**DÜZGÜN QUASI-LIPSCHITZIAN
DÖNÜŞÜMLERİN SONSUZ AİLELERİNİN
ORTAK SABİT NOKTALARINA
YENİ YAKLAŞIM METOTLARI**

Süheyla ELMAS

**Doktora Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı
Prof. Dr. Murat ÖZDEMİR
2014**

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

DÜZGÜN QUASI-LIPSCHITZIAN DÖNÜŞÜMLERİN SONSUZ AİLELERİNİN ORTAK SABİT NOKTALARINA YENİ YAKLAŞIM METOTLARI

Süheyla ELMAS

MATEMATİK ANABİLİM DALI
Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı

ERZURUM
2014

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAY FORMU

DÜZGÜN QUASI-LIPSCHITZIAN DÖNÜŞÜMLERİN SONSUZ AİLELERİNİN ORTAK SABİT NOKTALARINA YENİ YAKLAŞIM METOTLARI

Prof. Dr. Murat ÖZDEMİR danışmanlığında, Süheyla ELMAS tarafından hazırlanan bu çalışma 28/11/2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı - Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı'nda Doktora tezi olarak **oybirliği** ile kabul edilmiştir.

Başkan	: Prof. Dr. Sezgin AKBULUT	*İmza*	:
Üye	: Prof. Dr. Murat ÖZDEMİR	*İmza*	:
Üye	: Prof. Dr. Abdullah KAPLAN	*İmza*	:
Üye	: Doç. Dr. Zülfigar AKDOĞAN	*İmza*	:
Üye	: Doç. Dr. İsa YILDIRIM	*İmza*	:

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu 04/12/2014 tarih ve 48/1614 nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. İhsan EFEOĞLU
Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

DÜZGÜN QUASI-LIPSCHITZIAN DÖNÜŞÜMLERİN SONSUZ AİLELERİNİN ORTAK SABİT NOKTALARINA YENİ YAKLAŞIM METOTLARI

Süheyla ELMAS

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Murat ÖZDEMİR

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünde sabit nokta teorisinin tarihsel gelişimi ile ilgili bazı bilgiler verildikten sonra, ikinci bölümde tezde kullandığımız bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde konveks metrik uzayda asimptotik genişlemeyen, asimptotik quasi-genişlemeyen, düzgün quasi-Lipschitzian dönüşümlerle ilgili çalışmalara yer verilmiş ve daha sonra teoremlerimizde kullanacağımız bazı lemmalar ispatlanmıştır.

Araştırma Bulguları adını alan dördüncü bölümde ise ilk olarak konveks metrik uzayda düzgün quasi-Lipschitzian dönüşümlerin sınıfı için yeni bir iterasyon şeması teşkil edilmiş ve bu şemanın yakınsaması üzerinde çalışılmıştır. Son olarak Picard-Mann hibrit iterasyonu konveks metrik uzayda yazılarak bu şemanın yakınsaklığı çalışılmıştır. Son bölümde ise, tezimizde elde ettiğimiz sonuçlar değerlendirilmiştir.

2014, 59 sayfa

Anahtar Kelimeler: Ortak sabit nokta, düzgün quasi-Lipschitzian dönüşüm, tam konveks metrik uzay

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

NEW APPROACH METHODS FOR COMMON FIXED POINTS OF INFINITE FAMILIES OF UNIFORMLY QUASI-LIPSCHITZIAN MAPPINGS

Suheyla ELMAS

Ataturk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Analysis and Theory of Functions
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Murat OZDEMIR

This thesis consists of five sections. In the introduction part after being given historical development about fixed point theory, in the second part some basic definitions and theorems which we used in the thesis have been included. In the third section studies which about asymptotically nonexpansive mapping, asymptotically quasi- nonexpansive mapping, uniformly quasi-Lipschitzian mapping in convex metric spaces have been included and next some lemmas have been proved which we will use in our theorems.

In the forth section which is called Research Findings, first of all a new iteration process for the class of uniformly quasi-Lipschitzian mappings in convex metric spaces have been obtained and studied on its convergence. At last for the Picard-Mann hybrid iterative sequences are written in convex metric spaces and studied its convergence. In the last part some results which have been obtained in our thesis were reviewed.

2014, 59 pages

Keywords: Common fixed point, uniformly quasi-Lipschitzian mappings, complete convex metric spaces

TEŞEKKÜR

Doktora tezi olarak sunduğum bu çalışma, Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Bu çalışmada bana her türlü kolaylığı sağlayan, bilgi ve tecrübeleriyle beni destekleyen çok değerli hocam Sayın Prof. Dr. Murat ÖZDEMİR'e en içten dileklerimle teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Tezin hazırlanması sürecinde değerli fikirlerinden yararlandığım Sayın Prof. Dr. Sezgin AKBULUT'a, Sayın Doç. Dr. İsa YILDIRIM'a, Sayın Doç. Dr. Hükmi KIZILTUNÇ'a, Sayın Arş. Gör. Nazlı KARACA'ya ve Matematik bölümünde gerekli ilgiyi ve yardımı esirgemeyen anabilim dalımızın değerli öğretim üyelerine sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, çalışmalarım esnasında kendilerinden görmüş olduğum destek ve güvenden dolayı özellikle anneme, aileme ve dostlarıma teşekkürü bir borç bilirim.

Süheyla ELMAS
Kasım, 2014

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

(X, d, W)	Konveks metrik uzay
ℓ_∞	Sınırlı dizilerin kümesi
B_X	Kapalı birim yuvar
S_N	Birim yuvar yüzeyi
$(N, \Vert \quad \Vert)$	Normlu uzay
c_0	Sıfıra yakınsayan dizilerin kümesi
$x_n \to x$	Kuvvetli yakınsama
$x_n \rightharpoonup x$	Zayıf yakınsama
$\dim(N)$	N normlu uzayın boyutu
N^*	N nin normlu dual uzayı
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$F(T)$	T dönüşümünün sabit noktaların kümesi

ŞEKİLLER DİZİNİ

ÇİZELGELER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Sabit nokta teorisi çalışmaları genel olarak iki yönde gelişmektedir. Birincisi normlu lineer uzayların kompakt konveks alt kümeleri üzerinde tanımlı sürekli dönüşümler için sabit nokta teorisi, diğeri ise tam metrik uzaylar üzerinde tanımlı büzülme ve büzülme tipi dönüşümler için sabit nokta teorisidir.

Normlu lineer uzaylarda sabit nokta teorisi çalışmaları Brouwer ile başlamıştır. Brouwer, $\mathbb{R}^n$ nin kapalı birim yuvarından yine kendi üzerine tanımlanan sürekli dönüşümün sabit noktasının varlığını kanıtlamıştır. Daha sonra Schauder, Brouwer'ın teoremini $\mathbb{R}^n$ nin yerine Banach uzay alarak aşağıdaki şekilde genişletmiştir. "X bir Banach uzay, $C \subseteq X$ boş olmayan kompakt konveks bir alt küme ve $f: C \to C$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda f, C'de en az bir sabit noktaya sahiptir".

Tam metrik uzaylar üzerinde sabit nokta teorisi çalışmaları ise 1922 yılında Polonyalı matematikçi S. Banach ile başlamıştır. Banach, büzülme dönüşüm prensibi olarak da bilinen aşağıdaki teoremi vermiştir. "(X, d) bir tam metrik uzay ve $f: X \to X$ dönüşümü her $x, y \in X$ ve $\alpha \in [0,1)$ için $d(fx, fy) \leq \alpha d(x, y)$ eşitsizliğini sağlıyorsa f dönüşümü bir tek $z \in X$ sabit noktasına sahiptir, üstelik her $x \in X$ için $y_n = f^n x$ şeklinde tanımlanan $\{y_n\}$ dizisi z noktasına yakınsar."

Banach sabit nokta teoremi, dönüşümün sabit noktasını garanti ettiği gibi, Brouwer ve Schauder sabit nokta teoremlerinden farklı olarak bu sabit noktanın tekliğini ve nasıl bulunabileceği hakkında da yol göstermektedir.

Sabit nokta teorisinin temelini teşkil eden yukarıdaki teoremler daha sonra pek çok yazar tarafından genelleştirilmiştir. Örneğin Ciric çalışmalarını, "Fixed Point Theory" adlı kitabında toplamış, Kirk ve Sims, çeşitli yazarlar tarafından yazılmış olan makaleleri "Handbook of Metric Fixed Point Theory" adlı kitapta toplamış, Vasile Berinde çalışmalarını "Iterative Approximation of Fixed Points" adlı kitapta yayınlamıştır. Sabit nokta teorisi çalışanları için temel bir kitap olan “Fixed Point Theory and Applications” Agarwal, Meehan ve O’Regan tarafından yazılmıştır. Charles Chidume’nin yazmış olduğu “Geometric Properties of Banach Spaces and Nonlinear Iterations” adlı kitap sabit nokta teorisine ışık tutmaktadır. Sabit nokta teorisi çalışmaları sadece yukarıda bahsi geçen tam metrik ve normlu lineer uzaylarla sınırlı kalmayıp, yönlü Banach uzayları, düzgün uzaylar, fuzzy metrik uzaylar gibi uzaylarda da yapılmıştır.

Bizim tezimizde bahsi geçen konveks yapı ve konveks metrik uzay kavramı 1970 yılında Takahashi tarafından tanımlanmıştır. Daha sonra Shioji ve Takahashi (1999) Banach uzaylarda asimptotik genişlemeyen dönüşümlerle ilgili yakınsama üzerinde çalışmışlardır. Liu (2001) Banach uzaylarda asimptotik quasi-genişlemeyen dönüşümlerin hata terimli iterasyon dizisi için bazı gerek ve yeter şartlar elde etmiştir. Diğer taraftan Tian (2005), konveks metrik uzayda asimptotik quasi-genişlemeyen dönüşümler için sabit noktaya yakınsayan Ishikawa iterasyon dizisini teşkil etmiş ve bazı gerek ve yeter şartlar vermiştir. Jeong ve Kim (2006), Fukhar-ur-din ve Khan (2007) hem Banach uzaylarda hem de düzgün konveks Banach uzaylarda iki asimptotik quasi-genişlemeyen dönüşümle ilgili çalışma yapmıştır. Huang, asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin bir ailesi için iterasyon dizisi oluşturmuş ve uniformly Gateaux türevlenebilir norm ve uniform normal yapısı ile birlikte Banach uzaylarda asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin ortak sabit noktasına güçlü yakınsaması için çeşitli sonuçlar elde etmişlerdir. Son olarak Wang ve Liu (2009) konveks metrik uzayda iki düzgün quasi-Lipschitzian dönüşüm için yeni bir hata terimli iterasyon dizisi teşkil ederek yakınsaması üzerinde çalışmışlardır. Safeer Hussain Khan (2013) Picard-Mann hibrit iterasyonunu oluşturarak, bu iterasyonun Banach uzaylarda ve düzgün konveks Banach uzaylarda genişlemeyen dönüşüm sınıfları için yakınsaması üzerinde çalışmış ve Picard, Mann, Ishikawa iterasyonlarından daha hızlı olduğunu göstermiştir.

Biz bu tezde yukarıda bahsi geçen oldukça genel dönüşüm sınıfı olan düzgün quasi-Lipschitzian dönüşümlerin sonsuz üç ailesi için konveks metrik uzayda yeni bir iterasyon şeması teşkil ettik ve bu iterasyonun yakınsaması üzerinde çalıştık. Ayrıca Picard-Mann hibrit iterasyonunu ilk kez konveks metrik uzayda ifade ederek bu iterasyonun yakınsaklığını çalıştık.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Temel Tanım ve Kavramlar

Bu bölümde bazı temel tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1.1: X boş olmayan bir küme ve $d: X \times X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y, z \in X$ için,

M1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
M2. $d(x, y) = d(y, x)$
M3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

şartları sağlanıyorsa d ye X üzerinde bir metrik, d ile birlikte X e metrik uzay denir ve $X = (X, d)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.2: (X, d) bir metrik uzay, $x_0 \in X$ ve $r > 0$ bir reel sayı olsun.

a) $D(x_0;\ r) = \{x \in X: d(x; x_0) < r\}$ kümesine x_0 merkezli ve r yarıçaplı açık yuvar,
b) $\overline{D}(x_0;\ r) = \{x \in X: d(x; x_0) \leq r\}$ kümesine x_0 merkezli ve r yarıçaplı kapalı yuvar,
c) $S(x_0;\ r) = \{x \in X: d(x; x_0) = r\}$ kümesine x_0 merkezli ve r yarıçaplı yuvar yüzeyi denir.

Tanım 2.1.3: (X, d) bir metrik uzay ve $\{x_n\}$, X de bir dizi olsun.

$$\lim_{n \to \infty} d(x_n, x) = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, $\{x_n\}$ dizisine X de yakınsak ve x e de dizinin limiti denir. $\{x_n\}$ dizisi yakınsak ve limiti x ise, bu durum

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{veya} \quad x_n \to x$$

sembollerinden biri ile gösterilir.

Tanım 2.1.4: (X, d) bir metrik uzay ve $\{x_n\}$ bu uzayda bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n, m > n_0$ olduğunda

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı varsa, $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi denir.

Tanım 2.1.5: (X, d) bir metrik uzay olsun. X deki her $\{x_n\}$ Cauchy dizisi yakınsak ise, (X, d) metrik uzayına tam metrik uzay denir.

Tanım 2.1.6: (X, d) bir metrik uzay olsun. X deki her dizi yakınsak bir alt diziye sahip ise, (X, d) uzayına kompakt metrik uzay denir.

Tanım 2.1.7: (X, d) ve (Y, ρ) iki metrik uzay, $f: X \to Y$ bir dönüşüm ve $x_0 \in X$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için, $d(x, x_0) < \delta$ olduğunda $\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ veya denk bir ifade ile

$$f(D(x_0, \delta)) \subseteq D(f(x_0), \varepsilon)$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa, f ye x_0 noktasında süreklidir denir. f, X in her noktasında sürekli ise f ye X de süreklidir denir.

Tanım 2.1.8: N**,** F cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. $\| \quad \|: N \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun x deki değerini $\|x\|$ ile gösterelim. Bu fonksiyon için, N1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

N2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|, \ \ (\alpha \in F)$

N3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartları sağlanıyorsa, $\| \quad \|$ fonksiyonuna N de (veya N üzerinde) bir norm ve $(N, \| \quad \|)$ ikilisine de normlu uzay denir.

Tanım 2.1.9: L bir lineer uzay ve $A \subseteq L$ olsun. Her $x, y \in A$ için

$$B = \{z \in L: z = \alpha x + (1 - \alpha)y, 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A$$

ise, A kümesine konvekstir denir.

Tanım 2.1.10: N normlu lineer uzay olsun**.** N**,** $d(x, y) = \|x - y\|$ norm metriğine göre tam ise N ye Banach uzayı denir.

N nin reel veya kompleks lineer uzay oluşuna göre Banach uzayıda reel veya kompleks Banach uzayı olarak adlandırılır. Bundan sonra Banach uzayını B ile göstereceğiz.

Tanım 2.1.11: N bir normlu lineer uzay olsun. N de tanımlı tüm sürekli ve reel değerli lineer fonksiyonellerin kümesini $C(N, \mathbb{R})$ ile gösterelim. Yani $C(N, \mathbb{R}) = \{T: T: N \to \mathbb{R} \text{ lineer ve sürekli}\}$ olsun. Her $x \in N$ ve $T_1, T_2 \in C(N, \mathbb{R})$ için

$$\begin{cases} (T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x) \\ (\alpha T_1)(x) = \alpha T_1(x) \end{cases}$$

ve

$$\|f\| = sup\{|Tx|: \ x \in N\}$$

olarak tanımlanırsa, bu durumda $C(N, \mathbb{R})$ bir normlu lineer uzaydır. Bu $C(N, \mathbb{R})$ uzayına N nin normlu duali denir ve N^* ile gösterilir.

