$G = a^S g + b^H g + c^V g$ FORMUNDAKİ RİEMANN METRİĞİNE SAHİP TANJANT DEMETTE BAZI GEOMETRİK VEKTÖR ALANLARI VE G METRİĞİ İLE İLGİLİ BAZI SONUÇLAR

Lokman BİLEN

Doktora Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalı
Doç. Dr. Aydın GEZER
2014

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

$G = a^S g + b^H g + c^V g$ FORMUNDAKİ RİEMANN METRİĞİNE SAHİP TANJANT DEMETTE BAZI GEOMETRİK VEKTÖR ALANLARI VE G METRİĞİ İLE İLGİLİ BAZI SONUÇLAR

Lokman BİLEN

MATEMATİK ANABİLİM DALI
Geometri Bilim Dalı

ERZURUM
2014

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAY FORMU

$G=a^S g+b^H g+c^V g$ **FORMUNDAKİ RİEMANN METRİĞİNE SAHİP TANJANT DEMETTE BAZI GEOMETRİK VEKTÖR ALANLARI VE** G **METRİĞİ İLE İLGİLİ BAZI SONUÇLAR**

Doç. Dr. Aydın GEZER danışmanlığında, Lokman BİLEN tarafından hazırlanan bu çalışma 24/11/2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı – Geometri Bilim Dalı'nda Doktora tezi olarak **oybirliği** ile kabul edilmiştir.

Başkan	: Prof. Dr. Hasan Hüseyin UĞURLU	*İmza*	:
Üye	: Doç. Dr. Aydın GEZER	*İmza*	:
Üye	: Doç. Dr. Murat İŞCAN	*İmza*	:
Üye	: Doç. Dr. Ömer TARAKÇI	*İmza*	:
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Tevfik İŞLEYEN	*İmza*	:

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu 04/12/2014 tarih ve 48/1606 nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. İhsan EFEOĞLU
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Doktora Tezi

$G = a^S g + b^H g + c^V g$ FORMUNDAKİ RİEMANN METRİĞİNE SAHİP TANJANT DEMETTE BAZI GEOMETRİK VEKTÖR ALANLARI VE G METRİĞİ İLE İLGİLİ BAZI SONUÇLAR

Lokman BİLEN

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Aydın GEZER

(M,g), $n-$boyutlu Riemann manifoldu ve $T(M)$, $G = a^S g + b^H g + c^V g$ formundaki Riemann metriğine sahip M nin tanjant demeti olsun. Bu tezde; öncelikle, tanjant demet (TM,G) de afin Killing ve Killing vektör alanları ve fibre koruyan projektif vektör alanları karakterize edilmiş ve bunlarla ilgili bazı sonuçlar verilmiştir. Daha sonra, (M,g) ve (TM,G) nin geodezikleri arasındaki ilişkiler elde edilmiştir. Ayrıca G Riemann metrikli tanjant demetin konformal flat olma durumu incelenmiştir. Son olarak, G metrikli tanjant demette burulmalı metrik konneksiyon tanımlanmış ve bazı özellikleri çalışılmıştır.

2014, 70 sayfa

Anahtar Kelimeler: Tanjant demet, Killing vektör alanı, Afin Killing vektör alanı, Projektif vektör alanı, Geodezik, Metrik konneksiyon, Adapte olmuş çatı.

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

SOME GEOMETRIC VECTOR FIELDS ON TANGENT BUNDLE WITH A RIEMANN METRIC OF THE FORM $G = a^{S}g + b^{H}g + c^{V}g$ AND SOME RESULTS RELATED TO G

Lokman BİLEN

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Department of Geometry

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Aydın GEZER

Let $T(M)$ be the tangent bundle of an $n-$dimensional Riemann manifold (M,g) endowed with a Riemann metric $G = a^{S}g + b^{H}g + c^{V}g$. In this thesis; Firstly, we characterize affine Killing, Killing and fibre-preserving projective vector fields on the tangent bundle (TM,G) and present some results related to them. Secondly, we get some relationships between geodesics of (M,g) and (TM,G). Thirtly we investigate conditions for the tangent bundle $T(M)$ to be locally conformally flat. Finally, we define a metric connection with torsion on the tangent bundle $T(M)$ with respect to the Riemann metric G and study its some properties.

2014, 70 pages

Keywords: Tangent bundle, Killing vector field, Affine Killing vector field, Projective vector field, Geodesics, Metric connection, Adapted frame.

TEŞEKKÜR

Doktora tezi olarak sunduğum bu çalışma Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik bölümünde yapılmıştır.

Çalışmalarımda her türlü desteği sağlayan, hocam Sayın Doç. Dr. Aydın GEZER'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tezimin hazırlanışında yakın ilgi ve desteğini gördüğüm Sayın Doç. Dr. Murat İŞCAN'a Sayın Doç. Dr. Ömer TARAKCI'ya ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Tevfik İŞLEYEN'e en içten teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım boyunca kendilerinden görmüş olduğum destek ve güvenden dolayı babama, anneme ve eşime teşekkür ederim.

Lokman BİLEN
Kasım, 2014

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

${}^{S}g$	Sasaki metriği
$R_{ijb}{}^{a}$	M manifoldunun eğrilik tensörünün bileşenleri
L_X	X vektör alanına göre Lie türevi
$[X,Y]$	X ve Y vektör alanlarının Lie parantezi
$T(M)$	M manifoldunun tanjant demeti
$T_p(M)$	$p \in M$ noktasındaki tanjant uzay
∇_X	X vektör alanına göre kovaryant türev
$\Gamma_{ij}{}^{h}$	Cristoffel sembolü
${}^{V}X$	X vektör alanının dikey lifti
${}^{C}X$	X vektör alanının tam lifti
${}^{H}X$	X vektör alanının yatay lifti
$T^{p}_{q\ (m)}(M)$	$m \in M$ noktasındaki (p,q) tipli tensör uzayı
$T^{*}_{p}(M)$	$p \in M$ noktasındaki kovektör uzayı

1. GİRİŞ

Diferensiyellenebilir bir M manifoldu üzerindeki g Riemann metriği kullanılarak M manifoldunun tanjant demeti $T(M)$ üzerinde farklı Riemann metrikleri tanımlanabilir. Bu şekilde tanımlanan metriklere $g-$doğal metrik denir. Bu metriklerden en çok bilineni Sasaki (1958) tarafından tanımlanan ve günümüzde Sasaki metriği olarak bilinen metriktir. Sasaki metriği doğal olarak tanımlanmasına rağmen rijittir. Örneğin Kowalski (1971) baz manifoldun lokal flat olmaması durumunda Sasaki metrikli tanjant demetin asla lokal simetrik olamayacağını göstermiştir. Daha sonra Musso and Tricerri (1988), Sasaki metrikli tanjant demetin sabit skaler eğriliğe sahip olması için gerek ve yeter şartın baz manifoldun lokal flat olduğunu göstermişlerdir. Gudmundsson and Kappos (2002) da Sasaki metrikli tanjant demetin eğrilikleri ile ilgili çeşitli sonuçlar vermişlerdir.

Tanjant demette Sasaki metriği dışında çeşitli metrikler tanımlanmıştır. Yano and Ishihara (1973) M manifoldu üzerinde bir metriğin klasik liftleri vasıtasıyla $T(M)$ manifoldu üzerinde metrikler tanımlamışlar ve bunların geometrilerini incelemişlerdir. Abbasi and Sarih (2005) tanjant demette g Riemann metriğinin dikey lifti, yatay lifti ve Sasaki liftinin bir kombinasyonu olan $G = a^S g + b^H g + c^V g$ metriğini çalışmışlardır. Burada a, b ve c; $a>0$ ve $a(a+c)-b^2>0$ şartlarını sağlayan sabitlerdir. Ayrıca onlar G metriğine sahip tanjant demetin sabit skaler eğrilikli uzay olması için baz manifoldun lokal flat olması gerektiğini göstermişlerdir.

Oproiu *et al.* (1999a, 1999b, 2001), Oproiu and Papaghiuc (2004), Riemann manifoldu üzerinde kurulan tanjant demet üzerinde doğal metrikler tanımlamışlar ve onlarla ilgili ilginç geometrik sonuçlar elde etmişlerdir. Aslında tüm yukarıda anılan metrikler Abbasi (2004) tarafından kurulan en genel $g-$doğal metriğin alt sınıflarıdırlar.

Bu tezde, Abbasi and Sarih (2005) tarafından tanımlanan $G = a^S g + b^H g + c^V g$ formundaki Riemann metriği göz önüne alınmıştır. Ayrıca, sunulan bu tezde tanjant demette daha kolay tensör hesabı yapmaya imkan veren adapte olmuş çatı kullanılmıştır.

Bu amaçla kuramsal temeller adını alan ikinci bölümde, diferensiyel geometride temel tanımlar, kavramlar ve teoremlere yer verilmiştir.

Materyal ve yöntem olarak adlandırılan üçüncü bölümde, ilk olarak tanjant demet ve liftler hakkında genel bilgiler verilmiştir. Daha sonra $G = a^S g + b^H g + c^V g$ formundaki Riemann metriği tanıtılmış ve bu metriğin Levi-Civita konneksiyonları verilmiştir. Ayrıca hesaplamalarımızda kullanacağımız adapte olmuş çatı ile ilgili kavramlara yer verilmiştir.

Araştırma ve bulgular kısmı olan dördüncü bölümde, ilk olarak $G = a^S g + b^H g + c^V g$ formundaki Riemann metriğine göre afin Killing ve Killing vektör alanlarının en genel formu çıkarılarak onlardan bazı geometrik sonuçlar elde edilmiştir. Daha sonra G metriğine göre projektif vektör alanlarının bir sınıflandırılması verilip çeşitli sonuçlar elde edilmiştir. Son olarak bu metriğin geodezikleri, burulmalı metrik konneksiyonu ve G metrikli tanjant demetin konformal flatlığı araştırılmıştır.

Beşinci bölümde ise, çalışmalarımızdan elde ettiğimiz sonuçlara yer verilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bilimsel araştırmalarda kavram hiyararşisi önem arzettiği için, çalışmalarda temel tanım ve teoremlere ihtiyaç duyulmaktadır. Bu temel kavramlardan özellikle araştırmalarımızda ihtiyaç duyduklarımız bu başlık altında sunulmuştur.

2.1. Diferensiyellenebilir Manifoldlar

Tanım 2.1.1: M bir Hausdorff uzay olmak üzere herhangi bir $U \subset M$ açık kümesinden $V \subset \mathbb{R}^n$ bölgesine tanımlanan

$$\varphi : U \to V$$

homeomorfizmine M de n-boyutlu koordinat sistemi veya harita, U açık kümesine de φ haritasının koordinat komşuluğu veya koordinat bölgesi denir ve harita (U,φ) şeklinde gösterilir.

Eğer $x \in U$ ise

$$\varphi(x) = (x^1, x^2, ..., x^n) \in \mathbb{R}^n$$

olur. Buradaki $x^1,..., x^n$ reel sayılarına φ haritasında x noktasının koordinatları denir.

Tanım 2.1.2: Eğer M Hausdorff uzayının n-boyutlu φ_α haritalarının U_α bölgeleri bu uzayı örterse, yani

$$M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha, \quad \text{(A-indisler kümesi)}$$

ise, M ye n-boyutlu topolojik manifold veya sadece n-boyutlu manifold denir.

Tanım 2.1.3: M bir Hausdorff uzay ve k ise $0 \le k < \infty$ şartını sağlayan tam sayı olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in A, U_\alpha \subset M\}$ lokal koordinatlar ailesine M üzerinde C^k sınıfından n-boyutlu atlas adı verilir.

1. Lokal haritaların U_α bölgesi M yi örter, yani M n-boyutlu topolojik manifolddur.
2. Keyfi $\alpha,\ \beta \in A$ için $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ ise

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

dönüşümü C^k sınıfındandır. Bu şarta bazen $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ve (U_β, φ_β) haritalarının C^k uzlaşması şartı da denir. $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümüne koordinatların dönüşümü $(u_\beta^i = u_\beta^i(u_\alpha^j),\ i,\ j = 1,...,n)$ denir. Burada u_β^i, (U_β, φ_β) haritasındaki $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ noktasının koordinatları ve u_α^j ise $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ haritasındaki x noktasının koordinatlarıdır. $U_\alpha \cap U_\beta = \varnothing$ olması halinde, $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümünün C^k sınıfından olduğu kabul edilecektir. 2 şartı, $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümlerinin C^k sınıfından diffeomorfizmler olmasına denktir. Bu ise, $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ koordinat dönüşümünün Jacobian matrisinin determinantının sıfırdan farklı olması demektir.

Tanım 2.1.4: $\{(\mathrm{U}_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ ve $\{(\mathrm{U}_\beta, \varphi_\beta)\}$, C^k sınıfından herhangi iki atlas olsun. Bu atlasların keyfi $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ve (U_β, φ_β) haritaları C^k uzlaşmış ise yani $\{(\mathrm{U}_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ ve $\{(\mathrm{U}_\beta, \varphi_\beta)\}$ atlaslarının birleşimi C^k sınıfından atlas ise verilen atlaslara denk atlaslar denir.

Haritaların C^k uzlaşması bir denklik bağıntısıdır. Bu bağıntı C^k atlaslar kümesini denk atlasların ayrık denklik sınıflarına ayırır.

Tanım 2.1.5: M Hausdorff uzayı üzerinde C^k atlaslarının herhangi bir denklik sınıfına C^k-yapı denir.

$C^k -$yapısının tüm C^k atlaslarının birleşiminin oluşturduğu C^k atlasına maksimal C^k atlas adı verilir. M üzerindeki C^k atlaslarının her bir denklik sınıfı, kendisinin bir elemanı ile ifade edilir. Yani, $C^k -$yapısı, onun keyfi C^k atlası yardımıyla oluşturulabilir. Buradan da, M üzerindeki her bir C^k $-$yapısının bu yapıdan olan bir C^k atlas ile verilebileceği sonucu çıkar.

C^0 - yapıya topolojik yapı, C^k, $(1 \leq k)$ yapıya ise düzgün (smooth) yapı denir. Bundan sonra yalnız C^∞ yapılara bakılacaktır.

Tanım 2.1.6 : M, sayılabilir baza sahip Hausdorff uzay olsun. Eğer M üzerinde n-boyutlu C^∞ atlaslarının C^∞- yapısı verilmişse M uzayına n-boyutlu C^∞ sınıfından diferensiyellenebilir manifold veya düzgün manifold denir (Salimov ve Mağden 2008).

2.2. Tensör Alanları

Tanım 2.2.1: B_n bir vektör uzayı ve B_n^* da onun dual uzayı olsun. $\vec{x}_j \in B_n$, $j = 1, 2, ..., q$ vektör ve $\xi^i \in B_n^*$, $i = 1, 2, ..., p$ kovektör değişkenlerinin

$$w = t\left(\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_q, \xi^1, \xi^2, ..., \xi^p\right)$$

reel değerli fonksiyonunu göz önüne alalım. Eğer bu fonksiyon herbir değişkene göre lineerlik şartını sağlıyorsa bu fonksiyona multilineer fonksiyon denir. Mesela $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ olmak üzere birinci vektör değişkenine göre lineerlik şartı,

$$t\left(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_q, \xi^1, \xi^2, ..., \xi^p\right) = \lambda t\left(\vec{x}, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_q, \xi^1, \xi^2, ..., \xi^p\right)$$
$$+\mu t\left(\vec{y}, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_q, \xi^1, \xi^2, ..., \xi^p\right)$$

şeklinde gösterilebilir.

$w = t\left(\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_q, \xi^1, \xi^2, ..., \xi^p\right)$ multilineer fonksiyonuna karşılık gelen

$$t : \underbrace{B_n \,\mathrm{x} \ldots \mathrm{x}\, B_n}_{q \text{ tane}} \,\mathrm{x}\, \underbrace{B_n^* \,\mathrm{x} \ldots \mathrm{x}\, B_n^*}_{p \text{ tane}} \to \mathbb{R}$$

operatörüne B_n uzayında p dereceden kontravaryant, q dereceden kovaryant tensör adı verilir ve $T_q^p\left(B_n\right)$ ile gösterilir (Bishop and Goldberg 1968).

$p \geq 0,\ q \geq 0$ olmak üzere $s = p + q$ sayısına tensörün valentiği, (p,q) sembolüne ise tensörün tipi denir. $(p,0)$ tipli tensöre kontravaryant tensör, $(0,q)$ tipli tensöre ise kovaryant tensör denir. M manifoldu üzerindeki C^{∞} sınıfından (r,s) tipli tensör alanlarının kümesini $\Im_s^r(M)$ ve M deki tüm tensör alanlarının kümesini $\Im(M)$ ile göstereceğiz. $S_2(B_n)$, $\Im_2^0(B_n)$ uzayının bütün simetrik tensörlerinin alt uzayı olmak üzere herhangi bir $g \in S_2(B_n)$ tensörünü alalım; $\forall \vec{y} \in B_n$ için,

$$g(\vec{x},\vec{y}) = 0, \tag{2.1}$$

şartının sağlanması için $\vec{x} = 0$ oluyorsa, bu taktirde g tensörüne regüler tensör denir. (2.1) eşitliği koordinatlarla,

$$g_{ij}x^i y^j = 0$$

biçiminde yazılır. Bu eşitlik her y^j için sağlandığından,

$$g_{ij}x^i = 0,\ j = 1,\dots,n$$

bulunur. Bu denklem sisteminin $x^i = 0$ çözümüne sahip olması için,

$$Det(g_{ij}) \neq 0$$

olması gerekir. Burada (g_{ij}), g tensörüne karşılık gelen matristir.

$g \in S_2(B_n)$ tensörü regüler tensör ise g tensörüne B_n uzayında esas tensör adı verilir. Esas tensöre karşılık gelen (g_{ij}) tensörünün tersini $(\tilde{g}^{kj})$ ile gösterelim. Bu taktirde,

$$\tilde{g}^{kj} g_{ij} = \delta_i^k$$

yazılır.

Tanım 2.2.2: M, C^{∞} sınıfından bir manifold ve $T_p(M)$, her $p \in M$ noktasındaki tanjant uzayı olsun. M manifoldunun her $p \in M$ noktasına $T_p(M)$ uzayından bir ve yalnız bir X_p vektörü karşılık getiren $X : p \to X_p$ vektör değerli fonksiyonuna M üzerinde bir vektör alanı denir.

Tanım 2.2.3: M, C^∞ sınıfından bir manifold ve $T_p^*(M)$, her $p \in M$ noktasındaki kovektör uzayı olsun. Her $p \in M$ noktasına bir ve yalnız bir $\omega_p \in T_p^*(M)$ kovektörünü karşılık getiren $\omega : p \to \omega_p$ dönüşümüne M üzerinde bir kovektör alanı denir.

C^∞ sınıfından bir manifold M olmak üzere her $p \in M$ noktasındaki her bir (p,q) tipli tensör için uygun bir $T^p_{q\,(p)}(M)$ tensör uzayı vardır.

Tanım 2.2.4: M, C^∞ sınıfından bir manifold ve $T^p_{q\,(p)}(M)$, bir $p \in M$ noktasındaki (p,q) tipli tensör uzayı olsun. M manifoldunun her $p \in M$ noktasına bir ve yalnız bir $t_p \in T^p_{q\,(p)}(M)$ tensörünü karşılık getiren $t : p \to t_p$ kuralına M üzerinde (p,q) tipli tensör alanı denir (Bishop and Goldberg 1968).

Eğer $p = 1, q = 0$ ise vektör alanı elde edilir. Yani (1,0) tipli tensör alanı bir vektör alanıdır.

Eğer $p = 0$, $q = 1$ olursa $T_1^0(M)$ uzayının elemanları kovektör alanı olur. Eğer $p = q = 0$ ise her $p \in M$ noktasına bir skaler değer karşılık gelir. Bu yüzden (0,0) tipli tensör alanı reel değerli bir fonksiyondur.

Eğer $U \subset M$ bölgesinde f fonksiyonu C^∞ sınıfından ise, her $x \in U$ için $df\,\big|_x \in T^0_{1\,(x)}(M)$ olur. Böylece f fonksiyonunun diferensiyeli olan df operatörü (0,1) tipli bir tensör alanıdır.

$\forall p \in M$ için T_p tensörü simetrik tensör ise T tensör alanına simetrik tensör alanı denir. Eğer her bir p noktasındaki T_p tensörü antisimetrik tensör ise T tensör alanına antisimetrik tensör alanı denir.

T, (p,q) tipli tensör alanı olsun. Kovektör alanları $\theta_1,...,\theta_p$ ve vektör alanları $X_1,...,X_q$ olmak üzere

$$T(\theta_1,...,\theta_p,X_1,...,X_q)(p)=T_p(\theta_1(p),...,\theta_p(p),X_1(p),...,X_q(p))$$

ifadesi reel değerli fonksiyon tanımlar. Özelikle x^i koordinatlarına göre T tensör alanının bileşenleri

$$T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}=T\left(dx^{i_1},\ldots,dx^{ip},\partial_{j_1},\ldots,\partial_{j_q}\right)$$

biçiminde reel değerli fonksiyonlardır (Bishop and Goldberg 1968). T tensör alanının bileşenleri C^∞ sınıfından fonksiyonlar ise T tensör alanına C^∞ sınıfındandır denir.

(p,q) tipli T tensör alanının C^∞ sınıfından olması için gerek ve yeter şart her C^∞ sınıfından $\theta_1,...,\theta_p$ kovektör alanları ve her C^∞ sınıfından $X_1,...,X_q$ vektör alanları için $T(\theta_1,...,\theta_p,X_1,...,X_q)$ fonksiyonunun C^∞ sınıfından olmasıdır.

Tanım 2.2.5: $T^r_{s\ (p)}(M)$ tensör uzayı üzerinde

$$C^i_j:T^r_{s\ (p)}(M)\to T^{r-1}_{s-1\ (p)}(M)$$
$$A\to C^i_j(A)(\xi^1,...,\xi^{s-1},X_1,...,X_{r-1})=C\{A(.,X_1,...,X_{r-1},.,\xi^1,...,\xi^{s-1})\}$$

ve

$$C^i_j(A)=\sum_m A(\xi^m,\xi^1,...,\xi^{s-1},X_m,X_1,...,X_{r-1})$$

şeklinde tanımlanan operatöre kontraksiyon operatörü denir. Böylece bir kontraksiyon operatörü $(r,s)-$tipli bir tensörü $(r-1,\ s-1)$ tipli bir tensöre taşır, yani kovaryantlık ve kontravaryantlık derecelerini düşürür (Şahin 2013).

2.3. Tensör Diferensiyellemesi

Tanım 2.3.1: Aşağıdaki şartları sağlayan $D:\Im(M)\to\Im(M)$ dönüşümüne $\Im(M)$ cebirinin tensör diferensiyellemesi denir.

