n. MERTEBEDEN TÜREVLENEBİLEN FONKSİYONLAR İÇİN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Çetin YILDIZ

Doktora Tezi

Matematik Anabilim Dalı
Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı
Prof. Dr. M. Emin ÖZDEMİR

2014

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

n. MERTEBEDEN TÜREVLENEBİLEN FONKSİYONLAR İÇİN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Çetin YILDIZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı

ERZURUM
2014

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAY FORMU

n. MERTEBEDEN TÜREVLENEBİLEN FONKSİYONLAR İÇİN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Prof. Dr. M. Emin ÖZDEMİR danışmanlığında, Çetin YILDIZ tarafından hazırlanan bu çalışma 12/09/2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora tezi olarak **oybirliği/oy çokluğu (.../...)** ile kabul edilmiştir.

Başkan	: Prof. Dr. Emin ÖZÇAĞ	*İmza*	:
Üye	: Prof. Dr. M. Emin ÖZDEMİR	*İmza*	:
Üye	: Prof. Dr. Murat ÖZDEMİR	*İmza*	:
Üye	: Prof. Dr. S. Uğur KIRMACI	*İmza*	:
Üye	: Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU	*İmza*	:

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu 18/09/2014 tarih ve 37/1234 nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. İhsan EFEOĞLU
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Doktora Tezi

n. MERTEBEDEN TÜREVLENEBİLEN FONKSİYONLAR İÇİN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Çetin YILDIZ

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. M. Emin ÖZDEMİR

Bu tezde, n. mertebeden türevlenebilen fonksiyonlar incelenerek yeni integral eşitsizlikleri elde edilmiştir. Ayrıca, Fejér eşitsizliği kullanılarak yeni teoremler yazılmıştır. Birinci bölüm konveks fonksiyonlar ve Eşitsizlik Teorisi'nin tarihsel gelişimini içermekte olup literatürde mevcut çalışmalar ile ilgili bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde tezde kullanılan konveks fonksiyon kavramları, bunlar arasındaki hiyerarşi ve temel teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde konveks fonksiyonlar için literatürde bulunan Hermite-Hadamard, Fejér ve Ostrowski tipli integral eşitsizlikleri yer almaktadır. Ayrıca bu eşitsizliklerle ilişkili lemmalar ve bu lemmalara bağlı olarak elde edilen eşitsizlikler bulunmaktadır. Dördüncü bölümde ise ilk olarak Fejér eşitsizliği kullanılarak yeni teoremler ispatlanmış, g'nin özel değerleri için yeni sonuçlar elde edilmiştir. İkinci olarak n. mertebeden türevlenebilen fonksiyonlar için yeni lemmalar yazılmış ve bu lemmalar kullanılarak genelleştirmeler yapılmıştır. Elde edilen sonuçların literatürü desteklediği gözlemlenmiştir.

2014, 119 sayfa

Anahtar Kelimeler: Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler, Fejér tipli eşitsizlikler, Ostrowski tipli eşitsizlikler, Jensen eşitsizliği, Hölder eşitsizliği, Power-mean eşitsizliği, konveks fonksiyonlar.

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

INTEGRAL INEQUALITIES FOR n −TIMES DIFFERENTIABLE FUNCTIONS

Çetin YILDIZ

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. M. Emin ÖZDEMİR

In this thesis, new integral inequalities are obtained through the analysis of $n-$times differentiable functions. In addition, new theorems are written by using Fejér inequality. In first section, historical development of convex functions and Inequality Theory takes place and current studies are mentioned. Second section includes concepts of convex function used in the thesis and hierarchy among those, and new theorems are also involved in this section. In third section, Hermite-Hadamard type, Fejér and Ostrowski type integral inequalities taking part in the literature for convex functions are provided. This section also involves lemmas related to these inequalities and inequalities obtained through these lemmas. In fourth section, firstly new theorems are proved by using Fejér inequality and new results are obtained for special values of g. Then, new lemmas are provided for $n-$times differentiable functions and generalizations are made by using these lemmas. It has been observed that results obtained in the thesis support the literature.

2014, 119 pages

Keywords: Hermite-Hadamard type inequalities, Fejér type inequalities, Ostrowski type inequalities, Jensen inequality, Hölder inequality, Power-mean inequality, convex functions.

TEŞEKKÜR

Doktora tezi olarak sunduğum bu çalışma Atatürk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Doktora çalışmam boyunca, tez konumda çalışmamı sağlayan, bütün enerjisi ve engin birikimiyle bana rehberlik eden, geniş tecrübesiyle çalışmalarımda eşsiz katkıları bulunan ve bana bilimsel çalışma ve düşünme yeteneğini aşılayan saygıdeğer danışman hocam,

Sayın Prof. Dr. M. Emin ÖZDEMİR'e;

teşekkür ve şükranlarımı sunarım.

Doktora tez çalışmalarım süresince yanımda olan değerli arkadaşlarım Sayın Yrd. Doç. Dr. Mustafa GÜRBÜZ'e, Sayın Yrd. Doç. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR'e, Sayın Yrd. Doç. Dr. Alper EKİNCİ'ye ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Merve Avcı ARDIÇ'a teşekkür ederim.

Öğrenim hayatım boyunca kendilerinden görmüş olduğum destek ve güvenden dolayı aileme ve değerli eşim Mine YILDIZ 'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Çetin YILDIZ
Ağustos, 2014

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$C(I)$	Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
f'	f Fonksiyonunun Birinci Mertebeden Türevi
f''	f Fonksiyonunun İkinci Mertebeden Türevi
$f^{(n)}$	f Fonksiyonunun n. Mertebeden Türevi
I	$\mathbb{R}$'de Bir Aralık
I°	I'nın İçi
$J(I)$	Jensen-Konveks Fonksiyonların Sınıfı
$JQC(I)$	Jensen-Quasi-Konveks Fonksiyonların Sınıfı
$K_m(b)$	m −Konveks Fonksiyonların Sınıfı
$K_m^{\alpha}(b)$	(α, m) −Konveks Fonksiyonların Sınıfı
$K_n(b)$	n −konveks Fonksiyonlar Sınıfı
K_s^2	İkinci Anlamda s −Konveks Fonksiyonların Sınıfı
$L(I)$	Log-Konveks Fonksiyonlar sınıfı
$L[a, b]$	$[a, b]$ Aralığında İntegrallenebilen Fonksiyonların Kümesi
$L_r(x, y)$	Genelleştirilmiş Logaritmik Ortalama
Max	Maksimum
Min	Minimum
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$P(I)$	P −Fonksiyonlar Sınıfı
$Q(I)$	Godunova-Levin Fonksiyonlar Sınıfı
$QC(I)$	Quasi-Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}^n$	n −boyutlu Euclidean Uzay
$SV(h, I)$	h −Konkav Fonksiyonlar Sınıfı
$SX(h, I)$	h −Konveks Fonksiyonların Sınıfı
$S^*(b)$	Starshaped Fonksiyonlar Sınıfı
$W(I)$	Wright-Konveks Fonksiyonların Sınıfı
$WQC(I)$	Wright-Quasi-Konveks Fonksiyonların Sınıfı

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Konvekslik, M.Ö. 250 yılında Archimedes'in ünlü π değerini hesaplamasına kadar uzanan basit ve bilinen bir kavramdır. Buna rağmen matematikte yer alması 19. yüzyıl sonu 20. yüzyıl başını bulmaktadır. "Konvekslik" kavramı ilk olarak Hermite tarafından Ekim 1881'de elde edilen bir sonucun, 1883 yılında Mathesis adlı dergide aşağıdaki gibi yayınlanmasıyla ortaya çıkmıştır:

"**Sur deux limites d'une integrale definie**. Soit $f(x)$ une Fonction qui varie toujours dans le même sens de $\mathrm{x} = \mathrm{a}, \mathrm{x} = \mathrm{b}$. On aura les relations

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) < \int_a^b f(x)dx < (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

ou bien

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) > \int_a^b f(x)dx > (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

suivant que la courbe $y = f(x)$ tourne sa convexité ou sa concavite vers l'axe des abcisses."

Bu tarihten sonra literatürde konveks fonksiyonları ima eden sonuçlara rastlanılmasına rağmen konveks fonksiyonların ilk kez sistemli olarak 1905 ve 1906 yıllarında J.L.W.V. Jensen tarafından çalışıldığı ve Jensen'ın bu öncü çalışmalarından itibaren konveks fonksiyonlar teorisinin hızlı bir gelişme gösterdiği kabul edilmektedir.

Konveksliğin tanımı eşitsizlikle ifade edildiğinden Konveks Fonksiyonlar Teorisinde eşitsizliklerin önemli bir yeri vardır. Hardy, Littlewood, Pólya, Beckenbach, Bellman, Mitrinović, Pachpatte, Pečarić ve Fink gibi matematikçiler Konveks Fonksiyonlar ile Eşitsizlikler Teorisi'ni bir arada inceleyerek çeşitli kitaplar yazmışlardır. Bu tür eşitsizlikleri konu alan ilk temel çalışma 1934'te Hardy, Littlewood ve Pólya tarafından yazılan “Inequalities” adlı kitaptır (Hardy *et al.* 1952). İkinci çalışma ise E.F. Beckenbach ve R. Bellman tarafından 1961’de yazılan 1934-1960 yılları arasında elde edilen yeni eşitsizliklerin sonuçlarını içeren ve yine “Inequalities” adı verilen kitaptır. Bunu Mitrinović’in 1970 yılında yayınladığı ve ilk iki kitapta bulunmayan farklı konulara da yer verdiği “Analytic Inequalities” isimli kitabı takip eder. Sadece konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler içeren ilk kaynak ise “Convex Functions: Inequalities” başlığıyla 1987 yılında Pečarić tarafından yazılmıştır. Bu temel kaynakların yanı sıra “Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives” (Mitrinović *et al.* 1991), “Classical and New Inequalities in Analysis” (Mitrinović *et al.* 1993), “Mathematical Inequalities” (Pachpatte 2005) ve “Convex Functions and Their Applications” (Niculescu and Perssons 2006) literatürde mevcut olan diğer kaynaklardır.

Konveks Fonksiyonlar Teorisi ile ilişkili olan Eşitsizlik Teorisi ise C.F. Gauss, A.L. Cauchy ve P.L. Čebyšev ile gelişmeye başlamıştır. 19.-20. yy’da bulunan eşitsizliklerin bir kısmı konveks fonksiyonlarla ilişkilendirilerek temel eşitsizlikler haline gelmiştir. Bunların en önemlileri Hermite-Hadamard eşitsizliği, Fejér eşitsizliği ve Ostrowski eşitsizliğidir. Hermite-Hadamard eşitsizliği ile ilgili çalışmaların büyük bir kısmı S.S. Dragomir ve C.E.M. Pearce tarafından 2000 yılında yazılmış olan “Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications” isimli kaynakta; Ostrowski eşitsizliği ile ilgili çalışmaların büyük bir kısmı da S.S. Dragomir ve Themistocles M. Rassias tarafından 2002 yılında yazılmış olan “Ostrowski Type Inequalities and Applications in Numerical Integration” isimli kitapta bir araya getirilmiştir. Konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler üzerine çalışan diğer matematikçiler Ravi Agarval, G. Anastassiou, G.V. Milovanovic, A.M. Fink, Roberts and Varberg, N.S. Barnett, M.E. Özdemir, U.S. Kırmacı, H. Yıldırım, M.Z. Sarıkaya, N. Ujević, S. Varošanec, P.S. Bullen ve P. Cerone şeklinde sıralanabilir.

Bu konu üzerine yazılan birçok kitabın dışında literatürde doktora ve yüksek lisans çalışmalarına da rastlanmaktadır.

Set (2010), “Bazı Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar İçin İntegral Eşitsizlikleri” başlıklı doktora tezinde E −konveks ve $E - m$ −konveks fonksiyonlar ile birlikte farklı türden E −konveks ve $E - m$ −konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli ve diğer bazı farklı türden konveks fonksiyonlar olan $m -$ konveks, $(\alpha, m) -$ konveks, log −konveks, $quasi$ −konveks, s −konveks, r −konveks ve h −konveks fonksiyonlar için yeni integral eşitsizlikleri verilmiştir. Bunların yanı sıra bazı genelleştirmeler de elde edilmiştir.

Alomari (2011), “Several Inequalities Of Hermite-Hadamard, Ostrowski And Simpson Type For s −Convex, $Quasi$ −Convex And r −Convex Mappings And Applications” başlıklı doktora tezinde $s -$ konveks, $quasi -$ konveks ve $r -$ konveks fonksiyon sınıfları kullanılarak Hermite-Hadamard, Ostrowski ve Simpson tipli integral eşitsizlikleri elde edilmiştir ve bu eşitsizlikler için uygulamalar verilmiştir.

Yıldız (2011), “Quasi Konveks Fonksiyonlar İçin Eşitsizlikler Ve Uygulamaları” adlı yüksek lisans tezinde quasi konveks fonksiyonlar için yaptığı geniş bir literatür taramasının yanısıra, quasi konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard, Ostrowski ve Simpson tipli eşitsizlikler elde etmiştir. Daha sonra elde ettiği eşitsizlikler için sonuçlar ve 0bu sonuçlara bağlı özel uygulamalar vermiştir.

Kavurmacı (2012), “Bazı Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar İçin Ostrowski ve Hermite-Hadamard Tipli İntegral Eşitsizlikler” başlıklı doktora tezinde farklı türden konveks fonksiyon sınıfları kullanılarak yeni baskın konveks fonksiyon kavramları tanımlanmış, bu yeni fonksiyon sınıfları için Hermite-Hadamard tipli integral eşitsizlikleri edilmiştir. Konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli; s −konveks ve $m -$ konveks fonksiyonlar için Ostrowski tipli yeni integral eşitsizlikleri elde edilmiştir ve elde edilen bazı eşitsizlikler için uygulamalar verilmiştir.

Gürbüz (2013), “Farklı Türden Konveks Fonksiyonların Çarpımı Üzerine İntegral Eşitsizlikleri Ve Uygulamaları” başlıklı doktora tezinde farklı türden konveks fonksiyonlar kullanılarak yeni tanımlamalar, örneklemeler yapılmış olup bu türden konveks fonksiyonlar ve literatürde bulunan bazı konveks fonksiyonların çarpımı üzerine integral eşitsizlikleri elde edilmiştir.

Neden Matematiksel Eşitsizlikler?

1978 yılında Richard Bellman, Almanya'da 2. Uluslararası Matematik Eşitsizlikler Konferansı'nda bu soruya şu şekilde cevap vermiştir:

Eşitsizlik çalışmak için üç neden vardır. Bunlar:

1. Pratik Nedenler
2. Teorik Nedenler
3. Estetik Nedenler

dir. Pratik açıdan bakıldığında, birçok araştırmada bir niceliği diğer bir nicelikle sınırlandırmak karşımıza çıkmaktadır. Klasik Eşitsizlikler de bu şekilde ortaya çıkmıştır. Teorik açıdan bakıldığında çok basit sorular sorularak tüm temel teoremler oluşturulabilir. Örneğin, negatif olmayan bir niceliğin ne zaman bir diğerini kapsadığı sorulabilir ve bu basit soru ile Pozitif Operatörler Teorisi ve Diferansiyel Eşitsizlikler Teorisi kurulur. Son olarak estetik açıdan bakıldığında genel olarak resim, müzik ve matematiğin bazı parçalarının uyumlu olduğu görülür. Elde edilen eşitsizliklerin göze hitap etmesi de eşitsizlikleri çekici hale getirir.

Bu çalışmada, farklı türden konveks fonksiyonlar detaylı olarak incelenmiştir. Bu amaçla çalışmanın ikinci bölümünde matematikte yer alan temel tanım ve teoremler, bazı konveks fonksiyon sınıfları arasındaki hiyerarşi verilmiştir. Üçüncü bölümde ise konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard, Fejér ve Ostrowski tipli eşitsizlikler verilmiştir.

Dördüncü bölümde ilk olarak Fejér tipli lemmalar ispatlanmış ve bu lemmalar kullanılarak yeni integral eşitsizlikleri elde edilmiştir. Daha sonra $n.$ mertebeden fonksiyonlar için yeni genelleştirmeler yazılmış olup n'nin özel değerleri için Hermite-Hadamard ve Ostrowski tipli integral eşitsizlikleri elde edilmiştir.

Ayrıca verilen lemmalarda integraller için mutlak değer özelliği, Hölder, Power-mean ve Jensen eşitsizlikleri kullanılarak teoremler ispatlanmıştır. Bu çalışmada elde edilen sonuçlardan birçoğunun literatürü desteklediği gözlemlenmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Genel Kavramlar

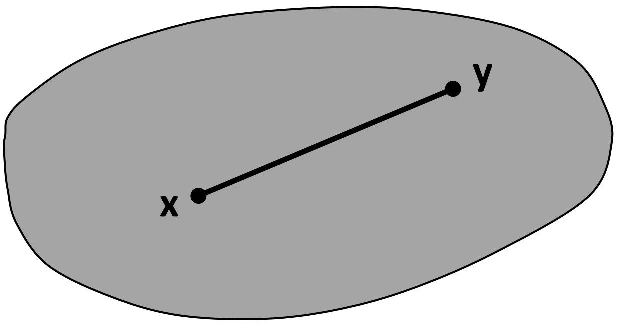
Bu bölümde, çalışmada kullanılacak bazı temel tanım, teorem ve örnekler verilecektir.

Tanım 2.1.1. (Konveks Küme): L bir lineer uzay $A \subseteq L$ ve $x, y \in A$ keyfi olmak üzere

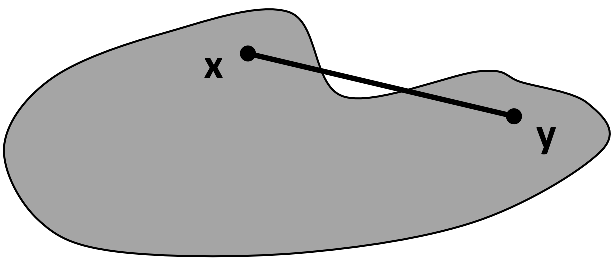
$$B = \{z \in L: z = \alpha x + (1-\alpha)y, \qquad 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A$$

ise A kümesine konveks küme denir (Bayraktar 2000).

Eğer $z \in B$ ise $z = \alpha x + (1-\alpha)y$ eşitliğindeki x ve y 'nin katsayıları için $\alpha + (1-\alpha) = 1$ bağıntısı her zaman doğrudur. Bu sebeple konveks küme tanımındaki $\alpha, 1-\alpha$ yerine $\alpha + \beta = 1$ şartını sağlayan ve negatif olmayan α, β reel sayıları alınabilir. Geometrik olarak B kümesi uç noktaları x ve y olan bir doğru parçasıdır. Bu durumda sezgisel olarak konveks küme, boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını ihtiva eden kümedir.



Şekil 2.1. Konveks küme



Şekil 2.2. Konveks olmayan küme

Örneğin; aralıklar, reel eksen üzerindeki konveks kümelerdir.

Tanım 2.1.2. (J −Konveks Fonksiyon): I, ℝ'de bir aralık olmak üzere her $x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna I üzerinde Jensen anlamında konveks veya J −konveks fonksiyon denir (Mitrinović 1970).

Tanım 2.1.3. (Kesin J − Konveks Fonksiyon): Her $x, y \in I$ ve $x \neq y$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

oluyorsa f fonksiyonuna I üzerinde kesin J − konveks fonksiyon denir (Mitrinović 1970).

Tanım 2.1.4. (Konveks Fonksiyon): I, ℝ'de bir aralık ve $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için,

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) \tag{2.1}$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. Eğer (2.1) eşitsizliği $x \neq y$ ve $\alpha \in (0,1)$ için kesin ise bu durumda f fonksiyonuna kesin konvekstir denir (Pečarić *et al*. 1992).

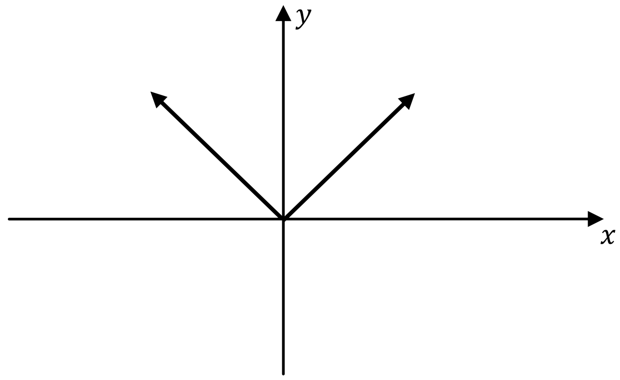
Sonuç 2.1.1. Her konveks fonksiyon J −konveks fonksiyondur.

Sonuç 2.1.2. $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, bir f fonksiyonunun I'da konveks olması için gerek ve yeter şart, her $x, y \in I$ ve her $p, q > 0$ reel sayıları için

$$f\left(\frac{px+qy}{p+q}\right) \leq \frac{pf(x)+qf(y)}{p+q}$$

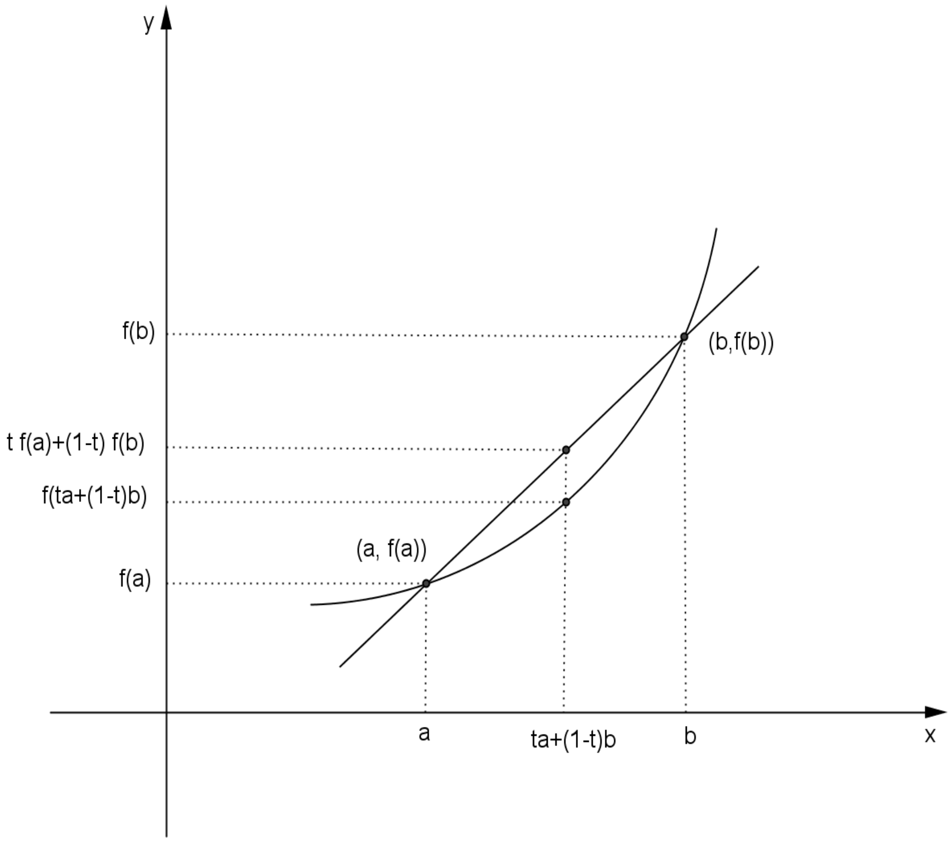
olmasıdır (Mitrinović 1970).

Örnek 2.1.1. $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ fonksiyonu I üzerinde konveks fonksiyondur.



Şekil 2.3. Aralıklar üzerinde konveks fonksiyon ($f(x) = |x|$)

Konveks fonksiyonun geometrik anlamı aşağıdaki gibidir:



Şekil 2.4. Konveks fonksiyon

Geometrik olarak f'nin $ta+(1-t)b$ noktasında aldığı değer, $(a,f(a))$ ve $(b,f(b))$ noktalarını birleştiren doğru parçasının aynı noktada aldığı değerden her zaman daha küçüktür. Yani bu iki noktayı birleştiren kiriş (doğru parçası) her zaman eğrinin $[a,b]$ aralığında kalan kısmının üzerinde veya üstündedir. Şekil 2.4. den de görüldüğü gibi $t\in[0,1]$ olduğundan $tf(a)\leq f(a)$ dir. Benzer şekilde $(1-t)f(b)\leq f(b)$ dir. Yani $tf(a)$, $f(a)$nın $(1-t)f(b)$de $f(b)$nin altındadır. Dolayısıyla $tf(a)+(1-t)f(b)$, $f(a)$ ile $f(b)$ arasında olur. Konkav fonksiyon için kiriş f'nin grafiğinin $[a,b]$ aralığında kalan kısmının üzerinde veya altındadır.

Eğer f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında tanımlı, $[a,b]$ aralığında konveks ve x_0 noktasında diferensiyellenebilen bir fonksiyon ise $x\in(a,b)$ için

$$f(x)-f(x_0)\geq f'(x_0)(x-x_0) \tag{2.2}$$

eşitsizliği yazılır. Yani (a,b) aralığında diferensiyellenebilen konveks fonksiyon (2.2) eşitsizliğini sağlar (Roberts and Varberg 1973).

Tanım 2.1.5. I, $\mathbb{R}$ nin boştan farklı bir alt kümesi ve $f: I\to\mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyon olsun. I nın $[x_k,y_k]$ ayrık alt aralıklarının bir dizisini göz önüne alalım. Şayet $\forall\varepsilon>0$ için $\sum_k|y_k-x_k|<\delta$ olduğunda $\sum_k|f(y_k)-f(x_k)|<\varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ sayısı var ise f fonksiyonu I kümesinde mutlak süreklidir denir (Carter and Van Brunt 2000).

Tanım 2.1.6. N, bir lineer uzay olsun. $\|.\|: N\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun x deki değerlerini $\|x\|$ ile gösterilsin. Bu fonksiyon için

N1) $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=\theta$,

N2) $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$ $(\alpha\in F)$ ve

N3) $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$ (üçgen eşitsizliği)

şartını sağlanıyorsa $\|.\|$ fonksiyonuna N de (veya N üzerinde) norm denir (Bayraktar 2000).

Teorem 2.1.1. f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks ise

a) f, (a, b) aralığında süreklidir ve

b) f, $[a, b]$ aralığında sınırlıdır (Azpeitia 1994).

Tanım 2.1.7. (Artan ve Azalan Fonksiyonlar): f, I aralığında tanımlı bir fonksiyon ve x_1, x_2 de I'da iki nokta olsun. Bu durumda

a) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) > f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde artandır,

b) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) < f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalandır,

c) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) \geq f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalmayandır,

d) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) \leq f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde artmayandır

denir (Adams and Essex 2010).

Teorem 2.1.2. J açık bir aralık ve $J \subseteq I$ olmak üzere f, I üzerinde sürekli ve J üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

a) Her $x \in J$ için $f'(x) > 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde artandır.

b) Her $x \in J$ için $f'(x) < 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalandır.

c) Her $x \in J$ için $f'(x) \geq 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalmayandır.

d) Her $x \in J$ için $f'(x) \leq 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde artmayandır.

(Adams and Essex 2010).

Aşağıda konveks fonksiyonların türevleri ile artanlık (azalanlık) arasındaki ilişkiyi içeren sonuç ve teoremler verilmiştir.

Teorem 2.1.3. Eğer $f: I \to \mathbb{R}$ tanımlı konveks (kesin konveks) bir fonksiyon ise $f'_+(x)$ ve $f'_-(x)$ var ve bu fonksiyon I°'de artandır (kesin artandır) (Pečarić *et al*. 1992).

Teorem 2.1.4. f fonksiyonu (a, b) aralığında diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart f''nün artan (kesin artan) olmasıdır (Pečarić *et al*. 1992).

Teorem 2.1.5. f fonksiyonunun I açık aralığında ikinci türevi varsa, f fonksiyonunun bu aralık üzerinde konveks olması için gerek ve yeter şart $x \in I$ için

$$f''(x) \geq 0$$

olmasıdır (Mitrinović 1970).

Çeşitli konveks fonksiyon türleri vardır. Bunlardan en çok bilinen ve literatürde bu konuyla ilgilenenler tarafından sık kullanılan konveks fonksiyon türleri şunlardır:

Tanım 2.1.8. (Quasi-Konveks Fonksiyon): $f: S \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $S \subset \mathbb{R}^n$ boştan farklı konveks küme olsun. $\forall x, y \in S$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq max\{f(x), f(y)\}$$

ise f'ye $quasi$ $-$konveks fonksiyon denir (Dragomir and Pearce 1998).