Tanım 2.1.12: N bir normlu uzay ve $S_N = \{x \in N : \|x\| = 1\}$ olsun. Eğer her $y \in S_N$ için

$$\frac{d}{dt}(\|x_0 + ty\|)\Big|_{t=0} = \lim_{t\to 0}\frac{\|x_0 + ty\| - \|x_0\|}{t}$$

limiti varsa, N in normu $x_0 \in S_x$ noktasında Gâteaux diferensiyellebilirdir denir. Yukarıdaki limit $\langle y, \nabla\|x_0\|\rangle$ ifadesiyle de gösterilebilir. Burada $\nabla\|x_0\|$, $\varphi(x) = \|x\|$ normunun $x = x_0$ noktasındaki gradiyenti olarak adlandırılır. N in normu, S_N kümesinin tüm noktalarında Gâteaux diferensiyellebilirse, N in normu Gâteaux diferensiyellebilirdir denir.

Tanım 2.2.13: B bir Banach uzayı olsun. $y \in S_N$ olmak üzere her bir $x \in S_N$ için

$$\lim_{t\to 0}\frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t}$$

limiti y den bağımsız olarak mevcutsa, B nin normu Fréchet diferensiyellenebilirdir denir. Eğer bu limit her $x, y \in S_N$ için mevcutsa bu durumda B nin normu düzgün Fréchet diferensiyellenebilirdir denir.

Tanım 2.1.14: N ve N' iki normlu uzay ve $T: N \to N'$ bir lineer operatör olsun. Her $x \in N$ için

$$\|Tx\|' \leq K\|x\|$$

olacak şekilde bir $K > 0$ reel sayısı varsa, T ye sınırlı lineer operatör denir.

Tanım 2.1.15: N normlu uzay ve $\{x_n\}$ de N de bir dizi olsun. Eğer,

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0$$

olacak şekilde bir $x \in N$ varsa, $\{x_n\}$ dizisi x e kuvvetli yakınsaktır (veya norma göre yakınsaktır) denir ve bu durum

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

ya da kısaca $x_n \to x$ ile gösterilir. Buradaki x e, $\{x_n\}$ dizisinin kuvvetli limiti adı verilir.

Tanım 2.1.16: N normlu uzay ve $\{x_n\}$, N de bir dizi olsun. Eğer her $f \in N^*$ için,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$$

olacak şekilde bir $x \in N$ varsa, $\{x_n\}$ dizisi x e zayıf yakınsaktır denir ve bu durum ya $x_n \rightharpoonup x$ ya da $x_n \overset{z}{\to} x$ şeklinde gösterilir. Buradaki x e, $\{x_n\}$ dizisinin zayıf limiti adı verilir.

Kuvvetli ve zayıf yakınsama arasındaki gerektirmeler aşağıdaki teoremle verilmiştir.

Teorem 2.1.17: N normlu bir uzay olsun. Bu durumda,

(a) Kuvvetli yakınsaklık, zayıf yakınsaklığı gerektirir.
(b) (a) nın tersi doğru değildir.
(c) $\dim(N) < \infty$ ise, zayıf yakınsaklık kuvvetli yakınsaklığı gerektirir (Kreyszig 1989).

Tanım 2.1.18: X bir Banach uzayı olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ ve $\|x - y\| \geq \varepsilon$ şartlarını sağlayan her $x, y \in X$ için

$$\frac{1}{2}\|x + y\| \leq 1 - \delta(\varepsilon)$$

olacak şekilde $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa, X e düzgün (uniformly) konveks uzay adı verilir (Aksoy and Khamsi 1990).

Bu tanım $x, y \in B_X = \{x \in X: \|x\| \leq 1\}$ ve $\|x - y\| \geq \varepsilon > 0$ için $(x + y)/2$ orta noktasının S_X den bir δ uzaklığında ve B_X kapalı birim yuvar içinde olduğu ifade eder.

Örnek 2.1.19: Her H Hilbert uzayı düzgün konvekstir. Gerçekten her $x, y \in H$ için paralelkenar kuralından

$$\|x + y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) - \|x - y\|^2$$

dir. $x \neq y$ olmak üzere $x, y \in B_H = \{x \in X: \|x\| \leq 1\}$ ve $\|x - y\| \geq \varepsilon$ olduğunu kabul edelim. Böylece

$$\|x + y\|^2 \leq 4 - \varepsilon^2$$

olur. Şayet, $\delta(\varepsilon) = 1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}$ seçilirse

$$\frac{1}{2}\|x + y\| \leq 1 - \delta(\varepsilon)$$

elde edilir. O halde, H düzgün konveks bir uzaydır.

Örnek 2.1.20: ℓ_1 ve ℓ_∞ uzayları sırasıyla $\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$ ve $\|x\| = \sup\{|x_n|: n \in \mathbb{N}\}$ normlarına göre düzgün konveks uzay değillerdir. Bunu göstermek için $\varepsilon = 1$ olmak üzere $x = (1,0,0,0, \ldots), y = (0, -1,0,0, \ldots) \in \ell_1$ elemanlarını alalım. Bu durumda $\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$ normuna göre

$$\|x\|_1 = 1, \|y\|_1 = 1, \|x - y\|_1 = 2 > 1 = \varepsilon$$

olur. Ancak $\|(x+y)/2\|_1 = 1$ olduğundan $\|(x+y)/2\|_1 \leq 1-\delta$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı yoktur. Dolayısıyla ℓ_1 uzayı düzgün konveks değildir. Benzer olarak, $\varepsilon = 1$ ve $x = (1,1,1,0,0,\dots)$, $y = (1,1,-1,0,0,\dots) \in \ell_\infty$ olarak alalım. Böylece $\|x\| = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$ normuna göre

$$\|x\|_\infty = 1, \|y\|_\infty = 1, \|x-y\|_\infty = 2 > 1 = \varepsilon$$

elde edilir. $\|(x+y)/2\|_\infty = 1$ olduğundan ℓ_∞ uzayı düzgün konveks değildir.

1970 yılında W. Takahashi konveks metrik uzay kavramını aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

Tanım 2.1.21: (X,d) metrik uzay olsun. $W: X \times X \times [0,1] \to X$ dönüşümü her $x, y, u \in X$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$d\big(u, W(x,y;\lambda)\big) \leq \lambda d(u,x) + (1-\lambda) d(u,y)$$

şartını sağlıyorsa W, X üzerinde konveks yapı oluşturuyor denir. W ile birlikte (X,d) metrik uzayına da konveks metrik uzay denir ve (X,d,W) ile gösterilir (Takahashi 1970).

Yukarıdaki tanım daha sonra Tian (2005) tarafından aşağıdaki şekilde de ifade edilmiştir.

Tanım 2.1.22: (X,d) metrik uzay olsun. $W: X^3 \times [0,1]^3 \to X$ dönüşümü her $(x,y,z;a,b,c) \in X^3 \times [0,1]^3$, $u \in X$ ve $a+b+c=1$ için

$$d(W(x,y,z;a,b,c),u) \leq a d(x,u) + b d(y,u) + c d(z,u)$$

şartını sağlıyorsa bu durumda W, X üzerinde konveks yapı oluşturuyor denir. Şayet W, (X, d) metrik uzayı üzerinde bir konveks yapı oluşturuyorsa (X, d) ye konveks metrik uzay denir ve (X, d, W) şeklinde gösterilir (Tian 2005).

(X, d, W) konveks metrik uzay, E de X in boş olmayan bir alt kümesi olsun. $a + b + c = 1$ olmak üzere her $(x, y, z; a, b, c) \in E^3 \times [0,1]^3$ için $W(x, y, z; a, b, c) \in E$ ise E ye X in konveks alt kümesi denir.

Tanım 2.1.23: (X, d, W) konveks metrik uzay olsun. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ ve $r > 0$ için $d(z, x) \leq r$, $d(z, y) \leq r$, $d(x, y) \geq r\varepsilon$ şartlarını sağlayan her $x, y, z \in X$ için

$$d(z, W\left(x, y, \frac{1}{2}\right)) \leq (1 - \delta)r$$

olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon) \in [0,1]$ sayısı varsa, X e düzgün konveks metrik uzay denir.

Burada açıkça görülüyor ki düzgün Banach uzay aynı zamanda düzgün konveks metrik uzaydır (Shimizu and Takahashi 1996).

Her $x, y, z \in E$ ve $\alpha, \beta, \gamma \in I$ ve $\alpha + \beta + \gamma = 1$ şartını sağlayan $\alpha, \beta, \gamma \in I$ için $W(x, y, z; \alpha, \beta, \gamma) = \alpha x + \beta y + \gamma z$ şeklinde tanımlı konveks yapı ile her normlu uzay bir metrik uzaydır. Gerçekten

$$\begin{aligned} d\big(u, W(x, y, z; \alpha, \beta, \gamma)\big) &= \|u - (\alpha x + \beta y + \gamma z)\| \\ &\leq \alpha\|u - x\| + \beta\|u - y\| + \gamma\|u - z\| \\ &\leq \alpha d(u, x) + \beta d(u, y) + d(u, z) \end{aligned}$$

dir. Diğer taraftan bazı konveks metrik uzaylar lineer uzay içine gömülemezler.

Örnek 2.1.24: $X = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0\}$ olmak üzere $x = (x_1, x_2, x_3)$ ve $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ için $\alpha, \beta, \gamma \in I$ ve $\alpha + \beta + \gamma = 1$ olsun. $W: X^3 \times I^3 \to X$ dönüşümü

$$W(x, y, z; \alpha, \beta, \gamma) = (\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1, \alpha x_2 + \beta y_2 + \gamma z_2, \alpha x_3 + \beta y_3 + \gamma z_3)$$

olarak tanımlansın. Şayet $d: X \times X \times I \to [0,\infty)$, $d(x, y) = |x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3|$ olarak tanımlanırsa (X, d, W), bir konveks metrik uzaydır fakat normlu uzay değildir.

Örnek 2.1.25: $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 > 0\}$ olmak üzere $x = (x_1, x_2)$ ve $y = (y_1, y_2) \in X$ için $\lambda \in I = [0,1]$ olsun. $W: X^2 \times I \to X$ dönüşümü

$$W(x, y;\ \lambda) = \left(\lambda x_1 + (1 - \lambda) y_1, \frac{\lambda x_1 x_2 + (1 - \lambda) y_1 y_2}{\lambda x_1 + (1 - \lambda) y_1}\right)$$

şeklinde tanımlansın. Şayet $d: X \times X \to [0,\infty)$ $d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_1 x_2 - y_1 y_2|$ olarak tanımlanırsa bu durumda (X, d, W), yine bir konveks metrik uzaydır fakat normlu uzay değildir.

Tanım 2.1.26: (X, d, W) konveks metrik uzay her $x, y, z \in X$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$d(W(x, y, \lambda), W(x, z, \lambda)) \leq (1 - \lambda) d(y, z)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa bu durumda konveks metrik uzay (H) özelliğine sahiptir denir (Phuengrattana and Suantai 2013).

Bir (X, d, W) konveks metrik uzayı, $x, y \in X$ ve $\lambda \in [0,1]$ için aşağıdaki özelliklere sahiptir:

(i) $W(x, x, \lambda) = x$, $W(x, y, 0) = y$ ve $W(x, y, 1) = x$;

(ii) $d\big(x, W(x,y,\lambda)\big) = (1-\lambda)d(x,y)$ ve $d\big(y, W(x,y,\lambda)\big) = \lambda d(x,y)$;

(iii) $d(x,y) = d(x, W(x,y,\lambda)) + d(W(x,y,\lambda), y)$.

2.2. Sabit Nokta Kavramı ve Özel Dönüşüm Sınıfları

Tanım 2.2.1: X boş olmayan bir küme ve $T: X \to X$ herhangi bir dönüşüm olsun. Eğer $Tx = x$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, bu x noktasına T nin sabit noktası denir.

Bundan sonra $T(x)$ yerine Tx notasyonu kullanılacağız. O halde $Tx = x$ denkleminin çözümü veya çözümleri T nin sabit noktalarıdır. T nin tüm sabit noktalarının kümesi $F(T)$ veya $Fix(T)$ ile gösterilir.

Örnek 2.2.2: $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ olmak üzere $T: X \to X$, $T(x,y) = (x^2 - 2, y^2 - 2)$ dönüşümünün sabit noktalarının kümesi $F(T) = \{(2,2), (-1,-1), (2,-1), (-1,2)\}$ şeklindedir.

Örnek 2.2.3: $X = \mathbb{R}$, $Tx = |x^2 - 6|$ olmak üzere T dönüşümünün sabit noktalarının kümesi $F(T) = \{2,3\}$ dir.

Örnek 2.2.4: $T: (0,1] \to (0,1]$, $Tx = \frac{2x}{5}$ dönüşümünün sabit noktası yoktur. Böyle bir dönüşüm için $x = 0$ sabit nokta olabilirdi. Fakat $0 \notin (0,1]$ dır.

X boştan farklı bir küme ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Herhangi bir $x \in X$ için $T^n(x)$, $T^0(x) = x$ ve $T^{n+1}(x) = T(T^n(x))$ şeklinde tanımlanır. $T^n(x)$ e, x in T altındaki n. iterasyonu denir. T^n $(n \geq 1)$ dönüşümüne de T nin n. iterasyonu denir.

$T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeleri yazabiliriz.

1. Keyfi bir $n \in \mathbb{N}$ için $F(T) \subset F(T^n)$ dir.

2. Keyfi bir $n \in \mathbb{N}$ için $F(T^n) = \{x\}$ ise, $F(T) = \{x\}$ dir. Ancak bunun tersi genelde doğru değildir. Örneğin, $T: \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$ dönüşümü $T(1) = 3, T(2) = 2, T(3) = 1$ olarak tanımlanırsa, $F(T^2) = \{1,2,3\}$ olduğu halde $F(T) = \{2\}$ dir.

X boş olmayan bir küme ve $T_1, T_2: X \to X$ herhangi iki dönüşüm olsun. Eğer $T_1 x = T_2 x = x$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, bu x noktasına T_1 ve T_2 nin ortak sabit noktası denir. Bu dönüşümlerin ortak sabit noktalarının kümesi $\mathcal{F} = F(T_1) \cap F(T_2)$ ile gösterilir.

Şimdi ortak sabit nokta ile ilgili örnekler vereceğiz.

Örnek 2.2.5: $X = \mathbb{R}$, $T_1 x = x^2 - x - 3$ ve $T_2 x = x^2 - 4x - 6$ dönüşümleri için $F(T_1) = \{-1,3\}$ ve $F(T_2) = \{-1,6\}$ olup ortak sabit noktalarının kümesi $\mathcal{F} = F(T_1) \cap F(T_2) = \{-1\}$ dir.

Örnek 2.2.6: $T_i: [0,1] \to [0,1]$, $T_i(x) = x^i$ olmak üzere $\{T_i\}$ ailesini düşünelim. Bu durumda her $i \in \mathbb{N}$ için T_i dönüşümlerinin ortak sabit nokta kümesi $\mathcal{F} = \cap_{i=1}^{\infty} F(T_i) = \{0\}$ dır.