(i) D sabit katsayılara göre lineerdir. Yani; $D(at+bs)=aD(t)+bD(s)$,

(ii) D tipi korur. Yani; $D\left(\Im_q^p(M)\right)\subset\Im_q^p(M)$

(iii) $D(t\otimes s)=Dt\otimes s+t\otimes Ds$ (Leibnitz Kuralı)

(iv) D işlemi ile kontraksiyon işlemi yer değiştirebilir. Yani; $D(Ct)=C(Dt)$

Burada $t,\ s\in\Im(M)$ $a,\ b\in\mathbb{R}$ dir.

2.4. Diferensiyellenebilir Manifold Üzerinde Afin Konneksiyon

M diferensiyellenebilir manifoldunun $\gamma: u^i=u^i(t)$ eğrisi boyunca konneksiyon tanımlanması eğrinin noktalarına tatbik edilmiş vektörler arasında uygunluk oluşturma kuralıdır. Eğer γ eğrisinin herhangi bir noktasındaki v^i vektörü t parametresine bağlı olarak değiştikçe verilen konneksiyona göre başlangıçtaki ile uygun kalırsa, bu durumda bu vektör verilmiş konneksiyona göre γ eğrisi boyunca paralel kaydırılmış olur. Eğer konneksiyon diferensiyellenebilirse, o zaman paralel kaydırmayı ifade eden $v^i=v^i(t)$ fonksiyonları da diferensiyellenebilir fonksiyonlar olur. Eğer vektörlerin paralel kaydırılması halinde lineer bağımlılık korunursa verilen konneksiyona afin veya lineer konneksiyon adı verilir.

Afin konneksiyonun invaryant tanımı aşağıdaki gibi verilir:

Tanım 2.4.1: M, C^∞ sınıfından bir manifold, $\forall X,\ Y,\ Z\in\Im_0^1(M)$, $f,\ g\in\Im_0^0(M)$ olmak üzere $\Im(M)$ cebirinin,

$$\nabla:\Im_0^1(M)\mathrm{x}\Im_0^1(M)\to\Im_0^1(M)$$

işlemi,

1. $\nabla_{fX+gY}Z=f\nabla_X Z+g\nabla_Y Z$

2. $\nabla_X(fY+gZ)=(Xf)Y+f\nabla_X Y+(Xg)Z+g\nabla_X Z$

şartlarını sağlıyorsa ∇ dönüşümüne "afin (lineer) konneksiyon" denir. (M,∇) çiftine ise "afin konneksiyonlu uzay" denir.

Tanım 2.4.2: M , C^{∞} sınıfından bir manifold ve ∇, M üzerinde bir afin konneksiyon olsun. $\forall X,\ Y \in \Im_0^1(M),\ Z \in \Im_q^p(M),\ f,\ g \in \Im_0^0(M)$ olmak üzere $\Im(M)$ cebirinin,

$$D = \nabla_X : \Im(M) \to \Im(M)$$

diferensiyelleme işlemi,

1. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,
2. $\nabla_X f = Xf$

şartlarını sağlıyorsa ∇_X e X vektör alanı yönündeki kovaryant türev adı verilir.

$\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ ve $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} = \nabla_{\partial_i} = \nabla_i$ gösterimini kabul edelim, ∇_i yi ∂_j vektör alanına uygularsak sonuç vektör alanı olduğundan,

$$\nabla_i \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k$$

yazabiliriz. Bu ifadeyi yeni koordinatlarda

$$\nabla_{i'} \partial_{j'} = \Gamma_{i'j'}^{k'} \partial_{k'}$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan

$$\Gamma_{i'j'}^{k'} \partial_{k'} = \nabla_{\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\partial_{j'}\right) = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \nabla_{\partial_i} \partial_{j'} \qquad \left(\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y\right)$$

$$= \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \nabla_{\partial_i} \left(\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right)$$

$$= \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \right) \frac{\partial}{\partial x^j} + \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \nabla_i \partial_j \right]$$

$$= \frac{\partial^2 x^{j \mapsto k}}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} \frac{\partial}{\partial x^{j \mapsto k}} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \Gamma_{ij}^k \partial_k$$

$$\Rightarrow \left(\Gamma_{i'j'}^{k'} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \right) \frac{\partial}{\partial x^k} = \left(\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial x^k}$$

$$\Rightarrow \left(\Gamma_{i'j'}^{k'} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \right) = \left(\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \Gamma_{ij}^k \right)$$

olup her iki taraf $\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}$ ile çarpılırsa,

$$\Gamma_{i'j'}^{k'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \Gamma_{ij}^k + \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}}$$

bulunur ki Γ_{ij}^k nın $\partial_i \to \partial_{i'}$ dönüşüm kuralı,

$$\Gamma_{i'j'}^{k'} = A_{i'}^i A_{j'}^j A_k^{k'} \Gamma_{ij}^k + A_k^{k'} A_{i'j'}^k$$

şeklindedir.

Şimdi $X = X^i \partial_i$, $Y = Y^j \partial_j$ alırsak

$$\nabla_X Y = \nabla_{x^i \partial_i} \left(Y^j \partial_j \right) = X^i \nabla_{\partial_i} \left(Y^j \partial_j \right)$$

$$= X^i \left(\left(\partial_i Y^j \right) \partial_j + Y^j \nabla_i \partial_j \right)$$

$$= X^i \left(\left(\partial_i Y^j \right) \partial_j + Y^j \Gamma_{ij}^k \partial_k \right)$$

$$= X^i \left(\partial_i Y^k + \Gamma_{ij}^k Y^j \right) \partial_k$$

burada $X = X^i \partial_i = \delta_s^i \partial_i = \partial_s$ alınırsa, (yani $X^i = \delta_s^i$ alınırsa)

$$\left(\nabla_{\partial_s} Y \right)^k \partial_k = \delta_s^i \left(\partial_i Y^k + \Gamma_{ij}^k Y^j \right) \partial_k$$

$$\nabla_s Y^k = \partial_s Y^k + \Gamma_{sj}^k Y^j \tag{2.2}$$

yazılır. Bu, Y vektör alanının kovaryant türevinin koordinatlarla ifadesidir.

Şimdi $\omega \in \Im_1^0(M)$ için kovaryant türeve bakalım. $X,\ Y \in \Im_0^1(M)$ ve $\omega(X) = C_1^1(\omega \otimes X) \in \Im_0^0(M)$ olmak üzere,

$$\nabla_X \omega(Y) = (\nabla_X \omega) Y + \omega(\nabla_X Y)$$

$$(\nabla_X \omega) Y = X \omega(Y) - \omega(\nabla_X Y)$$

olup $X = \partial_i$, $Y = \partial_j$ yazılırsa,

$$(\nabla_i \omega)(\partial_j) = \partial_i \omega(\partial_j) - \omega(\nabla_i \partial_j)$$

$$\nabla_i \omega_j = \partial_i \omega_j - \Gamma_{ij}^k \omega_k \tag{2.3}$$

şeklinde yazılır.

Benzer şekilde (p,q) tipli tensör için kovaryant türev lokal koordinatlarla,

$$\nabla_k t_{j_1,\ldots,j_q}^{i_1,\ldots,i_p} = \partial_k t_{j_1,\ldots,j_q}^{i_1,\ldots,i_p} + \sum_{\lambda=1}^{p} \Gamma_{km}^{i_\lambda} t_{j_1,\ldots,j_q}^{i_1,\ldots,m,\ldots,i_p} - \sum_{\mu=1}^{q} \Gamma_{kj_\mu}^{m} t_{j_1,\ldots,m,\ldots,j_q}^{i_1,\ldots,i_p} \tag{2.4}$$

şeklinde yazılır (Kobayashi and Nomizu 1963).

Tensörün kovaryant türevi tanımından, (p,q) tipli bir tensörün kovaryant türevi $(p,q+1)$ tipli bir tensör olduğu görülür. Yani kovaryant türev, uygulanan tensörün kovaryantlık mertebesini bir artırır.

2.5. Lie Türevlemesi

M üzerindeki (U,φ) koordinat sisteminde $X = X^i \partial_i$ ve $Y = Y^j \partial_j$ vektör alanları ve $f \in \Im_0^0(M)$ fonksiyonu için

$$X(f) = X^i \partial_i f,\ Y(f) = Y^j \partial_j f$$

$$XY(f) = X\left(Y^j \partial_j f\right) = X^i\left(\partial_i Y^j \partial_j f + Y^j \partial_{ji}^2 f\right)$$

$$YX(f) = Y\left(X^i \partial_i f\right) = Y^j\left(\partial_j X^i \partial_i f + X^i \partial_{ij}^2 f\right)$$

bulunur. Buradan

$$XY(f) - YX(f) = \left(X^i \partial_i Y^j - Y^i \partial_i X^j\right)\partial_j f$$

yazılır. Böylece,

$$XY - YX = [X,Y]$$

biçiminde tanımlanan yeni bir vektör alanı tanımlanmış olur. Bu vektör alanının ∂_i doğal çatısı cinsinden ifadesi

$$\left[X,Y\right]=XY-YX=\left(X^{i}\partial_{i}Y^{j}-Y^{i}\partial_{i}X^{j}\right)\partial_{j} \qquad (2.5)$$

biçiminde olur.

Tanım 2.5.1: (2.5) eşitliği ile tanımlanan $\left[X,Y\right]$ vektör alanına X ve Y vektör alanlarının Lie parantezi denir.

Özel olarak $\partial_i=\delta_i^k\partial_k$, $\partial_j=\delta_j^k\partial_k$ vektör alanları alınırsa (2.5) formülünden

$$\left[\partial_i,\partial_j\right]=0$$

olduğu görülür. (2.5) formülünün yardımı ile Lie parantezinin aşağıdaki özelliklere sahip olduğu gösterilebilir:

1. $\left[X,Y+Z\right]=\left[X,Y\right]+\left[X,Z\right]$,
2. $\left[X,fY\right]=X(f)Y+f\left[X,Y\right]$,
3. $\left[X,Y\right]=-\left[Y,X\right]$,
4. $\left[X,\left[Y,Z\right]\right]+\left[Y,\left[Z,X\right]\right]+\left[Z,\left[X,Y\right]\right]=0$

Tanım 2.5.2: $D=L_X$, $X\in\Im_0^1(M)$ diferensiyelleme işlemi aşağıdaki şartları sağlarsa L_X e X vektör alanı yönündeki Lie diferensiyellemesi adı verilir (Kobayashi and Nomizu 1963).

i. $L_X f=Xf$, $\quad f\in\Im_0^0(M)$

ii. $L_X Y=\left[X,Y\right]$

Burada $\left[X,Y\right]$ Lie parantezidir.

Şimdi keyfi bir kovektör alanı için Lie türev formülünü bulalım. Önce $\omega\in\Im_1^0(M)$ kovektör alanını göz önüne alalım. $\forall Y\in\Im_0^1(M)$ için $\omega(Y)\in\Im_0^0(M)$ olduğu açıktır. L_X türevinin özelliklerine göre

$$L_X\left(\omega(Y)\right)=\left(L_X\omega\right)Y+\omega\left(L_XY\right)$$

ve buradan

$$\left(L_X\omega\right)Y=L_X\left(\omega(Y)\right)-\omega\left(L_XY\right)=X\left(\omega(Y)\right)-\omega\left([X,Y]\right) \tag{2.6}$$

yazılır.

Eğer, $Y=\partial_j$ alınırsa (2.6) eşitliğinin U komşuluğundaki lokal koordinatlarla ifadesi

$$L_X\omega_j=X^k\partial_k\omega_j+\omega_k\partial_jX^k \tag{2.7}$$

biçiminde olur.

Şimdi keyfi (p,q) tipli t tensör alanına bakalım. $t\in\Im_q^p(M)$ için

$t\left(X_1,\ldots,X_{q,}\omega^1,\ldots,\omega^p\right)\in\Im_0^0(M),\ \forall X_1,\ldots,X_q\in\Im_0^1(M),\ \forall\omega^1,\ldots,\omega^p\in\Im_1^0(M)$

olduğu açıktır. Bu takdirde L_X in özelliklerine göre

$$\begin{aligned}L_X\left(t\left(X_1,\ldots,X_q,\omega^1,\ldots,\omega^p\right)\right)&=\left(L_Xt\right)\left(X_1,\ldots,X_q,\omega^1,\ldots,\omega^p\right)\\&+\sum_{i=1}^{q}t\left(X_1,\ldots,L_XX_i,\ldots,X_q,\omega^1,\ldots,\omega^p\right)\\&+\sum_{j=1}^{q}t\left(X_1,\ldots,X_q,\omega^1,\ldots,L_X\omega^j,\ldots,\omega^p\right)\end{aligned}$$

ve buradan;

$$\begin{aligned}\left(L_Xt\right)\left(X_1,\ldots,X_q,\omega^1,\ldots,\omega^p\right)&=X\left(t\left(X_1,\ldots,X_q,\omega^1,\ldots,\omega^p\right)\right)\\&-\sum_{i=1}^{q}t\left(X_1,\ldots,L_XX_i,\ldots,X_q,\omega^1,\ldots,\omega^p\right)\\&-\sum_{j=1}^{q}t\left(X_1,\ldots,X_q,\omega^1,\ldots,L_X\omega^j,\ldots,\omega^p\right)\end{aligned}$$

bulunur. L_X türevi $dx^i\left(\partial_j\right)=\delta_j^i$ için uygulanırsa,

$$0=L_X\delta_j^i=L_X\left(dx^i\left(\partial_j\right)\right)=\left(L_Xdx^i\right)\partial_j+dx^i\left(L_X\partial_j\right)$$

elde edilir. Buradan da Lie parantezinin özellikleri göz önüne alınarak,

$$\left(L_X dx^i\right)\partial_j = -dx^i\left[X,\partial_j\right] = -dx^i\left[X^k\partial_k,\partial_j\right] = dx^i\left[\partial_j, X^k\partial_k\right]$$

$$= dx^i\partial_j X^k\partial_k = \partial_j X^k\delta_k^i = \partial_j X^i$$

ya da $\left(L_X dx^i\right) = \left(\partial_j X^i\right)dx^j$ bulunur. Bu son eşitlik ve $\left(L_X\partial_i\right) = -\partial_i X^k\partial_k$ olduğu kullanılırsa,

$$L_X t^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} = X^k\partial_k t^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} + \sum_{\lambda=1}^{q}\left(\partial_{j\lambda}X^k\right)t^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots k\ldots j_q} - \sum_{\mu=1}^{p}\left(\partial_k X^{i_\mu}\right)t^{i_1\ldots k\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} \qquad (2.8)$$

eşitliği elde edilir. Burada $L_X t^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$ ile $\left(L_X t\right)^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$ gösterilmiştir. Özel olarak $p=1,\ q=0$ ve $p=0,\ q=1$ olduğunda (2.8) eşitliğinden (2.5) ve (2.7) eşitlikleri elde edilir.

2.6. Eğrilik ve Burulma Tensörleri

M afin konneksiyonlu uzayda $f = f\left(u^1,\ldots,u^n\right)$ diferensiyellenebilir fonksiyonu verilmiş olsun. Bu fonksiyonun tam diferensiyeli, yani $df = \partial_i f du^i$ ifadesi koordinatların dönüşümü halinde invaryant kalır ve df fonksiyonu du^i vektörünün lineer fonksiyonu olur. Bu lineer fonksiyona karşılık gelen kovektörün koordinatları

$$V_i = \partial_i f \qquad (2.9)$$

ile gösterilir. Bu kovektöre f fonksiyonunun gradienti, f fonksiyonuna ise bu kovektör alanının potansiyel fonksiyonu denir.

Keyfi V_i kovektörünün herhangi bir skaler alanın gradiyenti olması için gerek ve yeter şart

$$\partial_{[j}V_{i]} = 0 \qquad (2.10)$$

olmasıdır (Yano 1965).

Gradient kovektörü V_i nin kovaryant türevi

$$\nabla_j V_i = \partial_j V_i - \Gamma^k_{ji}V_k \qquad (2.11)$$

biçimindedir. (2.11) denkleminde j ve i indislerine göre alterneleştirme yapılır ve (2.10) eşitliği kullanılırsa

$$\nabla_{[j}V_{i]} = S_{ij}^{k}V_k \tag{2.12}$$

bulunur. Burada

$$S_{ij}^{k} = \Gamma_{[ij]}^{k} \tag{2.13}$$

olarak verilmiştir. (2.12) denkleminin sol tarafındaki kovaryant türev ise (0,2) tipli tensör olduğuna göre S_{ij}^{k} çoklukları aşağı indislerine göre antisimetrik olan (1,2) tipli tensör ifade eder. (2.13) tensörüne M uzayının burulma tensörü denir. M manifoldundan alınmış keyfi X,Y vektör alanları için burulma tensörünün invaryant formda yazılışı ise $\forall X,\ Y \in \Im_0^1(M)$ için

$$2S(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \tag{2.14}$$

biçimindedir (Kobayashi ve Nomızu 1963). Burada $[X,Y]$ X ve Y vektör alanlarının Lie parantezidir.

Burulması sıfır olan uzaylara burulmasız uzay denir ve bu uzaylarda konneksiyon katsayıları simetrik olur. Yani,

$$\Gamma_{ij}^{k} = \Gamma_{ji}^{k} \Leftrightarrow S_{ij}^{k} = 0$$

olur. Burulma tensörünün (2.14) biçimindeki invaryant formu kullanılarak burulmasız uzaylarda

$$[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$

olduğu görülür.

Keyfi v vektörünün kovaryant türevi $\nabla_s v^i = \partial_s v^i + \Gamma_{sm}^{i} v^m$ şeklindedir ve $\nabla_s v^i$ (1,1) tipli tensördür. (1,1) tipli tensörün kovaryant türevi hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}\nabla_r \nabla_s v^i &= \partial_r \nabla_s v^i + \Gamma_{rm}^{i} \nabla_s v^m - \Gamma_{rs}^{m} \nabla_m v^i \\ &= \partial_s\left(\partial_s v^i + \Gamma_{sk}^{i} v^k\right) + \Gamma_{rm}^{i}\left(\partial_s v^m + \Gamma_{sk}^{m} v^k\right) - \Gamma_{rs}^{m} \nabla_m v^i\end{aligned}$$

$$= \partial^2_{rs} v^i + \partial_r \Gamma^i_{sk} v^k + \Gamma^i_{sk} \partial_r v^k + \Gamma^i_{rm} \Gamma^m_{sk} v^k - \Gamma^m_{rs} \nabla_m v^i$$

bulunur.

Son eşitliğin her iki tarafında $r,\ s$ indislerine göre alterneleştirme işlemi yaparsak

$$2\nabla_{[r}\nabla_{s]} v^i = R^i_{rsk} v^k - 2S^k_{rs} \nabla_k v^i \tag{2.15}$$

denklemi elde edilir. Burada

$$R_{rsk}{}^i = \partial_r \Gamma^i_{sk} - \partial_s \Gamma^i_{rk} + \Gamma^i_{rm}\Gamma^m_{sk} - \Gamma^i_{sm}\Gamma^m_{rk}$$

$$= 2\left(\partial_{[r}\Gamma^i_{s]k} + \Gamma^i_{[r|m|}\Gamma^m_{s]k}\right)$$

yazılır. (2.15) denkleminin sol tarafındaki terim ve sağ tarafındaki ikinci terim tensör ve v^i keyfi vektör olduklarından $R_{rsk}{}^i$ ifadesi (1.3) tipli tensördür. Bu tensöre M uzayının eğrilik tensörü veya Riemann-Christoffel tensörü denir.

(2.15) formülüne benzer olarak aşağıdaki formüller yazılır;

$$2\nabla_{[r}\nabla_{s]} w_k = -R_{rsk}{}^m w_m - 2S_{rs}{}^m \nabla_m w_k, \tag{2.16}$$

$$2\nabla_{[r}\nabla_{s]} \varphi_i^j = R_{rsm}{}^j \varphi_i^m - R_{rsi}{}^m \varphi_m^j - 2S_{rs}{}^m \nabla_m \varphi_i^j, \tag{2.17}$$

$$2\nabla_{[r}\nabla_{s]} t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = \sum_{\lambda=1}^{p} R_{rsm}{}^{i_\lambda} t^{i_1 \ldots \mathrm{m} \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} - \sum_{\mu=1}^{q} R_{rsj_\mu}{}^m t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots \mathrm{m} \ldots j_q} - 2S_{rs}{}^m \nabla_m t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}. \tag{2.18}$$

$X,\ Y$ ve Z M manifoldundan alınmış keyfi vektör alanları olmak üzere eğrilik tensörünün invaryant formda yazılışı ise

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \tag{2.19}$$

biçimindedir (Kobayashi and Nomizu 1963).

2.7. Riemann Metriği ve Riemann Manifoldu

Tanım 2.7.1: M manifoldu üzerinde tanımlı;

i. $g(X,Y) = g(Y,X),\ \forall X,Y \in \Im^1_0(M)$, (simetriklik)

ii. $g(X,X) \geq 0,\ \forall X \in \Im^1_0(M)$ ve $g(X,X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$, (pozitif tanımlılık) şartlarını sağlayan (0,2) tipli g tensör alanına Riemann metriği veya metrik tensör denir. (M,g) ikilisine Riemann manifoldu denir.

ii. şartı yerine "$\forall Y$ için $g(X,Y)=0$ olması $X=0$ olmasını gerektirir" şartı gelirse bu durumda (M,g) ikilisine pseudo-Riemann manifold denir.

Tanım 2.7.2: M manifoldu üzerinde g_{ij} tensörü verilmiş olsun. Bu uzayda $\nabla_k g_{ij}=0$ şartını sağlayan burulmasız tek bir $\Gamma_{ij}^k = \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\}_g$ konneksiyonu vardır. Bu konneksiyona Riemann konneksiyonu veya Levi-Civita konneksiyonu denir. $X,\ Y,\ Z \in \Im_0^1(M)$ için Koszul formülü olarak bilinen aşağıdaki,

$$2g(\nabla_X Y,Z) = X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) - g(X,[Y,Z]) + g(Y,[Z,X]) + g(Z,[X,Y])$$

denkleminde $X=\partial_i,\ Y=\partial_j,\ Z=\partial_k$ alınırsa;

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{\partial_i}\partial_j,\partial_k) &= \partial_i(g(\partial_j,\partial_k)) + \partial_j(g(\partial_k,\partial_i)) - \partial_k(g(\partial_i,\partial_j)) \\ &\quad - g(\partial_i,\underbrace{[\partial_j,\partial_k]}_{0}) + g(\partial_j,\underbrace{[\partial_k,\partial_i]}_{0}) + g(\partial_k,\underbrace{[\partial_i,\partial_j]}_{0}) \end{aligned}$$

$$2g(\Gamma_{ij}^h\partial_h,\partial_k) = \partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij}$$

$$2\Gamma_{ij}^h g_{hk} = \partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij}$$

$$\Gamma_{ij}^h = \frac{1}{2} g^{hk}(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij})$$

bulunur ki bu Γ_{ij}^h fonksiyonlarına Levi-Civita konneksiyonunun katsayıları denir.