Eğer

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < max\{f(x), f(y)\}$$

ise f'ye kesin $quasi$ $-$konveks fonksiyon denir. Aynı şartlar altında

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq max\{f(x), f(y)\}$$

ise f'ye $quasi$ $-$konkav fonksiyon ve

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) > max\{f(x), f(y)\}$$

ise f'ye kesin $quasi$ $-$konkav fonksiyon denir (Dragomir and Pearce 1998).

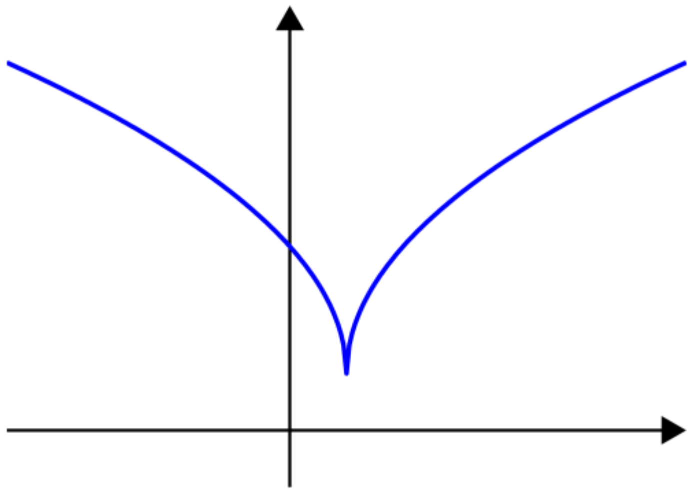
Tanım 2.1.9. f hem $quasi-$ konveks hem de $quasi-$ konkav ise f 'ye $quasi$ $-$monotonik fonksiyon denir (Greenberg and Pierskalla 1970).

Sonuç 2.1.3. Herhangi bir konveks fonksiyon $quasi$ $-$konveks fonksiyondur. Fakat tersi her zaman doğru değildir. Yani $quasi-$ konveks olup konveks olmayan fonksiyonlar vardır (Ion 2007).

Örneğin $g: [-2,2] \to \mathbb{R}$,

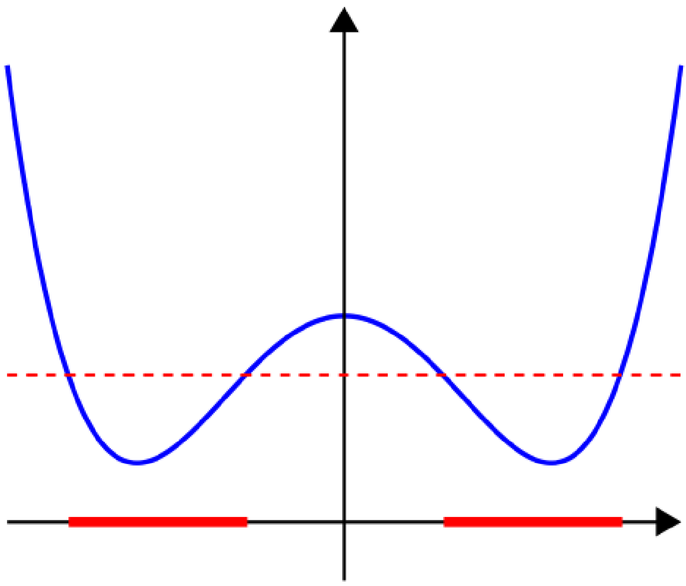
$$g(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-2,-1) \\ t^2, & t \in [-1,2] \end{cases}$$

fonksiyonu $[-2,2]$ aralığında konveks değildir. Fakat g fonksiyonu $[-2,2]$ aralığında $quasi$ $-$konveks fonksiyondur (Ion 2007).



Şekil 2.5. Quasi konveks olup konveks olmayan fonksiyon

Aşağıdaki grafikte, kırmızı ile gösterilen aralıklarda fonksiyon $quasi$ $-$konvekstir. Ama eğrinin tamamı düşünülürse bu fonksiyon $quasi$ $-$konveks değildir.



Şekil 2.6. Aralıkta quasi $-$konveks fonksiyon

Tanım 2.1.10. (Wright-Konveks Fonksiyon): $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tanımlı ve $y > x, \delta > 0$ şartları altında her bir $y + \delta, x \in I$ için

$$f(x+\delta) - f(x) \leq f(y+\delta) - f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f'ye $I \subseteq \mathbb{R}$'de Wright-konveks fonksiyon denir (Dragomir and Pearce 1998).

Tanım 2.1.11. (Wright-Quasi-Konveks Fonksiyon): $f: I \to \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyon olsun. $y > x, \delta > 0$ şartları altında $\forall x, y, y+\delta \in I$ ve $\forall \alpha \in [0,1]$ için

$$\frac{1}{2}[f(\alpha x + (1-\alpha)y) + f((1-\alpha)x + \alpha y)] \leq max\{f(x), f(y)\}$$

veya

$$\frac{1}{2}[f(y) + f(x+\delta)] \leq max\{f(x), f(y+\delta)\}$$

eşitsizliklerinden biri sağlanıyorsa f'ye $I \subseteq \mathbb{R}$'de Wright-$quasi$-konveks fonksiyon denir (Dragomir and Pearce 1998).

Tanım 2.1.12. (J −Quasi-Konveks Fonksiyon): $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq max\{f(x), f(y)\}$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna $J - quasi -$konvekstir denir (Dragomir and Pearce 2000).

Tanım 2.1.13. (Log-Konveks Fonksiyon): $I, \mathbb{R}$'de bir aralık $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq f^{\alpha}(x) f^{1-\alpha}(y)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna Log-konvekstir denir (Pečarić *et al.* 1992).

Tanım 2.1.14. (Godunova-Levin Fonksiyonu): $f: I \to \mathbb{R}$ negatif olmayan fonksiyon, $\forall x, y \in I, \alpha \in (0,1)$ olmak üzere

$$f(\alpha x+(1-\alpha)y)\leq \frac{f(x)}{\alpha}+\frac{f(y)}{1-\alpha}$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna Godunova-Levin fonksiyon veya $Q(I)$ sınıfına aittir denir.

Bu tanıma denk olarak; $f\in Q(I)$ ve $x,y,z\in I$ ise bu takdirde

$$f(x)(x-y)(x-z)+f(y)(y-x)(y-z)+f(z)(z-x)(z-y)\geq 0$$

eşitsizliği sağlanır (Godunova and Levin 1985).

Tanım 2.1.15. ($P-$Fonksiyonu): $f: I\to\mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. $\forall x,y\in I,\alpha\in[0,1]$ olmak üzere

$$f(\alpha x+(1-\alpha)y)\leq f(x)+f(y)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna $P-$ fonksiyonu veya $P(I)$ sınıfına aittir denir (Dragomir *et al*. 1995).

x,y pozitif sayılarının r. kuvvetlerine göre kuvvet ortalaması

$$M_r(x,y;\lambda)=\begin{cases}(\lambda x^r+(1-\lambda)y^r)^{\frac{1}{r}}, & r\neq 0\\ x^{\lambda}y^{1-\lambda}, & r=0\end{cases}$$

olarak tanımlanır. Burada $\lambda\in[0,1]$ dir.

Tanım 2.1.16. ($r-$Konveks Fonksiyon): f pozitif bir fonksiyon olmak üzere her $x,y\in[a,b]$ ve $\alpha\in[0,1]$ için

$$f(\alpha x+(1-\alpha)y)\leq M_r(f(x),f(y);\alpha)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna $[a,b]$ aralığında $r-$konveks fonksiyon denir (Gill *et al*. 1997).

Bu tanımdan $0-$konveks fonksiyonların $log-$konveks fonksiyonlar ve $1-$konveks fonksiyonların bilinen konveks fonksiyonlar olduğu sonucuna kolaylıkla ulaşılır.

r −konvekslik tanımı

$$f^r(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \begin{cases} \lambda f^r(x) + (1-\lambda) f^r(y), & r \neq 0 \\ [f(x)]^{\lambda}[f(y)]^{1-\lambda}, & r = 0 \end{cases}$$

biçiminde genişletilmiştir (Pearce *et al*. 1998).

Tanım 2.1.17. (Birinci Anlamda s −Konveks Fonksiyon): $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$, $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ve $0 < s \le 1$ olsun. $\alpha^s + \beta^s = 1$ olmak üzere her $u, v \in \mathbb{R}_+$ ve her $\alpha, \beta \ge 0$ için

$$f(\alpha u + \beta v) \le \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna birinci anlamda s −konveks fonksiyon denir (Orlicz 1961).

Tanım 2.1.18. (İkinci Anlamda s −Konveks Fonksiyon): $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$, $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ve $0 < s \le 1$ olsun. $\alpha, \beta \ge 0$, $\alpha + \beta = 1$ olmak üzere her $u, v \in \mathbb{R}_+$ için

$$f(\alpha u + \beta v) \le \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna ikinci anlamda s −konveks fonksiyon denir. İkinci anlamda s − konveks fonksiyonların sınıfı K_s^2 ile gösterilir (Hudzik and Maligranda 1994).

Yukarıda verilen her iki s −konvekslik tanımı $s = 1$ için bilinen konveksliğe dönüşür.

Örnek 2.1.2. $s \in (0,1)$ ve $a, b, c \in \mathbb{R}$ olsun. $f: [0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(t) = \begin{cases} a, & t = 0 \\ bt^s + c, & t > 0 \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu takdirde

(i) $b \ge 0$ ve $0 \le c \le a$ ise $f \in K_s^2$ dir.

(ii) $b > 0$ ve $c < 0$ ise $f \notin K_s^2$ dir (Hudzik and Maligranda 1994).

Tanım 2.1.19. (h −Konveks Fonksiyon): $h: J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pozitif bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in I$, $\alpha \in (0,1)$ için

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq h(\alpha)f(x) + h(1-\alpha)f(y) \tag{2.3}$$

şartını sağlayan negatif olmayan $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna $h-$konveks fonksiyon veya $SX(h, I)$ sınıfına aittir denir (Varošanec 2007).

(2.3)'nin eşitsizliğinin tersini doğrulayan $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna $h-$ konkav fonksiyon denir yani $f \in SV(h, I)$'dır (Varošanec 2007).

Bu tanımdan açıkça şu sonuçlar çıkarılabilir: $h(\alpha) = \alpha$ ise tüm negatif olmayan konveks fonksiyonlar $SX(h, I)$ sınıfına ve eşitsizliğin yön değiştirmesi durumunda tüm negatif olmayan konkav fonksiyonlar $SV(h, I)$ sınıfına aittir; $h(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$ ise $SX(h, I) = Q(I)$ sınıfına aittir; $h(\alpha) = 1$ ise $SX(h, I) \supseteq P(I)$ 'dır; $s \in (0,1)$ olmak üzere $h(\alpha) = \alpha^s$ ise $SX(h, I) \supseteq K_s^2$'dir.

Tanım 2.1.20. (Starshaped Fonksiyon): $f: [0, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x \in [0, b]$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(tx) \leq tf(x)$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna starshaped fonksiyon denir (Dragomir and Pearce 2000).

Tanım 2.1.21. ($m-$ Konveks Fonksiyon): $f: [0, b] \to \mathbb{R}$ ve $b > 0$ olsun. Her $x, y \in [0, b]$, $m \in [0,1]$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(tx + m(1-t)y) \leq tf(x) + m(1-t)f(y)$$

şartı sağlanıyorsa f fonksiyonuna $m-$konvekstir denir (Toader 1984).

$-f$ fonksiyonu $m-$konveks ise bu takdirde f fonksiyonu $m-$konkavdır. Ayrıca $f(0) \leq 0$ için $[0, b]$ aralığında tanımlı tüm $m-$konveks fonksiyonların sınıfı $K_m(b)$ ile gösterilir.

Eğer $m = 1$ alınırsa $[0, b]$ üzerinde $m-$konveks fonksiyon bilinen konveks fonksiyona dönüşür.

Örnek 3.1.5. $f:[0,r] \to \mathbb{R}$, $x \in [0,r]$ olmak üzere $f(x) = ax + b$ şeklindeki $(a, b \in \mathbb{R};\ a \neq 0)$ doğrusal fonksiyonlar $b \leq 0$ için $m-$ konveks fonksiyondur (Gürbüz 2013).

Çözüm: $[t, m] \in [0,1]^2$, $x, y \in [0, r]$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} f(tx + m(1-t)y) &= a(tx + m(1-t)y) + b \\ &= atx + am(1-t)y + b \end{aligned}$$

yazılabilir. Eşitliğin sağ tarafına $(tb + (1-t)bm)$ ifadesini ekleyip çıkarırsak,

$$\begin{aligned} f(tx + m(1-t)y) &= atx + am(1-t)y + tb - tb + (1-t)bm - (1-t)bm + b \\ &= t(ax + b) + m(1-t)(ay + b) + [b(1-t) - (1-t)bm] \\ &= tf(x) + m(1-t)f(y) + [b(1-t) - (1-t)bm] \\ &= tf(x) + m(1-t)f(y) + [b(1-t)(1-m)] \end{aligned}$$

bulunur. $[t, m] \in [0,1]^2$, $b \leq 0$ olduğundan

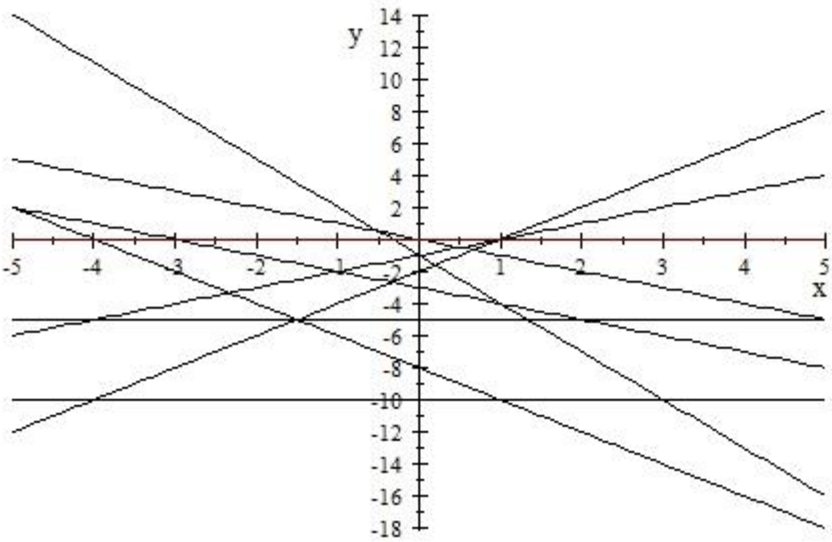
$$b(1-t)(1-m) \leq 0$$

yazılabilir. Bu veri ışığında;

$$\begin{aligned} f(tx + m(1-t)y) &= tf(x) + m(1-t)f(y) + [b(1-t)(1-m)] \\ &\leq tf(x) + m(1-t)f(y) \end{aligned}$$

elde edilir ki bu bize f fonksiyonunun $m-$konveks olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır.

Doğrusal $m-$konveks fonksiyonlar,



Şekil 2.7. m −Konveks fonksiyonlar

gibi görsel olarak örneklendirilebilir. Yani, grafiği y ekseninin pozitif kısmını kesmeyen her doğrusal fonksiyon m −konvekstir.

Tanım 2.1.22. ((α, m) − Konveks Fonksiyon): $f: [0, b] \to \mathbb{R}$ ve $b > 0$ olsun. Her $x, y \in [0, b]$, $t \in [0,1]$ ve $(\alpha, m) \in [0,1]^2$ için

$$f(tx + m(1-t)y) \leq t^\alpha f(x) + m(1 - t^\alpha) f(y)$$

şartı sağlanıyorsa f fonksiyonuna (α, m) −konveks fonksiyon denir (Miheşan 1993).

$f(0) \leq 0$ için $[0, b]$ aralığında tanımlı tüm (α, m) − konveks fonksiyonların sınıfı $K_m^\alpha(b)$ ile gösterilir. Ayrıca, $(\alpha, m) \in \{(0,0), (1,0), (1, m), (1,1)\}$ için sırasıyla artan, starshaped, m −konveks ve konveks fonksiyon sınıfları elde edilir. $f(0) \leq 0$ olmak üzere $K_1^1(b)$ sınıfında sadece $f: [0, b] \to \mathbb{R}$ tanımlı konveks fonksiyonlar yer alır, yani $K_1^1(b)$, $[0, b]$ üzerinde tanımlı tüm konveks fonksiyonlar sınıfının uygun bir alt sınıfıdır.

Teorem 2.1.6. (Hölder Eşitsizliği): $a = (a_1, \dots, a_n)$ ve $b = (b_1, \dots, b_n)$ reel veya kompleks sayıların iki n −lisi olsun. Bu taktirde

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

olmak üzere

(a) $p > 1$ ise,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

(b) $p < 0$ veya $q < 0$ ise,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \geq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizlikleri geçerlidir (Mitrinović 1970).

Teorem 2.1.7. (İntegraller için Hölder Eşitsizliği): $p > 1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olsun. f ve g, $[a,b]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen iki fonksiyon olsun. $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a,b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović *et al.* 1993).

Benzer şekilde iki katlı integraller için Hölder eşitsizliği aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\int_a^b \int_a^b |f(x)g(x)|\,dxdy \leq \left(\int_a^b \int_a^b |f(x)|^p dxdy\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b \int_a^b |g(x)|^q dx\,dy\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Teorem 2.1.8. (İntegraller için Ağırlıklı Hölder Eşitsizliği): $p > 1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olsun. f, g ve h, $[a,b]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen fonksiyonlar olsun. $|f|^p$, $|g|^q$ ve h, $[a,b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar ise

$$\left|\int_a^b f(s)g(s)h(s)\,ds\right| \leq \left(\int_a^b |f(s)|^p h(s)ds\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(s)|^q h(s)ds\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada h, $[a,b]$ aralığında negatif olmayan bir fonksiyondur (Dragomir *et al*. 2000a).

Ayrıca Hölder Eşitsizliğinin bir sonucu olan Power Mean eşitsizliği aşağıdaki gibi ifade edilir. Bu eşitsizlik kullanılarak daha iyi üst sınırlar bulunmaktadır.

Sonuç 2.1.4. (Power Mean Eşitsizliği): $q \geq 1$ olsun. f ve g, $[a,b]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen iki fonksiyon olsun. $|f|$ ve $|g|^q$, $[a,b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|dx\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)||g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Benzer şekilde iki katlı integraller için Power Mean eşitsizliği

$$\int_a^b \int_a^b |f(x)g(x)|\,dxdy \leq \left(\int_a^b \int_a^b |f(x)|dxdy\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b \int_a^b |f(x)||g(x)|^q dx\,dy\right)^{\frac{1}{q}}$$

şeklinde ifade edilir.

Reel ve kompleks sayılar için temel eşitsizliklerden bir tanesi de üçgen eşitsizliğidir.

Teorem 2.1.9. (Üçgen Eşitsizliği): Herhangi x, y reel sayıları için

$$|x+y| \leq |x| + |y|,$$

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x-y|,$$

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x+y|$$

ve tümevarım metoduyla

$$|x_1 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + \cdots + |x_n|$$

eşitsizlikleri geçerlidir (Mitrinović *et al*. 1993).

Teorem 2.1.10. (Üçgen Eşitsizliğinin İntegral Versiyonu): f, $[a,b]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \qquad (a<b)$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović *et al*. 1993).

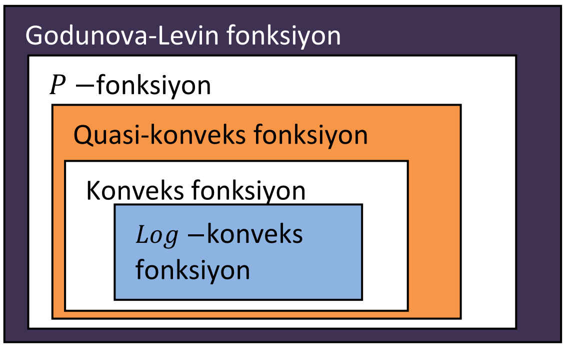
2.2. Bazı Konveks Fonksiyon Sınıflarının Hiyerarşisi

Fonksiyonlar teorisi çalışmalarında yeni sonuçlar ve genelleştirmeler elde etmek için kimi zaman fonksiyonun şartlarında bazı kısıtlamalar yapmak gerekirken kimi zaman da fonksiyona ek özellikler katmak gerekir. Çünkü fonksiyonlar aynı anda birçok özelliği sağlayabilir veya bir fonksiyon sınıfı başka bir fonksiyon sınıfıyla bazı özellikleri itibariyle benzerlik gösterebilir. Yapılan çalışmalarda farklı türden konveks fonksiyonlar için çeşitli integral eşitsizlikleri ispatlanırken, bu eşitsizliklerin belli özel durumlarda başka konveks fonksiyonlar için de geçerli olduğu görülür. Bu noktadan hareket edilirse konveks fonksiyonlar arasında özellikleri açısından bir hiyerarşi olduğu gerçeğine ulaşılır. Fakat bu hiyerarşide tüm konvekslik sınıflarını beraber değerlendirmek oldukça güç olduğu için aralarındaki ilişki, tanımları ve özellikleri yardımıyla aşağıdaki şekilde oluşturulabilir.

Teorem 2.2.1. $I \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere, Log-konveks fonksiyonlar sınıfı, Konveks fonksiyonlar sınıfı, Quasi-konveks fonksiyonlar sınıfı, $P-$ fonksiyonlar sınıfı ve Godunova-Levin fonksiyonlar sınıfı sırasıyla $L(I)$, $C(I)$, $QC(I)$, $P(I)$, $Q(I)$ ile gösterilirse;

$$L(I) \subset C(I) \subset QC(I) \subset P(I) \subset Q(I)$$

olduğu görülür (Kavurmacı 2012).



Şekil 2.8. Godunova-Levin fonksiyon, P −fonksiyon, Quasi-konveks fonksiyon, Konveks fonksiyon ve Log −konveks fonksiyon sınıflarının ilişkisi

İspat: Eğer $f: I \to (0, \infty)$ tanımlı ve $f \in L(I)$ ise $\forall x, y \in I$ ve $t \in (0,1)$ için

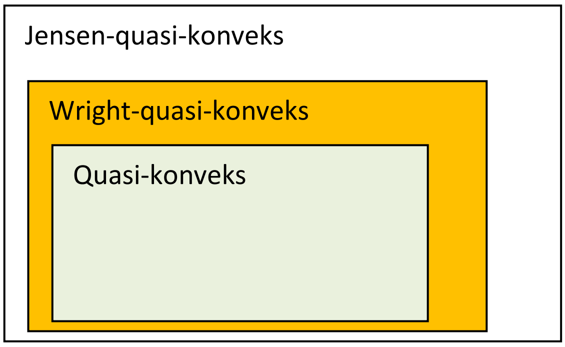
$$\begin{aligned} f(tx + (1-t)y) &\leq [f(x)]^t [f(y)]^{(1-t)} \\ &\leq tf(x) + (1-t)f(y) \\ &\leq max\{f(x), f(y)\} \\ &\leq f(x) + f(y) \\ &\leq \frac{f(x)}{t} + \frac{f(y)}{1-t} \end{aligned}$$

eşitsizlikleri yazılır ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.2.2. $I \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere, Quasi-konveks fonksiyonlar sınıfı, Wright-quasi-konveks fonksiyonlar sınıfı ve Jensen-quasi-konveks fonksiyonlar sınıfı sırasıyla $QC(I)$, $WQC(I)$, $JQC(I)$ ile gösterilirse,

$$QC(I) \subset WQC(I) \subset JQC(I)$$

olduğu görülür (Dragomir and Pearce 1998).



Şekil 2.9. Quasi-konveks fonksiyon, Wright-quasi-konveks fonksiyon ve Jensen-quasi-konveks fonksiyon sınıflarının ilişkisi

İspat: $f \in QC(I)$ olsun. Bu takdirde $\forall x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(tx + (1-t)y) \leq max\{f(x), f(y)\}$$

$$f((1-t)x + ty) \leq max\{f(x), f(y)\}$$

yazılır ve bu iki eşitsizlik taraf tarafa toplanırsa

$$\frac{1}{2}[f(tx + (1-t)y) + f((1-t)x + ty)] \leq max\{f(x), f(y)\}$$

elde edilir ve $f \in WQC(I)$ olur. Bu eşitsizlikte $t = \frac{1}{2}$ olarak alınırsa $f \in JQC(I)$ olur ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.2.3. $I \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere konveks fonksiyonlar sınıfı, Wright-konveks fonksiyonlar sınıfı ve Jensen-konveks fonksiyonlar sınıfı sırasıyla $C(I)$, $W(I)$, $J(I)$ ile gösterilirse;

$$C(I) \subset W(I) \subset J(I)$$

olduğu görülür (Wright 1954).

Şekil 2.10. Konveks fonksiyon, Wright -konveks fonksiyon ve Jensen -konveks fonksiyon sınıflarının ilişkisi

İspat: $f \in C(I)$ olsun. Bu takdirde $\forall x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$$

yazılır ve bu iki eşitsizlik taraf tarafa toplanırsa

$$f(tx + (1-t)y) + f((1-t)x + ty) \leq f(x) + f(y)$$

elde edilir ve $f \in W(I)$ olur. Bu eşitsizlikte $t = \frac{1}{2}$ olarak alınırsa $f \in J(I)$ olur ve ispat tamamlanmış olur.

Lemma 2.2.1. Eğer f fonksiyonu $m-$ konveks fonksiyonlar sınıfına ait ise f fonksiyonu starshaped fonksiyondur (Toader 1988).

İspat: Keyfi $x \in [0, b]$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(tx) = f(tx + m(1-t)0) \leq tf(x) + m(1-t)f(0) \leq tf(x)$$

yazılır. İlk ve son ifade birlikte düşünüldüğünde starshaped fonksiyonun kuralı elde edildiğinden ispat tamamlanmış olur.

Lemma 2.2.2. Eğer f fonksiyonu $m-$konveks fonksiyon ve $0 \leq n < m \leq 1$ ise f fonksiyonu n $-$konveks fonksiyondur (Toader 1988).

İspat: Eğer $x, y \in [0, b]$ ve $t \in [0,1]$ ise bu takdirde

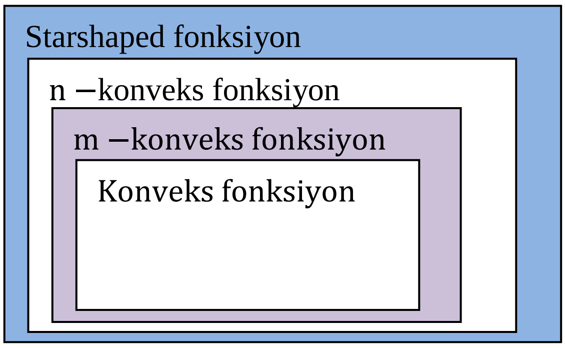
$$\begin{aligned} f(tx + n(1-t)y) &= f\left(tx + m(1-t)\left(\frac{n}{m}\right)y\right) \\ &\leq tf(x) + m(1-t)f\left(\left(\frac{n}{m}\right)y\right) \\ &\leq tf(x) + m(1-t)\frac{n}{m}f(y) \\ &= tf(x) + n(1-t)f(y) \end{aligned}$$

olur ve ispat tamamlanmış olur.

Yukarıdaki lemmalar yardımıyla; $0 \leq n < m \leq 1$ olmak üzere, konveks fonksiyonlar sınıfı, m −konveks fonksiyonlar sınıfı, n −konveks fonksiyonlar sınıfı ve starshaped fonksiyonlar sınıfı sırasıyla $K(b)$, $K_m(b)$, $K_n(b)$, $S^*(b)$ ile gösterilirse;

$$K(b) \subset K_m(b) \subset K_n(b) \subset S^*(b)$$

olduğu görülür.