Tanım 2.2.7: (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için,

$$d(Tx, Ty) \leq k d(x, y)$$

olacak şekilde bir $k \geq 0$ sabit sayısı varsa, T ye Lipschitzian dönüşüm denir. Yukarıdaki eşitsizliğe Lipschitz şartı ve bu şartı sağlayan en küçük k sayısına da Lipschitz sabiti denir.

Örnek 2.2.8: $X = \mathbb{R}$ ve $d(x, y) = |x - y|$ olmak üzere $T: X \to X$,

$$Tx = x - \frac{1}{2}cosx$$

dönüşümü bir Lipschitzian dönüşümdür. Gerçekten $x, y \in X$ için

$$\begin{aligned}
d(Tx, Ty) &= |Tx - Ty| \\
&= \left|x - \frac{1}{2}cosx - y + \frac{1}{2}cosy\right| \\
&= \left|x - y + \frac{1}{2}(cosy - cosx)\right| \\
&\leq |x - y| + \frac{1}{2}|(cosy - cosx)| \\
&= |x - y| + \left|sin\frac{x+y}{2}sin\frac{x-y}{2}\right| \\
&\leq |x - y| + \left|sin\frac{x-y}{2}\right| \\
&\leq |x - y| + \frac{1}{2}|x - y| = \frac{3}{2}|x - y|
\end{aligned}$$

olup $k = \frac{3}{2} > 0$ sabit sayısı vardır.

Yukarıdaki tanıma göre Lipschitz şartını sağlayan her T dönüşümü düzgün süreklidir. Çünkü, her $\varepsilon > 0$ için $d(x, y) < \delta = \frac{\varepsilon}{k} \Rightarrow kd(x, y) < \delta = \varepsilon$ olduğundan

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y) < k\frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$$

yazılır. Bu da T dönüşümünün düzgün sürekli olduğunu gösterir. Ancak bu ifadenin tersi her zaman doğru değildir.

Örnek 2.2.9: $X = \left[-\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}\right]$ olmak üzere $T: X \to X$,

$$Tx = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{x}{2}\sin(1/x), & x \neq 0 \end{cases}$$

dönüşümü süreklidir. Fakat Lipschitzian bir dönüşüm değildir.

Tanım 2.2.10: (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ Lipschitzian bir dönüşüm olsun. Eğer Tanım 2.2.7 deki eşitsizlik $0 \leq k < 1$ olması halinde sağlanıyorsa, T ye daraltan dönüşüm veya büzülme dönüşümü (conctraction) denir.

Örnek 2.2.11: $X = \mathbb{R}$ ve $d(x, y) = |x - y|$ olmak üzere $T: X \to X$,

$$Tx = \frac{1}{5}x$$

dönüşümü $\frac{1}{5}$ – daraltandır.

Eğer (X, d) bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ daraltan bir dönüşüm ise, bu dönüşümün bir sabit noktası vardır ve bu sabit nokta tektir (Banach Daralma Prensibi).

Tam olmayan metrik uzaylarda tanımlanan daraltan dönüşümlerin sabit noktaya sahip olması gerekmez. Örneğin, $X = (0,1]$ olmak üzere $T: X \to X$ ve $Tx = \frac{x}{2}$ dönüşümünü alalım. Bu T dönüşümü daraltan dönüşümdür, fakat sabit noktası yoktur.

Lipschitz koşulunu sağlayan her dönüşüm düzgün sürekli olduğundan daraltan dönüşümler de düzgün süreklidir. Dolayısıyla T sürekli değilse, daraltan dönüşüm de olamaz. Buna karşın T daraltan dönüşüm olmasa bile, herhangi bir n için T^n daraltan bir dönüşüm olabilir.

Örnek 2.2.12: $T: [0,2] \to [0,2]$, $Tx = \begin{cases} 0, & x \in [0,1] \\ 1, & x \in (1,2] \end{cases}$ olsun. T dönüşümü $x = 1$ de süreksizdir. Bu nedenle daraltan dönüşüm değildir. Diğer taraftan, $T^2: \{0,1\} \to \{0\}$, $T^2(x) = 0$ olup T^2 daraltan bir dönüşümdür. Ayrıca $x = 0$, T^2 nin tek sabit noktasıdır.

Tanım 2.2.13: (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ ve $x \neq y$ için,

$$d(Tx, Ty) < d(x, y)$$

ise, T ye kesin daraltan dönüşüm (contractive) denir.

Örnek 2.2.14: $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$ ve $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $Tx = 1 + \ln(1 + e^x)$ olsun. T dönüşümü kesin daraltan olup daraltan değildir. Çünkü

$$T'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} < 1$$

dir. Ayrıca Ortalama Değer Teoreminden

$$T'(c) = \frac{T(x) - T(y)}{x - y}$$

olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $T'(c) < 1$ olur. Yani,

$$T'(c) = \frac{T(x) - T(y)}{x - y} < 1 \Rightarrow |T(x) - T(y)| < |x - y|$$

dir.

Bu tip dönüşümlerin sabit noktasını garanti etmek için çalışılan uzayın kompakt olması yeterlidir.

Tanım 2.2.15: (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$$

ise, T ye genişlemeyen (nonexpansive) dönüşüm denir.

Örnek 2.2.16: $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$ ve $T: X \to X$, $Tx = x - 3$ olsun.

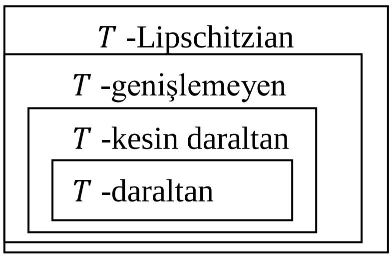
$$d(Tx, Ty) = |x - 3 - y + 3| = |x - y| = d(x, y)$$

olduğundan her $x, y \in X$ için $d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$ şartı sağlanmış olur. Dolayısıyla T genişlemeyen bir dönüşümdür. Fakat bu dönüşüm ne daraltan ne de kesin daraltandır.

Herhangi bir Banach uzayında tanımlı genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarının var olması gerekmez. Bunun için, ya uzay üzerine ya da dönüşüm üzerine bazı ek koşullar konulması gereklidir. 1965 yılında Browder, Goebel ve Kirk düzgün konveks bir Banach uzayının kapalı, sınırlı ve konveks alt kümesi üzerinde tanımlı genişlemeyen bir dönüşümün sabit noktaya sahip olduğunu ispatlamıştır.

Yukarıda tanımlanan dönüşümler göz önüne alınarak aşağıdaki gerektirmeler yazılabilir:

$$T - \text{daraltan} \Rightarrow T - \text{kesin daraltan} \Rightarrow T - \text{genişlemeyen} \Rightarrow T - \text{Lipschitzian}$$



Şekil 2.1. Dönüşümler arasındaki bağlantı

Tanım 2.2.17: (X, d) bir metrik uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan bir alt küme ve $T: K \to K$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in K$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

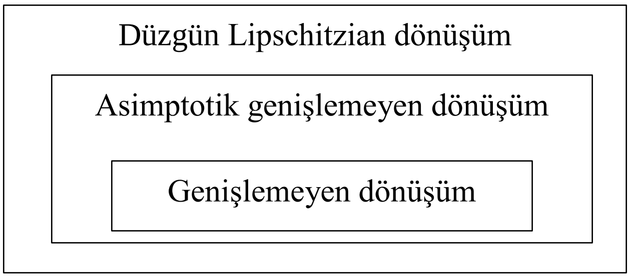
$$d(T^n x, T^n y) \leq L d(x, y)$$

olacak şekilde $L > 0$ sayısı varsa, T ye düzgün Lipschitzian dönüşüm denir.

Tanım 2.2.18: (X, d) bir metrik uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan bir alt küme ve $T: K \to K$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in K$ için

$$d(T^n x, T^n y) \leq k_n d(x, y)$$

olacak şekilde $k_n \to 1$ şartını sağlayan bir $\{k_n\} \subset [1, \infty)$ dizisi varsa, T ye asimptotik genişlemeyen dönüşüm denir (Goebel and Kirk 1972).



Şekil 2.2. Dönüşümler arasındaki bağlantı

Asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin sınıfı, genişlemeyen dönüşümlerin bir genellemesidir. Yukarıdaki tanımlardan görüleceği gibi asimptotik genişlemeyen bir dönüşüm aynı zamanda düzgün L-Lipschitzian bir dönüşümdür. Fakat bu ifadelerin tersi genelde doğru değildir.

Tanım 2.2.19: (X, d) bir metrik uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan bir alt küme ve $T: K \to K$ bir dönüşüm olsun. Eğer $p \in F(T) \neq \emptyset$ ve her $x \in K$ için

$$d(Tx,p) \leq d(x,p)$$

ise, T ye quasi-genişlemeyen dönüşüm denir (Petryshyn and Williamson 1973).

Yukarıdaki tanıma normlu uzayda aşağıdaki örneği verebiliriz.

Örnek 2.2.20: $X = l_\infty$ ve $K = B_X = \{x \in l_\infty : \|x\|_\infty \leq 1\}$ olmak üzere $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in K$ için $T: K \to K$ bir dönüşüm olsun.

$$Tx = \begin{cases} (0, {x_1}^2, {x_2}^2, {x_3}^2, \dots), & \|x\| \leq 1 \\ \|x\|_\infty^{-2}(0, {x_1}^2, {x_2}^2, {x_3}^2, \dots), & \|x\| > 1 \end{cases}$$

ile tanımlanan T dönüşümü quasi-genişlemeyendir. $0 = (0,0,\dots)$ noktası dönüşümün tek sabit noktasıdır.

$F(T) \neq \emptyset$ olması durumunda genişlemeyen bir dönüşüm aynı zamanda quasi-genişlemeyen bir dönüşümdür. Fakat tersi doğru değildir.

Tanım 2.2.21: (X,d) bir metrik uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan bir alt küme ve $T: K \to K$ bir dönüşüm olsun. Eğer $p \in F(T) \neq \emptyset$, her $x \in K$ için

$$d(T^n x, p) \leq k_n d(x,p)$$

olacak şekilde $k_n \to 1$ şartını sağlayan bir $\{k_n\} \subset [1,\infty)$ dizisi varsa, T dönüşümüne asimptotik quasi-genişlemeyen dönüşüm denir (Khan *et al*. 2008).

Tanım 2.2.22: (X,d) bir metrik uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan bir alt küme ve $T: K \to K$ bir dönüşüm ve $F(T) \neq \emptyset$ olsun. Eğer her $p \in F(T)$ ve $x \in K$ için

$$d(T^n x, p) \leq L d(x,p)$$

olacak şekilde $L > 0$ sayısı varsa, T dönüşümüne düzgün quasi-Lipschitzian dönüşüm denir.

2.3. Bazı Sabit Nokta Teoremleri

Daraltan, kesin daraltan, genişlemeyen ve Lipschitzian gibi dönüşümlerin bazılarının sabit noktası olmadığı halde, bazılarının bir veya birden fazla sabit noktası olabilir. Bu bölümde, hangi tür dönüşümlerin sabit noktalarının var ve bu sabit noktaların hangi koşullar altında tek olduğunu teorem ve örneklerle ifade edeceğiz.

Aşağıdaki teorem, analizdeki en basit sabit nokta teoremi olarak bilinir.

Teorem 2.3.1: $[a, b]$**,** $\mathbb{R}$ de bir kapalı aralık ve $f: [a, b] \to [a, b]$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda $f(c) = c$ olacak şekilde en az bir $c \in [a, b]$ sayısı vardır.

Teorem 2.3.2 (Brouwer Sabit Nokta Teoremi): B, $\mathbb{R}^n$ de kapalı bir küre (dolayısıyla $\mathbb{R}^n$ nin bir kompakt konveks alt kümesi) olsun. Bu durumda $f: B \to B$ sürekli dönüşümü en az bir sabit noktaya sahiptir (Khamsi and Kirk 2001).

Brouwer'ın bu teoremi herhangi bir sonsuz boyutlu Banach uzayında geçerli değildir. Bu durumu bir örnekle açıklayalım.

Örnek 2.3.3: $B = \mathrm{c}_0$ Banach uzayı ve $K = B_X = \{x \in c_0 : \|x\| \leq 1\}$ kapalı birim yuvarı verilsin. Her $x \in K$ ve $x = (x_1, x_2, \dots)$ için $T: B \to B$,

$$T(x) = (1 - |x_1|, x_1, x_2, \dots)$$

dönüşümünü alalım. Her $x, y \in B$ için

$$\|Tx - Ty\| = \|x - y\|$$

olduğundan T süreklidir. Ancak, $Tx = x$ denkleminin B de bir çözümü yoktur.

Teorem 2.3.4 (Schauder Sabit Nokta Teoremi): B bir Banach uzayı, $K \subseteq B$ boş olmayan kompakt konveks bir alt küme ve $f: K \to K$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda f en az bir sabit noktaya sahiptir (Khamsi and Kirk 2001).

Aşağıdaki örnekte, tam metrik uzay üzerinde tanımlanan genişlemeyen bir dönüşümün bir sabit noktaya sahip olması gerekmediği gösterilmiştir.

Örnek 2.3.5: $B = \mathrm{c}_0$ Banach uzayı ve $K = B_X = \{x \in c_0 : \|x\| \leq 1\}$ kapalı birim yuvarı verilsin. Her $x \in K$ için

$$T(x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots) = (3, x_1, x_2, x_3, \cdots)$$

şeklinde tanımlanan $T: K \to K$ dönüşümünü alalım. T genişlemeyen bir dönüşümdür ve $x = (3,3,3,\dots)$, T nin bir sabit noktasıdır. Fakat, $x = (3,3,3,\dots) \notin c_0$ dır. Yani, T genişlemeyen dönüşümü c_0 uzayında bir sabit noktaya sahip değildir.

Teorem 2.3.6 (Banach Daralma İlkesi): (X, d) tam metrik uzay ve $T: X \to X$ daraltan bir dönüşüm olsun. Bu durumda T bir tek sabit noktaya sahiptir (Maddox 1988).

Örnek 2.3.7: $X = [a, b]$, $d(x, y) = |x - y|$ ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer T, $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli, (a, b) açık aralığında türevlenebilir bir dönüşüm ve her $x \in (a, b)$ için

$$|T'x| \leq k < 1$$

şartını sağlıyorsa bu durumda T nin X de bir tek sabit noktası vardır. Gerçekten de ortalama değer teoreminden her $x, y \in [a, b]$ için $c \in (a, b)$ olmak üzere

$$|Tx - Ty| = T'(c)|(x - y)| \leq k|x - y|$$

olur. Böylece Banach Daralma İlkesi gereği T nin bir tek sabit noktası vardır.

Teorem 2.3.8: (X, d) bir tam metrik uzay ve $n \in \mathbb{N}$ için T^n bir daraltan dönüşüm olacak şekilde bir $T: X \to X$ dönüşümü verilsin. Bu durumda T bir tek sabit noktaya sahiptir (Khamsi and Kirk 2001).

İspat: Banach Daralma İlkesi gereğince, T^n bir tek x_0 sabit noktasına sahiptir. Dolayısıyla

$$T^{n+1}x_0 = T(T^n x_0) = Tx_0$$

yazılır. Ayrıca Tx_0, T^n nin bir sabit noktasıdır. T^n nin sabit noktası tek olduğu için $Tx_0 = x_0$ olur. Eğer $Ty = y$ ise, bu durumda $T^n y = y$ olur. Bu da $y = x_0$ olmasını gerektirir.

Teorem 2.3.9: (X, d) bir kompakt metrik uzay ve $T: X \to X$ kesin daraltan bir dönüşüm olsun. Bu durumda T bir tek p sabit noktasına sahiptir. Üstelik her $x \in X$ için

$$\lim_{n \to \infty} T^n x = p$$

dir (Khamsi and Kirk 2001).

