. Common fixed points of two multivalued nonexpansive mappings by one-step iterative scheme, Applied Mathematics letters, 24, 97-102.

Agarwal, R. P., O'Regan, D. and Sahu, D. R., 2009. Fixed Point Theory and for Lipschitzian-type Mappings with Applications, doi 10.1007/978-0-387-75818-3.

Agarwal, R.P., O'Regan, D. and Sahu, D.R., 2009. İterative construction of fixed points of nearly asymptotically nonexpansive mappings, J. Nonlinear Convex Anal. 8, 61-79.

Ansari, Q. H., 2010. Metric Spaces Including Fixed Point Theory and Set- valued Maps, ISBN 978-1-84265-655-6.

Assad, N. A. and Kirk, W.A., 1972. Fixed point theorems for set valued mappings of contractive type, Pac. J. Math. 43, 533-562.

Bayraktar, M., 2000. Fonksiyonel Analiz, ISBN 975-442-035-1.

Berinde, V., Iterative Approximation of Fixed Points, ISBN -10 3-540-72233-5 Springer Berlin Heidelberg New York.

Browder, F.E.,1965. Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space, proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A 54, 1041- 1044.

Browder, F.E.,1965. Fixed point theorems for noncompact mappings in Hilbert spaces, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A, 53, 1272-1276.

Bruck, R. E., 1981. On the convex approximation property and the asymptotic behavior of nonlinear contractions in Banach spaces, Israel J. Math., 38, 304-314.

Bunyawat, A. and Suantai, S., 2012. Common fixed points of a countable family of multivalued quasi-nonexpansive mappings in uniformly convex Banach spaces, İnternational Journal of Computer Mathematics,(2012), 89:16, 2274-2279

Caristi, J. and Kirk, W. A., 1975. Geometric fixed point theory and inwardness conditions, in The Geometry of Metric and Linear Spaces, Lecture Notes in Mathematics, 490, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, pp. 74-83.

Caristi, J., 1976. Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions. *Trans. Amer. Math. Soc.* 215: 241-251. doi: 10.2307/ 1999724.ISSN 0002-9947. JSTOR 1999724.

Chidume, C., 2009. Geometric Properties of Banach Spaces and Nonlinear Iterations, ISBN 978-1-84882-189-7.

Cholamjiak, W. and Suantai, S., 2011, Approximation of common fixed points of two quasi-nonexpansive multi-valued maps in Banach spaces, Computers and Mathematics with Applications 61, 941-949.

Cholamjiak, W. and Suantai, S., 2011. A common fixed point of Ishikawa iteration with errors for two quasi-nonexpansive multi-valued maps in Banach spaces, Bulletin of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 3, No.2, 110-117.

Cholamjiak, W. and Suantai, S., 2010. Strong convergence of a new two- step iterative scheme for two quasi- nonexpansive multi-valued maps in Banach spaces, Journal of Nonlinear Analysis and Optimization, Vol. 1 No. 1,131-137.

Dancs, S., Hegedüs, M. and Medvegyev, P., 1983. A general ordering and fixed-point principle in complete metric space, Acta Sci. Math. 46, 381-388.

Eslamıan, M., Homaeıpour, S., 2011. Strong convergence of three-step ıteratıve process wıth errors for three multıvalued mappıngs, arXiv:1105.2149v1 [math.FA] 11 May 2011.

Gel'man, B. D., 2005. Continuous Approximations of Multivalued Mappings and Fixed Points, Mathematical Notes, Vol. 78, No. 2, 194-203.

Goebel, K. and Kirk, W. A., 1990. Topics in metric fixed point theory, Cambridge University Press, Cambridge.

Goebel, K. and Reich, S., 1984. Uniform convexity, hyperbolic geometry, and nonexpansive mappings, Marcel Dekker, Inc., New York.

Gorniewicz, L., 1991. Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings. Kluwer Academic Publishers.

Göhde, D., 1965. Zum Prinzip der kontraktiven Abbildung, (German) Math. Nachr., 30, 251-258.

Joseph, J. M., and Ramganesh, E., 2013. Fixed Point Theorem on Multi-valued Mappings, International Journal of Analysis and Applications, Vol. 1, No. 2, 123-127.

Jung, J. S., 2007. Strong convergence theorems for multivalued nonexpansive nonself-mappings in Banach spaces, Nonlinear Anal. 66, 2345-2354.

Khan, A. R., Akbar, F. and Sultana, N., 2008. Random coincidence points of subcompatible multivalued maps with applications, Carpathian J. Math., Vol 24, No.2, 63-71

Khan, S. H., and Yıldırım, I., 2012. Fixed points of multivalued nonexpansive mappings in Banach spaces, Fixed Point Theory and Applications, 2012:73.

Kızıltunç, H., 2007. Genişlemeyen Dönüşümlerin Sabit Noktalrının İterasyon Metotlarıyla Elde Edilmesi, Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Kim, G. E., 2012. Weak and strong convergence theorems of quasi-nonexpansive mappings in a Hilbert spaces, J Optim Theory Appl.,152:727-738.

Kirk, W. A., 1971. Fixed point theorems for nonlinear nonexpansive and generalized contractoin mappings,pasicif journal of mathematics, vol.38, no.1.

Kirk, W. A., and Massa, S., 1990.Remarks on asymptotic and Chebyshev centers, Houston J. Math. 16(3) 357-364.

