HİPER KÜRESEL HORMONİKLER

Nursefa YAKUPOĞLU

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalı
Yrd. Doç. Dr. Arzu AYKUT
2014

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HİPER KÜRESEL HORMONİKLER

Nursefa YAKUPOĞLU

MATEMATİK ANA BİLİM DALI
Uygulamalı Matematik Bilim Dalı

ERZURUM
2014

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAY FORMU

HİPER KÜRESEL HORMONİKLER

Yrd. Doç. Dr. Arzu AYKUT danışmanlığında, Nursefa YAKUPOĞLU tarafından hazırlanan bu çalışma 18/07/2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı – Uygulamalı Matematik Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak **oybirliği/oy çokluğu (…/…)** ile kabul edilmiştir.

Başkan	: Doç. Dr. Songül DUMAN	*İmza*	:
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Arzu AYKUT	*İmza*	:
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Yeşim SARAÇ	*İmza*	:

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu 28/08/2014 tarih ve 34/1087 nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. İhsan EFEOĞLU
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

HİPERKÜRESEL HARMONİKLER

Nursefa YAKUPOĞLU

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Arzu AYKUT

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş olarak ele alındı. İkinci bölümde; potansiyel fonksiyonu, Legendre katsayıları, Laplace katsayıları, Harmonik Fonksiyonlar, Katı küresel harmonikler, Kelvin Teoremi, Yüzey küresel harmonikleri, hipergeometrik fonksiyon tanımlandı. Legendre denklemi ve geliştirilmiş Legendre denklemi tanıtıldı. $\sum$ harmonik homogen polinomlar tanıtıldı. Ayrıca, Δ operatörünün bazı özellikleri verildi. Üçüncü bölümde; $\sum$ hiper küresel harmonikler ele alındı Dördüncü bölümde $\Theta \boldsymbol{j}$ ve $\boldsymbol{\phi}$ Fonksiyonlarının bazı özelikleri ele alındı. Beşinci bölümde. Y_{μ} Fonksiyonunun bazı özellikleri sonuç bölümü olarak ele alındı.

2014, 92 sayfa

Anahtar Kelimeler: Harmonik fonksiyon, Katı Küresel Harmonik, Yüzey Küresel Harmonik, Homogen Fonksiyon, Laplace Operatörü, Poliharmonik Fonksiyon, Legendre Diferansiyel Denklemi, $\sum$ Harmonik Homogen Polinom, $\sum$ Hiper küresel fonksiyon.

ABSTRACT

Master Thesis

HYPER SPHERICAL HARMONICS

Nursefa YAKUPOĞLU

Atatürk University
Graduate School of Natural and AppliedSciences
Department of Mathematic
Department of Applied Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Arzu AYKUT

This thesis consists of five chapters. The First chapter was taken as input. In the second chapter, potential function, Legendre coefficients, Loplace coefficients, solid spherical hormonics, surface spherical hormonics, hypergeometric functionsare given Legendre equation and Legendre associated equation are explained. In addition, full degree spherical hormonics, zonal, tesseral and sectoral hormonics are defined, some properties of homogeneous partial differential operetors are obtained. It is given some important relations between this kind of operators and spherical harmonics. In addition, after operatör Δ, homogeneous polyharmonic functions are given. $\sum$ harmonic homogeneous polynomials are given.In the third chapter, $\sum$ hyper spherical harmonics are introduced. In the fourth chapter, some characteristics of $\sum$ hyper spherical functions are explanied. In the fifth chapter was taken as a result.

2014, 92 pages

Keywords: Harmonic function, Solid Spherical Harmonics, Surface Spherical Harmonics, Homogen Function, Laplace Operator, Polyharmonic Function, Legendre Differantial Equation, $\sum$ Harmonic Homogeneous Polynomial, $\sum$ Hyper Spherical Function.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Öncelikle bu çalışmamda tezinden yararlandığım merhum Sayın Prof. Dr. İhsan DAĞ'ı rahmetle anıyorum.

Bu çalışmanın gerçekleşmesinde her türlü desteği ve yardımı benden esirgemeyen saygıdeğer danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Arzu AYKUT'a ve matematik bölümünün tüm öğretim elemanlarına teşekkürü bir borç bilirim.

Tez çalışmalarım sırasında bana yardımcı olan saygıdeğer hocam Sayın Doç. Dr. Murat İŞCAN'a, kardeşim Sayın Abdullah YAKUPOĞLU'ya, Sayın Doç. Dr. Yahya YEŞİLYURT'a, desteklerini benden esirgemeyen sevgili eşim Nur YAKUPOĞLU'ya ve kızım İpek Aysu YAKUPOĞLU'ya çok teşekkürlerimi sunarım.

Nursefa YAKUPOĞLU

Temmuz, 2014

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\nabla^2 = \Delta$	Laplace Operatörü
$B\ (x,y)$	Beta Fonksiyonu
C	Sürekli Fonksiyonların Sınıfı
$F\ (\alpha,\beta,\gamma;x)$	Hipergeometrik Fonksiyon
$P_n\ (x)$	Legendre Fonksiyonu
$P_n^m\ (x)$	n inci dereceden m inci basamaktan, geliştirilmiş Legendre Fonksiyonu
$Q_n\ (x)$	n inci dereceden İkinci Çeşit Legendre Fonksiyonu
$Q_n^m\ (x)$	n inci dereceden m inci basamaktan, geliştirilmiş Legendre Fonksiyonu
$V_n\ (x,y,z)$	n inci dereceden homojen fonksiyon
$X_n\ (\theta,\varphi)$	n inci dereceden yüzey küresel harmonik
Y_μ	$\sum$ Hiper küresel fonksiyon
$\Gamma\ (x)$	Gamma Fonksiyonu

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Laplace (1782) yılında bir inceleme yaparak ve 1785 yılında bu incelemesini yayınladı. Green tarafından bu çalışma Potansiyel Fonksiyon olarak adlandırıldı. Laplace potansiyel teoremi hakkında bilgi edinen Legendre, sonsuz bir seri biçimindeki potansiyelin tek bir teriminin seri açılımını araştırdı (1782 ve öncesinde) ve böylece Legendre katsayıları olarak bilinen fonksiyonların keşfine sebep oldu. Laplace, potansiyel fikrinin ileri sürülmesinden sonra, Legendre'ninkinden daha genel bir bakış açısından küresel harmonikleri inceledi. Thamson ve Tait, kendilerince iyi bilinen Treatese on Natural Philosophy (Cambridge Univ. Press 1879)'da küresel harmonikleri tanımladılar.

Harmonik fonksiyon, herhangi bir noktadaki değeri, bu noktanın çevresindeki herhangi bir çember üzerindeki değerlerinin aritmetik ortalamasına eşit olan iki değişkenli ve bu çemberin içinde tanımlanmış matematiksel fonksiyondur. Bu ortalama içinde sonsuz sayıda nokta bulunduğu için fonksiyon, sonsuz bir toplamı ifade eden integral yardımıyla bulunur. Fizikte harmonik fonksiyonlar bir bölgede, örneğin sıcaklığın ya da elektrik yük dağılımının bölgenin her noktasında sabit bir değerde kalmasına karşılık gelen denge koşullarını tanımlar.

Potansiyel teorinin temel denklemi olan Laplace denklemi ve Harmonik fonksiyonlar Uygulamalı ve Teorik olan Fizikteki kullanım alanlarının yanında Matematiğinde hemen her alanında önemli bir yer tutmuş ve ileri araştırmalara temel teşkil etmiştir.

Harmonik fonksiyonlar, potansiyel teorinin esas denklemi olan Laplace denkleminin çözümleri olarak da tanımlanabilirler. Bir harmonik fonksiyonun belirlediği yüzeyin dış bükeyliği sıfırdır. Bu nedenle bu fonksiyonların, tanımladıkları bölge içinde maksimum yâda minimum değer almamak gibi önemli bir özelliği vardır. Harmonik fonksiyonlar analitiktir. Başka bir deyişle bütün türevleri vardır ve sonsuz sayıda terim içeren, kuvvet serisi olarak adlandırılan polinomlarla ifade edilebilirler.

Üç boyutlu uzaydaki kütle çekimi ve elektrik alanlarının, ayrıca magnetik alanların ya da bazı akışkan akışı türlerinde oluşan alanların incelenmesinde küresel koordinat sistemi kullanıldığında küresel harmonik fonkisyonlar ortaya çıkar. Katı küresel harmonikler ve Yüzey küresel harmonikler olarak sınıflandırılırlar. Katı küresel harmonikler; R_n (x,y,z), bir kürenin içindeki bütün noktalar için bir değeri bulunan n. dereceden özel polinomlardır. Yüzey küresel harmonikler, yalnızca küre yüzeyinde bir fonksiyon tanımlar. Bu iki harmonik türü arasında bir ilişki mevcuttur.

Harmonik fonksiyonlar çok geniş bir kullanım alanına sahip olmakla beraber, reel bölgelerde genel çözümü analitik olarak elde edilemeyen Laplace denkleminin amacına uygun olarak kısmi çözümlerini elde edebilmek için verilmiş pek çok özel yöntem bulunmaktadır.

Küresel koordinat sisteminde Laplace denklemini sağlayan çözümlerin geniş bir sınıfı da küresel harmoniklerdir. Üç boyutlu uzayda bir küresel harmonik, x,y,z değişkenlerinin homogen bir fonksiyonu olup, $V(x,y,z)$, λ. dereceden homogen bir küresel harmonik fonksiyon ise;

$$x.V_x + y.V_y + z.V_z = \lambda.V(x,y,z) \qquad \text{Euler denklemi} \qquad (1.1)$$

$$\Delta V = V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} = 0 \qquad \text{Laplace denklemi} \qquad (1.2)$$

aynı zamanda gerçeklenirler. Harmonik fonksiyonlar teorisin bilinen önemli bir sonucu da, herhangi bir harmonik fonksiyonun küresel harmoniklerin bir serisi olarak ifade edilebilmesidir.

Laplace operatörünün ardışık uygulanmasıyla elde edilen denkleme poliharmonik denklem ve bu denklemi sağlayan fonksiyonlara da poliharmonik fonksiyonlar denilmektedir. Homogen poliharmonik fonksiyonları, küresel harmonikler cinsinden veren çeşitli açılım formülleri bulunmaktadır.

Kart (1970), ∑-Homogen Polinomlar ile ilgili araştırmalar yapmıştır.

$$\sum_{i=1}^{q}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\frac{k_i}{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\right)V=0 \tag{1.3}$$

denklemini gerçekleyen homogen polinomlara ∑-Harmonik Homogen Polinomlar denir. Dağ (1973) çalışmasında, ∑ - Hiper Küresel Harmonikleri inceledi.

$$\sum_{i=1}^{n+2}\left(\frac{\partial}{\partial x_i^2}+\frac{k_i}{x_i}\frac{0}{\partial x_i}\right)V(x_1,x_2,\cdots x_{n+2})$$
$$=0,(k_i\in R) \tag{1.4}$$

denkleminin μ. dereceden homogen polinom olan bir çözümü P_μ $(x_1, x_2,\ldots, x_{n+2})$ harmonik homogen polinomu küresel koordinatlar cinsinden ifade edilirse oluşan Y_μ fonksiyonuna ∑- hiperküresel fonksiyon denir.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde, gerekli olan bazı kavram ve bilgiler verilecektir.

2.1. Potansiyel Fonksiyonu

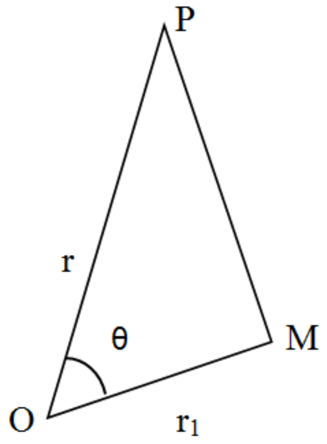
Laplace 1782 yılında bir inceleme yaptı ve 1785 yılında bu incelemesini yayınladı. Gösterdi ki M_1, M_2, M_3,... noktalarında μ_1, μ_2, μ_3,... kütleli parçacıkların bir cümlesine ait olan bir P noktasındaki yer çekimi kuvveti,

$$V = \frac{\mu_1}{PM_1} + \frac{\mu_2}{PM_2} + \frac{\mu_3}{PM_3} + \ \dots \qquad (2.1)$$

fonksiyonunun diferansiyellenmesi ile elde edilebilmektedir. Bir müddet sonra bu fonksiyon, Green tarafından sistemin P noktasındaki potansiyeli olarak adlandırıldı. Daha sonra evrenselleşen bu adlandırma günümüzde de kullanılmaktadır.

2.2. Legendre Katsayılar

Laplace potansiyel teoremi hakkında bilgi edinen Legendre, sonsuz bir seri biçimindeki potansiyelin tek bir teriminin seri açılımını araştırdı (1782 ve öncesinde) ve böylece Legendre katsayıları olarak bilinen fonksiyonların keşfine sebep oldu.



Şekil 2.1. O orijin noktası olsun. (Şekil 2.1)'de, r ile OP nin, r_1 ile OM nin uzunlukları, θ ile POM açısı ve μ ile cosθ gösterilsin. O takdirde;

$$\frac{1}{PM} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr_1\mu + r_1^2}}$$

biçimindedir. Eğer $r < r_1$ise bu ifade r nin artan kuvvetleri cinsinden

$$\frac{1}{PM} = \frac{1}{r_1}\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 - 2\frac{r}{r_1}cos\theta}}$$

$$= \frac{1}{r_1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{r_1}\right)^n P_n\ (cos\ \theta)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n}{{r_1}^{n+1}}P_n(cos\ \theta)$$

şeklinde ya da daha açık olarak,

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr_1\,\mu + r_1^2}} = P_0\ (\mu)\frac{1}{r_1} + P_1\ (\mu)\frac{r}{r_1^2} + P_2\ (\mu)\frac{r^2}{r_1^3} + \ldots \tag{2.2}$$

biçiminde yazılabilir. Burada $P_0(\mu)$, $P_1(\mu)$, $P_2(\mu), \ldots$ ler μ nün polinomları olup Legendre katsayıları olarak bilinirler. Örneğin;

$$P_0(\mu) = 1 \, , P_1(\mu) = \mu \; , P_2(\mu) = \; \frac{3\mu^2-1}{2}, P_3\,(\mu) \; = \frac{5\mu^3-3\mu}{2}$$

şeklindedir. Eğer $r > r_1$ ise, $\frac{1}{PM}$ aşağıdaki şekilde seriye açılabilir.

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr_1\,\mu + r_1^2}} = P_0(\mu)\frac{1}{r} + P_1(\mu)\frac{r_1}{r^2} + P_2(\mu)\frac{r_1^2}{r^3} + \; \ldots \tag{2.3}$$

$P_n(\mu)$ katsayıları n inci dereceden Legendre Katsayıları veya n inci dereceden Legendre Polinomları olarak adlandırılır. Legendre katsayıları yüzey küresel harmoniklerin özel durumlarına karşılık gelirler.

2.3. Laplace Katsayıları

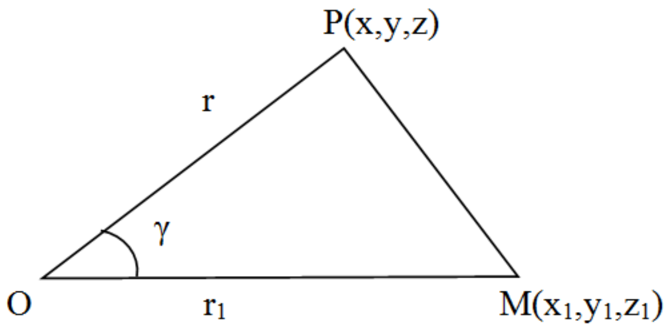
Laplace, potansiyel fikrinin ileri sürülmesinden sonra, Legendre'ninkinden daha genel bir bakış açısından küresel harmonikleri inceledi. O nun orijin noktası olduğu Şekil 2.1'de P ve M nin dik koordinatları (x, y, z) ve (x_1, y_1, z_1) olsun. Eğer (r, θ, Φ) ve (r_1, θ_1, Φ_1) bu noktalara karşılık gelen kutupsal koordinatlar iseler,

$$x \; = \; r\,sin\,\theta\;cos\,\Phi \;, \qquad x_1 \,=\, r_1\;\sin\theta_1\;\,cos\,\Phi_1$$

$$y \; = \; r\,sin\,\theta\;sin\,\Phi \;, \qquad y_1 \;=\; r_1\;\sin\theta_1\;\;\sin\Phi_1$$

$$z \; = \; r\,cos\,\theta \;, \qquad z_1 \,=\, r_1\;\,cos\,\theta_1$$

şeklinde yazılabilir.



Şekil 2.2. γ ile POM açısı, $\boldsymbol{r}$ ile OP nin, $\boldsymbol{r_1}$ ile OM nin uzunlukları gösterilsin.

Vektörler için skaler çarpım ifadesinden

$$\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OM} = |\overrightarrow{OP}|.|\overrightarrow{OM}|\cos\gamma$$

$$= r\,r_1\,\cos\gamma$$

olup buradan,

$$\cos\gamma = \frac{1}{rr_1}(\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OM}) = \frac{1}{rr_1}(xx_1 + yy_1 + zz_1)$$

$$= \frac{1}{rr_1}\,(rr_1\sin\theta\;\sin\theta_1\cos\Phi\;\cos\Phi_1$$

$$+ rr_1 sin\theta\; sin\theta_1\sin\Phi\;\sin\Phi_1 + rr_1\cos\theta\;cos\theta_1)$$

$$= sin\theta\; sin\theta_1(\cos\Phi\;\cos\Phi_1 + \sin\;\Phi\sin\;\Phi_1) + \cos\theta\;cos\theta_1$$

eşitliği, yani

$$\cos\;\gamma = \cos\Phi\;\cos\Phi_1 + \sin\;\theta\;\sin\;\theta_1\cos(\Phi - \Phi_1) \tag{2.4}$$

denklemi elde edilir. $\cos\gamma$ nın bu değeri dikkate alındığında $\frac{1}{PM}$ için elde edilen (2.2) ve (2.3) serileri aşağıdaki biçimde yazılabilirler.

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr_1\cos\gamma + r_1^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n\,(cos\,\gamma)\,\frac{r^n}{r_1^{n+1}}\; r < r_1\; ise \tag{2.5}$$

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr_1\cos\gamma + r_1^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n\,(cos\,\gamma)\,\frac{r_1^n}{r^{n+1}}\; r > r_1\; ise \tag{2.6}$$

$P_n(\cos\gamma)$ fonksiyonu θ ve Φ değişkenlerinin bir fonksiyonu olup "n inci dereceden Laplace katsayısı" adını alır. $\theta_1 = 0$ olduğu zaman bu fonksiyon $P_n(\cos\theta)$ Legendre katsayısına karşılık gelir.

2.4. Harmonik Fonksiyonlar

$$D\;\subset\;R^n \text{ de}\qquad \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial {X_1}^2} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial {X_n}^2} = 0 \tag{2.7}$$

Laplace denklemini sağlayan $V \epsilon\, C^2\,(D)$ fonksiyonuna D de harmoniktir veya harmonik fonksiyondur denir (Çevik 2004).

Bir fonksiyonun harmonik olması için sadece Laplace denklemini sağlaması yetmez. Harmonik fonksiyonlar Laplace denklemini sağlayan ve de kendisi ve ikinci mertebeden kısmi türevleri sürekli olan fonksiyonlar olarak tanımlanır.

$$u = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a_0$$

şeklindeki bütün lineer fonksiyonlar ve

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i=j}}^{n} a_{ij} = 0$$

olmak üzere

$$V = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

şeklindeki ikinci dereceden homogen bütün polinomlar R^n de harmoniktir.

$V, D \subset R^n$ de Laplace denkleminin sürekli bir çözümü ise bu durumda V fonksiyonu D de analitiktir (Çevik 2004).Buna göre, Laplace denkleminin çözümü olarak tanımlanan ve $C^2\,(D)$ de sürekli olması büyük bir fark göstermeyen harmonik fonksiyonlar gerçekten analitiktir.

Çevik 2004'deki çalışmasında temel harmonik fonksiyonları ve değişkenlerine ayırma yöntemi ile yeni harmonik fonksiyonların elde edildiğini belirtmiştir. R^3 de orijine yerleştirilen birim yükten kaynaklanan herhangi $(x, y, z) \neq (0,0,0)$ noktasındaki elektrostatik potansiyel ${}^{1}\!/_{r}$ ile orantılıdır. Burada $r,\ \vec{r} = (x, y, z)$ nin orijine uzaklığı olup $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ dir. Fizikten bilinmektedir ki, yüklerin dağılımından kaynaklanan potansiyel, yüksüz uzayın her noktasında Laplace denklemini gerçekler.

$$V = {}^{1}\!/_{r}\ ,\ r \neq 0 \tag{2.8}$$

fonksiyonu R^3 de orijin dışında harmoniktir. Orijine göre küresel simetrik olan bu fonksiyon, orijin merkezli ve r yarıçaplı küre üzerindeki noktalarda sadece r yarıçapına bağlı olup θ ve Φ açısal değişkenlerine bağlı değildir. r ye yarıçapsal anlamında radyal değişken adı verilmektedir. r radyal değişkenine bağlı olan tüm harmonik fonksiyonları bulabilmek için, Δ Laplace operatörünün R^n de küresel koordinatlar cinsinden ifadesine ihtiyaç vardır. Laplace operatörü, R^2 de

$$\Delta V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \tag{2.9}$$

ve $n > 2$ için R^n de

$$\Delta V = \frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1}\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\square_n V \tag{2.10}$$

ifadelerine sahiptir. Burada $\square_n$ sadece açısal değişkenlerle ilgili kısmi türevler içeren ikinci mertebeden diferansiyel operatördür.