İspat: $\phi: X \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonunu $\phi(x) = d(x, Tx)$ şeklinde bir tanımlayalım. Bu durumda ϕ sürekli ve alttan sınırlıdır. Bu yüzden ϕ, bir $x_0 \in X$ noktasında minimum değerini alır. $x_0 \neq Tx_0$ olduğunu kabul edelim. Buradan

$$\phi(Tx_0) = d(Tx_0, T^2x_0) < d(x_0, Tx_0) = \phi(x_0)$$

elde edilir. Bu ise $x_0 = Tx_0$ olmasını gerektirir. Şimdi $x \in X$ noktası ve $(d(T^n x, x_0))$ dizisi verilsin. Şayet $T^n x \neq x_0$ ise

$$d(T^{n+1}x, x_0) = d(T^{n+1}x, Tx_0) < d(T^n x, x_0)$$

olur. Bu nedenle $(d(T^n x, x_0))$ dizisi kesin azalandır. Sonuç olarak $n \to \infty$ için

$$r = \lim_{n\to\infty} d(T^n x, x_0)$$

limiti vardır ve $r \geq 0$ dır. Ayrıca X kompakt olduğu için $(T^n x)$ dizisi yakınsak bir $(T^{n_k} x)$ alt dizisine sahiptir. $\lim_{k\to\infty} T^{n_k} x = z$ diyelim. $(T^n x)$ dizisi azalan olduğundan

$$r = d(z, x_0) = \lim_{k\to\infty} d(T^{n_k} x, x_0) = \lim_{k\to\infty} d(T^{n_k+1} x, x_0) = d(Tz, x_0)$$

olur. Eğer $z \neq x_0$ ise, bu durumda

$$d(Tz, x_0) = d(Tz, Tx_0) < d(z, x_0)$$

dir. Bu ise $(T^n x)$ in herhangi yakınsak alt dizisinin x_0 noktasına yakınsadığını gösterir. O halde, $\lim_{n\to\infty} T^n x = x_0$ dır.

Goebel ve Kirk, düzgün konveks bir Banach uzayında tanımlı asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktaya sahip olduğunu aşağıdaki teoremle ispatlamışlardır.

Teorem 2.3.10: X düzgün konveks Banach uzayı, K da bu uzayın boştan farklı kapalı, konveks, sınırlı bir alt kümesi ve $T: K \to K$ asimptotik genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Bu durumda T, K da bir sabit noktaya sahiptir (Goebel and Kirk 1972).

2.4. İterasyon Yöntemleri

Bir dönüşümün sabit noktasını veya noktalarını bulurken çeşitli iterasyon metotları kullanılır. Bunlardan bazıları Picard iterasyonu, Krasnoselskij iterasyonu Kirk iterasyonu, Mann iterasyonu, Ishikawa iterasyonu, Noor iterasyonu, n-adım iterasyonu, S iterasyonu ve Picard-Mann Hibrit iterasyonudur.

Picard İterasyonu: (X, d) bir metrik uzay, $K \subseteq X$ kapalı bir alt küme ve $T : K \to K$ bir dönüşüm olsun. $x_0 \in X$ olmak üzere Picard iterasyonu,

$$x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0, \;\; n = 1,2, \dots \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanır (Picard 1890). Picard iterasyonu literatürde bazen ardışık yaklaşıklar dizisi (sequence of successive approximations) olarak da adlandırılır.

Krasnoselskij İterasyonu: $(N, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay, $K \subseteq N$ boş olmayan konveks bir alt küme ve $T : N \to N$ bir dönüşüm olsun. $x_0 \in N$ ve $\lambda \in [0,1]$ için Krasnoselskij iterasyonu,

$$x_{n+1} = (1 - \lambda)x_n + \lambda T x_n \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlanır. Bu iterasyon $\lambda = 1$ için (2.1) Picard iterasyonuna indirgenir (Krasnoselskij 1955).

Kirk İterasyonu: $(N, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay, $K \subseteq N$ boş olmayan konveks bir alt küme ve $T : N \to N$ bir dönüşüm olsun. Kirk iterasyonu, $x_0 \in N$ olmak üzere

$$x_{n+1} = \alpha_0 x_n + \alpha_1 T x_n + \alpha_2 T^2 x_n + \cdots + \alpha_k T^k x_n \tag{2.3}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $i = 0,1,2, \dots, k$ için $\alpha_1 > 0$ ve $\alpha_i \geq 0$ olmak üzere

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = 1$$

dir. (2.3) eşitliği ile verilen Kirk iterasyonu $k = 1$ için Krasnoselskij iterasyonuna indirgenir (Kirk 1971).

Mann İterasyonu: $(N, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay, $K \subseteq N$ boş olmayan konveks bir alt küme ve $T: K \to K$ bir dönüşüm ve $x_0 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere Mann iterasyonu,

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T x_n \,, \;\; n = 0,1,2, \dots \tag{2.4}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{\alpha_n\}$, $(0,1)$ aralığında

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \,, \;\; \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$$

şartlarını sağlayan bir dizidir (Mann 1953).

(2.4) eşitliği ile verilen Mann iterasyonunda $\alpha_n = \lambda$ (sabit) olarak alınırsa bu iterasyon, Krasnoselskij iterasyonuna indirgenir (Berinde 2006).

Ishikawa İterasyonu: $(N, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay, $K \subseteq N$ boş olmayan konveks alt küme, $T: K \to K$ bir dönüşüm ve $x_0 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere Ishikawa iterasyonu,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n \,, \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n T x_n, \;\; n = 0,1,2, \dots \end{cases} \tag{2.5}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\} \in (0,1)$ ve

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \,, \;\; \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0 \,, \;\; \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$$

dir (Ishikawa 1974).

(2.5) eşitliği ile verilen iterasyonda $\beta_n = 0$ alınırsa, bu iterasyon Mann iterasyonuna indirgenir.

Noor İterasyonu: $(N, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay, $K \subseteq N$ boş olmayan konveks alt küme, $T: K \to K$ bir dönüşüm ve $x_0 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere Noor iterasyonu,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n \,, \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n T z_n \,, \\ z_n = (1 - \gamma_n)x_n + \gamma_n T x_n, \quad n = 0,1,2, \dots \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\} \in (0,1)$ ve

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \,, \quad \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0 \,, \quad \lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0 \,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$$

dur (Noor 2000).

Xu ve Noor, Noor iterasyonunun düzgün konveks bir Banach uzayının kapalı, sınırlı ve konveks alt kümesinden kendi üzerine tanımlanmış asimptotik genişlemeyen bir dönüşümün sabit noktaya yakınsaklığını çalışmışlardır (Xu and Noor 2002).

***n*-Adım İterasyonu (Multistep Iteration):** $(N, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay, $K \subseteq N$ boş olmayan konveks alt küme, $T: K \to K$ bir dönüşüm ve $x_0 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere n-adım iterasyonu $p \geq 2$ için

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n^1, \\ y_n^i = \left(1 - \beta_n^i\right)x_n + \beta_n^i T z_n^{i+1}, \\ z_n^{p-1} = \left(1 - \beta_n^{p-1}\right)x_n + \beta_n^{p-1} T x_n, \quad i = 1, 2, \dots, p-2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$\{\alpha_n\} \subset (0,1), \ \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0\,, \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$$

ve $\{\beta_n^i\} \subset [0,1)\,,\ 1 \le i \le p-1\,,\ \lim_{n\to\infty} \beta_n^1 = 0$ dır (Rhoades and Şoltuz 2004).

S-İterasyonu: $(N, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay, $K \subseteq N$ boş olmayan konveks alt küme ve $T: K \to K$ bir dönüşüm ve $x_1 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere S-iterasyonu,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)Tx_n + \alpha_n Ty_n, \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n Tx_n, \ \ n \ge 1, \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \in (0,1)$ dir (Agarwal *et al.* 2007).

Picard-Mann Hibrit İterasyonu (PMH) : $(N, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay, $K \subseteq N$ boş olmayan konveks alt küme ve $T: K \to K$ bir dönüşüm $x_1 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere PMH iterasyonu,

$$\begin{cases} x_{n+1} = Ty_n, \\ y_n = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n Tx_n, \ \ n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{\alpha_n\} \in (0,1)$ dir (Khan 2013).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Konveks Metrik Uzayda Sabit Nokta Yaklaşımları

Son yıllarda asimptotik genişlemeyen ve asimptotik quasi-genişlemeyen dönüşümlerle ilgili yakınsama problemleri birçok yazar tarafından geniş bir şekilde ele alınmaktadır. 1999 yılında Shioji ve Takahashi Banach uzaylarda asimptotik genişlemeyen dönüşümlerle ilgili kuvvetli yakınsama üzerinde çalışmışlardır. 2001 ve 2002 yıllarında Liu, Banach uzaylarda asimptotik quasi-genişlemeyen dönüşümlerin hata terimli iterasyon dizisi için bazı gerek ve yeter şartlar elde etmiştir. 2006 yılında Jeong ve Kim 2007 yılında Fukhar-ur-din ve Khan, hem Banach uzaylarda hem de düzgün konveks Banach uzaylarda iki asimptotik quasi-genişlemeyen dönüşümle ilgili çalışma yapmıştır. Huang, asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin bir ailesi için iterasyon dizisi oluşturmuş ve uniformly Gateaux türevlenebilir norm ve uniform normal yapısı ile birlikte Banach uzaylarda asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin ortak sabit noktasına güçlü yakınsaklık için bazı gerek ve yeter şartlar vermiştir.

Konveks metrik uzayla ilgili çalışmalar ise Takahashi'nin literatüre ilk defa konveks yapı kavramını getirmesiyle başlamıştır. Takahashi 1970 yılında daha genel bir uzay olan konveks metrik uzay kavramını tanımlamıştır. 2005 yılında Tian, konveks metrik uzayda asimptotik quasi-genişlemeyen dönüşümler için sabit noktaya yakınsayan Ishikawa iterasyon dizisini teşkil etmiş ve bu yakınsaklık için bazı gerek ve yeter şartlar vermiştir. 2009'da Wang ve Liu konveks metrik uzayda düzgün quasi-Lipschitzian iki dönüşümün ortak sabit noktasına yakınsayan hata terimli Ishikawa iterasyonunu teşkil etmiş ve bu iterasyonun yakınsaması üzerinde çalışmıştır. Son olarak Wang *et al.* tam metrik uzayda daraltan tipli bir çift dönüşümün tek ortak sabit noktasına yakınsayan Ishikawa tipi hata terimli iterasyon dizisi üzerinde çalışmıştır. Son yıllarda yapılan çalışmalar aşağıda sunulmuştur:

Wang ve Liu (2010), (X, d, W) konveks metrik uzayda tanımlı düzgün quasi-Lipschitzian iki dönüşüm için $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ ve $\{c_n\}$ dizileri [0,1] aralığından alınmak üzere $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = a_n + b_n + c_n = 1$ şartını sağlayan $\{x_n\}$ dizisini

$$\begin{cases} x_n = W(x_n, S^n y_n, u_n;\ \alpha_n, \beta_n, \gamma_n) \\ y_n = W(x_n, T^n x_n, v_n, a_n, b_n, c_n) \end{cases}$$

şeklinde teşkil etmişlerdir. Burada $A_{nm} = \{x_i, y_i, Sy_i, Tx_i, u_i, v_i : n \leq i \leq m\}$, $\delta(A_{nm}) = sup_{x,y\in A} d(x, y)$ olmak üzere $\{u_n\}$ ve $\{v_n\}$ dizileri, $0 \leq n < m$, $\delta(A_{nm}) > 0$ ve $max_{n\leq i,j\leq m}\left\{d(x, y): x \in \{u_i, v_i\}, y \in \{x_j, y_j, Sy_j, Tx_j, u_j, v_j\}\right\} < \delta(A_{nm})$ şartlarını sağlar.

Khan ve Ahmed (2010), (X, d) metrik uzayının kapalı ve konveks E alt kümesinde tanımlı $T_i: E \to E$ $(i = 1,2, \dots, k)$ dönüşümleri ve her $n = 1,2, \dots$ ve $i = 1,2, \dots, k$ için $\{\alpha_{in}\}$ dizileri [0,1] aralığından alınmak üzere $\{x_n\}$ dizisini

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= W\left(T_k^n y_{(k-1)n}, x_n, \alpha_{kn}\right), \\ y_{(k-1)n} &= W\left(T_{k-1}^n y_{(k-2)n}, x_n, \alpha_{(k-1)n}\right), \\ y_{(k-2)n} &= W\left(T_{k-2}^n y_{(k-3)n}, x_n, \alpha_{(k-2)n}\right), \\ &\dots \\ y_{2n} &= W(T_2^n y_{1n}, x_n, \alpha_{2n}), \\ y_{1n} &= W(T_1^n y_{0n}, x_n, \alpha_{1n}), \end{aligned} \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlayarak aşağıdaki teoremi vermişlerdir. Burada her $n \in N \cup \{0\}$ için $x_0 \in E$ ve $y_{0n} = x_n$ dır.

Teorem 3.1.1: (X, d) metrik uzay, E de bu uzayın kapalı konveks alt kümesi ve $i = 1,2, \dots, k$ için $T_i: E \to E$ sürekli olması gerekmeyen dönüşümler olsun. Bu durumda $\mathcal{F} = \left(\bigcap_{i=1}^k F(T_i)\right) \neq \emptyset$ ve $\{x_n\}$ dizisi (3.1) deki gibi olmak üzere

(i) $\liminf_{n\to\infty} d(x_n,\ \mathcal{F}) = \limsup_{n\to\infty} d(x_n, \mathcal{F}) = 0$ ise $\{x_n\}$, $\mathcal{F}$ de bir noktaya yakınsar.

(ii) E tam metrik uzay, $T_i\colon E \to E$ dönüşümleri asimptotik quasi-genişlemeyen dönüşümler ve

$$\liminf_{n\to\infty} d(x_n, \mathcal{F}) = 0 \text{ veya } \limsup_{n\to\infty} d(x_n, \mathcal{F}) = 0$$

ise $\{x_n\}$, $\mathcal{F}$ de bir noktaya yakınsar.

Liu *et al.* (2010), (X, d, W) konveks metrik uzayının boş olmayan bir E kapalı konveks alt kümesinde tanımlı $T_i,\ R_i : E \to E\ \ (i = 1,2, \dots)$ sırasıyla $L_i > 0,\ L_i' > 0$ Lipschitz sabitleri ile düzgün quasi-Lipschitzian dönüşümleri için $\{x_n\}$ dizisini

$$\begin{cases} x_{n+1} = W\big(x_n, S_{n+1}^n y_n, u_n, \alpha_n, \beta_n, \gamma_n\big) \\ \ \ y_n = W(x_n, T_{n+1}^n x_n, v_n, a_n, b_n, c_n) \end{cases} \tag{3.2}$$

şeklinde teşkil etmişlerdir. Burada $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ ve $\{c_n\}$ dizileri $[0,1]$ aralığından alınmak üzere $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = a_n + b_n + c_n = 1$ şartını sağlamaktadır. Ayrıca $\{u_n\}$ ve $\{v_n\}$, E de sınırlı iki dizidir.