Şekil 2.11. Konveks fonksiyon, m −konveks fonksiyon, n −konveks fonksiyon ve Starshaped fonksiyon sınıflarının ilişkisi

h −konveks fonksiyon tanımından açıkça görülebilir ki eğer $h(t) = t$ seçilirse negatif olmayan konveks fonksiyonlar veya eşitsizliğin yön değiştirmesi durumunda negatif olmayan konkav fonksiyonlar; $h(t) = \frac{1}{t}$ seçilirse $Q(I)$ sınıfına ait fonksiyonlar; $h(t) = 1$ seçilirse $P(I)$ sınıfına ait fonksiyonlar ve eğer $h(t) = t^s$ seçilirse, $s \in (0,1)$

olmak üzere, K_s^2 sınıfına ait fonksiyonlar elde edilir. Bu bilgiler ışığında $h(t)$ fonksiyonunun bazı özel değerleri için;

$$C(I) \subset SX(h, I), \qquad P(I) \subset SX(h, I), \qquad K_s^2 \subset SX(h, I)$$

yazılabilir. Burada h fonksiyonu negatif olmayan fonksiyon olduğu için negatif olmayan konveks fonksiyonlar $SX(h, I)$ sınıfının alt kümesidir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde, araştırmanın temel kısmında kullanılacak olan bazı teoremler verilecektir.

3.1. Hermite-Hadamard Tipli Temel Eşitsizlikler

Teorem 3.1.1. (Hermite-Hadamard Eşitsizliği): I, ℝ de bir aralık, $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği literatürde konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinir (Pečarić *et al.* 1992).

Aşağıda konveks fonksiyonlar için elde edilmiş ve literatürde mevcut olan Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler verilmiştir.

Teorem 3.1.2. $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I° üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $a, b \in I^\circ$, $a < b$ olsun. Eğer $|f'|$, $[a, b]$ üzerinde konveks ise bu durumda

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \leq \frac{b-a}{4}\left[\frac{|f'(a)|+|f'(b)|}{2}\right] \tag{3.1}$$

eşitsizliği elde edilir (Kırmacı 2004).

Teorem 3.1.3. $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I° üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $a, b \in I^\circ$, $a < b$ olsun. Eğer $|f'|^{p/(p-1)}$, $[a, b]$ üzerinde konveks ve $p > 1$ ise bu durumda

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\le \frac{b-a}{16}\left(\frac{4}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left\{\left(|f'(a)|^{p/(p-1)} + 3|f'(b)|^{p/(p-1)}\right)^{\frac{p-1}{p}} + \left(3|f'(a)|^{p/(p-1)} + |f'(b)|^{p/(p-1)}\right)^{\frac{p-1}{p}}\right\} \tag{3.2}$$

eşitsizliği elde edilir (Kırmacı 2004).

Teorem 3.1.4. $f: I \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}$, diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $a, b \in I$, $a < b$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $[a,b]$ üzerinde konveks ve $q \ge 1$ ise aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \le \frac{b-a}{8}\left\{\left(\frac{|f'(a)|^q + 2|f'(b)|^q}{3}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{2|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{3}\right)^{\frac{1}{q}}\right\} \tag{3.3}$$

(Sarıkaya *et al.* 2013).

Teorem 3.1.5. $f: I \to \mathbb{R}$, I° üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $a, b \in I^\circ$, $a < b$ olsun. Eğer $|f''|$, $[a,b]$ üzerinde konveks ise

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \le \frac{(b-a)^2}{24}\left\{\frac{|f''(a)| + |f''(b)|}{2}\right\} \tag{3.4}$$

elde edilir (Sarıkaya and Aktan 2011).

Teorem 3.1.6. $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $a, b \in I$, $a < b$ olsun. Eğer $|f''|^q$, $[a,b]$ üzerinde konveks ve $q \ge 1$ ise aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \tag{3.5}$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{48}\left\{\left(\frac{3|f''(a)|^q + 5|f''(b)|^q}{8}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{5|f''(a)|^q + 3|f''(b)|^q}{8}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

(Sarıkaya and Aktan 2011).

Teorem 3.1.7. $f: I \to \mathbb{R}$, I° üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $a, b \in I^\circ$, $a < b$ olsun. Eğer $|f''|$, $[a, b]$ üzerinde konveks ise

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \frac{(b-a)^2}{12}\left\{\frac{|f''(a)| + |f''(b)|}{2}\right\} \tag{3.6}$$

eşitsizliği elde edilir (Sarıkaya and Aktan 2011).

Teorem 3.1.8. $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I° üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $a, b \in I$, $a < b$ olsun. Eğer $|f'|$, $[a, b]$ üzerinde konveks ise aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\left|\frac{(x-a)f(a) + (b-x)f(b)}{(b-a)} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \tag{3.7}$$

$$\leq \frac{(x-a)^2}{(b-a)}\left[\frac{2|f'(a)| + |f'(x)|}{6}\right] + \frac{(b-x)^2}{(b-a)}\left[\frac{|f'(x)| + 2|f'(b)|}{6}\right].$$

Burada $x \in [a, b]$ dir (Kavurmacı *et al.* 2011).

Sonuç 3.1.1. (2.3.5) eşitsizliğinde $x = \frac{a+b}{2}$ seçilip, konvekslik uygulanırsa

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \tag{3.8}$$

$$\leq \frac{b-a}{12}\left(|f'(a)| + \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| + |f'(b)|\right)$$

$$\leq \frac{b-a}{8}(|f'(a)|+|f'(b)|)$$

elde edilir (Kavurmacı *et al.* 2011).

Teorem 3.1.9. $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I° üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $a, b \in I$, $a < b$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $[a,b]$ üzerinde konveks ise aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\left|\frac{(x-a)f(a)+(b-x)f(b)}{(b-a)} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|$$
$$\leq \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left\{\frac{(x-a)^2}{(b-a)}\left[\frac{|f'(a)|^q+|f'(x)|^q}{2}\right]^{\frac{1}{q}} + \frac{(b-x)^2}{(b-a)}\left[\frac{|f'(x)|^q+|f'(b)|^q}{2}\right]^{\frac{1}{q}}\right\}. \tag{3.9}$$

Burada $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ve $x \in [a,b]$ dir (Kavurmacı *et al.* 2011).

Teorem 3.1.10. $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I° üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $a, b \in I$, $a < b$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında konveks ve $q \geq 1$ ise

$$\left|\frac{(x-a)f(a)+(b-x)f(b)}{(b-a)} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|$$
$$\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{q}} \left\{\frac{(x-a)^2}{(b-a)}\left[|f'(x)|^q+2|f'(a)|^q\right]^{\frac{1}{q}} + \frac{(b-x)^2}{(b-a)}\left[|f'(x)|^q+2|f'(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right\} \tag{3.10}$$

eşitsizliği elde edilir (Kavurmacı *et al.* 2011).

Teorem 3.1.11. $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I° üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $a, b \in I$, $a < b$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında konkav ve $q > 1$ ise

$$\left|\frac{(x-a)f(a)+(b-x)f(b)}{(b-a)}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|$$

$$\leq \left(\frac{q-1}{2q-1}\right)^{\frac{q-1}{q}}\left[\frac{(x-a)^2\left|f'\left(\frac{a+x}{2}\right)\right|+(b-x)^2\left|f'\left(\frac{b+x}{2}\right)\right|}{(b-a)}\right] \tag{3.11}$$

eşitsizliği elde edilir (Kavurmacı *et al.* 2011).

Teorem 3.1.12. $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I° üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $a, b \in I$, $a < b$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $[a, b]$ aralığında konkav ve $q \geq 1$ ise

$$\left|\frac{(x-a)f(a)+(b-x)f(b)}{(b-a)}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|$$

$$\leq \frac{1}{2}\left[\frac{(x-a)^2\left|f'\left(\frac{x+2a}{3}\right)\right|+(b-x)^2\left|f'\left(\frac{x+2b}{3}\right)\right|}{(b-a)}\right] \tag{3.12}$$

eşitsizliği elde edilir (Kavurmacı *et al.* 2011).

Literatürde Hermite-Hadamard eşitsizliği ile ilgili birçok çalışma bulunmaktadır. Bu eşitsizlikle ilgili genelleştirmeler ve yeni sonuçlar Dragomir and Toader (1993); Dragomir and Agarwal (1998); Cerone *et al.* (2000); Pearce and Pečarić (2000); Özdemir (2003); Hwang (2003); Kırmacı and Özdemir (2004); Pachpatte (2004a); Yang *et al.* (2004); Kırmacı (2008); Bombardelli and Varošanec (2009); Ngoc *et al.* (2009); Özdemir *et al.* (2010); Sarıkaya *et al.* (2010); Set (2010); Set *et al.* (2010); Alomari (2011); Yıldız (2011), Bai *et al.* (2012); Jiang *et al.* (2012); Özdemir *et al.* (2013) ve Özdemir *et al.* (2014) çalışmalarında bulunabilir.

3.2. Fejér Tipli Temel Eşitsizlikler

Teorem 3.2.1. (Fejér Eşitsizliği): $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon, $g: [a, b] \to \mathbb{R}$ integrallenebilir, negatif olmayan ve $\frac{a+b}{2}$ ye göre simetrik bir fonksiyon ise,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b g(x)dx$$

eşitsizliği geçerlidir (Fejér 1906).

Eğer $g = 1$ seçilirse Fejér eşitsizliği Hermite-Hadamard eşitsizliğine indirgenmiş olur.

Lemma 3.2.1. $f: I^\circ \to \mathbb{R}$, I° üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $a, b \in I^\circ$, $a < b$ ve $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $f', g \in L[a,b]$ ise her $x \in [a,b]$ için

$$f(a)\int_a^x g(s)ds + f(b)\int_x^b g(s)ds - \int_a^b f(s)g(s)ds = \int_a^b \left[\int_x^t g(s)ds\right] f'(t)dt$$

eşitliği elde edilir (Tseng *et al.* 2011).

Lemma 3.2.1 kullanılarak konveks fonksiyonlar için Fejér tipli aşağıdaki teoremler elde edilmiştir.

Teorem 3.2.2. $a, b \in I^\circ$ ve $a < b$ olmak üzere $f: I^\circ \to \mathbb{R}$, I°de diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $g: [a,b] \to \mathbb{R}$, $[a,b]$ üzerinde sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $f', g \in L[a,b]$ ve $|f'|$, $[a,b]$ aralığında konveks ise

$$\left|f(a)\int_a^x g(s)ds + f(b)\int_x^b g(s)ds - \int_a^b f(s)g(s)ds\right|$$

$$\leq \frac{(x-a)^2(3b-2a-x)\|g\|_{[a,x],\infty} + (b-x)^3\|g\|_{[x,b],\infty}}{6(b-a)}|f'(a)|$$

$$+\frac{(x-a)^3\|g\|_{[a,x],\infty} + (b-x)^2(2b-3a+x)\|g\|_{[x,b],\infty}}{6(b-a)}|f'(b)|$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $x \in [a,b]$ dir (Tseng *et al.* 2011).

Teorem 3.2.3. $a, b \in I^\circ$ ve $a < b$ olmak üzere $f: I^\circ \to \mathbb{R}$, I°de diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $g: [a,b] \to \mathbb{R}$, $[a,b]$ üzerinde sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $f', g \in L[a,b]$ ve $|f'|^{p/(p-1)}$, $[a,b]$ aralığında konveks ise

$$\left|f(a)\int_a^x g(s)ds+f(b)\int_x^b g(s)ds-\int_a^b f(s)g(s)ds\right|$$

$$\leq \|g\|_{[a,b],\infty}\left[\frac{(x-a)^{p+1}+(b-x)^{p+1}}{(p+1)}\right]^{\frac{1}{p}}\left[\left(\frac{|f'(a)|^{\frac{p}{p-1}}+|f'(b)|^{\frac{p}{p-1}}}{2}\right)(b-a)\right]^{\frac{p-1}{p}}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ dir (Tseng *et al.* 2011).

Lemma 3.2.2. $f\colon I^{\circ}\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, I° üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $a,b\in I^{\circ}$, $a<b$ ve $w\colon[a,b]\to[0,\infty)$ diferansiyellenebilen fonksiyon olsun. $f'\in L[a,b]$ ise

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)w(x)dx-\frac{1}{b-a}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b w(x)dx$$

$$=(b-a)\int_0^1 k(t)f'(ta+(1-t)b)dt$$

eşitliği elde edilir. Burada $t\in[0,1]$ ve

$$k(t)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^t w(as+(1-s)b)ds, & t\in\left[0,\frac{1}{2}\right)\\ \displaystyle-\int_t^1 w(as+(1-s)b)ds, & t\in\left[\frac{1}{2},1\right]\end{cases}$$

dır (Sarıkaya 2012a).

Lemma 3.2.2 kullanılarak aşağıdaki eşitsizlikler elde edilmiştir.

Teorem 3.2.4. $a,b\in I^{\circ}$ ve $a<b$ olmak üzere $f\colon I^{\circ}\to\mathbb{R}$, I°de diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $w\colon[a,b]\to[0,\infty)$, diferansiyellenebilen ve $\frac{a+b}{2}$ göre simetrik fonksiyon olsun. Eğer $|f'|$, $[a,b]$ aralığında konveks ise

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)w(x)dx - \frac{1}{b-a}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b w(x)dx\right|$$

$$\leq \left(\frac{1}{(b-a)^2}\int_{\frac{a+b}{2}}^b w(x)[(x-a)^2-(b-x)^2]dx\right)\left(\frac{|f'(a)|+|f'(b)|}{2}\right)$$

eşitsizliği elde edilir (Sarıkaya 2012a).

Teorem 3.2.5. $a,b \in I^\circ$ ve $a<b$ olmak üzere $f: I^\circ \to \mathbb{R}$, I°de diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $w:[a,b] \to [0,\infty)$, diferansiyellenebilen ve $\frac{a+b}{2}$ ye göre simetrik fonksiyon olsun. Eğer $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında konveks ve $q>1$ ise

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)w(x)dx - \frac{1}{b-a}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b w(x)dx\right|$$

$$\leq (b-a)\left(\frac{1}{(b-a)^2}\int_{\frac{a+b}{2}}^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)w^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times\left[\left(\frac{|f'(a)|^q+2|f'(b)|^q}{24}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{2|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{24}\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

eşitsizliği elde edilir (Sarıkaya 2012a).

Fejér eşitsizliği ile ilgili literatürde birçok çalışma bulunmaktadır. Bu eşitsizlikle ilgili genelleştirmeler ve yeni sonuçlar Tseng *et al.* (2007); Alomari and Darus (2009); Hwang *et al.* (2009); Tseng *et al.* (2010); Tseng *et al.* (2011); Sarıkaya (2012a) ve Minculete and Mitroi (2012) çalışmalarında bulunabilir.

3.3. Ostrowski Tipli Temel Eşitsizlikler

Teorem 3.3.1. (Ostrowski Eşitsizliği): $a,b \in I, a<b$ ve $f' \in L[a,b]$ olacak şekilde $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tanımlı, I° nde diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $|f'(x)| \leq M$ ise $\forall x \in [a,b]$ için

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \right| \leq \frac{M}{b-a}\left[\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{2}\right]$$

$$= M(b-a)\left[\frac{1}{4}+\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2}\right]$$

eşitsizliği elde edilir. Buradaki $\frac{1}{4}$ katsayısı bu şartlar altındaki en iyi katsayıdır. Daha küçük olan bir katsayı ile yer değiştiremez (Ostrowski 1938).

Teorem 3.3.2. $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ tanımlı ve $|f(t)-f(s)| \leq M.|t-s|$ şartını sağlayan yani Lipschitz şartını sağlayan bir fonksiyon olsun. $\forall x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ için

$$\left| \frac{f(x)+f(a+b-x)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \right| \leq M(b-a)\left[\frac{1}{8}+2\left(\frac{x-\frac{3a+b}{4}}{b-a}\right)^2\right]$$

dir. Buradaki $\frac{1}{8}$ katsayısı bu şartlar altındaki en iyi katsayıdır ve daha küçük olan bir katsayı ile yer değiştiremez (Guessab and Schmeisser 2002).

Lemma 3.3.1. $a,b \in I, a < b$ olacak şekilde $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tanımlı mutlak sürekli bir fonksiyon ve $f' \in L[a,b]$ olsun. Bu durumda

$$p(x,t) = \begin{cases} t-a, & t \in [a,x] \\ t-\frac{a+b}{2}, & t \in (x, a+b-x] \\ t-b, & t \in (a+b-x, b] \end{cases}$$

parçalı fonksiyonu kullanılarak her $x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ için

$$\frac{f(x)+f(a+b-x)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b p(x,t)f'(t)dt$$

eşitliği elde edilir (Dragomir 2005).

Literatürde Ostrowski eşitsizliği ile ilgili birçok çalışma bulunmaktadır. Bu eşitsizlikle ilgili genelleştirmeler ve yeni sonuçlar Dragomir (1997); Dragomir and Wang (1997); Cerone *et al.* (1999b); Dragomir *et al.* (2000b); Barnett and Dragomir (2001); Barnett *et al.* (2003); Ujević (2004); Pachpatte (2004b); Barnett and Dragomir (2006); Pachpatte (2007); Liu (2009); Alomari *et al.* (2010); Alomari (2011); Sarıkaya (2012b); Anastassiou (2013) ve Dragomir (2014) çalışmalarında bulunabilir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde Fejér tipli yeni lemmalar ve teoremler verilmiştir. g fonksiyonunun özel değerleri için literatürle uyumlu sonuçlar elde edilmiştir.

4.1. Konveks Fonksiyonlar İçin Elde Edilen Fejér Tipli Eşitsizlikler:

Lemma 4.1.1. $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I° üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $a, b \in I^{\circ}$, $a < b$ ve $g: [a,b] \to [0,\infty)$ bir fonksiyon olsun. Eğer $f', g \in L[a,b]$ ise

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b g(t)dt - \int_a^b f(t)g(t)dt = \int_a^b p(t)f'(t)dt$$

eşitliği elde edilir. Burada $t \in [a,b]$ ve

$$p(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_a^t g(s)ds, & t \in \left[a, \dfrac{a+b}{2}\right) \\ \displaystyle -\int_t^b g(s)ds, & t \in \left[\dfrac{a+b}{2}, b\right] \end{cases}$$

dır.

İspat: Bu lemmayı ispatlamak için ilk önce

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b p(t)f'(t)dt \\ &= \int_a^{\frac{a+b}{2}}\left(\int_a^t g(s)ds\right)f'(t)dt + \int_{\frac{a+b}{2}}^b\left(-\int_t^b g(s)ds\right)f'(t)dt \end{aligned}$$

olsun. Kısmi integrasyon metodu kullanarak

$$I = \left(\int_a^t g(s)ds\right)f(t)\Big|_a^{\frac{a+b}{2}} - \int_a^{\frac{a+b}{2}} g(t)f(t)dt$$

$$+\left(-\int_t^b g(s)ds\right)f(t)\Big|_{\frac{a+b}{2}}^b - \int_{\frac{a+b}{2}}^b g(t)f(t)dt$$

$$=\left(\int_a^{\frac{a+b}{2}} g(s)ds\right) f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \int_a^{\frac{a+b}{2}} g(t)f(t)dt$$

$$+\left(\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} g(s)ds\right) f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} g(t)f(t)dt$$

$$= f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b g(t)dt - \int_a^b g(t)f(t)dt$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

Teorem 4.1.1. $a, b \in I^\circ$ ve $a < b$ olmak üzere $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I° de diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $g: [a, b] \to [0, \infty)$ olsun. Eğer $f', g \in L[a, b]$ ve $|f'|$, $[a, b]$ aralığında konveks ise

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b g(t)dt - \int_a^b f(t)g(t)dt\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{24}\left\{\|g\|_{\left[a,\frac{a+b}{2}\right],\infty}(2|f'(a)| + |f'(b)|) + \|g\|_{\left[\frac{a+b}{2},b\right],\infty}(|f'(a)| + 2|f'(b)|)\right\} \tag{4.1.1}$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{4}\|g\|_{[a,b],\infty}\left(\frac{|f'(a)| + |f'(b)|}{2}\right)$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat: Lemma 4.1.1'den ve integraller için mutlak değer özelliğinden

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b g(t)dt - \int_a^b f(t)g(t)dt\right|$$

$$\leq \int_a^{\frac{a+b}{2}}\left|\int_a^t g(s)ds\right||f'(t)|dt + \int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\left|\int_t^b g(s)ds\right||f'(t)|dt$$

$$\leq \|g\|_{\left[a,\frac{a+b}{2}\right],\infty}\int_a^{\frac{a+b}{2}}(t-a)|f'(t)|dt+\|g\|_{\left[\frac{a+b}{2},b\right],\infty}\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}(b-t)|f'(t)|dt$$

$$=\|g\|_{\left[a,\frac{a+b}{2}\right],\infty}\int_a^{\frac{a+b}{2}}(t-a)\left|f'\left(\frac{b-t}{b-a}a+\frac{t-a}{b-a}b\right)\right|dt$$

$$+\|g\|_{\left[\frac{a+b}{2},b\right],\infty}\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}(b-t)\left|f'\left(\frac{b-t}{b-a}a+\frac{t-a}{b-a}b\right)\right|dt$$

yazılır. $|f'|$ konveks olduğundan

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b g(t)dt-\int_a^b f(t)g(t)dt\right|$$

$$\leq \|g\|_{\left[a,\frac{a+b}{2}\right],\infty}\int_a^{\frac{a+b}{2}}(t-a)\left[\left(\frac{b-t}{b-a}\right)|f'(a)|+\left(\frac{t-a}{b-a}\right)|f'(b)|\right]dt \tag{4.1.2}$$

$$+\|g\|_{\left[\frac{a+b}{2},b\right],\infty}\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}(b-t)\left[\left(\frac{b-t}{b-a}\right)|f'(a)|+\left(\frac{t-a}{b-a}\right)|f'(b)|\right]dt$$

olur. Burada

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}}(t-a)\left(\frac{b-t}{b-a}\right)dt=\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}(b-t)\left(\frac{t-a}{b-a}\right)dt=\frac{(b-a)^2}{12}$$

ve

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}}(t-a)\left(\frac{t-a}{b-a}\right)dt=\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}(b-t)\left(\frac{b-t}{b-a}\right)dt=\frac{(b-a)^2}{24}$$

olur. Ayrıca

$$\|g\|_{\left[a,\frac{a+b}{2}\right],\infty}\leq\|g\|_{[a,b],\infty}$$

ve

$$\|g\|_{\left[\frac{a+b}{2},b\right],\infty}\leq\|g\|_{[a,b],\infty}$$

elde edilir. Bu sonuçlar (4.1.2) eşitsizliğinde yerine yazılırsa teorem ispatlanmış olur. ■

Sonuç 4.1.1. (4.1.1) eşitsizliğinde $g:[a,b]\to[0,\infty)$ fonksiyonu $\frac{a+b}{2}$ ye göre simetrik alınırsa

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b g(t)dt-\int_a^b f(t)g(t)dt\right|\le\frac{(b-a)^2}{8}\|g\|_{[a,b],\infty}\left(\frac{|f'(a)|+|f'(b)|}{2}\right)$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.1.2. $a,b\in I^\circ$ ve $a<b$ olmak üzere $f:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, I° de diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $g:[a,b]\to[0,\infty)$ olsun. Eğer $f',g\in L[a,b]$ ve $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında konveks ise

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b g(t)dt-\int_a^b f(t)g(t)dt\right|$$

$$\le\frac{(b-a)^2}{4(p+1)^{1/p}}\left\{\|g\|_{\left[a,\frac{a+b}{2}\right],\infty}\left(\frac{3|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right. \tag{4.1.3}$$

$$\left.+\|g\|_{\left[\frac{a+b}{2},b\right],\infty}\left(\frac{|f'(a)|^q+3|f'(b)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ dır.

İspat: Lemma 4.1.1'den ve integraller için Hölder eşitsizliğinden

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b g(t)dt-\int_a^b f(t)g(t)dt\right|$$

$$\le\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left|\int_a^t g(s)ds\right||f'(t)|dt+\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left|\int_t^b g(s)ds\right||f'(t)|dt$$

$$\leq \left(\int_a^{\frac{a+b}{2}} \left|\int_a^t g(s)ds\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^{\frac{a+b}{2}} |f'(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\int_{\frac{a+b}{2}}^b \left|\int_t^b g(s)ds\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\frac{a+b}{2}}^b |f'(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \|g\|_{\left[a,\frac{a+b}{2}\right],\infty} \left(\int_a^{\frac{a+b}{2}} |t-a|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^{\frac{a+b}{2}} |f'(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\|g\|_{\left[\frac{a+b}{2},b\right],\infty} \left(\int_{\frac{a+b}{2}}^b |b-t|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\frac{a+b}{2}}^b |f'(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \|g\|_{\left[a,\frac{a+b}{2}\right],\infty} \left(\int_a^{\frac{a+b}{2}} |t-a|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^{\frac{a+b}{2}} \left|f'\left(\frac{b-t}{b-a}a+\frac{t-a}{b-a}b\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\|g\|_{\left[\frac{a+b}{2},b\right],\infty} \left(\int_{\frac{a+b}{2}}^b |b-t|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\frac{a+b}{2}}^b \left|f'\left(\frac{b-t}{b-a}a+\frac{t-a}{b-a}b\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

yazılır. $|f'|^q$ nun konveksliği kullanılarak, gerekli işlemler yapılırsa

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b g(t)dt - \int_a^b f(t)g(t)dt\right|$$

$$\leq \|g\|_{\left[a,\frac{a+b}{2}\right],\infty} \left[\frac{(b-a)^{p+1}}{(p+1)2^{p+1}}\right]^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^{\frac{a+b}{2}} \left[\left(\frac{b-t}{b-a}\right)|f'(a)|^q + \left(\frac{t-a}{b-a}\right)|f'(b)|^q\right] dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\|g\|_{\left[\frac{a+b}{2},b\right],\infty} \left[\frac{(b-a)^{p+1}}{(p+1)2^{p+1}}\right]^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\frac{a+b}{2}}^b \left[\left(\frac{b-t}{b-a}\right)|f'(a)|^q + \left(\frac{t-a}{b-a}\right)|f'(b)|^q\right] dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \frac{(b-a)^2}{4(p+1)^{1/p}}\left\{\|g\|_{\left[a,\frac{a+b}{2}\right],\infty}\left(\frac{3|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\|g\|_{\left[\frac{a+b}{2},b\right],\infty}\left(\frac{|f'(a)|^q+3|f'(b)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

eşitsizliği elde edilmiş olur. ■

Sonuç 4.1.2. Teorem 4.1.2 de $g:[a,b]\to[0,\infty)$ fonksiyonu $\frac{a+b}{2}$ ye göre simetrik alınırsa

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b g(t)dt-\int_a^b f(t)g(t)dt\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{8(p+1)^{1/p}}\|g\|_{[a,b],\infty}\left\{\left(\frac{3|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{|f'(a)|^q+3|f'(b)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

elde edilir.

Lemma 4.1.2. $f:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, I° üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $a,b\in I^\circ$, $a<b$ ve $g:[a,b]\to[0,\infty)$ bir fonksiyon olsun. Eğer $f',g\in L[a,b]$ ise

$$\int_a^b f(u)g(u)du-f(x)\int_a^b g(u)du=(b-a)^2\int_0^1 k(t)f'(ta+(1-t)b)dt \qquad (4.1.4)$$

eşitliği elde edilir. Burada $t\in[0,1]$, $x,u\in[a,b]$ ve

$$k(t)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^t g(sa+(1-s)b)ds, & t\in\left[0,\dfrac{b-x}{b-a}\right)\\ \displaystyle-\int_t^1 g(sa+(1-s)b)ds, & t\in\left[\dfrac{b-x}{b-a},1\right]\end{cases}$$

dır.

İspat: Bu Lemma'yı ispatlamak için ilk önce

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 k(t)f'(ta+(1-t)b)dt \\ &= \int_0^{\frac{b-x}{b-a}} \left(\int_0^t g(sa+(1-s)b)ds\right) f'(ta+(1-t)b)dt \\ &\quad + \int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 \left(-\int_t^1 g(sa+(1-s)b)ds\right) f'(ta+(1-t)b)dt \\ &= J_1 + J_2 \end{aligned}$$

olsun. Kısmi integrasyon metodu kullanarak

$$\begin{aligned} J_1 &= \left(\int_0^t g(sa+(1-s)b)ds\right) \frac{f(ta+(1-t)b)}{a-b}\Bigg|_0^{\frac{b-x}{b-a}} \\ &\quad - \int_0^{\frac{b-x}{b-a}} g(ta+(1-t)b)\frac{f(ta+(1-t)b)}{a-b}dt \\ &= \frac{f(x)}{a-b}\left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} g(sa+(1-s)b)ds\right) \\ &\quad - \int_0^{\frac{b-x}{b-a}} g(ta+(1-t)b)\frac{f(ta+(1-t)b)}{a-b}dt \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer olarak

$$J_2 = \frac{f(x)}{a-b}\left(\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 g(sa+(1-s)b)ds\right) - \int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 g(ta+(1-t)b)\frac{f(ta+(1-t)b)}{a-b}dt$$

yazılır. Buradan

$$\begin{aligned} J &= J_1 + J_2 \\ &= \frac{f(x)}{a-b}\int_0^1 g(sa+(1-s)b)ds - \int_0^1 g(ta+(1-t)b)\frac{f(ta+(1-t)b)}{a-b}dt \end{aligned}$$

$u = ta+(1-t)b$ değişken değiştirmesi yapılıp, eşitliğin her iki tarafı $(b-a)^2$ ile çarpılırsa (4.1.4) eşitliği elde edilir. ■

Sonuç 4.1.3. Lemma 4.1.2 de $x=\frac{a+b}{2}$ olarak alınırsa Lemma 3.2.2 elde edilmiş olur.