Diğer taraftan Riemann manifoldu üzerinde $\nabla g = 0$ şartını sağlayan konneksiyonlara metrik konneksiyon denir.

Herhangi bir afin konneksiyonun eğrilik tensörünün aksine, Riemann eğrilik tensörünün kontravaryant indisi indirilerek kovaryant eğrilik tensörü elde edilebilir. Yani,

$$R_{ijk}{}^{l} = g^{ml} R_{ijk\dot{m}}$$

eşitliği geçerlidir. Benzer şekilde eğrilik tensörünün kovaryant indisleri de yükseltilerek kontravaryant eğrilik tensörü de elde edilebilir. Kovaryant eğrilik tensörünün aşağıdaki özellikleri vardır:

1. $R_{(ij)kl} = 0$
2. $R_{ij(kl)} = 0$
3. $R_{ijkl} = R_{klij}$
4. $R_{[ijk]l} = 0$, (1. Bianchi özdeşliği)
5. $\nabla_{[s} R_{ij]kl} = 0$, (2. Bianchi özdeşliği)

Tanım 2.7.3: Bir (M, g) Riemann manifoldunun R eğrilik tensörü özdeş olarak sıfır ise M ye flat manifold denir.

Tanım 2.7.4: $R_{lks}{}^{i}$ eğrilik tensöründe i ile l aynı alınarak (kontraksiyon yapılarak) elde edilen,

$$R_{ks} = R_{lks}{}^{l}$$

tensörüne Ricci tensörü denir (Kobayashi and Nomizu 1963).

Riemann manifoldunun Ricci eğrilik tensörü simetriktir. Gerçekten

$$R_{jk} = R_{ljk}{}^{l} = g^{ml} R_{ljkm} = g^{ml} R_{kmlj} = g^{ml} R_{mkjl} = R_{mkj}{}^{m} = R_{kj}$$

dır.

Tanım 2.7.5: Ricci eğrilik tensörünün tam kontraksiyonuna skaler eğrilik denir ve S ile gösterilir. Yani $S = g^{jk} R_{jk}$ dır.

Tanım 2.7.6: (M, g) Riemann manifoldunun konformal eğrilik tensörü C

$$C = R_{ijkl} - \frac{1}{(n-2)}\left(g_{jl} R_{ik} - g_{il} R_{jk} + g_{ik} R_{jl} - g_{jk} R_{il}\right) + \frac{S}{(n-1)(n-2)}\left(g_{ik} R_{jl} - g_{il} R_{jk}\right)$$

ile verilir. (M,g) ($\dim M \geq 4$) Riemann manifoldunun konformal eğrilik tensörü sıfır ise M lokal konformal flat olarak adlandırılır.

Tanım 2.7.7: M afin konneksiyonlu uzayda C^{∞} sınıfından olan $\gamma : J \to M,\ J=(a,b)\subset \mathbb{R}$ dönüşümü ile tanımlanan düzgün γ eğrisini göz önüne alalım. Bu eğrinin koordinatlarla ifadesi $x^i = x^i(t),\ t\in J$ biçimindedir. Burada x^i manifold üzerindeki lokal koordinatlardır.

$$\left.\frac{d\gamma}{dt}\right|_{t=t_0} = \left.\frac{dx^i}{dt}\right|_{t=t_0} \partial_i$$

vektörüne bu eğriye $t=t_0$ noktasında teğet vektör denir.

Tanım 2.7.8: $a\in \Im_0^1(M)$ olsun. γ eğrisi boyunca $a=a(t)$ olur. Eğer,

$$\left(\nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} a\right) t = 0,\ \forall t\in J,\ J=(a,b)\subset \mathbb{R} \tag{2.20}$$

oluyorsa, a vektör alanı γ eğrisi boyunca paralel taşınır denir.

Eğer, $a=a^k\partial_k$ yazılırsa, (2.20) eşitliğinden,

$$\begin{aligned}
\left(\nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} a\right)_t &= \left(\nabla_{\frac{dx^i}{dt}\partial_i} a\right)_t = \left(\frac{dx^i}{dt}\nabla_i\left(a^k\partial_k\right)\right)_t \\
&= \frac{dx^i}{dt}\left(\partial_i a^k + \Gamma_{is}^k a^s\right)_t \partial_k \\
&= \left(\frac{da^k}{dt} + \Gamma_{is}^k \frac{dx^i}{dt} a^s\right)_t \partial_k \\
&= 0
\end{aligned}$$

ya da

$$\frac{\delta a}{dt} = \frac{da^k}{dt} + \Gamma_{is}^k \frac{dx^i}{dt} a^s = 0 \tag{2.21}$$

bulunur. (2.21) denklem sisteminin sağlanması a vektör alanının γ eğrisi boyunca paralel taşınması için gerek ve yeter şarttır. Bu denklem sisteminde $\Gamma_{is}^{k} = \Gamma_{is}^{k}(t)$ biçimindeki fonksiyonlardır.

(2.21) eşitliğinde $a^k = \dfrac{dx^k}{dt}$ olsun (yani, γ eğrisine teğet olan vektör alanlarının paralel taşınmasına bakalım). Bu taktirde,

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} + \Gamma_{is}^{k} \frac{dx^i}{dt}\frac{dx^s}{dt} = 0$$

denklem sistemini bulunur. Bu tür eğrilere ∇ konneksiyonunun geodezik eğrileri denir.

2.8. Riemann Manifoldu Üzerinde Bazı Geometrik Vektör Alanları

Tanım 2.8.1: M, g metriğine sahip Riemann manifoldu ve $X \in \Im_0^1(M)$ olsun. Eğer $L_X g = 0$ ise X vektör alanına infinitesimal izometri (Killing vektör alanı) denir. g_{ij} ler g metriğinin ve X^{α} lar da X vektör alanının bileşenleri olmak üzere koordinatlarla,

$$\begin{aligned} L_X g_{ij} &= X^a \partial_a g_{ij} + \left(\partial_i X^a\right) g_{aj} + \left(\partial_j X^a\right) g_{ia} \\ &= X^a \nabla_a g_{ij} + g_{aj} \nabla_i X^a + g_{ia} \nabla_j X^a \\ &= \nabla_j X_i + \nabla_i X_j \\ &= 0 \end{aligned}$$

şartını sağlayan X vektör alanına Killing vektör alanı denir.

Tanım 2.8.2: ∇, M üzerinde bir afin konneksiyon olsun. $\forall Y,\ Z \in \Im_0^1(M)$ için

$$(L_X \nabla)(Y, Z) = L_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(L_X Z) - \nabla_{(L_X Y)} Z = 0$$

ise X vektör alanına afin Killing vektör alanı denir.

M , g metriğine sahip Riemann manifoldu ve ∇ g nin Levi-Civita konneksiyonu olsun. Bu durumda

$$L_X \Gamma_{ji}^h = \frac{1}{2} g^{ha} \left(\nabla_j L_X g_{ia} + \nabla_i L_X g_{ja} - \nabla_a L_X g_{ji} \right)$$

olur. Böylece, Killing vektör alanı ∇ Levi-Civita konneksiyonuna göre afin Killing vektör alanıdır.

Tanım 2.8.3: ∇, M üzerinde bir afin konneksiyon olsun. $\forall Y,\ \mathrm{Z} \in \Im_0^1(M)$ için

$$(L_X \nabla)(Y, \mathrm{Z}) = \theta(Y) Z + \theta(Z) Y$$

şartını sağlayan bir θ, 1-formu varsa M deki X vektör alanına infinitesimal projektif dönüşüm veya projektif vektör alanı denir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Tanjant Demet

Tanım 3.1.1: M, C^{∞} sınıfından $n-$boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold ve M manifoldunun P noktasındaki tanjant uzay $T_p(M)$ olmak üzere

$$T(M)=\bigcup_{p\in M} T_p(M) \tag{3.1}$$

ile tanımlanan $T(M)$ kümesine M manifoldunun tanjant demeti denir.

$T(M)$ nin herhangi bir $\tilde{P}\in T_p(M)$ noktası için M manifoldu üzerindeki $T(M)$ tabii demet yapısını tamamlayan $\pi : T(M)\to M$ demet izdüşümü $\tilde{P}\to P$ karşılık getirir. Yani $\pi(\tilde{P})=P$ olur. $\pi^{-1}(P)=\tilde{P}\in T_p(M)$ kümesine M temel uzayının P noktasındaki fibresi denir.

(x^h), U koordinat komşuluğunda lokal koordinatlar olmak üzere M baz uzayı $\{U;x^h\}$ koordinat komşuluk sistemiyle örtülmüş olsun. $\pi^{-1}(U)\subset T(M)$ açık kümesi için $\pi^{-1}:U\subset M\to U \text{ x } \mathbb{R}^n$ dönüşümü diferensiyellenebilir bir homeomorfizm olur. Burada $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}$ üzerindeki $n-$boyutlu vektör uzayıdır. $\tilde{P}\in T_p(M)$, $(P\in U)$ noktası (P,X) sıralı çifti ile gösterilir ve $X\in\mathbb{R}^n$ vektörünün bileşenleri $T_p(M)$ tanjant uzayında $\{\partial_h\}$, $\left(\partial_h=\dfrac{\partial}{\partial x^h}\right)$ doğal bazında $\tilde{P}$ nın $(y^h)=(x^{\bar{h}})$, $\bar{h}=n+1,...,2n$ kartezyen koordinatları ile verilir. U komşuluğunda $P=\pi(\tilde{P})$ nin koordinatları (x^h), $(h=1,...,n)$ ile gösterilirse $\tilde{P}$ noktası uygun $(x^h,x^{\bar{h}})\to\tilde{P}\in\pi^{-1}(U)$ ile verilmiş olur.

Burada $\pi^{-1}(U) \subset T(M)$ açık kümesinde $\left(x^h, x^{\bar{h}}\right)$ lokal koordinatlar sistemi elde edilir. Böylece $\left(x^h, x^{\bar{h}}\right)$ ye, $\left(x^h\right)$ dan indirgenmiş (elde edilmiş) $\pi^{-1}(U)$ da koordinatlar denir.

M manifoldunun $P=\pi\left(\tilde{P}\right)$ noktasını ihtiva eden diğer bir koordinat komşuluğu $\left\{U', x^{h'}\right\}$ ise $\pi^{-1}(U')$ koordinat komşuluğu $\tilde{P}$ noktasını ihtiva eder. $\pi^{-1}(U')$ ye göre $\tilde{P}$ nın indirgenmiş koordinatları $\left(x^{h'}, y^{h'}\right)$ ile verilecektir. Burada

$$\begin{cases} x^{h'} = x^{h'}\left(x^h\right) \\ y^{h'} = \dfrac{\partial x^{h'}}{\partial x^h} y^h \end{cases} \qquad (3.2)$$

olarak verilir.

$x^{h'}\left(x^h\right)$, P noktasındaki $x^1, x^2, ..., x^n$ değişkenlerinin C^∞ sınıfından olan diferensiyellenebilir fonksiyonlarıdır. $x^{\bar{h}} = y^h, x^{\bar{h}'} = y^{h'}$ ile gösterirsek (3.2) denklemi

$$x^{p'} = x^{p'}\left(x^p\right) \qquad (3.3)$$

olarak yazılır. (3.2) denkleminin Jacobiyeni

$$\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^p} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x^{h'}}{\partial x^j} & 0 \\ \dfrac{\partial^2 x^{h'}}{\partial x^h \partial x^i} & \dfrac{\partial x^{h'}}{\partial x^h} \end{pmatrix} \qquad (3.4)$$

matrisi ile verilir (3.2) denkleminin tersi ise

$$\begin{cases} x^h = x^h\left(x^{h'}\right) \\ y^h = \dfrac{\partial x^h}{x^{h'}} y^{h'} \end{cases} \qquad (3.5)$$

veya

$$x^p = x^p\left(x^{p'}\right) \qquad (3.6)$$

olarak yazılır. (3.5) denkleminin Jakobiyeni

$$\frac{\partial x^{p}}{\partial x^{p'}}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x^{h}}{\partial x^{h'}} & 0\\ \dfrac{\partial^{2}x^{h}}{\partial x^{h'}\partial x^{i'}}y^{i'} & \dfrac{\partial x^{h}}{\partial x^{h'}}\end{pmatrix} \tag{3.7}$$

matrisi ile verilir. (3.4) ve (3.7) denklemleri $T(M)$ tanjant demetin daima yönlendirilebilir olduğunu gösterir.

$T(M)$ tanjant demetteki (r,s) tipli tensör alanlarının kümesini $\Im_{s}^{r}(T(M))$ ve $T(M)$ deki tüm tensör alanlarının kümesini $\Im(T(M))$ ile göstereceğiz.

3.2. Fonksiyonun Dikey Lifti

f, M de bir fonksiyon olsun. $T(M)$ tanjant demette ${}^{V}f$ fonksiyonuna bakalım. $f:M\to\mathbb{R}$ ve $\pi:T(M)\to M$ olmak üzere ${}^{V}f=f\circ\pi$, ${}^{V}f:T(M)\to\mathbb{R}$ fonksiyonuna f fonksiyonunun dikey lifti denir.

$$\tilde{P}\in\pi^{-1}(U),\ \tilde{P}=(x^{i},y^{i})=(x^{i},x^{\bar{i}})$$

koordinatlarına sahiptir.

$${}^{V}f(\tilde{P})={}^{V}f(x,y)=f\circ\pi(\tilde{P})=f(P)=f(x)$$

olduğundan ${}^{V}f(\tilde{P})$ değeri fibre boyunca sabittir denir ve $P=\pi^{-1}(\tilde{P})\in M$ noktasındaki $f(P)$ değerine eşit olur (Yano and Ishihara 1973).

3.3. Vektör Alanının Dikey Lifti

$\tilde{X}\in\Im_{0}^{1}(T(M))$ alalım. $\forall f\in\Im_{0}^{0}(M)$ için $\tilde{X}\ {}^{V}f=0$ ise buradaki $\tilde{X}$ ya dikey vektör

alanı denir. $\tilde{X}$ nın lokal koordinatlarda bileşenleri $\begin{pmatrix}\tilde{X}^{h}\\ \tilde{X}^{\bar{h}}\end{pmatrix}$ olsun.

$$\tilde{X}^V f = \tilde{X}^i \partial_i f + \tilde{X}^{\bar{i}} \partial_{\bar{i}} f = 0$$

buradan,

$$\tilde{X}^i = 0 \ , \ \tilde{X}^{\bar{i}} \neq 0$$

bulunur.

X, M de bir vektör alanı olsun. $T(M)$ de, $\iota\omega = y^s \omega_s$ olmak üzere ${}^V X(\iota\omega) = {}^V(\omega(X))$ ile ${}^V X$ bir vektör alanıdır. Bu vektör alanına M den $T(M)$ ye X vektör alanının dikey lifti denir. Şimdi ${}^V X$ dikey liftinin bileşenlerini bulalım.

$${}^V X(\iota\omega) = {}^V(\omega(X))$$

$$\tilde{X}^j (\partial_j \omega_i) + \tilde{X}^{\bar{j}} \omega_j = \omega_i X^i$$

$$\tilde{X}^{\bar{j}} \omega_j = \omega_i X^i$$

buradan,

$$\tilde{X}^{\bar{j}} = X^j$$

olur. Böylece

$$ {}^V X = \begin{pmatrix} 0 \\ X^j \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

şeklindedir (Yano and Ishihara 1973).

3.4. (0,2) Tipli Tensör Alanının Dikey Lifti

M manifoldu üzerinde $G \in \Im_2^0(M)$ tensör alanının ${}^V G$ dikey lifti $T(M)$ tanjant demette indirgenmiş koordinatlara göre bileşenleri,

$$\begin{aligned} {}^V G = {}^V\left(G_{ij} dx^i \otimes dx^j\right) &= {}^V\left(G_{ij} dx^i\right) \otimes {}^V\left(dx^j\right) \\ &= {}^V G_{ij} \, {}^V dx^i \otimes {}^V dx^j \\ &= G_{ij} dx^i \otimes dx^j \end{aligned}$$

$${}^V G = {}^V G_{ij} dx^i \otimes dx^j + {}^V G_{\bar{i}j} dx^{\bar{i}} \otimes dx^j + {}^V G_{i\bar{j}} dx^i \otimes dx^{\bar{j}} + {}^V G_{\bar{i}\bar{j}} dx^{\bar{i}} \otimes dx^{\bar{j}}$$

olup

$$ {}^{V}G = \begin{pmatrix} {}^{V}G_{i\,j} & {}^{V}G_{i\,\bar{j}} \\ {}^{V}G_{\bar{i}\,j} & {}^{V}G_{\bar{i}\,\bar{j}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{i\,j} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} $$

şeklinde yazılır.

3.5. γ Operatörü

Şimdi $S \in \Im^{p}_{q+1}(M)$ tensörünü alalım. Bu tensörü koordinatlarla yazarsak

$$ S = S^{i_1,\ldots,i_p}_{l,s_1,\ldots,s_q} \partial_{i_1} \otimes \ldots \otimes \partial_{i_p} \otimes dx^{l} \otimes dx^{s_1} \otimes \ldots \otimes dx^{s_q} $$

şeklinde olur. X vektör alanı olmak üzere γ operatörü

$$ \gamma_X S = X^{l} S^{i_1,\ldots,i_p}_{l,s_1,\ldots,s_q} \partial_{i_1} \otimes \ldots \otimes \partial_{i_p} \otimes dx^{s_1} \otimes \ldots \otimes dx^{s_q} \qquad (3.9) $$

ve

$$ \gamma S = y^{l} S^{i_1,\ldots,i_p}_{l,s_1,\ldots,s_q} \partial_{i_1} \otimes \ldots \otimes \partial_{i_p} \otimes dx^{s_1} \otimes \ldots \otimes dx^{s_q} \qquad (3.10) $$

şeklinde tanımlanır.

(3.9) ve (3.10) dan $X \in \Im^{1}_{0}(M)$ ve $F \in \Im^{1}_{1}(M)$ olmak üzere lokal koordinatlarda;

$$ \gamma_X F = \begin{pmatrix} 0 \\ x^{i} F^{h}_{i} \end{pmatrix}, \qquad \gamma F = \begin{pmatrix} 0 \\ y^{i} F^{h}_{i} \end{pmatrix} \qquad (3.11) $$

şeklinde olur (Yano and Ishihara 1973).

3.6. Fonksiyonun Tam Lifti

$f \in \Im^{0}_{0}(M)$ olmak üzere $T(M)$ de $\iota(df) = y^{s}\partial_{s} f = {}^{C}f$ şeklinde tanımlanan ${}^{C}f$ fonksiyonuna f fonksiyonunun tanjant demette tam lifti denir (Yano and Ishihara 1973).

3.7. Vektör Alanının Tam Lifti

$X \in \Im_0^1(M)$ olsun. ${}^C X \, {}^C f = {}^C(Xf)$ ile tanımlanan ${}^C X$ e, X vektör alanının tam lifti denir. Şimdi ${}^C X = \begin{pmatrix} {}^C X^i \\ {}^C X^{\bar{i}} \end{pmatrix}$ bileşenlerini bulalım.

$$ {}^C X^i \partial_i \, {}^C f + {}^C X^{\bar{i}} \partial_{\bar{i}} \, {}^C f = y^s \partial_s \left(X^i \partial_i f \right) $$

$$ {}^C X^i \partial_i \left(y^s \partial_s f \right) + {}^C X^{\bar{i}} \partial_{\bar{i}} \left(y^s \partial_s f \right) = y^s \left(\partial_s X^i \right) \partial_i f + y^s X^i \partial_s \partial_i f $$

$$ {}^C X^i = X^i , \; {}^C X^{\bar{i}} = y^s \partial_s X^i $$

buradan,

$$ {}^C X = \begin{pmatrix} X^i \\ y^s \partial_s X^i \end{pmatrix} $$

şeklinde olur (Yano and Ishihara 1973).

3.8. (0,2) Tipli Tensör Alanının Tam Lifti

M manifoldu üzerinde $G \in \Im_2^0(M)$ tensör alanının ${}^C G$ tam lifti $T(M)$ tanjant demette indirgenmiş koordinatlara göre bileşenleri,

$$ {}^C G = {}^C\left(G_{ij} dx^i \otimes dx^j \right) = {}^C\left(G_{ij} \right) {}^V\left(dx^i \otimes dx^j \right) + {}^V\left(G_{ij} \right) {}^C\left(dx^i \otimes dx^j \right) $$

$$ = {}^C\left(G_{ij} \right) {}^V\left(dx^i \otimes dx^j \right) + {}^V\left(G_{ij} \right) {}^C\left(dx^i \right) \otimes {}^V\left(dx^j \right) + {}^V\left(G_{ij} \right) {}^V\left(dx^i \right) \otimes {}^C\left(dx^j \right) $$

$$ = y_s \partial_s G_{i\,j} dx^i \otimes dx^j + G_{\bar{i}\,j} dx^{\bar{i}} \otimes dx^j + G_{i\,\bar{j}} dx^i \otimes dx^{\bar{j}} \qquad (3.12) $$

ayrıca

$$ {}^C G = {}^C\left(G_{IJ} dx^I \otimes dx^J \right) = {}^C G_{i\,j} dx^i \otimes dx^j + {}^C G_{\bar{i}\,j} dx^{\bar{i}} \otimes dx^j $$
$$ + {}^C G_{i\,\bar{j}} dx^i \otimes dx^{\bar{j}} + {}^C G_{\bar{i}\,\bar{j}} dx^{\bar{i}} \otimes dx^{\bar{j}} \qquad (3.13) $$

olur. (3.12) ve (3.13) taraf tarafa eşitlenerek,

$$ {}^C G = \begin{pmatrix} y^s \partial_s G_{ij} & G_{ij} \\ G_{ij} & 0 \end{pmatrix} $$

şeklinde elde edilir (Yano and Ishihara 1973).

3.9. Fonksiyonun Yatay Lifti

$f \in \Im_0^0(M)$ fonksiyonunu alalım. ∇, M de bir afin konneksiyon ise f fonksiyonunun gradienti ∇f şeklinde yazılır. Ayrıca (3.11) de tanımlanan γ operatörü için

$$\nabla_\gamma f = \gamma(\nabla f) = y^s \partial_s f$$

eşitliği vardır. $f \in \Im_0^0(M)$ fonksiyonunun yatay lifti

$${}^H f = {}^C f - \gamma(\nabla f)$$

şeklinde tanımlanır (Yano and Ishihara 1973).

$${}^C f = y^s \partial_s f$$

eşitliğinden,

$${}^H f = {}^C f - \gamma(\nabla f)$$

$${}^H f = y^s \partial_s f - y^s \partial_s f$$

$${}^H f = 0$$

olur.