R^3 de küresel koordinatlarda, $V\ (r,\theta,\Phi) = R(r)\ Y(\theta,\Phi)$ gösterimine sahip $V\ (r,\theta,\Phi)$ harmonik fonksiyonlarını bulalım.

$$\square_3 V = \frac{1}{\sin\emptyset}\frac{\partial}{\partial\emptyset}\left(\sin\emptyset\frac{\partial V}{\partial\emptyset}\right) + \frac{1}{sin^2\emptyset}\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}$$

olmak üzere $n = 3$ için küresel koordinatlardaki Laplace denklemi

$$\Delta V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\square_3 V = 0$$

şeklindedir. $V(r,\theta,\Phi) = R(r)\ Y(\theta,\Phi)$ ve türevleri Laplace denkleminde yerine yazılıp düzenlenirse,

$$\frac{(r^2R')\ '}{R} = \frac{\square_3 Y}{Y} = \mu\ (\ \mu\epsilon R)$$

denklemi bulunur. Buradan

$$(r^2 R')' - \mu R = 0 \tag{2.11}$$

$$\square_3 Y + \mu Y = 0 \tag{2.12}$$

denklem çifti elde edilir.α_1 ve $\alpha_2, \alpha(\alpha + 1) - \mu = 0$ denleminin kökleri olmak üzere, (2.4.5) denkleminin lineer bağımsız iki çözümü r^{α_1} , r^{α_2} şeklindedir. (2.4.6) denkleminin çözümü oldukça zordur. Kabul edelim ki, R^3 de orijine yerleştirilmiş S (0,1) birim küre yüzeyi üzerinde herhangi bir noktanın koordinatları (θ, Φ) olsun. (2.4.6) denkleminin tüm çözümlerini bulmak yerine bu birim küre yüzeyi üzerinde $Y\ (\theta, \Phi)$ çözümlerini bilmek yeterlidir. Bu tip çözümler θ ya göre 2π peryotlu olmalı ve kürenin kutuplarında ($\theta = 0\ ve\ \theta = \pi), \theta$ dan bağımsız olan limitlere yaklaşmalıdır. μ sabitleri $\mu_n = n\,(n + 1)$; $n = 0, 1, 2, ...$ değerlerinden birine eşit olduğu zaman (2.4.6) denkleminin bu koşulları sağlayan aşikâr olmayan çözümleri vardır. Böyle μ_n ler için (2.4.6) in

$$Y_n^{(k)}\ (\theta, \Phi) \qquad ;\ k = 1, 2, \ldots, 2n + 1\ ;\ n = 0, 1, \ldots$$

şeklinde $2n + 1$ tane lineer bağımsız çözümü vardır (Courant-Hilbert 1953).

2.5. Katı Küresel Harmonikler

Thamson ve Tait, kendilerince iyi bilinen Treatese on Natural Philosophy (Cambridge Univ. Press, 1879) da küresel harmonikleri aşağıdaki gibi tanımladılar.

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \tag{2.13}$$

Laplace denkleminin; x, y, z değişkenlerine göre n inci dereceden homogen herhangi bir V_n çözümü n inci dereceden katı küresel harmonik olarak adlandırılır. n derecesi herhangi bir reel sayı olabilir ve fonksiyonun rasyonel olması gerekmez.

Örnek: r^{-1}, 1, $ax+by+cz$, x^2-y^2+yz , $(z+ix)^n$ olmak üzere bu ifadeler sırasıyla $-1, 0, 1, 2, n$ inci dereceden katı küresel harmoniklerdir.

Çözüm: a) : r^{-1}, -1 inci dereceden bir katı küresel harmoniktir. Gerçekten $r^{-1} = V$ denilirse,

$$V = r^{-1} = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} \text{ ise} \qquad V_X = -\frac{1}{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}\,2x = -x\,r^{-3}$$

$$V_{XX} = \frac{3}{4}\,(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}\,4x^2 - \,(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}} = r^{-5}\,(3x^2-r^2)$$

$$V_{yy} = \frac{3}{4}\,(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}\,4y^2 - \,(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} = r^{-5}\,(3y^2-r^2)$$

$$V_{zz} = \frac{3}{4}\,(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}\,4z^2 - \,(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} = r^{-5}\,(3z^2-r^2)$$

şeklinde olup,

$$\nabla^2 V = V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} = r^{-5}\,(3(x^2+y^2+z^2) - 3r^2) = 0$$

elde edilir.

b) $u = 1$ denirse,

$$u_{xx} = 0\,, u_{yy} = 0,\ u_{zz} = 0 \ \text{ olup } u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 \ \text{ elde edilir.}$$

c) $u = ax + by + cz$ denirse,

$$u_{xx} = 0\,, u_{yy} = 0,\ u_{zz} = 0 \ \text{ olup } u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 \text{ elde edilir.}$$

d) $x^2 - y^2 + \text{yz} = \text{u}$ denirse,

$$u_{xx} = 2\,, u_{yy} = -2,\ u_{zz} = 0 \text{ olup } u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 \text{ elde edilir.}$$

e) $V = (z + ix)^{\,n}$ denirse,

$$V_x = n(z + ix)^{\,n-1}.\, i \;\; V_{xx} = -n(z + ix)^{\,n-2} \;\; , V_{yy} = 0,$$

$$V_{zz} = n(z + ix)^{\,n-2}$$

olup

$$\nabla^2 V = V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} = 0 \text{ elde edilir.}$$

2.6. Teorem (Kelvin Teoremi)

Eğer V_n n inci dereceden bir katı küresel harmonik ise, o takdirde $r^{-2n-1}V_n$, $-2n - 1$ inci dereceden bir katı küresel harmoniktir.

İspat: m belirlenecek bir reel sabit olmak üzere, (2.5.1) da $V = r^m V_n$ yazılırsa

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \qquad ve \qquad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2}\,(x^2 + y^2 + z^2)^{\,-\frac{1}{2}}\, 2x = \frac{x}{r}$$

olduklarından,

$$\frac{\partial r}{\partial x} = r^m \frac{\partial v_n}{\partial x} + m\, r^{m-2} x\, V_n$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = m\, r^{m-1}\, x\, r^{-1} \frac{\partial V_n}{\partial x} + r^m \frac{\partial^2 V_n}{\partial x^2}$$

$$+ m(m-2)r^{m-3}x^2\, r^{-1}V_n + m\, r^{m-2}\, V_n + m\, r^{m-2}x\frac{\partial V_n}{\partial x}$$

$$= r^m\frac{\partial^2 V_n}{\partial x^2} = 2m\, r^{m-2}\, x\,\frac{\partial v_n}{\partial x} + m(m-2)r^{m-4}x^2\, V_n + m\, r^{m-2}V_n$$

olup simetriden dolayı,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = r^m\frac{\partial^2 V_n}{\partial y^2} + 2m\, r^{m-2}\, y\,\frac{\partial V_n}{\partial y} + m(m-2)r^{m-4}y^2V_n + m\, r^{m-2}V_n$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = r^m\frac{\partial^2 V_n}{\partial z^2} + 2m\, r^{m-2}z\frac{\partial V_n}{\partial z} + m(m-2)r^{m-4}z^2V_n + m\, r^{m-2}V_n$$

elde edilir. Diğer taraftan Euler teoreminden (1.1) dolayı

$$x\frac{\partial V_n}{\partial x} + y\frac{\partial V_n}{\partial y} + z\frac{\partial V_n}{\partial z} = n\, V_n$$

olduğu dikkate alınır ve de $\nabla^2 V_n$=0 olduğu gözönünde tutulursa

$$\nabla^2(r^m V_n) = r^m\frac{\partial^2 V_n}{\partial x^2} + 2m\, r^{m-2}\, x\,\frac{\partial V_n}{\partial x} + m(m-2)r^{m-4}x^2V_n + m\, r^{m-2}V_n$$

$$+ r^m\frac{\partial^2 V_n}{\partial y^2} + 2m\, r^{m-2}\, y\,\frac{\partial V_n}{\partial y} + m(m-2)r^{m-4}y^2V_n + m\, r^{m-2}V_n$$

$$+ r^m\frac{\partial^2 V_n}{\partial z^2} + 2m\, r^{m-2}\, z\,\frac{\partial V_n}{\partial z} + m(m-2)r^{m-4}z^2V_n + m\, r^{m-2}V_n$$

$$= r^m\left(\frac{\partial^2 V_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_n}{\partial z^2}\right) + 2m\, r^{m-2}\left(x\frac{\partial V_n}{\partial x} + y\,\frac{\partial V_n}{\partial y} + z\,\frac{\partial V_n}{\partial z}\right)$$

$$+\, m(m-2)r^{m-4}(x^2+y^2+z^2)V_n + 3\, m\, r^{m-2}V_n$$

$$= 2m\, r^{m-2}n\, V_n + m(m-2)r^{m-2}V_n + 3m\, r^{m-2}V_n$$

$$= m(m+2n+1)r^{m-2}V_n$$

elde edilir.

Böylece, $r^m V_n$ nin Laplace denklemini sağlayabilmesi için m değerinin sıfır veya $-2n-1$ olması gerekir. O halde $r^{-2n-1}V_n$ bir katı küresel harmoniktir.

Örnek 2.6.1 1 ve $1/r$ fonksiyonları sırasıyla 0. $ve\ -1$. dereceden; x ve x/r^2 fonksiyonları sırasıyla 1. ve -2. dereceden katı küresel harmoniklerdir.

Laplace denkleminin (u, ϕ, z) silindirik koordinatlardaki ifadesinin bulunması istenirse,

$$x = u \cos \phi, \qquad y = u \sin \phi, \qquad z = z$$

dönüşümü kullanılır ve

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + \frac{1}{u}\frac{\partial V}{\partial u} + \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \qquad (2.14)$$

ifadesi elde edilir.

Laplace denklemini (r, θ, ϕ) küresel koordinatlarında ifade edilebilmesi için (2.14) denklemine

$$z = r \cos \theta \;, \qquad u = r \sin \theta$$

dönüşümünün uygulanması yeterlidir ve bu yapılırsa,

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0 \tag{2.15}$$

ifadesi elde edilir. (2.15) denklemini r^2 ile çarpılırsa,

$$r^2\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + 2r\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\cot\theta}{sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{1}{sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$$

ifadesi elde edilir.

$$\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) = \frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2} + \frac{cos\theta}{sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\theta}$$

ve

$$r\frac{\partial^2 (rV)}{\partial r^2} = r^2\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + 2r\frac{\partial V}{\partial r}$$

oldukları dikkate alınırsa yukarıdaki ifade,

$$r\frac{\partial^2 (rV)}{\partial r^2} + \frac{1}{sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0 \tag{2.16}$$

şeklinde yazılabilir.

$V_n = r^{\mathrm{n}}U_n$, n inci dereceden bir katı küresel harmonik olsun, U_n yalnızca θ ve ϕ değişikliklerinin bir fonksiyonudur. Eğer (2.6.3) ifadesinde V yerine $r^{\mathrm{n}}U_n$ yazılır ve r^{n} ile bölünürse r^{n} ortadan kalkar ve (2.16) denklemi,

$$n(n+1)U_n + \frac{1}{sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial U_n}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{sin^2\theta}\frac{\partial^2 U_n}{\partial\square^2} = 0 \qquad (2.17)$$

şekline dönüşür. Bu denklemde eğer $cos\theta$ yerine μ yazılırsa,

$$n(n+1)U_n + \frac{\partial}{\partial\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{\partial U_n}{\partial\mu}\right\} + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2 U_n}{\partial\square^2} = 0 \qquad (2.18)$$

ifadesi elde edilir.

2.7. Yüzey Küresel Harmonikleri

V_n nin r^n e bölünmesiyle elde edilen, $U_n$fonksiyonuna n inci dereceden *yüzey küresel harmonik* denir. $r = 1$ olduğu zaman U_n ile V_n eşittir. Bundan dolayı U_n merkezi orijinde bulunan birim kürede tanımlanmış katı küresel harmoniğin yerini tutan bir değer olarak alınabilir. θ ve $\square$ ye bağlı bir U_n fonksiyonunun bir yüzey küresel harmonik olabilmesi için gerek ve yeter şart (2.17) denklemini sağlamasıdır.

Gösterilebilir ki n. dereceden Laplace katsayısı n inci dereceden bir yüzey küresel harmoniktir.

$$T = \frac{1}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}}$$

fonksiyonunun x,y,z e göre türevlerinin alınmasıyla T nin Laplace denklemini sağladığı gösterilebilir. Gerçekten,

$$T_{xx} = 3[(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2]^{-\frac{5}{2}}(x-x_1)^2$$

$$-[\,(x-x_1)^{\,2}+\,(y-y_1)^{\,2}+\,(z-z_1)^{\,2}]^{-\frac{3}{2}}=$$

$$=T^5[3\,(x-x_1)^{\,2}-T^{-2}]$$

$$T_{yy}=T^5[3\,(y-y_1)^{\,2}-T^{-2}]$$

$$T_{zz}=T^5[3\,(z-z_1)^{\,2}-T^{-2}]$$

şeklinde olup,

$$\nabla^2 T=T_{xx}+T_{yy}+T_{zz}$$

$$=T^5[3[\,(x-x_1)^{\,2}+\,(y-y_1)^{\,2}+\,(z-z_1)^{\,2}]-3T^{-2}]$$

$$=T^5[3T^{-2}-3T^{-2}]=0$$

elde edilir.

$$T=\frac{1}{PM}=\frac{1}{\sqrt{r^2-2r\,r_1\,\cos\gamma+r_1^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n\,(cos\gamma)\,\frac{r^n}{r_1^{n+1}}$$

formunda yazılabilir. (2.16) denkleminde bu değer yerine yazılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n}{r_1^{n+1}}\left[n(n+1)P_n(cos\gamma)+\frac{1}{sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{sin\theta\,\frac{\partial P_n\cos\gamma}{\partial\theta}\right\}+\frac{1}{sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 P_n\,(cos\gamma)}{\partial\square^2}\right]=0$$

elde edilir.

Bu denklem r_1 den daha küçük olan tüm r değerleri için sağlanır ve de r nin farklı kuvvetlerinin katsayılarının hepsi de özdeş olarak sıfır olur. Buna göre,

$$n(n+1)P_n(cos\gamma) + \frac{1}{sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{sin\theta\ \frac{\partial P_n \cos\gamma}{\partial\theta}\right\} + \frac{1}{sin^2\theta}\ \frac{\partial^2 P_n\ (cos\gamma)}{\partial ?^2} = 0$$

yazılabilir. Yani $P_n\ (cos\gamma)$ fonksiyonu (2.17) denklemini sağlar ve dolayısıyla bir yüzey küresel harmoniktir.

2.8. Legendre Denklemi

$P_n\ (cos\gamma)$ nın özel bir durumu olan Legendre katsayısı $P_n\ (cos\theta)$, (θ_1=0 yazılarak elde edilir) ? den bağımsız olup n inci dereceden bir yüzeysel küresel harmoniktir. Bundan dolayı,

$$n(n+1)y + \frac{1}{sin\theta}\ \frac{\partial}{\partial\theta}\left\{sin\theta\ \frac{\partial y}{\partial\theta}\right\} = 0$$

denklemi sağlanır. Eğer $cos\theta$ yerine µ yazılırsa, P_n(µ) fonksiyonu

$$\frac{d}{d\mu}\left\{(1-u^2)\frac{dy}{d\mu}\right\} + n(n+1)y = 0$$

denklemini ya da açık bir ifadeyle

$$(1-u^2)\frac{d^2y}{d\mu^2} - 2m\frac{dy}{d\mu} + n(n+1)y = 0 \qquad (2.19)$$

denklemini sağlar. Bu Legendre denklemi olarak bilinir.

2.9. Geliştirilmiş Legendre Denklemi

(2.6.5) denkleminde $U_n = \Theta\Phi$ yazılır ve bu denklem $\Theta\Phi$ ile bölünürse ki burada $\Theta\ ve\ \Phi$ sadece $\theta\ ve$? nin fonksiyonları olup,

$$n(n+1)+\frac{1}{\Theta}\frac{d}{d\mu}\left\{(1-\mu^2)\ \frac{d\Theta}{d\mu}\right\}+\frac{1}{1-\mu^2}\ \frac{1}{\Phi}\ \frac{d^2\Phi}{d\square^2}=0$$

elde edilir. Bu denklemde ilk iki terim $\square$ den bağımsızdır. Dolayısıyla son terimde $\square$ den bağımsızdır. Bundan dolayı $\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\square^2}$ nin değeri sabit olmalıdır. Böylece m genellikle bir tam sayı olmak üzere,

$$\frac{d^2\Phi}{d\square^2}=-m^2\Phi$$

yazılabilir ki bunun genel çözümü,

$$\Phi=\mathrm{A}\,cos\,m\ \square+B\sin\ m\square$$

şeklindedir. Burada $A\ ve\ B$ keyfi sabitlerdir. Böyle bir durumda Θ fonksiyonu da

$$\frac{d}{d\mu}\left\{(1-u^2)\ \frac{dy}{d\mu}\right\}+\left\{n(n+1)-\frac{m^2}{1-\mu^2}\right\}y=0 \qquad (2.20)$$

denklemini sağlar. Bu denklem Geliştirilmiş Legendre Denklemi olarak bilinir. Eğer Θ, bu denklemin bir çözümü ise, o taktirde $(A\cos m\square+B\sin m\square)\Theta$ biçimindeki her fonksiyon (2.6.5) denklemini sağlar ve bundan dolayı n inci dereceden bir yüzey küresel harmoniktir. Buna paralel olarak da,

$$r^n(A\ \cos m\square+B\sin m\square)\Theta$$

ve

$$r^{-n-1}(A\ \cos m\square+B\sin m\square)\Theta$$

fonksiyonları sırasıyla $n\ ve\ -n-1\ inci$ dereceden katı küresel harmoniklerdir.

2.10. Hipergeometrik Fonksiyon

Hipergeometrik fonksiyon, küresel harmoniklerin teorisiyle ilgili olduğu için onların bazı özelliklerini burada vereceğiz. Bu fonksiyon hipergeometrik serilerin yardımıyla,

$$F(\propto,\beta,\gamma;x)=1+\frac{\propto\beta}{\gamma}x+\frac{\propto(\propto+1)\beta(\beta+1)}{1.2\gamma(\gamma+1)}x^2+$$

$$+\frac{\propto(\propto+1)(\propto+2)\beta(\beta+1)(\beta+1)}{1.2.3\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\cdots \qquad (2.21)$$

veya

$$F(\propto,\beta,\gamma;x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\propto)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n n!}x^n$$

şeklinde tanımlanır. Burada $(\propto)_n \propto (\propto+1)(\propto+2)\ldots(\propto+n-1)$ (Pochammer sembolü) dür. Bu seri $|x|<1$ ise mutlak yakınsaktır. Gerçekten,

$$U_n=\frac{(\propto)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n n!}x^n$$

olmak üzere ve bölüm kriteri gereğince

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(\propto+n)(\beta+n)}{(\gamma+n)(1+n)}x\right|=|x|$$

olup, $|x|<1$ ise seri mutlak yakınsaktır. Bildiğimiz elemanter fonksiyonların birçoğu hiper geometrik fonksiyon cinsinden ifade edilebilir. Bunların birkaçı aşağıda verilmiştir.

$$(1+x)^{n} = F\,(-n,1,1;-x)\,; \qquad \log(1+x) = x\,F\,(1,1,2;-x)$$

$$sin^{-1}x = x\,F\,(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2};x^2)\,; \qquad tan^{-1}x = x\,F\,(\tfrac{1}{2},1,\tfrac{3}{2};x^2)$$

2.11. Hipergeometrik Denklem

$$x\,(1-x)\,y'' + \{\gamma - (\propto + \beta + 1)\,x\}y' - \propto \beta y = 0 \qquad (2.22)$$

diferansiyel denklemi Gauss denklemi veya hipergeometrik denklemi adını alır. x'in artan kuvvetlerinin sonsuz bir serisi şeklinde çözümü bulunması için;

$$y = x^{\rho}(c_0 + c_1\,x + c_2x^2 + \cdots) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{\rho} x^{n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{\rho+n}$$

denirse ve (2.22) denkleminde y, y' ve y'' değerleri yazılırsa,

$$c_0\{\rho(\rho-1)+\gamma\rho\}x^{\rho-1} + \sum_{n=0}^{\infty} [c_{n+1}\{(\rho+n+1)(\rho+n)+\gamma(\rho+n+1)\} -$$

$$-c_n\{(\rho+n)(\rho+n-1)+(\rho+n)(\propto+\beta+1)+\propto\beta\}]x^{\rho+n}$$

elde edilir. Bu seride x'in tüm kuvvetlerinin katsayıları sıfıra eşit olmalıdır. c_0 sıfırdan farklı seçilebileceğinden, $x^{\rho-1}$ in katsayısı sıfıra eşitlenerek,

$$\rho(\rho-1+\gamma) = 0 \qquad (2.23)$$

indisel denklemi elde edlir. Bu denklemin kökleri $\rho = 0$ ve $\rho = 1-\gamma$ dır. Diğer terimlerin katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle

$$c_{n+1}(\rho + n + 1)(\rho + n + \gamma) = c_n(\rho + n + \propto)\,(\rho + n + \beta) \qquad (2.24)$$

indirgeme formülünü ve buradan c_n 'leri c_0 cinsinden

$$c_n = \frac{(\rho + \propto + n - 1)!\,(\rho + \beta + n - 1)!\,(\rho + \gamma - 1)!}{(\rho + \propto - 1)!\,(\rho + \beta - 1)!\,(\rho + \gamma + n - 1)!\,(\rho + n)!} c_0$$

veya gamma fonksiyonu yardımıyla

$$c_n = \frac{\Gamma(\rho + \propto + n)\Gamma(\rho + \beta + n)\Gamma(\rho + \gamma)}{\Gamma(\rho + \gamma + n)\Gamma(\rho + \propto)\Gamma(\rho + \beta)\Gamma(\rho + n + 1)} c_0$$

şeklinde elde edilir.