Teorem 4.1.3. $a,b\in I^{\circ}$, $a<b$ ve $x\in[a,b]$ olmak üzere $f\colon I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, I° de diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $g\colon[a,b]\to[0,\infty)$ olsun. Eğer $f',g\in L[a,b]$ ve $|f'|$, $[a,b]$ aralığında konveks ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left|f(x)\int_a^b g(u)du-\int_a^b f(u)g(u)du\right|$$

$$\leq\frac{1}{3(b-a)}\left\{\|g\|_{\left[0,\frac{b-x}{b-a}\right],\infty}\left[(b-x)^3|f'(a)|+\frac{(b-x)^2(b-3a+2x)}{2}|f'(b)|\right]\right.$$

$$\left.+\|g\|_{\left[\frac{b-x}{b-a},1\right],\infty}\left[\frac{(x-a)^2(3b-a+2x)}{2}|f'(a)|+(x-a)^3|f'(b)|\right]\right\}.$$

İspat: Lemma 4.1.2'den ve integraller için mutlak değer özelliğinden

$$\left|f(x)\int_a^b g(u)du-\int_a^b f(u)g(u)du\right|$$

$$\leq(b-a)^2\left\{\int_0^{\frac{b-x}{b-a}}\left|\int_0^t g(sa+(1-s)b)ds\right||f'(ta+(1-t)b)|dt\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1\left|\int_t^1 g(sa+(1-s)b)ds\right||f'(ta+(1-t)b)|dt\right\}$$

$$\leq(b-a)^2\left\{\|g\|_{\left[0,\frac{b-x}{b-a}\right],\infty}\int_0^{\frac{b-x}{b-a}}|t||f'(ta+(1-t)b)|dt\right.$$

$$\left.+\|g\|_{\left[\frac{b-x}{b-a},1\right],\infty}\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1|1-t||f'(ta+(1-t)b)|dt\right\}$$

eşitsizliği elde edilir. $|f'|$ konveks olduğundan

$$\left|f(x)\int_a^b g(u)du-\int_a^b f(u)g(u)du\right|$$

$$\leq (b-a)^2\left\{\|g\|_{\left[0,\frac{b-x}{b-a}\right],\infty}\int_0^{\frac{b-x}{b-a}} t[t|f'(a)|+(1-t)|f'(b)|]dt\right.$$

$$\left.+\|g\|_{\left[\frac{b-x}{b-a},1\right],\infty}\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1 (1-t)[t|f'(a)|+(1-t)|f'(b)|]dt\right\}$$

$$\leq \frac{1}{3(b-a)}\left\{\|g\|_{\left[0,\frac{b-x}{b-a}\right],\infty}\left[(b-x)^3|f'(a)|+\frac{(b-x)^2(b-3a+2x)}{2}|f'(b)|\right]\right.$$

$$\left.+\|g\|_{\left[\frac{b-x}{b-a},1\right],\infty}\left[\frac{(x-a)^2(3b-a+2x)}{2}|f'(a)|+(x-a)^3|f'(b)|\right]\right\}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Sonuç 4.1.4. Teorem 4.1.3 de $x=\frac{a+b}{2}$ seçilirse

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b g(u)du-\int_a^b f(u)g(u)du\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{8}\left\{\|g\|_{\left[0,\frac{1}{2}\right],\infty}\left(\frac{2|f'(a)|+|f'(b)|}{3}\right)+\|g\|_{\left[\frac{1}{2},1\right],\infty}\left(\frac{|f'(a)|+2|f'(b)|}{3}\right)\right\}$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{4}\|g\|_{[0,1],\infty}\left(\frac{|f'(a)|+|f'(b)|}{2}\right)$$

Fejér tipli eşitsizlik elde edilir.

Sonuç 4.1.5. Sonuç 4.1.4'de $g(u)=1$ alınırsa, (3.1) eşitsizliği elde edilmiş olur.

Teorem 4.1.4. $a,b\in I^\circ$, $a<b$ ve $x\in[a,b]$ olmak üzere $f: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, I° de diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $g:[a,b]\to[0,\infty)$ olsun. Eğer $f',g\in L[a,b]$, $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında konveks ve $q>1$ ise

$$\left|f(x)\int_a^b g(u)du-\int_a^b f(u)g(u)du\right|$$

$$\leq \frac{1}{(b-a)^{\frac{1}{q}}(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left\{\|g\|_{\left[0,\frac{b-x}{b-a}\right],\infty}\left[\frac{(b-x)^3|f'(a)|^q+(b-x)^2(b-2a+x)|f'(b)|^q}{2}\right]^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\|g\|_{\left[\frac{b-x}{b-a},1\right],\infty}\left[\frac{(x-a)^2(2b-a-x)|f'(a)|^q+(x-a)^3|f'(b)|^q}{2}\right]^{\frac{1}{q}}\right\}$$

eşitsiliği elde edilir.

İspat: Lemma 4.1.2'den ve integraller için Hölder eşitsizliğinden

$$\left|f(x)\int_a^b g(u)du-\int_a^b f(u)g(u)du\right|$$

$$\leq (b-a)^2\left\{\int_0^{\frac{b-x}{b-a}}\left|\int_0^t g(sa+(1-s)b)ds\right||f'(ta+(1-t)b)|dt\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1\left|\int_t^1 g(sa+(1-s)b)ds\right||f'(ta+(1-t)b)|dt\right\}$$

$$\leq (b-a)^2\left\{\left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}}\left|\int_0^t g(sa+(1-s)b)ds\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}}|f'(ta+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1\left|\int_t^1 g(sa+(1-s)b)ds\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1|f'(ta+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

$$\leq (b-a)^2\left\{\|g\|_{\left[0,\frac{b-x}{b-a}\right],\infty}\left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}}t^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}}|f'(ta+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\|g\|_{\left[\frac{b-x}{b-a},1\right],\infty}\left(\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1(1-t)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1|f'(ta+(1-t)b)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

elde edilir. Burada $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ dir. $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında konveks olduğundan

$$\left|f(x)\int_a^b g(u)du-\int_a^b f(u)g(u)du\right|$$

$$\leq (b-a)^2\left\{\|g\|_{\left[0,\frac{b-x}{b-a}\right],\infty}\left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}}t^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\frac{b-x}{b-a}}[t|f'(a)|^q+(1-t)|f'(b)|^q]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\|g\|_{\left[\frac{b-x}{b-a},1\right],\infty}\left(\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1(1-t)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{b-x}{b-a}}^1[t|f'(a)|^q+(1-t)|f'(b)|^q]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

$$=\frac{1}{(b-a)^{\frac{1}{q}}(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left\{\|g\|_{\left[0,\frac{b-x}{b-a}\right],\infty}\left[\frac{(b-x)^3|f'(a)|^q+(b-x)^2(b-2a+x)|f'(b)|^q}{2}\right]^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\|g\|_{\left[\frac{b-x}{b-a},1\right],\infty}\left[\frac{(x-a)^2(2b-a-x)|f'(a)|^q+(x-a)^3|f'(b)|^q}{2}\right]^{\frac{1}{q}}\right\}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Sonuç 4.1.6. Teorem 4.1.4 de $x=\frac{a+b}{2}$ seçilirse

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b g(u)du-\int_a^b f(u)g(u)du\right|$$

$$\leq\frac{(b-a)^2}{4}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left\{\left(\frac{3|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{|f'(a)|^q+3|f'(b)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right\} \quad (4.1.5)$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.1.7. (4.1.5) eşitsizliğinde $g(u)=1$ alınırsa, (3.2) eşitsizliği elde edilir.

Lemma 4.1.3. $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I° üzerinde diferansiyellenebilen bir fonksiyon, $a, b \in I^\circ$, $a < b$ ve $g: [a, b] \to [0, \infty)$ bir fonksiyon olsun. Eğer $f', g \in L[a, b]$ ise

$$f(x)\int_a^{\frac{a+b}{2}} g(u)du + f(a+b-x)\int_{\frac{a+b}{2}}^b g(u)du - \int_a^b f(u)g(u)du = \int_0^1 m(t)f'(t)dt$$

eşitliği elde edilir. Burada $t \in [0,1]$, $x, u \in [a, b]$ ve

$$m(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_a^t g(s)ds\,, & t \in [a,x) \\ \displaystyle\int_{\frac{a+b}{2}}^t g(s)ds\,, & t \in [x, a+b-x) \\ \displaystyle -\int_t^b g(s)ds\,, & t \in [a+b-x, b] \end{cases}$$

dır.

İspat: Lemma 4.1.3'ü ispatlamak için ilk önce

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^1 m(t)f'(t)dt \\ &= \int_a^x \left(\int_a^t g(s)ds\right) f'(t)dt + \int_x^{a+b-x} \left(\int_{\frac{a+b}{2}}^t g(s)ds\right) f'(t)dt \\ &\quad + \int_{a+b-x}^b \left(-\int_t^b g(s)ds\right) f'(t)dt \\ &= Q_1 + Q_2 + Q_3 \end{aligned}$$

olsun. Kısmi integrasyon metodu kullanarak,

$$\begin{aligned} Q_1 &= \left(\int_a^t g(s)ds\right) f(t)\Big|_a^x - \int_a^x g(t)f(t)dt \\ &= f(x)\left(\int_a^x g(s)ds\right) - \int_a^x g(t)f(t)dt \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer olarak

$$Q_2 = f(a+b-x)\left(\int_{\frac{a+b}{2}}^{a+b-x} g(s)ds\right) - f(x)\left(\int_{\frac{a+b}{2}}^x g(s)ds\right) - \int_x^{a+b-x} g(t)f(t)dt$$

ve

$$Q_3 = f(a+b-x)\left(\int_{a+b-x}^{b} g(s)ds\right) - \int_{a+b-x}^{b} g(t)f(t)dt$$

yazılır. Buradan

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

$$= f(x)\int_{a}^{\frac{a+b}{2}} g(u)du + f(a+b-x)\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} g(u)du - \int_{a}^{b} f(u)g(u)du$$

eşitliği elde edilir. Böylece Lemma 4.1.3 ispatlanmış olur. ■

Teorem 4.1.5. $a, b \in I^{\circ}$, $a < b$ ve $x \in [a,b]$ olmak üzere $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I° de diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $g: [a,b] \to [0,\infty)$ olsun. Eğer $f', g \in L[a,b]$ ve $|f'|$, $[a,b]$ aralığında konveks ise

$$\left| f(x)\int_{a}^{\frac{a+b}{2}} g(u)du + f(a+b-x)\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} g(u)du - \int_{a}^{b} f(u)g(u)du \right|$$

$$\begin{aligned}
\leq \frac{1}{24(b-a)}\Big\{&|f'(a)|\big[(a-x)^2(12b-4a-8x)\|g\|_{[a,x],\infty} \\
&+3(a+b-2x)^2\|g\|_{[x,a+b-x],\infty} \\
&+8(x-a)^3\|g\|_{[a+b-x,b],\infty}\big] \\
&+|f'(b)|\big[8(x-a)^3\|g\|_{[a,x],\infty} + 3(a+b-2x)^2\|g\|_{[x,a+b-x],\infty} \\
&+(a-x)^2(12b-4a-8x)\|g\|_{[a+b-x,b],\infty}\big]\Big\}
\end{aligned} \tag{4.1.6}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat: Lemma 4.1.3'den ve integraller için mutlak değer özelliğinden

$$\left|f(x)\int_a^{\frac{a+b}{2}} g(u)du + f(a+b-x)\int_{\frac{a+b}{2}}^b g(u)du - \int_a^b f(u)g(u)du\right|$$

$$\leq \int_a^x \left|\int_a^t g(s)ds\right| |f'(t)|dt + \int_x^{a+b-x} \left|\int_{\frac{a+b}{2}}^t g(s)ds\right| |f'(t)|dt$$

$$+ \int_{a+b-x}^b \left|\int_t^b g(s)ds\right| |f'(t)|dt$$

$$\leq \|g\|_{[a,x],\infty} \int_a^x |t-a||f'(t)|dt + \|g\|_{[x,a+b-x],\infty} \int_x^{a+b-x} \left|t-\frac{a+b}{2}\right| |f'(t)|dt$$

$$+\|g\|_{[a+b-x,b],\infty} \int_{a+b-x}^b |b-t||f'(t)|dt$$

$$= \|g\|_{[a,x],\infty} \int_a^x (t-a)|f'(t)|dt + \|g\|_{[x,a+b-x],\infty} \int_x^{\frac{a+b}{2}} \left(\frac{a+b}{2}-t\right) |f'(t)|dt$$

$$+\|g\|_{[x,a+b-x],\infty} \int_{\frac{a+b}{2}}^{a+b-x} \left(t-\frac{a+b}{2}\right) |f'(t)|dt$$

$$+\|g\|_{[a+b-x,b],\infty} \int_{a+b-x}^b |b-t||f'(t)|dt$$

elde edilir. $|f'|$, $[a,b]$ aralığında konveks olduğundan

$$\left|f(x)\int_a^{\frac{a+b}{2}} g(u)du + f(a+b-x)\int_{\frac{a+b}{2}}^b g(u)du - \int_a^b f(u)g(u)du\right|$$

$$\leq \|g\|_{[a,x],\infty} \int_a^x (t-a)\left[\left(\frac{b-t}{b-a}\right)|f'(a)| + \left(\frac{t-a}{b-a}\right)|f'(b)|\right]dt$$

$$+\|g\|_{[x,a+b-x],\infty} \int_x^{\frac{a+b}{2}} \left(\frac{a+b}{2}-t\right)\left[\left(\frac{b-t}{b-a}\right)|f'(a)| + \left(\frac{t-a}{b-a}\right)|f'(b)|\right]dt$$

$$+\|g\|_{[x,a+b-x],\infty} \int_{\frac{a+b}{2}}^{a+b-x} \left(t-\frac{a+b}{2}\right)\left[\left(\frac{b-t}{b-a}\right)|f'(a)| + \left(\frac{t-a}{b-a}\right)|f'(b)|\right]dt$$

$$+\|g\|_{[a+b-x,b],\infty} \int_{a+b-x}^b (b-t)\left[\left(\frac{b-t}{b-a}\right)|f'(a)| + \left(\frac{t-a}{b-a}\right)|f'(b)|\right]dt$$

yazılır. Gerekli işlemler yapılırsa (4.1.6) eşitsizliği elde edilir. ■

Sonuç 4.1.8. Teorem 4.1.5'de $g:[a,b]\to[0,\infty)$ fonksiyonu $\frac{a+b}{2}$ ye göre simetrik ve $x=a$ alınırsa

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b g(u)du-\int_a^b f(u)g(u)du\right|\le\frac{b-a}{4}\|g\|_{[a,b],\infty}\left(\frac{|f'(a)|+|f'(b)|}{2}\right)$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.1.6. $a,b\in I^{\circ}$, $a<b$ ve $x\in[a,b]$ olmak üzere $f:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, I° de diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $g:[a,b]\to[0,\infty)$ olsun. Eğer $f',g\in L[a,b]$ ve $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında konveks ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere

$$\left|f(x)\int_a^{\frac{a+b}{2}}g(u)du+f(a+b-x)\int_{\frac{a+b}{2}}^b g(u)du-\int_a^b f(u)g(u)du\right|$$

$$\le\left(\frac{(x-a)^{p+1}}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times\left\{\|g\|_{[a,x],\infty}\left[\frac{(a-x)(a-2b+x)}{2(b-a)}|f'(a)|^q+\frac{(a-x)^2}{2(b-a)}|f'(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right. \tag{4.1.7}$$

$$\left.+\|g\|_{[a+b-x,b],\infty}\left[\frac{(a-x)^2}{2(b-a)}|f'(a)|^q+\frac{(a-x)(a-2b+x)}{2(b-a)}|f'(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right\}$$

$$+\frac{(a+b-2x)^2}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}\|g\|_{[x,a+b-x],\infty}\left[|f'(a)|^q+|f'(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat: Lemma 4.1.3 ve Hölder eşitsizliği kullanılarak

$$\left|f(x)\int_a^{\frac{a+b}{2}} g(u)du + f(a+b-x)\int_{\frac{a+b}{2}}^b g(u)du - \int_a^b f(u)g(u)du\right|$$

$$\leq \int_a^x \left|\int_a^t g(s)ds\right| |f'(t)|dt + \int_x^{a+b-x} \left|\int_{\frac{a+b}{2}}^t g(s)ds\right| |f'(t)|dt$$

$$+\int_{a+b-x}^b \left|\int_t^b g(s)ds\right| |f'(t)|dt$$

$$\leq \left(\int_a^x \left|\int_a^t g(s)ds\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^x |f'(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\int_x^{a+b-x} \left|\int_{\frac{a+b}{2}}^t g(s)ds\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_x^{a+b-x} |f'(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\int_{a+b-x}^b \left|\int_t^b g(s)ds\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{a+b-x}^b |f'(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \|g\|_{[a,x],\infty} \left(\int_a^x |t-a|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^x |f'(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\|g\|_{[x,a+b-x],\infty} \left(\int_x^{a+b-x} \left|t-\frac{a+b}{2}\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_x^{a+b-x} |f'(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\|g\|_{[a+b-x,b],\infty} \left(\int_{a+b-x}^b |b-t|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{a+b-x}^b |f'(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

yazılır. $|f'|^q$, $[a,b]$ aralığında konveks olduğu için

$$\left|f(x)\int_a^{\frac{a+b}{2}} g(u)du + f(a+b-x)\int_{\frac{a+b}{2}}^b g(u)du - \int_a^b f(u)g(u)du\right|$$

$$\leq \|g\|_{[a,x],\infty} \left(\int_a^x |t-a|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^x \left[\left(\frac{b-t}{b-a}\right)|f'(a)|^q + \left(\frac{t-a}{b-a}\right)|f'(b)|^q\right] dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\|g\|_{[x,a+b-x],\infty}\left(\int_x^{a+b-x}\left|t-\frac{a+b}{2}\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times\left(\int_x^{a+b-x}\left[\left(\frac{b-t}{b-a}\right)|f'(a)|^q+\left(\frac{t-a}{b-a}\right)|f'(b)|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\|g\|_{[a+b-x,b],\infty}\left(\int_{a+b-x}^{b}|b-t|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times\left(\int_{a+b-x}^{b}\left[\left(\frac{b-t}{b-a}\right)|f'(a)|^q+\left(\frac{t-a}{b-a}\right)|f'(b)|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. Gerekli işlemler yapılırsa (4.1.7) eşitsiliği elde edilir. ■

Sonuç 4.1.9. Teorem 4.1.6'da $g:[a,b]\to[0,\infty)$ fonksiyonu $\frac{a+b}{2}$ ye göre simetrik ve $x=a$ alınırsa

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b g(u)du-\int_a^b f(u)g(u)du\right|$$

$$\leq\frac{(b-a)^2}{2}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\|g\|_{[a,b],\infty}[|f'(a)|^q+|f'(b)|^q]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği elde edilir.

4.2. n. Mertebeden Türevlenebilen Fonksiyonlar İçin Elde Edilen Eşitsizlikler:

Bu bölümde n. mertebeden türevlenebilen fonksiyonlar için elde edilmiş Lemmalar ve yeni teoremler verilmiştir. Alınan özel değerler için literatürle uyumlu sonuçlar elde edilmiştir.

Cerone *et al.* aşağıdaki Lemma'yı kullanarak n. mertebeden türevlenebilen fonksiyonlar için yeni eşitsizlikler elde etmişlerdir. Bulunan bu sonuçlar Hermite-Hadamard eşitsizliği ile ilgili elde edilen sonuçları genellemiştir.

Lemma 4.2.1. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ tanımlı ve (a,b) aralığında n. mertebeden türevlenebilen bir fonksiyon olsun. $\forall x\in[a,b]$ için aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\int_a^b f(t)dt=\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{(b-x)^{k+1}+(-1)^k(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}\right]f^{(k)}(x)$$

$$+(-1)^n\int_a^b K_n(x,t)f^{(n)}(t)dt.$$

Burada $n\geq 1$ bir doğal sayı ve $K_n(x,t):[a,b]^2\to\mathbb{R}$,

$$K_n(x,t)=\begin{cases}\dfrac{(t-a)^n}{n!}, & t\in[a,x]\\ \dfrac{(t-b)^n}{n!}, & t\in(x,b]\end{cases}$$

dır (Cerone *et al.* 1999a).

Wang *et al.* 2012'de aşağıdaki Lemma'yı kullanarak n. mertebeden türevlenebilen fonksiyonlar için yeni integral eşitsizlikleri elde ederek yeni genelleştirmeler yapmıştır.

Lemma 4.2.2. $n\in\mathbb{N}$ için, $f:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tanımlı n. mertebeden türevlenebilen bir fonksiyon olsun. $a,b\in I$ ve $f^{(n)}(x)\in L[a,b]$ için

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k-1}{(k+1)!}(a-b)^k f^{(k)}(b)$$

$$=\frac{(-1)^n(b-a)^n}{2n!}\int_0^1(1-t)^{n-1}(2t+n-2)f^{(n)}(ta+(1-t)b)dt$$

eşitliği elde edilir (Wang *et al.* 2012).

Teorem 4.2.1. $a,b\in I^\circ$ ve $a<b$ olmak üzere $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ tanımlı ve (a,b) aralığında n. mertebeden türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $f^{(n)}\in L[a,b]$ $(n\geq 1)$ ve $\left|f^{(n)}\right|$, $[a,b]$ aralığında konveks ise

$$\left|\int_a^b f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{(b-x)^{k+1}+(-1)^k(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}\right]f^{(k)}(x)\right|$$
$$\leq \frac{1}{n!\,(b-a)}$$
$$\times\left\{\left|f^{(n)}(a)\right|\left[\frac{(x-a)^{n+1}[(n+2)(b-x)+(x-a)]}{(n+1)(n+2)}+\frac{(b-x)^{n+2}}{(n+2)}\right]\right. \tag{4.2.1}$$
$$\left.+\left|f^{(n)}(b)\right|\left[\frac{(b-x)^{n+1}[(n+2)(x-a)+(b-x)]}{(n+1)(n+2)}+\frac{(x-a)^{n+2}}{(n+2)}\right]\right\}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat: Lemma 4.2.1’den ve integraller için mutlak değer özelliğinden

$$\left|\int_a^b f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{(b-x)^{k+1}+(-1)^k(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}\right]f^{(k)}(x)\right|$$
$$\leq \int_a^b |K_n(x,t)|\left|f^{(n)}(t)\right|dt$$
$$= \int_a^x \frac{|(t-a)^n|}{n!}\left|f^{(n)}(t)\right|dt + \int_x^b \frac{|(t-b)^n|}{n!}\left|f^{(n)}(t)\right|dt$$
$$= \int_a^x \frac{(t-a)^n}{n!}\left|f^{(n)}(t)\right|dt + \int_x^b \frac{(b-t)^n}{n!}\left|f^{(n)}(t)\right|dt$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin sağ tarafında $t = \frac{b-t}{b-a}a + \frac{t-a}{b-a}b$ olarak alınırsa

$$\left|\int_a^b f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{(b-x)^{k+1}+(-1)^k(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}\right]f^{(k)}(x)\right|$$
$$= \frac{1}{n!}\left\{\int_a^x (t-a)^n\left|f^{(n)}\left(\frac{b-t}{b-a}a+\frac{t-a}{b-a}b\right)\right|dt\right.$$
$$\left.+\int_x^b (b-t)^n\left|f^{(n)}\left(\frac{b-t}{b-a}a+\frac{t-a}{b-a}b\right)\right|dt\right\}$$

olur. $\left|f^{(n)}\right|$, $[a,b]$ aralığında konveks olduğundan

$$\left|\int_a^b f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{(b-x)^{k+1}+(-1)^k(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}\right]f^{(k)}(x)\right|$$

$$\leq \frac{1}{n!}\left\{\int_a^x (t-a)^n\left[\frac{b-t}{b-a}\left|f^{(n)}(a)\right|+\frac{t-a}{b-a}\left|f^{(n)}(b)\right|\right]dt\right. \tag{4.2.2}$$

$$\left.+\int_x^b (b-t)^n\left[\frac{b-t}{b-a}\left|f^{(n)}(a)\right|+\frac{t-a}{b-a}\left|f^{(n)}(b)\right|\right]dt\right\}$$

elde edilir. Burada

$$\int_a^x (t-a)^n(b-t)dt = \frac{(x-a)^{n+1}[(n+2)(b-x)+(x-a)]}{(n+1)(n+2)}, \tag{4.2.3}$$

$$\int_a^x (t-a)^n(t-a)dt = \frac{(x-a)^{n+2}}{(n+2)}, \tag{4.2.4}$$

$$\int_x^b (b-t)^n(b-t)dt = \frac{(b-x)^{n+2}}{(n+2)}, \tag{4.2.5}$$

$$\int_x^b (b-t)^n(t-a)dt = \frac{(b-x)^{n+1}[(n+2)(x-a)+(b-x)]}{(n+1)(n+2)} \tag{4.2.6}$$

dır. (4.2.3)-(4.2.6) sonuçları (4.2.2) eşitliğinde kullanılırsa

$$\left|\int_a^b f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{(b-x)^{k+1}+(-1)^k(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}\right]f^{(k)}(x)\right|$$

$$\leq \frac{1}{n!\,(b-a)}\left\{\left|f^{(n)}(a)\right|\left[\frac{(x-a)^{n+1}[(n+2)(b-x)+(x-a)]}{(n+1)(n+2)}+\frac{(b-x)^{n+2}}{(n+2)}\right]\right.$$

$$\left.+\left|f^{(n)}(b)\right|\left[\frac{(b-x)^{n+1}[(n+2)(x-a)+(b-x)]}{(n+1)(n+2)}+\frac{(x-a)^{n+2}}{(n+2)}\right]\right\}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Sonuç 4.2.1. (4.2.1) eşitsizliğinde $x = \frac{a+b}{2}$ alınırsa,

$$\left|\int_a^b f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{1+(-1)^k}{(k+1)!}\right]\left(\frac{b-a}{2}\right)^{k+1} f^{(k)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$
$$\leq \frac{(b-a)^{n+1}}{2^n(n+1)!}\left[\frac{\left|f^{(n)}(a)\right| + \left|f^{(n)}(b)\right|}{2}\right]$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.2.2. (4.2.1) eşitsizliğinde $x = a$ alınırsa,

$$\left|\int_a^b f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(b-a)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k)}(a)\right|$$
$$\leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+2)!}\left[(n+1)\left|f^{(n)}(a)\right| + \left|f^{(n)}(b)\right|\right] \tag{4.2.7}$$

eşitsizliği bulunur.

Sonuç 4.2.3. (4.2.1) eşitsizliğinde $x = b$ için,

$$\left|\int_a^b f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k(b-a)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k)}(b)\right|$$
$$\leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+2)!}\left[\left|f^{(n)}(a)\right| + (n+1)\left|f^{(n)}(b)\right|\right] \tag{4.2.8}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.2.4. Teorem 4.2.1 şartları altında aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\left|\int_a^b f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(b-a)^{k+1}}{(k+1)!}\left[\frac{f^{(k)}(a)+(-1)^k f^{(k)}(b)}{2}\right]\right|$$
$$\leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\left[\frac{\left|f^{(n)}(a)\right| + \left|f^{(n)}(b)\right|}{2}\right]. \tag{4.2.9}$$

İspat: (4.2.7) ve (4.2.8) eşitsizliği taraf tarafa toplanıp, üçgen eşitsizliği uygulanırsa (4.2.9) eşitsizliği elde edilir. ■

Sonuç 4.2.5. (4.2.1) eşitsizliğinde $n = 1$ seçilirse,

$$\left|f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$
$$\leq \frac{1}{(b-a)^2}\left\{\left[\frac{(x-a)^2[3(b-x)+(x-a)]}{6} + \frac{(b-x)^3}{3}\right]|f'(a)|\right.$$
$$\left. + \left[\frac{(b-x)^2[3(x-a)+(b-x)]}{6} + \frac{(x-a)^3}{3}\right]|f'(b)|\right\}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.2.2. $a, b \in I^{\circ}$ ve $a < b$ olmak üzere $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ tanımlı ve (a, b) aralığında $n.$ mertebeden türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $f^{(n)} \in L[a, b]$ $(n \geq 1)$, $\left|f^{(n)}\right|^q$, $[a, b]$ aralığında konveks ve $x \in [a, b]$ ise

$$\left|\int_a^b f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{(b-x)^{k+1} + (-1)^k(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}\right]f^{(k)}(x)\right|$$
$$\leq \frac{1}{(b-a)^{\frac{1}{q}}n!}$$
$$\times\left\{\frac{(x-a)^{np+1+1/q}}{np+1}\left[\frac{(2b-a-x)}{2}\left|f^{(n)}(a)\right|^q + \frac{(x-a)}{2}\left|f^{(n)}(b)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right. \tag{4.2.10}$$
$$\left. + \frac{(b-x)^{np+1+1/q}}{np+1}\left[\frac{(b-x)}{2}\left|f^{(n)}(a)\right|^q + \frac{(b+x-2a)}{2}\left|f^{(n)}(b)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right\}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dir.