3.10. Vektör Alanının Yatay Lifti

$X \in \Im_0^1(M)$ vektör alanının yatay lifti,

$${}^H X = {}^C X - \gamma(\nabla X)$$

şeklinde tanımlanır. $T(M)$ de $\nabla_\gamma X = \gamma(\nabla X)$ eşitliği vardır. X in ve ∇ nın M deki lokal koordinatları sırasıyla X^h ve Γ_{ji}^h dır. ${}^C X$ ve $\gamma(\nabla X)$ in $T(M)$ de indirgenmiş koordinatlarda koordinatları

$$\gamma(\nabla X) = \begin{pmatrix} 0 \\ y^s \nabla_s X^h \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad {}^C X = \begin{pmatrix} X^h \\ y^s \partial_s X^h \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

şeklindedir. Burada $\nabla_s X^h$, X^h ın kovaryant türevidir ve

$$\nabla_s X^h = \partial_s X^h + \Gamma_{si}^h X^i$$

şeklindedir.

Şimdi X vektör alanının yatay liftini bulalım.

$$^H X = \begin{pmatrix} X^h \\ y^s \partial_s X^h \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ y^s \nabla_s X^h \end{pmatrix}$$

$$^H X = \begin{pmatrix} ^H X^h \\ ^H X^{\bar{h}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^h \\ y^s \partial_s X^h - y^s \nabla_s X^h \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} X^h \\ y^s \partial_s X^h - y^s \partial_s X^h - y^s \Gamma_{sm}^h X^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^h \\ -y^s \Gamma_{sm}^h X^m \end{pmatrix} \qquad (3.15)$$

bulunur (Yano and Ishihara 1973).

$P \in T(M)$ noktasında $^H X$ in değeri yalnızca $P \in \pi(\tilde{P}) \in M$ noktasında X vektör alanının değeri verilerek tanımlanabilir. (3.15) ten, herhangi bir $X \in \Im_0^1(M)$ vektör alanının $^H X$ yatay lifti $T(M)$ de

$$\delta y^h = dy^h + \tilde{\Gamma}_{ji}^h dx^j y^i$$

eşitliği ile tanımlanan yatay dağılıma sahiptir. Buradaki $\tilde{\Gamma}_{ji}^h = \Gamma_{ij}^h$ koordinatları $\forall X,\ Y \in \Im_0^1(M)$ için $\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_Y X + [X, Y]$ şeklinde tanımlanan $\tilde{\nabla}$ nın koordinatlarıdır. Eğer $T(M)$ deki X vektör alanı yatay dağılıma sahip ise X e yatay vektör alanı denir (Yano and Ishihara 1973).

3.11. (0,2) Tipli Tensör Alanının Yatay Lifti

∇ afin konneksiyonlu M manifoldu üzerinde herhangi bir tensör alanı

$$S = S_{k\ldots j}^{i\ldots h} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^h} \otimes dx^k \otimes \ldots \otimes dx^j$$

şeklinde verilsin. $T(M)$ de bir $\nabla_\gamma S$ tensör alanı $\pi^{-1}(U)$ da $\left(x^h, y^h\right)$ indirgenmiş koordinatlara göre

$$\nabla_\gamma S = \left(y^l \nabla_l S_{k\ldots j}^{i\ldots h}\right)\frac{\partial}{\partial y^i}\otimes\ldots\otimes\frac{\partial}{\partial y^h}\otimes dx^k\otimes\ldots\otimes dx^j$$

şeklinde tanımlanır. $f\in\Im_0^0(M)$ için $\nabla_\gamma f = {}^C f$ olup $P,\ Q\in\Im(M)$ için

$$\nabla_\gamma\left(P\otimes Q\right) = \left(\nabla_\gamma P\right)\otimes{}^V Q + {}^V P\otimes\left(\nabla_\gamma Q\right) \tag{3.16}$$

elde edilir. M de keyfi tipli bir S tensör alanının $T(M)$ de ${}^H S$ yatay lifti

$${}^H S = {}^C S - \nabla_\gamma S$$

olarak tanımlanır. Buradan $\nabla S = 0$ için ${}^H S = {}^C S$ olur. $\nabla S = 0$ olması için gerek ve yeter şart ∇ konneksiyonuna göre S nin paralel olmasıdır. Buna göre (3.16) dan

$${}^H\left(P\otimes Q\right) = {}^H P\otimes{}^V Q + {}^V P\otimes{}^H Q$$

elde edilir. Buna göre M de g_{ij} bileşenli (0,2) tipli g tensör alanının ${}^H g$ liftinin bileşenleri $T(M)$ de indirgenmiş koordinatlara göre

$${}^H g = \begin{pmatrix} y^s\Gamma_{si}^t g_{tj} + y^s\Gamma_{sj}^t g_{ti} & g_{ij} \\ g_{ij} & 0 \end{pmatrix}$$

olur (Yano and Ishihara 1973).

3.12. Adapte Olmuş Çatı

M manifoldu üzerinde ∇ afin konneksiyonu verildiğinde bizim hesaplarımız için kullanışlı olan $T(M)$ nin $\pi^{-1}(U)$ koordinat komşuluğunda indirgenen bir çatı alanı tanımlanabilir.

(3.8) ve (3.15) de $X = X_{(j)} = \dfrac{\partial}{\partial x^j},\ j = 1,\ldots,n$ alındığında doğal çatıda,

$${}^H X_{(j)} = {}^H\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = {}^H\left(\frac{\partial x^h}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^h}\right) = {}^H\left(\delta_j^h\frac{\partial}{\partial x^h}\right) = \begin{pmatrix}\delta_j^h \\ -y^s\Gamma_{sm}^h\delta_j^m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\delta_j^h \\ -y^s\Gamma_{sj}^h\end{pmatrix}$$

$${}^H X_{(j)} = \delta_j^h\partial_h - y^s\Gamma_{sj}^h\partial_{\bar h} = \partial_j - y^s\Gamma_{sj}^h\partial_{\bar h},$$

$$ {}^{V}X_{(j)} = {}^{V}\left(\frac{\partial}{\partial x^{j}}\right) = {}^{V}\left(\frac{\partial x^{h}}{\partial x^{j}}\frac{\partial}{\partial x^{h}}\right) = {}^{V}\left(\delta_{j}^{h}\frac{\partial}{\partial x^{h}}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_{j}^{h} \end{pmatrix} $$

$$ {}^{V}X_{(j)} = 0.\partial_{h} + \delta_{j}^{h}\partial_{\bar{h}} = \partial_{\bar{j}} $$

şeklinde olan vektör alanları elde edilir. Buradaki δ_{j}^{h} Kronecker deltasıdır. Elde edilen bu $2n$ vektör alanları lineer bağımsızdırlar ve sırasıyla $T(M)$ nin dikey dağılımını ve ∇ nın yatay dağılımını üretirler. $\left\{ {}^{H}X_{(j)}, {}^{V}X_{(j)} \right\}$ kümesi adapte olmuş çatı olarak adlandırılır.

$$ \begin{cases} {}^{H}X_{(j)} = E_{j}, \\ {}^{V}X_{(j)} = E_{\bar{j}}, \end{cases} $$

olarak alındığında adapte olmuş çatı $\{E_{\lambda}\} = \left\{E_{j}, E_{\bar{j}}\right\}$ şeklinde yazılır. $\left\{dx^{h}, \delta y^{h}\right\}$ ise $\left\{E_{j}, E_{\bar{j}}\right\}$ nin dual bazıdır. Burada $\delta y^{h} = dy^{h} + y^{b}\Gamma_{ba}^{h}dx^{a}$ şeklindedir. Bazı hesaplar yaparak aşağıdaki yardımcı teorem yazılır.

Yardımcı Teorem 3.12.1: $T(M)$ nin adapte olunmuş çatısının Lie parantezi aşağıdaki eşitlikleri sağlar:

$$ \begin{cases} \left[E_{j}, E_{i}\right] = y^{b}R_{ijb}^{a}E_{\bar{a}}, \\ \left[E_{j}, E_{\bar{i}}\right] = \Gamma_{ji}^{a}E_{\bar{a}}, \\ \left[E_{\bar{j}}, E_{\bar{i}}\right] = 0. \end{cases} $$

Burada $R_{ijb}{}^{a}$, M manifoldunun eğrilik tensörünün bileşenlerini tanımlar (Dombrowski 1962).

Vektör alanının tam lifti, yatay lifti ve dikey liftinin doğal çatıdaki ifadelerini kullanarak adapte olunmuş çatıya göre

$$ {}^{H}X = \begin{pmatrix} X^{j}\delta_{j}^{h} \\ -X^{j}\Gamma_{sj}^{h}y^{s} \end{pmatrix} = X^{j}\begin{pmatrix} \delta_{j}^{h} \\ -\Gamma_{sj}^{h}y^{s} \end{pmatrix} = X^{j}E_{j} = \begin{pmatrix} X^{j} \\ 0 \end{pmatrix}, $$

$$ {}^{V}X = \begin{pmatrix} 0 \\ X^{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ X^{j}\delta_{j}^{h} \end{pmatrix} = X^{j}\begin{pmatrix} 0 \\ \delta_{j}^{h} \end{pmatrix} = X^{j}E_{\bar{j}} = \begin{pmatrix} 0 \\ X^{j} \end{pmatrix} $$

ve

$$ {}^{C}X = \begin{pmatrix} X^{j}\delta_{j}^{h} \\ y^{s}\partial_{s}X^{j} \end{pmatrix} = X^{j}\begin{pmatrix} \delta_{j}^{h} \\ -\Gamma_{sj}^{h}y^{s} \end{pmatrix} + y^{m}\nabla_{m}X^{j}\begin{pmatrix} 0 \\ \delta_{j}^{h} \end{pmatrix} = X^{j}E_{j} + y^{m}\nabla_{m}X^{j}E_{\bar{j}} = \begin{pmatrix} X^{j} \\ y^{m}\nabla_{m}X^{j} \end{pmatrix} $$

elde edilir.

3.13. $G = a\,{}^{S}g + b\,{}^{H}g + c\,{}^{V}g$ Formundaki Riemann Metriği

M diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde g metriği verildiğinde tanjant demette g nin üç klasik lifti; Sasaki lifti $\left({}^{S}g\right)$, yatay lifti $\left({}^{H}g\right)$ ve dikey lifti $\left({}^{V}g\right)$ aşağıdaki gibi tanımlanır. $\forall X,\ Y \in \Im_{0}^{1}\left(M\right)$ olmak üzere;

i) g nin Sasaki lifti;

$$ {}^{S}g\left({}^{H}X, {}^{H}Y\right) = {}^{V}\left(g\left(X,Y\right)\right), $$

$$ {}^{S}g\left({}^{H}X, {}^{V}Y\right) = {}^{S}g\left({}^{V}X, {}^{H}Y\right) = 0\,, $$

$$ {}^{S}g\left({}^{V}X, {}^{V}Y\right) = {}^{V}\left(g\left(X,Y\right)\right). $$

ii) g nin yatay lifti;

$$ {}^{H}g\left({}^{H}X, {}^{H}Y\right) = 0\,, $$

$$ {}^{H}g\left({}^{H}X, {}^{V}Y\right) = {}^{H}g\left({}^{V}X, {}^{H}Y\right) = {}^{V}\left(g\left(X,Y\right)\right), $$

$$ {}^{H}g\left({}^{V}X, {}^{V}Y\right) = 0\,. $$

iii) g dikey lifti;

$$ {}^{V}g\left({}^{H}X, {}^{H}Y\right) = {}^{V}\left(g\left(X,Y\right)\right), $$

$$ {}^{V}g\left({}^{H}X, {}^{V}Y\right) = {}^{V}g\left({}^{V}X, {}^{H}Y\right) = 0\,, $$

$$ {}^{V}g\left({}^{V}X, {}^{V}Y\right) = 0\,. $$

şeklindedir. g metriğinin bu üç klasik lifti kullanılarak tanjant demette çeşitli Riemann veya pseudo-Riemann metrikleri inşa edilebilir. Abbasi and Sarih (2005) tanjant demette g Riemann metriğinin dikey lifti, yatay lifti ve Sasaki liftinin bir kombinasyonu olan $G = a\,{}^{S}g + b\,{}^{H}g + c\,{}^{V}g$ metriğini göz önüne aldılar. Burada a, b ve c; $a > 0$ ve $a(a+c) - b^2 > 0$ şartlarını sağlayan sabitlerdir. Bu tezde (M, g) $n-$boyutlu Riemann manifoldu üzerinde kurulan $G = a\,{}^{S}g + b\,{}^{H}g + c\,{}^{V}g$ formundaki Riemann metriğine sahip tanjant demet (TM, G) ile işaretlenmiştir.

(M, g), $n-$boyutlu Riemann manifoldu olsun. $\forall X,\ Y \in \Im_0^1(M)$ olmak üzere (M, g) nin tanjant demetinde $G = a\,{}^{S}g + b\,{}^{H}g + c\,{}^{V}g$ formundaki Riemann metriği,

$$\begin{aligned} G\left({}^{H}X, {}^{H}Y\right) &= a.{}^{S}g\left({}^{H}X, {}^{H}Y\right) + b.{}^{H}g\left({}^{H}X, {}^{H}Y\right) + c.{}^{V}g\left({}^{H}X, {}^{H}Y\right) \\ &= a.{}^{V}g(X,Y) + c.{}^{V}g(X,Y) \\ &= (a+c)^{V}\left(g(X,Y)\right), \end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned} G\left({}^{H}X, {}^{V}Y\right) = G\left({}^{V}X, {}^{H}Y\right) &= a.{}^{S}g\left({}^{V}X, {}^{H}Y\right) + b.{}^{H}g\left({}^{V}X, {}^{H}Y\right) + c.{}^{V}g\left({}^{V}X, {}^{H}Y\right) \\ &= b^{V}\left(g(X,Y)\right), \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned} G\left({}^{V}X, {}^{V}Y\right) &= a.{}^{S}g\left({}^{V}X, {}^{V}Y\right) + b.{}^{H}g\left({}^{V}X, {}^{V}Y\right) + c.{}^{V}g\left({}^{V}X, {}^{V}Y\right) \\ &= a^{V}\left(g(X,Y)\right). \end{aligned} \tag{3.19}$$

şeklinde tanımlanır.

M de g Riemann metriğinin ifadesi $g = g_{ij}dx^i dx^j$ ise, G Riemann metriğinin adapte olmuş lokal çatıdaki ifadesi,

(3.17) den,

$G_{IJ}\,{}^{H}X^{I}\,{}^{H}Y^{J} = (a+c)\,g_{i\,j}X^{i}Y^{j}$

$G_{i\,j}\,{}^{H}X^{i}\,{}^{H}Y^{j} + \underbrace{G_{i\,\bar{j}}\,{}^{H}X^{i}\,{}^{H}Y^{\bar{j}}}_{0} + \underbrace{G_{\bar{i}\,j}\,{}^{H}X^{\bar{i}}\,{}^{H}Y^{j}}_{0} + \underbrace{G_{\bar{i}\,\bar{j}}\,{}^{H}X^{\bar{i}}\,{}^{H}Y^{\bar{j}}}_{0} = (a+c)\,g_{i\,j}X^{i}Y^{j}$

$G_{i\,j}X^{i}Y^{j} = (a+c)\,g_{i\,j}X^{i}Y^{j}$

olmak üzere

$$G_{i\,j} = (a+c)\,g_{i\,j}$$

olur.

(3.18) den,

$G_{IJ}\,{}^{V}X^{I}\,{}^{H}Y^{J} = bg_{i\,j}X^{i}Y^{j}$

$\underbrace{G_{i\,j}\,{}^{V}X^{i}\,{}^{H}Y^{j}}_{0} + \underbrace{G_{i\,\bar{j}}\,{}^{V}X^{i}\,{}^{H}Y^{\bar{j}}}_{0} + G_{\bar{i}\,j}\,{}^{V}X^{\bar{i}}\,{}^{H}Y^{j} + \underbrace{G_{\bar{i}\,\bar{j}}\,{}^{V}X^{\bar{i}}\,{}^{H}Y^{\bar{j}}}_{0} = bg_{i\,j}X^{i}Y^{j}$

$G_{\bar{i}\,j}X^{i}Y^{j} = bg_{i\,j}X^{i}Y^{j}$

olmak üzere

$$G_{\bar{i}\,j} = bg_{i\,j}$$

olur. Benzer şekilde,

$$G_{i\,\bar{j}} = bg_{i\,j}$$

bulunur.

(3.19) dan,

$G_{IJ}\,{}^{V}X^{I}\,{}^{V}Y^{J} = ag_{ij}X^{i}Y^{j}$

$\underbrace{G_{i\,j}\,{}^{V}X^{i}\,{}^{V}Y^{j}}_{0} + \underbrace{G_{i\,\bar{j}}\,{}^{V}X^{i}\,{}^{V}Y^{\bar{j}}}_{0} + \underbrace{G_{\bar{i}\,j}\,{}^{V}X^{\bar{i}}\,{}^{V}Y^{j}}_{0} + G_{\bar{i}\,\bar{j}}\,{}^{V}X^{\bar{i}}\,{}^{V}Y^{\bar{j}} = ag_{i\,j}X^{i}Y^{j}$

$G_{\bar{i}\,\bar{j}}X^{i}Y^{j} = ag_{i\,j}X^{i}Y^{j}$

olmak üzere

$$G_{\bar{i}\,\bar{j}} = ag_{i\,j}$$

olup

$$G = G_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} (a+c)\, g_{ij} & b g_{ij} \\ b g_{ij} & a g_{ij} \end{pmatrix} \qquad (3.20)$$

şeklinde bulunur.

$G_{\alpha\beta}\tilde{G}^{\beta\gamma} = \delta_{\alpha}^{\gamma}$ şartını sağlayan $\tilde{G}^{\beta\gamma}$ matrisi $G_{\alpha\beta}$ matrisinin ters matrisidir ve $\alpha = a(a+c) - b^2$ olmak üzere $\tilde{G}^{\beta\gamma}$ matrisi,

$$G^{-1} = \tilde{G}^{\beta\gamma} = \begin{pmatrix} \frac{a}{\alpha} g^{jk} & \frac{-b}{\alpha} g^{jk} \\ \frac{-b}{\alpha} g^{jk} & \frac{a+c}{\alpha} g^{jk} \end{pmatrix} \qquad (3.21)$$

şeklinde bulunur.

G Riemann metriğinin Levi-Civita konneksiyonu için aşağıdaki önerme yazılabilir.

Önerme 3.13.1: (M, g) bir Riemann manifoldu, ∇ g nin Levi-Civita konneksiyonu ve R eğrilik tensörü olsun. (TM, G) nin Levi-Civita konneksiyonu olan $\tilde{\nabla}$,

i) $\tilde{\nabla}_{{}^H X} {}^H Y = {}^H(\nabla_X Y) + \frac{ab}{2\alpha} {}^H\left[R(y, X)Y + R(y, Y)X\right]$

$$+\frac{b^2}{\alpha} {}^V\left(R(X, y)Y\right) - \frac{a(a+c)}{2\alpha} {}^V\left(R(X, Y)y\right),$$

ii) $\tilde{\nabla}_{{}^H X} {}^V Y = -\frac{a^2}{2\alpha} {}^H\left(R(Y, y)X\right) + {}^V(\nabla_X Y) + \frac{ab}{2\alpha} {}^V\left(R(Y, \mathrm{y})X\right),$

iii) $\tilde{\nabla}_{{}^V X} {}^H Y = -\frac{a^2}{2\alpha} {}^H\left(R(X, y)Y\right) + \frac{ab}{2\alpha} {}^V\left(R(X, y)Y\right),$

iv) $\tilde{\nabla}_{{}^V X} {}^V Y = 0.$ $\qquad (3.22)$

şeklinde karakterize edilir. Burada $X,\ Y \in \Im_0^1(M)$, $a > 0$ ve $a(a+c) - b^2 > 0$, $\alpha = a(a+c) - b^2$ dir (Abbasi and Sarih 2005).

4. ARAŞTIRMA ve BULGULAR

Bu bölümde, çalışmalarımızda elde edilen bulgulara yer verilmiştir.

Çalışmamızın amacı, $G = a^S g + b^H g + c^V g$ formundaki Riemann metriğine sahip $T(M)$ de bazı geometrik vektör alanlarını araştırmak ve onlarla ilgili geometrik sonuçlar çıkarmaktır. Ayrıca (TM, G) nin başka özellikleride araştırılacaktır. Bunun için sırasıyla aşağıdaki adımlar takip edilecektir:

1. $G = a^S g + b^H g + c^V g$ metriğine göre Afin Killing ve Killing vektör alanlarının en genel formu bulunarak bunlardan bazı geometrik sonuçların çıkarılması,
2. $G = a^S g + b^H g + c^V g$ metriğine göre fibre koruyan projektif vektör alanlarının bir sınıflandırılmasının verilmesi ve bazı geometrik sonuçların çıkarılması,
3. $G = a^S g + b^H g + c^V g$ metriğinin geodezikleri ve burulmalı metrik konneksiyonun araştırılması,
4. $G = a^S g + b^H g + c^V g$ metrikli tanjant demetin konformal flatlığının incelenmesi.

4.1. $G = a^S g + b^H g + c^V g$ Formundaki Riemann Metriğine Göre Afin Killing ve Killing Vektör Alanları

Tanjant demette afin Killing vektör alanlarını karakterize etmeden önce adapte olmuş çatı $\{E_\beta\}$ ya göre $\tilde{\nabla}_{E_\alpha} E_\beta = \tilde{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta} E_\gamma$ formülünü göz önüne alalım. Burada $\tilde{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta}$, G metriği tarafından belirlenen Riemann konneksiyonu $\tilde{\nabla}$ nın bileşenlerini gösterir. ${}^V X = E_{\bar{i}}$, ${}^H X = E_i$ ve ${}^V Y = E_{\bar{j}}$, ${}^H Y = E_j$ durumları için, (3.22) yi kullanarak standart hesaplamalarla aşağıdaki iki yardımcı teorem verilebilir.