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{\rho + n}$$

denirse,

$$y_1 = c_0 \frac{\Gamma\,(p + \gamma)}{\Gamma(\rho + \propto)\Gamma\,(\rho + \beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\rho + \propto + n)\Gamma\,(\rho + \beta + n)}{\Gamma\,(\rho + n + 1)} x^{\rho + n}$$

şeklinde yazılabilir. ρ =0 için

$$y_1 = c_0 \frac{\Gamma\,(\gamma)}{\Gamma(\propto)\Gamma\,(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\propto + n)\Gamma\,(\beta + n)}{\Gamma(\gamma + n)\Gamma\,(n + 1)} x^n$$

veya

$$y_1 = c_0 F\,(\propto, \beta, \gamma, x) \quad (2.11.4)$$

olur. ρ =1- γ için ise,

$$y_2 = c_0 \frac{\Gamma\,(1)}{\Gamma(\propto -\gamma+1)\Gamma\,(\beta-\gamma+1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\propto -\gamma+n+1)\Gamma\,(\beta-y+n+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma\,(2-\gamma+n)} x^{1-\gamma+n}$$

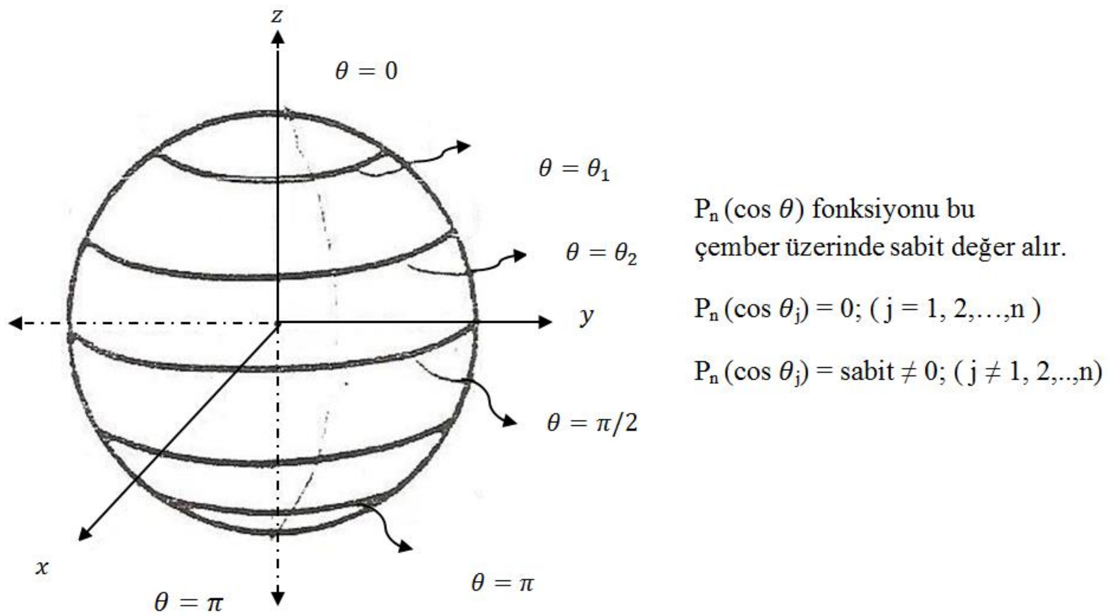
veya

$$y_2 = c_0\, x^{1-\gamma}\, F\,(\propto -\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, x) \qquad (2.25)$$

olarak elde edilir. γ bir tamsayı olmadığı zaman γ_1 ve γ_2 ler lineer bağımsızdır. Eğer $\gamma = 1$ ise iki çözüm birbirinin aynısıdır.

2.12. Tam Dereceden Küresel Harmonikler

$m\ ve\ n$ pozitif tamsayılar, $m \leq n$ ise $(A \cos m\phi + B sin\, m\phi)\, T_n^m\, (\cos\theta)$ ifadesi n inci dereceden bir yüzeysel küresel harmoniktir. Eğer $m = 0$ ise bu takdirde yüzey küresel harmonik, $P_n(cos\theta)$ Legendre katsayısının bir sabit katıdır. P_n (μ), $-1\ ve\ 1$ arasında μ $= 0$ civarında simetrik olarak düzenlenmiş n tane sıfır yerine sahiptir. Buna bağlı olarak $P_n(cos\theta)$ fonksiyonuda $O\ ve\ \pi$ arasında $\theta = \pi/2$ ye göre simetrik olarak düzenlenmiş n tane sıfır yerine sahiptir. Buna göre $P_n(cos\theta)$ fonksiyonu $\theta = 0\ ve\ \theta = \pi$ noktalarında kutupları olan, orijin merkezli bir küre üzerinde bulunan n tane çember üzerinde sıfırlanır. Bu çemberler küre ile aynı kutuplara sahip büyük çembere göre simetriktirler. n tek sayı olduğu zaman büyük çember, bu ailesinden biridir. Küre üzerinde bu çemberlerle paralel olan diğer çemberler üzerinde $P_n(cos\theta)$ fonksiyonu sabit değerler alır. Küre üzerinde n tane paralel çember tarafından ayrılan bölgelerin her birine *zon* denir. Bu bölgelerde tanımlanan $P_n(cos\theta)$ fonksiyonlarına da *zonal harmonikler* adı verilmektedir. $\theta = 0$ noktasından geçen çap zonal harmoniğin eksenidir.



Şekil 2.3. Küre üzerinde n tane paralel çember tarafından ayrılan bölgeler

Eğer $0 < m < n$ ise küresel harmonik,

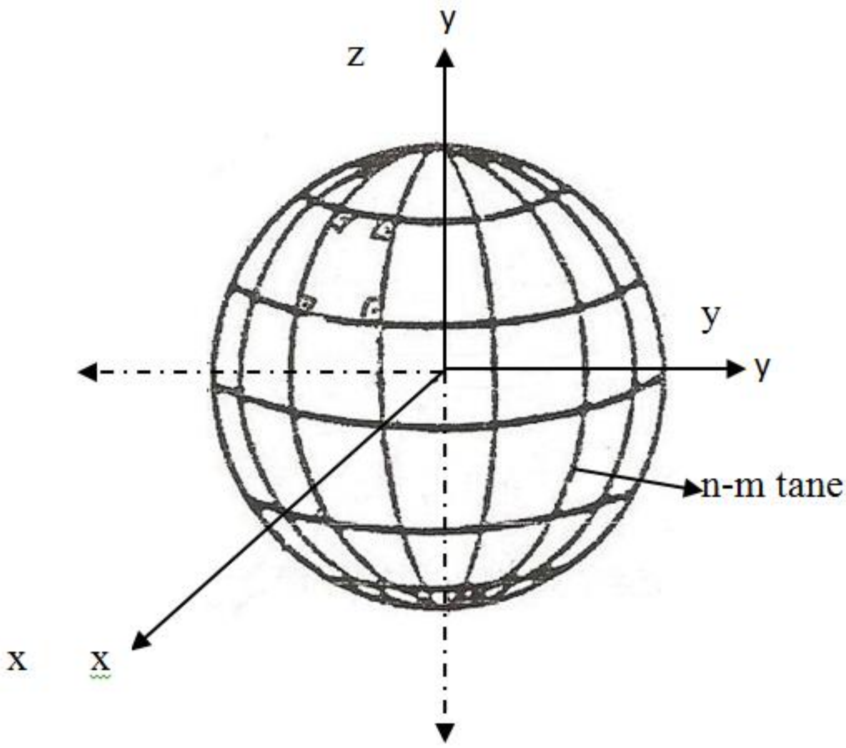
$$(A\cos m\phi + B sin\, m\phi) T_n^m\,(\cos\theta)$$

$$= (A\cos m\phi + B\sin m\phi)\,(-1)^{\,m}(1-\mu^2)^{m/2}\,\frac{d^m}{d\mu^m}\,P_n\,(\mu)$$

$$= (A\cos m\phi + B\sin m\phi)\,(-1)^{\,m}\,(sin^2\theta)^{\,m/2}\,\frac{d^m}{d\mu^m}\,P_n\,(\mu)$$

$$= (A\cos m\phi + B\sin m\phi)\,(sin^m\theta)\,\frac{d^{n+m}}{d\mu^{n+m}}\,(\mu^2-1)^{\,n}$$

şeklinde yazılabilir. İlk terim $A\cos m\phi + B\sin m\phi = 0$ yani $\tan m\phi = -A/B$ olduğu zaman sıfırdır. Bu değer küre üzerinde Θ=0 kutbu boyunca m tane büyük çembere karşılık gelir. Herhangi iki ardışık çember düzlemi arasındaki açı π/m olur. İkinci çarpan $\Theta = 0\ ve\ \Theta = \pi$ noktalarında sıfırlanır. Üçüncü çarpan ise zonal harmoniklerde olduğu gibi $\Theta = 0$ kutuplu $n-m$ tane çember üzerinde sıfırlanır. Böylece iki çember cümlesinin dik kesişmesinden dolayı elde edilen bu harmonikler tesseral harmonikler adını alır.



Şekil 2.4. İki çember cümlesinin dik kesişmesi

Eğer m = n ise küresel harmonik $(A\, cos\, n\phi\ +\ B\, sin\, n\phi)\ sin^{n}\theta$ biçimindedir. Bu ifade $\tan n\phi = -A/B$ ya da $\theta = 0\ ve\ \theta =\ \pi$ olduğu zaman sıfırdır. Bu durum küre üzerinde $\theta = 0\ ve\ \theta =\ \pi$ noktatalarına ve n büyük çembere karşılık gelir. Herhangi iki ardışık çember düzlemi arasındaki açık π/n dir. Küre $2n$ sektör ile bölünmüştür. Bu sektörler üzerinde tanımlı yüzey küresel harmonik fonksiyonlarına sektörel harmonikler denilmektedir.

2.13. $\sum$- Harmonik Homogen Polinomlar ve Örnekler

Laplace denkleminin çözümü olan fonksiyonlar olup n inci dereceden homogen polinom olan çözümleri Homogen Harmonik Polinomlardır. $x_1, x_2, \dots, x_q$ değişkenlerini içeren her polinom çözüm farklı dereceli homogen polinomların sonlu sayıdaki toplamıdır (Andrews *et al.* 1999).

Kart (1970), ∑-Homogen Polinomlar ile ilgili araştırmalar yapmıştır.

$$\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{q}}\left(\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{x}_\mathrm{i}^2}+\frac{\mathrm{k}_\mathrm{i}}{\mathrm{x}_\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_\mathrm{i}}\right)\mathrm{V}=0$$

denklemini gerçekleyen homogen polinomlara $\sum -$ harmonik homogen polinomlar denir ve kısaca $\sum - HHP$ ile gösterilir (Kart 1970).

Kart (1970); n inci dereceden 1,2,3 bilinmeyenli polinomların incelenmesini yaparak q bilinmeyenli $\sum - HHP$ ların genel halde çözülmesini aşağıdaki şekilde ele almıştır.

$$\sum_{i=1}^{q}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\frac{k_i}{x_i}+\frac{\partial}{\partial x_i}\right)V_n=0$$

$$\frac{\partial^2 V_n}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 V_n}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2 V_n}{\partial x_q^2}+\frac{k_1}{x_1}\frac{\partial V_n}{\partial x_1}+\frac{k_2}{x_2}\frac{\partial V_n}{\partial x_2}+\cdots+\frac{k_q}{x_q}\frac{\partial V_n}{\partial x_q}=0 \qquad (2.26)$$

denklemini sağlayan genel halde q değişkenli ve n inci dereceden homogen bir polinom,

$$V_n=\sum_{i_1=0}^{n}\sum_{i_2=0}^{n}\cdots\sum_{i_{q-1}=0}^{n-i_q-2}a_{i_1,i_2\ldots i_q}x_1^{i_1}x_2^{i_2}\ldots x_q^{i_q},\left(i_{1+}i_2+\cdots+i_q=n\right)$$

şeklindedir. V_n nin türevleri alınarak

$$\frac{dV_n}{dx_1}=\sum_{i_1=0}^{n}\sum_{i_2=0}^{n-i_1}\dots\sum_{i_{q-1}=0}^{n-i_q-2}a_{i_1,i_2\dots i_q}x_1^{i_1}x_2^{i_2}\dots x_q^{i_q},$$

$$\frac{d^2V_n}{dx_1^2}=\sum_{i_1=0}^{n}\sum_{i_2=0}^{n-i_1}\dots\sum_{i_{q-1}=0}^{n-i_q-2}i_1(i_1-1)a_{i_1,i_2\dots,i_q}\,x_1^{i_1-2}x_2^{i_2}\dots x_q^{i_q}$$

$$\frac{dV_n}{dX_q}=\sum_{i_1=0}^{n}\sum_{i_2=0}^{n-i_1}\dots\sum_{i_q-1=0}^{n-i_q-2}i_q a_{i_1i_2,\dots,i_q}x_1^{i_1}x_2^{i_2}\dots x_q^{i_q-1}$$

$$\frac{d^2V_n}{dx_q^2}=\sum_{i_1=0}^{n}\sum_{i_2=0}^{n-i_1}\dots\sum_{i_q-1=0}^{n-i_q-2}i_q\left(i_q-1\right)a_{i_1i_2,\dots,i_q}x_1^{i_1}x_2^{i_2}\dots x_q^{i_q-2}$$

bulunur. Bu türevler (2.26) denkleminde yerlerine konulursa,

$$\sum_{i_1=0}^{n}\sum_{i_2=0}^{n-i_1}\dots\sum_{i_{q-1}=0}^{n-i_q-2}i_1(i_1-1)a_{i_1,i_2\dots,i_q}\,x_1^{i_1-2}x_2^{i_2}\dots x_q^{i_q}$$

$$+\sum_{i_1=0}^{n}\sum_{i_2=0}^{n-i_1}\dots\sum_{i_{q-1}=0}^{n-i_q-2}i_1(i_1-1)a_{i_1,i_2\dots,i_q}\,x_1^{i_1-2}x_2^{i_2}\dots x_q^{i_q}+\cdots$$

$$+\sum_{i_1=0}^{n}\sum_{i_2=0}^{n-i_1}\dots\sum_{i_q-1=0}^{n-i_q-2}i_q\left(i_q-2\right)a_{i_1i_2,\dots,i_q}x_1^{i_1}x_2^{i_2}\dots \mathrm{x}_q^{i_q-2}$$

$$+\frac{k_1}{x_1}\sum_{i_1=0}^{n}\sum_{i_2=0}^{n-i_1}\dots\sum_{i_{q-1}=0}^{n-i_q-2}i_1a_{i_1,i_2\dots,i_q}\,x_1^{i_1-1}x_2^{i_2}\dots x_q^{i_q}$$

$$+\frac{k_2}{x_2}\sum_{i_1=0}^{n}\sum_{i_2=0}^{n-i_1}\dots\sum_{i_q-1=0}^{n-i_q-2} i_q a_{i_1 i_2,\dots,i_q} x_1^{i_1} x_2^{i_2-1}\dots x_q^{i_q}+\cdots$$

$$+\frac{k_q}{x_q}\sum_{i_1=0}^{n}\sum_{i_2=0}^{n-i_1}\dots\sum_{i_q-1=0}^{n-i_q-2} i_q a_{i_1 i_2,\dots,i_q} x_1^{i_1} x_2^{i_2}\dots x_q^{i_q-1}=0$$

elde edilir ve değişkenlerin aynı kuvvetlerini içine alan toplamlar birleştirilirse,

$$\sum_{i_1=0}^{n}\sum_{i_2=0}^{n-i_1}\dots\sum_{i_{q-1}=0}^{n-i_q-2} i_1[(i_1-1)+k_1]a_{i_1,i_2\dots,i_q}\, x_1^{i_1-2}x_2^{i_2}\dots x_q^{i_q}$$

$$+\sum_{i_1=0}^{n}\sum_{i_2=0}^{n-i_1}\dots\sum_{i_{q-1}=0}^{n-i_q-2} i_1[(i_2-1)+k_2]a_{i_1,i_2\dots,i_q}\, x_1^{i_1}x_2^{i_2-2}\dots x_q^{i_q}+\cdots$$

$$+\sum_{i_1=0}^{n}\sum_{i_2=0}^{n-i_1}\dots\sum_{i_{q-1}=0}^{n-i_q-2} i_q\big[(i_q-1)+k_q\big]a_{i_1,i_2\dots,i_q}\, x_1^{i_1}x_2^{i_2}\dots x_q^{i_q-2}=0$$

bulunur. Burada q_n tane katsayı olup q tanesi ortaktır. O halde $q\ \geq 3$ olmak üzere $n\ = q$ ise $q_n-\ (q-1)$ tane katsayı sıfır olmalı, diğer hallerde q_n-q tane katsayı sıfır olmalıdır. Yukarıdaki koşullar altında sayısı q olan toplamlar birleştirilirse,

$$\sum_{i_1=0}^{n-2}\ \sum_{i_2=0}^{n-\ (i_1+2)}\ \dots\ \sum_{i_q-1=0}^{n-(i_q-2+2)} \Big\{(i_1+2)[(i_1+1)+k_1]a_{i_{1+2},i_2,\dots,i_q}$$

$$+(i_2+2)[(i_2+1)+k_2]a_{i_1,i_{2+2},\dots,i_q}$$

$$+(i_3+2)[(i_3+1)+k_3]a_{i_1,i_2,i_{3+2},\dots,i_q}+\cdots$$

$$+\big(i_y+2\big)\big[\big(i_y+1\big)+k_y\big]a_{i_1 i_2,\dots i_{y+2},\dots,i_q}+\cdots$$

$$+\big(i_q+2\big)\big[\big(i_q+1\big)+k_q\big]a_{i_1 i_2,\dots,i_{q+2}}\Big\}\,x_1^{i_1+1}x_2^{i_2+2}\dots x_q^{i_q+1}$$

$$\equiv 0 \tag{2.27}$$

sonucuna varılır. Bu son denklemde, $i_1 + i_2 + \cdots + i_q = n - 2$ şeklindedir. (2.13.2) den katsayıları veren ve bütün formülleri kapsayan en genel rekürans formülü olarak,

$$a_{i_1,i_2,\ldots,i_y,\ldots,i_q} = -\frac{(i_1+2)[(i_1+1)+k_1]a_{i_1+2,i_2,\ldots,i_q} + \left(i_q+2\right)\left[\left(i_q+1\right)+k_q\right]a_{i_1 i_2,\ldots,i_q+2}}{\left(i_y+2\right)\left[\left(i_y+1\right)+k_y\right]} \tag{2.28}$$

bulunur. İndislerin değiştirilmesi şu şekildedir;

$$\left\{\begin{matrix} i_1 = 0,1,2,\ldots,n-2 \\ i_2 = 0,1,2,\ldots,[n-(i_1+2)] \\ i_{q-1} = 0,1,2,\ldots,\left[n-\left(i_{q-2}+2\right)\right] \\ \left(i_{1+}i_2 + \cdots + i_q = n-2\right) \end{matrix}\right\}$$

Katsayılar için tüm rekürans formüllerini kapsayan (2.28) formülünden faydalanılırsa $i_1 + \cdots + i_q = n - 2$ olacak şekilde bütün katsayılara ait rekürans formülleri yazılabilir ve indislerin çiftliği ve tekliği dikkate alınarak her hale karşılık gelen katsayılar bulunabilir.

Örnek 2.13.1: $V\left(x_1, x_2, \ldots, x_q\right) = c$ veya $V\left(x_1, x_2, \ldots, x_q\right) = a_1x_1 + \cdots + a_qx_q$ için $\Delta V = 0$ olup sabit ve ya 1. dereceden q değişkenli her polinom harmonik polinomdur.

Örnek 2.13.2: $V\left(x_1, x_2, \ldots, x_q\right) = a_1x_1^2 + \cdots + a_qx_q^2$ için $\Delta V = 2\left(a_1 + \cdots + a_q\right)$ olduğundan dolayı $a_1 + \cdots + a_q = 0$ ise harmonik polinomdur.

Örnek 2.13.3: $V(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$ polinomunun katsayıları arasında $a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$ bir bağıntı varsa bu polinom harmoniktir (Yıldırım 2005).

Örnek 2.13.4: $V\,(x, y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + x$ iki değişkenli dördüncü dereceden polinomu için,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) V(x, y) = 12x^2 - 12y^2 - 12x^2 + 12y^2 = 0$$

olduğundan dolayı harmonik bir polinomdur (Yıldırım 2005).

Örnek 2.13.5: $\varphi\ ve\ \Psi$ harmonik polinomlar olsun. $u = \varphi\Psi$ polinomunun hangi durumda harmonik olacağını gösterelim (Anar 2005).

$\varphi\ ve\ \Psi$ harmonik olduklarından $\Delta\,(\varphi) = 0\ ve\ \Delta\,(\Psi) = 0$ dır. Şimdi hangi durumda $\Delta\,(\varphi\Psi) = 0$ olduğunu gösterelim. $u\ =\ \varphi\Psi$ denirse,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial {x_q}^2} = \frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2}(\varphi\Psi) + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial {x_q}^2}(\varphi\Psi)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_1}\left[\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_1}\ (\varphi\Psi)\ \right] + \cdots + \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_\mathrm{q}}\left[\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_\mathrm{q}}\ (\varphi\Psi)\ \right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_1}\left[\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_1}(\varphi) + \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_1}\ (\Psi)\ \right] + \cdots + \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_\mathrm{q}}\left[\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_\mathrm{q}}(\varphi) + \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_\mathrm{q}}\ (\Psi)\ \right]$$

$$= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial {x_1}^2}\Psi + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathrm{x}_1}\frac{\partial \Psi}{\partial \mathrm{x}_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathrm{x}_1}\frac{\partial \Psi}{\partial \mathrm{x}_1} + \varphi\frac{\partial^2 \Psi}{\partial {x_1}^2} + \cdots + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial {x_q}^2}\Psi + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathrm{x}_\mathrm{q}}\frac{\partial \Psi}{\partial \mathrm{x}_\mathrm{q}} + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathrm{x}_\mathrm{q}}\frac{\partial \Psi}{\partial \mathrm{x}_\mathrm{q}} + \varphi\frac{\partial^2 \Psi}{\partial {x_q}^2}$$

$$= \Psi\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial {x_1}^2} + \cdots + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial {x_q}^2}\right] + 2\left[\frac{\partial \varphi}{\partial \mathrm{x}_1}\frac{\partial \Psi}{\partial \mathrm{x}_1} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathrm{x}_\mathrm{q}}\frac{\partial \Psi}{\partial \mathrm{x}_\mathrm{q}}\right] + \varphi\left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial {x_1}^2} + \cdots + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial {x_q}^2}\right]$$

$$= \varphi\Delta\Psi + 2\left[\frac{\partial \varphi}{\partial \mathrm{x}_1}\frac{\partial \Psi}{\partial \mathrm{x}_1} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathrm{x}_\mathrm{q}}\frac{\partial \Psi}{\partial \mathrm{x}_\mathrm{q}}\right] + \Psi\Delta\varphi$$

olur. φ ve Ψ harmonik olduklarından $\Delta\,(\varphi) \;=\; 0\; ve\; \Delta\,(\Psi) \;=\; 0\; d\imath r.$

$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_q}\frac{\partial \Psi}{\partial x_q} = 0$ eşitliği sağlandığı zaman $u \;=\; \varphi\Psi$ polinomu harmoniktir.