İspat: Lemma 4.2.1'den

$$\left|\int_a^b f(t)dt-\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{(b-x)^{k+1}+(-1)^k(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}\right]f^{(k)}(x)\right|$$

$$\leq \int_a^b |K_n(x,t)|\left|f^{(n)}(t)\right|dt$$

eşitsizliği elde edilir. İntegraller için mutlak değer özelliği kullanılarak

$$\left|\int_a^b f(t)dt-\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{(b-x)^{k+1}+(-1)^k(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}\right]f^{(k)}(x)\right|$$

$$\leq \int_a^x \frac{|(t-a)^n|}{n!}\left|f^{(n)}(t)\right|dt+\int_x^b \frac{|(t-b)^n|}{n!}\left|f^{(n)}(t)\right|dt$$

$$=\int_a^x \frac{(t-a)^n}{n!}\left|f^{(n)}(t)\right|dt+\int_x^b \frac{(b-t)^n}{n!}\left|f^{(n)}(t)\right|dt$$

olur. İntegraller için Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\left|\int_a^b f(t)dt-\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{(b-x)^{k+1}+(-1)^k(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}\right]f^{(k)}(x)\right|$$

$$\leq \frac{1}{n!}\left\{\left(\int_a^x (t-a)^{np}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^x \left|f^{(n)}(t)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_x^b (b-t)^{np}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_x^b \left|f^{(n)}(t)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte $t=\frac{b-t}{b-a}a+\frac{t-a}{b-a}b$ alınıp, $\left|f^{(n)}\right|^q$, $[a,b]$ aralığında konveks olduğu kullanılırsa

$$\left|\int_a^b f(t)dt-\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{(b-x)^{k+1}+(-1)^k(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}\right]f^{(k)}(x)\right|$$

$$\leq \frac{1}{n!}\left\{\left(\int_a^x (t-a)^{np}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^x \left[\frac{b-t}{b-a}\left|f^{(n)}(a)\right|^q+\frac{t-a}{b-a}\left|f^{(n)}(b)\right|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\int_x^b (b-t)^{np}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_x^b \left[\frac{b-t}{b-a}\left|f^{(n)}(a)\right|^q+\frac{t-a}{b-a}\left|f^{(n)}(b)\right|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

$$= \frac{1}{(b-a)^{\frac{1}{q}} n!}$$

$$\times \left\{ \frac{(x-a)^{np+1}}{np+1} \left[\frac{(x-a)(2b-a-x)}{2} \left|f^{(n)}(a)\right|^q + \frac{(x-a)^2}{2} \left|f^{(n)}(b)\right|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right.$$

$$\left. + \frac{(b-x)^{np+1}}{np+1} \left[\frac{(b-x)^2}{2} \left|f^{(n)}(a)\right|^q + \frac{(b-x)(b+x-2a)}{2} \left|f^{(n)}(b)\right|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right\}$$

elde edilir. Burada

$$\int_a^x (t-a)^{np} dt = \frac{(x-a)^{np+1}}{np+1} \qquad ve \qquad \int_x^b (b-t)^{np} dt = \frac{(b-x)^{np+1}}{np+1}$$

dır. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Sonuç 4.2.6. (4.2.10) eşitsizliğinde $x = \frac{a+b}{2}$ olarak alınırsa,

$$\left| \int_a^b f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{1+(-1)^k}{(k+1)!} \right] \left(\frac{b-a}{2} \right)^{k+1} f^{(k)} \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^{np+1+1/q}}{2^{np+1+1/q}(np+1)n!}$$

$$\times \left\{ \left[\frac{3\left|f^{(n)}(a)\right|^q + \left|f^{(n)}(b)\right|^q}{4} \right]^{\frac{1}{q}} + \left[\frac{\left|f^{(n)}(a)\right|^q + 3\left|f^{(n)}(b)\right|^q}{4} \right]^{\frac{1}{q}} \right\}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.2.7. (4.2.10) eşitsizliğinde $x = a$ alınırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\left|\int_a^b f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k)}(a)\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^{np+1+1/q}}{(np+1)n!} \left[\frac{\left|f^{(n)}(a)\right|^q + \left|f^{(n)}(b)\right|^q}{2}\right]^{\frac{1}{q}}. \tag{4.2.11}$$

Sonuç 4.2.8. (4.2.10) eşitsizliğinde $x = b$ için,

$$\left|\int_a^b f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k (b-a)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k)}(b)\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^{np+1+1/q}}{(np+1)n!} \left[\frac{\left|f^{(n)}(a)\right|^q + \left|f^{(n)}(b)\right|^q}{2}\right]^{\frac{1}{q}} \tag{4.2.12}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.2.9. Teorem 4.2.2'deki şartlar altında aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\left|\int_a^b f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^{k+1}}{(k+1)!} \left[\frac{f^{(k)}(a)+(-1)^k f^{(k)}(b)}{2}\right]\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^{np+1+1/q}}{(np+1)n!} \left[\frac{\left|f^{(n)}(a)\right|^q + \left|f^{(n)}(b)\right|^q}{2}\right]^{\frac{1}{q}}. \tag{4.2.13}$$

İspat: (4.2.11) ve (4.2.12) eşitsizliği taraf tarafa toplanıp, üçgen eşitsizliği uygulanırsa (4.2.13) eşitsizliği elde edilir. ■

Sonuç 4.2.10. (4.2.10) eşitsizliğinde $n = 1$ seçilirse,

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$

$$\leq \frac{1}{(b-a)^{1+\frac{1}{q}}}\left\{\frac{(x-a)^{p+1+1/q}}{p+1}\left[\frac{2b-a-x}{2}|f'(a)|^q+\frac{x-a}{2}|f'(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\frac{(b-x)^{p+1+1/q}}{p+1}\left[\frac{b-x}{2}|f'(a)|^q+\frac{b+x-2a}{2}|f'(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right\}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.2.3. $a, b \in I^{\circ}$ ve $a < b$ olmak üzere $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ tanımlı ve (a, b) aralığında n. mertebeden türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $f^{(n)} \in L[a, b]$ $(n \geq 1)$, $\left|f^{(n)}\right|^q$, $[a, b]$ aralığında konveks ve $x \in [a, b]$ ise

$$\left|\int_a^b f(t)dt-\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{(b-x)^{k+1}+(-1)^k(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}\right]f^{(k)}(x)\right|$$

$$\leq \frac{1}{(b-a)^{\frac{1}{q}}(p+2)^{\frac{1}{q}}n!}\left(\frac{q-1}{nq+q-p-1}\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times\left\{(x-a)^{n+1}\left[\frac{(p+2)(b-x)+(x-a)}{(p+1)}\left|f^{(n)}(a)\right|^q+(x-a)^{p+1}\left|f^{(n)}(b)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right. \tag{4.2.14}$$

$$\left.+(b-x)^{n+1}\left[(b-x)^{p+1}\left|f^{(n)}(a)\right|^q+\frac{(p+2)(x-a)+(b-x)}{(p+1)}\left|f^{(n)}(b)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right\}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $p > 1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ dir.

İspat: Lemma 4.2.1 ve integraller için mutlak değer özelliği kullanılarak

$$\left|\int_a^b f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{(b-x)^{k+1}+(-1)^k(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}\right]f^{(k)}(x)\right|$$

$$\leq \int_a^b |K_n(x,t)|\left|f^{(n)}(t)\right|dt$$

$$\leq \int_a^x \frac{|(t-a)^n|}{n!}\left|f^{(n)}(t)\right|dt + \int_x^b \frac{|(t-b)^n|}{n!}\left|f^{(n)}(t)\right|dt$$

$$= \frac{1}{n!}\left\{\int_a^x (t-a)^n\left|f^{(n)}(t)\right|dt + \int_x^b (b-t)^n\left|f^{(n)}(t)\right|dt\right\}$$

$$= \frac{1}{n!}\left\{\int_a^x \frac{(t-a)^n(t-a)^{p/q}}{(t-a)^{p/q}}\left|f^{(n)}(t)\right|dt + \int_x^b \frac{(b-t)^n(b-t)^{p/q}}{(b-t)^{p/q}}\left|f^{(n)}(t)\right|dt\right\}$$

elde edilir. İntegraller için Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\left|\int_a^b f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{(b-x)^{k+1}+(-1)^k(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}\right]f^{(k)}(x)\right|$$

$$\leq \frac{1}{n!}\left\{\left(\int_a^x \left[\frac{(t-a)^n}{(t-a)^{p/q}}\right]^{\frac{q}{q-1}} dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_a^x (t-a)^p\left|f^{(n)}(t)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left. + \left(\int_x^b \left[\frac{(b-t)^n}{(b-t)^{p/q}}\right]^{\frac{q}{q-1}} dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_x^b (b-t)^p\left|f^{(n)}(t)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte $t = \frac{b-t}{b-a}a + \frac{t-a}{b-a}b$ alınıp, $\left|f^{(n)}\right|^q$ nin konveksliği kullanılırsa

$$\left|\int_a^b f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{(b-x)^{k+1}+(-1)^k(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}\right]f^{(k)}(x)\right|$$

$$\leq \frac{1}{n!}\left\{\left(\int_a^x (t-a)^{\frac{nq-p}{q-1}}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_a^x (t-a)^p\left[\frac{b-t}{b-a}\left|f^{(n)}(a)\right|^q + \frac{t-a}{b-a}\left|f^{(n)}(b)\right|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left. + \left(\int_x^b (b-t)^{\frac{nq-p}{q-1}}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_x^b (b-t)^p\left[\frac{b-t}{b-a}\left|f^{(n)}(a)\right|^q + \frac{t-a}{b-a}\left|f^{(n)}(b)\right|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

$$=\frac{1}{(b-a)^{\frac{1}{q}}(p+2)^{\frac{1}{q}}n!}\left(\frac{q-1}{nq+q-p-1}\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times\left\{(x-a)^{n+1}\left[\frac{(p+2)(b-x)+(x-a)}{(p+1)}\left|f^{(n)}(a)\right|^{q}+(x-a)^{p+1}\left|f^{(n)}(b)\right|^{q}\right]^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+(b-x)^{n+1}\left[(b-x)^{p+1}\left|f^{(n)}(a)\right|^{q}+\frac{(p+2)(x-a)+(b-x)}{(p+1)}\left|f^{(n)}(b)\right|^{q}\right]^{\frac{1}{q}}\right\}$$

elde edilir. Burada

$$\int_a^x (t-a)^{\frac{nq-p}{q-1}}dt=\frac{q-1}{nq+q-p-1}(x-a)^{\frac{nq+q-p-1}{q-1}},$$

$$\int_x^b (b-t)^{\frac{nq-p}{q-1}}dt=\frac{q-1}{nq+q-p-1}(b-x)^{\frac{nq+q-p-1}{q-1}},$$

$$\int_a^x (t-a)^{p}(b-t)dt=\frac{(x-a)^{p+1}[(p+2)(b-x)+(x-a)]}{(p+1)(p+2)},$$

$$\int_a^x (t-a)^{p+1}dt=\frac{(x-a)^{p+2}}{(p+2)},$$

$$\int_x^b (b-t)^{p+1}dt=\frac{(b-x)^{p+2}}{(p+2)},$$

$$\int_x^b (b-t)^{p}(t-a)dt=\frac{(b-x)^{p+1}[(p+2)(x-a)+(b-x)]}{(p+1)(p+2)}$$

sonuçları elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Sonuç 4.2.11. (4.2.14) eşitsizliğinde $x=\frac{a+b}{2}$ olarak alınırsa,

$$\left|\int_a^b f(t)dt-\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{1+(-1)^k}{(k+1)!}\right]\left(\frac{b-a}{2}\right)^{k+1}f^{(k)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1+1/q}(p+2)^{1/q}n!}\left(\frac{q-1}{nq+q-p-1}\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times\left\{\left[\frac{p+3}{p+1}\left|f^{(n)}(a)\right|^{q}+\left(\frac{b-a}{2}\right)^{p}\left|f^{(n)}(b)\right|^{q}\right]^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left[\left(\frac{b-a}{2}\right)^{p}\left|f^{(n)}(a)\right|^{q}+\frac{p+3}{p+1}\left|f^{(n)}(b)\right|^{q}\right]^{\frac{1}{q}}\right\}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.2.12. (4.2.14) eşitsizliğinde $x=a$ alınırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\left|\int_a^b f(t)dt-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(b-a)^{k+1}}{(k+1)!}f^{(k)}(a)\right|$$

$$\leq\frac{(b-a)^{n+1}}{(p+2)^{\frac{1}{q}}n!}\left(\frac{q-1}{nq+q-p-1}\right)^{1-\frac{1}{q}} \tag{4.2.15}$$

$$\times\left\{\left[(b-a)^{p}\left|f^{(n)}(a)\right|^{q}+\frac{1}{p+1}\left|f^{(n)}(b)\right|^{q}\right]^{\frac{1}{q}}\right\}.$$

Sonuç 4.2.13. (4.2.14) eşitsizliğinde $x=b$ için,

$$\left|\int_a^b f(t)dt-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{k}(b-a)^{k+1}}{(k+1)!}f^{(k)}(b)\right|$$

$$\leq\frac{(b-a)^{n+1}}{(p+2)^{\frac{1}{q}}n!}\left(\frac{q-1}{nq+q-p-1}\right)^{1-\frac{1}{q}} \tag{4.2.16}$$

$$\times\left\{\left[\frac{1}{p+1}\left|f^{(n)}(a)\right|^{q}+(b-a)^{p}\left|f^{(n)}(b)\right|^{q}\right]^{\frac{1}{q}}\right\}.$$

eşitsizlik elde edilir.

Sonuç 4.2.14. Teorem 4.2.3’deki şartlar altında,

$$\left|\int_a^b f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^{k+1}}{(k+1)!}\left[\frac{f^{(k)}(a)+(-1)^k f^{(k)}(b)}{2}\right]\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(p+2)^{\frac{1}{q}} n!}\left(\frac{q-1}{nq+q-p-1}\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times\left\{\left[(b-a)^p\left|f^{(n)}(a)\right|^q + \frac{1}{p+1}\left|f^{(n)}(b)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right. \tag{4.2.17}$$

$$\left. + \left[\frac{1}{p+1}\left|f^{(n)}(a)\right|^q + (b-a)^p\left|f^{(n)}(b)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right\}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat: (4.2.15) ve (4.2.16) eşitsizlikleri taraf tarafa toplanıp, üçgen eşitsizliği uygulanırsa (4.2.17) eşitsizliği elde edilir. ■

Sonuç 4.2.15. (4.2.14) eşitsizliğinde $n = 1$ seçilirse,

$$\left|f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$

$$\leq \frac{1}{(b-a)^{\frac{1}{q}}(p+2)^{\frac{1}{q}}}\left(\frac{q-1}{2q-p-1}\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times\left\{(x-a)^2\left[\frac{(p+2)(b-x)+(x-a)}{(p+1)}|f'(a)|^q + (x-a)^{p+1}|f'(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left. +(b-x)^2\left[(b-x)^{p+1}|f'(a)|^q + \frac{(p+2)(x-a)+(b-x)}{(p+1)}|f'(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right\}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.2.4. $a, b \in I^{\circ}$ ve $a < b$ olmak üzere $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ tanımlı ve (a, b) aralığında n. mertebeden türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $f^{(n)} \in L[a, b]$ $(n \geq 1)$, $\left|f^{(n)}\right|^q$, $[a, b]$ aralığında konveks ve $q \geq 1$ ise

$$\left|\int_a^b f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{(b-x)^{k+1} + (-1)^k (x-a)^{k+1}}{(k+1)!}\right] f^{(k)}(x)\right|$$

$$\leq \frac{1}{(b-a)^{\frac{1}{q}}(n+1)!}$$

$$\times \{(x-a)^{n+1}$$

$$\times \left[\frac{[(n+2)(b-x) + (x-a)]\left|f^{(n)}(a)\right|^q + (n+1)(x-a)\left|f^{(n)}(b)\right|^q}{(n+2)}\right]^{\frac{1}{q}} \tag{4.2.18}$$

$$+(b-x)^{n+1}$$

$$\times \left[\frac{(n+1)(b-x)\left|f^{(n)}(a)\right|^q + [(n+2)(x-a) + (b-x)]\left|f^{(n)}(b)\right|^q}{(n+2)}\right]^{\frac{1}{q}}\Bigg\}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat: Lemma 4.2.1 ve integraller için mutlak değer özelliği kullanılarak

$$\left|\int_a^b f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{(b-x)^{k+1} + (-1)^k (x-a)^{k+1}}{(k+1)!}\right] f^{(k)}(x)\right|$$

$$\leq \int_a^b |K_n(x,t)|\left|f^{(n)}(t)\right|dt$$

$$\leq \int_a^x \frac{|(t-a)^n|}{n!}\left|f^{(n)}(t)\right|dt + \int_x^b \frac{|(t-b)^n|}{n!}\left|f^{(n)}(t)\right|dt$$

$$= \frac{1}{n!}\left\{\int_a^x (t-a)^n \left|f^{(n)}(t)\right|dt + \int_x^b (b-t)^n \left|f^{(n)}(t)\right|dt\right\}$$

eşitsizliği elde edilir. İntegraller için Power-mean eşitsizliği kullanılırsa

$$\left|\int_a^b f(t)dt-\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{(b-x)^{k+1}+(-1)^k(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}\right]f^{(k)}(x)\right|$$

$$\leq\frac{1}{n!}\left\{\left(\int_a^x (t-a)^n dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_a^x (t-a)^n\left|f^{(n)}(t)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\int_x^b (b-t)^n dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_x^b (b-t)^n\left|f^{(n)}(t)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte $t=\frac{b-t}{b-a}a+\frac{t-a}{b-a}b$ alınıp, $\left|f^{(n)}\right|^q$ nin konveksliği uygulanırsa

$$\left|\int_a^b f(t)dt-\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{(b-x)^{k+1}+(-1)^k(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}\right]f^{(k)}(x)\right|$$

$$\leq\frac{1}{n!}\left\{\left(\int_a^x (t-a)^n dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_a^x (t-a)^n\left|f^{(n)}\left(\frac{b-t}{b-a}a+\frac{t-a}{b-a}b\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\int_x^b (b-t)^n dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_x^b (b-t)^n\left|f^{(n)}\left(\frac{b-t}{b-a}a+\frac{t-a}{b-a}b\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

$$\leq\frac{1}{n!}\left\{\left(\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_a^x (t-a)^n\left[\frac{b-t}{b-a}\left|f^{(n)}(a)\right|^q+\frac{t-a}{b-a}\left|f^{(n)}(b)\right|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{(b-x)^{n+1}}{n+1}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_x^b (b-t)^n\left[\frac{b-t}{b-a}\left|f^{(n)}(a)\right|^q+\frac{t-a}{b-a}\left|f^{(n)}(b)\right|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

$$=\frac{1}{(b-a)^{\frac{1}{q}}(n+2)^{\frac{1}{q}}(n+1)!}$$

$$\times\left\{(x-a)^{n+1}\left[[(n+2)(b-x)+(x-a)]\left|f^{(n)}(a)\right|^q+(n+1)(x-a)\left|f^{(n)}(b)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+(b-x)^{n+1}\left[(n+1)(b-x)\left|f^{(n)}(a)\right|^q+[(n+2)(x-a)+(b-x)]\left|f^{(n)}(b)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right\}$$

elde edilir. Burada

$$\int_a^x (t-a)^n (b-t)dt = \frac{(x-a)^{n+1}[(n+2)(b-x)+(x-a)]}{(n+1)(n+2)},$$

$$\int_a^x (t-a)^{n+1} dt = \frac{(x-a)^{n+2}}{(n+2)},$$

$$\int_x^b (b-t)^{n+1} dt = \frac{(b-x)^{n+2}}{(n+2)},$$

$$\int_x^b (b-t)^n (t-a)dt = \frac{(b-x)^{n+1}[(n+2)(x-a)+(b-x)]}{(n+1)(n+2)}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Sonuç 4.2.16. (4.2.18) eşitsizliğinde $x = \frac{a+b}{2}$ olarak alınırsa,

$$\left|\int_a^b f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{1+(-1)^k}{(k+1)!}\right]\left(\frac{b-a}{2}\right)^{k+1} f^{(k)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1+1/q}(n+2)^{1/q}(n+1)!}$$

$$\times\left\{\left[(n+3)\left|f^{(n)}(a)\right|^q + (n+1)\left|f^{(n)}(b)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left[(n+1)\left|f^{(n)}(a)\right|^q + (n+3)\left|f^{(n)}(b)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right\}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.2.17. (4.2.18) eşitsizliğinde $x = a$ alınırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\left|\int_a^b f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k)}(a)\right|$$
$$\leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+2)^{\frac{1}{q}}(n+1)!} \left\{\left[(n+1)\left|f^{(n)}(a)\right|^q + \left|f^{(n)}(b)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right\}. \tag{4.2.19}$$

Sonuç 4.2.18. (4.2.18) eşitsizliğinde $x = b$ için,

$$\left|\int_a^b f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k(b-a)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k)}(b)\right|$$
$$\leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+2)^{\frac{1}{q}}(n+1)!} \left\{\left[\left|f^{(n)}(a)\right|^q + (n+1)\left|f^{(n)}(b)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right\} \tag{4.2.20}$$

eşitsizlik elde edilir.

Sonuç 4.2.19. Teorem 4.2.4'deki şartlar altında,

$$\left|\int_a^b f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^{k+1}}{(k+1)!} \left[\frac{f^{(k)}(a)+(-1)^k f^{(k)}(b)}{2}\right]\right|$$
$$\leq \frac{(b-a)^{n+1}}{2(n+2)^{\frac{1}{q}}(n+1)!} \left\{\left[(n+1)\left|f^{(n)}(a)\right|^q + \left|f^{(n)}(b)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right. \tag{4.2.21}$$
$$\left. + \left[\left|f^{(n)}(a)\right|^q + (n+1)\left|f^{(n)}(b)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right\}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat: (4.2.19) ve (4.2.20) eşitsizlikleri taraf tarafa toplanıp, üçgen eşitsizliği uygulanırsa (4.2.21) eşitsizliği elde edilir. ■

Sonuç 4.2.20. (4.2.18) eşitsizliğinde $n = 1$ seçilirse,

$$\left|f(x)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$

$$\leq \frac{1}{2(b-a)^{\frac{1}{q}}}\left\{(x-a)^2\left[\frac{(3b-2x-a)}{3}|f'(a)|^q+\frac{2(x-a)}{3}|f'(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+(b-x)^2\left[\frac{2(b-x)}{3}|f'(a)|^q+\frac{(b+2x-3a)}{3}|f'(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right\}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.2.5. $a, b \in I^{\circ}$ ve $a < b$ olmak üzere $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ tanımlı ve (a, b) aralığında n. mertebeden türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $f^{(n)} \in L[a, b]$ $(n \geq 1)$ ve $\left|f^{(n)}\right|^q$, $[a, b]$ aralığında konkav ve $x \in [a, b]$ ise

$$\left|\int_a^b f(t)dt-\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{(b-x)^{k+1}+(-1)^k(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}\right]f^{(k)}(x)\right|$$
$$\leq \frac{1}{n!}\left\{\frac{(x-a)^{np+1+1/q}}{np+1}\left|f^{(n)}\left(\frac{a+x}{2}\right)\right|+\frac{(b-x)^{np+1+1/q}}{np+1}\left|f^{(n)}\left(\frac{x+b}{2}\right)\right|\right\} \tag{4.2.22}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $p > 1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ dir.

İspat: Lemma 4.2.1 ve integraller için mutlak değer özelliği kullanılarak

$$\left|\int_a^b f(t)dt-\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{(b-x)^{k+1}+(-1)^k(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}\right]f^{(k)}(x)\right|$$

$$\leq \int_a^b |K_n(x,t)|\left|f^{(n)}(t)\right|dt$$

$$\leq \int_a^x \frac{|(t-a)^n|}{n!}\left|f^{(n)}(t)\right|dt+\int_x^b \frac{|(t-b)^n|}{n!}\left|f^{(n)}(t)\right|dt$$

$$=\frac{1}{n!}\left\{\int_a^x (t-a)^n\left|f^{(n)}(t)\right|dt+\int_x^b (b-t)^n\left|f^{(n)}(t)\right|dt\right\}$$

elde edilir. İntegraller için Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\left|\int_a^b f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{(b-x)^{k+1}+(-1)^k(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}\right]f^{(k)}(x)\right|$$

$$\leq \frac{1}{n!}\left\{\left(\int_a^x (t-a)^{np}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^x \left|f^{(n)}(t)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_x^b (b-t)^{np}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_x^b \left|f^{(n)}(t)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte $t = \frac{b-t}{b-a}a + \frac{t-a}{b-a}b$ alınıp, $\left|f^{(n)}\right|^q$ nün konkavlığı kullanılırsa

$$\left|\int_a^b f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{(b-x)^{k+1}+(-1)^k(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}\right]f^{(k)}(x)\right|$$

$$\leq \frac{1}{n!}\left\{\left(\int_a^x (t-a)^{np}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left((x-a)\left|f^{(n)}\left(\frac{a+x}{2}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left. + \left(\int_x^b (b-t)^{np}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left((b-x)\left|f^{(n)}\left(\frac{x+b}{2}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

$$= \frac{1}{n!}\left\{\frac{(x-a)^{np+1}}{np+1}\left|f^{(n)}\left(\frac{a+x}{2}\right)\right| + \frac{(b-x)^{np+1}}{np+1}\left|f^{(n)}\left(\frac{x+b}{2}\right)\right|\right\}$$

elde edilir. Burada

$$\int_a^x (t-a)^{np}dt = \frac{(x-a)^{np+1}}{np+1} \qquad ve \qquad \int_x^b (b-t)^{np}dt = \frac{(b-x)^{np+1}}{np+1}$$

sonuçları elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Sonuç 4.2.21. (4.2.22) eşitsizliğinde $x = \frac{a+b}{2}$ olarak alınırsa,

$$\left|\int_a^b f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{1+(-1)^k}{(k+1)!}\right]\left(\frac{b-a}{2}\right)^{k+1} f^{(k)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^{n+1/p}}{2^{n+1/p}(np+1)^{1/p}n!}\left\{\left|f^{(n)}\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right| + \left|f^{(n)}\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|\right\}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.2.22. (4.2.22) eşitsizliğinde $x = a$ alınırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\left|\int_a^b f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k)}(a)\right| \leq \frac{(b-a)^{n+1/p}}{(np+1)^{1/p} n!}\left|f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|. \tag{4.2.23}$$

Sonuç 4.2.23. (4.2.22) eşitsizliğinde $x = b$ için,

$$\left|\int_a^b f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k (b-a)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k)}(b)\right| \leq \frac{(b-a)^{n+1/p}}{(np+1)^{1/p} n!}\left|f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \tag{4.2.24}$$

eşitsizlik elde edilir.