Yardımcı Teorem 4.1.1: Adapte olmuş çatı $\{E_\beta\}$ ya göre (TM,G) nin Levi-Civita konneksiyonu $\tilde{\nabla}$:

i) $\tilde{\nabla}_{E_i} E_j = \left\{\Gamma_{ij}^h - \frac{ab}{2\alpha} y^s \left(R_{isj}{}^h + R_{jsi}{}^h\right)\right\} E_h + \left\{\frac{b^2}{\alpha} y^s R_{isj}{}^h - \frac{a(a+c)}{2\alpha} y^s R_{ijs}{}^h\right\} E_{\bar{h}}$,

ii) $\tilde{\nabla}_{E_i} E_{\bar{j}} = \left\{-\frac{a^2}{2\alpha} y^s R_{jsi}{}^h\right\} E_h + \left\{\Gamma_{ij}^h + \frac{ab}{2\alpha} y^s R_{jsi}{}^h\right\} E_{\bar{h}}$,

iii) $\tilde{\nabla}_{E_{\bar{i}}} E_j = \left\{-\frac{a^2}{2\alpha} y^s R_{isj}{}^h\right\} E_h + \left\{\frac{ab}{2\alpha} y^s R_{isj}{}^h\right\} E_{\bar{h}}$,

iv) $\tilde{\nabla}_{E_{\bar{i}}} E_{\bar{j}} = 0$.

biçiminde verilir. Burada $R_{hji}{}^s$ ve Γ_{ij}^h sırasıyla M de $\{\partial_i\}$ doğal çatıya göre g nin R eğrilik tensör alanı ve ∇ Levi-Civita konneksiyonunun bileşenlerini gösterir.

Yardımcı Teorem 4.1.2: (TM,G) deki $\tilde{X} = v^h E_h + v^{\bar{h}} E_{\bar{h}}$ vektör alanına göre adapte olmuş çatı ve onun dual bazlarının Lie türevlemeleri:

i) $L_{\tilde{X}} E_h = -\left(E_h v^a\right) E_a + \left\{y^b v^c R_{hcb}{}^a - v^{\bar{b}} \Gamma_{bh}^a - \left(E_h v^{\bar{a}}\right)\right\} E_{\bar{a}}$,

ii) $L_{\tilde{X}} E_{\bar{h}} = -\left(E_{\bar{h}} v^a\right) E_a + \left\{v^b \Gamma_{bh}^a - \left(E_{\bar{h}} v^{\bar{a}}\right)\right\} E_{\bar{a}}$,

iii) $L_{\tilde{X}} dx^h = \left(E_a v^h\right) dx^a + \left(E_{\bar{a}} v^h\right) \delta y^a$,

iv) $L_{\tilde{X}} \delta y^h = -\left\{y^c v^b R_{bac}{}^h + v^{\bar{b}} \Gamma_{ba}^h + \left(E_a v^{\bar{h}}\right)\right\} dx^a - \left\{v^b \Gamma_{ba}^h - \left(E_{\bar{a}} v^{\bar{h}}\right)\right\} \delta y^a$.

şeklinde olur (Yamauchi 1999).

A, M de bileşenleri $\left(A_j^i\right)$ olan (1.1) tipli tensör alanı olsun. Adapte olmuş çatı $\{E_\beta\}$ ya göre

$$^*A = \left\{A_s^i y^s\right\} E_i$$

şeklinde tanımlanan $^*A$, $T(M)$ de düzgün vektör alanıdır (Tanno 1974).

Teorem 4.1.3: (TM,G) de $\tilde{X}$ vektör alanının afin Killing vektör alanı olması için gerek ve yeter şart $\tilde{X}$ vektör alanının,

$$\tilde{X} = {}^{H}B + {}^{V}D + \gamma C + {}^{*}A$$

şeklinde olması ve $B=(B^h),\ D=(D^h)\in\Im_0^1(M),\ A=(A_i^h),\ C=(C_i^h)\in\Im_1^1(M)$ olup aşağıdaki eşitliklerin sağlanmasıdır:

i) $\nabla_i A_j^h = \frac{a^2}{2\alpha} R_{jli}{}^{h} D^l,$

ii) $\nabla_i C_j^h = -R_{lij}{}^{h} B^l - \frac{ab}{2\alpha} R_{jli}{}^{h} D^l,$

iii) $L_B \Gamma_{ji}^h - \frac{ab}{2\alpha}\left(R_{jli}{}^{h} + R_{ilj}{}^{h}\right) D^l = 0,$

iv) $L_D \Gamma_{ji}^h - \frac{a(a+c)}{\alpha}\left(R_{jli}{}^{h} - \frac{1}{2} R_{jil}{}^{h}\right) D^l = 0,$

v) $R_{ajc}{}^{h} A_i^c = 0,$

vi) $\frac{a^2}{2\alpha} B^l \nabla_l R_{jsi}{}^{h} = \frac{a^2}{2\alpha} R_{jsi}{}^{l} \nabla_l B^h - \frac{a^2}{2\alpha} R_{jsl}{}^{h} \nabla_i B^l - \frac{a^2}{2\alpha} R_{lsi}{}^{h} C_j^l - \frac{a^2}{2\alpha} R_{jli}{}^{h} C_s^l - \frac{ab}{2\alpha} R_{jsi}{}^{l} A_l^h,$

vii) $R_{jsi}{}^{l}\left(\frac{ab}{2\alpha}\nabla_l B^h - \frac{b^2}{2\alpha} A_l^h - \frac{ab}{2\alpha} C_l^h + \frac{a^2}{2\alpha}\nabla_l D^h\right) = 0,$

viii) $\frac{ab}{2\alpha} D^l \nabla_j R_{lis}{}^{h} = R_{lsi}{}^{h}\left(\frac{b^2}{\alpha}\nabla_j B^l + \frac{ab}{2\alpha}\nabla_j D^l - \frac{b^2}{\alpha} C_j^l\right) + \frac{ab}{2\alpha} R_{lsj}{}^{h} \nabla_i D^l$

$$-\frac{a(a+c)}{2\alpha}\left[R_{jil}{}^{h}\left(C_s^l + \nabla_s B^l\right) + R_{jls}{}^{h}\left(C_i^l + \nabla_i B^l\right) + R_{lis}{}^{h}\left(C_j^l + \nabla_j B^l\right)\right]$$

$$-\frac{ab^2 + a^2(a+c)}{2b\alpha} R_{jis}{}^{l} \nabla_l D^h.$$

İspat: $\tilde{X} = v^h E_h + v^{\bar{h}} E_{\bar{h}}$ (TM,G) de afin Killing vektör alanı olsun. Bu durumda $\forall \tilde{Y},\ \tilde{Z} \in \Im_0^1(T(M))$ için,

$$(L_{\tilde{X}}\tilde{\nabla})(\tilde{Y},\tilde{Z}) = L_{\tilde{X}}(\tilde{\nabla}_{\tilde{Y}}\tilde{Z}) - \tilde{\nabla}_{\tilde{Y}}(L_{\tilde{X}}\tilde{Z}) - \tilde{\nabla}_{(L_{\tilde{X}}\tilde{Y})}\tilde{Z} = 0 \qquad (4.1)$$

şartı sağlanır.

(4.1) de $\tilde{Y}=E_{\bar{j}}$ ve $\tilde{Z}=E_{\bar{i}}$ yazılırsa, yardımcı teorem 4.1.1 ve yardımcı teorem 4.1.2 den,

$$
\begin{aligned}
(L_{\tilde{X}}\tilde{\nabla})\,(E_{\bar{j}},E_{\bar{i}}) &= L_{\tilde{X}}(\tilde{\nabla}_{E_{\bar{j}}}E_{\bar{i}})-\tilde{\nabla}_{E_{\bar{j}}}(L_{\tilde{X}}E_{\bar{i}})-\tilde{\nabla}_{(L_{\tilde{X}}E_{\bar{j}})}E_{\bar{i}} \\
&= L_{\tilde{X}}\tilde{\Gamma}^{h}_{\bar{j}\bar{i}}E_h+L_{\tilde{X}}\tilde{\Gamma}^{\bar{h}}_{\bar{j}\bar{i}}E_{\bar{h}} \\
&= \left\{\partial_{\bar{j}}\partial_{\bar{i}}v^h+\frac{a^2}{2\alpha}y^b(R_{bic}{}^{h}\partial_{\bar{j}}v^c+R_{bjc}{}^{h}\partial_{\bar{i}}v^c)\right\}E_h \\
&\quad+\left\{\partial_{\bar{j}}\partial_{\bar{i}}v^{\bar{h}}-\frac{ab}{2\alpha}y^b(R_{bic}{}^{h}\partial_{\bar{j}}v^c+R_{bjc}{}^{h}\partial_{\bar{i}}v^c)\right\}E_{\bar{h}} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

bulunur. $L_{\tilde{X}}\tilde{\Gamma}^{h}_{\bar{j}\bar{i}}=L_{\tilde{X}}\tilde{\Gamma}^{\bar{h}}_{\bar{j}\bar{i}}=0$ dan

$$\partial_{\bar{j}}\partial_{\bar{i}}v^h+\frac{a^2}{2\alpha}y^b(R_{bic}{}^{h}\partial_{\bar{j}}v^c+R_{bjc}{}^{h}\partial_{\bar{i}}v^c)=0\,, \tag{4.2}$$

$$\partial_{\bar{j}}\partial_{\bar{i}}v^{\bar{h}}-\frac{ab}{2\alpha}y^b(R_{bic}{}^{h}\partial_{\bar{j}}v^c+R_{bjc}{}^{h}\partial_{\bar{i}}v^c)=0 \tag{4.3}$$

elde edilir. Denklem (4.2) yi

$$\frac{2\alpha}{a^2}\partial_{\bar{j}}\partial_{\bar{i}}v^h=-\partial_{\bar{j}}(y^bR_{bic}{}^{h}v^c)-\partial_{\bar{i}}(y^bR_{bjc}{}^{h}v^c)$$

şeklinde yeniden yazıp bu eşitlikten kısmi türev alınırsa,

$$
\begin{aligned}
\frac{2\alpha}{a^2}\partial_{\bar{k}}\partial_{\bar{j}}\partial_{\bar{i}}v^h &= -\partial_{\bar{k}}\partial_{\bar{j}}(y^bR_{bic}{}^{h}v^c)-\partial_{\bar{k}}\partial_{\bar{i}}(y^bR_{bjc}{}^{h}v^c) \\
&= -\partial_{\bar{j}}\partial_{\bar{i}}(y^bR_{bkc}{}^{h}v^c)-\partial_{\bar{j}}\partial_{\bar{k}}(y^bR_{bic}{}^{h}v^c) \\
&= -\partial_{\bar{i}}\partial_{\bar{k}}(y^bR_{bjc}{}^{h}v^c)-\partial_{\bar{i}}\partial_{\bar{j}}(y^bR_{bkc}{}^{h}v^c)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan,

$$\partial_{\bar{k}}\partial_{\bar{j}}(\frac{\alpha}{a^2}\partial_{\bar{i}}v^h+y^bR_{bic}{}^{h}v^c)=0$$

olur. Son denklemden,

$$\partial_{\bar{j}}(\frac{\alpha}{a^2}\partial_{\bar{i}}v^h+y^bR_{bic}{}^{h}v^c)=P^h_{ji} \tag{4.4}$$

yazılır ve (4.4) ten,

$$\frac{\alpha}{a^2}\partial_{\bar{i}}v^h + y^b R_{bic}{}^h v^c = A_i^h + y^a P_{ai}^h \tag{4.5}$$

elde edilir. Burada A_i^h ve P_{ji}^h, $\left(x^h\right)$ değişkenine bağlı olan fonksiyonlardır. Koordinat dönüşüm kuralı, A nın $\left(A_i^h\right)$ koordinatlarına sahip (1,1) tipli tensör ve P nin $\left(P_{ji}^h\right)$ koordinatlarına sahip (1,2) tipli tensör olduğunu belirtir.

(4.2) den,

$$P_{ij}^h + P_{ji}^h = 2\partial_{\bar{i}}\partial_{\bar{j}}v^h + \frac{a^2}{\alpha} y^b \left\{R_{bic}{}^h\left(\partial_{\bar{j}}v^c\right) + R_{bjc}{}^h\left(\partial_{\bar{i}}v^c\right)\right\} = 0$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten,

$$\partial_{\bar{i}}\left(y^b R_{bjc}{}^h v^c\right) - \partial_{\bar{j}}\left(y^b R_{bic}{}^h v^c\right) = P_{ij}^h - P_{ji}^h = 2P_{ij}^h$$

yazılır. Böylece,

$$\begin{aligned} 2y^a P_{ai}^h &= y^a\partial_{\bar{a}}\left(y^b R_{bic}{}^h v^c\right) - y^a\partial_{\bar{i}}\left(y^b R_{bac}{}^h v^c\right) \\ &= -2y^a R_{iac}{}^h v^c + y^b y^a R_{aic}{}^h \partial_{\bar{b}}v^c \end{aligned} \tag{4.6}$$

olur.

(4.5) ve (4.6) dan,

$$\frac{\alpha}{a^2}\partial_{\bar{i}}v^h - \frac{1}{2}y^b y^a R_{aic}{}^h \partial_{\bar{b}}v^c = A_i^h \tag{4.7}$$

olup

$$\frac{\alpha}{a^2}y^a\partial_{\bar{a}}v^h = y^a A_a^h \tag{4.8}$$

bulunur.

(4.8), (4.7) de yerine yazılırsa,

$$\frac{\alpha}{a^2}\partial_{\bar{i}}v^h = A_i^h + \frac{a^2}{2\alpha}y^b y^a R_{aic}{}^h A_b^c \tag{4.9}$$

ve

$$\partial_{\bar{j}}\partial_{\bar{i}}v^h = \frac{a^4}{2\alpha^2}y^a\left(R_{aic}{}^h A_j^c + R_{jic}{}^h A_a^c\right) \tag{4.10}$$

bulunur.

Diğer taraftan, (4.9), (4.2) de yerine yazılırsa,

$$\frac{a^4}{2\alpha^2}y^a\left(R_{aic}{}^h A_j^c + R_{jic}{}^h A_a^c\right) = -\frac{a^2}{2\alpha}y^b\left[R_{bic}{}^h\left(\frac{a^2}{\alpha}A_j^c + \frac{a^4}{2\alpha^2}y^a y^s R_{ajl}{}^c A_s^l\right)\right.$$
$$\left. + R_{bjc}{}^h\left(\frac{a^2}{\alpha}A_i^c + \frac{a^4}{2\alpha^2}y^a y^s R_{ail}{}^c A_s^l\right)\right]$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{a^2}{\alpha}y^a\left(R_{aic}^{\ h}A_j^c + R_{jic}^{\ h}A_a^c\right) = -\frac{a^2}{\alpha}y^b\left(R_{bic}^{\ h}A_j^c + R_{bjc}^{\ h}A_i^c\right),$$
$$-\frac{a^4}{2\alpha^2}y^a y^s y^b\left(R_{bic}^{\ h}R_{ajl}^{\ c}A_s^l + R_{bjc}^{\ h}R_{ail}^{\ c}A_s^l\right) \tag{4.11}$$

bulunur. Böylece,

$$y^a\left(R_{aic}^{\ h}A_j^c + R_{jic}^{\ h}A_a^c\right) = -y^b\left(R_{bic}^{\ h}A_j^c + R_{bjc}^{\ h}A_i^c\right) - \frac{a^2}{2\alpha}y^a y^s y^b\left(R_{bic}^{\ h}R_{ajl}^{\ c}A_s^l + R_{bjc}^{\ h}R_{ail}^{\ c}A_s^l\right)$$

elde edilir. Buradan

$$y^a\left(2R_{aic}^{\ h}A_j^c + R_{jic}^{\ h}A_a^c + R_{ajc}^{\ h}A_i^c\right) + \frac{a^2}{2\alpha}y^a y^s y^b\left(R_{bic}^{\ h}R_{ajl}^{\ c}A_s^l + R_{bjc}^{\ h}R_{ail}^{\ c}A_s^l\right) = 0$$

ise

$$2R_{aic}^{\ h}A_j^c + R_{jic}^{\ h}A_a^c + R_{ajc}^{\ h}A_i^c = 0$$

olur. Son denklemde j ve i nin rolleri değiştirilip toplanırsa,

$$R_{aic}^{\ h}A_j^c + R_{ajc}^{\ h}A_i^c = 0$$

bulunur. Buradan,

$$R_{ajc}^{\ h}A_i^c = 0 \tag{4.12}$$

elde edilir.

(4.10) ve (4.12) den,

$$\partial_{\bar{i}} v^h = A_i^h$$

bulunur. Böylece,

$$v^h = y^a A_a^h + B^h \qquad (4.13)$$

yazılır. Burada B^h yalnızca (x^h) değişkenine bağlı fonksiyonlardır ve B, (B^h) koordinatlarına sahip vektör alanıdır.

(4.13) ü (4.4) de yerine yazar ve (4.12) yi kullanılırsa,

$$P_{ji}^{\ h} = R_{jic}^{\ \ \ h} B^c \qquad (4.14)$$

olur.

(4.13) ü (4.3) de yerine yazıp (4.12) yi kullanılırsa,

$$v^{\bar{h}} = y^a C_a^h + D^h \qquad (4.15)$$

bulunur. Burada C_a^h ve D^h yalnızca (x^h) değişkenine bağlı fonksiyonlardır. Ayrıca C, (C_a^h) koordinatlarına sahip $(1,1)$ tipli tensör ve D, (D^h) koordinatlarına sahip vektör alanlarıdır.

(4.13) ve (4.15) te bulunan v^h ve $v^{\bar{h}}$ değerleri $\tilde{X} = v^h E_h + v^{\bar{h}} E_{\bar{h}}$ vektör alanında kullanılırsa,

$$\tilde{X} = {}^H B + {}^V D + \gamma C + {}^* A$$

bulunur.

(4.1) de $\tilde{Y} = E_{\bar{j}}$ ve $\tilde{Z} = E_i$ yazıp (4.12), (4.13), (4.15), Yardımcı Teorem 4.1.1 ve 4.1.2 yi kullanılırsa,

$$(L_{\tilde{X}} \tilde{\nabla})\ (E_{\bar{j}}, E_i) = L_{\tilde{X}} (\tilde{\nabla}_{E_{\bar{j}}} E_i) - \tilde{\nabla}_{E_{\bar{j}}} (L_{\tilde{X}} E_i) - \tilde{\nabla}_{(L_{\tilde{X}} E_{\bar{j}})} E_i$$

$$= L_{\tilde{X}} \tilde{\Gamma}_{\bar{j}i}^{h} E_{h} + L_{\tilde{X}} \tilde{\Gamma}_{\bar{j}i}^{\bar{h}} E_{\bar{h}}$$

$$= \Big\{ \nabla_i A_j^h - \frac{a^2}{2\alpha} R_{jli}{}^h D^l + \Big[\frac{a^2}{2\alpha} (-B^l \nabla_l R_{jsi}{}^h + R_{jsi}{}^l \nabla_l B^h - R_{jsl}{}^h \nabla_i B^l$$

$$- R_{lsi}{}^h C_j^l - R_{jli}{}^h C_s^l) - \frac{ab}{2\alpha} R_{jsi}{}^l A_l^h \Big] y^s + \Big[\frac{a^2}{2\alpha} (-A_k^l \nabla_l R_{jsi}{}^h$$

$$+ R_{jsi}{}^l \nabla_l A_k^h - R_{jsl}{}^h \nabla_i A_k^l) \Big] y^s y^k \Big\} E_h \qquad (4.16)$$

$$+ \Big\{ \nabla_i C_j^h + R_{lij}{}^h B^l + \frac{ab}{2\alpha} R_{jli}{}^h D^l + \Big[\frac{a^2}{2\alpha} R_{jsi}{}^l \nabla_l D^h + \frac{ab}{2\alpha} \big(R_{jsl}{}^h \nabla_i B^l$$

$$+ B^l \nabla_l R_{jsi}{}^h + R_{lsi}{}^h C_j^l + R_{jli}{}^h C_s^l - R_{jsi}{}^l C_l^h \big) \Big] y^s + \Big[\frac{ab}{2\alpha} \big(A_k^l \nabla_l R_{jsi}{}^h$$

$$+ R_{jkl}{}^h \nabla_i A_s^l \big) + \frac{a^2}{2\alpha} \big(R_{jsi}{}^l \nabla_l C_k^h - R_{jsi}{}^c R_{clk}{}^h B^l \big) \Big] y^s y^k \Big\} E_{\bar{h}}$$

elde edilir.

(4.16) eşitliğinde $L_{\tilde{X}} \Gamma_{\bar{j}i}^{h} = 0$ yazılırsa,

$$\nabla_i A_j^h = \frac{a^2}{2\alpha} R_{jli}{}^h D^l , \qquad (4.17)$$

$$\frac{a^2}{2\alpha} B^l \nabla_l R_{jsi}{}^h = \frac{a^2}{2\alpha} R_{jsi}{}^l \nabla_l B^h - \frac{a^2}{2\alpha} R_{jsl}{}^h \nabla_i B^l - \frac{a^2}{2\alpha} R_{lsi}{}^h C_j^l - \frac{a^2}{2\alpha} R_{jli}{}^h C_s^l - \frac{ab}{2\alpha} R_{jsi}{}^l A_l^h \qquad (4.18)$$

ve

$$-A_k^l \nabla_l R_{jsi}{}^h + R_{jsi}{}^l \nabla_l A_k^h - R_{jsl}{}^h \nabla_i A_k^l = 0$$

olur.

(4.16) eşitliğinde $L_{\tilde{X}} \Gamma_{\bar{j}i}^{\bar{h}} = 0$ dan

$$\nabla_i C_j^h = -R_{lij}{}^h B^l - \frac{ab}{2\alpha} R_{jli}{}^h D^l , \qquad (4.19)$$

$$\frac{a^2}{2\alpha}R_{jsi}{}^{l}\nabla_l D^h+\frac{ab}{2\alpha}(R_{jsl}{}^{h}\nabla_i B^l+B^l\nabla_l R_{jsi}{}^{h}+R_{lsi}{}^{h}C_j^l+R_{jli}{}^{h}C_s^l-R_{jsi}{}^{l}C_l^h)=0 \tag{4.20}$$

ve

$$\frac{ab}{2\alpha}(A_k^l\nabla_l R_{jsi}{}^{h}+R_{jkl}{}^{h}\nabla_i A_s^l)+\frac{a^2}{2\alpha}(R_{jsi}{}^{l}\nabla_l C_k^h-R_{jsi}{}^{c}R_{clk}{}^{h}B^l)=0 \tag{4.21}$$

elde edilir. (4.21) de j ve h ya göre kontraksiyon yapılırsa,

$$\frac{ab}{2\alpha}(A_k^l\nabla_l R_{si}+R_{kl}\nabla_i A_s^l)+\frac{a^2}{2\alpha}(R_{jsi}{}^{l}\nabla_l C_k^j-R_{jsi}{}^{c}R_{clk}{}^{j}B^l)=0$$

yazılır. Buradan (4.12), (4.17), (4.19) ve ikinci Bianchi özdeşliğini kullanarak,

$$\frac{ab}{2\alpha}\left(A_k^l\nabla_j R_{lsi}{}^{j}+R_{kl}\nabla_i A_s^l+A_k^l\nabla_s R_{li}\right)+\frac{a^2}{2\alpha}\left(R_{jsi}{}^{l}\left(\nabla_l C_k^j+R_{lck}{}^{j}B^l\right)\right)=0$$

$$-\frac{a^3b}{4\alpha^2}(R_{jis}{}^{l}+R_{jsi}{}^{l})R_{kcl}{}^{j}D^c=0$$

bulunur.