2.14. Poliharmonik Polinomlar

Tanım 2.14.1: $p \;\geq\; 2$ olan bir tamsayı olmak üzere

$$\Delta^p u = \left(\frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial {x_n}^2}\right)^p u = 0 \qquad (2.29)$$

denklemine poliharmonik denklem, bu denklemi sağlayan fonksiyonlara poliharmonik fonksiyon ve bu fonksiyonların polinom olanlarına da poliharmonik polinom denilmektedir. $p \;=\; 2$ hali biharmonik olarak bilinir. Ayrıca, Δ Laplace operatörünün (2.29)'daki kuvvetleri

$$\Delta^p u = \;\Delta(\Delta^{p-1}u);\; p = 1, 2, \ldots \qquad (2.30)$$

şeklinde tanımlanır (Çevik 2004).

Harmonik her polinom aynı zamanda poliharmoniktir. Çünkü P harmonik ise $\Delta P = 0$ olacağından dolayı $p \;\geq\; 2\;\; için$

$\Delta^p P = \;\Delta^{p-1}(\Delta P) = \Delta^{p-1}(0) = 0\;;\; p = 2, 3, 4, \ldots$ sağlanmaktadır.

2.15. Küresel Koordinatlarda Laplace Denklemi ve Harmonik Polinomlar

$x = r\;\; \sin\theta \cos\emptyset,\;\; \mathrm{y} = \mathrm{r}\sin\theta\;\; \sin\emptyset,\;\; z = r\cos\theta$ olmak üzere (2.30) ile verilen küresel koordinatlarda Laplace denklemi,

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

ve buradan

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\emptyset^2} = 0 \ ;$$

$$0 \le \theta \le \pi, 0 \le \emptyset \le 2\pi \qquad (2.31)$$

elde edilir. Bu denklemin $V\ (r,\emptyset,\theta) = R\ (r)\ F\ (\emptyset)\ T\ (\theta)$ şeklindeki çözüm kümesi de değişkenlerin ayrılması yöntemiyle hesaplanabilir. $V\ (r,\emptyset,\theta) = R\ (r)\ F\ (\emptyset)\ T\ (\theta)$ ifadesinde gerekli diferansiyeller hesaplanıp (2.30) eşitliğinde yerlerine yazılırsa,

$$\frac{(r^2R')'}{R} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{(sin\theta T)'}{T} + \frac{1}{sin^2\theta}\frac{F^n}{F} = 0$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{(r^2R')'}{R} = c \ ; \quad \frac{1}{\sin\theta}\frac{(sin\theta T)'}{T} + \frac{1}{sin^2\theta}\frac{F^n}{F} = -c \qquad (2.32)$$

denklem çifti elde edilir. İlk eşitlik aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$r^2R^n + 2rR' - cR = 0 \qquad (2.33)$$

Burada (2.33) eşitliği $R = r^\lambda$ şeklinde özel çözüme sahip Euler denklemidir.

$$\lambda(\lambda - 1) + 2\lambda - c = 0$$

$$\lambda(\lambda + 1) - c = 0$$

şeklindedır. $c = n(n+1)$ seçilirse $\lambda = n\ ve\ \lambda - n - 1$ çözümlerdir. O halde buradan (2.32) denkleminin lineer bağımsız iki çözümü r^n ve r^{-n-1} dir. (2.33)'nin çözümü, $c_1\ ve\ c_2$ keyfi sabitler olmak üzere,

$$R(r) = c_1 r^n + c_2 r^{-n-1}$$

şeklinde olur. Polinom çözümler için $\lambda = n$ pozitif tamsayı olarak alınır. (2.32)'deki ikinci denlem ise,

$$sin\theta \frac{(sin\theta T)'}{T} + \mathrm{n}\ (\mathrm{n}+1)\ sin^2\theta + \frac{F''}{F} = 0$$

şeklindedir. Burada $d = -m^2$sabit alınırsa

$$F^n - dF = 0 \tag{2.34}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dT}{d\theta}\right) + \left\{n(n+1) - \frac{m^2}{sin^2\theta}\right\}T = 0 \tag{2.35}$$

denklem çifti sağlanmalıdır. (2.34)'ün genel çözümü $k_1$ve k_2 keyfi sabitler olmak üzere,

$$F(\emptyset) = \begin{cases} k_1 + k_2\emptyset, m = 0 \\ k_1\cos m\emptyset + k_2\sin m\emptyset\,, m \neq 0 \end{cases}$$

olur. (2.35)'de $x = cos\theta$ ve $T(\theta) = y\,(x)$ olarak alınırsa denklem aşağıdaki şekle dönüşür.

$$(1\text{-}\mathrm{x}^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + \left\{\mathrm{n}(\mathrm{n}+1) - \frac{\mathrm{m}^2}{1-\mathrm{x}^2}\right\}y = 0 \tag{2.36}$$

Bu diferansiyel denklem *Geliştirilmiş Legendre Diferansiyel Denklemi* olup genel çözümü $P_n^m(x)$ ve $Q_n^m\,(x)$ genelletirilmiş Legendre fonksiyonları ve A_1 ve A_2 keyfi sabitler olmak üzere,

$$T(\theta) = A_1 P_n^m(cos\theta) + A_2 Q_n^m(cos\theta)$$

elde edilir. Böylece R^3 de, küresel koordinatlarda Laplace denkleminin değişkenlerine ayrılabilir çözümü n ve m ≠ 0 keyfi sabitler olmak üzere,

$$V(r,\emptyset,\theta)=(c_1 r^n + c_2\, r^{-n-1})\,(\,k_1 \cos m\emptyset + k_2 \sin m\emptyset)\,[A_1 P_n^m(cos\theta) \,+\, A_2 Q_n^m(cos\theta)]$$

elde edilir. m tamsayı olmak üzere (2.36) denklemine

$y = \, (1-x^2)^{\frac{m}{2}} v, |x| < 1$ dönüşümü uygulanırsa bu denklem,

$$(1-x^2)\,y^n - \,2(1+m)xy') \,+ (n-m)(n+m+1)y = 0 \tag{2.37}$$

şekline dönüşür. Bu denklem $n-m$ pozitif bir tamsayı olduğunda polinom çözümlere sahiptir. Bu polinom çözümler $C_{n-m}^{m+\frac{1}{2}}(x)$ *ultra küresel* harmoniklerdir. Gösterildi ki, $x = cos\theta$ ve $0 \le m \le n$ olmak üzere;

$$r^n\,(1-x^2)^{\frac{m}{2}} C_{n-m}^{m+\frac{1}{2}}(x)\,\cos m\emptyset \text{ ve } r^n\,(1-x^2)^{\frac{m}{2}} C_{n-m}^{m+\frac{1}{2}}(x)\,\sin m\emptyset$$

Laplace denklemini sağlar (Andrews *et al.* 1999).

2.16. Laplace Operatörünün Bazı Özellikleri

Teorem 2.16.1. $\Omega \subset R^n$ de $u, v\, \in C^2\,(\Omega)$ olsun. O taktirde

$$\Delta(uv) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(uv) = v\Delta(u) + u\Delta(v) + 2\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} \qquad (2.38)$$

dir (Çevik 2004).

İspat:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(uv) = \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial v}{\partial x_i}$$

ve

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(uv) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(uv)\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v\frac{\partial u}{\partial x_i} + u\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(uv) = \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i} + v\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} + u\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}$$

$$= v\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + u\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}$$

şeklindedir. Buradan

$$\Delta(uv) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(uv) = \sum_{i=1}^{n}\left[v\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + u\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} 2\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right]$$

$$= v\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + u\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} + 2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}$$

$$= v\Delta(u) + u\Delta(v) + 2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}$$

elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 2.16.2. $\Omega \subset R^n$ de $u \in C^2$ (Ω) harmonik bir fonksiyon ve

$$r = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

olsun. O taktirde m herhangi bir reel sayı olmak üzere

$$\Delta(r^m u) = m(m+n-2)r^{m-2}u + 2mr^{m-2}\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \qquad (2.39)$$

dir (Çevik 2004).

İspat: Teorem 2.38 ile verilen

$$\Delta(uv) = v\Delta(u) + u\Delta(v) + 2\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}$$

eşitliğinde v yerine r^m konulursa

$$\Delta(r^m u) = r^m\Delta(u) + u\Delta(r^m) + 2\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial r^m}{\partial x_i} \qquad (2.40)$$

elde edilir. Diğer yandan

$$\frac{\partial r^m}{\partial x_i} = mr^{m-1}\frac{\partial r}{\partial x_i} = mr^{m-1}\frac{x_i}{r} = mx_i r^{m-2}$$

$$\frac{\partial^2 r^m}{\partial x_i^2}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial r^m}{\partial x_i}\right)=\frac{\partial}{\partial x_i}(mx_i r^{m-2})$$

$$mr^{m-2}+m(m-2)x_i r^{m-3}\frac{\partial r}{\partial x_i}$$

$$mr^{m-2}+m(m-2)x_i^2 r^{m-4}$$

şeklindedir. Buradan

$$\Delta(r^m)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 r^m}{\partial x_i^2}=\sum_{i=1}^{n}[mr^{m-2}+m(m-2)x_i^2 r^{m-4}]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}mr^{m-2}+m(m-2)r^{m-4}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{x}_i^2$$

$$=mnr^{m-2}+m(m-2)r^{m-4}r^2$$

$$=mnr^{m-2}+m(m-2)r^{m-2}$$

$$=m(n+m-2)r^{m-2}$$

ve

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial r^m}{\partial x_i}=\sum_{i=1}^{n}mx_i\,r^{m-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}=mr^{m-2}\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial u}{\partial x_i}$$

şeklinde bulunur. u harmonik fonksiyonu için $\Delta u=0$ olduğu dikkate alınarak yukarıda elde edilen sonuçlar (4.2.3) de yerine yazılırsa,

$$\Delta(r^m)=m(n+m-2)r^{m-2}u+2mr^{m-2}\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial u}{\partial x_i}$$

bulunur ki bu da ispatı tamamlar.

Teorem 2.16.3. $\Omega \subset \mathrm{R}^n$ de $u_\lambda \in C^2(\Omega)$ λ –yıncı dereceden homogen harmonik bir fonksiyon ve

$$r = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

olsun. Bu durumda, m herhangi bir reel sayı olmak üzere

$$\Delta(r^m u_\lambda) = m(m + n + 2\lambda - 2)r^{m-2}u_\lambda \qquad (2.41)$$

dir (Çevik 2004).

İspat: λ-ıncı derecenhomogen u_λ harmonik fonksiyonu, Euler teoreminden dolayı

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_i} = \lambda u_\lambda \qquad (2.42)$$

eşitliğini gerçekler. Bu sonuç dikkate alınarak (4.2.2) de u yerine u_λ konulursa

$$\Delta(r^m u_\lambda) = m(m + n - 2)r^{m-2}u_\lambda + 2mr^{m-2}\lambda u_\lambda$$

$$= m(m + n + 2\lambda - 2)r^{m-2}u_\lambda$$

bulunur. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 2.16.4. Δ Laplace operatörü ve

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} = T \tag{2.43}$$

olmak üzere

$$\Delta T = (2 + T)\Delta \tag{2.44}$$

dir (Çevik 2004).

İspat: Teoremin ispatını önce $n = 3$ için yapalım. Bu durumda $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ konularak

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

ve

$$T = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$$

alınabilir. T operatörüne Δ Laplace operatörü uygulandığında

$$\Delta T = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) + \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)\right]$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial^2}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + z\frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial^2}{\partial y^2} + z\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\right)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left(x\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} + y\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} + \frac{\partial}{\partial z} + z\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + x\frac{\partial^3}{\partial x^3} + y\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + z\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial z}\right)$$

$$+ \left(x\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + y\frac{\partial^3}{\partial y^3} + z\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial z}\right)$$

$$+ \left(x\frac{\partial^3}{\partial x \partial z^2} + \frac{\partial^3}{\partial y \partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + z\frac{\partial^3}{\partial z^3}\right)$$

$$= 2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) + x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) + \ y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

$$+ z\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

$$= \left(2 + x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

$$= (2+T)\ \Delta$$

bulunur. Bu ise $n = 3$ için ispatı tamamlar.

Şimdi de ispatı n için yapalım.$\Omega \subset R^n$ de $u \in C^3$ (Ω) olsun. Bu durumda

$$(\Delta T)\ u\ =\ \Delta(Tu)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial u}{\partial x_j}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\right]$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(x_j \frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\right] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sum_{j=1_{i\neq j}}^{n}\left(x_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right) + \frac{\partial u}{\partial x_i} + x_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial u}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right] = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(x_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial^3 u}{\partial\, x_i^2 \partial x_j}\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \sum_{j=1}^{n}\left(x_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\right)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(2 + \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

$$= \left(2 + \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

$$= \ (2 + \mathrm{T})\, \Delta u$$

Yazılabilir ki, buradan

$$\Delta \mathrm{T} = (2 + \mathrm{T})\,\Delta$$

sonucu elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 2.16.5. m herhangi bir reel sayı, p ≥ 2 olan bir tamsayı ve

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} = \mathrm{T}$$

olsunlar. Bu takdirde

$$\mathrm{m} - 2\mathrm{j} + \mathrm{n} - 2 + 2\mathrm{T} = T_j \quad ; \qquad j = 0,1, \dots, p - 1 \tag{2.45}$$

olarak tanımlanan T_j operatörleri operatör çarpımına göre değişme özelliğine sahiptir (Çevik 2004).

İspat: $k \neq l$ olmak üzere $j = k$ ve $j = l$ için karşılık gelen operatörler sırasıyla

$$T_k = \mathrm{m} - 2\mathrm{k} + \mathrm{n} - 2 + 2\mathrm{T} \ \text{ ve } T_l = \mathrm{m} - 2\mathrm{l} + \mathrm{n} - 2 + 2\mathrm{T}$$

olsun. Bu durumda $u \in C^2\ (\Omega)$ olmak üzere

$$(T_k T_l)\, u = T_k\, (T_l u) = (\mathrm{m\text{-}2k\text{+}n\text{-}2\text{+}2T})\ [\ (\mathrm{m} - 2\mathrm{l} + \mathrm{n} - 2 + 2\mathrm{T})\, u]$$

$$= (m - 2k + n - 2 + 2T)\ [(m - 2l + n - 2)u + 2Tu]$$

$$= (m - 2k + n - 2)\ [(m - 2l + n - 2)u + 2Tu] + 2T[(m - 2l + n - 2)u + 2Tu]$$

$$= (m - 2k + n - 2)[(m - 2l + n - 2)u] + (m - 2k + n - 2)(\ 2Tu)$$

$$+2T[(m - 2l + n - 2)u] + 2T(2Tu)$$

$= (m - 2l + n - 2)\ (m - 2k + n - 2)u + 2T\ (m - 2k + n - 2)u$

$+(m - 2l + n - 2)(2Tu) + (2T)(2Tu)$

$= \ (m - 2l + n - 2 + 2T)\ (m - 2k + n - 2)\ u + \ (m - 2l + n - 2 + 2T)\ 2Tu$

$= \ (m - 2l + n - 2 + 2T)\ [\ (m - 2k + n - 2 + 2T)\ u]$

$= T_l\ (T_k u) \ = \ (T_l T_k)\ u$

elde edilir. Buradan

$$T_k T_l = T_l T_k$$

olduğu görülmektedir.

k = l durumunda ise aşikar olarak sağlandığından T_j $(j = 0,1, \ldots, p - 1)$ operatörlerinin çarpıma göre değişme özelliği vardır.

Teorem 2.16.6. Δ Laplace operatörü olmak $T_j (j = 0,1, \ldots, p - 1)$ ler (2.45) ile tanımlansın. Bu durumda

$$\Delta T_j = \ \left(4 + T_j\right)\Delta\ ; \ \ (j = 0,1, \ldots, p - 1) \qquad (2.46)$$

dir (Çevik 2004).

İspat: $u \in C^3$ (Ω) şeklinde bir fonksiyon ve $(j = 0,1, \ldots, p - 1)$ için

$$(\Delta T_j)\ u = \Delta\ (T_j u) \ = \ \Delta[\ (m - 2j + n - 2 + 2T)\ u]$$

$$= \Delta[\ (m - 2j + n - 2)\ u] + \Delta\ (2Tu)$$

$$= \ (m - 2j + n - 2)\ \Delta u + \ 2\ (\Delta T)\ u$$

bulunur. (2.16.4.2) eşitliğinden $\Delta T = (2+T)\,\Delta$ olduğu dikkate alınırsa, bu durumda

$$
\begin{aligned}
(\Delta T_j)u &= (m-2j+n-2)\Delta u + 2[\,(2+T)\,\Delta]u \\
&= (m-2j+n-2)\Delta u + (4+2T)\,\Delta u \\
&= [4+(m-2j+n-2+2T)\,]\,\Delta u \\
&= (4+T_j)\,\Delta u
\end{aligned}
$$

olur ki buradan $(j = 0,1,\dots,p-1)$ için

$$\Delta T_j = (4+T_j)\,\Delta$$

sonucu elde edilir.

Teorem 2.16.7. $u \in C^{2p}(\Omega)$ harmonik bir fonksiyon ve p≥2 olan bir tamsayı olmak üzere

$$\Delta^p(r^m u) = r^{m-2p}\prod_{j=0}^{p-1}(m-2j)\left(m-2j+n-2+2\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)u \tag{2.47}$$

dir (Çevik 2004).

İspat: Teoremin ispatında tümevarım metodu kullanılacaktır. Belirtelim ki, (2.46) eşitliği, (2.46) kullanılarak

$$\Delta\,(r^m u) = \mathrm{m}r^{m-2}\,(\mathrm{m}+\mathrm{n}-2+2\mathrm{T})\,u \tag{2.48}$$

şeklinde de yazılabilir.

Tümevarım metoduna göre ilk olarak, p=2 için (2.47) ifadesinin doğruluğunu gösterelim. (2.48) eşitliğinin her iki yanına Δ Laplace operatörü uygulanırsa

$$\Delta[\Delta\,(r^m u)\,] = \Delta\,[m r^{m-2}\,(m+n-2+2T)\,u]$$

$$\Delta^2\,(r^m u) = m\,(m+n-2)\,\Delta(r^{m-2}u) + 2m\Delta(r^{m-2}Tu) \qquad (2.49)$$

elde edilir. (2.48) de m yerine (m-2) alınırsa

$$\Delta\,(r^{m-2}u) = (m-2)\,r^{m-4}\,(m-2+n-2+2T)\,u \qquad (2.50)$$

bulunur. Ayrıca Teorem (2.41)'den ve u fonksiyonu harmonik olduğundan dolayı Δu=0 olup

$$\Delta\,(Tu) = (2+T)\,\Delta u = 0$$

dır. Buradan Tu nun da harmonik bir fonksiyon olduğu görülmektedir. Tu nun harmonikliği göz önüne alınarak (2.48)'de $m\ yerine\ m-2$ ve u harmonik fonksiyonu yerine de Tu konulursa

$$\Delta\,(r^{m-2}Tu) = (m-2)\,r^{m-4}\,(m-2+n-2+2T)\,Tu \qquad (2.51)$$

elde edilir. (2.51) ve (2.50) ifadeleri, (2.49) de yerine yazılırsa

$$\Delta^2\,(r^m u) = m\,(m+n-2)\,(m-2)\,r^{m-4}\,(m-2+n-2+2T)\,u$$

$$+\,2m\,(m-2)\,r^{m-4}\,(m-2+n-2+2T)\,Tu$$

$$= m\,(m-2)\,r^{m-4}\,(m-2+n-2+2T)\,(m+n-2+2T)\,u$$

bulunur.

$$T=\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

konulursa

$$\Delta^2(r^m u)=r^{m-4}m(m-2)\left(\mathrm{m}-2+\mathrm{n}-2\;+\;2\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)$$
$$,\left(\mathrm{m}+\mathrm{n}-2\;+\;2\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)u$$

elde edilir. Eşitliğin sağındaki operatörler Teorem 2.45'den dolayı değişme özelliğine sahip olduğundan

$$\Delta^2\,(r^m u)=$$
$$r^{m-4}m(m-2)\left(\mathrm{m}+\mathrm{n}-2\;+\;2\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)\left(\mathrm{m}-2+\mathrm{n}-2\;+\;2\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)u$$

bulunur ki sonuç $p=2$ için (2.47) ifadesini gerçekler.