Teorem 3.1.2: (X, d, W) tam konveks metrik uzay, E de X in boş olmayan, kapalı ve konveks alt kümesi olsun. $i = 1,2, \dots$ için $T_i, R_i\colon E \to E$, sırasıyla $L_i > 0$, $L_i' > 0$, Lipschitz sabitleri ile düzgün quasi-Lipschitzian dönüşümler olmak üzere $\mathcal{F} = \big((\bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i)) \cap (\bigcap_{i=1}^{\infty} F(R_i)\big)$ kümesi boştan farklı ve sınırlı olsun. $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ ve $\{c_n\}$ dizileri $[0,1]$ aralığında olmak üzere

$$\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = a_n + b_n + c_n = 1 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} (b_n + c_n) < \infty$$

şartları sağlansın. $\{L_i\}$, $\{L_i'\}$ dizileri sınırlı olmak üzere $\{x_n\}$ dizisi (3.2) deki gibi tanımlanırsa, $\{x_n\}$ dizisinin ortak sabit noktaya yakınsaması için gerek ve yeter şart

$$\liminf_{n\to\infty} d(x_n, \mathcal{F}) = 0$$

olmasıdır. Burada $d(x, \mathcal{F}) = inf\{d(x,p) | p \in \mathcal{F}\}$ dir. (Qing-you Liu *et al*. 2010)

Chang *et al*. (2010), konveks metrik uzayda düzgün quasi-L_i-Lipschitzian ve genişlemeyen dönüşümler için aşağıdaki tanım ve teoremi vermişlerdir.

(X, d, W) konveks metrik uzay, $i = 1,2, \ldots$ için $T_i: X \to X$ düzgün quasi-L_i-Lipschitzian ve $S_i: X \to X$ genişlemeyen dönüşümler olsun. $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ ve $\{c_n\}$ dizileri $[0,1]$ aralığından alınmak üzere $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = a_n + b_n + c_n = 1$ şartını sağlasın. Bu durumda $x_1 \in X$ olmak üzere $\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$ düzgün quasi-L_i-Lipschitzian dönüşümlerin sonsuz ailesi ve $\{S_i\}_{i=1}^{\infty}$ genişlemeyen dönüşümlerin sonsuz ailesi için $\{x_n\}$ dizisi

$$\begin{cases} x_{n+1} = W\left(S_n x_n, T_n^n y_n, u_n; \alpha_n, \beta_n, \gamma_n\right) \\ y_n = W(S_n x_n, T_n^n x_n, v_n; a_n, b_n, c_n) \end{cases} \tag{3.3}$$

şeklinde tanımlansın. Burada $\{u_n\}$ ve $\{v_n\}$, X de sınırlı iki dizidir.

Teorem 3.1.3: (X, d, W) tam konveks metrik uzay, E de X in boş olmayan kapalı konveks alt kümesi olsun. $T_i: X \to X$ $(i = 1,2, \ldots)$, $L = max\{1, sup_{i\geq 1}\{L_i\}\} < \infty$ Lipschitz sabiti ile düzgün quasi-L_i-Lipschitzian dönüşümler ve $S_i: X \to X$ $(i = 1,2, \ldots)$ genişlemeyen dönüşümler olsun. $\mathcal{F} = ((\bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i)) \cap (\bigcap_{i=1}^{\infty} F(R_i)) \neq \emptyset$ ve $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ ve $\{c_n\}$ dizileri $[0,1]$ aralığından alınmak üzere

i) $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = a_n + b_n + c_n = 1$ ve $\sum_{n=0}^{\infty}(\beta_n + \gamma_n) < \infty$

ii) $M_0 := sup_{p\in\mathcal{F}, n\geq 0}\{d(u_n, p) + d(v_n, p)\} < \infty$

şartları sağlansın. Bu durumda (3.3) ile tanımlı $\{x_n\}$ dizisinin ortak sabit noktaya yakınsaması için gerek ve yeter şart

$$\liminf_{n\to\infty} d(x_n, \mathcal{F}) = 0$$

dır.

Yildirim ve Khan (2012), konveks metrik uzayda asimptotik quasi-genişlemeyen dönüşümlerin sonlu iki ailesi için $\{x_n\}$ iterasyon dizisini

$$x_n = W\left(x_{n-1}, S_j^k x_n, T_j^k x_n;\ \alpha_n, \beta_n, \gamma_n\right),\ n \in \mathbb{N} \tag{3.4}$$

şeklinde tanımlayarak aşağıdaki teoremi ispatlamışlardır. Burada $n = (k-1)N + j$, $j \in J$ ve $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\} \in (0,1)$ için $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 1$ dir.

Teorem 3.1.4: (X, d, W) konveks metrik uzay, $T_j, S_j : X \to X$, $\{w_k\}$,$\{\gamma_n\} \subseteq \{0, \infty)$ dizileri ile asimptotik quasi genişlemeyen dönüşümlerin sonlu iki ailesi olsun. $x_0 \in X$, $s \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ için,

$$\mathcal{F} = \left(\cap_{j=1}^{N} F(T_j)\right) \cap (\cap_{j=1}^{N} F(S_j)) \neq \emptyset$$

$\{\beta_n\} \subset (s, 1-s)$ aralığında olmak üzere $\sum_{k=1}^{\infty} w_k < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < \infty$ şartları sağlansın. Bu durumda (3.4) ile tanımlı $\{x_n\}$ iterasyon dizisinin ortak sabit noktaya yakınsaması için gerek ve yeter şart

$$\liminf_{n\to\infty} d(x_n, \mathcal{F}) = 0$$

olmasıdır. Ayrıca $\{x_n\}$, X de bir Cauchy dizisidir.

Türkmen *et al*. (2012), (X, d, W) tam konveks metrik uzayının, boş olmayan, kapalı, konveks alt kümesinde tanımlı $i = 1,2, \ldots$ için $T_i, S_i: E \to E$, sırasıyla $\{k_n\}$, $\{l_n\}$ dizileri ile asimptotik quasi-genişlemeyen dönüşümler olmak üzere $x_1 \in E$, $n = 1,2, \ldots$ için hata terimli S-iterasyonunu

$$\begin{cases} x_{n+1} = W(S_n^n x_n, T_n^n y_n, u_n;\ \alpha_n, \beta_n, \gamma_n) \\ y_n = W(x_n, S_n^n x_n, v_n;\ a_n, b_n, c_n) \end{cases} \tag{3.5}$$

şeklinde oluşturarak aşağıdaki teoremi vermişlerdir. Burada $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ dizileri $[0,1]$ aralığında alınmak üzere $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = a_n + b_n + c_n = 1$ şartını sağlayan diziler ve $\{u_n\}$ ve $\{v_n\}$, E de sınırlı iki dizidir.

Teorem 3.1.5: (X, d, W) tam konveks metrik uzay, E de X in boş olmayan kapalı konveks alt kümesi olsun. $i = 1, 2, \ldots$ için $T_i, S_i: E \to E$, $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n - 1) < \infty$ şartını sağlayan $\{k_n\} \subset [1, \infty)$ dizisi ile asimptotik quasi genişlemeyen dönüşümler ve $\mathcal{F} = (\bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i) \cap (\bigcap_{i=1}^{\infty} F(S_i)) \neq \emptyset$ olsun. $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ dizileri $[0,1]$ aralığında olmak üzere

(i) $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = a_n + b_n + c_n = 1$, ve $\sum_{n=0}^{\infty}(\beta_n + \gamma_n) < \infty$

(ii) $M_0 = \sup_{p \in \mathcal{F}, n \geq 1}\{d(u_n, p) + d(v_n, p)\} < \infty$

şartları sağlansın. Bu halde (3.5) ile tanımlanan $\{x_n\}$ iterasyon dizisinin ortak sabit noktaya yakınsaması için gerek ve yeter şart

$$\liminf_{n \to \infty} d(x_n, \mathcal{F}) = 0$$

olmasıdır.

Yildirim *et al*. (2013), (X, d, W) konveks metrik uzayında tanımlı S ve T düzgün quasi-Lipschitzian dönüşümleri için $\{x_n\}$ dizisini

$$x_{n+1} = W(x_n, S^n x_n, T^n x_n;\ a_n, b_n, c_n) \tag{3.6}$$

şeklinde teşkil ederek aşağıdaki teoremi ifade etmişlerdir. Burada $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ dizileri [0,1] aralığından alınmak üzere $a_n + b_n + c_n = 1$ şartını sağlayan dizilerdir.

Teorem 3.1.6: (X, d, W) tam konveks metrik uzay, E de X in boş olmayan kapalı konveks alt kümesi olsun. $S, T : E \to E$ düzgün quasi-Lipschitzian dönüşümler olmak üzere $\mathcal{F} = (F(S) \cap F(T)) \neq \emptyset$ olsun. $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ dizileri [0,1] aralığında olmak üzere

$$a_n + b_n + c_n = 1 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty}(1 - a_n) < \infty$$

şartını sağlasın. Bu durumda (3.6) ile tanımlı $\{x_n\}$ dizisinin S ve T nin ortak sabit noktasına yakınsaması için gerek ve yeter şart

$$\liminf_{n\to\infty} d(x_n, \mathcal{F}) = 0$$

olmasıdır.

Tanım 3.1.7: Banach uzayının kapalı konveks alt kümesinde tanımlı $\{T_i\}_{i=1}^{N} : E \to E$ genişlemeyen dönüşümler ve $\{\lambda_i\}_{i=1}^{N} \in [0,1]$ olmak üzere $K : E \to E$ dönüşümü

$$\begin{aligned}
U_1 &= \lambda_1 T_1 + (1 - \lambda_1) I \\
U_2 &= \lambda_2 T_2 U_1 + (1 - \lambda_2) U_1 \\
U_3 &= \lambda_3 T_3 U_2 + (1 - \lambda_3) U_2 \\
&\vdots \\
U_{N-1} &= \lambda_{N-1} T_{N-1} U_{N-2} + (1 - \lambda_{N-1}) U_{N-2} \\
K = U_N &= \lambda_N T_N U_{N-1} + (1 - \lambda_N) U_{N-1}
\end{aligned}$$

şeklindedir. Burada I, E de özdeş dönüşümdür. K da $T_1, T_2, \ldots, T_N$ dönüşümleri ve $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$ tarafından üretilen K-dönüşüm olarak adlandırılır (Kangtunyakarn and Suantai 2009).

Phuengrattana ve Suantai (2013), (X, d, W) konveks metrik uzayında $\{T_i\}_{i=1}^{n}: X \to X$ genişlemeyen dönüşümlerin ailesi ve $U_1, U_2, \ldots, U_n$ dönüşümler olmak üzere $\lambda_n \in [0,1]$ ve $x \in X$ için K_n dizisini

$$\begin{aligned}
U_1 x &= W(T_1 x, x, \lambda_1), \\
U_2 x &= W(T_2 U_1 x, U_1 x, \lambda_2), \\
U_3 x &= W(T_3 U_2 x, U_2 x, \lambda_3), \\
&\vdots \\
U_{n-1} x &= W(T_{n-1} U_{n-2} x, U_{n-2} x, \lambda_{n-1}), \\
K_n x &= U_n x = W(T_n U_{n-1} x, U_{n-1} x, \lambda_n).
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlamışlardır. Burada K_n de $T_1, T_2, \ldots, T_n$ dönüşümleri ve $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tarafından üretilen K-dönüşüm olarak adlandırılır.

Teorem 3.1.8: (X, d, W), (H) özelliğini sağlayan tam düzgün konveks metrik uzay, E de X in boş olmayan kapalı konveks alt kümesi olsun. $\{T_i\}_{i=1}^{n}: E \to E$ genişlemeyen dönüşümlerin ailesi ve $\cap_{i=1}^{\infty} F(T_i) \neq \emptyset$ olsun. Her $i \in \mathbb{N}$ için λ_1, λ_2, ..., $0 < \lambda_i < 1$ ve $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i < \infty$ olsun. T_1, T_2, ... dönüşümleri ve λ_1, λ_2, ... reel sayıları tarafından üretilen K-dönüşümü genişlemeyen bir dönüşümdür ve $F(K) = \cap_{i=1}^{\infty} F(T_i)$ dir (Phuengrattana and Suantai 2013).

Teorem 3.1.9: (X, d, W) (H) özelliğini sağlayan tam düzgün konveks metrik uzay, E de X in boş olmayan kompakt konveks alt kümesi olsun. $\{T_i\}: E \to E$ genişlemeyen dönüşümlerin ailesi ve $\cap_{i=1}^{\infty} F(T_i) \neq \emptyset$ olsun. Her $i \in \mathbb{N}$ için λ_1, λ_2, ..., $0 < \lambda_i < 1$ ve $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i < \infty$ olsun. $T_1, T_2, \ldots, T_n$ dönüşümleri ve $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ reel sayıları tarafından üretilen K-dönüşüm olmak üzere K_n dönüşümü verilsin. $x_1 \in E$ için $\{x_n\}$ dizisini

$$x_{n+1} = W(x_n, K_n x_n, \alpha_n)$$

şeklinde tanımlanırsa $\{T_i\}$ nin ortak sabit noktasına yakınsar. Burada her $n \geq 1$ için $\{\alpha_n\} \in [0,1]$ dir.

3.2. Reel Diziler için Bazı Lemmalar

Bu kısımda teoremlerimizde kullanacağımız bazı önemli lemmalara yer verilmiştir.

Lemma 3.2.1: $\{r_n\}$ ve $\{t_n\}$,

$$r_{n+1} \leq (1 + t_n) r_n \,, \quad n \in \mathbb{N} \tag{3.7}$$

eşitsizliğini sağlayan ve negatif olmayan reel sayı dizileri olsun. Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} t_n < \infty$ ise, $\lim_{n\to\infty} r_n$ limiti vardır (Zhou *et al*. 2002).

İspat: $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} r_{n+m+1} &\leq (1 + t_{n+m}) r_{n+m} \\ &\leq (1 + t_{n+m})(1 + t_{n+m-1}) r_{n+m-1} \\ &\vdots \\ &\leq \left(\prod_{i=n}^{n+m} (1 + t_i) \right) r_n \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Böylece

$$\lim sup_{m\to\infty}\, r_m \leq \left(\prod_{i=n}^{\infty} (1 + t_i) \right) r_n$$

olur. $\sum_{n=1}^{\infty} t_n < \infty$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} \prod_{i=n}^{\infty}(1+t_i) = 1$ elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikden $\limsup_{n\to\infty} r_n \leq \liminf_{n\to\infty} r_n$ eşitsizliği yazılabilir. O halde $\lim_{n\to\infty} r_n$ limiti vardır.

Lemma 3.2.2: $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ ve $\{\delta_n\}$

$$a_{n+1} \leq (1+\delta_n)a_n + b_n, \ \ n \geq 1 \tag{3.8}$$

eşitsizliği sağlayan ve negatif olmayan reel sayı dizileri olsun. Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < \infty$ ise, $\lim_{n\to\infty} a_n$ limiti vardır (Tan and Xu 1993).

İspat: $m, n \geq 1$ için

$$\begin{aligned}
a_{n+m+1} &\leq (1+\delta_{n+m})a_{n+m} + b_{n+m} \\
&\leq (1+\delta_{n+m})(a_{n+m} + b_{n+m}) \\
&\leq (1+\delta_{n+m})\big((1+\delta_{n+m-1})(a_{n+m-1} + b_{n+m-1}) + b_{n+m}\big) \\
&\vdots \\
&\leq \left(\prod_{i=n}^{n+m}(1+\delta_i)\right)\left(a_n + \sum_{i=n}^{n+m} b_i\right)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \leq \left(\prod_{i=n}^{\infty}(1+\delta_i)\right)\left(a_n + \sum_{i=n}^{\infty} b_i\right) \tag{3.9}$$

olur. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < \infty$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} \prod_{i=n}^{\infty}(1+\delta_i) = 1$ ve $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=n}^{\infty} b_i = 0$ elde edilir. (3.9) den $\limsup_{n\to\infty} a_n \leq \liminf_{n\to\infty} a_n$ yazılabilir. O halde, $\lim_{n\to\infty} a_n$ limiti vardır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Düzgün Quasi-Lipschitzian Dönüşümler için Üç Adım İterasyonu

Bu bölümde öncelikle konveks metrik uzayda düzgün quasi-Lipschitzian dönüşümlerin üç sonsuz ailesi için yeni bir iterasyon şeması teşkil edilerek bu iterasyonun ortak sabit noktaya yakınsaklığı gösterilecektir.