(4.18) ve (4.20) den,

$$R_{jsi}{}^{l}\left(\frac{ab}{2\alpha}\nabla_l B^h-\frac{b^2}{2\alpha}A_l^h-\frac{ab}{2\alpha}C_l^h+\frac{a^2}{2\alpha}\nabla_l D^h\right)=0 \tag{4.22}$$

elde edilir.

(4.1) de $\tilde{Y}=E_j$ ve $\tilde{Z}=E_i$ yazıp (4.12), (4.13), (4.15), (4.17), (4.18), (4.19) ve (4.22) yi kullanarak uzun hesaplamalardan sonra,

$$L_B\Gamma_{ji}^h-\frac{ab}{2\alpha}\left(R_{jli}{}^{h}+R_{ilj}{}^{h}\right)D^l=0,$$

$$L_D\Gamma_{ji}^h+\frac{a(a+c)}{\alpha}\left(R_{jli}{}^{h}-\frac{1}{2}R_{jil}{}^{h}\right)D^l=0,$$

$$\frac{ab}{2\alpha}D^l\nabla_j R_{lis}{}^{h}=R_{lsi}{}^{h}\left(\frac{b^2}{\alpha}\nabla_j B^l+\frac{ab}{2\alpha}\nabla_j D^l-\frac{b^2}{\alpha}C_i^l\right)+\frac{ab}{2\alpha}R_{lsj}{}^{h}\nabla_i D^l$$

$$-\frac{a(a+c)}{2\alpha}\left[R_{jil}{}^{h}\left(C_s^l+\nabla_s B^l\right)+R_{jls}{}^{h}\left(C_i^l+\nabla_i B^l\right)+R_{lis}{}^{h}\left(C_j^l+\nabla_j B^l\right)\right]$$

$$-\frac{ab^2+a^2\left(a+c\right)}{2b\alpha}R_{jis}{}^{l}\nabla_l D^h$$

elde edilir.

Tersine, $(i)-(viii)$ şartlarını sağlayan B^h, D^h, A_i^h ve C_i^h verilsin. Yukarıdaki adımları tersten gidildiğinde $\tilde{X}={}^{H}B+{}^{V}D+\gamma C+{}^{*}A$ vektör alanının (TM,G) de afin Killing vektör alanı olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur.

$\tilde{X}$, $T(M)$ de $\{E_\beta\}$ adapte olmuş çatıya göre bileşenleri $\left(v^h,v^{\bar{h}}\right)$ olan bir vektör alanı olsun. $\tilde{X}$ nın $T(M)$ de fibre koruyan vektör alanı olması için gerek ve yeter şart v^h ın yalnızca $\left(x^h\right)$ değişkenine bağlı olmasıdır. Teorem 4.1.3 deki $\tilde{X}$ vektör alanının fibre-koruyan vektör alanı olması durumunda, $\tilde{X}={}^{H}B+{}^{V}D+\gamma C$ ye dönüşür. Teorem 4.1.3 ve ispatından aşağıdaki sonuç verilir.

Sonuç 4.1.4: Eğer (TM,G) bir fibre koruyan afin Killing vektör alanına sahipse o zaman $\tilde{X}$ fibre-koruyan Killing vektör alanı,

$$\tilde{X}={}^{H}B+{}^{V}D+\gamma C$$

şeklindedir ve $B=\left(B^h\right)$, $D=\left(D^h\right)\in\Im_0^1(M)$, $C=\left(C_i^h\right)\in\Im_1^1(M)$ olup aşağıdaki şartlar sağlanır:

i) $\nabla_i C_j^h=-R_{lij}{}^{h}B^l$,

ii) $L_B\Gamma_{ji}^h=0$,

iii) $L_D\Gamma_{ji}^h=0$,

iv) $\frac{a(a+c)}{2\alpha}\left[R_{jil}^{h}(C_s^l+\nabla_s B^l)+R_{jls}^{h}(C_i^l+\nabla_i B^l)+R_{lis}^{h}(C_j^l+\nabla_j B^l)\right]+\frac{a^2(a+c)}{2b\alpha}R_{jis}^{l}\nabla_l D^h=0$

Teorem 4.1.3'ün bir uygulaması olarak (TM,G) de Killing vektör alanlarının sınıflandırılması üzerinde çalışılmıştır. Bunun için ilk olarak aşağıdaki yardımcı teorem ifade edilir.

Yardımcı Teorem 4.1.5: (TM,G) de $\tilde{X} = v^a E_a + v^{\bar{a}} E_{\bar{a}}$ vektör alanına göre $L_{\tilde{X}} G$ Lie türevi:

$$\begin{aligned} L_{\tilde{X}} G \; =& \Big\{(a+c)\left[v^h E_h g_{ij} + g_{hj}(E_i v^h) + g_{ih}(E_j v^h)\right] + b g_{ih}\left[y^c v^b R_{bjc}{}^h + v^{\bar{b}} \Gamma^h_{bj} + (E_j v^{\bar{h}})\right] \\ & + b g_{hj}\left[y^c v^b R_{bic}{}^h + v^{\bar{b}} \Gamma^h_{bi} + (E_i v^{\bar{h}})\right]\Big\} dx^i dx^j \\ & + \Big\{a\left[v^h E_h g_{ij} - g_{hj} v^b \Gamma^h_{bi} - g_{ih} v^b \Gamma^h_{bj} + g_{hj}\left(E_{\bar{i}} v^{\bar{h}}\right) + g_{ih}\left(E_{\bar{j}} v^{\bar{h}}\right)\right] \\ & + b\left[g_{hj}\left(E_{\bar{i}} v^h\right) + g_{ih}\left(E_{\bar{j}} v^h\right)\right]\Big\} \delta y^i \delta y^j \\ & + \Big\{(a+c) g_{hi}(E_{\bar{j}} v^h) + b\left[v^h E_h g_{ij} + g_{hj}(E_i v^h) - g_{ih} v^b \Gamma^h_{bj} \right. \\ & \left. + g_{ih}(E_{\bar{j}} v^{\bar{h}})\right] + a g_{hj}\left[y^c v^b R_{bic}{}^h + v^{\bar{b}} \Gamma^h_{bi} + (E_i v^{\bar{h}})\right]\Big\} dx^i \delta y^j \end{aligned}$$

şeklinde verilir.

(TM,G) de Killing vektör alanlarının genel formu aşağıdaki gibi olur.

Teorem 4.1.6: (TM,G) de $\tilde{X}$ vektör alanının Killing vektör alanı olması için gerek ve yeter şart, $\tilde{X}$ vektör alanının,

$$\tilde{X} = {}^H B + {}^V D + \gamma C + {}^* A$$

şeklinde olması ve $B = \left(B^h\right)$, $D = \left(D^h\right) \in \Im^1_0(M)$, $A = \left(A^h_i\right)$, $C = \left(C^h_i\right) \in \Im^1_1(M)$ olup aşağıdaki şartları sağlamasıdır:

i) $\quad \nabla_i A^h_j = \dfrac{a^2}{2\alpha} R_{jli}{}^h D^l$,

ii) $\quad \nabla_i C^h_j = -R_{lij}{}^h B^l - \dfrac{ab}{2\alpha} R_{jli}{}^h D^l$,

iii) $\quad L_B \Gamma^h_{ji} - \dfrac{ab}{2\alpha}\left(R_{jli}{}^h + R_{ilj}{}^h\right) D^l = 0$,

iv) $L_D\Gamma_{ji}^h - \dfrac{a(a+c)}{\alpha}\left(R_{jli}{}^h - \dfrac{1}{2}R_{jil}{}^h\right)D^l = 0$,

v) $R_{ajc}{}^h A_i^c = 0$,

vi) $(a+c)L_B g_{ij} + bL_D g_{ij} = 0$,

vii) $g_{hi}\left((a+c)A_j^h + bC_j^h\right) + g_{hj}\left(b\nabla_i B^h + a\nabla_i D^h\right) = 0$,

viii) $a\left(g_{hj}C_i^h + g_{ih}C_j^h\right) + b\left(g_{hj}A_i^h + g_{ih}A_j^h\right) = 0$.

İspat: $\tilde{X}$, (TM,G) de Killing vektör alanı olsun. Yani $L_{\tilde{X}}G = 0$ denklemi sağlansın. Riemann manifoldu üzerindeki her Killing vektör alanı, Riemann manifoldunun Levi-Civita konneksiyonuna göre bir afin Killing vektör alanıdır. Dolayısıyla $\tilde{X}$ Killing vektör alanı, $B = (B^h)$, $D = (D^h) \in \Im_0^1(M)$ ve $A = (A_i^h)$, $C = (C_i^h) \in \Im_1^1(M)$ olmak üzere Teorem 4.1.3 e göre,

$$\tilde{X} = {}^H B + {}^V D + \gamma C + {}^* A \tag{4.23}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada Teorem 4.1.3 te listelenen $i - viii$ şartları sağlanır.

(4.23) ü Yardımcı Teorem 4.1.5 te yerine yazıp Teorem 4.1.3 teki $i - v$ şartları vasıtasıyla,

$$\begin{aligned} L_{\tilde{X}}G &= \left\{(a+c)L_B g_{ij} + bL_D g_{ij}\right\}dx^i dx^j \\ &+ \left\{g_{hi}\left((a+c)A_j^h + bC_j^h\right) + g_{hj}\left(b\nabla_i B^h + a\nabla_i D^h\right)dx^i \delta y^j\right\} \\ &+ \left\{a\left(g_{hj}C_i^h + g_{ih}C_j^h\right) + b\left(g_{hj}A_i^h + g_{ih}A_j^h\right)\right\}\delta y^i \delta y^j \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Son denklemden,

$(a+c)L_B g_{ij} + bL_D g_{ij} = 0$,

$g_{hi}\left((a+c)A_j^h + bC_j^h\right) + g_{hj}\left(b\nabla_i B^h + a\nabla_i D^h\right) = 0$,

ve

$a\left(g_{hj}C_i^h + g_{ih}C_j^h\right) + b\left(g_{hj}A_i^h + g_{ih}A_j^h\right) = 0$

bulunur.

Tersine, $i-viii$ şartlarını sağlayan B^h, D^h, A_i^h ve C_i^h verilsin. Yukarıdaki adımlar tersten gidildiğinde $\tilde{X} = {}^H B + {}^V D + \gamma C + {}^* A$ vektör alanının (TM, G) de Killing vektör alanı olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur.

4.2. $G = a\,{}^S g + b\,{}^H g + c\,{}^V g$ Formundaki Riemann Metriğine Göre Fibre Koruyan Projektif Vektör Alanları

Öncelikle fibre koruyan vektör alanı $\tilde{X}$ için Yardımcı Teorem 4.1.2 nin özel hali olan aşağıdaki yardımcı teorem ifade edilir.

Yardımcı Teorem 4.2.1: $\tilde{X} = v^h E_h + v^{\bar{h}} E_{\bar{h}}$ fibre koruyan vektör alanına göre adapte olmuş çatının Lie türevleri,

i) $L_{\tilde{X}} E_h = -\left(E_h v^a\right) E_a + \left\{ y^b v^c R_{hcb}{}^a - v^{\bar{b}} \Gamma_{bh}^a - \left(E_h v^{\bar{a}}\right) \right\} E_{\bar{a}}$,

ii) $L_{\tilde{X}} E_{\bar{h}} = \left\{ v^b \Gamma_{bh}^a - \left(E_{\bar{h}} v^{\bar{a}}\right) \right\} E_{\bar{a}}$

şeklinde olur (Yamauchi 1995).

(TM, G) de fibre koruyan projektif vektör alanlarının genel formu aşağıdaki teorem ile verilir.

Teorem 4.2.2: (TM, G) de $\tilde{X}$ vektör alanının fibre koruyan projektif vektör alanı olması için gerek ve yeter şart $\tilde{X}$ nın

$$\tilde{X} = {}^H V + {}^V B + \gamma A \tag{4.24}$$

şeklinde olması ve $V = \left(V^h\right)$, $B = \left(B^h\right) \in \Im_0^1(M)$, $A = \left(A_i^h\right) \in \Im_1^1(M)$ olup aşağıdaki şartların sağlanmasıdır:

i) $\tilde{\theta} = \theta_i dx^i$,

ii) $\nabla_j \theta_i = 0,$

iii) $\nabla_j A_i^h = \theta_j \delta_i^h - v^c R_{cji}{}^h,$

iv) $B^a R_{iaj}{}^h = 0,$

v) $R_{isj}{}^a \theta_a = 0,$

vi) $R_{isj}{}^a \left[\dfrac{ab}{2\alpha}\left(\nabla_a v^h - A_a^h\right) + \dfrac{a^2}{2\alpha} \nabla_a B^h \right] = 0,$

vii) $L_V R_{isj}{}^h - R_{iaj}{}^h \left(\nabla_s v^a\right) - R_{asj}{}^h \left(\nabla_i v^a\right) + A_s^a R_{iaj}{}^h + A_i^a R_{asj}{}^h = 0,$

viii) $L_V \Gamma_{ij}^h = \theta_i \delta_j^h + \theta_j \delta_i^h .$

İspat: (TM, G) de $\tilde{X} = v^h E_h + v^{\bar{h}} E_{\bar{h}}$ vektör alanının fibre koruyan projektif vektör alanı olması için gerek ve yeter şart $\forall \tilde{Y},\ \tilde{Z} \in \Im_0^1\left(T\left(M\right)\right)$ için

$$\begin{aligned}(L_{\tilde{X}}\tilde{\nabla})(\tilde{Y},\tilde{Z}) &= L_{\tilde{X}}(\tilde{\nabla}_{\tilde{Y}}\tilde{Z}) - \tilde{\nabla}_{\tilde{Y}}(L_{\tilde{X}}\tilde{Z}) - \tilde{\nabla}_{(L_{\tilde{X}}\tilde{Y})}\tilde{Z} \\ &= \tilde{\theta}\left(\tilde{Y}\right)\tilde{Z} + \tilde{\theta}\left(\tilde{Z}\right)\tilde{Y} \end{aligned} \tag{4.25}$$

şartını sağlayan ve bileşenleri $\left(\tilde{\theta}_i, \tilde{\theta}_{\bar{i}}\right)$ olan $\tilde{\theta}$, 1-formunun olmasıdır.

(4.25) ten,

$$\begin{aligned}(L_{\tilde{X}}\tilde{\nabla})(E_{\bar{i}}, E_{\bar{j}}) &= L_{\tilde{X}}(\tilde{\nabla}_{E_{\bar{i}}} E_{\bar{j}}) - \tilde{\nabla}_{E_{\bar{i}}}(L_{\tilde{X}} E_{\bar{j}}) - \tilde{\nabla}_{(L_{\tilde{X}} E_{\bar{i}})} E_{\bar{j}} \\ &= \tilde{\theta}\left(E_{\bar{i}}\right) E_{\bar{j}} + \tilde{\theta}\left(E_{\bar{j}}\right) E_{\bar{i}} , \end{aligned} \tag{4.26}$$

$$\begin{aligned}(L_{\tilde{X}}\tilde{\nabla})(E_{\bar{i}}, E_j) &= L_{\tilde{X}}(\tilde{\nabla}_{E_{\bar{i}}} E_j) - \tilde{\nabla}_{E_{\bar{i}}}(L_{\tilde{X}} E_j) - \tilde{\nabla}_{(L_{\tilde{X}} E_{\bar{i}})} E_j \\ &= \tilde{\theta}\left(E_{\bar{i}}\right) E_j + \tilde{\theta}\left(E_j\right) E_{\bar{i}} , \end{aligned} \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned}(L_{\tilde{X}}\tilde{\nabla})(E_i, E_j) &= L_{\tilde{X}}(\tilde{\nabla}_{E_i} E_j) - \tilde{\nabla}_{E_i}(L_{\tilde{X}} E_j) - \tilde{\nabla}_{(L_{\tilde{X}} E_i)} E_j \\ &= \tilde{\theta}\left(E_i\right) E_j + \tilde{\theta}\left(E_j\right) E_i . \end{aligned} \tag{4.28}$$

denklemleri yazılır.

(4.26) ’dan Yardımcı Teorem 4.1.1 ve Yardımcı Teorem 4.2.1 vasıtasıyla

$$\partial_{\bar{j}}\left(\partial_{\bar{i}} v^{\bar{h}}\right) E_{\bar{h}} = \tilde{\theta}_{\bar{i}} E_{\bar{j}} + \tilde{\theta}_{\bar{j}} E_{\bar{i}} \tag{4.29}$$

elde edilir.

Benzer şekilde (4.27) den,

$$\left\{\frac{a^2}{2\alpha}\left[-y^s L_V R_{isj}{}^h + y^s R_{iaj}{}^h\left(\nabla_s v^a\right) + y^s R_{asj}{}^h\left(\nabla_i v^a\right) - v^{\bar{k}} R_{ikj}{}^h - y^s R_{asj}{}^h\left(E_{\bar{i}} v^{\bar{a}}\right)\right]\right\} E_h$$

$$\left\{-\frac{a^2}{2\alpha} y^s y^b v^c R_{isj}{}^a R_{acb}{}^h + \frac{ab}{2\alpha} y^s\left[L_V R_{isj}{}^h + R_{isj}{}^a\left(\nabla_a v^h\right) - R_{iaj}{}^h\left(\nabla_s v^a\right) - R_{asj}{}^h\left(\nabla_i v^a\right)\right.\right.$$

$$\left. -R_{isj}{}^a\left(E_{\bar{a}} v^{\bar{h}}\right) + R_{asj}{}^h\left(E_{\bar{i}} v^{\bar{a}}\right)\right] + \frac{a^2}{2\alpha} y^s\left[v^{\bar{b}}\Gamma^h_{ba} R_{isj}{}^a + R_{isj}{}^a\left(E_a v^{\bar{h}}\right)\right] + E_{\bar{i}}\left(E_j v^{\bar{h}}\right)$$

$$\left. -v^c R_{jci}{}^h + \left(E_{\bar{i}} v^{\bar{b}}\right)\Gamma^h_{bj} + \frac{ab}{2\alpha} v^{\bar{k}} R_{ikj}{}^h\right\} E_{\bar{h}} = \tilde{\theta}_{\bar{i}} E_j + \tilde{\theta}_j E_{\bar{i}}$$

bulunur ve buradan,

$$\frac{a^2}{2\alpha}\left[-y^s L_V R_{isj}{}^h + y^s R_{iaj}{}^h\left(\nabla_s v^a\right) + y^s R_{asj}{}^h\left(\nabla_i v^a\right) - v^{\bar{k}} R_{ikj}{}^h - y^s R_{asj}{}^h\left(E_{\bar{i}} v^{\bar{a}}\right)\right] = \tilde{\theta}_{\bar{i}}\delta^h_j \tag{4.30}$$

$$-\frac{a^2}{2\alpha} y^s y^b v^c R_{isj}{}^a R_{acb}{}^h + \frac{ab}{2\alpha} y^s\left[L_V R_{isj}{}^h + R_{isj}{}^a\left(\nabla_a v^h\right) - R_{iaj}{}^h\left(\nabla_s v^a\right) - R_{asj}{}^h\left(\nabla_i v^a\right)\right.$$

$$\left. -R_{isj}{}^a\left(E_{\bar{a}} v^{\bar{h}}\right) + R_{asj}{}^h\left(E_{\bar{i}} v^{\bar{a}}\right)\right] + \frac{a^2}{2\alpha} y^s\left[v^{\bar{b}}\Gamma^h_{ba} R_{isj}{}^a + R_{isj}{}^a\left(E_a v^{\bar{h}}\right)\right] + E_{\bar{i}}\left(E_j v^{\bar{h}}\right)$$

$$-v^c R_{jci}{}^h + \left(E_{\bar{i}} v^{\bar{b}}\right)\Gamma^h_{bj} + \frac{ab}{2\alpha} v^{\bar{k}} R_{ikj}{}^h = \tilde{\theta}_j \delta^h_i \tag{4.31}$$

yazılır. (4.30) da h ve j ye göre kontraksiyon yapılırsa,

$$\tilde{\theta}_{\bar{i}} = 0 \tag{4.32}$$

elde edilir. (4.32) den dolayı (4.29) ifadesi

$$\partial_{\bar{j}}\partial_{\bar{i}} v^{\bar{h}} = 0$$

şeklinde yazılır. Böylece,

$$v^{\bar{h}} = y^a A^h_a + B^h \tag{4.33}$$

olur. Burada A_a^h ve B^h yalnızca $\left(x^h\right)$ değişkenine bağlı fonksiyonlardır. Ayrıca A, $\left(A_a^h\right)$ koordinatlarına sahip $(1,1)$ tipli tensör ve B, $\left(B^h\right)$ koordinatlarına sahip vektör alanlarıdır. Sonuç olarak (TM,G) de $\tilde{X}$ fibre koruyan projektif vektör alanının ifadesi:

$$\begin{aligned}\tilde{X} &= v^h E_h + v^{\bar{h}} E_{\bar{h}} \\ &= v^h E_h + \left\{ y^a A_a^h + B^h \right\} E_{\bar{h}} \\ &= {}^H V + {}^V B + \gamma A\end{aligned}$$

şeklinde olur.

(4.33), (4.30) da yerine yazılırsa

$$-\frac{a^2}{2\alpha} y^s \left(L_V R_{isj}{}^h - R_{iaj}{}^h \left(\nabla_s v^a\right) - R_{asj}{}^h \left(\nabla_i v^a\right) + A_s^a R_{iaj}{}^h + A_i^a R_{asj}{}^h \right) - \frac{a^2}{2\alpha} B^a R_{iaj}{}^h = 0$$

bulunur. Son denklemden,

$$L_V R_{isj}{}^h - R_{iaj}{}^h \left(\nabla_s v^a\right) - R_{asj}{}^h \left(\nabla_i v^a\right) + A_s^a R_{iaj}{}^h + A_i^a R_{asj}{}^h = 0 \qquad (4.34)$$

ve

$$B^a R_{iaj}{}^h = 0$$

elde edilir.

(4.33), (4.31) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}&\frac{a^2}{2\alpha} y^s y^b R_{isj}{}^a \left(v^c R_{cab}{}^h + \nabla_a A_b^h \right) + \frac{ab}{2\alpha} y^s R_{isj}{}^a \left(\nabla_a v^h - A_a^h \right) \\ &+ \frac{a^2}{2\alpha} y^s R_{isj}{}^a \left(\nabla_a B^h \right) + v^c R_{cji}{}^h + \nabla_j A_i^h = \theta_j \delta_i^h \qquad (4.35)\end{aligned}$$

elde edilir. (4.35) y^i ile kontraksiyon yapılarak

$$v^c R_{cji}{}^h + \nabla_j A_i^h = \theta_j \delta_i^h \qquad (4.36)$$

bulunur.