$p-1$ için doğru olduğunu kabul edelim. Yani

$$\Delta^{p-1}(r^m u)=r^{m-2(p-1)}\prod_{j=0}^{p-2}(\mathrm{m}-2\mathrm{j})\left(\mathrm{m}-2\mathrm{j}\;+\mathrm{n}-2+\;2\textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)u, \quad (2.52)$$

doğru olsun. Burada (2.43) ve (2.45) eşitlikleri kullanılırsa

$$\Delta^{p-1}(r^m u)=r^{m-2(p-1)}\mathrm{m}(\mathrm{m}-2)\ldots\big(\mathrm{m}-2(\mathrm{p}-2)\big)T_0T_1\ldots T_{p-2}\,u \qquad (2.53)$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki yanına Δ Laplace operatörü tekrar uygulanırsa

$$\Delta[\Delta^{p-1}\,(r^m u)\,] = \mathrm{m(m-2)\,...\,\big(m-2(p-2)\big)}\Delta\big[\,r^{m-2(p-1)}T_0T_1\,...\,T_{p-2}\,u\big] \qquad (2.54)$$

bulunur. Diğer yandan Teorem 2.46'dan dolayı

$$\Delta T_j = (4{+}T_j)\,\Delta; \qquad j = 0,1,\dots,p-1$$

olduğundan

$$\Delta\, T_0T_1\,...\,T_{p-3}T_{p-2} = \;(4+\;T_0)\,\Delta T_1\,...\,T_{p-3}T_{p-2}$$

$$=\;(4+T_0)\,(4+T_1)\;\dots\;(4+T_{p-3})\,\varDelta\, T_{p-2}$$

$$=\;(4+T_0)\,(4+T_1)\;\dots\;(4+T_{p-3})\,(4+T_{p-2})\,\varDelta$$

yazılıabilir. u fonksiyonu harmonik olduğundan $\Delta u = 0$ olup

$$\Delta\, T_0T_1\,...\,T_{p-2}u = (4+\;T_0)(4+T_1)\,...\,\big(4+T_{p-2}\big)\Delta u = 0$$

olarak bulunur. Buradan $T_0T_1\,...\,T_{p-2}u$ nun da harmonik olduğu görülmektedir. Dolayısıyla $T_0T_1\,...\,T_{p-2}u$ nun harmonikliği dikkate alınarak ve (2.48)'den yararlanarak

$$\Delta\big[\,r^{m-2(p-1)}T_0T_1\,...\,T_{p-2}u\big] =$$

$$= \big(\mathrm{m}-2(\mathrm{p}-1)\big)r^{m-2(p-1)-2}\,(\mathrm{m}-2(\mathrm{p}-1)+\mathrm{n}-2+2\mathrm{T})T_0T_1\,...\,T_{p-2}u \qquad (2.55)$$

bulunur. $m-2(p-1)+n-2+2T = T_{p-1}$ dir ve $j = 0,1,\dots,p-1$ için T_j ler değişme özelliğine sahip olduğundan (2.55) eşitliği,

$$\Delta\big[r^{m-2\,(p-1)}\,T_0T_1\,...\,T_{p-2}u\big] = (m-2\,(p-1)\,)r^{m-2(p-1)-2}T_0T_1\,...\,T_{p-2}T_{p-1}u$$

şeklinde yazılabilir. Bu sonuç (2.54)'de kullanılırsa

$$\Delta^p(r^m u) = m(m-2)\ldots\big(m-2(p-2)\big)$$

$$\big(m-2(p-1)\big)r^{m-2(p-1)-2}T_0T_1\ldots T_{p-2}T_{p-1}u$$

$$= m(m-2)\ldots\big(m-2(p-1)\big)r^{m-2\,p}T_0T_1\ldots T_{p-1}u$$

$$= r^{m-2\,p}\left(\prod_{j=0}^{p-1}(m-2j)T_j\right)u$$

bulunur. Burada

$$T_j = m-2j+n-2+2T, T = \sum_{i=1}^{n} x_i\frac{\partial}{\partial x_i};\ j = 0,1,\ldots,p-1$$

alınırsa

$$\Delta^p(r^m u) = r^{m-2\,p}\prod_{j=0}^{p-1}(m-2j)\left(m-2j+n-2+2\sum_{i=1}^{n} x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)u$$

elde edilir ki bu sonuç (2.47)'nin kendisidir. Yani, $p-1$ için doğru olduğu kabul edilmiş olan (2.47)'nin p için de doğru olduğu görülür. Böylece tümevarımla ispat tamamlanmıştır.

Teorem 2.16.8. $u_\lambda \in C^{2p}(\Omega), \lambda$ –yıncı dereceden homogen harmonik bir fonksiyon ve

$$r = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

olsun

$$\Delta^p(r^m u_\lambda) = r^{m-2\,p} \prod_{j=0}^{p-1} (m-2j)(m-2j+n-2+2\lambda)\, u_\lambda \tag{2.56}$$

dır (Çevik 2004).

İspat: λ −yıncı dereceden homogen u_λ harmonik fonksiyonu, Euler teoreminden dolayı

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_i} \lambda u_\lambda$$

eşitliğini gerçekleştirdiğinden bu sonuç Teorem 2.16.7'deki (2.47) eşitliğinde kullanılırsa

$$\Delta^p(r^m u_\lambda) = r^{m-2\,p} \prod_{j=0}^{p-1} (m-2j)(m-2j+n-2+2\lambda)\, u_\lambda$$

elde edilir.

Teorem 2.16.9. $j = 0,1, \ldots, p-1$ için $u_{\lambda_1} \in C^{2p}(\Omega)\ ler, \lambda_j$ –yıncı dereceden homogen harmonik fonksiyonlar olmak üzere

$$w_1 = \sum_{j=0}^{p-1} r^{2j} u_{\lambda_j}$$

ve

$$w_2 = \sum_{j=0}^{p-1} r^{2j-n+2-2\lambda_j} u_{\lambda_j}$$

fonksiyonları $\Delta^p w = 0$ denkleminin çözümleridir (Çevik 2004).

İspat: Teorem 2.16.8'deki

$$\Delta^p(r^m u_\lambda) = r^{m-2p} \prod_{j=0}^{p-1} (m-2j)(m-2j+n-2+2\lambda)\, u_\lambda$$

eşitliğinde λ yerine λ_j, sırasıyla m yerine $2j$ ve $2j - n + 2 - 2\lambda_j$ alınırsa

$$\Delta^p\left(r^{2j} u_{\lambda_j}\right) = 0; \qquad \Delta u_{\lambda_j} = 0; \qquad j = 0,1,\dots,p-1 \tag{2.57}$$

ve

$$\Delta^p\left(r^{2j-n+2-2\lambda_j} u_{\lambda_j}\right) = 0; \qquad \Delta u_{\lambda_j} = 0;\ j = 0,1,\dots,p-1 \tag{2.58}$$

bulunur. Buradan görülmektedir ki, $j = 0,1,\dots,p-1$ için $r^{2j} u_{\lambda_j}$ ve $r^{2j-n+2-2\lambda_j} u_{\lambda_j}$ lerin her biri $\Delta^p w = 0$ denklemini sağlar. Bu denklem lineer olduğundan $j = 0,1,\dots,p-1$ içim $\Delta u_{\lambda_j} = 0$ olmak üzere,

$$w_1 = \sum_{j=0}^{p-1} r^{2j} u_{\lambda_j} \tag{2.59}$$

ve

$$w_2 = \sum_{j=0}^{p-1} r^{2j-n+2-2\lambda_j} u_{\lambda_j} \tag{2.60}$$

fonksiyonları $\Delta^p w = 0$ denkleminin çözümleridir.

Teorem 2.16.10. $\Delta^p w = 0$ poliharmonik denkleminin $w = r^m$ (m herhangi bir reel sayı) tipindeki çözümleri, A_j ve B_j ler keyfi sabitler olmak üzere

$$w_1 = \sum_{j=0}^{p-1} A_j r^{2j}$$

ve

$$w_2 = \sum_{j=0}^{p-1} B_j r^{2j-n+2}$$

şeklindedir (Çevik 2004).

İspat: $u = 1$ harmonik fonksiyonu 0. Dereceden homogen olduğundan, (2.57) ve (2.58) eşitliklerinde $u_{\lambda_j} = 1$ ve $\lambda = 0$ alınırsa sırasıyla

$$\Delta^p\left(r^{2j}\right) = 0 \quad ; \qquad j = 0,1,\dots,p-1 \text{ ve}$$

$$\Delta^p\left(r^{2j-n+2}\right) = 0 \quad ; \qquad j = 0,1,\dots,p-1$$

olacaktır. Buradan görülmektedir ki $j = 0,1,\dots,p-1$ için r^{2j} ve r^{2j-n+2} fonksiyonlarının her biri $\Delta^p w = 0$ poliharmonik denklemini sağlar. $\Delta^p w = 0$ denklemi lineer olduğundan bu çözümlerin lineer kombinasyonları da denklemin çözümleridir. Bu durumda $\Delta^p w = 0$ denkleminini çözümü,

$$w = \sum_{j=0}^{p-1} A_j r^{2j} + \sum_{j=0}^{p-1} B_j r^{2j-n+2} \qquad şeklindedir.$$

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. ∑ - Hiper Küresel Harmonikler

Prof. Dr. İhsan DAĞ çalışmasında (1973) ∑ - Hiper Küresel Harmonikleri aşağıdaki gibi inceledi.

Tanım 3.1.1.

$$\sum_{i=1}^{n+2}\left(\frac{\partial}{\partial x_i^2}+\frac{k_i}{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\right)V(x_1,x_2,\cdots x_{n+2})=0,(k_i\in R) \tag{3.1}$$

denkleminin μ. dereceden homojen polinom olan bir çözümüne $P_\mu\ (x_1,x_2,\cdots x_{n+2})$ denirse ve bu polinom,

$$\begin{cases} x_1=r\cos\theta_1, \\ x_2=r\sin\theta_1,\cos\theta_2, \\ x_3=r\sin\theta_1,\sin\theta_2,\cos\theta_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n=r\sin\theta_1,\sin\theta_2\cdots\cos\theta_n, \\ x_{n+1}=r\sin\theta_1,\sin\theta_2\cdots\sin\theta_n,\cos\varphi_3, \\ x_{n+2}=r\sin\theta_1,\sin\theta_2\cdots\sin\theta_n,\sin\varphi, \end{cases}$$

$$\left(0\leqq\theta_j\leqq\pi;\ j=1,2,\cdots,n\right),$$

$$(0\leqq\varphi\leqq 2\pi) \tag{3.2}$$

küresel koordinatları cinsinden ifade edilirse,

$$P_\mu(x_1,\cdots,x_{n+2})=r^\mu Y_\mu(\theta_1,\cdots,\theta_n,\varphi) \tag{3.3}$$

elde edilir. Bu şekilde oluşan Y_μ fonksiyonuna $\sum$-*Hiper Küresel Fonksiyon* denir.

Laplace denklemi $n+2$ $(n \geq 0)$ degişkenli olarak ele alınır. $n+2$ boyutlu küresel koordinatlarda (3.1) denklemi (3.2) bağıntıları yardımıyla;

$$
\left\{
\begin{aligned}
& r^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + r(n+1+k_1+\cdots+k_{n+2}) \frac{\partial V}{\partial r} + \\
& + \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1^2} + (n - k_1 tg^2\theta_1 + k_3 + \cdots + k_{n+2}) \cot g\theta_1 \frac{\partial V}{\partial \theta_1} \\
& + \frac{1}{sin^2\theta_1}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial \theta_2^2} + (n-1-k_2 tg^2\theta_2 + k_3 + \cdots + k_{n+2}) \cot g\theta_2 \frac{\partial V}{\partial \theta_2}\right] \\
& + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + \frac{1}{sin^2\theta_1 \cdots sin^2\theta_{j-1}}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial \theta_j^2} + \left(n-j+1-k_j tg^2\theta_j + k_{j+1} + \cdots + k_{n+2}\right) \cot g\theta_j \frac{\partial V}{\partial \theta_j}\right] \\
& + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + \frac{1}{sin^2\theta_1 \cdots sin^2\theta_{n-1}}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial \theta_n^2} + (1-k_n tg^2\theta_n + k_{n+1} + k_{n+2}) \cot g\theta_n \frac{\partial V}{\partial \theta_n}\right] \\
& + \frac{1}{sin^2\theta_1 \cdots sin^2\theta_{n-1}}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + (1-k_{n+1} tg^2\varphi + k_{n+2}) \cot g\varphi \frac{\partial V}{\partial \varphi}\right] = 0
\end{aligned}
\right.
\tag{3.4}
$$

şeklini alır.

Y_μ fonksiyonu $\theta_1,\cdots,\theta_n,\varphi$ değişkenleri cinsinden bir polinom olup P_μ fonksiyonunun r=1 yarıçaplı S hiperküresi üzerinde aldığı değerdir. Eğer $P_\mu$polinomuna Lord Kelvin teoremi uygulanırsa S küresinin dışında tanımlanan bir Q_μ $\sum$–hiperharmonik polinomu elde edilir. Yani,

$$Q_\mu(x_1,\cdots,x_{n+2}) = r^{-(n+\sum_{i=1}^{n+2} k_i)} \cdot P_\mu\left(\frac{x_1}{r^2},\cdots,\frac{x_{n+2}}{r^2}\right)$$

bulunur. Ayrıca P_μ nün homogenliği nedeniyle

$$Q_\mu(x_1,\cdots,x_{n+2}) = r^{-(n+\sum_{i=1}^{n+2}k_i)} \cdot \left(\frac{1}{r^2}\right)^\mu \cdot P_\mu(x_1,\cdots,x_{n+2})$$

yazılabilir. $P_\mu$nün (3.1.1.3) değeri hesaba katılırsa Q_μ fonksiyonu şu şekil alır:

$$Q_\mu(x_1,\cdots,x_{n+2}) =$$
$$r^{-(n+\sum_{i=1}^{n+2}k_i)} \cdot Y_\mu(\theta_1,\cdots,\theta_n,\varphi) \tag{3.5}$$

Y_μ fonksiyonu Q_μ nün r=1 yarıçaplı S küresi üzerindeki değerini temsil etmektedir.

$$P_\mu(x_1,\cdots,x_{n+2}) = r^\mu Y_\mu(\theta_1,\cdots,\theta_n,\varphi)$$

fonksiyonu bir $\sum -$ homogen harmonik polinom olduğundan (3.4) denklemini gerçeklemesi gerekir. Demek ki (3.4)'de $V = r^\mu Y_\mu$ yazılarak denklemin her iki yanı r^μ ile bölünürse ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$\left\{\begin{array}{l}
\mu(\mu+n+k_1+\cdots+k_{n+2})Y\mu + \\
+\dfrac{\partial^2 Y\mu}{\partial\theta_1^2} + (n-k_1 tg^2\theta_1 + k_2 +\cdots+k_{n+2})\cot g\theta_1 \dfrac{\partial Y\mu}{\partial\theta_1} \\
+\dfrac{1}{sin^2\theta_1}\left[\dfrac{\partial^2 Y\mu}{\partial\theta_2^2} + (n-1-k_2 tg^2\theta_2 + k_3 +\cdots+k_{n+2})\cot g\theta_2 \dfrac{\partial Y\mu}{\partial\theta_2}\right] \\
+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
+\dfrac{1}{sin^2\theta_1\cdots sin^2\theta_{j-1}}\left[\dfrac{\partial^2 Y\mu}{\partial\theta_j^2} + \left(n-j+1-k_j tg^2\theta_j + k_{j+1} +\cdots+k_{n+2}\right)\cot g\theta_j \dfrac{\partial Y\mu}{\partial\theta_j}\right] \\
+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
+\dfrac{1}{sin^2\theta_1\cdots sin^2\theta_{n-1}}\left[\dfrac{\partial^2 Y\mu}{\partial\theta_n^2} + (1-k_n tg^2\theta_n + k_{n+1} + k_{n+2})\cot g\theta_n \dfrac{\partial Y\mu}{\partial\theta_n}\right] \\
+\dfrac{1}{sin^2\theta_1\cdots sin^2\theta_n}\left[\dfrac{\partial^2 Y\mu}{\partial\varphi^2} + (-k_{n+1} tg^2\varphi + k_{n+2})\cot g\varphi \dfrac{\partial Y\mu}{\partial\varphi}\right]
\end{array}\right. \tag{3.6}$$

elde edilir. Şimdi (3.6) denkleminin μ ve P_j $(j = 1,\cdots,n)$ pozitif tam ve

$$\mu = P_0 \geqq P_1 \geqq \cdots \geqq P_{J-1} \geqq P_J \geqq \cdots \geqq P_n$$

Bağlantıları için uygun sayılar olmak üzere,

$$Y_\mu = (sin\theta_1)^{P_1}\theta_1(cos\theta_1) \cdots (sin\theta_n)^{P_n}\theta_n(sin\theta_n)\phi(\varphi) \tag{3.7}$$

şeklinde ve $\sum$–hiperküresel fonksiyon dediğimiz bir çözümü aranmalıdır.

ϕ *yalnız* φ nin Y_n de $\theta_1, \cdots, \theta_n$ nin fonksiyonları olmak üzere, (3.1.1.6) da $Y_\mu = Y_n\phi$ yazılırsa ve gerekli sadeleştirmeler yapılıp denklemin her iki yanı $Y_n\phi$ ile bölünürse,

$$\left\{\begin{aligned} &\mu(\mu + n + k_1 + \cdots + k_{n+2}) sin^2\theta_1 \cdots sin^2\theta_n \\ &+ \left[\frac{\partial^2 Y_n}{\partial\theta_1^2} + (n - k_1 tg^2\theta_1 + k_2 + \cdots + k_{n+2}) \cot g\theta_1 \frac{\partial Y_n}{\partial\theta_1}\right]\frac{1}{Y_n} sin^2\theta_1 \cdots sin^2\theta_n \\ &+ \cdots\cdots \\ &+ \left[\frac{\partial^2 Y_n}{\partial\theta_j^2} + \left(n - j + 1 - k_j tg^2\theta_j + k_{j+1} + \cdots + k_{n+2}\right) \cot g\theta_j \frac{\partial Y_n}{\partial\theta_j}\right]\frac{1}{Y_n} sin^2\theta_j \cdots sin^2\theta_n \\ + &\cdots\cdots \\ &+ \left[\frac{\partial^2 Y_n}{\partial\theta_n^2} + (1 - k_n tg^2\theta_n + k_{n+1} + k_{n+2}) \cot g\theta_n \frac{\partial Y_n}{\partial\theta_n}\right]\frac{1}{Y_n} sin^2\theta_n \\ &+ \left[\frac{\partial^2 Y_n}{\partial\varphi^2} + (-k_{n+1} tg^2\varphi + k_{n+2}) \cot g\varphi_n \frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\right]\frac{1}{\phi} \end{aligned}\right. \tag{3.8}$$

denklemi elde edilir.

(3.8)'de φ ye bağlı terimleri ikinci tarafa geçirilirse denklemin iki tarafı farklı değişkenlere bağlı bulunurlar. Yani bir sabite eşit olmaları gerekir. Bu sabit

$$P_n\,(P_n + k_{n+1+}k_{n+2})$$

şeklinde seçilir. Böylece,

$$\left\{\begin{aligned}
&\mu(\mu+n+k_1+\cdots+k_{n+2})sin^2\theta_1\cdots sin^2\theta_n\\
&+\left[\frac{\partial^2Y_n}{\partial\theta_1^2}+(n-k_1tg^2\theta_1+k_2+\cdots+k_{n+2})cotg\theta_1\frac{\partial Y_n}{\partial\theta_1}\right]\frac{1}{Y_n}sin^2\theta_1\cdots sin^2\theta_n\\
&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+\left[\frac{\partial^2Y_n}{\partial\theta_j^2}+\left(n-j+1-k_jtg^2\theta_j+k_{j+1}+\cdots+k_{n+2}\right)cotg\theta_j\frac{\partial Y_n}{\partial\theta_j}\right]\frac{1}{Y_n}sin^2\theta_j\cdots sin^2\theta_n\\
&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+\left[\frac{\partial^2Y_n}{\partial\theta_n^2}+(1-k_ntg^2\theta_n+k_{n+1}+k_{n+2})cotg\theta_n\frac{\partial Y_n}{\partial\theta_n}\right]\frac{1}{Y_n}sin^2\theta_n\\
&-P_n(P_n+k_{n+1}+k_{n+2})=0
\end{aligned}\right. \qquad (3.9)$$

ve

$$sin^2\varphi\frac{d^2\phi}{d\varphi^2}+(-k_{n+1}tg^2\varphi+k_{n+2})sin\varphi cos\varphi\frac{d\phi}{d\varphi}$$

$$+P_n(P_n+k_{n+1}+k_{n+2})sin^2\varphi\phi=0 \qquad (3.10)$$

şeklinde iki denklem elde edilir.

Şimdi (3.9) denklemini ele alınarak ve bu defa

$$Y_n=Y_{n-1}(\theta_1,\cdots,\theta_{n-1})\ (sin\theta_n)^{\ P_n}\text{⍰}_n(cos\theta_n)$$

yazılırsa gerekli sadeleştirmelerden ve denklemin her iki tarafının $sin^2\theta_n$ ile bölünmesinden sonra,

$$
\left\{
\begin{aligned}
& \mu(\mu + n + k_1 + \cdots + k_{n+2}) sin^2\theta_1 \cdots sin^2\theta_{n-1} \\
& + \left[\frac{\partial^2 Y_{n-1}}{\partial\theta_1^2} + (n - k_1 tg^2\theta_1 + k_2 + \cdots + k_{n+2}) cotg\theta_1 \frac{\partial Y_{n-1}}{\partial\theta_1}\right] \frac{1}{Y_{n-1}} sin^2\theta_1 \cdots sin^2\theta_{n-1} \\
+ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + \left[\frac{\partial^2 Y_{n-1}}{\partial\theta_j^2} + \left(n - j + 1 - k_j tg^2\theta_j + \cdots + k_{n+2}\right) cotg\theta_j \frac{\partial Y_{n-1}}{\partial\theta_j}\right] \frac{1}{Y_{n-1}} sin^2\theta_j \cdots sin^2\theta_{n-1} \\
+ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + \left[\frac{\partial^2 Y_{n-1}}{\partial\theta_j^2} + (2 - k_{n-1} tg^2\theta_{n-1} + k_n + \cdots + k_{n+2}) cotg\theta_{n-1} \frac{\partial Y_{n-1}}{\partial\theta_{n-1}}\right] \frac{1}{Y_{n-1}} sin^2\theta_{n-1} \\
& + \left[\frac{\partial^2 \square_n}{\partial\theta_n^2} + (2P_n + k_n tg^2\theta_n + k_{n+1} + k_{n+2}) cotg\theta_n \frac{\partial \square_n}{\partial\theta_n}\right] \frac{1}{\square_n} \\
& + P_n(P_n - k_n tg^2\theta_n + k_{n+1} + k_{n+2}) cotg\theta_n - P_n - \frac{P_n(P_n + k_{n+1} + k_{n+2})}{sin^2\theta_n} = 0,
\end{aligned}
\right.
$$

elde edilir. (3.11)