Daha sonra bu yakınsamanın sonuçları verilecektir. Ayrıca Picard-Mann hibrit iterasyonun konveks metrik uzayda ortak sabit noktaya yakınsaklığı ispatlanacaktır.

(X, d, W) konveks metrik uzay, E de X in boş olmayan konveks alt kümesi ve $i = 1,2, \dots$ için T_i, R_i, $S_i: E \to E$, sırasıyla $L_i > 0$, $L'_i > 0$, $L''_i > 0$ Lipschitz sabitleri ile düzgün quasi-Lipschitzian dönüşümler olsun. $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{d_n\}$, $\{e_n\}$, $\{l_n\}$ dizileri $[0,1]$ aralığından alınmak üzere

$$\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = a_n + b_n + c_n = d_n + e_n + l_n = 1$$

şartını sağlasın. Bu durumda

$$\mathcal{F} = (\cap_{i=1}^{\infty} F(T_i)) \cap (\cap_{i=1}^{\infty} F(R_i)) \cap (\cap_{i=1}^{\infty} F(S_i)) \neq \emptyset$$

ve $x_1 \in E$ olmak üzere düzgün quasi-Lipschitzian dönüşümlerinin üç sonsuz ailesi için $\{x_n\}$ dizisini

$$\begin{cases} x_{n+1} = W(x_n, T_n^n y_n, u_n; \alpha_n, \beta_n, \gamma_n), \\ y_n = W(R_n^n x_n, S_n^n z_n, v_n; a_n, b_n, c_n), \\ z_n = W(S_n^n x_n, R_n^n x_n, w_n;\ d_n, e_n, l_n) \end{cases} \tag{4.1}$$

şeklinde teşkil edelim. Burada $\{u_n\}, \{v_n\}$ ve $\{w_n\}$, E de sınırlı dizilerdir.

(4.1) iterasyonunda $e_n = 1,\ d_n = l_n = 0$ ve $R_i = I$ olarak alınırsa,

$$\begin{cases} x_{n+1} = W(x_n, T_n^n y_n, u_n; \alpha_n, \gamma_n, \beta_n) \\ y_n = W(x_n, S_n^n x_n, v_n; a_n, b_n, c_n) \end{cases} \tag{4.2}$$

şeklindeki Ishikawa tipi iterasyon elde edilir. Ayrıca (4.2) iterasyonunda $e_n = b_n = 1$, $d_n = l_n = 0,\ a_n = c_n = 0$ ve $R_i = S_i = I$ alınırsa,

$$x_{n+1} = W(x_n, T_n^n y_n, u_n; \alpha_n, \beta_n, \gamma_n) \tag{4.3}$$

şeklindeki Mann tipi iterasyon elde edilir.

Lemma 4.1.1: (X, d, W) konveks metrik uzay, E de X in boş olmayan konveks alt kümesi ve $i = 1,2, \dots$ için $T_i,\ R_i,\ S_i: E \to E$, sırasıyla $L_i > 0$, $L_i' > 0$, $L''_i > 0$ Lipschitz sabitleri ile düzgün quasi-Lipschitzian dönüşümler olsun. Ayrıca $\mathcal{F}$ boştan farklı ve sınırlı bir küme olsun. Bu durumda her $x \in E, p \in \mathcal{F}$ ve $n = 1,2, \dots$ için

$$d(T_i^n x, p) \leq Ld(x, p)$$
$$d(R_i^n x, p) \leq Ld(x, p)$$
$$d(S_i^n x, p) \leq Ld(x, p)$$

olacak şekilde bir $L \geq 0$ sayısı vardır.

İspat: $T_i,\ R_i,\ S_i$ dönüşümleri düzgün quasi-Lipschitzian olduklarından ve $n = 1,2, \dots$ için $i = 1,2, \dots$ için ve her $x \in E, p \in \mathcal{F}$

$$d(T_i^n x, p) \leq L_i d(x, p) \leq Ld(x, p)$$
$$d(R_i^n x, p) \leq L_i' d(x, p) \leq Ld(x, p)$$

$$d(S_i^n x, p) \leq L_i'' d(x,p) \leq L d(x,p)$$

elde edilir. Burada $L = max\{sup_{i\geq 1}\{L_i\},\ sup_{i\geq 1}\{L_i'\}, sup_{i\geq 1}\{L_i''\}\}$ dir.

Lemma 4.1.2: (X,d,W) tam konveks metrik uzay, E de X in boş olmayan, kapalı ve konveks alt kümesi olsun. $i = 1,2,\ldots$ için $T_i, R_i, S_i \colon E \to E$, sırasıyla $L_i > 0$, $L_i' > 0$, $L''_i > 0$ Lipschitz sabitleri ile düzgün quasi-Lipschitzian dönüşümler olmak üzere $\mathcal{F}$ boştan farklı ve sınırlı bir küme olsun. $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{d_n\}$, $\{e_n\}$, $\{l_n\}$ dizileri $[0,1]$ aralığında olmak üzere

$$\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = a_n + b_n + c_n = d_n + e_n + l_n = 1 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty}(\beta_n + \gamma_n) < \infty$$

şartları sağlansın. $\{L_i\}$, $\{L_i'\}$, $\{L''_i\}$ dizileri sınırlı olmak üzere $\{x_n\}$ dizisi (4.1) deki gibi tanımlansın. Bu durumda

a) Her $p \in \mathcal{F}$ için

$$d(x_{n+1}, p) \leq [1 + \beta_n L^2(1+L)] d(x_n, p) + \eta_n M_0$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $L = \max\{\sup_{i\geq 1}\{L_i\},\ \sup_{i\geq 1}\{L_i'\},\ \sup_{i\geq 1}\{L''_i\}\}$, $\eta_n = \beta_n + \gamma_n$ ve $M_0 = \sup_{p\in\mathcal{F}, n\geq 1}\{d(u_n,p) + Ld(v_n,p) + L^2 d(w_n,p)\}$ dir.

b) Her $p \in \mathcal{F}$ ve $m,n \geq 1$ için

$$d(x_{n+m}, p) \leq M_1 d(x_n,p) + M_0 M_1 \sum_{k=n}^{n+m-1} \eta_k$$

dir. Burada $M_1 = e^{L^2(1+L)\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k}$ dır.

İspat: (a) Tanım 2.1.22, (4.1) iterasyonu, Lemma 3.2.2 ve Lemma 4.1.1 den

$$\begin{aligned} d(x_{n+1},p) &= d(W(x_n,T_n^n y_n,u_n;\alpha_n,\beta_n,\gamma_n),p) \\ &\le \alpha_n d(x_n,p)+\beta_n d(T_n^n y_n,p)+\gamma_n d(u_n,p) \\ &\le \alpha_n d(x_n,p)+\beta_n L d(y_n,p)+\gamma_n d(u_n,p), \end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned} d(y_n,p) &= d(\mathrm{W}(R_n^n x_n,S_n^n z_n,v_n;a_n,b_n,c_n),p) \\ &\le a_n d(R_n^n x_n,p)+b_n d(S_n^n z_n,p)+c_n d(v_n,p) \\ &\le a_n L d(x_n,p)+b_n L d(z_n,p)+c_n d(v_n,p) \end{aligned} \tag{4.5}$$

ve

$$\begin{aligned} d(z_n,p) &= d(\mathrm{W}(S_n^n x_n,R_n^n x_n,w_n;\ d_n,e_n\ ,l_n),p) \\ &\le d_n d(S_n^n x_n,p)+e_n\ d(R_n^n x_n,p)+l_n d(w_n,p) \\ &\le d_n L d(x_n,p)+e_n\ L d(x_n,p)+l_n d(w_n,p) \end{aligned} \tag{4.6}$$

olur. (4.6) ifadesini (4.5) de yerine yazarsak;

$$\begin{aligned} d(y_n,p) &\le a_n L d(x_n,p)+b_n L[d_n L d(x_n,p)+e_n L d(x_n,p)+l_n d(w_n,p)] \\ &\qquad +c_n d(v_n,p) \\ &= a_n L d(x_n,p)+b_n L[(d_n+e_n)L d(x_n,p)+l_n d(w_n,p)]+c_n d(v_n,p) \\ &\le a_n L d(x_n,p)+b_n L[L d(x_n,p)+l_n d(w_n,p)]+c_n d(v_n,p) \\ &= (a_n+b_n L)L d(x_n,p)+b_n l_n L d(w_n,p)+c_n d(v_n,p) \\ &\le L(1+L)d(x_n,p)+L d(w_n,p)+d(v_n,p) \end{aligned} \tag{4.7}$$

elde ederiz. Son olarak (4.7) ifadesini (4.4) de yerine yazarsak

$$\begin{aligned} d(x_{n+1},p) &\le \alpha_n d(x_n,p)+\beta_n L[L(1+L)d(x_n,p)+L d(w_n,p)+d(v_n,p)] \\ &\qquad +\gamma_n d(u_n,p) \\ &= \left(\alpha_n+\beta_n L^2(1+L)\right)d(x_n,p)+\beta_n L^2 d(w_n,p)+\beta_n L d(v_n,p) \\ &\qquad +\gamma_n d(u_n,p) \end{aligned}$$

$$= \left(1+\beta_n L^2(1+L)\right)d(x_n,p)$$
$$+ [d(u_n,p) + Ld(v_n,p) + L^2 d(w_n,p)]\,(\beta_n+\gamma_n)$$

$$= \left(1+\beta_n L^2(1+L)\right)d(x_n,p) + M_0\eta_n \tag{4.8}$$

olarak buluruz.

b) Her $x \geq 0$ için $1 + x \leq e^x$ olduğu dikkate alınarak (4.8) eşitsizliğinden, her $p \in \mathcal{F}$ ve $m,n \geq 1$ için

$$\begin{aligned} d(x_{n+m},p) &\leq [1+\beta_{n+m-1}L^2(1+L)]d(x_{n+m-1},p) + M_0\eta_{n+m-1} \\ &\leq e^{\beta_{n+m-1}L^2(1+L)}\, d(x_{n+m-1},p) + M_0\eta_{n+m-1} \\ &\leq e^{\beta_{n+m-1}L^2(1+L)}\left[\left(1+\beta_{n+m-2}L^2(1+L)\right)d(x_{n+m-2},p) + M_0\eta_{n+m-2}\right] \\ &\quad + M_0\eta_{n+m-1} \\ &\leq e^{(\beta_{n+m-1}+\beta_{n+m-2})L^2(1+L)}d(x_{n+m-2},p) + M_0[\eta_{n+m-2}+\eta_{n+m-1}] \\ &\vdots \\ &\leq M_1 d(x_n,p) + M_1 M_0 \sum_{k=n}^{n+m-1} \eta_k \end{aligned}$$

elde ederiz. Dikkat edilirse burada $M_1 = e^{L^2(1+L)\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k}$ dir.

Teorem 4.1.3: (X,d,W) tam konveks metrik uzay, E de X in boş olmayan, kapalı, konveks alt kümesi olsun. $i = 1,2,...$ için $T_i, R_i, S_i: E \to E$, sırasıyla $L_i > 0$, $L'_i > 0$, $L''_i > 0$ Lipschitz sabitleri ile düzgün quasi-Lipschitzian dönüşümler olmak üzere $\mathcal{F}$ kümesi boştan farklı ve sınırlı olsun. $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{d_n\}$, $\{e_n\}$, $\{l_n\}$ dizileri $[0,1]$ aralığında olmak üzere

$$\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = a_n + b_n + c_n = d_n + e_n + l_n = 1 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty}(\beta_n+\gamma_n) < \infty$$

şartları sağlansın. $\{L_i\}$, $\{L_i'\}$, $\{L'_i{}'\}$ dizileri sınırlı olmak üzere $\{x_n\}$ dizisi (4.1) deki gibi tanımlansın. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisinin ortak sabit noktaya yakınsaması için gerek ve yeter şart

$$\liminf_{n\to\infty} d(x_n, \mathcal{F}) = 0$$

olmasıdır.

İspat: Şartın gerekliliği aşikardır. Bu durumda yeterliliğini göstermeliyiz. Lemma 4.1.2 nin a) şıkkını kullanarak

$$d(x_{n+1}, p) \leq [1 + \beta_n L^2(1 + L)]d(x_n, p) + \eta_n M_0 \tag{4.9}$$

yazarız.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_n + \gamma_n) < \infty$$

olup Lemma 3.2.2 ve (4.9) eşitsizliğinden $\lim_{n\to\infty} d(x_n, \mathcal{F})$ limiti vardır. Burada $\lim_{n\to\infty} d(x_n, \mathcal{F}) = 0$ olması $\liminf_{n\to\infty} d(x_n, \mathcal{F}) = 0$ olmasını gerektirir.

Şimdi $\{x_n\}$ dizisinin E de bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $n \geq N_0$ olduğunda

$$d(x_n, \mathcal{F}) < \frac{\varepsilon}{4M_1} \text{ ve } \sum_{n=N_0}^{\infty} \eta_n < \frac{\varepsilon}{4M_0 M_1}$$

olacak şekilde $N_0 > 0$ sayısı vardır. Özel olarak $p_1 \in \mathcal{F}$ ve $N_1 > N_0$ olduğunda

$$d\left(x_{N_1}, p_1\right) < \frac{\varepsilon}{4M_1} \tag{4.10}$$

olacak şekilde $p_1 \in \mathcal{F}$ vardır. $n \geq N_1$ olmak üzere herhangi $n, m > 0$ için Lemma 4.1.2 nin b) şıkkını ve (4.10) eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned} d(x_{n+m}, x_n) &\leq d(x_{n+m}, p_1) + d(p_1, x_n) \\ &\leq M_1 d\left(x_{N_1}, p_1\right) + M_1 M_0 \sum_{k=N_1}^{n+m-1} \eta_k + M_1 d\left(x_{N_1}, p_1\right) + M_1 M_0 \sum_{k=N_1}^{n-1} \eta_k \\ &\leq 2M_1 \frac{\varepsilon}{4M_1} + 2M_1 M_0 \frac{\varepsilon}{4M_0 M_1} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\{x_n\}$ dizisi E de bir Cauchy dizisidir. E de X in boş olmayan, kapalı, konveks alt kümesi olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = p^*$ olacak şekilde $p^* \in E$ vardır. Son olarak $p^* \in \mathcal{F}$ olduğunu göstereceğiz. Bunu göstermek için $\mathcal{F}$ kümesinin kapalı olduğunu ispatlayacağız.

$$d(p^*, \mathcal{F}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, \mathcal{F}) = 0$$

dır. $\lim_{n\to\infty} p_n = p'$ olacak şekilde $p_n \in \mathcal{F}$ dizisi mevcut olsun. $p' \in \mathcal{F}$ olduğunu göstermeliyiz. $i = 1,2, \ldots$ için

$$\begin{aligned} d(p', T_i p') &\leq d(p', p_n) + d(p_n, T_i p') \\ &= d(p', p_n) + d(T_i p_n, T_i p') \\ &\leq d(p', p_n) + L d(p_n, p') \end{aligned}$$

olur. Buradan $d(p', T_i p') = 0$ olup $p' \in \mathcal{F}$ ve dolayısıyla $\mathcal{F}$ kümesi kapalıdır.