Sonuç 4.2.24. Teorem 4.2.5'deki şartlar altında aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^{k+1}}{(k+1)!}\left[\frac{f^{(k)}(a)+(-1)^k f^{(k)}(b)}{2}\right]\right| \\ \leq \frac{(b-a)^{n+1/p}}{(np+1)^{1/p} n!}\left|f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\end{aligned} \tag{4.2.25}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat: (4.2.23) ve (4.2.24) eşitsizlikleri taraf tarafa toplanıp, üçgen eşitsizliği uygulanırsa (4.2.25) eşitsizliği elde edilir. ■

Sonuç 4.2.25. (4.2.22) eşitsizliğinde $n = 1$ seçilirse,

$$\left|f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right| \leq \frac{1}{(p+1)^{1/p}}\left\{\left|f'\left(\frac{a+x}{2}\right)\right| + \left|f'\left(\frac{x+b}{2}\right)\right|\right\}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.2.6. $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ tanımlı ve (a,b) aralığında n. mertebeden türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $f^{(n)} \in L[a,b]$ $(n \geq 2)$ ve $\left|f^{(n)}\right|$, $[a,b]$ aralığında konveks ise

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k-1}{(k+1)!}(a-b)^k f^{(k)}(b)\right|$$
$$\leq \frac{(b-a)^n}{2(n+2)!}\left\{n\left|f^{(n)}(a)\right|+(n^2-2)\left|f^{(n)}(b)\right|\right\} \tag{4.2.26}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat: Lemma 4.2.2'den ve integraller için mutlak değer özelliğinden

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k-1}{(k+1)!}(a-b)^k f^{(k)}(b)\right|$$
$$\leq \frac{(b-a)^n}{2n!}\int_0^1 (1-t)^{n-1}(2t+n-2)\left|f^{(n)}(ta+(1-t)b)\right|dt$$

elde edilir. $\left|f^{(n)}\right|$, $[a,b]$ aralığında konveks olduğundan

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k-1}{(k+1)!}(a-b)^k f^{(k)}(b)\right|$$
$$\leq \frac{(b-a)^n}{2n!}\int_0^1 (1-t)^{n-1}(2t+n-2)\left[t\left|f^{(n)}(a)\right|+(1-t)\left|f^{(n)}(b)\right|\right]dt$$
$$= \frac{(b-a)^n}{2(n+2)!}\left\{n\left|f^{(n)}(a)\right|+(n^2-2)\left|f^{(n)}(b)\right|\right\}$$

elde edilir. Burada

$$\int_0^1 (1-t)^{n-1}(2t^2+nt-2t)dt=\frac{n}{(n+1)(n+2)},$$
$$\int_0^1 (1-t)^{n}(2t^2+nt-2t)dt=\frac{n^2-2}{(n+1)(n+2)}$$

dır. Böylece ispat tamamlanmış olur. ∎

Sonuç 4.2.26. $M \in \mathbb{R}$ olmak üzere (4.2.26) eşitsizliğinde $\left|f^{(n)}\right| \leq M$ olarak alınırsa

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k-1}{(k+1)!}(a-b)^k f^{(k)}(b)\right|$$

$$\leq\frac{(b-a)^n(n-1)}{2(n+1)!}M$$

eşitsizliği elde edilir.

Aşağıda elde edilmiş sonuç Sarıkaya ve Aktan'nın 2011 de elde etmiş olduğu sonuçtur:

Sonuç 4.2.27. (4.2.26) eşitsizliğinde $n=2$ olarak seçilirse

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|\leq\frac{(b-a)^2}{12}\left\{\frac{|f''(a)|+|f''(b)|}{2}\right\}$$

(3.6) eşitsizliği elde edilir.

Lemma 4.2.3. $n\geq 1$ için, $f\colon I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tanımlı n. mertebeden türevlenebilen bir fonksiyon olsun. $a,b\in I$ ve $f^{(n)}\in L[a,b]$ için

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1+(-1)^k}{2^{k+1}(k+1)!}\right)(b-a)^{k+1}f^{(k)}\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$+(b-a)^{n+1}\int_0^1 M_n(t)f^{(n)}(ta+(1-t)b)dt$$

eşitliği elde edilir. Burada $M_n(t)\colon[0,1]\to\mathbb{R}$,

$$M_n(t)=\begin{cases}\dfrac{t^n}{n!}, & t\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]\\[2ex] \dfrac{(t-1)^n}{n!}, & t\in\left(\dfrac{1}{2},1\right]\end{cases}$$

dır (Latif and Dragomir 2014).

İspat: Bu Lemma'nın ispatı tümevarım yöntemiyle yapılacaktır. $n=1$ için eşitlik doğrudur. Yani

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + (b-a)\int_0^1 M_1(t)f'(ta+(1-t)b)dt \qquad (4.2.27)$$

olur. Burada

$$M_1(t) = \begin{cases} t, & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ t-1, & t \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

dır. (4.2.27) eşitliğini ispatlamak için kısmi integrasyon metodu kullanılır. Buna göre

$$\int_0^1 M_1(t)f'(ta+(1-t)b)dt$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} tf'(ta+(1-t)b)dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (t-1)f'(ta+(1-t)b)dt$$

$$= t\frac{f(ta+(1-t)b)}{a-b}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{a-b}\int_0^{\frac{1}{2}} f(ta+(1-t)b)dt$$

$$+ (t-1)\frac{f(ta+(1-t)b)}{a-b}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^1 - \frac{1}{a-b}\int_{\frac{1}{2}}^1 f(ta+(1-t)b)dt$$

$$= \frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{a-b} + \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)dx$$

olur. Eşitliğin her iki tarafı $(b-a)$ ile çarpılırsa (4.2.27) eşitliği elde edilir.

$n = m$ $(m \geq 1)$ için bu eşitliğin doğruluğu kabul edelim. $n = m+1$ için doğruluğunu göstermemiz gerekir. Yani

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{m} \left(\frac{1+(-1)^k}{2^{k+1}(k+1)!}\right)(b-a)^{k+1} f^{(k)}\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$+(b-a)^{m+2}\int_0^1 M_{m+1}(t)f^{(m+1)}(ta+(1-t)b)dt,$$

$$M_{m+1}(t)=\begin{cases}\dfrac{t^{m+1}}{(m+1)!}, & t\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]\\[2ex] \dfrac{(t-1)^{m+1}}{(m+1)!}, & t\in\left(\dfrac{1}{2},1\right].\end{cases}$$

Buna göre

$$(b-a)^{m+2}\int_0^1 M_{m+1}(t)f^{(m+1)}(ta+(1-t)b)dt$$

$$=(b-a)^{m+2}\left\{\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{t^{m+1}}{(m+1)!}f^{(m+1)}(ta+(1-t)b)dt\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{(t-1)^{m+1}}{(m+1)!}f^{(m+1)}(ta+(1-t)b)dt\right\}$$

$$=(b-a)^{m+2}\left\{\frac{t^{m+1}}{(m+1)!}\frac{f^{(m)}(ta+(1-t)b)}{a-b}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{a-b}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{t^m}{m!}f^{(m)}(ta+(1-t)b)dt\right.$$

$$\left.+\frac{(t-1)^{m+1}}{(m+1)!}\frac{f^{(m)}(ta+(1-t)b)}{a-b}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^1-\frac{1}{a-b}\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{(t-1)^m}{m!}f^{(m)}(ta+(1-t)b)dt\right\}$$

$$=(b-a)^{m+2}\left\{\frac{1}{2^{m+1}(m+1)!}\frac{f^{(m)}\left(\frac{a+b}{2}\right)}{a-b}-\frac{1}{a-b}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{t^m}{m!}f^{(m)}(ta+(1-t)b)dt\right.$$

$$\left.-\frac{(-1)^{m+1}}{2^{m+1}(m+1)!}\frac{f^{(m)}\left(\frac{a+b}{2}\right)}{a-b}-\frac{1}{a-b}\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{(t-1)^m}{m!}f^{(m)}(ta+(1-t)b)dt\right\}$$

$$=-\frac{1+(-1)^m}{2^{m+1}(m+1)!}(b-a)^{m+1}f^{(m)}\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$+(b-a)^{m+1}\int_0^1 M_m(t)f^{(m)}(ta+(1-t)b)dt$$

olur. Buradan

$$(b-a)^{m+1}\int_0^1 M_m(t)f^{(m)}(ta+(1-t)b)dt$$

$$=\frac{1+(-1)^m}{2^{m+1}(m+1)!}(b-a)^{m+1}f^{(m)}\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$+(b-a)^{m+2}\int_0^1 M_{m+1}(t)f^{(m+1)}(ta+(1-t)b)dt$$

elde edilir. Hipotezden

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{1+(-1)^k}{2^{k+1}(k+1)!}\right)(b-a)^{k+1}f^{(k)}\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$+\left(\frac{1+(-1)^m}{2^{m+1}(m+1)!}\right)(b-a)^{m+1}f^{(m)}\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$+(b-a)^{m+2}\int_0^1 M_{m+1}(t)f^{(m+1)}(ta+(1-t)b)dt$$

$$=\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{1+(-1)^k}{2^{k+1}(k+1)!}\right)(b-a)^{k+1}f^{(k)}\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$+(b-a)^{m+2}\int_0^1 M_{m+1}(t)f^{(m+1)}(ta+(1-t)b)dt$$

olur. Böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 4.2.7. $a,b\in I$ ve $a<b$ olmak üzere $f\colon I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tanımlı ve (a,b) aralığında n. mertebeden türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $f^{(n)}\in L[a,b]$ $(n\geq 1)$ ve $\left|f^{(n)}\right|$, $[a,b]$ aralığında konveks ise

$$\left|\int_a^b f(x)dx-\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1+(-1)^k}{2^{k+1}(k+1)!}\right)(b-a)^{k+1}f^{(k)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$
$$\leq\frac{(b-a)^{n+1}}{2^n(n+1)!}\left(\frac{\left|f^{(n)}(a)\right|+\left|f^{(n)}(b)\right|}{2}\right) \tag{4.2.28}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat: Lemma 4.2.3'den ve integraller için mutlak değer özelliğinden

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1+(-1)^k}{2^{k+1}(k+1)!}\right)(b-a)^{k+1} f^{(k)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq (b-a)^{n+1}\int_0^1 |M_n(t)|\left|f^{(n)}(ta+(1-t)b)\right|dt$$

$$= (b-a)^{n+1}\left\{\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^n}{n!}\left|f^{(n)}(ta+(1-t)b)\right|dt\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{(1-t)^n}{n!}\left|f^{(n)}(ta+(1-t)b)\right|dt\right\}$$

elde edilir. $\left|f^{(n)}\right|$, $[a,b]$ aralığında konveks olduğundan

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1+(-1)^k}{2^{k+1}(k+1)!}\right)(b-a)^{k+1} f^{(k)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq (b-a)^{n+1}\left\{\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^n}{n!}\left[t\left|f^{(n)}(a)\right|+(1-t)\left|f^{(n)}(b)\right|\right]dt\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{(1-t)^n}{n!}\left[t\left|f^{(n)}(a)\right|+(1-t)\left|f^{(n)}(b)\right|\right]dt\right\} \qquad (4.2.29)$$

$$= \frac{(b-a)^{n+1}}{n!}\left\{\int_0^{\frac{1}{2}}\left[t^{n+1}\left|f^{(n)}(a)\right|+(t^n-t^{n+1})\left|f^{(n)}(b)\right|\right]dt\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{1}{2}}^1\left[t(1-t)^n\left|f^{(n)}(a)\right|+(1-t)^{n+1}\left|f^{(n)}(b)\right|\right]dt\right\}$$

olarak bulunur. Burada

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^{n+1}dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^{n+1}dt = \frac{1}{2^{n+2}(n+2)},$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}(t^n - t^{n+1})dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 t(1-t)^n dt = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)} - \frac{1}{2^{n+2}(n+2)}$$

olur. (4.2.29) eşitsizliğinde yukarıda elde edilen sonuçlar kullanılırsa

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1+(-1)^k}{2^{k+1}(k+1)!}\right)(b-a)^{k+1} f^{(k)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^{n+1}}{2^n(n+1)!}\left(\frac{\left|f^{(n)}(a)\right| + \left|f^{(n)}(b)\right|}{2}\right)$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Sonuç 4.2.28. (4.2.28) eşitsizliğinde $n = 1$ alınırsa (3.1) eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.2.29. (4.2.28) eşitsizliğinde $n = 2$ alınırsa (3.4) eşitsizliği elde edilmiş olur.

Teorem 4.2.8. $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tanımlı ve (a, b) aralığında n. mertebeden türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $f^{(n)} \in L[a, b]$ $(n \geq 1)$ ve $\left|f^{(n)}\right|^q$, $[a, b]$ aralığında konveks ise

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1+(-1)^k}{2^{k+1}(k+1)!}\right)(b-a)^{k+1} f^{(k)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}n!}\left(\frac{1}{np+1}\right)^{\frac{1}{p}} \tag{4.2.30}$$

$$\times\left\{\left(\frac{\left|f^{(n)}(a)\right|^q + 3\left|f^{(n)}(b)\right|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{3\left|f^{(n)}(a)\right|^q + \left|f^{(n)}(b)\right|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dir.

İspat: Lemma 4.2.3 kulanılarak

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1+(-1)^k}{2^{k+1}(k+1)!}\right)(b-a)^{k+1} f^{(k)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq (b-a)^{n+1}\int_0^1 |M_n(t)|\left|f^{(n)}(ta+(1-t)b)\right|dt$$

$$= (b-a)^{n+1}\left\{\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^n}{n!}\left|f^{(n)}(ta+(1-t)b)\right|dt\right.$$

$$\left. + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{(1-t)^n}{n!}\left|f^{(n)}(ta+(1-t)b)\right|dt\right\}$$

elde edilir. İntegraller için Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1+(-1)^k}{2^{k+1}(k+1)!}\right)(b-a)^{k+1} f^{(k)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$= \frac{(b-a)^{n+1}}{n!}\left\{\left(\int_0^{\frac{1}{2}} t^{np}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left|f^{(n)}(ta+(1-t)b)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left. + \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^{np}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^1\left|f^{(n)}(ta+(1-t)b)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

olur. $\left|f^{(n)}\right|^q$, $[a,b]$ aralığında konveks olduğundan

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1+(-1)^k}{2^{k+1}(k+1)!}\right)(b-a)^{k+1} f^{(k)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^{n+1}}{n!}\left\{\left(\int_0^{\frac{1}{2}} t^{np}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left[t\left|f^{(n)}(a)\right|^q + (1-t)\left|f^{(n)}(b)\right|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left. + \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^{np}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^1\left[t\left|f^{(n)}(a)\right|^q + (1-t)\left|f^{(n)}(b)\right|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

$$= \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}n!}\left(\frac{1}{np+1}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times \left\{ \left(\frac{\left|f^{(n)}(a)\right|^q + 3\left|f^{(n)}(b)\right|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{3\left|f^{(n)}(a)\right|^q + \left|f^{(n)}(b)\right|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} \right\}$$

olur. Burada

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^{np} dt = \int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-t)^{np} dt = \frac{1}{2^{np+1}(np+1)}$$

dir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ∎

Sonuç 4.2.30. (4.2.30) eşitsizliğinde $n = 1$ alınırsa (3.2) eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.2.31. (4.2.30) eşitsizliğinde $n = 2$ alınırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{16}\left(\frac{1}{2p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left\{ \left(\frac{|f''(a)|^q + 3|f''(b)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{3|f''(a)|^q + |f''(b)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} \right\}.$$

Teorem 4.2.9. $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tanımlı ve (a, b) aralığında $n.$ mertebeden türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $f^{(n)} \in L[a, b]$ $(n \geq 1)$, $p > 1$ ve $\left|f^{(n)}\right|^q$, $[a, b]$ aralığında konveks ise

$$\left|\int_a^b f(x)dx-\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1+(-1)^k}{2^{k+1}(k+1)!}\right)(b-a)^{k+1}f^{(k)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\le\frac{(b-a)^{n+1}}{n!}\left(\frac{q-1}{nq+q-p-1}\right)^{1-\frac{1}{q}}\frac{1}{2^{n+1+1/q}}$$

$$\times\left\{\left(\frac{1}{p+2}\left|f^{(n)}(a)\right|^q+\frac{3p+5}{(p+1)(p+2)}\left|f^{(n)}(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right. \tag{4.2.31}$$

$$\left.+\left(\frac{3p+5}{(p+1)(p+2)}\left|f^{(n)}(a)\right|^q+\frac{1}{p+2}\left|f^{(n)}(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat: Lemma 4.2.3 ve integraller için mutlak değer özelliği kullanılarak

$$\left|\int_a^b f(x)dx-\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1+(-1)^k}{2^{k+1}(k+1)!}\right)(b-a)^{k+1}f^{(k)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\le(b-a)^{n+1}\int_0^1|M_n(t)|\left|f^{(n)}(ta+(1-t)b)\right|dt$$

$$=\frac{(b-a)^{n+1}}{n!}\left\{\int_0^{\frac{1}{2}}t^n\left|f^{(n)}(ta+(1-t)b)\right|dt\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{1}{2}}^1(1-t)^n\left|f^{(n)}(ta+(1-t)b)\right|dt\right\}$$

$$=\frac{(b-a)^{n+1}}{n!}\left\{\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{t^nt^{p/q}}{t^{p/q}}\left|f^{(n)}(ta+(1-t)b)\right|dt\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{(1-t)^n(1-t)^{p/q}}{(1-t)^{p/q}}\left|f^{(n)}(ta+(1-t)b)\right|dt\right\}$$

elde edilir. İntegraller için Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\left|\int_a^b f(x)dx-\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1+(-1)^k}{2^{k+1}(k+1)!}\right)(b-a)^{k+1}f^{(k)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq\frac{(b-a)^{n+1}}{n!}\left\{\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\frac{t^n}{t^{p/q}}\right]^{\frac{q}{q-1}}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}t^p\left|f^{(n)}(ta+(1-t)b)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\int_{\frac{1}{2}}^1\left[\frac{(1-t)^n}{(1-t)^{p/q}}\right]^{\frac{q}{q-1}}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^1(1-t)^p\left|f^{(n)}(ta+(1-t)b)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

olur. $\left|f^{(n)}\right|^q$, $[a,b]$ aralığında konveks olduğundan

$$\left|\int_a^b f(x)dx-\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1+(-1)^k}{2^{k+1}(k+1)!}\right)(b-a)^{k+1}f^{(k)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq\frac{(b-a)^{n+1}}{n!}\left\{\left(\int_0^{\frac{1}{2}}t^{\frac{nq-p}{q-1}}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}t^p\left[t\left|f^{(n)}(a)\right|^q+(1-t)\left|f^{(n)}(b)\right|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\int_{\frac{1}{2}}^1(1-t)^{\frac{nq-p}{q-1}}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^1(1-t)^p\left[t\left|f^{(n)}(a)\right|^q+(1-t)\left|f^{(n)}(b)\right|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

$$=\frac{(b-a)^{n+1}}{n!}\left(\frac{q-1}{nq+q-p-1}\right)^{1-\frac{1}{q}}\frac{1}{2^{n+1+1/q}}$$

$$\times\left\{\left(\frac{1}{p+2}\left|f^{(n)}(a)\right|^q+\frac{3p+5}{(p+1)(p+2)}\left|f^{(n)}(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{3p+5}{(p+1)(p+2)}\left|f^{(n)}(a)\right|^q+\frac{1}{p+2}\left|f^{(n)}(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

olarak bulunur. Burada

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^{\frac{nq-p}{q-1}} dt = \int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-t)^{\frac{nq-p}{q-1}} dt = \frac{q-1}{(nq+q-p-1)2^{\frac{nq+q-p-1}{q-1}}}$$

dır. Böylece ispat tamamlanır. ■

Sonuç 4.2.32. Teorem 4.2.9'da $n = 1$ alınırsa

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{q-1}{2q-p-1}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left\{\left(\frac{1}{p+2}|f'(a)|^q + \frac{3p+5}{(p+1)(p+2)}|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left. + \left(\frac{3p+5}{(p+1)(p+2)}|f'(a)|^q + \frac{1}{p+2}|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

elde edilir.

Sonuç 4.2.33. (4.2.31) eşitsizliğinde $n = 2$ seçilirse

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{16}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{q-1}{3q-p-1}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left\{\left(\frac{1}{p+2}|f''(a)|^q + \frac{3p+5}{(p+1)(p+2)}|f''(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left. + \left(\frac{3p+5}{(p+1)(p+2)}|f''(a)|^q + \frac{1}{p+2}|f''(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

elde edilir.

Teorem 4.2.10. $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tanımlı ve (a, b) aralığında $n.$ mertebeden türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $f^{(n)} \in L[a, b]$ $(n \geq 1)$, $p > 1$ ve $\left|f^{(n)}\right|^q$, $[a, b]$ aralığında konveks ise

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1+(-1)^k}{2^{k+1}(k+1)!}\right)(b-a)^{k+1} f^{(k)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\le \frac{(b-a)^{n+1}}{n!}\left(\frac{1}{np}\right)^{\frac{1}{p}}\frac{1}{2^{n+1+1/q}}$$

$$\times\left\{\left(\frac{p}{2p+q}\left|f^{(n)}(a)\right|^q + \frac{p(3p+q)}{(p+q)(2p+q)}\left|f^{(n)}(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right. \tag{4.2.32}$$

$$\left.+\left(\frac{p(3p+q)}{(p+q)(2p+q)}\left|f^{(n)}(a)\right|^q + \frac{p}{2p+q}\left|f^{(n)}(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat: Lemma 4.2.3 ve integraller için mutlak değer özelliği kullanılarak

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1+(-1)^k}{2^{k+1}(k+1)!}\right)(b-a)^{k+1} f^{(k)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\le (b-a)^{n+1}\int_0^1 |M_n(t)|\left|f^{(n)}(ta+(1-t)b)\right|dt$$

$$= \frac{(b-a)^{n+1}}{n!}\left\{\int_0^{\frac{1}{2}} t^n\left|f^{(n)}(ta+(1-t)b)\right|dt\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^n\left|f^{(n)}(ta+(1-t)b)\right|dt\right\}$$

$$= \frac{(b-a)^{n+1}}{n!}\left\{\int_0^{\frac{1}{2}} t^{n-\frac{q}{p}}\left|f^{(n)}(ta+(1-t)b)\right|t^{\frac{q}{p}}dt\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^{n-\frac{q}{p}}\left|f^{(n)}(ta+(1-t)b)\right|(1-t)^{\frac{q}{p}}dt\right\}$$

elde edilir. Ağırlıklı Hölder eşitsizliği yukarıdaki eşitsizliğe uygulanırsa

$$\left|\int_a^b f(x)dx-\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1+(-1)^k}{2^{k+1}(k+1)!}\right)(b-a)^{k+1}f^{(k)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq\frac{(b-a)^{n+1}}{n!}\left\{\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left(t^{n-\frac{q}{p}}\right)^p t^{\frac{q}{p}}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left|f^{(n)}(ta+(1-t)b)\right|^q t^{\frac{q}{p}}dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\int_{\frac{1}{2}}^1\left((1-t)^{n-\frac{q}{p}}\right)^p(1-t)^{\frac{q}{p}}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^1\left|f^{(n)}(ta+(1-t)b)\right|^q(1-t)^{\frac{q}{p}}dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

olur. $\left|f^{(n)}\right|^q$, $[a,b]$ aralığında konveks olduğundan

$$\left|\int_a^b f(x)dx-\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1+(-1)^k}{2^{k+1}(k+1)!}\right)(b-a)^{k+1}f^{(k)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq\frac{(b-a)^{n+1}}{n!}\left\{\left(\int_0^{\frac{1}{2}}t^{np-1}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}t^{\frac{q}{p}}\left[t\left|f^{(n)}(a)\right|^q+(1-t)\left|f^{(n)}(b)\right|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\int_{\frac{1}{2}}^1(1-t)^{np-1}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^1(1-t)^{\frac{q}{p}}\left[t\left|f^{(n)}(a)\right|^q+(1-t)\left|f^{(n)}(b)\right|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

$$=\frac{(b-a)^{n+1}}{n!}\left(\frac{1}{np}\right)^{\frac{1}{p}}\frac{1}{2^{n+1+1/q}}$$

$$\times\left\{\left(\frac{p}{2p+q}\left|f^{(n)}(a)\right|^q+\frac{p(3p+q)}{(p+q)(2p+q)}\left|f^{(n)}(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{p(3p+q)}{(p+q)(2p+q)}\left|f^{(n)}(a)\right|^q+\frac{p}{2p+q}\left|f^{(n)}(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

elde edilir. Burada

$$\int_0^{\frac{1}{2}}t^{np-1}dt=\int_{\frac{1}{2}}^1(1-t)^{np-1}dt=\frac{1}{2^{np}np}$$

dır. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Sonuç 4.2.34. (4.2.32) eşitsizliğinde $n = 1$ seçilirse

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left\{\left(\frac{p}{2p+q}|f'(a)|^q + \frac{p(3p+q)}{(p+q)(2p+q)}|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left. + \left(\frac{p(3p+q)}{(p+q)(2p+q)}|f'(a)|^q + \frac{p}{2p+q}|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.2.35. (4.2.32) eşitsizliğinde $n = 2$ seçilirse

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{32}\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left\{\left(\frac{p}{2p+q}|f''(a)|^q + \frac{p(3p+q)}{(p+q)(2p+q)}|f''(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left. + \left(\frac{p(3p+q)}{(p+q)(2p+q)}|f''(a)|^q + \frac{p}{2p+q}|f''(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.2.11. $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tanımlı ve (a, b) aralığında n. mertebeden türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $f^{(n)} \in L[a, b]$ $(n \geq 1)$, $\left|f^{(n)}\right|^q$, $[a, b]$ aralığında konveks ve $q \geq 1$ ise

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1+(-1)^k}{2^{k+1}(k+1)!}\right)(b-a)^{k+1} f^{(k)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!}\left\{\left(\frac{n+1}{2n+4}\left|f^{(n)}(a)\right|^q + \frac{n+3}{2n+4}\left|f^{(n)}(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right. \tag{4.2.33}$$

$$\left. + \left(\frac{n+3}{2n+4}\left|f^{(n)}(a)\right|^q + \frac{n+1}{2n+4}\left|f^{(n)}(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat: Lemma 4.2.3 ve integraller için mutlak değer özelliği kullanılarak

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1+(-1)^k}{2^{k+1}(k+1)!}\right)(b-a)^{k+1} f^{(k)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq (b-a)^{n+1}\int_0^1 |M_n(t)|\left|f^{(n)}(ta+(1-t)b)\right|dt$$

$$= \frac{(b-a)^{n+1}}{n!}\left\{\int_0^{\frac{1}{2}} t^n\left|f^{(n)}(ta+(1-t)b)\right|dt\right.$$

$$\left. + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^n\left|f^{(n)}(ta+(1-t)b)\right|dt\right\}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizliğe integraller için Power-mean eşitsizliği uygulanırsa

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1+(-1)^k}{2^{k+1}(k+1)!}\right)(b-a)^{k+1} f^{(k)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^{n+1}}{n!}\left\{\left(\int_0^{\frac{1}{2}} t^n dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}} t^n\left|f^{(n)}(ta+(1-t)b)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left. + \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^n dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^n\left|f^{(n)}(ta+(1-t)b)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

eşitsizliği elde edilir. $\left|f^{(n)}\right|^q$, $[a,b]$ aralığında konveks olduğundan

$$\left|\int_a^b f(x)dx-\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1+(-1)^k}{2^{k+1}(k+1)!}\right)(b-a)^{k+1}f^{(k)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq\frac{(b-a)^{n+1}}{n!}\left\{\left(\frac{1}{2^{n+1}(n+1)}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}t^n\left[t\left|f^{(n)}(a)\right|^q+(1-t)\left|f^{(n)}(b)\right|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{2^{n+1}(n+1)}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)^n\left[t\left|f^{(n)}(a)\right|^q+(1-t)\left|f^{(n)}(b)\right|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

$$=\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!}\left\{\left(\frac{n+1}{2n+4}\left|f^{(n)}(a)\right|^q+\frac{n+3}{2n+4}\left|f^{(n)}(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{n+3}{2n+4}\left|f^{(n)}(a)\right|^q+\frac{n+1}{2n+4}\left|f^{(n)}(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar. ■

Sonuç 4.2.36. (4.2.33) eşitsizliğinde $n=1$ seçilirse (3.3) eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.2.37. (4.2.33) eşitsizliğinde $n=2$ seçilirse, (3.6) eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.2.12. $a,b\in I$ ve $a<b$ olmak üzere $f:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tanımlı ve (a,b) aralığında n. mertebeden türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $f^{(n)}\in L[a,b]$ $(n\geq 1)$ ve $\left|f^{(n)}\right|^q$, $[a,b]$ aralığında konkav ise

$$\left|\int_a^b f(x)dx-\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1+(-1)^k}{2^{k+1}(k+1)!}\right)(b-a)^{k+1}f^{(k)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{np+1+1/q}(np+1)n!}\left\{\left|f^{(n)}\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|+\left|f^{(n)}\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|\right\} \quad (4.2.34)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dir.