(3.11)'de θ_n ye bağlı terimler ikinci tarafa geçirilirse birinci tarafta $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{n-1}$ e bağlı ifade kalır, yani elde edilen eşitliğin iki yanı ayrı ayrı değişkenlere bağlı bulunurlar, demek ki bir sabite eşittirler. Bu sabit bu defa

$$P_{n-1}\,(P_{n-1} + 1 + k_n + k_{n+1} + k_{n+2})$$

şeklinde seçilip gerekli sadeleştirmeler yapıldıktan sonra aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$
\left\{
\begin{aligned}
& \mu\,(\mu + n + k_1 + \cdots + k_{n+2}) sin^2\theta_1 \cdots sin^2\theta_{n-1} \\
& + \left[\frac{\partial^2 Y_{n-1}}{\partial\theta_1^2} + (n - k_1 tg^2\theta_1 + k_2 + \cdots + k_{n+2}) cotg\theta_1 \frac{\partial Y_{n-1}}{\partial\theta_1}\right] \frac{1}{Y_{n-1}} sin^2\theta_1 \cdots sin^2\theta_{n-1} \\
+ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + \left[\frac{\partial^2 Y_{n-1}}{\partial\theta_j^2} + \left(n - j + 1 - k_j tg^2\theta_j + k_{j+1} \cdots + k_{n+2}\right) cotg\theta_j \frac{\partial Y_{n-1}}{\partial\theta_j}\right] \frac{1}{Y_{n-1}} sin^2\theta_j \cdots sin^2\theta_{n-1} \\
+ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + \left[\frac{\partial^2 Y_{n-1}}{\partial\theta_{n-1}^2} + (2 - k_{n-1} tg^2\theta_{n-1} + k_n + \cdots + k_{n+2}) cotg\theta_{n-1} \frac{\partial Y_{n-1}}{\partial\theta_{n-1}}\right] \frac{1}{Y_{n-1}} sin^2\theta_{n-1} \\
& - P_{n-1}(P_n + k_{n+1} + k_{n+2}) = 0
\end{aligned}
\right.
\qquad (3.12)
$$

$$\begin{cases} sin^2\theta_n \dfrac{d^2\square_n}{d\theta_n^2} + (2P_n + 1 - k_n tg^2\theta_n + k_{n+1} + k_{n+2}) sin\theta_n cos\theta_n \dfrac{d\square_n}{d\theta_n} \\ \quad +(P_{n-1} - P_n)(P_{n-1} + P_n + 1 + k_n + k_{n+1} + k_{n+2}) sin^2\theta_n \square_n = 0 \end{cases} \qquad (3.13)$$

Bu işleme aynı tarzda devam ederek $\theta_j$li terime sıra geldiğinde

$$Y_j = Y_{j-1}(\theta_1, \cdots, \theta_{j-1})(sin\theta_j)^{P_j} \square_j(cos\theta_j)$$

Yazılırsa denklem şu şekle girer:

$$\begin{cases} \qquad \mu(\mu + n + k_1 + \cdots + k_{n+2}) sin^2\theta_1 \cdots sin^2\theta_{j-1} \\ \quad + \left[\dfrac{\partial^2 Y_{j-1}}{\partial\theta_1^2} + (n - k_1 tg^2\theta_1 + k_2 + \cdots + k_{n+2}) cotg\theta_1 \dfrac{\partial Y_{n-1}}{\partial\theta_1}\right] \dfrac{1}{Y_{n-1}} sin^2\theta_1 \cdots sin^2\theta_{j-1} \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \quad + \left[\dfrac{\partial^2 Y_{j-1}}{\partial\theta_{j-1}^2} + (n - j + 2 - k_{j-1} tg^2\theta_{j-1} + k_j + \cdots + k_{n+2}) cotg\theta_{j-1} \dfrac{\partial Y_{j-1}}{\partial\theta_{j-1}}\right] \dfrac{1}{Y_{j-1}} sin^2\theta_{j-1} \\ \quad + \left[\dfrac{d^2\square_j}{d\theta_j^2} + (2P_j + n - j + 1 - k_j tg^2\theta_j + k_{j+1} + \cdots + k_{n+2}) cotg\theta_j \dfrac{d\square_j}{d\theta_j}\right] \dfrac{1}{\square_j} \\ \quad + P_j(P_j + n - j k_j tg^2\theta_j + k_{j+1} + \cdots + k_{n+2}) - P_j - \dfrac{P_j(P_j + n - j + k_{j+1} + \cdots + k_{n+2})}{sin^2\theta_j} \end{cases}$$

(3.14)

Yukarıda yapıldığı gibi (3.1.1.14) de θ_j li terimler ikinci tarafa geçirilir ve keyfi sabit olarak $P_{j-1}(P_{j-1} + n - j + 1 + k_j + \cdots + k_{n+2})$ alınırsa,

$$\begin{cases} \qquad \mu\,(\mu + n + k_1 + \cdots + k_{n+2})\, sin^2\theta_1 \cdots sin^2\theta_{j-1} \\ \quad + \left[\dfrac{\partial^2 Y_{j-1}}{\partial\theta_1^2} + (n - k_1 tg^2\theta_1 + k_2 + \cdots + k_{n+2}) cotg\theta_1 \dfrac{\partial Y_{j-1}}{\partial\theta_1}\right] \dfrac{1}{Y_{j-1}} sin^2\theta_1 \cdots sin^2\theta_{j-1} \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \quad + \left[\dfrac{\partial^2 Y_{j-1}}{\partial\theta_{j-1}^2} + (n - j + 2 - k_{j-1} tg^2\theta_{j-1} + k_j + \cdots + k_{n+2}) cotg\theta_{j-1} \dfrac{\partial Y_{j-1}}{\partial\theta_{j-1}}\right] \dfrac{1}{Y_{j-1}} sin^2\theta_{j-1} \\ \quad - P_{j-1}(P_{j-1} + n - j + 1 + k_j + \cdots + k_{n+2}) = 0 \end{cases} \qquad (3.15)$$

ve

$$\begin{cases} sin^2\theta_j \dfrac{d^2\square_j}{d\theta_j^2} + \left(2P_j + n - j + 1 - k_j tg^2\theta_j + k_{j+1} + k_{n+2}\right) sin\theta_j cos\theta_j \dfrac{d\square_j}{d\theta_j} \\ \quad +\left(P_{j-1} - P_j\right)\left(P_{j-1} + P_j + n - j + 1 + k_j + \cdots + k_{n+2}\right) sin^2\theta_j \square_j = 0 \quad (3.16) \end{cases}$$

denklemleri bulunur. Nihayet aynı işleme devam edilirse sadece θ_1 e bağlı terimler kalır ve keyfi sabit olarak $P_1(P_1 + n - 1 + k_2 + \cdots + k_{n+2})$ seçilmesi gerekir. Böylece

$$\begin{cases} \quad \mu(\mu + n + k_1 + \cdots + k_{n+2}) sin^2\theta_1 \\ + \left[\dfrac{d^2\square_1}{d\theta_1^2} + (2P_1 + n - k_1 tg^2\theta_1 + k_2 + \cdots + k_{n+2}) cotg\theta_1 \dfrac{d\square_1}{d\theta_1}\right] \dfrac{1}{\square_1} sin^2\theta_1 \\ + [P_1(P_1 + n - 1 - k_1 tg^2\theta_1 + k_2 + \cdots + k_{n+2}) cotg^2\theta_1 - P_1] sin^2\theta_1 \\ \quad -P_1(P_1 + n - 1 + k_2 + \cdots + k_{n+2}) = 0 \qquad (3.17) \end{cases}$$

veya gerekli bazı sınırlama ve sadeleştirmeden sonra,

$$\begin{cases} sin^2\theta_1 \dfrac{d^2\square_1}{d\theta_1^2} + (2P_1 + n - k_1 tg^2\theta_1 + k_2 + \cdots + k_{n+2}) sin\theta_1 cos\theta_1 \dfrac{d\square_1}{d\theta_1} \\ \quad +(\mu - P_1)(\mu + P_1 + n + k_1 + \cdots + k_{n+2}) sin\theta_1 \square_1 = 0 \qquad (3.18) \end{cases}$$

elde edilir. Görülüyor ki yukarıda uygulanan işlem yardımıyla (3.6) denkleminin kısmi türevli denklemi (3.10) , (3.13) ,…, (3.16) ,…, (3.18) denklemleri gibi n+1 tane adi difrensiyel denkleme indirgenmiş bulunmaktadır. Bunlardan θ_j değişkenine ait olan (3.16) denklemi genel şekilde olduğundan bundan sonraki işlemler sadece (3.16) ve (3.10) denklemleri üzerinde yapılır. (3.16) ve (3.10) denklemlerine de sırasıyla $cos\theta_j = \xi_j, cos\varphi = \lambda$ dönüşümleri yapılırsa,

$$\begin{cases} \xi_j\left(1 - \xi_j^2\right) \dfrac{d^2\square_j}{d\xi_j^2} + \left[k_j - \left(2P_j + n - j + 2 + k_j + \cdots + k_{n+2}\right)\xi_j^2\right] \dfrac{d^2\square_j}{d\xi_j} \\ \quad +\left(P_{j-1} - P_j\right)\left(P_{j-1} + P_j + n - j + 1 + k_j + \cdots k_{n+2}\right)\xi_j \square_j = 0 \qquad (3.19) \end{cases}$$

ve

$$\eta(1-\eta^2)\frac{d^2\phi}{d\eta^2}+[k_{n+1}-(1+k_{n+1}+k_{n+2})\eta^2]\frac{d\phi}{d\eta}$$

$$+P_n\,(P_n+k_{n+1}+k_{n+2})\,\eta\phi=0 \tag{3.20}$$

denklemleri elde edilir.

(3.19) ve (3.20) denklemlerinin çözümlerinin bulunması için bu denklemlerin hipergeometrik denklemlere dönüştürülmesi gerekir.

$$\xi_j^2=1-x_j,\eta^2=1-y$$

şeklinde değişken değiştirmelerin bu amacı sağladığı görülür. Gerçekten yukarıdaki dönüşümler yardımıyla (3.19) ve (3.20) denklemleri aşağıdaki şekilleri alırlar.

$$\left.\begin{aligned}&x_j(1-x_j)\frac{d^2\psi_j}{dx_j^2}\\&+\frac{1}{2}\left[\left(2P_j+n-j+2+k_{j+1}+\cdots+k_{n+2}\right)-\ (2P_jn-j+3+k_j+\cdots+k_{n+2})\,x\right]\frac{d\psi_j}{dx_j}\\&+\frac{1}{4}\left(P_{j-1}-P_j\right)\left(P_{j-1}+P_j+n-j+1+k_j+\cdots+k_{n+2}\right)\psi_j=0 \qquad (3.21)\end{aligned}\right\}$$

ve

$$y(1-y)\frac{d^2\phi}{dy^2}+\frac{1}{2}[(1+k_{n+2})-(2+k_{n+1}+k_{n+2})y]\frac{d\phi}{dy}$$

$$+\frac{1}{4}P_n(P_n+k_{n+1}+k_{n+2})\phi=0 \tag{3.22}$$

şeklinde elde edilen bu son iki denklem birer hipergeometrik denklemdir. Biraz sadelik oluşması için,

$$\propto_j = \frac{1}{2}\left(P_{j-1} - P_j\right), a = \frac{1}{2}P_n$$

$$\beta_j = \frac{1}{2}\left(P_{j-1} + P_j + m_j\right), b = \frac{1}{2}\ (P_n + k_{n+1} + k_{n+2})$$

$$\square_j = \frac{1}{2}\left(2P_j + 2 + m_{j+1}\right), \mathrm{c} = \frac{1}{2}\ (1 + k_{n+2})$$

$$(m_j = n - j + 1 + k_j + \cdots + k_{n+2})$$

farz edilerek (3.21) ve (3.22) denklemleri tekrar yazılırsa,.

$$x_j\left(1 - x_j\right)\frac{d^2\square_j}{dx_j^2} + \left[\square_j - \left(-\propto_j + \beta_j + 1\right)x_j\right]\frac{d\square_j}{dx_j} - \left(-\propto_j\right)\beta_j\square_j = 0 \tag{3.23}$$

$$y(1-y)\frac{d^2\phi}{dy^2} + [0 - (-a + b + 1)y]\frac{d\phi}{dy} - (-a)b\phi = 0 \tag{3.24}$$

denklemleri elde edilir.

Bilindiği üzere (3.23) ve (3.24) denklemlerinin birer çözümü sıra ile (dönüşüm formüllerinden, $x_j = sin^2\theta_j$ ve $y = sin^2\varphi$ olduğundan hesaba katılırsa)

$$\square_j = F\left(-\propto_j, \beta_j; \square_j; sin^2\theta_j\right) \tag{3.25}$$

ve

$$\phi = F\ (-a, b; c;\ sin^2\varphi) \tag{3.26}$$

hipergeometrik serileridir. Bu çözümler,

$$\gamma_j \neq 0, -1, -2, \cdots \text{ yani } 2p_j + 2 + m_{j+1} \neq 0, -2, -4, \cdots$$

ve

$$c \neq 0, -1, -2, \cdots \ yani \ 1 + k_{n+2} \neq 0, -2, -4, \cdots$$

olmak şartıyla parametrelerin diğer bütün değerleri için geçerlidir. (3.25) ve (3.26) serileri $\theta_j \neq \frac{\pi}{2}, \varphi = \frac{\pi}{2}$ olmak üzere değişkenlerin tanım aralığındaki diğer bütün değerleri için yakınsaktırlar. θ_j ve φ nin yukarıdaki değerleri almaları halinde, yakınsak çözümler bulmak için parametrelere bazı koşullar yüklenmelidir. Şöyle ki:

$$\theta_j = \frac{\pi}{2} \ için \ -\propto_j + \beta_j - \gamma_j < 0$$

$$\varphi = \pm\frac{\pi}{2} \ için \ -a + b - c < 0$$

ise bu seriler mutlak yakınsaktırlar. Bu arada belirtilmelidir ki,

$$\gamma_j = 0, -1, 2, \cdots; \ c = 0, -1, -2, \cdots$$

olmakla beraber $\propto_j$ veya β_j ve a veya b de tam sayılar ise ve ayrıca

$$\gamma_j \leqq -\propto_j \leqq 0 \ veya \ \gamma_j \leqq \beta_j \leqq 0$$

ve

$$c \leqq -a \leqq 0 \ veya \ c \leqq b \leqq 0$$

koşulları da sağlanıyorsa (3.25) ve (3.26) denklemlerinin çözümleri yine geçerlidir. Çünkü bu halde paylar paydalardan önce sıfır olacaklarından serilerin herhangi bir teriminin sonsuz olması tehlikesi yoktur. Seriler yine polinomlara indirgenmiş bulunurlar.

Öte yandan μ ve P_j $(j = 1, 2, \cdots, n)$ lerin pozitif çift sayılar olmaları halinde, (3.25) ve (3.26) serileri yine birer polinomdan ibaret bulunurlar. Gerçekten μ ve P_j lerin çift sayılar olmaları nedeniyle, $\propto_j = \frac{1}{2}\left(P_{j-1} - P_j\right), a = \frac{1}{2}P_n$ doğal dayı olurlar; dolayısıyla $-\propto_j$ ve – a negatif tam sayılardır. O halde hipergeometrik serilerin terimleri belli bir sıradan itibaren sıfır olurlar. Böylece (3.25) ve (3.26) çözümleri sıra ile $sin\theta_j$ ve $sin\varphi$ ye göre $P_{j-1} - P_j$ ve $P_n$yinci dereceden polinomlardır.

Yukarıda belirtilen hallerin dışında,

$$\square_j = 0, -1, -2, \cdots;\ c = 0, -1, -2, \cdots$$

olması halinde (3.1.1.25) ve (3.1.1.26) çözümleri yerine

$$\square_j = \left(sin^2\theta_j\right)^{1-\square_j} F\left(-\propto_j - \square_j + 1; 2 - \square_j; sin^2\theta_j\right) \tag{3.27}$$

ve

$$\phi = (sin^2)^{1-c} F(-a - c + 1, b - c + 1; 2 - c; sin^2\varphi) \tag{3.28}$$

ifadeleri alınır. Bu seriler de $\square_j$ ve o nin tam sayı olmaları halinde$\propto_j$ veya β_j ve a veya b de tam sayılar ise

$$1 \leqq -\propto_j \leqq \square_j - 1\ veya\ 1 \leqq \beta_j \leqq \square_j - 1$$

ve

$$1 \leqq -a \leqq c-1 \; veya \; 1 \leqq b \leqq c-1$$

koşulları altında polinomlara indirgenmiş olacakları aşikârdır. Çünkü bu halde de belli bir terimden itibaren serilerin payları paydalarından önce sıfır olur. Böylece $k_j(j = 1,2,\cdot\cdot\cdot, n+2)$ parametrelerinin bütün reel değerleri için (3.23) ve (3.24) denklemlerinin birer çözümünü bulmak mümkündür. Çalışmanın bu kısmının sonuçlandırılması için daha önce sözü edilen $Y_\mu \sum -$hiperküresel fonksiyonunun

$$Y_\mu = \prod_{j=1}^{n} \left(sin\theta_j\right)^{P_j} F\left(-\propto_j, \beta_j; ?_j; sin^2\theta_j\right) F\left(-a, b; c; sin^2\varphi\right) \tag{3.21}$$

şeklinde olduğu belirtilmelidir. Dikkat edilecek olursa $?_j$ ve ϕ nin polinom olmaları halinde, (3.29) fonksiyonu da $sin\theta_1 \cdots sin\theta_n \, sin\varphi$ ye göre $\mu + P_1 + \cdots P_n$ inci dereceden bir polinomdur. Ayrıca (3.3) ve (3.5) formülleriyle tamamladığımız, r yarıçaplı S hiperküresinin sıra ile içinde ve dışında $\sum -$homogenharmonikpolinom olan P_μ ve Q_μ fonksiyonları da aşağıdaki ifadelere sahip bulunurlar.

$$P_\mu = r^\mu \prod_{j=1}^{n} \left(sin\theta_j\right)^{P_j} F\left(-\propto_j, \beta_j; ?_j; sin^2\theta_j\right) F\left(-a, b; \mathrm{c}; sin^2\varphi\right) \tag{3.30}$$

$$Q_\mu = r^{-\left(n+\mu+\sum_{i=1}^{n+2} \mathrm{k}_1\right)} \prod_{j=1}^{n} \left(sin\theta_j\right)^{P_j} F\left(-\propto_j, \beta_j; ?_j; sin^2\theta_j\right) F\left(-a, b; c; sin^2\varphi\right) \tag{3.31}$$

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Θ_j ve ϕ Fonksiyonlarının Bazı Özelikleri

Bu kısımda ki özelliklerin kurulmasında μ ve P_j pozitif çift sayı, $k_j + \cdots + k_{n+2}$ $(j = 1, \cdots, n+1)$ toplamı da doğal sayı olarak kabul edilmiştir.

4.1.1. Θ_j Fonksiyonu için birinci özelik

$P_{j-1} = P'_{j-1}$ için $\boldsymbol{\Theta_j} = \boldsymbol{\Theta}'_j$ ve $P_{j-1} = P''_{j-1}$ için $\boldsymbol{\Theta_j} = \boldsymbol{\Theta}''_j$ kabul ederek

$$\int_0^{\pi} \left(sin\theta_j\right)^{2P_j+m_j} \boldsymbol{\Theta_j}\boldsymbol{\Theta}''_j d\theta_j \tag{4.1}$$

integralinin değerinin hesap edilmesi gerekir. $\boldsymbol{\Theta_j}$ fonksiyonu

$$\begin{cases} sin^2\theta_j \dfrac{d^2\Theta_j}{d\theta_j^2} + \left(2P_j + m_j - \dfrac{k_j}{cos^2\theta_j}\right) sin\theta_j cos\theta_j \dfrac{d\Theta_j}{d\theta_j} \\ +\left(P_{j-1} - P_j\right)\left(P_{j-1} + P_j + m_j\right) sin^2\theta_j \Theta_j = 0 \end{cases} \tag{4.2}$$

denkleminin bir çözümü olduğundan dolayı bu fonksiyon

$$\begin{cases} sin^2\theta_j \dfrac{d^2\Theta'_1}{d\theta_j^2} + \left(2P_j + m_j - \dfrac{k_j}{cos^2\theta_j}\right) sin\theta_j cos\theta_j \dfrac{d\Theta'_1}{d\theta_j} \\ +\left(P'_{j-1} - P_j\right)\left(P'_{j-1} + P_j + m_j\right) sin^2\theta_j \boldsymbol{\Theta}'_j = 0 \end{cases} \tag{4.3}$$

ve

$$\begin{cases} sin^2\theta_j \dfrac{d^2\Theta_j''}{d\theta_j^2} + \left(2P_j + m_j - \dfrac{k_j}{cos^2\theta_j}\right) sin\theta_j cos\theta_j \dfrac{d\Theta_j''}{d\theta_j} + \\ \quad +\left(P_{j-1}'' - P_j\right)\left(P_{j-1}'' + P_j + m_j\right) sin^2\theta_j \mathbf{\Theta}_j'' = 0 \end{cases} \tag{4.4}$$

denklemlerini sağlar. (4.3) denkleminin iki tarafı $\left(sin\theta_j\right)^{2P_j+m_j-2}\Theta_j''$, (4.4) denkleminin iki tarafı $\left(sin\theta_j\right)^{2P_j+m_j-2}\Theta_j'$ ile çarpılıp bunları taraf tarafa çıkarılırsa,

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d\theta_j}\left[\left(sin\theta_j\right)^{2P_j+m_j}\left(\Theta_j''\frac{d\Theta_j'}{d\theta_j} - \Theta_j'\frac{d\Theta_j''}{d\theta_j}\right)\right] \\ &-k_j\frac{\left(sin\theta_j\right)^{2P_j+m_j-1}}{cos\theta_j}\left(\Theta_j''\frac{d\Theta_j'}{d\theta_j} - \Theta_j'\frac{d\Theta_j''}{d\theta_j}\right) \\ &+\left(P_{j-1}' = P_{j-1}'' + m_j\right)\left(sin\theta_j\right)^{2P_j+m_j}\theta_j\mathbf{\Theta}_j' = 0 \end{aligned} \tag{4.5}$$

elde edilir. (4.5) denkleminin iki tarafının $(0,\pi)$ aralığında θ_j ye göre integral alınırsa

$$\begin{aligned} &\left[\left(sin\theta_j\right)^{2P_j+m_j}\left(\Theta_j''\frac{d\Theta_j'}{d\theta_j} - \Theta_j'\frac{d\Theta_j''}{d\theta_j}\right)\right]_0^\pi \\ &-k_j\int_0^\pi \frac{\left(sin\theta_j\right)^{2P_j+m_j-1}}{cos\theta_j}\left(\Theta_j''\frac{d\Theta_j'}{d\theta_j} - \Theta_j'\frac{d\Theta_j''}{d\theta_j}\right)d\theta_j \\ &+\left(P_{j-1}' - P_{j-1}''\right)\left(P_{j-1}' + P_{j-1}'' + m_j\right)\int_0^\pi \left(sin\theta_j\right)^{2P_j+m_j}\theta_j\mathbf{\Theta}_j' = 0 \end{aligned} \tag{4.6}$$

elde edilir.