Kirk, W.A., 1965. A fixed point theorem for mappings which do not increase distances, Amer. Math. Monthly, 72, 1004-1006.

Kreyszig, E., 1989. Introductory functional analysis with applications, Wiley Classics Library Edition Published.

Lami Dozo, E., 1973. Multivalued nonexpansive mappings and Opial's condition, Proc. Amer. Math. Soc. 38, 286-292.

Lim, T. C., 1974. A fixed point theorem for multivalued nonexpansive mappings in a uniformly convex Banach space, 80(6),1123-1126.

Markin, J. T., 1968. A fixed point theorem for set valued mappings, Bull. Amer. Math. Soc. 74, 639-640.

Mınak, G., 2013, Metrik Uzayda Küme Değerli Dönüşümler için Sabit Nokta Teoremleri, Y.Lisans Tezi, Kırıkkale Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kırıkkale.

Mizoguchi, N. and Takahashi, W., 1989. Fixed Point Theorems for Multivalued Mappings on Complete Metric Spaces, Journal of Mathematıcal Analysıs and Applıcatıons 141, 177-188.

Mohammad, N. A., 2008, Banach Uzaylarda Genişlemeyen Dönüşümler için Sabit Nokta Teoremleri, Y.Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Nadler, S.B., 1969. Jr. Multivalued contraction mappings, Pacifics J. Math. 30. 475-488

Noor, M.A., 2000. New approximation schemes for general variational inequalities, J. Math. Anal. Appl., 251, 217-229.

Opial, Z., 1967. Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings, Bull. Amer. Math. Soc., 73. 591-597.

Panyanak, B., 2007. Mann and Ishikawa iterative process for multi-valued mappings in Banach spaces, comp. Math. Appl., 54. 872-877.

Rashwan, R. A. and Altwqi, S. M., 2012. One- step iterative scheme for approximating common fixed points of three multivalued nonexpansive mappings, Bulletion of international Mathematical virtual Institute ISSN 1840-4367, vol. 2 (2012), 77-86.

Sastry, K.P.R. and Babu, G.V.R., 2005. Convergence of Ishikawa İterates for a multi-valued mappings with a fixed point, Czechoslovak Math.J. 55, 817-826.

Shahzad, N., and Zegeye, H., 2009. On Mann and Ishikawa iterartion schemes for multivalued maps in Banach spaces, Nonlinear Anal. 71, no.3-4 838-844.

Shaini, P., 2011. Fixed Point Theory, LAP LAMBERT Academic Publishing, ISBN 978-3-8433-8930-3.

Shiau, C., Tan, K. K. and Wong, C.S., 1975. Quasi nonexpansive multivalued maps and selections, Fund. Math. 87, 109-119

Song, Y. and Cho, Y. J., 2011. Some notes on Ishikawa iteration for multivalued mappings, Bull Korean Math. Soc. 48: 575-584.doi: 10.4134/BKMS.2011.48.3575.

Song, Y. and Wang, H., 2008. Convergence of iterative algorithms for multivalued mappings in Banach spaces, Nonlinear Analysis (2008), doi: 10.1016\ j.na 2008.02.034.

Suantai, S., 2005. Weak and strong convergence critieria of Noor iteration for asymptotically nonexpansive mappings, J. Math. Anal. App. 311, 506-517.

Suantai, S., Cholamjiak, W., and Cholamjiak, P., 2012. An implicit iteration process for solving a fixed point problem of a finite family of multi-valued mappings in Banach spaces, Applied Mathematics Letters 25, 1656-1660.

Takahashi, W., 1970. A convexity in metric space and nonexpansive mappings-I, Kodai Math. Sem. Rep., 22, 142-149.

Tan, K. K., and Xu, H. K., 1993. Approximating fixed points of nonexpansive mappings by the Ishikawa iteration Process, J. Math. Anal. Appl., 178, 301-308.

Thianwan, S., 2008. Weak and strong convergence theorems for new iterations with errors for nonexpansive nonself-mapping,Thai Journal of Mathematics(Annual Meeting in Mathematics, 27-38.

Widder, A., 2009. Fixed Point Theorems for Set-valued Maps, Institute for Analysis and Scientific Computing Vienna University of Technlogy.

Xu, B., and Noor, M.A., 1998. Ishikawa and Mann iteration process with errors for nonlinear strongly accretive operatör equations, J. Math. Anal. Appl., 224, 91-101.

Yıldırım, I., 2010. Asimptotik Genişlemeyen Dönüşümlerin Ortak Sabit Noktaları için Yeni Yaklaşım Metotları, Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

ÖZGEÇMİŞ

1985 yılında Adıyaman'da doğdu. İlköğrenimini Adıyaman ve orta öğrenimini İstanbul'da tamamladı. 2002 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümüne girmeye hak kazandı. 2006 yılında mezun oldu. 2006 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde yüksek lisans eğitimine başladı. 2009 yılında yüksek lisans eğitimini tamamladı. 2009 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü Topoloji Anabilim Dalında doktora eğitimine başladı. 2009 yılında Sinop Üniversitesi Meslek Yüksekokulunda Öğretim Görevlisi olarak görev yapmaya başladı. Halen Sinop Üniversitesinde Öğretim Görevlisi olarak görev yapmaya devam etmektedir.