Örnek 4.1.4: $(\mathbb{R}, d)$ Öklid uzayının $E = [0, +\infty)$ kapalı konveks alt kümesini göz önüne alalım. $i = 1,2, \ldots$ için $T_i = T,\ \ R_i = R,\ S_i = S$ ve olmak üzere $T, R, S: E \to E$ dönüşümlerini $Tx = |\sin x|$, $Rx = 3x$ ve $Sx = 2x$ şeklinde tanımlayalım. Bu durumda

$$\mathcal{F} = F(T) \cap F(R) \cap F(S) = \{0\} \neq \emptyset$$

dir. (4.1) iterasyonunu yukarıdaki dönüşümler ile birlikte $\{u_n\} = \{v_n\} = \{w_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ sınırlı dizileri ve

$$\{\alpha_n\} = \{a_n\} = \{d_n\} = \left\{\frac{n^2}{n^2+3}\right\}, \{\beta_n\} = \{b_n\} = \{e_n\} = \left\{\frac{1}{n^2+3}\right\}$$

ve

$$\{\gamma_n\} = \{c_n\} = \{l_n\} = \left\{\frac{2}{n^2+3}\right\}$$

dizileri ile teşkil edersek bu durumda Teorem 4.1.3 ün tüm şartları sağlanır. Aşağıdaki tabloda (4.1) ile oluşturulan $\{x_n\}$ dizisinin bazı adımları yer almaktadır.

Çizelge 4.1 (4.1) iterasyon şemasının yakınsaması

İterasyon Adımları	Başlangıç Değeri = 2	$x_{n+1} - \gamma_n u_n$
x_1	1.142890	$6.428903E-01$
x_2	$8.825892E-01$	$7.397321E-01$
x_3	$7.956126E-01$	$7.400570E-01$
x_4	$7.484912E-01$	$7.221754E-01$
⋮	⋮	⋮
x_{10}	$6.519510E-01$	$6.500092E-01$
⋮	⋮	
x_{50}	$5.918644E-01$	$5.918484E-01$
⋮	⋮	⋮

Çizelge 4.1 Fortran 90 programlama dili kullanılarak elde edilmiştir.

Teorem 4.1.3 de her $n \geq 1$ için $e_n = 1$ ve her $i \geq 1$ için $R_i = I$ olarak alınırsa aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.1.5: (X, d, W) tam konveks metrik uzay, E de X in boş olmayan, kapalı, konveks alt kümesi olsun. $i = 1,2, \ldots$ için $T_i, S_i: E \to E$, sırasıyla $L_i > 0$, $L_i' > 0$ sabitleri ile düzgün quasi-Lipschitzian dönüşümler olmak üzere $\mathcal{F}$ boştan farklı ve sınırlı bir küme olsun. $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ dizileri [0,1] aralığında olmak üzere

$$\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = a_n + b_n + c_n = 1 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty}(\beta_n + \gamma_n) < \infty$$

şartları sağlansın. $\{L_i\}$, $\{L_i'\}$ dizileri sınırlı olmak üzere $\{x_n\}$ dizisi (4.2) deki gibi tanımlansın. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisinin dönüşümlerin ortak sabit noktasına yakınsaması için gerek ve yeter şart

$$\liminf_{n\to\infty} d(x_n, \mathcal{F}) = 0$$

olmasıdır.

Benzer şekilde Teorem 4.1.3 de her $n \geq 1$ için $e_n = b_n = 1$ ve her $i \geq 1$ için $R_i = S_i = I$ olarak alınırsa aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.1.6: (X, d, W) tam konveks metrik uzay, E de X in boş olmayan, kapalı, konveks alt kümesi olsun. $i = 1,2, \ldots$ için $T_i : E \to E$ dönüşümleri $L_i > 0$ Lipschitz sabiti ile düzgün quasi-Lipschitzian dönüşümler ve $\mathcal{F}$ boştan farklı ve sınırlı bir küme olsun. $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$ dizileri [0,1] aralığında olmak üzere

$$\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 1 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty}(\beta_n + \gamma_n) < \infty$$

şartları sağlansın. $\{L_i\}$ dizisi sınırlı olmak üzere $\{x_n\}$ dizisi (4.3) deki gibi tanımlansın. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisinin ortak sabit noktaya yakınsaması için gerek ve yeter şart

$$\liminf_{n\to\infty} d(x_n, \mathcal{F}) = 0$$

dır.

Her asimptotik quasi-genişlemeyen dönüşüm aynı zamanda düzgün quasi-Lipschitzian dönüşüm olduğundan Teorem 4.1.3 den hareketle aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

Sonuç 4.1.7: (X, d, W) tam konveks metrik uzay, E de X in boş olmayan, kapalı, konveks alt kümesi olsun. $i = 1,2, \ldots$ için $T_i, R_i, S_i: E \to E$, sırasıyla $k_{n(i)}$, $k'_{n(i)}$, $k''_{n(i)}$ dizileri ile asimptotik quasi-genişlemeyen dönüşümler olmak üzere $\mathcal{F}$ boştan farklı ve sınırlı bir küme olsun. $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{d_n\}$, $\{e_n\}$, $\{l_n\}$ dizileri $[0,1]$ aralığında

$$\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = a_n + b_n + c_n = d_n + e_n + l_n = 1 \ \text{ ve } \ \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_n + \gamma_n) < \infty$$

şartları sağlansın. $\{x_n\}$ dizisi de (4.1) deki gibi tanımlanmak üzere şayet $\sup_{n\geq 1}\{k_{n(i)}\} < \infty$, $\sup_{n\geq 1}\{k'_{n(i)}\} < \infty$, $\sup_{n\geq 1}\{k''_{n(i)}\} < \infty$ ise bu durumda $\{x_n\}$ dizisinin yakınsaması için gerek ve yeter şart

$$\liminf_{n\to\infty} d(x_n, \mathcal{F}) = 0$$

olmasıdır. Burada $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ ve $\{w_n\}$ E de sınırlı üç dizidir.

İspat: $T_i, R_i, S_i: E \to E$, sırasıyla $k_{n(i)}$, $k'_{n(i)}$, $k''_{n(i)}$ dizileri ile asimptotik quasi-genişlemeyen dönüşümler olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} k_{n(i)} = \lim_{n\to\infty} k'_{n(i)} = \lim_{n\to\infty} k''_{n(i)} = 1$$

dir. Diğer taraftan

$$\sup_{n\geq 1}\{k_{n(i)}\} < \infty,\ \sup_{n\geq 1}\{k'_{n(i)}\} < \infty,\ \sup_{n\geq 1}\{k''_{n(i)}\} < \infty$$

olduğundan

$$L_i = \sup_{n\geq 1}\{k_{n(i)}\},\ L'_i = \sup_{n\geq 1}\{k'_{n(i)}\},\ L''_i = \sup_{n\geq 1}\{k''_{n(i)}\}$$

yazarız. Üstelik bu diziler sınırlıdır. O halde $T_i, R_i, S_i: E \to E$ dönüşümleri sırasıyla $L_i > 0$, $L'_i > 0$, $L''_i > 0$ sabitleri ile düzgün quasi-Lipschitzian dönüşümler olur. Bu durum teoremi ispatlar.

4.2. Konveks Metrik Uzayda Picard-Mann Hibrit İterasyonu

Şimdi Picard-Mann hibrit iterasyonunu konveks metrik uzayda ilk kez aşağıdaki şekilde vereceğiz.

(X, d, W) konveks metrik uzay, E de X in boş olmayan, kapalı ve konveks alt kümesi olsun. $S_i : E \to E$ $(i = 1,2, \dots)$ quasi-genişlemeyen dönüşümler, $T_i : E \to E$ $(i = 1,2, \dots)$ $L_i > 0$ Lipschitz sabiti ile düzgün quasi-Lipschitzian dönüşümler olmak üzere

$$\mathcal{F} = (\cap_{i=1}^{\infty} F(S_i)) \cap (\cap_{i=1}^{\infty} F(T_i)) \neq \emptyset$$

ve sınırlı bir küme olsun. $\{\alpha_n\}$ dizisi $[0,1]$ aralığından alınmak üzere herhangi bir $x_1 \in X$ için $\{x_n\}$ dizisi

$$\begin{cases} x_{n+1} = S_n y_n \\ y_n = W(x_n, T_n^n x_n, \alpha_n) \end{cases} \tag{4.11}$$

şeklinde tanımlayalım.

Burada $T_i\colon E \to E$ dönüşümleri $L_i > 0$ Lipschitz sabiti ile düzgün quasi-Lipschitzian olduklarından her $x \in E, p \in \mathcal{F}$ için $L = max\{sup_{i\geq 1}\{L_i\}\}$ alınarak

$$d(T_i^n x, p) \leq L_i d(x,p) \leq Ld(x,p)$$

yazılır.

Lemma 4.2.1: (X, d, W) tam konveks metrik uzay, E de X in boş olmayan, kapalı ve konveks alt kümesi $S_i : E \to E$ $(i = 1,2, \dots)$ quasi-genişlemeyen dönüşümler, $T_i : E \to E$ $(i = 1,2, \dots)$ $L_i > 0$ Lipschitz sabiti ile düzgün quasi-Lipschitzian dönüşümler olmak üzere $\mathcal{F}$ boştan farklı ve sınırlı bir küme olsun. $\{\alpha_n\}$ dizisi $[0,1]$ aralığından alınmak üzere

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty$$

şartı sağlansın. $\{x_n\}$ dizisi (4.11) ile tanımlanırsa,

(a) her $p \in \mathcal{F}$ için

$$d(x_{n+1}, p) \leq (1 + \alpha_n(L-1))d(x_n, p)$$

eşitsizliği sağlanır.

(b) her $p \in \mathcal{F}$ ve $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_{n+m}, p) \leq M_1 d(x_n, p)$$

olacak şekilde $M_1 > 0$ sayısı vardır. Burada $M_1 = e^{(L-1)\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k}$ dır.

İspat: (a) Tanım 2.1.22, Tanım 2.2.19, (4.11) iterasyonu ve Lemma 3.2.1 den

$$d(x_{n+1},p) \leq d(S_n y_n,p) \leq d(y_n,p) \tag{4.12}$$

ve

$$\begin{aligned} d(y_n,p) &= d(W(x_n,T_n^n x_n,\alpha_n),p) \\ &\leq (1-\alpha_n)d(x_n,p) + \alpha_n d(T_n^n x_n,p) \\ &\leq (1-\alpha_n)d(x_n,p) + \alpha_n L d(x_n,p) \\ &\leq (1-\alpha_n + \alpha_n L)d(x_n,p) \end{aligned}$$

olduğundan

$$d(x_{n+1},p) \leq \ (1+\alpha_n(L-1))d(x_n,p) \tag{4.13}$$

olur. Yani Lemma 3.2.1 ve (4.13) ten $\lim_{n\to\infty} d(x_n,p)$ mevcuttur.

(b) Her $x \geq 0$ için $1 + x \leq e^x$ olduğu dikkate alınarak (4.13) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} d(x_{n+m},p) &\leq \big(1+\alpha_{n+m-1}(L-1)\big)d(x_{n+m-1},p) \\ &\leq e^{\alpha_{n+m-1}(L-1)} d(x_{n+m-1},p) \\ &\leq e^{n+m-1(L-1)}\big(1+\alpha_{n+m-2}(L-1)\big)d(x_{n+m-2},p) \\ &\leq e^{(n+m-1+n+m-2)(L-1)} d(x_{n+m-2},p) \\ &\vdots \\ &\leq M_1 d(x_n,p) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $M_1 = e^{(L-1)\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k}$ dır.

Teorem 4.2.2: (X,d,W) tam konveks metrik uzay, E de X in boş olmayan, kapalı, konveks alt kümesi olsun. $S_i : E \ \to E \ \ (i = 1,2,\ldots)$ quasi-genişlemeyen dönüşümler,

$T_i : E \to E \quad (i = 1,2,\dots) \quad L_i > 0$ Lipschitz sabiti ile düzgün quasi-Lipschitzian dönüşümler olmak üzere $\mathcal{F}$ boştan farklı ve sınırlı bir küme olsun. $\{\alpha_n\}$ dizisi $[0,1]$ aralığından alınmak üzere

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty$$

şartı sağlansın. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisi (4.11) ile tanımlanırsa bu durumda $\{x_n\}$ dizisinin ortak sabit noktaya yakınsaması için gerek ve yeter şart

$$\liminf_{n\to\infty} d(x_n, \mathcal{F}) = 0$$

olmasıdır.

İspat: Şartın gerekliliği aşikardır. Bu durumda yeterliliğini göstermeliyiz. Lemma 4.2.1 in a) şıkkını kullanarak

$$d(x_{n+1}, \mathcal{F}) \leq \big(1 + \alpha_n(L-1)\big) d(x_n, \mathcal{F}) \tag{4.14}$$

elde ederiz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty$$

olup Lemma 3.2.1 ve (4.14) ten görülür ki $\lim_{n\to\infty} d(x_n, \mathcal{F}) = 0$ mevcuttur. Burada $\lim_{n\to\infty} d(x_n, \mathcal{F}) = 0$ olması $\liminf_{n\to\infty} d(x_n, \mathcal{F}) = 0$ olmasını gerektirir. Şimdi $\{x_n\}$ dizisinin E de bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $n \geq N_0$ olduğunda

$$d(x_n, \mathcal{F}) \leq \frac{\varepsilon}{M_1 + 1}$$

olacak şekilde $N_0 > 0$ sayısı vardır. Özel olarak $p_1 \in \mathcal{F}$ ve $N_1 > N_0$ olduğunda

$$d(x_{N_1}, p_1) \leq \frac{\varepsilon}{M_1 + 1} \tag{4.15}$$

olacak şekilde $p_1 \in \mathcal{F}$ vardır. $n \geq N_1$ olmak üzere herhangi $n, m > 0$ için Lemma 4.2.1 in b) şıkkını ve (4.15) ifadesini kullanarak

$$\begin{aligned} d(x_{n+m}, x_n) &\leq d(x_{n+m}, p_1) + d(p_1, x_n) \\ &\leq M_1 d\big(x_{N_1}, p_1\big) + d\big(x_{N_1}, p_1\big) \\ &\leq (1 + M_1) d\big(x_{N_1}, p_1\big) \\ &\leq (1 + M_1) \frac{\varepsilon}{M_1 + 1} \end{aligned}$$

elde ederiz. Dolayısıyla $\{x_n\}$ dizisi E de bir Cauchy dizisidir. E de X in boş olmayan, kapalı, konveks alt kümesi olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = p^*$ olacak şekilde $p^* \in E$ vardır.

Son olarak $p^* \in \mathcal{F}$ olduğunu göstereceğiz. Bunu göstermek için $\mathcal{F}$ kümesinin kapalı olduğunu ispatlayacağız.

$$d(p^*, \mathcal{F}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, \mathcal{F}) = 0$$

dır. $\lim_{n\to\infty} p_n = p'$ olacak şekilde $p_n \in \mathcal{F}$ dizisi mevcut olsun. $p' \in \mathcal{F}$ olduğunu göstermeliyiz. $i = 1,2, \ldots$ için

$$\begin{aligned} d(p', T_i p') &\leq d(p', p_n) + d(p_n, T_i p') \\ &= d(p', p_n) + d(T_i p_n, T_i p') \\ &\leq d(p', p_n) + L d(p_n, p') \end{aligned}$$

yazılır. Buradan $d(p', T_i p') = 0$ olup $p' \in \mathcal{F}$ ve dolayısıyla $\mathcal{F}$ kümesi kapalıdır.