$\Theta_j', \frac{d\Theta_j'}{d\theta_j}, \Theta_j''$ ve $\frac{d\Theta_j''}{d\theta_j}$ ifadeleri $sin\theta_j$ ye göre polinomlar olduklarından $\theta_j = 0$ ve $\theta_j = \pi$ için sonlu değerler alırlar; dolayısıyla (4.6)'nın ilk teriminin değeri sıfırdır. Demek ki

$$\left(P'_{j-1} - P''_{j-1}\right)\left(P'_{j-1} + P''_{j-1} + m_j\right) \int_0^{\pi} \left(sin\theta_j\right)^{2P_j+m_j} \theta_j \mathbf{\Theta}'_j \, d\theta_j$$
$$= k_j \int_0^{\pi} \left(sin\theta_j\right)^{2P_j+m_j-1} \frac{1}{cos\theta_j} \left(\Theta''_j \frac{d\Theta'_j}{d\theta_j} - \Theta'_j \frac{d\Theta''_j}{d\theta_j}\right) d\theta_j \tag{4.7}$$

yazılabilir. Şimdi (4.7)'nin ikinci tarafındaki integralin değerinin hesaplaması gerekir.

$$\propto'_j = \frac{1}{2}\left(P'_{j-1} - P_j\right), \propto''_j = \frac{1}{2}\left(P''_{j-1} - P_j\right)$$

$$\beta'_j = \frac{1}{2}\left(P'_{j-1} + P_j + m_j\right), \beta''_j = \frac{1}{2}\left(P''_{j-1} + P_j + m_j\right)$$

$$\gamma_j = \frac{1}{2}\left(2P_j + 2m_{j+1}\right), \gamma_j = \frac{1}{2}\left(2P_j + 2m_{j+1} + 2\right)$$

olmak üzere,

$$\Theta'_j = F\left(-\propto'_j, \beta'_j; \gamma_j; sin\theta_j\right), \Theta''_j = F\left(-\propto''_j, \beta''_j; \gamma_j; sin\theta_j\right)$$

$$\frac{d\Theta'_j}{d\theta_j} = -2\frac{-\propto'_j \beta'_j}{\gamma_j} sin\theta_j cos\theta_j \; F\left(-\propto'_j + 1, \beta'_j + 1; \gamma_j + 1; sin^2\theta_j\right)$$

$$\frac{d\Theta''_j}{d\theta_j} = -2\frac{\propto''_j \beta''_j}{\gamma_j} sin\theta_j cos\theta_j \; F\left(-\propto''_j + 1, \beta''_j + 1; \gamma_j + 1; sin^2\theta_j\right)$$

ifadeleri (4.7) ifadesinin ikinci tarafında yerlerine yazılırsa, (4.7) ifadesinin I_1 ile göstereceğimiz ikinci tarafı

$$I_1 = 2k_j \int_0^{\pi} \left(sin\theta_j\right)^{2P_j+m_j}$$
$$\cdot\left[-\frac{\propto_j' \ \beta_j'}{\text{ɣ}_j} \ F\ (-\propto_j'+1, \beta_j'+1; \text{ɣ}_j+1; sin^2\theta_j)\ F\ (-\propto_j'', \beta_j''; sin^2\theta_j)\right.$$
$$\left.+\frac{\propto_j'' \ \beta_j''}{\text{ɣ}_j} \ F\ (-\propto_j''+1, \beta_j''+1; \text{ɣ}_j+1; sin^2\theta_j)\ F\ (-\propto_j', \beta_j'; \text{ɣ}_j; sin^2\theta_j)\right] d\theta_j \qquad (4.8)$$

şeklini alır. Eğer

$$\frac{(\propto_j')\ _r\left(\beta_j'\right)_r}{\left(\text{ɣ}_j\right)_r r!} = A_r', \quad \frac{(\propto_j'')\ _s\left(\beta_j''\right)_s}{\left(\text{ɣ}_j\right)_s s!} = A_s''$$

farz edilirse (4.8) eşitliği,

$$I_1 = 2k_j \int_0^{\pi} \left(sin^2\theta_j\right)^{2P_j+m_j}$$
$$\left[\sum_{r=0}^{\propto_j'-1} \frac{(\propto_j'+r)\ (\beta_j'+r)}{\text{ɣ}_j+s} A_r'\left(sin^2\theta_j\right)^{2r} \sum_{s=0}^{\propto_j''} A_r''\left(sin^2\theta_j\right)^{2s}\right.$$
$$\left.-\sum_{s=0}^{\propto_j''-1} \frac{(\propto_j''+s)\ (\beta_j''+c)}{\text{ɣ}_j+s} A_s''\left(sin^2\theta_j\right)^{2s} \sum_{r=0}^{\propto_j'} A_r'\left(sin^2\theta_j\right)^{2r}\right] d\theta_j \qquad (4.9)$$

şeklinde yazılabilir ve polinomların çarpım kurallarından faydalanılırsa (4.9) bağıntısına

$$\begin{cases} I_1 = 2k_j \left[\sum_{r=0}^{\propto_j'-1} \sum_{s=0}^{\propto_j''} \frac{(-\propto_j'+r)\ (\beta_j'+r)}{\text{ɣ}_j+r} - \sum_{s=0}^{\propto_j''-1} \sum_{r=0}^{\propto_j'} \frac{(-\propto_j''+s)\ (\beta_j''+r)}{\text{ɣ}_j+s}\right] \\ \cdot A_r' A_s'' \int_0^{\pi} \left(sin^2\theta_j\right)^{-2P_j+m_j+2r+2s} d\theta_j \end{cases} \qquad (4.10)$$

şekli verilebilir.

Bilindiği gibi $t \in N$ olmak üzere,

$$\int_0^{\pi} \left(sin^2\theta_j\right)^t d\theta_j = \sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{t+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{t+2}{2}\right)} \tag{4.11}$$

şeklindedir. O halde (4.10) eşitliği

$$\begin{cases} I_1 = 2\sqrt{\pi}k_j \left[\sum_{r=0}^{\propto_j'-1}\sum_{s=0}^{\propto_j''} \frac{(-\propto_j'+r)\,(\beta_j'+r)}{\gamma_j+r} - \sum_{s=0}^{\propto_j''-1}\sum_{r=0}^{\propto_j'} \frac{(-\propto_j''+s)\,(\beta_j''+s)}{\gamma_j+s}\right] \\ \cdot\frac{(-\propto_j')_r\left(\beta_j'\right)_r}{(\gamma_j)_r\, r!}\frac{(-\propto_j'')_s\left(\beta_j''\right)_s}{(\gamma_j)_s\, s!}\frac{\Gamma\left(\frac{2P_j+m_j+2r+2s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2P_j+m_j+2r+2s+}{2}\right)} \end{cases} \tag{4.12}$$

şeklini alır. Eğer $\propto_j', \beta_j', \propto_j'', \beta_j''$ nün değerleri (4.12) ifadesinde yerlerine konulursa

$$\begin{aligned} I_1 = \sqrt{\pi}k_j & \sum_{r=0}^{\frac{1}{2}\left(P_{j-1}'-P_j-2\right)} \sum_{s=0}^{\frac{1}{2}\left(P_{j-1}''-P_j-2\right)} \frac{\left(P_j-P_{j-1}'+2r\right)\left(P_j-P_{j-1}'+m_j+2r\right)}{\left(2P_j+2+m_{j+1}+2r\right)} \\ & - \sum_{s=0}^{\frac{1}{2}\left(P_{j-1}''-P_j-2\right)} \sum_{r=0}^{\frac{1}{2}\left(P_{j-1}'-P_j\right)} \frac{\left(P_j-P_{j-1}''+2s\right)\left(P_j-P_{j-1}''+m_j+2s\right)}{\left(2P_j+2+m_{j+1}+2s\right)} \\ & \cdot\frac{\left[\frac{1}{2}\left(P_j-P_{j-1}'\right)\right]_r\left[\frac{1}{2}\left(P_j+P_{j-1}'+m_j\right)\right]_r}{\left(2P_j+2+m_{j+1}\right)_r \mathrm{r}!}\frac{\left[\frac{1}{2}\left(P_j-P_{j-1}''\right)\right]_s\left[\frac{1}{2}\left(P_j+P_{j-1}''+m_j\right)\right]_s}{\left(2P_j+2+m_{j+1}\right)_s s!} \\ & \cdot\frac{\Gamma\left(\frac{2P_j+m_j+2r+2s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2P_j+m_j+2r+2s+2}{2}\right)} \end{aligned} \tag{4.13}$$

elde edilir. Öte yandan, $P'_{j-1} \neq P''_{j-1}$ ve $m_j > 0$ olduğu için $P'_{j-1} - P''_{j-1}$ ve

$P'_{j-1} + P''_{j-1} + m_j$ sıfırdan farklıdır. Şu halde hesabedilmesi istenilen integralin değeri olarak

$$\int_0^{\pi} \left(sin\theta_j\right)^{2P_j+m_j} \Theta'_j \Theta''_j \, d\theta_j = \frac{I_1}{\left(P'_{j-1} - P''_{j-1}\right)\left(P'_{j-1} + P''_{j-1} m_j\right)} \tag{4.14}$$

elde edilir. Görülüyor ki bu integralin değeri ancak $k_j = 0$ halinde sıfır olmaktadır. Bu son özelik Laplace denkleminin çözümlerinde ortaya çıkan önemli ortogonallik özelliğinin $\sum$ −harmonik denklem için karşılaştığını teşkil etmektedir.

4.1.2. Θ_j Fonksiyonu için ikinci bir özelik

$$\int_0^{\pi} \left(sin^2\theta_j\right)^{2P_j+m_j} \Theta_j^2 \, d\theta_j \tag{4.15}$$

integrali hesaplamaya çalışılırsa; Θ_j fonksiyonu

$$\begin{cases} sin^2\theta_j \frac{d^2\Theta_j}{d\theta_j^2} + \left(2P_j + m_j - \frac{k_j}{cos^2\theta_j}\right) sin\theta_j cos\theta_j \frac{d\Theta_j}{d\theta_j} + \\ \quad +\left(P_{j-1} - P_j\right)\left(P_{j-1} + P_j + m_j\right) sin^2\theta_j \Theta_j = 0 \end{cases} \tag{4.16}$$

denkleminin bir çözümü olup bu denklemin iki tarafı $\left(sin\theta_j\right)^{2P_j+m_j-2}\Theta_j$ ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d\theta_j}\left[\left(sin^2\theta_j\right)^{2P_j+m_j}\Theta_j \frac{d\Theta_j}{d\theta_j}\right] - \left(sin^2\theta_j\right)^{2P_j+m_j}\left(\frac{d\Theta_j}{d\theta_j}\right)^2 \\ &-\frac{k_j}{cos\theta_j}\left(sin^2\theta_j\right)^{2P_j+m_j-1}\Theta_j \frac{d\Theta_j}{d\theta_j} \\ &+\left(P_{j-1} - P_j\right)\left(P_{j-1} + P_j + m_j\right)\left(sin^2\theta_j\right)^{2P_j+m_j}\Theta_j^2 = 0 \end{aligned} \tag{4.17}$$

elde edilir. Buradan, $(0, \pi)$ aralığında θ_j ye göre integral alınırsa

$$(P_{j-1} - P_j)(P_{j-1} + P_j + m_j)\int_0^{\pi}\left(sin^2\theta_j\right)^{2P_j+m_j}\Theta_j^2\, d\theta_j = -\left[\left(sin^2\theta_j\right)^{2P_j+m_j}\Theta_j\frac{d\Theta_j}{d\theta_j}\right]_0^{\pi}$$
$$+\int_0^{\pi}\left(sin\theta_j\right)^{2P_j+m_j}\left(\frac{d\Theta_j}{d\theta_j}\right)^2 d\theta_j + k_j\int_0^{\pi}\frac{\left(sin\theta_j\right)^{2P_j+m_j-1}}{cos\theta_j}\Theta_j\frac{d\Theta_j}{d\theta_j}d\theta_j \qquad (4.18)$$

elde edilir. Öte yandan $\theta_j = 0$ ve $\theta_j = \pi$ için Θ_j ve $\frac{d\Theta_j}{d\theta_j}$ sonlu olduklarından ikinci taraftaki ilk terim sıfır olur. Böylece,

$$\begin{cases} (P_{j-1} - P_j)(P_{j-1} + P_j + m_j)\int_0^{\pi}\left(sin\theta_j\right)^{2P_j+m_j}\Theta_j^2\, d\theta_j = \\ +\int_0^{\pi}\left(sin\theta_j\right)^{2P_j+m_j}\left(\frac{d\Theta_j}{d\theta_j}\right)^2 d\theta_j + k_j\int_0^{\pi}\frac{\left(sin\theta_j\right)^{2P_j+m_j-1}}{cos\theta_j}\Theta_j\frac{d\Theta_j}{d\theta_j}d\theta_j \end{cases} \qquad (4.19)$$

bulunur. (4.19)'un ikinci tarafı I_2 ile gösterilir ve $\Theta_j\frac{d\Theta_j}{d\theta_j}$ nin değerleri yerine yazılırsa

$$\begin{cases} I_2 = 4\int_0^{\pi}\left(sin\theta_j\right)^{2P_j+m_j}cos^2\theta_j\left[-\frac{\propto_j\beta_j}{\gamma_j}F\left(-\propto_j + 1, \beta_j + 1; \gamma_j + 1 sin^2\theta_j\right)\right]^2 d\theta_j \\ -2k_j\int_0^{\pi}\left(sin\theta_j\right)^{2P_j+m_j}\frac{\propto_j\beta_j}{\gamma_j}F\left(-\propto_j + 1, \beta_j + 1; \gamma_j + 1 sin^2\theta_j\right)F\left(-\propto_j, \beta_j; \gamma_j + sin^2\theta_j\right)d\theta_j \end{cases}$$
$$(4.20)$$

eşitliğine varılır.

$$\frac{(-\propto_j)_r(\beta_j)_r}{(\gamma_j)_r\, r!} = A_r\,, \qquad \frac{(-\propto_j)_s(\beta_j)_s}{(\gamma_j)_s\, s!} = A_s$$

farz edildikten sonra (4.20) eşitliği tekrar yazılırsa

$$\begin{cases} I_2 = 4\int_0^{\pi}\left(\sin\theta_j\right)^{2P_j+m_j}\cos^2\theta_j \\ \left[\sum_{r=0}^{\propto_j-1}\frac{\left(-\propto_j+r\right)\left(\beta_j+r\right)}{\gamma_j+r}A_r\left(\sin\theta_j\right)^{2r}\sum_{s=0}^{\propto_j-1}\frac{\left(-\propto_j+s\right)\left(\beta_j+s\right)}{\gamma_j+s}A_s\left(\sin\theta_j\right)^{2s}\right]d\theta_j \\ +2k_j\int_0^{\pi}\left(\sin\theta_j\right)^{2P_j+m_j}\left[\sum_{r=0}^{\propto_j-1}\frac{\left(-\propto_j+r\right)\left(\beta_j+r\right)}{\gamma_j+r}A_r\left(\sin\theta_j\right)^{2r}\sum_{s=0}^{\propto_j-1}A_s\left(\sin\theta_j\right)^{2s}\right]d\theta_j \end{cases} \tag{4.21}$$

bulunur. Polinomların çarpım kuralından faydalanılarak (4.21)'e aşağıdaki şekil verilebilir.

$$\begin{cases} I_2 = 4\sum_{r=0}^{\propto_j-1}\sum_{s=0}^{\propto_j-1}\frac{\left(-\propto_j+r\right)\left(\beta_j+r\right)\left(-\propto_j+s\right)\left(\beta_j+s\right)}{\left(\gamma_j+r\right)\left(\gamma_j+s\right)}A_rA_s \\ \cdot\int_0^{\pi}\left(\sin\theta_j\right)^{2P_j+m_j+2r+2+s+2}\cdot\left(1-\sin\theta_j\right)d\theta_j \\ +2k_j\sum_{r=0}^{\propto_j-1}\sum_{s=0}^{\propto_j-1}\frac{\left(-\propto_j+r\right)\left(\beta_j+r\right)}{\gamma_j+r}A_rA_s\int_0^{\pi}\left(\sin\theta_j\right)^{2P_j+m_j+2r+2+s}\,d\theta_j\cdot \end{cases} \tag{4.22}$$

(4.22) denklemindeki integrallerinde hesaplanılmasından sonra

$$\begin{cases} I_2 = 4\sqrt{\pi}\sum_{r=0}^{\propto_j-1}\sum_{s=0}^{\propto_j-1}\frac{\left(-\propto_j+r\right)\left(\beta_j+r\right)\left(-\propto_j+s\right)\left(\beta_j+s\right)}{(\gamma_j+r)\,(\gamma_j+s)}A_rA_s \\ \cdot\left[\frac{\Gamma\left(\frac{2P_j+m_j+2r+2s+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2P_j+m_j+2r+2s+4}{2}\right)}-\frac{\Gamma\left(\frac{2P_j+m_j+2r+2s+5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2P_j+m_j+2r+2s+6}{2}\right)}\right] \\ +2k_j\sqrt{\pi}\sum_{r=0}^{\propto_j-1}\sum_{s=0}^{\propto_j-1}\frac{\left(-\propto_j+r\right)\left(\beta_j+r\right)}{\gamma_j+r}A_rA_s\frac{\Gamma\left(\frac{2P_j+m_j+2r+2s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2P_j+m_j+2r+2s+2}{2}\right)} \end{cases}$$

(4.23)

elde edilir.

Nihayet $\propto_j, \beta_j, \gamma_j, A_r$ ve $A_s$nin değerleri yerlerine konularak (4.23) eşitliğine aşağıda ki,

$$I_2 = \sqrt{\pi} \sum_{r=0}^{\frac{1}{2}(P_{j-1}-P_j-2)} \sum_{s=0}^{\frac{1}{2}(P_{j-1}-P_j-2)} \frac{(P_{j-1} - P_j + 2r)(P_j + P_{j-1} + m_j + 2r)(P_j - P_{j-1} + 2s)(P_j + P_{j-1} + m_j + 2s)}{(\mathbf{2}P_j + m_{j+1} + 2 + 2r)(\mathbf{2}P_j + m_{j+1} + 2 + 2s)}$$
$$\cdot \frac{\left[\frac{1}{2}(P_j - P_{j-1})\right]_r \left[\frac{1}{2}(P_j + P_{j-1} + m_j)\right]_r}{\left[\frac{1}{2}(2P_j + m_{j+1} + 2)\right]_r r!} \cdot \frac{\left[\frac{1}{2}(P_j - P_{j-1})\right]_s \left[\frac{1}{2}(P_j + P_{j-1} + m_j)\right]_s}{\left[\frac{1}{2}(2P_j + m_{j+1} + 2)\right]_s s!}$$
$$\cdot \left[\frac{\Gamma\left(\frac{2P_j + m_j + 2r + 2s + 3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2P_j + m_j + 2r + 2s + 4}{2}\right)} - \frac{\Gamma\left(\frac{2P_j + m_j + 2r + 2s + 5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2P_j + m_j + 2r + 2s + 6}{2}\right)}\right]$$
$$+\sqrt{\pi}k_j \sum_{r=0}^{\frac{1}{2}(P_{j-1}-P_j-2)} \sum_{s=0}^{\frac{1}{2}(P_{j-1}-P_j-2)} \frac{(P_j - P_{j-1} + 2r)(P_j + P_{j-1} + m_j + 2r)}{\mathbf{2}P_j + m_{j+1} + 2 + 2r}$$
$$\cdot \frac{\left[\frac{1}{2}(P_j - P_{j-1})\right]_r \left[\frac{1}{2}(P_j + P_{j-1} + m_j)\right]_r}{\left[\frac{1}{2}(2P_j + m_{j+1} + 2)\right]_r r!} \frac{\left[\frac{1}{2}(P_j - P_{j-1})\right]_s \left[\frac{1}{2}(P_j + P_{j-1} + m_j)\right]_s}{\left[\frac{1}{2}(2P_j + m_{j+1} + 2)\right]_s s!}$$
$$\cdot \frac{\Gamma\left(\frac{2P_j + m_j + 2r + 2s + 1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2P_j + m_j + 2r + 2s + 2}{2}\right)} \qquad (4.24)$$

şekli verilebilir. (4.24) formülü ile hesaplanmış I_2 ifadesi $m_j$nin çift yada tek sayı olmasına göre iki ayrı şekilde yazılabilir.