(4.36), (4.35) de yerine yazıldığında

$$R_{isj}{}^{a}\theta_{a}=0 \tag{4.37}$$

ve

$$R_{isj}{}^{a}\left[\frac{ab}{2\alpha}\left(\nabla_{a}v^{h}-A_{a}^{h}\right)+\frac{a^{2}}{2\alpha}\nabla_{a}B^{h}\right]=0 \tag{4.38}$$

olur.

(4.28) den Yardımcı Teorem 4.1.1 ve Yardımcı Teorem 4.2.1 i kullanarak, (4.33), (4.34), (4.36) ve (4.38) yardımıyla

$$\nabla_{i}\nabla_{j}v^{h}+v^{a}R_{aij}{}^{h}=\theta_{i}\delta_{j}^{h}+\theta_{j}\delta_{i}^{h} \tag{4.39}$$

ve

$$\nabla_{j}\theta_{i}=0 \tag{4.40}$$

elde edilir.

Tersine eğer B^{h}, v^{h}, θ_{h} ve A_{i}^{h} verilen (i-viii) şartlarını sağlarsa, yukarıdaki adımlar tersten gidilerek $\tilde{X}={}^{H}V+{}^{V}B+\gamma A$ vektör alanının tanjant demette fibre koruyan projektif vektör alanı olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur.

$\tilde{X}$ tanjant demette bileşenleri $\left(v^{h},v^{\bar{h}}\right)$ olan fibre koruyan vektör alanı olsun. Bilindiği gibi tanjant demette her $\tilde{X}$ fibre koruyan vektör alanı M de bileşenleri $\left(v^{h}\right)$ olan bir vektör alanına indirgenir. Teorem 4.2.2 ve ispatından aşağıdaki sonuç yazılır.

Sonuç 4.2.3. (TM,G) de her $\tilde{X}$ fibre koruyan projektif vektör alanı $\tilde{X}={}^{H}V+{}^{V}B+\gamma A$ formundadır ve doğal olarak M de bir V projektif vektör alanına indirgenir.

$\tilde{X}$, (TM,G) de $\{E_{\beta}\}$ adapte olmuş çatıya göre bileşenleri $\left(v^{h},v^{\bar{h}}\right)$ olan bir vektör alanı olsun. $\tilde{X}$ nın dikey vektör alanı olması için gerek ve yeter şart $v^{h}=0$ olmasıdır.

Bu durumda Teorem 4.2.2 deki $\tilde{X}$ vektör alanı $\tilde{X} = {}^V B + \gamma A$ şekline dönüşür. Teorem 4.2.2 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2.4. Eğer (TM, G) de $\tilde{X}$, dikey projektif vektör alanı ise bu durumda $\tilde{X}$ vektör alanı,

$$\tilde{X} = {}^V B + \gamma A \tag{4.41}$$

şeklinde olur ve $B = B^h \in \Im_0^1(M)$, $A = A_i^h \in \Im_1^1(M)$ ve $\tilde{\theta}$ bağlantılı 1-form olup aşağıdaki şartlar sağlanır:

i) $\tilde{\theta} = \theta_i dx^i$,

ii) $\nabla_j \theta_i = 0$,

iii) $\nabla_j A_i^h = \theta_j \delta_i^h$,

iv) $B^a R_{iaj}{}^h = 0$,

v) $R_{isj}{}^a \theta_a = 0$,

vi) $R_{isj}{}^a \left[\dfrac{a^2}{2\alpha} \nabla_a B^h - \dfrac{ab}{2\alpha} A_a^h \right] = 0$,

vii) $A_s^a R_{iaj}{}^h + A_i^a R_{asj}{}^h = 0$.

Teorem 4.2.5: (M, g) tam Riemann manifold ve (TM, G) de M nin tanjant demeti olsun. Eğer $T(M)$ afin olmayan fibre koruyan projektif vektör alanına sahipse bu durumda M lokal flattır.

İspat : $V^h = \theta^a \left(\nabla_a v^h - A_a^h \right)$ yazıp (4.36), (4.39) ve (4.40) ı kullanılırsa

$$\begin{aligned} L_V g_{ij} &= \nabla_i V_j + \nabla_j V_i = \nabla_i \left\{ \theta^a \left(\nabla_a v_j - A_{aj} \right) \right\} + \nabla_j \left\{ \theta^a \left(\nabla_a v_i - A_{ai} \right) \right\} \\ &= \left\{ \nabla_i \nabla_a v_j + v^c R_{ciaj} - \theta_i g_{aj} \right\} \theta^a + \left\{ \nabla_j \nabla_a v_i + v^c R_{cjai} - \theta_j g_{ai} \right\} \theta^a \\ &= 2\left(\theta_a \theta^a \right) g_{ij} \end{aligned}$$

olur. Böylece V, M üzerinde bir homotetik vektör alanıdır. Eğer tam Riemann manifoldu, izometrik olmayan homotetik vektör alanına sahipse bu durumda bu tam Riemann manifoldu lokal flattır (Kobayashi 1955). Böylece M lokal flattır.

4.3. $G = a\,{}^{S}g + b\,{}^{H}g + c\,{}^{V}g$ Formundaki Riemann Metriğinin Diğer Özellikleri

4.3.1. $G = a\,{}^{S}g + b\,{}^{H}g + c\,{}^{V}g$ formundaki Riemann metriğinin geodezikleri

Farzedelim ki, $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}(t)$ $T(M)$ de $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^{I}} \right\}$ doğal çatıya göre ifadesi $x^{R} = x^{R}(t)$, $\left\{ x^{r} = x^{r}(t), x^{\bar{r}} = x^{\bar{r}}(t) = y^{r}(t) \right\}$ olan bir eğri olsun. Burada t, $\tilde{\gamma}$ nın yay uzunluğu parametresidir. M manifoldu üzerinde $\gamma = \pi \circ \tilde{\gamma}$ eğrisi $\tilde{\gamma}$ eğrisinin projeksiyonu olarak adlandırılır ve $\pi\tilde{\gamma}$ şeklinde gösterilir. $\pi\tilde{\gamma}$ eğrisinin lokal ifadesi $x^{r} = x^{r}(t)$ şeklindedir.

(TM, G) nin $\{E_{\beta}\}$ adapte olmuş çatısında, $\tilde{\gamma}$ eğrisinin $\tilde{\nabla}$ konneksiyonuna göre geodezik olması için gerek ve yeter şart,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\omega^{\varepsilon}}{dt} \right) + \tilde{\Gamma}^{\varepsilon}_{\alpha\beta} \frac{\omega^{\alpha}}{dt} \frac{\omega^{\beta}}{dt} = 0 \tag{4.42}$$

denklemini sağlamasıdır (Yano and Ishihara 1973). Burada $\tilde{\Gamma}^{\varepsilon}_{\alpha\beta}$, G nin $\tilde{\nabla}$ konneksiyonunun bileşenlerini göstermektedir ve $\tilde{\gamma}$ eğrisi boyunca

$$\frac{\omega^{r}}{dt} = \frac{dx^{r}}{dt},$$

$$\frac{\omega^{\bar{r}}}{dt} = \frac{\delta y^{r}}{dt} = \frac{dy^{r}}{dt} + y^{s}\Gamma^{r}_{sj} \frac{dx^{j}}{dt}$$

eşitlikleri yazılır (Yano and Ishihara 1973).

(4.42) ve Yardımcı Teorem 4.1.1 vasıtasıyla,

$$\begin{cases} \dfrac{\delta^2 x^r}{dt^2} + \dfrac{ab}{2\alpha} y^b \left(R_{bij}{}^r + R_{bji}{}^r \right) \dfrac{dx^i}{dt} \dfrac{dx^j}{dt} + \dfrac{a^2}{\alpha} y^b R_{bij}{}^r \dfrac{\delta y^i}{dt} \dfrac{dx^j}{dt} = 0, \\ \dfrac{\delta^2 y^r}{dt^2} + \left[\dfrac{b^2}{\alpha} y^b R_{ibj}{}^r - \dfrac{a(a+c)}{2\alpha} y^b R_{ijb}{}^r \right] \dfrac{dx^i}{dt} \dfrac{dx^j}{dt} + \dfrac{ab}{\alpha} y^b R_{ibj}{}^r \dfrac{\delta y^i}{dt} \dfrac{dx^j}{dt} = 0 \end{cases} \tag{4.43}$$

elde edilir ve böylece aşağıdaki teorem yazılır.

Teorem 4.3.1.1: $\tilde{\gamma}$, (TM, G) de indirgenmiş koordinatlar $(x^r, x^{\bar{r}})$ ye göre lokal ifadesi $x^r = x^r(t)$, $x^{\bar{r}} = y^r(t)$ olan bir eğri olsun. Eğer $\tilde{\gamma}$ eğrisi (4.43) denklemlerini sağlarsa, $\tilde{\gamma}$ eğrisi, (TM, G) de geodeziktir.

$\tilde{\gamma}$, $x^r = c^r$ sabiti ile verilen fibre üzerinde yerleşiyorsa (4.43) denklemleri,

$$\frac{d^2 y^r}{dt^2} = 0 \tag{4.44}$$

denklemine indirgenir. Buradan, $a^{\bar{r}}$ ve $b^{\bar{r}}$ sabitler olmak üzere

$$x^{\bar{r}} = a^{\bar{r}} t + b^{\bar{r}}, \ \bar{r} = n+1, \ldots, 2n$$

elde edilir. Sonuç olarak aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 4.3.1.2: $\tilde{\gamma}$ geodeziği, (TM, G) nin fibresi üzerine yerleşiyorsa, c^h, $a^{\bar{h}}$ ve $b^{\bar{h}}$ sabitler olmak üzere $\tilde{\gamma}$ geodeziği adapte olmuş çatıya göre,

$$\begin{cases} x^h = c^h \\ x^{\bar{h}} = a^{\bar{h}} t + b^{\bar{h}} \end{cases}$$

denklemleri ile ifade edilir.

γ, M manifoldu üzerinde bir eğri olsun. $T(M)$ de ${}^H\gamma$ eğrisi

$${}^H\gamma = \begin{cases} x^r = x^r(t) \\ x^{\bar{r}} = X^r(t) \end{cases}$$

ile tanımlanır. Burada $X^r(t)$, γ eğrisi boyunca vektör alanıdır. Eğer ${}^H\gamma$ eğrisi bütün noktalarında

$$\frac{\delta X^h}{dt} = 0$$

şartını sağlarsa $X^r\left(t\right)$, γ eğrisi boyunca paralel vektör alanıdır ve ${}^H\gamma$ eğrisi γ nın yatay lifti olarak adlandırılır (Yano and Ishihara 1973). Bu durumda $\left(4.43\right)$ ten aşağıdaki teorem yazılır.

Teorem 4.3.1.3: $\left(M,g\right)$ üzerindeki bir geodeziğin yatay lifti $\left(TM,G\right)$ üzerinde geodezik değildir.

γ eğrisinin natural lifti,

$$\tilde{\gamma} = \begin{cases} x^r = x^r\left(t\right) \\ x^{\bar{r}} = \dfrac{dx^r}{dt}\left(t\right) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Bu durumda $\left(4.43\right)$ denklemleri,

$$\begin{cases} \dfrac{\delta^2 x^r}{dt^2} + \dfrac{a^2}{\alpha} R_{bij}{}^r \dfrac{dx^b}{dt}\dfrac{\delta^2 x^i}{dt^2}\dfrac{dx^j}{dt} = 0, \\ \dfrac{\delta^3 x^r}{dt^3} + \dfrac{ab}{\alpha} R_{ibj}{}^r \dfrac{dx^b}{dt}\dfrac{\delta^2 x^i}{dt^2}\dfrac{dx^j}{dt} = 0, \end{cases}$$

şekline dönüşür. Böylece aşağıdaki teorem yazılır.

Teorem 4.3.1.4: $\left(M,g\right)$ üzerindeki herhangi bir geodeziğin natural lifti $\left(TM,G\right)$ üzerinde daima geodeziktir.

4.3.2. $G = a\,{}^S g + b\,{}^H g + c\,{}^V g$ formundaki Riemann metrikli tanjant demetin konformal flatlığı

Bu bölümde $\left(TM,G\right)$ nin konformal flatlığını araştıracağız. Bunun için öncelikle bazı yardımcı teoremler verilecektir.

(TM,G) nin Riemann eğrilik tensörü $\tilde{R}$ ve $\forall\tilde{X},\ \tilde{Y},\ \tilde{Z}\in\Im_0^1(T(M))$ için,

$$\tilde{R}(\tilde{X},\tilde{Y})\tilde{Z}=\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{\nabla}_{\tilde{Y}}\tilde{Z}-\tilde{\nabla}_{\tilde{Y}}\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Z}-\tilde{\nabla}_{[\tilde{X},\tilde{Y}]}\tilde{Z}$$

şeklinde tanımlanır. $\tilde{X}=E_m,\ E_{\bar{m}},\ \ \tilde{Y}=E_i,\ E_{\bar{i}}$ ve $\tilde{Z}=E_j,\ E_{\bar{j}}$ yazılarak Yardımcı Teorem 3.12.1 ve 4.1.1 vasıtasıyla aşağıdaki yardımcı teorem yazılır.

Yardımcı Teorem 4.3.2.1: $\alpha=a(a+c)-b^2$ olmak üzere (TM,G) nin $\tilde{R}$ eğrilik tensörünün adapte olmuş çatıya göre ifadesi:

$$
\begin{aligned}
(i)\ \tilde{R}(E_m,E_i)E_j=&\Big\{R_{mij}{}^k+\frac{ab}{2\alpha}y^s\left[\nabla_i\left(R_{msj}{}^k+R_{jsm}{}^k\right)-\nabla_m\left(R_{isj}{}^k+R_{jsi}{}^k\right)\right]\\
&+\frac{a^2}{4\alpha}y^py^s\left[R_{hsm}{}^kR_{ijp}{}^h-R_{hsi}{}^kR_{mjp}{}^h-2R_{mis}{}^hR_{hpj}{}^k\right]\\
&+\frac{a^2b^2}{4\alpha}y^py^s\left[R_{msh}{}^k\left(R_{ipj}{}^h+R_{jpi}{}^h\right)-R_{ish}{}^k\left(R_{mpj}{}^h+R_{jpm}{}^h\right)\right]\Big\}E_k\\
&+\Big\{\frac{b^2}{\alpha}y^s\left[\nabla_mR_{isj}{}^k-\nabla_iR_{msj}{}^k\right]+\frac{a(a+c)}{2\alpha}y^s\left[\nabla_iR_{mjs}{}^k-\nabla_mR_{ijs}{}^k\right]\\
&+\frac{ab^3}{4\alpha^2}y^py^s\left[R_{smh}{}^k\left(R_{ipj}{}^h+R_{jpi}{}^h\right)+R_{ish}{}^k\left(R_{mpj}{}^h+R_{jpm}{}^h\right)\right]\\
&+\frac{ab}{4\alpha}y^py^s\Big[R_{mhs}{}^k\left(R_{ipj}{}^h+R_{jpi}{}^h\right)-R_{ihs}{}^k\left(R_{mpj}{}^h+R_{jpm}{}^h\right)\\
&+R_{hsi}{}^kR_{mjp}{}^h-R_{hsm}{}^kR_{ijp}{}^h+2R_{mis}{}^hR_{hpj}{}^k\Big]\Big\}E_{\bar{k}},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(ii)\ \tilde{R}(E_m,E_i)E_{\bar{j}}=&\Big\{\frac{a^2}{2\alpha}y^s\left(\nabla_iR_{jsm}{}^k-\nabla_mR_{jsi}{}^k\right)+\frac{a^3b}{4\alpha^2}y^py^s\left[R_{jpi}{}^hR_{msh}{}^k-R_{jpm}{}^hR_{ish}{}^k\right]\Big\}E_k\\
&+\Big\{R_{mij}{}^k+\frac{ab}{2\alpha}y^s\left(\nabla_mR_{jsi}{}^k-\nabla_iR_{jsm}{}^k\right)+\frac{a^2b^2}{4\alpha^2}y^py^s\left[R_{jpi}{}^hR_{smh}{}^k+R_{jpm}{}^hR_{ish}{}^k\right]\\
&+\frac{a^2}{4\alpha}y^py^s\left[R_{mhs}{}^kR_{jpi}{}^h-R_{ihs}{}^kR_{jpm}{}^h\right]\Big\}E_{\bar{k}},
\end{aligned}
$$

$$
(iii)\ \tilde{R}(E_m,E_{\bar{i}})E_j=\Big\{\frac{ab}{2\alpha}\left(R_{mij}{}^k+R_{jim}{}^k\right)-\frac{a^2}{2\alpha}y^s\nabla_mR_{isj}{}^k
$$

$$+\frac{a^3b}{4\alpha^2}y^py^s\left[R_{ipj}{}^{h}R_{msh}{}^{k}-R_{ish}{}^{k}\left(R_{mpj}{}^{h}+R_{jpm}{}^{h}\right)\right]\Bigg\}E_k$$

$$+\left\{-\frac{b^2}{\alpha}R_{mij}{}^{k}+\frac{a(a+c)}{2\alpha}R_{mji}{}^{k}+\frac{ab}{2\alpha}y^s\nabla_m R_{isj}{}^{k}+\frac{a^2}{4\alpha}y^py^sR_{mhs}{}^{k}R_{ipj}{}^{h}\right.$$

$$\left.+\frac{a^2b^2}{4\alpha^2}y^py^s\left[R_{ish}{}^{k}\left(R_{mpj}{}^{h}+R_{jpm}{}^{h}\right)+R_{ipj}{}^{h}R_{smh}{}^{k}\right]\right\}E_{\bar{k}},$$

$$(iv)\ \tilde{R}\left(E_{\bar{m}},E_i\right)E_j=\left\{-\frac{ab}{2\alpha}\left(R_{imj}{}^{k}+R_{jmi}{}^{k}\right)+\frac{a^2}{2\alpha}y^s\nabla_i R_{msj}{}^{k}\right.$$

$$\left.+\frac{a^3b}{4\alpha^2}y^py^s\left[R_{mph}{}^{k}\left(R_{jsi}{}^{h}+R_{isj}{}^{h}\right)-R_{ish}{}^{k}R_{mpj}{}^{h}\right]\right\}E_k$$

$$+\left\{\frac{b^2}{\alpha}R_{imj}{}^{k}-\frac{a(a+c)}{2\alpha}R_{ijm}{}^{k}-\frac{ab}{2\alpha}y^s\nabla_i R_{msj}{}^{k}\right.$$

$$\left.-\frac{a^2b^2}{4\alpha^2}y^py^s\left[R_{msh}{}^{k}\left(R_{jpi}{}^{h}+R_{ipj}{}^{h}\right)+R_{mpj}{}^{h}R_{sih}{}^{k}\right]-\frac{a^2}{4\alpha}y^py^sR_{ish}{}^{k}R_{mpj}{}^{h}\right\}E_{\bar{k}},$$

$$(v)\ \tilde{R}\left(E_m,E_{\bar{i}}\right)E_{\bar{j}}=\left\{\frac{a^2}{2\alpha}R_{jim}{}^{k}-\frac{a^4}{4\alpha^2}y^py^sR_{ish}{}^{k}R_{jpm}{}^{h}\right\}E_k$$

$$+\left\{-\frac{ab}{2\alpha}R_{jim}{}^{k}+\frac{a^3b}{4\alpha^2}y^py^sR_{ish}{}^{k}R_{jpm}{}^{h}\right\}E_{\bar{k}},$$

$$(vi)\ \tilde{R}\left(E_{\bar{m}},E_i\right)E_{\bar{j}}=\left\{-\frac{a^2}{2\alpha}R_{jmi}{}^{k}+\frac{a^4}{4\alpha^2}y^py^sR_{msh}{}^{k}R_{jpi}{}^{h}\right\}E_k$$

$$+\left\{\frac{ab}{2\alpha}R_{jmi}{}^{k}-\frac{a^3b}{4\alpha^2}y^py^sR_{msh}{}^{k}R_{jpi}{}^{h}\right\}E_{\bar{k}},$$

$$(vii)\ \tilde{R}\left(E_{\bar{m}},E_{\bar{i}}\right)E_j=\left\{\frac{a^2}{\alpha}R_{mij}{}^{k}+\frac{a^4}{4\alpha^2}y^py^s\left[R_{msh}{}^{k}R_{ipj}{}^{h}-R_{ish}{}^{k}R_{mpj}{}^{h}\right]\right\}E_k$$

$$+\left\{\frac{ab}{\alpha}R_{imj}{}^{k}-\frac{a^3b}{4\alpha^2}y^py^s\left[R_{msh}{}^{k}R_{ipj}{}^{h}-R_{ish}{}^{k}R_{mpj}{}^{h}\right]\right\}E_{\bar{k}},$$

$$(viii)\ \tilde{R}\left(E_{\bar{m}},E_{\bar{i}}\right)E_{\bar{j}}=0.$$

şeklinde olur.

(TM, G) de Riemann eğrilik tensörünün invaryant yazılışı için bkz. (Abbasi and Sarih 2005)

$\tilde{R}_{\alpha\beta} = \tilde{R}_{\sigma\alpha\beta}{}^{\sigma}$, (TM, G) nin Ricci tensörünün bileşenleri olmak üzere Yardımcı Teorem 4.3.2.1 den aşağıdaki yardımcı teorem yazılır.

Yardımcı Teorem 4.3.2.2: (TM, G) nin adapte olmuş çatıya göre Ricci tensörünün bileşenleri $\tilde{R}_{\alpha\beta}$,

$$(i)\, \tilde{R}_{\bar{i}\,\bar{j}} = -\frac{a^4}{4\alpha^2} y^p y^s R_{ish}{}^m R_{jpm}{}^h ,$$

$$(ii)\, \tilde{R}_{i\,\bar{j}} = -\frac{ab}{2\alpha} R_{ji} + \frac{a^2}{2\alpha} y^s \left(\nabla_s R_{ji} - \nabla_j R_{si} \right) - \frac{a^3 b}{4\alpha^2} y^p y^s R_{pjm}{}^h R_{sih}{}^m ,$$

$$(iii)\, \tilde{R}_{\bar{i}\,j} = -\frac{ab}{2\alpha} R_{ij} + \frac{a^2}{2\alpha} y^s \left(\nabla_s R_{ij} - \nabla_i R_{sj} \right) - \frac{a^3 b}{4\alpha^2} y^p y^s R_{pim}{}^h R_{sjh}{}^m ,$$

$$(iv)\, \tilde{R}_{i\,j} = \left(1 - \frac{b^2}{\alpha} \right) R_{ij} + \frac{ab}{2\alpha} y^s \left(2\nabla_s R_{ij} - \nabla_i R_{sj} - \nabla_j R_{is} \right) - \frac{a^2 b^2}{4\alpha^2} y^p y^s \left(R_{ish}{}^m R_{mpj}{}^h + R_{ish}{}^m R_{jpm}{}^h \right)$$
$$+ \frac{a^2}{4\alpha} y^p y^s \left(R_{shi}{}^m R_{mjp}{}^h + R_{his}{}^m R_{mpj}{}^h - 2 R_{mis}{}^h R_{hpj}{}^m \right).$$

şeklinde olur.