İspat: Lemma 4.2.3 ve integraller için mutlak değer özelliği kullanılarak

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1+(-1)^k}{2^{k+1}(k+1)!} \right) (b-a)^{k+1} f^{(k)}\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|$$

$$\leq (b-a)^{n+1} \int_0^1 |M_n(t)| \left| f^{(n)}(ta+(1-t)b) \right| dt$$

$$= \frac{(b-a)^{n+1}}{n!} \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}} t^n \left| f^{(n)}(ta+(1-t)b) \right| dt \right.$$

$$\left. + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^n \left| f^{(n)}(ta+(1-t)b) \right| dt \right\}$$

elde edilir. İntegraller için Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1+(-1)^k}{2^{k+1}(k+1)!} \right) (b-a)^{k+1} f^{(k)}\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^{n+1}}{n!} \left\{ \left(\int_0^{\frac{1}{2}} t^{np} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left| f^{(n)}(ta+(1-t)b) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \tag{4.2.35}$$

$$\left. + \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^{np} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \left| f^{(n)}(ta+(1-t)b) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right\}$$

olur. (4.2.35) eşitsizliğinde Jensen eşitsizliği kullanılırsa

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left| f^{(n)}(ta+(1-t)b) \right|^q dt = \int_0^{\frac{1}{2}} t^0 \left| f^{(n)}(ta+(1-t)b) \right|^q dt$$

$$\leq \left(\int_0^{\frac{1}{2}} t^0 dt \right) \left| f^{(n)}\left(\frac{\int_0^{\frac{1}{2}} (ta+(1-t)b)dt}{\int_0^{\frac{1}{2}} t^0 dt} \right) \right|^q \tag{4.2.36}$$

$$= \frac{1}{2} \left| f^{(n)}\left(\frac{a+3b}{4}\right) \right|^q$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|f^{(n)}(ta+(1-t)b)\right|^{q}dt \leq \frac{1}{2}\left|f^{(n)}\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^{q} \tag{4.2.37}$$

olarak bulunur. (4.2.36) ve (4.2.37) eşitsizlikleri (4.2.35) eşitsizliğinde kullanılıp gerekli işlemler yapılırsa Teorem 4.2.12 elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Sonuç 4.2.38. (4.2.34) eşitsizliğinde $n=1$ olarak alınırsa

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}f(x)dx-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \leq \frac{(b-a)}{2^{p+1+1/q}(p+1)}\left\{\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|+\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|\right\}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.2.39. (4.2.34) eşitsizliğinde $n=2$ olarak alınırsa

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}f(x)dx-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^{2}}{4^{p+1}(2p+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\left\{\left|f''\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|+\left|f''\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|\right\}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.2.13. $a,b\in I$ ve $a<b$ olmak üzere $f\colon I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tanımlı ve (a,b) aralığında $n.$ mertebeden türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $f^{(n)}\in L[a,b]$ $(n\geq 1)$, $\left|f^{(n)}\right|^{q}$, $[a,b]$ aralığında konkav ve $q\geq 1$ ise

$$\left|\int_{a}^{b}f(x)dx-\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1+(-1)^{k}}{2^{k+1}(k+1)!}\right)(b-a)^{k+1}f^{(k)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!} \tag{4.2.38}$$

$$\times\left\{\left|f^{(n)}\left(\frac{(n+1)a+(n+3)b}{2(n+2)}\right)\right|+\left|f^{(n)}\left(\frac{(n+3)a+(n+1)b}{2(n+2)}\right)\right|\right\}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat: Lemma 4.2.3 ve integraller için mutlak değer özelliği kullanılarak

$$\left|\int_a^b f(x)dx-\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1+(-1)^k}{2^{k+1}(k+1)!}\right)(b-a)^{k+1}f^{(k)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq (b-a)^{n+1}\int_0^1 |M_n(t)|\left|f^{(n)}(ta+(1-t)b)\right|dt$$

$$=\frac{(b-a)^{n+1}}{n!}\left\{\int_0^{\frac{1}{2}} t^n\left|f^{(n)}(ta+(1-t)b)\right|dt\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^n\left|f^{(n)}(ta+(1-t)b)\right|dt\right\}$$

elde edilir. İntegraller için Power-mean eşitsizliği uygulanırsa

$$\left|\int_a^b f(x)dx-\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1+(-1)^k}{2^{k+1}(k+1)!}\right)(b-a)^{k+1}f^{(k)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^{n+1}}{n!}\left\{\left(\int_0^{\frac{1}{2}} t^n dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}} t^n\left|f^{(n)}(ta+(1-t)b)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^n dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^n\left|f^{(n)}(ta+(1-t)b)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}$$

elde edilir. Jensen eşitsizliği kullanılırsa

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1+(-1)^k}{2^{k+1}(k+1)!}\right)(b-a)^{k+1} f^{(k)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^{n+1}}{n!}\left\{\left(\int_0^{\frac{1}{2}} t^n dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} t^n dt\right)\left|f^{(n)}\left(\frac{\int_0^{\frac{1}{2}} t^n(ta+(1-t)b)dt}{\int_0^{\frac{1}{2}} t^n dt}\right)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^n dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left[\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^n dt\right)\left|f^{(n)}\left(\frac{\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^n(ta+(1-t)b)dt}{\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^n dt}\right)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right\}$$

$$= \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!}\left\{\left|f^{(n)}\left(\frac{(n+1)a+(n+3)b}{2(n+2)}\right)\right| + \left|f^{(n)}\left(\frac{(n+3)a+(n+1)b}{2(n+2)}\right)\right|\right\}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Sonuç 4.2.40. (4.2.38) eşitsizliğinde $n = 1$ olarak alınırsa

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \leq \frac{(b-a)}{8}\left\{\left|f'\left(\frac{a+2b}{3}\right)\right| + \left|f'\left(\frac{2a+b}{3}\right)\right|\right\}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.2.41. (4.2.38) eşitsizliğinde $n = 2$ olarak alınırsa

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \leq \frac{(b-a)^2}{48}\left\{\left|f''\left(\frac{3a+5b}{8}\right)\right| + \left|f''\left(\frac{5a+3b}{8}\right)\right|\right\}$$

eşitsizliği elde edilir.

Lemma 4.2.4. $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ tanımlı ve (a,b) aralığında n. mertebeden türevlenebilen bir fonksiyon olsun. $\forall x \in [a,b]$ için aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{k+1} f^{(k)}(a) + (-1)^k (b-x)^{k+1} f^{(k)}(b)}{(k+1)!}$$

$$+(-1)^n \frac{(x-a)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (t-1)^n f^{(n)}(tx+(1-t)a)dt$$

$$+(-1)^n \frac{(b-x)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n f^{(n)}(tx+(1-t)b)dt.$$

İspat: Bu Lemma'nın ispatı tümevarım yöntemiyle yapılacaktır. $n=1$ için eşitlik doğrudur. Yani

$$\frac{(x-a)}{b-a} f(a) + \frac{(b-x)}{b-a} f(b) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt$$

$$= \frac{(x-a)^2}{b-a} \int_0^1 (t-1) f'(tx+(1-t)a)dt \tag{4.2.39}$$

$$+ \frac{(b-x)^2}{b-a} \int_0^1 (1-t) f'(tx+(1-t)b)dt$$

olur. (4.2.39) eşitliğini ispatlamak için kısmi integrasyon metodu kullanılırsa

$$I_1 = \frac{(x-a)^2}{b-a} \int_0^1 (t-1) f'(tx+(1-t)a)dt$$

$$= \frac{(x-a)^2}{b-a} \left\{ (t-1) \frac{f(tx+(1-t)a)}{x-a} \Big|_0^1 - \frac{1}{x-a} \int_0^1 f(tx+(1-t)a)dt \right\}$$

$$= \frac{(x-a)}{b-a} f(a) - \frac{1}{b-a} \int_a^x f(t)dt$$

olur. Benzer şekilde

$$I_2 = \frac{(b-x)^2}{b-a} \int_0^1 (1-t) f'(tx+(1-t)b)dt$$

$$= \frac{(b-x)^2}{b-a} \left\{ (1-t) \frac{f(tx+(1-t)b)}{x-b} \Big|_0^1 - \frac{1}{x-b} \int_0^1 f(tx+(1-t)b)dt \right\}$$

$$= \frac{(b-x)}{b-a} f(b) - \frac{1}{b-a} \int_x^b f(t)dt$$

elde edilir. I_1 ve I_2 eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa (4.2.39) eşitliği elde edilir.

$n = m$ $(m \geq 1)$ için bu eşitliğin doğruluğu kabul edelim. $n = m + 1$ için doğruluğunu göstermemiz gerekir. Yani

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{k=0}^{m} \frac{(x-a)^{k+1} f^{(k)}(a) + (-1)^k (b-x)^{k+1} f^{(k)}(b)}{(k+1)!}$$

$$+(-1)^{m+1} \frac{(x-a)^{m+2}}{(m+1)!} \int_0^1 (t-1)^{m+1} f^{(m+1)}(tx + (1-t)a)dt$$

$$+(-1)^{m+1} \frac{(b-x)^{m+2}}{(m+1)!} \int_0^1 (1-t)^{m+1} f^{(m+1)}(tx + (1-t)b)dt.$$

O halde

$$I = \frac{(x-a)^{m+2}}{(m+1)!} \int_a^b (t-1)^{m+1} f^{(m+1)}(tx + (1-t)a)dt$$

$$+ \frac{(b-x)^{m+2}}{(m+1)!} \int_a^b (1-t)^{m+1} f^{(m+1)}(tx + (1-t)b)dt$$

$$= \frac{(x-a)^{m+2}}{(m+1)!} \left\{ (t-1)^{m+1} \frac{f^{(m)}(tx + (1-t)a)}{x-a} \Bigg|_0^1 \right.$$

$$\left. - \frac{m+1}{x-a} \int_0^1 (t-1)^m f^{(m)}(tx + (1-t)a)dt \right\}$$

$$+ \frac{(b-x)^{m+2}}{(m+1)!} \left\{ (1-t)^{m+1} \frac{f^{(m)}(tx + (1-t)b)}{x-b} \Bigg|_0^1 \right.$$

$$\left. + \frac{m+1}{x-b} \int_0^1 (1-t)^m f^{(m)}(tx + (1-t)b)dt \right\}$$

$$= \frac{(x-a)^{m+2}}{(m+1)!}\left\{(-1)^{m+2}\frac{f^{(m)}(a)}{x-a} - \frac{m+1}{x-a}\int_0^1 (t-1)^m f^{(m)}(tx+(1-t)a)dt\right\}$$

$$+\frac{(b-x)^{m+2}}{(m+1)!}\left\{-\frac{f^{(m)}(b)}{x-b} + \frac{m+1}{x-b}\int_0^1 (1-t)^m f^{(m)}(tx+(1-t)b)dt\right\}$$

$$= (-1)^{m+2}\frac{(x-a)^{m+1}}{(m+1)!}f^{(m)}(a) - \frac{(x-a)^{m+1}}{m!}\int_0^1 (t-1)^m f^{(m)}(tx+(1-t)a)dt$$

$$+\frac{(b-x)^{m+1}}{(m+1)!}f^{(m)}(b) - \frac{(b-x)^{m+1}}{m!}\int_0^1 (1-t)^m f^{(m)}(tx+(1-t)b)dt$$

olur. Hipotez kullanılarak

$$\frac{1}{(-1)^m}\int_a^b f(t)dt = \frac{1}{(-1)^m}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(x-a)^{k+1}f^{(k)}(a) + (-1)^k(b-x)^{k+1}f^{(k)}(b)}{(k+1)!}$$

$$+(-1)^{m+2}\frac{(x-a)^{m+1}}{(m+1)!}f^{(m)}(a) + \frac{(b-x)^{m+1}}{(m+1)!}f^{(m)}(b) - I$$

Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafı $(-1)^m$ ile çarpılırsa

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{k=0}^{m-1}\frac{(x-a)^{k+1}f^{(k)}(a) + (-1)^k(b-x)^{k+1}f^{(k)}(b)}{(k+1)!}$$

$$+\frac{(x-a)^{m+1}}{(m+1)!}f^{(m)}(a) + (-1)^m\frac{(b-x)^{m+1}}{(m+1)!}f^{(m)}(b)$$

$$-(-1)^m\left\{\frac{(x-a)^{m+2}}{(m+1)!}\int_a^b (t-1)^{m+1}f^{(m+1)}(tx+(1-t)a)dt\right.$$

$$\left.+\frac{(b-x)^{m+2}}{(m+1)!}\int_a^b (1-t)^{m+1}f^{(m+1)}(tx+(1-t)b)dt\right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{m}\frac{(x-a)^{k+1}f^{(k)}(a) + (-1)^k(b-x)^{k+1}f^{(k)}(b)}{(k+1)!}$$

$$+(-1)^{m+1}\frac{(x-a)^{m+2}}{(m+1)!}\int_a^b (t-1)^{m+1}f^{(m+1)}(tx+(1-t)a)dt$$

$$+(-1)^{m+1}\frac{(b-x)^{m+2}}{(m+1)!}\int_a^b (1-t)^{m+1}f^{(m+1)}(tx+(1-t)b)dt$$

olur. Böylece ispat tamamlanır. ■

Sonuç 4.2.42. Lemma 4.2.4'de $x = \frac{a+b}{2}$ olarak alınırsa

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a) + (-1)^k f^{(k)}(b)}{(k+1)!} \left(\frac{b-a}{2}\right)^{k+1}$$

$$+(-1)^n \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1} n!} \left\{ \int_0^1 (t-1)^n f^{(n)} \left(t\frac{a+b}{2} + (1-t)a\right) dt \right.$$

$$\left. + \int_0^1 (1-t)^n f^{(n)} \left(t\frac{a+b}{2} + (1-t)b\right) dt \right.$$

elde edilir.

Teorem 4.2.14. $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tanımlı ve (a, b) aralığında n. mertebeden türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $f^{(n)} \in L[a, b]$ $(n \geq 1)$ ve $|f^{(n)}|$, $[a, b]$ aralığında konveks ise

$$\left| \int_a^b f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{k+1} f^{(k)}(a) + (-1)^k (b-x)^{k+1} f^{(k)}(b)}{(k+1)!} \right|$$

$$\leq \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+2)!} \left\{ (n+1)\left|f^{(n)}(a)\right| + \left|f^{(n)}(x)\right| \right\} \tag{4.2.40}$$

$$+ \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+2)!} \left\{ \left|f^{(n)}(x)\right| + (n+1)\left|f^{(n)}(b)\right| \right\}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $x \in [a, b]$ dir.

İspat: Lemma 4.2.4 ve integraller için mutlak değer özelliği kullanılırsa

$$\left| \int_a^b f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{k+1} f^{(k)}(a) + (-1)^k (b-x)^{k+1} f^{(k)}(b)}{(k+1)!} \right|$$

$$\leq \frac{(x-a)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n \left|f^{(n)}(tx + (1-t)a)\right| dt$$

$$+\frac{(b-x)^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-t)^n \left|f^{(n)}(tx+(1-t)b)\right| dt$$

olur. $\left|f^{(n)}\right|$, $[a,b]$ aralığında konveks olduğundan

$$\left|\int_a^b f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{k+1} f^{(k)}(a) + (-1)^k (b-x)^{k+1} f^{(k)}(b)}{(k+1)!}\right|$$

$$\leq \frac{(x-a)^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-t)^n \left[t\left|f^{(n)}(x)\right| + (1-t)\left|f^{(n)}(a)\right|\right] dt$$

$$+\frac{(b-x)^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-t)^n \left[t\left|f^{(n)}(x)\right| + (1-t)\left|f^{(n)}(b)\right|\right] dt$$

$$= \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+2)!}\left\{(n+1)\left|f^{(n)}(a)\right| + \left|f^{(n)}(x)\right|\right\}$$

$$+\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+2)!}\left\{\left|f^{(n)}(x)\right| + (n+1)\left|f^{(n)}(b)\right|\right\}$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur. ■

Sonuç 4.2.43. (4.2.40) eşitsizliğinde $n = 1$ alınırsa (3.7) eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.2.44. (4.2.40) eşitsizliğinde $n = 1$ ve $x = \frac{a+b}{2}$ alınırsa (3.8) eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.2.45. (4.2.40) eşitsizliğinde $n = 2$ olarak alınırsa

$$\left|\frac{(x-a)f(a) + (b-x)f(b)}{(b-a)} - \frac{(x-a)^2 f'(a) - (b-x)^2 f'(b)}{2(b-a)} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$

$$\leq \frac{(x-a)^3}{(b-a)}\left[\frac{3|f''(a)| + |f''(x)|}{24}\right] + \frac{(b-x)^3}{(b-a)}\left[\frac{|f''(x)| + 3|f''(b)|}{24}\right]$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.2.46. Sonuç 4.2.45'de $x = \frac{a+b}{2}$ alınıp, $f'(x) = f'(a+b-x)$ (yani f' fonksiyonu simetrik fonksiyon) ise

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$
$$\leq \frac{(b-a)^2}{192}\left\{3|f''(a)| + 2\left|f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| + 3|f''(b)|\right\}$$
$$\leq \frac{(b-a)^2}{48}\{|f''(a)| + |f''(b)|\}$$

elde edilir.

Teorem 4.2.15. $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tanımlı ve (a, b) aralığında n. mertebeden türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $f^{(n)} \in L[a, b]$ $(n \geq 1)$, $\left|f^{(n)}\right|^q$, $[a, b]$ aralığında konveks ve $p > 1$ ise

$$\left|\int_a^b f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{k+1} f^{(k)}(a) + (-1)^k (b-x)^{k+1} f^{(k)}(b)}{(k+1)!}\right|$$
$$\leq \left(\frac{1}{np+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left\{\frac{(x-a)^{n+1}}{n!}\left[\frac{\left|f^{(n)}(a)\right|^q + \left|f^{(n)}(x)\right|^q}{2}\right]^{\frac{1}{q}}\right. \tag{4.2.41}$$
$$\left. + \frac{(b-x)^{n+1}}{n!}\left[\frac{\left|f^{(n)}(x)\right|^q + \left|f^{(n)}(b)\right|^q}{2}\right]^{\frac{1}{q}}\right\}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $x \in [a, b]$ dir.

İspat: Lemma 4.2.4 ve integraller için mutlak değer özelliği kullanılırsa

$$\left|\int_a^b f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{k+1} f^{(k)}(a) + (-1)^k (b-x)^{k+1} f^{(k)}(b)}{(k+1)!}\right|$$

$$\leq \frac{(x-a)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n \left|f^{(n)}(tx+(1-t)a)\right| dt$$

$$+ \frac{(b-x)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n \left|f^{(n)}(tx+(1-t)b)\right| dt$$

olur. İntegraller için Hölder eşitsizliğinden

$$\left|\int_a^b f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{k+1} f^{(k)}(a) + (-1)^k (b-x)^{k+1} f^{(k)}(b)}{(k+1)!}\right|$$

$$\leq \frac{(x-a)^{n+1}}{n!} \left(\int_0^1 (1-t)^{np} dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left|f^{(n)}(tx+(1-t)a)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+ \frac{(b-x)^{n+1}}{n!} \left(\int_0^1 (1-t)^{np} dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left|f^{(n)}(tx+(1-t)b)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. $\left|f^{(n)}\right|^q$, $[a,b]$ aralığında konveks olduğundan

$$\left|\int_a^b f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{k+1} f^{(k)}(a) + (-1)^k (b-x)^{k+1} f^{(k)}(b)}{(k+1)!}\right|$$

$$\leq \frac{(x-a)^{n+1}}{n!} \left(\frac{1}{np+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left[t\left|f^{(n)}(x)\right|^q + (1-t)\left|f^{(n)}(a)\right|^q\right] dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+ \frac{(b-x)^{n+1}}{n!} \left(\frac{1}{np+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left[t\left|f^{(n)}(x)\right|^q + (1-t)\left|f^{(n)}(b)\right|^q\right] dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left(\frac{1}{np+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left\{ \frac{(x-a)^{n+1}}{n!} \left[\frac{\left|f^{(n)}(a)\right|^q + \left|f^{(n)}(x)\right|^q}{2}\right]^{\frac{1}{q}} \right.$$

$$\left. + \frac{(b-x)^{n+1}}{n!} \left[\frac{\left|f^{(n)}(x)\right|^q + \left|f^{(n)}(b)\right|^q}{2}\right]^{\frac{1}{q}} \right\}$$

elde edilir. Burada

$$\int_0^1 (1-t)^{np} dt = \frac{1}{np+1}$$

dir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Sonuç 4.2.47. (4.2.41) eşitsizliğinde $n = 1$ alınırsa (3.9) eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.2.48. (4.2.41) eşitsizliğinde $n = 2$ olarak alınırsa

$$\left|\frac{(x-a)f(a)+(b-x)f(b)}{(b-a)} - \frac{(x-a)^2 f'(a)-(b-x)^2 f'(b)}{2(b-a)} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$

$$\leq \left(\frac{1}{2p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left\{\frac{(x-a)^3}{2(b-a)}\left[\frac{|f''(a)|^q+|f''(x)|^q}{2}\right]^{\frac{1}{q}} + \frac{(b-x)^3}{2(b-a)}\left[\frac{|f''(x)|^q+|f''(b)|^q}{2}\right]^{\frac{1}{q}}\right\}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.2.49. Sonuç 4.2.48'de $x = \frac{a+b}{2}$ alınıp, $f'(x) = f'(a+b-x)$ (yani f' fonksiyonu simetrik fonksiyon) ise

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{16}\left(\frac{1}{2p+1}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times \left\{\left[\frac{|f''(a)|^q + \left|f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{2}\right]^{\frac{1}{q}} + \left[\frac{\left|f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q + |f''(b)|^q}{2}\right]^{\frac{1}{q}}\right\}$$

elde edilir.

Teorem 4.2.16. $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tanımlı ve (a, b) aralığında n. mertebeden türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $f^{(n)} \in L[a, b]$ $(n \geq 1)$ ve $\left|f^{(n)}\right|^q$, $[a, b]$ aralığında konveks ise

$$\left|\int_a^b f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{k+1} f^{(k)}(a) + (-1)^k (b-x)^{k+1} f^{(k)}(b)}{(k+1)!}\right|$$

$$\leq \left(\frac{q-1}{nq+q-p-1}\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times \left\{\frac{(x-a)^{n+1}}{n!}\left[\frac{1}{(p+2)}\left|f^{(n)}(a)\right|^q + \frac{1}{(p+1)(p+2)}\left|f^{(n)}(x)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right. \tag{4.2.42}$$

$$\left. + \frac{(b-x)^{n+1}}{n!}\left[\frac{1}{(p+1)(p+2)}\left|f^{(n)}(x)\right|^q + \frac{1}{(p+2)}\left|f^{(n)}(b)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right\}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $x \in [a, b]$ dir.

İspat: Lemma 4.2.4 ve integraller için mutlak değer özelliği kullanılırsa

$$\left|\int_a^b f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{k+1} f^{(k)}(a) + (-1)^k (b-x)^{k+1} f^{(k)}(b)}{(k+1)!}\right|$$

$$\leq \frac{(x-a)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n \left|f^{(n)}(tx + (1-t)a)\right| dt$$

$$+ \frac{(b-x)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n \left|f^{(n)}(tx + (1-t)b)\right| dt$$

$$= \frac{(x-a)^{n+1}}{n!} \int_0^1 \frac{(1-t)^n (1-t)^{p/q}}{(1-t)^{p/q}} \left|f^{(n)}(tx + (1-t)a)\right| dt$$

$$+ \frac{(b-x)^{n+1}}{n!} \int_0^1 \frac{(1-t)^n (1-t)^{p/q}}{(1-t)^{p/q}} \left|f^{(n)}(tx + (1-t)b)\right| dt$$

olur. İntegraller için Hölder eşitsizliği kullanılırsa

$$\left|\int_a^b f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-a)^{k+1}f^{(k)}(a)+(-1)^k(b-x)^{k+1}f^{(k)}(b)}{(k+1)!}\right|$$

$$\leq \frac{(x-a)^{n+1}}{n!}\left(\int_0^1\left(\frac{(1-t)^n}{(1-t)^{p/q}}\right)^{\frac{q}{q-1}}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 (1-t)^p\left|f^{(n)}(tx+(1-t)a)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{(b-x)^{n+1}}{n!}\left(\int_0^1\left(\frac{(1-t)^n}{(1-t)^{p/q}}\right)^{\frac{q}{q-1}}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 (1-t)^p\left|f^{(n)}(tx+(1-t)b)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. $\left|f^{(n)}\right|^q$, $[a,b]$ aralığında konveks olduğundan

$$\left|\int_a^b f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-a)^{k+1}f^{(k)}(a)+(-1)^k(b-x)^{k+1}f^{(k)}(b)}{(k+1)!}\right|$$

$$\leq \frac{(x-a)^{n+1}}{n!}$$

$$\times\left(\int_0^1 (1-t)^{\frac{nq-p}{q-1}}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 (1-t)^p\left[t\left|f^{(n)}(x)\right|^q+(1-t)\left|f^{(n)}(a)\right|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{(b-x)^{n+1}}{n!}$$

$$\times\left(\int_0^1 (1-t)^{\frac{nq-p}{q-1}}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 (1-t)^p\left[t\left|f^{(n)}(x)\right|^q+(1-t)\left|f^{(n)}(b)\right|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\left(\frac{q-1}{nq+q-p-1}\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times\left\{\frac{(x-a)^{n+1}}{n!}\left[\frac{1}{(p+2)}\left|f^{(n)}(a)\right|^q+\frac{1}{(p+1)(p+2)}\left|f^{(n)}(x)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\frac{(b-x)^{n+1}}{n!}\left[\frac{1}{(p+1)(p+2)}\left|f^{(n)}(x)\right|^q+\frac{1}{(p+2)}\left|f^{(n)}(b)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right\}$$

elde edilir. Burada

$$\int_0^1 (1-t)^{\frac{nq-p}{q-1}} dt = \frac{q-1}{nq+q-p-1}$$

dır. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Sonuç 4.2.50. (4.2.42) eşitsizliğinde $n = 1$ alınırsa

$$\left|\frac{(x-a)f(a)+(b-x)f(b)}{(b-a)} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$

$$\leq \left(\frac{q-1}{2q-p-1}\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times\left\{\frac{(x-a)^2}{(b-a)}\left[\frac{1}{(p+2)}|f'(a)|^q + \frac{1}{(p+1)(p+2)}|f'(x)|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\frac{(b-x)^2}{(b-a)}\left[\frac{1}{(p+1)(p+2)}|f'(x)|^q + \frac{1}{(p+2)}|f'(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right\}$$

elde edilir.

Sonuç 4.2.51. Sonuç 3.2.50'da $x = \frac{a+b}{2}$ alınırsa

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{4}\left(\frac{q-1}{2q-p-1}\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times\left\{\left[\frac{1}{(p+2)}|f'(a)|^q + \frac{1}{(p+1)(p+2)}\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left[\frac{1}{(p+1)(p+2)}\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q + \frac{1}{(p+2)}|f'(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right\}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.2.52. (4.2.42) eşitsizliğinde $n = 2$ alınırsa

$$\left|\frac{(x-a)f(a)+(b-x)f(b)}{(b-a)} - \frac{(x-a)^2f'(a)-(b-x)^2f'(b)}{2(b-a)} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$

$$\leq \left(\frac{q-1}{3q-p-1}\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times\left\{\frac{(x-a)^3}{2(b-a)}\left[\frac{1}{(p+2)}|f''(a)|^q + \frac{1}{(p+1)(p+2)}|f''(x)|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left. + \frac{(b-x)^3}{2(b-a)}\left[\frac{1}{(p+1)(p+2)}|f''(x)|^q + \frac{1}{(p+2)}|f''(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right\}$$

elde edilir.

Sonuç 4.2.53. Sonuç 4.2.52'de $x = \frac{a+b}{2}$ alınıp, f' nün simetrikliği uygulanırsa

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{16}\left(\frac{q-1}{3q-p-1}\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times\left\{\left[\frac{1}{(p+2)}|f''(a)|^q + \frac{1}{(p+1)(p+2)}\left|f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left. + \left[\frac{1}{(p+1)(p+2)}\left|f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q + \frac{1}{(p+2)}|f''(b)|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right\}$$

elde edilir.