Örnek 4.2.3: $(\mathbb{R}, d)$ Öklid uzayınım $E = [1, +\infty)$ kapalı konveks alt kümesi verilsin. $i = 1,2, \ldots$ için $S_i = S$ ve $T_i = T$ olmak üzere $S, T: E \to E$ dönüşümlerini $Sx = \sqrt{2x}$ ve $Tx = \frac{5x-2}{4}$ şeklinde tanımlayalım. Bu durumda

$$\mathcal{F} = F(S) \cap F(T) = \{2\} \neq \emptyset$$

dir. (4.11) iterasyonunda $\{\alpha_n\} = \left\{\frac{1}{n^2+1}\right\} \subset [0,1]$ olarak alınırsa Teorem 4.2.2 nin tüm şartları sağlanır. Aşağıdaki tabloda iki farklı başlangıç değeri için (4.11) ile oluşturulan $\{x_n\}$ dizisinin bazı adımları yer almaktadır.

Çizelge 4.2 (4.11) iterasyon şemasının yakınsaması

İterasyon Adımları	Başlangıç Değeri = 1	Başlangıç Değeri = 5
x_1	1.322876	3.278719
x_2	1.605627	2.585597
x_3	1.786487	2.280455
x_4	1.888569	2.137559
x_5	1.942935	2.068275
x_6	1.971065	2.034078
x_7	1.985407	2.017052
x_8	1.992662	2.008540
x_9	1.996316	2.004279
x_{10}	1.998153	2.002143
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{20}	1.999998	2.000002
x_{21}	1.999999	2.000001
x_{22}	2.000000	2.000000
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Çizelge 4.2 Fortran 90 programlama dili kullanılarak elde edilmiştir.

Her asimptotik quasi-genişlemeyen dönüşümün düzgün quasi-Lipschitzian dönüşüm olduğunu dikkate alırsak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 4.2.4: (X, d, W) tam konveks metrik uzay, E de X in boş olmayan, kapalı, konveks alt kümesi olsun. $S_i : E \to E$ $(i = 1,2, \dots)$ quasi-genişlemeyen dönüşümler, $k_{n(i)}$ dizisi ile $T_i : E \to E$ $(i = 1,2, \dots)$ asimptotik quasi-genişlemeyen dönüşümler olmak üzere $\mathcal{F}$ boştan farklı ve sınırlı bir küme olsun. $\{\alpha_n\}$ dizisi [0,1] alınmak üzere

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty$$

şartı sağlansın. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisi (4.11) ile tanımlanırsa bu durumda $\{x_n\}$ dizisinin ortak sabit noktaya yakınsaması için gerek ve yeter şart

$$\liminf_{n\to\infty} d(x_n, \mathcal{F}) = 0$$

olmasıdır.

İspat: $S_i : E \to E$ $(i = 1,2, \dots)$ quasi-genişlemeyen dönüşümler, $T_i : E \to E$ $(i = 1,2, \dots)$ $k_{n(i)}$ dizisi ile asimptotik quasi-genişlemeyen dönüşümler olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} k_{n(i)}=1$$

dir. Diğer taraftan $\sup_{n\geq 1}\{k_{n(i)}\} < \infty$ olduğundan

$$L_i = \sup_{n\geq 1}\{k_{n(i)}\}$$

yazarız. Üstelik bu dizi sınırlıdır. O halde $T_i : E \to E$ dönüşümleri $L_i > 0$ Lipschitz sabiti ile düzgün quasi-Lipschitzian dönüşümler olur. Bu durum teoremi ispatlar.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu bölümde çalışmamızda elde ettiğimiz sonuçlar değerlendirilecektir.

Konveks metrik uzayda tanımlı dönüşümlerin oldukça genel bir sınıfı olan düzgün quasi-Lipschitzian dönüşümlerin üç sonsuz ailesi için (4.1) ile gösterdiğimiz yeni üç adım iterasyon şeması teşkil ettik. Teorem 4.1.3 te tam konveks metrik uzayın boş olmayan kapalı, konveks alt kümesinde tanımlı bu üç sonsuz aile için teşkil ettiğimiz $\{x_n\}$ iterasyon dizisinin, $\mathcal{F}$ ortak sabit nokta kümesine yakınsaması için gerek ve yeter şartı verdik. Kontrol dizilerindeki uygun kısıtlamalarla elde ettiğimiz (4.2) ve (4.3) iterasyon şemalarının yakınsamasını da Teorem 4.1.4 ve Teorem 4.1.5 de verdik. Her asimptotik quasi-genişlemeyen dönüşüm aynı zamanda düzgün quasi-Lipschitzian dönüşüm olduğundan asimptotik quasi-genişlemeyen dönüşümler için Sonuç 4.1.7 yi ifade ettik.

Son yıllarda oldukça sık kullanılan, hız karşılaştırmalarında mevcut iterasyonların en hızlısı olarak görülen Picard-Mann hibrit iterasyonunu konveks metrik uzaylarda (4.11) iterasyon şeması ile teşkil ettik. Tam konveks metrik uzayın boş olmayan kapalı, konveks alt kümesinde tanımlı düzgün quasi-Lipschitzian ve quasi-genişlemeyen dönüşümler için teşkil ettiğimiz (4.11) ile tanımlı $\{x_n\}$ iterasyon dizisinin $\mathcal{F}$ ortak sabit nokta kümesine yakınsaması için gerek ve yeter şartı da Teorem 4.2.2 de verdik. Ayrıca gerek (4.1) ve gerekse (4.11) iterasyon dizileri için yakınsamaları gösteren birer nümerik örnek verdik.

Bu tezden aşağıdaki makale üretilmiştir,

Süheyla, E. and M, Özdemir, Convergence of a General Iterative Scheme for Three Infinite Families of Uniformly Quasi-Lipschitzian Mappings in Convex Metric Spaces, Advances in Fixed Point Theory, 3 (2013), No. 2, 406-417, ISSN: 1927-6303.

KAYNAKLAR

Abbas, M., Kadelburg, Z. and Sahu, D.R., 2012. Fixed point theorems for Lipschitzian type mappings in CAT(0) spaces, Mathematical and Computer Modelling, 55, 1418-1427.

Agarwal, R. P., Meehan, M. and O'Regan, D., 2001. Fixed Point Theory and Applications, Cambridge University Press.

Agarwal, R. P., O'Regan, D. and Sahu, D.R., 2007. Iterative construction of fixed points of nearly asymtotically nonexpansive mappings, J. Nonlinear Convex Anal., 8 (1), 61-79.

Agarwal, R. P., O'Regan, D. and Sahu, D. R., 2009. Fixed point theory for Lipschitzian-type mappings with applications, doi 10.1007/978-0-387-75818-3.

Aksoy, A. G. and Khamsi, M. A., 1990. Nonstandard Methods in Fixed Point Theory, ISBN 0-387-97364-8.

Berinde, V., 2006. Iterative Approximation of Fixed Points, Lecture Notes in Math.

Browder, F. E., 1965. Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space, Proc. Natl. Acad. Sci., 54, 1041-1044.

Chang, S.S., Yang, L. and Wang, X.R., 2010. Stronger convergence theorems for an infinite family of uniformly quasi-Lipschitzian mappings in convex metric spaces, Appl. Math. Comp., 217, 277-282.

Chidume, C. E. and Ali, B., 2007. Approximation of common fixed points for finite families of nonself asymptotically nonexpansive mappings in Banach spaces, J. Math. Anal. Appl., 326, 960-973.

Chidume, C.E., 2009. Geometric Properties of Banach Spaces and Nonlinear Iterations, Lecture Notes in Math.

Ciric, L. B., 1974. A generalization of Banach's Contraction Principle, Proc. Amer. Math. Soc., 45, 267-273.

Fukhar-ur-din, H. and Khan, S.H., 2007. Convergence of iterates with errors of asymptotically quasi-nonexpansive mappings and applications, J. Math. Anal. Appl., 328, 821-829.

Goebel, K. and Kirk, W. A., 1972. A fixed point theorem for asymptotically nonexpansive mappings, Proc. Amer. Math. Soc., 35, 171-174.

Huang, S.C., 2008. Fixed points of a sequence of asymptotically nonexpansive mappings, Fixed Point Theory, 9, 465–48

Ishikawa, S., 1974. Fixed points by a new iteration method, Proc. Amer. Math. Soc., 44, 147-150.

Jeong, J.U., Kim, S.H., 2006. Weak and strong convergence of the Ishikawa iteration process with errors for two asymptotically nonexpansive mappings, Appl. Math. Comput., 181, 1394–1401.

Kangtunyakarn, A., Suantai, S., 2009. A new mapping for finding common solutions of equilibrium problems and fixed point problems of finite family of nonexpansive mappings, Nonlinear Anal., TMA 71, 4448–4460.

Khamsi, M. A. and Kirk, W. A., 2001. An Introduction to Metric Spaces and Fixed Point Theory.

Khan, A. R., Domlo, A. A. and Fukhar-ud-din, H., 2008. Common fixed points Noor iteration for a finite family of asymptotically quasi-nonexpansive mappings in Banach spaces, J. Math. Anal. Appl., 341, 1-11.

Khan, A.R. and Ahmed, M.A., 2010. Convergence of a general iterative scheme for a finite family of asymptotically quasi-nonexpansive mappings in convex metric spaces and applications, Computers and Mathematics with Applications, 59, 2990-2995.

Khan, S. H., 2013. A Picard-Mann hybrid iterative process, Fixed Point Theory and Applications, Open acces, doi:10.1186/1687-1812-2013, 69.

Kirk, W. A., 1971. On successive approximation for nonexpansive mappings in Banach spaces, Glasgow Math. J., 6-9.

Kirk, W., Sims, B., 2001. Handbook of metric fixed point theory, Kluwer Academic Publishers.

Krasnoselskij, M. A., 1955. Two remarks on the method of successive approximations, Uspehi Mat. Nauk., 10, 123-127.

Kreyszig, E., 1989. Introductory functional analysis with applications, Wiley Classics Library Edition Published.

Liu, Q., 2001. Iterative sequences for asymptotically quasi-nonexpansive mappings with error member, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 259, no. 1, 18-24.

Liu, Q. H., 2002. Iterative sequence for asymptotically quasi-nonexpansive mappings with an errors member on uniform convex Banach spaces, J. Math. Anal. Appl., 266, 468–471.

Liu, Q.Y., Liu, Z.B. and Huang, N.J., 2010. Approximating the common fixed points of two sequences of uniformly quasi-Lipschitzian mappings in convex metric spaces, Appl. Math. Comp., 216, 883-889.

Maddox, I. J., 1988. Elements of Functional Analysıs, Cambridge University Press.

Mann, W. R., 1953. Mean value methods in iteration, Proc. Amer. Math. Soc., 4, 506-510.

Noor, M. A., 2000. New approximation schemes for general variational inequalities, J. Math. Anal. Appl., 251, 217-229.

Petryshyn, W. V. and Williamson, T. E., 1973. Strong and weak convergence of the sequence of successive approximations for quasi-nonexpansive mappings, J. Math. Anal. Appl., 43, 459-497.

Phuengrattana, W., Suantai, S., 2013. Common fixed points of an infinit family of nonexpansive mappings in cenvex metric spaces, Mathematical and Computer Modelling., 57, 306-310.

Picard, E. (Charles), 1890. Jour. de Math., (4) 6, 145-210.

Rhoades, B. E. and Soltuz, S. M., 2004. The equivalence between Mann-Ishikawa iterations and multistep iteration, Nonlinear Anal., 58, 219-228.

Rhoades, B. E., 1974. Fixed point iterations using infinite matrices, Trans. Amer. Math. Soc., 196, 161-176.

Rhoades, B. E., 1994. Fixed point iterations for certain nonlinear mappings, J. Math. Anal. Appl., 183, 118-120.

Saluja, G. S., 2011. Three-step iteratıon process for a finite family of asymptotically quasi-nonexpansive mappings in the intermediate sense in convex metric spaces, Bulletin of Mathematical Analysis and Applications, vol. 3 Issue 1 89-101.

Schu, J., 1991. Iterative construction of a fixed points of asymptotically nonexpansive mappings, J. Math. Anal. Appl., 158, 407-413.

Schu, J., 1991. Weak and strong convergence of fixed points of asymptotically nonexpansive mappings, Bull. Austral. Math. Soc., 43, 153-159.

Shimizu, T., Takahashi, W., 1996. Fixed Points of multivalued mappings in certain convex metric spaces, Topological Methods in Nonlinear Analysis of the Juliusz Schauder Center., 8, 197-203.

Shioji, N., Takahashi, W., 1999. A strong convergence theorem for asymptotically nonexpansive mappings in Banach spaces, Arch. Math., (Basel) 72, 354-359.

Shioji, N., Takahashi, W., 1999. Strong convergence of averaged approximants for asymptotically nonexpansive mappings in Banach spaces, J. Approx. Theory, 97, 53-64.

Takahashi, W., 1970. A convexity in metric space and nonexpansive mappings, Kodai. Math. Sem. Rep., 22, 142-149.

Tan, K. K. and Xu, H. K., 1993. Approximating fixed points of nonexpansive mappings by Ishikawa iteration process, J.Math. Anal. Appl., 178, 301-308.

Tian, Y. X., 2005. Convergence of an Ishikawa type iterative scheme for asymptotically quasi-nonexpansive mappings, Comput. Math. Appl., 49, 1905-1912.

Türkmen, E., Karahan, İ., Ozdemir, M., 2012. Convergence of S-iteration process for two asymptotically quasi-nonexpansive mappings in convex metric space, International Conference on Applied Analysis and Algebra., Istanbul.

Wang, C. and Liu, L.W., 2009. Convergence theorems for fixed points of uniformly quasi-Lipschitzian mappings in convex metric spaces, Nonlinear Anal., TMA 70, 2067-2091.

Wang, C., Zhu, J. H., Damjanovic, B. and Hu, L.G., 2009. Approximating fixed points of a pair of contractive type mappings in generalized convex metric spaces, Appl. Math. Comput., 215, 1522–1525.

Xu, B. and Noor, M. A., 2002. Fixed point iterations for asymptotically nonexpansive mappings in Banach spaces, J. Math. Anal. Appl., 267, 444-453.

Yıldırım, I. and Khan, S. H., 2012. Convergence theorems for common fixed points of asymptotically quasi-nonexpansive mappings in convex metric spaces, Appl. Math. Comput., 218, 4860-4866.

Yıldırım, I., Khan, S. H. and Özdemir, M., 2013. Some fixed point results for uniformly quasi-Lipschitzian mappings in convex metric spaces, Journal of Nonlinear Analysis and Optimization: Theory & Application, vol. 4, no 2, 143-148.

Zhou, H., Agarwal, R. P., Cho, Y.J. and Kim, Y.S., 2002. Nonexpansive mappings and iterative methods in uniformly convex Banach spaces, Georgian Mathematical Journal, vol:43, no:1, 591-600.

ÖZGEÇMİŞ

1980 yılında Kahramanmaraş'ta doğdu. İlköğrenimini ve orta öğrenimini Gaziantep'te tamamladı. 2000 yılında Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümüne girmeye hak kazandı. 2004 yılında mezun oldu.

2006 yılında K.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsünde yüksek lisans eğitimine başladı. 2008 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsüne yatay geçiş yaptı. 2010 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Anabilim Dalında doktora eğitimine başladı. 2011 yılında Kafkas Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümünde araştırma görevlisi olarak görev yapmaya başladı. Halen Kafkas Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümünde araştırma görevlisi olarak görev yapmaya devam etmektedir.