(TM, G) nin $\tilde{S}$ skaler eğriliği $\tilde{S} = G^{\alpha\beta} \tilde{R}_{\alpha\beta}$ şeklindedir. Burada $G^{\alpha\beta}$, $G_{\alpha\beta}$ nın ters matrisidir. Yardımcı Teorem 4.3.2.2 vasıtasıyla aşağıdaki yardımcı teorem yazılır.

Yardımcı Teorem 4.3.2.3: (M, g) nin skaler eğriliği S ve (TM, G) nin skaler eğriliği $\tilde{S}$ olmak üzere

$$\tilde{S} = \frac{a}{\alpha} S - \frac{a^3}{2\alpha^4} y^p y^s R_{pijm} R_s{}^{ijm}$$

olur (Abbasi and Sarih 2005).

Teorem 4.3.2.4: (TM,G) nin lokal konformal flat olması için gerek ve yeter şart, M nin lokal flat ve G Riemann metriğinin $G = a\left({}^S g + {}^H g\right) + c\,{}^V g$ formunda olmasıdır.

İspat: (TM,G) nin lokal konformal flat olması için gerek ve yeter şart, (TM,G) nin $\tilde{R}$ eğrilik tensörünün bileşenlerinin aşağıdaki denklemi sağlamasıdır:

$$\tilde{R}_{\alpha\gamma\beta\sigma} = \frac{1}{2(n-1)}\left(G_{\gamma\sigma}\tilde{R}_{\alpha\beta} - G_{\alpha\sigma}\tilde{R}_{\gamma\beta} + G_{\alpha\beta}\tilde{R}_{\gamma\sigma} - G_{\gamma\beta}\tilde{R}_{\alpha\sigma}\right)$$
$$- \frac{\tilde{S}}{2(2n-1)(n-1)}\left(G_{\alpha\beta}G_{\gamma\sigma} - G_{\alpha\sigma}G_{\gamma\beta}\right). \qquad (4.45)$$

Burada $\tilde{R}_{\alpha\gamma\beta\sigma} = G_{\sigma\varepsilon}\tilde{R}_{\alpha\gamma\beta}{}^{\varepsilon}$ şeklindedir.

$\alpha = \bar{m},\ \gamma = \bar{i},\ \beta = \bar{j},\ \sigma = l$ ve $\alpha = \bar{m},\ \gamma = \bar{i},\ \beta = \bar{j},\ \sigma = \bar{l}$ alınması durumunda (4.45) ten

$$\tilde{R}_{\bar{m}\bar{i}\bar{j}l} = \frac{1}{2(n-1)}\left(bg_{il}\tilde{R}_{\bar{m}\bar{j}} - bg_{ml}\tilde{R}_{\bar{i}\bar{j}} + ag_{mj}\tilde{R}_{\bar{i}l} - ag_{ij}\tilde{R}_{\bar{m}l}\right)$$
$$- \frac{\tilde{S}}{2(2n-1)(n-1)}\left(abg_{mj}g_{il} - abg_{ml}\,g_{ij}\right) \qquad (4.46)$$

ve

$$\tilde{R}_{\bar{m}\bar{i}\bar{j}\bar{l}} = \frac{1}{2(n-1)}\left(ag_{il}\tilde{R}_{\bar{m}\bar{j}} - ag_{ml}\tilde{R}_{\bar{i}\bar{j}} + ag_{mj}\tilde{R}_{\bar{i}\bar{l}} - ag_{ij}\tilde{R}_{\bar{m}\bar{l}}\right)$$
$$- \frac{\tilde{S}}{2(2n-1)(n-1)}\left(a^2 g_{mj}g_{il} - a^2 g_{ml}\,g_{ij}\right) \qquad (4.47)$$

elde edilir.

Yardımcı Teorem 4.3.2.1 de $(viii)$ ve (3.20) yi kullanarak $\tilde{R}_{\bar{m}\bar{i}\bar{j}k} = 0$ ve $\tilde{R}_{\bar{m}\bar{i}\bar{j}\bar{k}} = 0$ bulunur. Böylece (4.46) ve (4.47) denklemleri aşağıdaki şekle indirgenir:

$$\frac{\tilde{S}}{2(2n-1)(n-1)}\left(abg_{mj}g_{il}-abg_{ml}\,\mathrm{g}_{ij}\right)$$

$$=\frac{1}{2(n-1)}\left(bg_{il}\tilde{R}_{\bar{m}\bar{j}}-bg_{ml}\tilde{R}_{\bar{i}\bar{j}}+ag_{mj}\tilde{R}_{\bar{i}l}-ag_{ij}\tilde{R}_{\bar{m}l}\right) \qquad (4.48)$$

ve

$$\frac{\tilde{S}}{2(2n-1)(n-1)}\left(a^2g_{mj}g_{il}-a^2g_{ml}\,\mathrm{g}_{ij}\right)$$

$$=\frac{1}{2(n-1)}\left(ag_{il}\tilde{R}_{\bar{m}\bar{j}}-ag_{ml}\tilde{R}_{\bar{i}\bar{j}}+ag_{mj}\tilde{R}_{\bar{i}\bar{l}}-ag_{ij}\tilde{R}_{\bar{m}\bar{l}}\right) \qquad (4.49)$$

(4.48) ve (4.49) karşılaştırılırsa $a=b$ ve $\tilde{R}_{\bar{i}l}=\tilde{R}_{\bar{i}\bar{l}}$ elde edilir. Buradan Yardımcı Teorem 4.3.2.2 nin (i) ve (iii) eşitlikleri vasıtasıyla

$$R_{ij}=0$$

olup

$$\tilde{R}_{\bar{i}\,\bar{l}}=-\frac{a^4}{4\alpha^2}y^py^sR_{pih}{}^{m}R_{slm}{}^{h} \qquad (4.50)$$

bulunur.

(4.49) sırasıyla g^{il} ve g^{mj} ile çarpılırsa,

$$\frac{an}{2n-1}\tilde{S}=2g^{il}\tilde{R}_{\bar{i}\bar{l}} \qquad (4.51)$$

denklemi elde edilir.

(4.50) den,

$$g^{il}\tilde{R}_{\bar{i}\bar{j}}=-\frac{a^4}{4\alpha^2}y^py^sg^{il}R_{pih}{}^{m}R_{slm}{}^{h}$$

$$=\frac{a^4}{4\alpha^2}y^py^sR_{pihj}R_s{}^{ihj}$$

$$= -\frac{a\alpha^2}{2}\tilde{S} \qquad (4.52)$$

olduğu görülür.

(4.52), (4.51) de yerine yazılırsa,

$$\left(\frac{an}{2n-1} + a\alpha^2\right)\tilde{S} = 0$$

elde edilir. Böylece $\tilde{S} = 0$ olur ve buradan,

$$R_{pihj} R_s^{\ ihj} = 0$$

$$R_{pihj} = 0$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

4.3.3. $G = a\,^S g + b\,^H g + c\,^V g$ formundaki Riemann metriğinin burulmalı metrik konneksiyonu

∇, Riemann manifoldunda bir afin konneksiyon olsun. Bilindiği gibi $\nabla g = 0$ ise ∇, g nin metrik konneksiyonu olur. Eğer ∇ burulmasız ise Levi-Civita konneksiyonu adını alır. Ancak bir Riemann manifoldunda burulması sıfırdan farklı olan başka metrik konneksiyonlarda vardır. Bu bölümde burulmalı metrik konneksiyon incelenecektir.

∇, M de bir afin konneksiyon olsun. ∇ konneksiyonunun $T(M)$ ye yatay lifti,

$$^H\nabla_{^H X}\,^H Y = {}^H(\nabla_X Y),$$

$$^H\nabla_{^H X}\,^V Y = {}^V(\nabla_X Y),$$

$$^H\nabla_{^V X}\,^H Y = 0,$$

$$^H\nabla_{^V X}\,^V Y = 0.$$

şeklinde tanımlanır (Yano and Ishihara 1973).

${}^{H}\nabla$ nın burulma tensörü $\tilde{T}$

$$\tilde{T}\left({}^{V}X, {}^{V}Y\right) = 0,$$

$$\tilde{T}\left({}^{V}X, {}^{H}Y\right) = {}^{V}\left(T\left(X,Y\right)\right),$$

$$\tilde{T}\left({}^{H}X, {}^{H}Y\right) = {}^{H}\left(T\left(X,Y\right)\right) - \gamma R\left(X,Y\right).$$

şartlarını sağlar. Burada T ve R sırasıyla M de ∇ afin konneksiyonunun burulma ve eğrilik tensör alanlarıdır (Yano and Ishihara 1973). Yukarıdaki eşitliklerden ∇, $\left(M,g\right)$ Riemann manifoldunun Levi-Civita konneksiyonu seçilse bile ${}^{H}\nabla$ konneksiyonunun sıfırdan farklı burulma tensörüne sahip (burulmalı) olduğu görülür. ${}^{H}\nabla$ nın tanımı, (3.17), (3.18), (3.19) ve $\forall \tilde{X},\ \tilde{Y},\ \tilde{Z} \in \Im_0^1\left(T\left(M\right)\right)$ için,

$$\left({}^{H}\nabla_{\tilde{Z}}G\right)\left(\tilde{X},\tilde{Y}\right) = \tilde{Z}\left(G\left(\tilde{X},\tilde{Y}\right)\right) - G\left({}^{H}\nabla_{\tilde{Z}}\tilde{X},\tilde{Y}\right) - G\left(\tilde{X},{}^{H}\nabla_{\tilde{Z}}\tilde{Y}\right)$$

denklemini kullanarak,

$$\begin{aligned}
\left({}^{H}\nabla_{{}^{H}Z}G\right)\left({}^{H}X,{}^{H}Y\right) &= {}^{H}Z\left(G\left({}^{H}X,{}^{H}Y\right)\right) - G\left({}^{H}\nabla_{{}^{H}Z}{}^{H}X,{}^{H}Y\right) - G\left({}^{H}X,{}^{H}\nabla_{{}^{H}Z}{}^{H}Y\right)\\
&= {}^{H}Z\left(\left(a+c\right){}^{V}g\left(X,Y\right)\right) - G\left({}^{H}\left(\nabla_{Z}X\right),{}^{H}Y\right) - G\left({}^{H}X,{}^{H}\left(\nabla_{Z}Y\right)\right)\\
&= \left(a+c\right)\left(Z\left(g\left(X,Y\right)\right) - g\left(\nabla_{Z}X,Y\right) - g\left(X,\nabla_{Z}Y\right)\right)\\
&= \left(a+c\right)\left(\left(\nabla_{Z}g\right)\left(X,Y\right)\right),\\
\left({}^{H}\nabla_{{}^{H}Z}G\right)\left({}^{V}X,{}^{H}Y\right) &= {}^{H}Z\left(G\left({}^{V}X,{}^{H}Y\right)\right) - G\left({}^{H}\nabla_{{}^{H}Z}{}^{V}X,{}^{H}Y\right) - G\left({}^{V}X,{}^{H}\nabla_{{}^{H}Z}{}^{H}Y\right)\\
&= {}^{H}Z\left(b\,{}^{V}g\left(X,Y\right)\right) - G\left({}^{V}\left(\nabla_{Z}X\right),{}^{H}Y\right) - G\left({}^{V}X,{}^{H}\left(\nabla_{Z}Y\right)\right)\\
&= b\left(Z\left(g\left(X,Y\right)\right) - g\left(\nabla_{Z}X,Y\right) - g\left(X,\nabla_{Z}Y\right)\right)\\
&= b\left(\left(\nabla_{Z}g\right)\left(X,Y\right)\right),\\
\left({}^{H}\nabla_{{}^{H}Z}G\right)\left({}^{V}X,{}^{V}Y\right) &= {}^{H}Z\left(G\left({}^{V}X,{}^{V}Y\right)\right) - G\left({}^{H}\nabla_{{}^{H}Z}{}^{V}X,{}^{V}Y\right) - G\left({}^{V}X,{}^{H}\nabla_{{}^{H}Z}{}^{V}Y\right)\\
&= {}^{H}Z\left(a^{V}\left(g\left(X,Y\right)\right)\right) - a^{V}g\left(\nabla_{Z}X,Y\right) - ag\left(X,\nabla_{Z}Y\right)\\
&= a\left(\left(\nabla_{Z}g\right)\left(X,Y\right)\right),\\
\left({}^{H}\nabla_{{}^{V}Z}G\right)\left({}^{H}X,{}^{H}Y\right) &= {}^{V}Z\left(G\left({}^{H}X,{}^{H}Y\right)\right) - G\left({}^{H}\nabla_{{}^{V}Z}{}^{H}X,{}^{H}Y\right) - G\left({}^{H}X,{}^{H}\nabla_{{}^{V}Z}{}^{H}Y\right)\\
&= 0,\\
\left({}^{H}\nabla_{{}^{V}Z}G\right)\left({}^{V}X,{}^{H}Y\right) &= {}^{V}Z\left(G\left({}^{V}X,{}^{H}Y\right)\right) - G\left({}^{H}\nabla_{{}^{V}Z}{}^{V}X,{}^{H}Y\right) - G\left({}^{V}X,{}^{H}\nabla_{{}^{V}Z}{}^{H}Y\right)\\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\left({}^{H}\nabla_{{}^{V}Z}G\right)\left({}^{V}X,{}^{V}Y\right)={}^{V}Z\left(G\left({}^{V}X,{}^{V}Y\right)\right)-G\left({}^{H}\nabla_{{}^{V}Z}{}^{V}X,{}^{V}Y\right)-G\left({}^{V}X,{}^{H}\nabla_{{}^{V}Z}{}^{V}Y\right)$$
$$=0\,.$$

elde edilir. Son denklemden eğer ∇ yerine g nin Levi-Civita konneksiyonu seçilirse ${}^{H}\nabla G=0$ olur. Buradan aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 4.3.3.1: (M,g) Riemann manifoldunun Levi-Civita konneksiyonu ∇ nın yatay lifti ${}^{H}\nabla$, (TM,G) de burulmalı bir metrik konneksiyon olur.

Adapte olmuş çatıda ${}^{H}\nabla$ metrik konneksiyonu aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{cases} {}^{H}\nabla_{E_i}E_j=\Gamma_{ij}^{h}E_h, \\ {}^{H}\nabla_{E_i}E_{\bar{j}}=\Gamma_{ij}^{h}E_{\bar{h}}, \\ {}^{H}\nabla_{E_{\bar{i}}}E_j=0, \\ {}^{H}\nabla_{E_{\bar{i}}}E_{\bar{j}}=0. \end{cases}$$

Buradan “metrik konneksiyon ${}^{H}\nabla$ ile G nin Levi-Civita konneksiyonu $\tilde{\nabla}$ nın eşit olması için gerek ve yeter şart M nin flat olmasıdır” denilir.

${}^{H}\nabla$ nın Ricci tensörü adapte olmuş çatıya göre,

$${}^{H}R_{i\,j}=R_{i\,j},\ \ {}^{H}R_{\bar{i}\,j}=0,\ \ {}^{H}R_{i\,\bar{j}}=0,\ \ {}^{H}R_{\bar{i}\,\bar{j}}=0$$

şeklindedir. Burada R_{ij}, M de ∇ nın Ricci tensörüdür (Yano and Ishihara 1973). G metriğine göre ${}^{H}\nabla$ nın skaler eğriliği,

$${}^{H}S=G^{\alpha\beta}\,{}^{H}R_{\alpha\beta}$$
$$=\frac{a}{\alpha}g^{ij}R_{ij}$$
$$=\frac{a}{\alpha}S$$

olur.

Yukarıdaki eşitlikten aşağıdaki teorem ifade edilir.

Teorem 4.3.3.3: (TM, G) de metrik konneksiyon ${}^{H}\nabla$ nın skaler eğriliği olan ${}^{H}S$ nin sıfır olması için gerek ve yeter şart baz manifoldda ∇ Levi-Civita konneksiyonunun skaler eğriliğinin sıfır olmasıdır.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu tezde $G = a^{S}g + b^{H}g + c^{V}g$ formundaki Riemann metriğine sahip tanjant demette bazı geometrik vektör alanları incelenmiş ve G metriği ile ilgili bazı sonuçlara yer verilmiştir.

İlk olarak, (TM, G) de afin Killing ve Killing vektör alanlarının karakterizasyonu yapıldı. $\tilde{X}$ vektör alanının afin Killing vektör alanı olması için gerek ve yeter şartın $\tilde{X} = {}^{H}B + {}^{V}D + \gamma C + {}^{*}A$ şeklinde olması ve belirtilen $i - viii$ (bkz. Sayfa 39) şartlarının sağlanması olduğu gösterilip bazı sonuçlar yazıldı. Benzer şekilde $\tilde{X}$ nın Killing vektör alanı olması için gerek ve yeter şartlar belirlendi.

İkinci olarak, (TM, G) de fibre koruyan projektif vektör alanlarının karakterizasyonu yapıldı. $\tilde{X}$ fibre koruyan projektif vektör alanı olması için gerek ve yeter şartın $\tilde{X} = {}^{H}V + {}^{V}B + \gamma A$ şeklinde olması ve belirtilen $i - viii$ (bkz. Sayfa 49-50) şartları sağlanması olduğu gösterildi. Ayrıca fibre koruyan projektif vektör alanları ile ilgili bazı sonuçlar yazıldı.

Üçüncü olarak, (M, g) ve (TM, G) nin geodezikleri arasında çeşitli ilişkiler verildi. (M, g) üzerinde bir geodeziğin yatay liftinin (TM, G) üzerinde geodezik olmayacağı ve (M, g) üzerinde herhangi bir geodeziğin natural liftinin (TM, G) üzerinde daima geodezik olacağı gösterildi.

Daha sonra, (TM, G) nin lokal konformal flat olması için gerek ve yeter şart, M nin lokal flat ve G Riemann metriğinin $G = a\left({}^{S}g + {}^{H}g\right) + c^{V}g$ formunda olması gerektiği gösterildi.

Son olarak, (M,g) Riemann manifoldunun Levi-Civita konneksiyonu ∇ nın yatay lifti olan ${}^H\nabla$ nın (TM,G) de burulmalı metrik konneksiyon olduğu gösterildi. Ayrıca ${}^H\nabla$ nın skaler eğriliğinin sıfır olması için gerek ve yeter şartın baz manifoldda ∇ Levi-Civita konneksiyonunun skaler eğriliğinin sıfır olması olduğu gösterildi.

KAYNAKLAR

Abbasi, M.T.K. and Sarih, M., 2005. On Riemannian $g-$natural metrics of the form $a^{S}g+b^{H}g+c^{V}g$ on the tangent bundle of a Riemannian manifold (M,g). Mediterr. J. Math, 2, no. 1, 19-43.

Abbasi, M.T.K., 2004. Note on the classification theorems of $g-$natural metrics on the tangent bundle of a Riemannian manifold (M,g). Comment. Math. Univ. Carolin, 45, no.4, 12-29.

Bishop, R. L. and Goldberg, S., 1968. Tensör Analysis on Manifolds. The Macmillan Company, New York, p. 19-135.

Dombrowski, P., 1962. On the geometry of the tangent bundle. J. Reine Angew, 210, 73–88.

Gudmundsson, S. and Kappos, E., 2002. On the Geometry of the Tangent Bundles. Expo. Math, 20, 1-41.

Hasegawa, I. and Yamauchi, K., 2003. İnfinitesimal conformal transformations on tangent bundles with the lift metrik $I+II$. Sci. Math. Jpn, 57, no.1, 129-137.

Kobayashi, S., 1955. A theorem on the affine transformation group of a Riemannian manifold. Nagoya Math. J, 9, 39-41.

Kobayashi, S. and Nomızu, K., 1963. Foundations of Differential Geometry. Interscience Publishers, 1, p. 26-38.

Kowalski, O., 1971. Curvature of the induced Riemannian metric on the tangent bundle of a Riemannian manifold. J. Reine Angew. Math, 250, 124-129.

Musso, E. And Tricerri, F., 1988. Riemannian metrics on tangent bundles. Ann. Mat. Pura. Appl. , 150, 4, 1-19.

Oproiu, V. and Papaghiuc, N., 2004. Some classes of almost anti-Hermitian structures on the tangent bundle. Mediterr. J. Math, 1, no.3, 269-282.

Oproiu, V., 1999a. Some new geometric structures on the tangent bundle. Publ Math. Debrecen, 55, 261-281.

Oproiu, V., 1999b. A locally symmetric Kaehler Einstein structure on the tangent bundle of a space form. Beitrage Algebra Geom. , 40, no. 2, 363-372.

Oproiu, V., 2001. A Köhler Einstein structure on the tangent bundle of a space form. Int. J. Math. Math. Sci. , 25, no.3, 183-195.

Salimov, A. A. ve Mağden, A., 2008. Diferensiyel Geometri. Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

Sasaki, S., 1958. On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds. Tohoku Math. J., 10, 338-358.

Şahin, B., 2013. Manifoldların diferensiyel geometrisi. Nobel yayıncılık, Ankara.

Tanno, S., 1974. Infinitesimal isometries on the tangent bundles with complete lift metric. Tensor (N.S.) 28, 139-144.

Yamauchi, K., 1995. On infinitesimal conformal transformations of the tangent bundles with the metric I+III over Riemannian manifold. Ann Rep. Asahikawa. Med. Coll., Vol.16, 1-6.

Yamauchi, K., 1999. On infinitesimal projective transformations of the tangent bundles with the metric $II+III$. Ann. Rep. Asahikawa. Med. Coll., 20, 67-72.

Yano, K. and Ishihara S., 1973. Tangent and Cotangent Bundles. Marcel Dekker, Inc., New York.

Yano, K., 1965. Differential Geometry on Complex and Almost Complex Spaces. Macmillan comp., New York.

ÖZGEÇMİŞ

1980 yılında Erzurum'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Erzurum'da tamamladı. Lise öğrenimini Ilıca Yavuz Selim Anadolu Öğretmen Lisesi'nde tamamladı. 1999 yılında girdiği Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2004 yılında mezun oldu. Mezun olduktan sonra çeşitli dershanelerde matematik öğretmeni olarak görev yaptı. Ocak 2010 tarihinde Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Geometri Bilim dalında yüksek lisans eğitimine başladı. Ağustos 2011 tarihinde yüksek lisans eğitimini tamamladıktan sonra aynı alanda doktora eğitimine başladı.

2009 yılında Iğdır Üniversitesi, Iğdır Meslek Yüksekokulunda öğretim görevlisi olarak başladığı görevine halen devam etmektedir.