Teorem 4.2.17. $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tanımlı ve (a, b) aralığında n. mertebeden türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $f^{(n)} \in L[a, b]$ $(n \geq 1)$, $\left|f^{(n)}\right|^q$, $[a, b]$ aralığında konveks ve $q \geq 1$ ise

$$\left|\int_a^b f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{k+1} f^{(k)}(a) + (-1)^k (b-x)^{k+1} f^{(k)}(b)}{(k+1)!}\right|$$

$$\leq \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\left[\frac{(n+1)\left|f^{(n)}(a)\right|^q + \left|f^{(n)}(x)\right|^q}{(n+2)}\right]^{\frac{1}{q}} \tag{4.2.43}$$

$$+\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}\left[\frac{\left|f^{(n)}(x)\right|^q + (n+1)\left|f^{(n)}(b)\right|^q}{(n+2)}\right]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat: Lemma 4.2.4 ve integraller için mutlak değer özelliği kullanılırsa

$$\left|\int_a^b f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{k+1} f^{(k)}(a) + (-1)^k (b-x)^{k+1} f^{(k)}(b)}{(k+1)!}\right|$$

$$\leq \frac{(x-a)^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-t)^n \left|f^{(n)}(tx+(1-t)a)\right| dt$$

$$+\frac{(b-x)^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-t)^n \left|f^{(n)}(tx+(1-t)b)\right| dt$$

olur. İntegraller için Power-mean eşitsizliğinden

$$\left|\int_a^b f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{k+1} f^{(k)}(a) + (-1)^k (b-x)^{k+1} f^{(k)}(b)}{(k+1)!}\right|$$

$$\leq \frac{(x-a)^{n+1}}{n!}\left(\int_0^1 (1-t)^n dt\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 (1-t)^n \left|f^{(n)}(tx+(1-t)a)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{(b-x)^{n+1}}{n!}\left(\int_0^1 (1-t)^n dt\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 (1-t)^n \left|f^{(n)}(tx+(1-t)b)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. $\left|f^{(n)}\right|^q$, $[a,b]$ aralığında konveks olduğundan

$$\left|\int_a^b f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{k+1} f^{(k)}(a) + (-1)^k (b-x)^{k+1} f^{(k)}(b)}{(k+1)!}\right|$$

$$\leq \frac{(x-a)^{n+1}}{n!}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 (1-t)^n \left[t\left|f^{(n)}(x)\right|^q + (1-t)\left|f^{(n)}(a)\right|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{(b-x)^{n+1}}{n!}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 (1-t)^n \left[t\left|f^{(n)}(x)\right|^q + (1-t)\left|f^{(n)}(b)\right|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\left[\frac{(n+1)\left|f^{(n)}(a)\right|^q + \left|f^{(n)}(x)\right|^q}{(n+2)}\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$+\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}\left[\frac{\left|f^{(n)}(x)\right|^q + (n+1)\left|f^{(n)}(b)\right|^q}{(n+2)}\right]^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. Burada

$$\int_0^1 (1-t)^n dt = \frac{1}{n+1}$$

dır. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Sonuç 4.2.54. (4.2.43) eşitsizliğinde $n = 1$ alınırsa (3.10) eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.2.55. (4.2.43) eşitsizliğinde $n = 2$ alınırsa

$$\left|\frac{(x-a)f(a) + (b-x)f(b)}{(b-a)} - \frac{(x-a)^2 f'(a) - (b-x)^2 f'(b)}{2(b-a)} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$

$$\leq \frac{(x-a)^3}{6(b-a)}\left[\frac{3|f''(a)|^q + |f''(x)|^q}{4}\right]^{\frac{1}{q}} + \frac{(b-x)^3}{6(b-a)}\left[\frac{|f''(x)|^q + 3|f''(b)|^q}{4}\right]^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir.

Sonuç 4.2.56. Sonuç 4.2.55'de $x = \frac{a+b}{2}$ alınıp, f' nün simetrikliği uygulanırsa

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{48}\left\{\left[\frac{3|f''(a)|^q+\left|f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{4}\right]^{\frac{1}{q}}+\left[\frac{\left|f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+3|f''(b)|^q}{4}\right]^{\frac{1}{q}}\right\}$$

elde edilir.

Teorem 4.2.18. $a,b\in I$ ve $a<b$ olmak üzere $f\colon I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tanımlı ve (a,b) aralığında n. mertebeden türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $f^{(n)}\in L[a,b]$ $(n\geq 1)$ ve $\left|f^{(n)}\right|^q$, $[a,b]$ aralığında konkav ise

$$\left|\int_a^b f(t)dt-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-a)^{k+1}f^{(k)}(a)+(-1)^k(b-x)^{k+1}f^{(k)}(b)}{(k+1)!}\right|$$

$$\leq\left(\frac{1}{np+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left\{\frac{(x-a)^{n+1}}{n!}\left|f^{(n)}\left(\frac{a+x}{2}\right)\right|+\frac{(b-x)^{n+1}}{n!}\left|f^{(n)}\left(\frac{x+b}{2}\right)\right|\right\} \tag{4.2.44}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $p>1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ dir.

İspat: Lemma 4.2.4 ve integraller için mutlak değer özelliği kullanılarak

$$\left|\int_a^b f(t)dt-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-a)^{k+1}f^{(k)}(a)+(-1)^k(b-x)^{k+1}f^{(k)}(b)}{(k+1)!}\right|$$

$$\leq\frac{(x-a)^{n+1}}{n!}\int_0^1(1-t)^n\left|f^{(n)}(tx+(1-t)a)\right|dt$$

$$+\frac{(b-x)^{n+1}}{n!}\int_0^1(1-t)^n\left|f^{(n)}(tx+(1-t)b)\right|dt$$

elde edilir. İntegraller için Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\left|\int_a^b f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{k+1} f^{(k)}(a) + (-1)^k (b-x)^{k+1} f^{(k)}(b)}{(k+1)!}\right|$$

$$\leq \frac{(x-a)^{n+1}}{n!}\left(\int_0^1 (1-t)^{np}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \left|f^{(n)}(tx+(1-t)a)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \tag{4.2.45}$$

$$+\frac{(b-x)^{n+1}}{n!}\left(\int_0^1 (1-t)^{np}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \left|f^{(n)}(tx+(1-t)b)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

olur. (4.2.45) eşitsizliğinde Jensen eşitsizliği kullanılırsa

$$\int_0^1 \left|f^{(n)}(tx+(1-t)a)\right|^q dt = \int_0^1 t^0 \left|f^{(n)}(tx+(1-t)a)\right|^q dt$$

$$\leq \left(\int_0^1 t^0 dt\right)\left|f^{(n)}\left(\frac{\int_0^1 (tx+(1-t)a)dt}{\int_0^1 t^0 dt}\right)\right|^q \tag{4.2.46}$$

$$= \left|f^{(n)}\left(\frac{a+x}{2}\right)\right|^q$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\int_0^1 \left|f^{(n)}(tx+(1-t)b)\right|^q dt \leq \left|f^{(n)}\left(\frac{x+b}{2}\right)\right|^q \tag{4.2.47}$$

olarak bulunur. (4.2.46) ve (4.2.47) eşitsizlikleri (4.2.45) eşitsizliğinde kullanılıp gerekli işlemler yapılırsa Teorem 4.2.18'deki eşitsizlik elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Sonuç 4.2.57. (4.2.44) eşitsizliğinde $n = 1$ alınırsa (3.11) eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.2.58. (4.2.44) eşitsizliğinde $n = 2$ alınırsa

$$\left|\frac{(x-a)f(a)+(b-x)f(b)}{(b-a)} - \frac{(x-a)^2 f'(a) - (b-x)^2 f'(b)}{2(b-a)} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$

$$\leq \left(\frac{1}{2p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left\{\frac{(x-a)^3}{2(b-a)}\left|f''\left(\frac{a+x}{2}\right)\right| + \frac{(b-x)^3}{2(b-a)}\left|f''\left(\frac{x+b}{2}\right)\right|\right\}$$

elde edilir.

Sonuç 4.2.59. Sonuç 4.2.58'de $x=\frac{a+b}{2}$ alınıp, f' nün simetrikliği uygulanırsa

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$
$$\leq \frac{(b-a)^2}{16}\left(\frac{1}{2p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left\{\left|f''\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|+\left|f''\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|\right\}$$

elde edilir.

Teorem 4.2.19. $a,b\in I$ ve $a<b$ olmak üzere $f\colon I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tanımlı ve (a,b) aralığında $n.$ mertebeden türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $f^{(n)}\in L[a,b]$ $(n\geq 1)$, $\left|f^{(n)}\right|^q$, $[a,b]$ aralığında konkav ve $q\geq 1$ ise

$$\left|\int_a^b f(t)dt-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-a)^{k+1}f^{(k)}(a)+(-1)^k(b-x)^{k+1}f^{(k)}(b)}{(k+1)!}\right|$$
$$\leq\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\left|f^{(n)}\left(\frac{(n+1)a+x}{n+2}\right)\right|+\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}\left|f^{(n)}\left(\frac{x+(n+1)b}{n+2}\right)\right| \tag{4.2.48}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat: Lemma 4.2.4 ve integraller için mutlak değer özelliği kullanılarak

$$\left|\int_a^b f(t)dt-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-a)^{k+1}f^{(k)}(a)+(-1)^k(b-x)^{k+1}f^{(k)}(b)}{(k+1)!}\right|$$
$$\leq\frac{(x-a)^{n+1}}{n!}\int_0^1(1-t)^n\left|f^{(n)}(tx+(1-t)a)\right|dt$$
$$+\frac{(b-x)^{n+1}}{n!}\int_0^1(1-t)^n\left|f^{(n)}(tx+(1-t)b)\right|dt$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizliğe Power-mean eşitsizliği uygulanırsa

$$\left|\int_a^b f(t)dt-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-a)^{k+1}f^{(k)}(a)+(-1)^k(b-x)^{k+1}f^{(k)}(b)}{(k+1)!}\right|$$

$$\leq\frac{(x-a)^{n+1}}{n!}\left(\int_0^1(1-t)^n dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1(1-t)^n\left|f^{(n)}(tx+(1-t)a)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \quad (4.2.49)$$

$$+\frac{(b-x)^{n+1}}{n!}\left(\int_0^1(1-t)^n dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1(1-t)^n\left|f^{(n)}(tx+(1-t)b)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

olur. (4.2.49) eşitsizliğinde Jensen eşitsizliği kullanılırsa

$$\int_0^1(1-t)^n\left|f^{(n)}(tx+(1-t)a)\right|^q dt$$

$$\leq\left(\int_0^1(1-t)^n dt\right)\left|f^{(n)}\left(\frac{\int_0^1(1-t)^n(tx+(1-t)a)dt}{\int_0^1(1-t)^n dt}\right)\right|^q \quad (4.2.50)$$

$$=\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{q}}\left|f^{(n)}\left(\frac{(n+1)a+x}{n+2}\right)\right|^q$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\int_0^1(1-t)^n\left|f^{(n)}(tx+(1-t)b)\right|^q dt\leq\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{q}}\left|f^{(n)}\left(\frac{x+(n+1)b}{n+2}\right)\right|^q \quad (4.2.51)$$

olarak bulunur. (4.2.50) ve (4.2.51) eşitsizlikleri (4.2.49) eşitsizliğinde kullanılıp gerekli işlemler yapılırsa Teorem 4.2.19'daki eşitsizlik elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Sonuç 4.2.60. (4.2.48) eşitsizliğinde $n=1$ alınırsa (3.12) eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.2.61. (4.2.48) eşitsizliğinde $n=2$ alınırsa

$$\left|\frac{(x-a)f(a)+(b-x)f(b)}{(b-a)}-\frac{(x-a)^2f'(a)-(b-x)^2f'(b)}{2(b-a)}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right|$$

$$\leq\frac{(x-a)^3}{6(b-a)}\left|f''\left(\frac{3a+x}{4}\right)\right|+\frac{(b-x)^3}{6(b-a)}\left|f''\left(\frac{x+3b}{4}\right)\right|$$

elde edilir.

Sonuç 4.2.62. Sonuç 4.2.61'da $x = \frac{a+b}{2}$ alınıp, f' nün simetrikliği uygulanırsa

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right| \leq \frac{(b-a)^2}{48}\left\{\left|f''\left(\frac{7a+b}{8}\right)\right| + \left|f''\left(\frac{a+7b}{8}\right)\right|\right\}$$

eşitsizliği elde edilir.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu çalışmada, Tseng *et al.* (2011); Sarıkaya (2012) yıllarında yapılan Fejér tipli lemmalardan faydalanılarak yeni lemmalar yazılmış olup bu lemmalar kullanılarak yeni Fejér tipli eşitsizlikler elde edilmiştir. g fonksiyonunun özel değerleri için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler yazılmıştır.

Çalışmanın esasını oluşturan dördüncü bölümde, Lemma 4.2.1 ve Lemma 4.2.2 kullanılarak konveks fonksiyonlar için yeni genelleştirmeler yapılmıştır. $n.$ mertebeden türevlenebilen fonksiyonlar için iki yeni lemma ispatlanmış olup bu lemmalar yardımıyla yeni teoremler ve sonuçlar elde edilmiştir. Alınan özel değerler için literatürle uyumlu sonuçlar bulunmuştur.

Konuyla ilgilenen araştırmacılar, dördüncü bölümde verilen Lemma 4.1.1, Lemma 4.1.2 ve Lemma 4.1.3'den faydalanarak Fejér tipli yeni eşitsizlikler elde edebilirler. Ayrıca bu çalışmada $n.$ mertebeden türevlenebilen fonksiyonlar için elde edilmiş olan lemmaları farklı konveks fonksiyon sınıflarına uygulayabilir ve yeni integral eşitsizlikleri elde edebilirler.

KAYNAKLAR

Adams, R.A. and Essex, C., 2010. Calculus A Complete Course. Pearson Canada Inc., 934 pp, Toronto, Ontario.

Alomari, M., 2011. Several Inequalities of Hermite-Hadamard, Ostrowski and Simpson Type For $s-$ Convex, Quasi-Convex And $r-$ Convex Mappings And Applications. Ph. D. Thesis. Faculty Of Science And Technology, Universiti Kebangsaan, Malsysia, Bangi.

Alomari, M. and Darus, M., 2009. Fejér Inequality for Double Integrals. Facta Universitatis: Series Mathematics and Informatics, 24, 15-28.

Alomari, M., Darus, M., Dragomir, S.S. and Cerone, P., 2010. Ostrowski Type Inequalities for Functions Whose Derivatives are $s-$Convex In The Second Sense. Applied Mathematics Letters, 23, 1071-1076.

Anastassiou, G.A., 2013. General Gruss and Ostrowski Type Inequalities Involving s-Convexity. RGMIA Res. Rep. Coll., 16, Article 40.

Azpeitia, A.G., 1994. Convex Functions and the Hadamard Inequality. Rev. Colombiana Mat., 28, 7-12.

Bai, S.-P., Wang, S.-H. and Qi, F., 2012. Some Hermite-Hadamard type inequalities for n-time differentiable (α, m)-convex functions. Journal of Inequalities and Applications, 267.

Bayraktar, M., 2000. Fonksiyonel Analiz. ISBN 975-442-035-1.

Barnett, N.S. and Dragomir, S.S., 2001. An Ostrowski type inequality for double integrals and applications for cubature formulae. Soochow Journal of Mathematics, 27(1), 1-10.

Barnett, N.S. and Dragomir, S.S., 2006. Applications of Ostrowski's version of the Grüss inequality for trapezoid type rules. Tamkang Journal of Mathematics, 37(2), 163-173.

Barnett, N.S., Cerone, P., Dragomir, S.S., Pinheiro, M.R. and Sofo, A., 2003. Ostrowski type inequalities for functions whose modulus of the derivative are convex and applications. Inequalities Theory & Applications, Vol. 2, 19–32.

Beckenbach, E.F. and Bellman, R., 1961. Inequalities. Springer-Verlag, 198 pp., Berlin.

Bombardelli, M. and Varošanec, S., 2009. Properties of $h-$convex functions related to the Hermite-Hadamard-Fejér inequalities. Computers and Mathematics with Applications, 58, 1869-1877.

Carter, M. and Van Brunt, B., 2000. The Lebesgue-Stieltjes integral: a practical introduction. Springer, ISBN: 0387950125, 228 pages.

Cerone, P., Dragomir, S.S. and Roumeliotis, J., 1999. Some Ostrowski type inequalities for n-time differentiable mappings and applications. Demonstratio Mathematica, 32 (4), 697-712.

Cerone, P., Dragomir, S.S. and Roumeliotis, J., 1999. An inequality of Ostrowski type for mappings whose second derivatives are bounded and applications. East Asian Mathematical Journal, 15(1), 1-9.

Cerone, P., Dragomir, S.S., Roumeliotis, J. and Sunde, J., 2000. A new generalization of the trapezoid formula for n-time differentiable mappings and applications. Demonstratio Mathematica, 33 (4), 719-736.

Dragomir, S.S., 1997. The Ostrowski's integral inequality for Lipschitzian mappings and applications. Computers and Mathematics with Applications, 38, 33-37.

Dragomir, S.S., 2005. Some companions of Ostrowski's inequality for absolutely continuous functions and applications. Bull. Korean Math. Soc., 42(2), 213-230.

Dragomir, S.S., 2014. Jensen and Ostrowski type inequalities for general Lebesgue integral with applications. RGMIA Res. Rep. Coll., 17, Article 25.

Dragomir, S.S. and Agarwal, R.P., 1998. Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapezoidal formula. Appl. Math. Lett., 11(5), 91-95.

Dragomir, S.S., Agarwal, R.P. and Barnett, N.S., 2000. Inequalities for Beta and Gamma functions via some classical and new integral inequalities. Journal of Inequalities and Applications, 5, 103-165.

Dragomir, S.S., Cerone, P. and Roumeliotis, J., 2000. A new generalization of Ostrowski's integral inequality for mappings whose derivatives are bounded and applications in numerical integration and for special means. Applied Mathematics Letters, 13(1), 19-25.

Dragomir, S.S. and Pearce, C.E.M., 1998. Quasi-convex functions and Hadamard's inequality. Bull. Austral. Math. Soc., 57, 377-385.

Dragomir, S.S. and Pearce, C.E.M., 2000. Selected Topics on Hermite-Hadamard Tpye Inequalities and Applications. RGMIA, Monographs, http://rgmia.vu.edu.au/monographs.html.

Dragomir, S.S., Pečarić, J. and Persson, L.E., 1995. Some inequalities of Hadamard type. Soochow Journal of Mathematics, 21 (3), 335-341.

Dragomir, S.S. and Toader, G., 1993. Some inequalities for $m-$convex functions. Studia Univ. Babes-Bolyai. Mathematica, 38(1), 21-28.

Dragomir, S.S. and Wang, S., 1997. An inequality of Ostrowski-Grüss' type and its applications to the estimation of error bounds for some special means and for some numerical quadrature rules. Computers Math. Applic., 33(11), 15-20.

Fejér, L., 1906. Über die Fourierreihen. II, Math. Naturwiss, Anz. Ungar. Akad. Wiss., 24, 369-390.

Gill, P.M., Pearce, C.E.M. and Pečarić, J.E., 1997. Hadamard's inequality for $r-$convex functions. J. Math. Anal. Appl., 215, 461-470.

Godunova, E.K. and Levin, V.I., 1985. Neravenstva dlja funkcii širokogo klassa, soderžaščego vypuklye, monotonnye i nekotorye drugie vidy funkcii. Vyčislitel. Mat. i. Mat. Fiz. Mežvuzov. Sb. Nauč. Trudov, MGPI, Moskva, 138-142.

Greenberg, H.J. and Pierskalla, W.P., 1970. A review of quasi convex functions. Reprinted from Operations Research, 19, 7.

Guessab, A. and Schmeisser, G., 2002. Sharp integral inequalities of the Hermite-Hadamard type. J. Approx. Th., 115, 260-288.

Gürbüz, M., 2013. Farklı Türden Konveks Fonksiyonların Çarpımı Üzerine İntegral Eşitsizlikleri ve Uygulamaları. Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

Hardy, G., Littlewood, J.E. and Polya, G., 1952. Inequalities. 2nd Ed., Cambridge University Press, 324, United Kingdom.

Hudzik, H. and Maligranda, L., 1994. Some remarks on $s-$convex functions. Aequationes Math., 48, 100-111.

Hwang, D.-Y., 2003. Some inequalities for n-time differentiable mappings and applications. Kyungpook Math. J., 43, 335-343.
Hwang, D.-Y. and Ho, M.-I., 2009. Inequalities of Fejér type for g −convex dominated functions. Tamsui Oxford J. of Math. Sci., 25(1), 55-69.
Ion, D.A., 2007. Some estimates on the Hermite-Hadamard inequality through quasi-convex functions. Annals of University of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser., 34, 82-87.
Jiang, W.-D., Niu, D.-W., Hua, Y. and Qi, F., 2012. Generalizations of Hermite-Hadamard inequality to n-time differentiable functions which are s-convex in the second sense. Analysis, 32, 209-220.
Kavurmacı, H., 2012. Bazı Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar İçin Ostrowski ve Hermite-Hadamard Tipli İntegral Eşitsizlikleri. Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.
Kavurmacı, H., Avcı, M. and Özdemir, M.E., 2011. New inequalities of Hermite-Hadamard type for convex functions with applications. J. Inequal. Appl., 2011:86.
Kırmacı, U.S., 2004. Inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers to midpoint Formula. Appl. Math. Comp., 147, 137-146.
Kırmacı, U.S., 2008. Improvement and further generalization of inequalities for differentiable mappings and applications. Computers and Mathematics with Applications, 55, 485-493.
Kırmacı, U.S. and Özdemir, M.E., 2004. On some inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to midpoint formula. Applied Mathematics and Computation, 153, 361-368.
Latif, M.A. and Dragomir S.S., 2014. On Hermite-Hadamard type integral inequalities for n −times differentiable m − and (α, m) −logarithmically convex functions. RGMIA Res. Rep. Coll., 17, Article 14.
Liu, Z., 2009. Some companions of an Ostrowski type inequality and applications. Journal Of Inequalities In Pure And Applied Mathematics., 10(2), Article 52, 12 pp.
Minculate, N. and Mitroi, F.-C., 2012. Fejér-Type Inequalities. Aust. J. Math. Anal. Appl., 9(1), 1-8.
Miheşan, V.G., 1993. A generalization of the convexity, Seminar on Functional Equations. Approx. and Convex., Cluj-Napoca, Romania.
Mitrinović, D.S., 1970. Analytic Inequalities. Springer-Verlag, Berlin.
Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E. and Fink, A.M., 1991. Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives. Kluwer Academic Publishers, 587 pp, Dordrecht/Boston/London.
Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E. and Fink, A.M., 1993. Classical and New Inequalities in Analysis. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London.
Ngoc, N.P.N., Vinh, N.V. and Hien, P.T.T., 2009. Integral inequalities of Hadamard type for r −convex functions. International Mathematical Forum, 4(35), 1723-1728.
Niculescu, C.P. and Persson, L.E., 2006. Convex Functions and Their Applications. A Contemporary Approach, 255 pp, Springer Science+Business Media, Inc.
Orlicz, W., 1961. A note on modular spaces I. Bull. Acad. Polon Sci. Ser. Math. Astronom. Phsy., 9, 157-162.

Ostrowski, A., 1938. Uber die Absolutabweichung einer differentienbaren Funktionen von ihren Integralmittelwert. Comment. Math. Hel, 10, 226-227.

Özdemir, M.E., 2003. A theorem on mappings with bounded derivatives with applications to quadrature rules and means. Applied Mathematics and Computation, 138, 425-434.

Özdemir, M.E., Avcı, M. and Set, E., 2010. On some inequalities of Hermite-Hadamard type via m $-$convexity. Appl. Math. Lett., 23, 1065-1070.

Özdemir, M.E., Yıldız, Ç., Akdemir, A.O. and Set, E., 2013. On some inequalities for s-convex functions and applications. Journal of Inequalities and Applications, 2013:333.

Özdemir, M.E., Yıldız, Ç. and Gürbüz, M., 2014. A note on geometrically convex functions. Journal of Inequalities and Applications, 2014:180.

Pachpatte, B.G., 2004. A note on integral inequalities involving two log-convex functions. Mathematical Inequalities & Applications, 7(4), 511-515.

Pachpatte, B.G., 2004. New inequalities of Ostrowski and trapezoid type for n-time differentiable functions. Bull. Korean Math. Soc., 41(4), 633-639.

Pachpatte, B.G., 2005. Mathematical Inequalities. Elsevier B.V., 591 pp, Amsterdam, The Netherlands.

Pachpatte, B.G., 2007. Some new Ostrowski and Grüss type inequalities. Tamkang Journal of Mathematics, 38(2), 111-120.

Pearce, C.E.M. and Pečarić, J., 2000. Inequalities for differentiable mappings with applications to special means and quadrature formulæ. Applied Mathematics Letters, 13, 51-55.

Pearce, C.E.M. and Pečarić, J. and Šimić, V., 1998. Stolarsky means and Hadamard's inequality. J. Math. Anal. and Appl., 220, 99-109.

Pečarić, J., Proschan, F. and Tong, Y.L., 1992. Convex Functions. Partial Orderings and Statistical Applications. Academic Press, Inc.

Roberts, A.W. and Varberg, D. E., 1973. Convex Functions. Academic Press, 98 pp, New York.

Sarıkaya, M.Z., 2012. On new Hermite Hadamard Fejér type integral inequalities. Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math., 57(3), 377-386.

Sarıkaya, M.Z., 2012. On the Ostrowski type integral inequality for double integrals. Demonstratio Mathematica, 2 or 3(45).

Sarıkaya, M.Z. and Aktan, N., 2011. On the generalization some integral inequalities and their applications. Mathematical and Computer Modelling, 54(9-10), 2175-2182.

Sarıkaya, M.Z., Set, E. and Özdemir M.E., 2010. On some new inequalities of Hadamard type involving h $-$convex functions. Acta Math. Univ. Comenianae, Vol. LXXIX(2), 265-272.

Sarıkaya, M.Z., Set, E. and Ögülmüs H., 2013.Some new inequalities of Hermite-Hadamard type for mappings whose derivatives are s-convex in the second sense, Inter. Jour. Mod. Math. Sci., 8(3), 212-218.

Set, E., 2010. Bazı Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar İçin İntegral Eşitsizlikleri. Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

Set, E., Özdemir, M.E. and Dragomir, S.S., 2010. On the Hermite-Hadamard inequality and other integral inequalities involving two functions. Journal of Inequalities and Applications, Article ID: 148102, 9 pp.

Toader, G., 1984. Some generalizations of the convexity. Proceedings of The Colloquium On Approximation and Optimization. Univ. Cluj-Napoca, Cluj-Napoca, 329-338.

Toader, G.H., 1988. On a generalization of the convexity. Mathematica. 30(53), 83-87.

Tseng, K.-L., Hwang, S.-R. and Dragomir, S.S., 2007. On some new inequalities of Hermite-Hadamard-Fejér type involving convex functions. Demonstratio Mathematica, 40(1).

Tseng, K.-L., Hwang, S.-R. and Dragomir, S.S., 2010. Fejér-type inequalities (I). Journal of Inequalities and Applications, Article ID: 531976, 7 pp.

Tseng, K.-L., Yang, G.-S. and Hsu, K.-C., 2011. Some inequalities for differentiable mappings and applications to Fejér inequality and weighted trapezoidal formula. Taiwanese Journal of Mathematics, 15(4), 1737-1747.

Ujević, N., 2004. Sharp inequalities of Simpson type and Ostrowski type. Computers and Mathematics with Applications, 48, 145-151.

Wang, H.-S., Xi, Y.-B. and Qi, F., 2012. Some new inequalities of Hermite-Hadamard type for n-time differentiable functions which are m-convex. Analysis, 32, 247-262.

Wright, E.M., 1954. An inequality for convex functions. Amer. Math., Monthly 61, 620-622.

Varošanec, S., 2007. On h −convexity. J. Math. Anal. Appl., 326, 303-311.

Yang, G.S., Hwang, D.Y. and Tseng, K.L., 2004. Some inequalities for differentiable convex and concave mappings. Computers and Mathematics with Applications, 47, 207-216.

Yıldız, Ç., 2011. Quasi Konveks Fonksiyonlar İçin Eşitsizlikler ve Uygulamaları. Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

ÖZGEÇMİŞ

1985 yılında Erzurum'un Horasan ilçesinde doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Erzurum'da tamamladı. 2004 yılında Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği bölümüne kayıt yaptırdı ve 2008 yılında mezun oldu. Aynı yıl Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans öğrenimine başladı. 2011 yılında yüksek lisansını tamamlayarak aynı üniversitede ve aynı Anabilim Dalında doktora programına kayıt yaptırdı. 2011 yılı Aralık ayında Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Bölümünde Uzman olarak çalışmaya başladı. Evli olup halen Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi'nde çalışmaktadır.