Birinci Hal:

$m_j = 2h$ $(h = 1,2,\cdots)$ yani çift bir sayı olsun. Önce

$$\mathrm{E_ç} = \frac{\Gamma\left(\frac{2P_j + m_j + 2r + 2s + 3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2P_j + m_j + 2r + 2s + 4}{2}\right)} - \frac{\Gamma\left(\frac{2P_j + m_j + 2r + 2s + 5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2P_j + m_j + 2r + 2s + 6}{2}\right)} \tag{4.25}$$

ifadesinin alacağı şekil araştırılırsa, $z_j = P_j + h + r + s + 2$ yazılarak (4.25) eşitliği

$$E_ç = \frac{\Gamma\left(z - 1 + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(z)} - \frac{\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(z + 1)} \tag{4.26}$$

şeklinde veya fonksiyonunun

$$\Gamma\,(z)\ \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2z-1}}\Gamma\,(2z)$$

özelliği hatırlanarak

$$E_ç = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2z-1}} \frac{\Gamma\,(2z-1)}{\Gamma\,(z)\,\Gamma\,(z+1)} \tag{4.27}$$

şeklinde yazılabilir. Nihayet z nin yukarıdaki değeri yerine konularak

$$E_ç = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(2P_j + m_j + 2r + 2s + 3\right)}{2^{2P_j + m_j + 2r + 2s + 3}\,\Gamma\left(\frac{2P_j + m_j + 2r + 2s + 4}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2P_j + m_j + 2r + 2s + 6}{2}\right)} \tag{4.28}$$

sonucu elde edilir. Aynı tarzda

$$E_ç' = \Gamma\left(\frac{2P_j + m_j + 2r + 2s + 1}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{2P_j + m_j + 2r + 2s + 2}{2}\right) \tag{4.29}$$

eşitliğinden ve Γ fonksiyonunun yukarıda kullanılan özeliğinden faydalanılarak

$$E'_{ç}=\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(2\mathrm{P}_j+m_j+2r+2s)}{2^{2P_j+m_j+2r+2s+1}\,\Gamma\left(\frac{2P_j+m_j+2r+2s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2P_j+m_j+2r+2s+2}{2}\right)} \tag{4.30}$$

elde edilir. (4.28) ve (4.29) ifadeleri ile verilen $E_{ç}$ ve $E'_{ç}$ değerleri (4.24) ifadesinde yerlerine konularak $I_{2_{ç}}$ ifadesinin değerini yazılırsa,

$$\left.\begin{aligned}
I_{2_{ç}}=\sqrt{\pi}&\sum_{r=0}^{\frac{1}{2}(P_{j-1}-P_j-2)}\ \sum_{s=0}^{\frac{1}{2}(P_{j-1}-P_j-2)}\\
&\frac{(P_{j-1}-P_j+2r)(P_j+P_{j-1}+m_j+2r)(P_j-P_{j-1}+2s)(P_j+P_{j-1}+m_j+2s)}{(\mathbf{2}P_j+m_{j+1}+2+2r)(\mathbf{2}P_j+m_{j+1}+2+2s)}\\
&\cdot\frac{\left[\frac{1}{2}(P_j-P_{j-1})\right]_r\left[\frac{1}{2}(P_j+P_{j-1}+m_j)\right]_r}{\left[\frac{1}{2}(2P_j+m_{j+1}+2)\right]_r r!}\cdot\frac{\left[\frac{1}{2}(P_j-P_{j-1})\right]_s\left[\frac{1}{2}(P_j+P_{j-1}+m_j)\right]_s}{\left[\frac{1}{2}(2P_j+m_{j+1}+2)\right]_s s!}\\
&\cdot\frac{\Gamma(2P_j+m_j+2r+2s+3)}{2^{2P_j+m_j+2r+2s+3}\,\Gamma\left(\frac{2P_j+m_j+2r+2s+4}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2P_j+m_j+2r+2s+6}{2}\right)}\\
+\sqrt{\pi}k_j&\sum_{r=0}^{\frac{1}{2}(P_{j-1}-P_j-2)}\ \sum_{s=0}^{\frac{1}{2}(P_{j-1}-P_j-2)}\frac{(P_j-P_{j-1}+2r)(P_j+P_{j-1}+m_j+2r)}{\mathbf{2}P_j+m_{j+1}+2+2r}\\
&\cdot\frac{\left[\frac{1}{2}(P_j-P_{j-1})\right]_r\left[\frac{1}{2}(P_j+P_{j-1}+m_j)\right]_r}{\left[\frac{1}{2}(2P_j+m_{j+1}+2)\right]_r r!}\frac{\left[\frac{1}{2}(P_j-P_{j-1})\right]_s\left[\frac{1}{2}(P_j+P_{j-1}+m_j)\right]_s}{\left[\frac{1}{2}(2P_j+m_{j+1}+2)\right]_s s!}\\
&\cdot\frac{\Gamma(2P_j+m_j+2r+2s)}{2^{2P_j+m_j+2r+2s-1}\,\Gamma\left(\frac{2P_j+m_j+2r+2s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2P_j+m_j+2r+2s+2}{2}\right)},\quad(4.31)
\end{aligned}\right\}$$

sonucuna varılır.

İkinci Hal:

$m_j=2h-1$ $(h=1,2,\cdots)$ yani tek sayı olsun.

$$E_T = \frac{\Gamma\left(\frac{2P_j + m_j + 2r + 2s + 3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2P_j + m_j + 2r + 2s + 4}{2}\right)} - \frac{\Gamma\left(\frac{2P_j + m_j + 2r + 2s + 5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2P_j + m_j + 2r + 2s + 6}{2}\right)} \tag{4.32}$$

ifadesinin alacağı şekil araştırılırsa ve $z = P_j + h + r + s + 1$ farz edilirse (4.32) ifadesi

$$E_T = \frac{\Gamma(z)}{\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)} - \frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma\left(z + 1 + \frac{1}{2}\right)} \tag{4.33}$$

şeklini alır. Γ fonksiyonunun yukarıda kullanılan özeliği yardımıyla

$$E_T = \frac{2^{2z}\Gamma(z)\,\Gamma(z+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2z+2)} \tag{4.34}$$

veya z nin değeri yerine konulursa

$$E_T = \frac{2^{2P_j+m_j+2r+2s+3}\,\Gamma\left(\frac{2P_j + m_j + 2r + 2s + 3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2P_j + m_j + 2r + 2s + 5}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2P_j + m_j + 2r + 2s + 5)} \tag{4.35}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$E'_T = \frac{\Gamma\left(\frac{2P_j + m_j + 2r + 2s + 1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2P_j + m_j + 2r + 2s + 2}{2}\right)} \tag{4.36}$$

ifadesinden hareket edilerek,

$$E_T' = \frac{2^{2P_j+m_j+2r+2s}\,\Gamma\left[2\left(\frac{2P_j+m_j+2r+2s+1}{2}\right)\right.}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\,(2P_j+m_j+2r+2s+1)} \tag{4.37}$$

sonucu elde edilir. E_T ve E_T' ifadelerinin yukarıdaki değerleri (4.34) ifadesinde yerine yazılırsa I_{2_T} ifadesi;

$$\begin{aligned}
I_{2_T} = \sqrt{\pi} & \sum_{r=0}^{\frac{1}{2}\left(P_{j-1}-\mathrm{P}_j-2\right)} \sum_{s=0}^{\frac{1}{2}\left(P_{j-1}-P_j-2\right)} \\
& \frac{\left(P_{j-1}-P_j+2r\right)\left(P_j+P_{j-1}+m_j+2r\right)\left(P_j-P_{j-1}+2s\right)\left(P_j+P_{j-1}+m_j+2s\right)}{\left(\mathbf{2}P_j+m_{j+1}+2+2r\right)\left(\mathbf{2}P_j+m_{j+1}+2+2s\right)} \\
& \cdot \frac{\left[\frac{1}{2}\left(P_j-P_{j-1}\right)\right]_r \left[\frac{1}{2}\left(P_j+P_{j-1}+m_j\right)\right]_r}{\left[\frac{1}{2}\left(2P_j+m_{j+1}+2\right)\right]_r r!} \cdot \frac{\left[\frac{1}{2}\left(P_j-P_{j-1}\right)\right]_s \left[\frac{1}{2}\left(P_j+P_{j-1}+m_j\right)\right]_s}{\left[\frac{1}{2}\left(2P_j+m_{j+1}+2\right)\right]_s s!} \\
& \cdot \frac{2^{2P_j+m_j+2r+2s+3}\,\Gamma\left(\frac{2P_j+m_j+2r+2s+3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2P_j+m_j+2r+2s+5}{2}\right)}{\Gamma\,2P_j+m_j+2r+2s+5} \\
& + k_j \sum_{r=0}^{\frac{1}{2}\left(P_{j-1}-P_j-2\right)} \sum_{s=0}^{\frac{1}{2}\left(P_{j-1}-P_j\right)} \frac{\left(P_j-P_{j-1}+2r\right)\left(P_j+P_{j-1}+m_j+2r\right)}{\left(\mathbf{2}P_j+m_{j+1}+2+2r\right)} \\
& \cdot \frac{\left[\frac{1}{2}\left(P_j-P_{j-1}\right)\right]_r \left[\frac{1}{2}\left(P_j+P_{j-1}+m_j\right)\right]_r}{\left[\frac{1}{2}\left(2P_j+m_{j+1}+2\right)\right]_r r!} \frac{\left[\frac{1}{2}\left(P_j-P_{j-1}\right)\right]_s \left[\frac{1}{2}\left(P_j+P_{j-1}+m_j\right)\right]_s}{\left[\frac{1}{2}\left(2P_j+m_{j+1}+2\right)\right]_s s!} \\
\cdot\, 2^{2P_j+m_j+2r+2s} & \left| \frac{2\left(\frac{2P_j+m_j+2r+2s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(2P_j+m_j+2r+2s+1\right)} \right.
\end{aligned} \tag{4.38}$$

bulunur. Nihayet $I_{2_ç}$ ve I_{2_T} ifadelerinin değerleri (4.19) ifadesinde yerlerine konularak (4.15) ntegralinin değeri için

$$\int_0^{\pi} \left(sin\theta_j\right)^{2P_j+m_j} \Theta_j^2\, d\theta_j = \frac{I_{2_ç}}{\left(P_{j-1}-P_j\right)\left(P_{j-1}+\mathrm{P}_j+m_j\right)} \tag{4.39}$$

ve

$$\int_{0}^{\pi} \left(sin\theta_j\right)^{2P_j+m_j} \Theta_j^2 d\theta_j = \frac{I_{2_T}}{(P_{j-1} - P_j)\,(P_{j-1} + P_j + m_j)} \tag{4.40}$$

ifadeleri elde edilir.

4.1.3. ϕ Fonksiyonu için birinci özelik

$P_n = P_n'$ için $\phi = \phi'$ ve $P_n = P_n''$ için $\phi = \phi''$ yazılarak

$$\int_{0}^{2\pi} (sin\varphi)^{k_{n+1}+k_{n+2}} \phi' \phi'' d\varphi \tag{4.41}$$

integralinin değeri hesaplanmaya çalışılırsa ϕ fonksiyonu

$$sin^2\varphi \frac{d^2\phi}{d\varphi^2} + (-k_{n+1} tg^2\varphi + k_{n+2}) sin\varphi cos\varphi \frac{d\phi}{d\varphi}$$

$$+P_n(P_n + k_{n+1} + k_{n+2}) sin^2\varphi\, \phi = 0 \tag{4.42}$$

denkleminin bir çözümü olduğundan ϕ' ve ϕ'' de

$$sin^2\varphi \frac{d^2\phi'}{d\varphi^2} + (-k_{n+1} tg^2\varphi + k_{n+2}) sin\varphi cos\varphi \frac{d\phi'}{d\varphi}$$

$$+P_n'(P_n' + k_{n+1} + k_{n+2}) sin^2\varphi\, \phi' = 0 \tag{4.43}$$

ve

$$sin^2\varphi \frac{d^2\phi''}{d\varphi^2} + (-k_{n+1}tg^2\varphi + k_{n+2})sin\varphi cos\varphi \frac{d\phi''}{d\varphi}$$

$$+P_n''(P_n'' + k_{n+1} + k_{n+2})sin^2\varphi\, \phi'' = 0 \qquad (4.44)$$

denklemleri gerçeklenir. (4.43) denklemi $(sin\varphi)^{\,k_{n+1}+k_{n+2}-2}\phi''$ ve (4.44) denklemi $(sin\varphi)^{\,k_{n+1}+k_{n+2}-2}\phi'$ ile çarpıp taraf tarafa çıkarılırsa,

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{d\varphi}\left[(sin\varphi)^{\,k_{n+1}+k_{n+2}}\left(\phi''\frac{d\phi'}{d\varphi} - \phi'\frac{d\phi''}{d\varphi}\right)\right] - \frac{k_{n+1}}{cos\varphi}(sin\varphi)^{\,k_{n+1}+k_{n+2}-1}\left(\phi''\frac{d\phi'}{d\varphi} - \phi'\frac{d\phi''}{d\varphi}\right)\\ &+(P_n' - P_n'')(P_n' + P_n'' + k_{n+1} + k_{n+2})\,(sin\varphi)^{\,k_{n+1}+k_{n+2}}\phi'\phi'' = 0 \qquad (4.45)\end{aligned}\right\}$$

elde edilir. (4.45)'in birinci tarafının $(0,2\pi)$ aralığında integrali alınırsa

$$\left.\begin{aligned}&\left[(sin\varphi)^{\,k_{n+1}+k_{n+2}}\left(\phi''\frac{d\phi'}{d\varphi} - \phi'\frac{d\phi}{d\varphi}\right)\right]_0^{2\pi} - k_{n+1}\int_0^{2\pi}\frac{(sin\varphi)^{\,k_{n+1}+k_{n+2}}}{cos\varphi}\left(\phi''\frac{d\phi'}{d\varphi} - \phi'\frac{d\phi''}{d\varphi}\right)d\varphi\\ &+(P_n' - P_n'')(P_n' + P_n'' + k_{n+1} + k_{n+2})\,(sin\varphi)^{\,k_{n+1}+k_{n+2}}\phi'\phi'' d\varphi = 0 \qquad (4.46)\end{aligned}\right\}$$

ifadesi elde edilir.

$\phi', \phi'', \frac{d\phi'}{d\varphi}$ ve $\frac{d\phi''}{d\varphi}$ ifadeleri birer polinom olduklarından $\varphi = 0$ ve $\varphi = 2\pi$ için sonlu değerler alır. O halde

$$\left.\begin{aligned}&(P_n' - P_n'')(P_n' + P_n'' + k_{n+1} + k_{n+2})\int_0^{2\pi}(sin\varphi)^{\,k_{n+1}+k_{n+2}}\phi'\phi'' d\varphi = 0\\ &k_{n+1}\int_0^{2\pi}\frac{(sin\varphi)^{\,k_{n+1}+k_{n+2}-1}}{cos\varphi}\left(\phi''\frac{d\phi'}{d\varphi} - \phi'\frac{d\phi''}{d\varphi}\right)d\varphi\end{aligned}\right\} \qquad (4.47)$$

yazılabilir. Şimdi (4.47) ifadesinin ikinci tarafındaki integralin değeri hesaplanırsa,

$$a' = \frac{1}{2}P_n', \quad a'' = \frac{1}{2}P_n'', \quad b' = \frac{1}{2}(P_n' + k_{n+1} + k_{n+2}),$$

$$b'' = \frac{1}{2}(P_n'' + \mathrm{k}_{n+1} + k_{n+2}) \ , \ c = \frac{1}{2}(1 + k_{n+2})$$

olmak üzere,

$$\phi' = F(-a', b'; c; sin^2\varphi), \qquad \phi'' = F(-a'', b''; c; sin^2\varphi)$$

$$\frac{d\phi'}{d\varphi} = -2\frac{a'b'}{c} sin\varphi cos\varphi \ F(-a' + 1, a' + 1; c + 1; sin^2\varphi)$$

$$\frac{d\phi''}{d\varphi} = -2\frac{a''b''}{c} sin\varphi cos\varphi \ F(-a'' + 1, a'' + 1; c + 1; sin^2\varphi)$$

ifadelerini (4.47) ifadesinin I_3 ile gösterilecek olan ikinci tarafında yerlerine yazılıp

$$\left. \begin{aligned} I_3 = 2k_{n+1}\int_0^{2\pi} (sin\varphi)^{\,k_{n+1}+k_{n+2}} \Bigg[-\frac{a'b'}{c} F(-a' + 1, b' + 1; c + 1; sin^2\varphi) F(-a''1, b''; c; sin^2\varphi) \\ + \frac{a''b''}{c} F(-a'' + 1, b'' + 1; c + 1; sin^2\varphi) F(-a'1, b'; c; sin^2\varphi) \Bigg] \qquad (4.48) \end{aligned} \right\}$$

bulunur. Öte yandan

$$\frac{(-a')_r(-b')_r}{(c)_r \ r!} = B_r' \ , \qquad \frac{(-a'')_r(-b'')_r}{(c)_s \ s!} = B_s''$$

denirse (4.48) eşitliği

$$I_3 = 2k_{n+1} \int_0^{2\pi} (sin\varphi)^{\,k_{n+1}+k_{n+2}} \left[\sum_{r=0}^{a'-1} \frac{(-a'+r)\,(b'+r)}{(c+r)} B'_r\,(sin\varphi)^{\,2r} \sum_{s=0}^{a''} B''_s\,(sin\varphi)^{\,2s} \right.$$

$$\left. \sum_{s=0}^{a''-1} \frac{(-a''+s)\,(b''+s)}{(c+s)} B'_r\,(sin)^{\,2s} \sum_{r=0}^{a'} B'_r\,(sin\varphi)^{\,2r} \right] d\varphi \qquad (4.49)$$

şeklinde yazılabilir. Nihayet polinomların çarpılma kuralından faydalanılarak

$$I_3 = 2k_{n+1} \left[\sum_{r=0}^{a'-1} \sum_{s=0}^{a''} \frac{(-a'+r)\,(b'+r)}{(c+r)} \sum_{s=0}^{a''-1} \sum_{r=0}^{a'} \frac{(-a''+s)\,(b''+s)}{(c+s)} \right] B'_r B''_s$$

$$\cdot \int_0^{2\pi} (sin\varphi)^{\,k_{n+1}+k_{n+2}{}^{+2r+2s}}\, d\varphi \qquad (4.50)$$

sonucuna varılır.

(4.50) eşitliğinin ikinci tarafındaki integralin değerini hesaplanması için

$k_{n+1} + k_{n+2}$ ifadesinin çift veya tek oluşuna göre iki halde ele alınırsa;.

Birinci Hal:

$k_{n+1} + k_{n+2}$ çift bir sayı olsun. Bilinir ki

$$\int_0^{2\pi} (sin\varphi)^{\,2t}\, d\varphi = \frac{\lceil\, (2t+1)}{2^{2t-1} \lceil 2_{\,(t+1)}} \pi, t \in N \qquad (4.51)$$

şeklindedir. Buna göre (4.50) ifadesindeki integralin değeri

$$\begin{cases} I_3 = 2k_{n+1}\left[\sum_{r=0}^{a'-1}\sum_{s=0}^{a''}\frac{(-a'+r)\,(b'+r)}{(c+r)}\sum_{s=0}^{a''-1}\sum_{r=0}^{a'}\frac{(-a''+s)\,(b''+s)}{(c+s)}\right] \\ \cdot B'_r B''_s \dfrac{\left[\left(k_{n+1}+k_{n+2}{}^{+2r+2s+1}\right)\right.}{2^{k_{n+1}+k_{n+2}{}^{+2r+2s-1}}\left[\left(\frac{k_{n+1}+k_{n+2}}{2}+r+s+1\right)\right.}\pi \end{cases} \tag{4.52}$$

olarak bulunur.

(4.52)'de $a', a'', b', b'' B'_r B''_s$ ve c nin değerleri yerlerine konularak bu eşitlik yeniden yazılırsa,

$$\begin{cases} I_3 = 2k_{n+1}\pi\left[\sum_{r=0}^{\frac{1}{2}(P_n-2)}\sum_{s=0}^{\frac{1}{2}P_n}\frac{(-P'_n+2r)\,(P'_n+k_{n+1}+k_{n+2}{}^{+2r})}{1+k_{n+2}{}^{+2r}}\right. \\ \left.-\sum_{s=0}^{\frac{1}{2}(P_n-2)}\sum_{r=0}^{\frac{1}{2}P_n}\frac{(-P''_n+2s)\,\left(P''_n+k_{n+1}+k_{n+2}{}^{+2s}\right)}{1+k_{n+2}{}^{+2s}}\right] \\ \cdot\dfrac{\left(-\frac{1}{2}P'_n\right)_r\left[\frac{1}{2}(P'_nk_{n+1}+k_{n+2})\right]_r}{\left[\frac{1}{2}1+k_{n+2}\right]_r\ r!}\dfrac{\left(-\frac{1}{2}P''_n\right)_s\left[\frac{1}{2}(P''_nk_{n+1}+k_{n+2})\right]_s}{\left[\frac{1}{2}1+k_{n+2}\right]_s\ s!} \\ \cdot\dfrac{\left[\left(k_{n+1}+k_{n+2}{}^{+2r+2s+1}\right)\right.}{2^{k_{n+1}+k_{n+2}{}^{+2r+2s-1}}\left[\left(\frac{k_{n+1}+k_{n+2}}{2}+r+s+1\right)\right.} \end{cases} \tag{4.53}$$

bulunur. $P'_n \neq P''_n$ ve $k_{n+1}+k_{n+2} > 0$ olduğundan $P'_n - P''_n$ ve $P'_n + P''_n + k_{n+1} + k_{n+2}$ sayıları daima sıfırdan farklıdırlar. O halde (4.41) integralinin değeri olarak

$$\int_0^{2\pi}(sin\varphi)^{\,k_{n+1}+k_{n+2}}\phi'\phi''\,d\varphi = \frac{I_3}{(P'_n-P''_n)(P'_n+P''_n+k_{n+1}+k_{n+2})} \tag{4.54}$$

sonucu bulunur.Görülüyor ki (4.1.3.14) integralinin değeri ancak $k_{n+1} = 0$ halinde sıfır olmaktadır. Böyle olduğu zaman ϕ için bir nevi ortogonallik özeliği kurulmuş olur.

İkinci Hal:

$k_{n+1} + k_{n+2}$ tek sayı olsun. Bilinir ki

$$\int_0^{2\pi} (sin\varphi)^{2+t-1}\, d\varphi = 0, t \in N \tag{4.55}$$

şeklindedir. Bu halde $k_{n+1} + k_{n+2} + 2r + 2s$ de tek bir sayı olacağından (4.1.30) integralinin değeri yani $I_3 = 0$ olur ve böylece

$$\int_0^{2\pi} (sin\varphi)^{k_{n+1}+k_{n+2}} \phi'\phi'' d\varphi = 0 \tag{4.56}$$

bulunur. Böylece ϕ fonksiyonu için yine bir nevi ortogonallik özeliği elde edilir.

4.1.4. ϕ Fonksiyonu için ikinci bir özelik

$$\int_0^{2\pi} (sin\varphi)^{k_{n+1}+k_{n+2}} \phi^2 d\varphi \tag{4.57}$$

integralinin değeri hesaplanırsa ϕ fonksiyonunun

$$sin^2\varphi \frac{d^2\phi}{d\varphi^2} + (-k_{n+1}tg^2\varphi + k_{n+2}) sin\varphi cos\varphi \frac{d\phi}{d\varphi}$$

$$+P_n(P_n + k_{n+1}k_{n+2})sin^2\varphi\phi = 0 \tag{4.58}$$

denkleminin bir çözümü olduğu bilinmekte olup bu denklemin iki tarafı $(sin\varphi)^{k_{n+1}+k_{n+2}^{-2}\phi}$ ile çarpılıp gerekli sadeleştirme yapıldıktan sonra

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\varphi}\left[(sin\varphi)^{k_{n+1}+k_{n+2}}\phi\dfrac{d\phi}{d\varphi}\right] - (sin\varphi)^{k_{n+1}+k_{n+2}}\left(\dfrac{d\phi}{d\varphi}\right)^2 \\ -\dfrac{k_{n+1}}{cos\varphi}(sin\varphi)^{k_{n+1}+k_{n+2}^{-1}}\phi\dfrac{d\phi}{d\varphi} \\ +P_n(P_n + k_{n+1} + k_{n+2})(sin\varphi)^{k_{n+1}+k_{n+2}}\phi^2 = 0 \end{cases} \tag{4.59}$$

bulunur. (4.59)'un birinci tarafının $(0,2\pi)$ aralığında integrali alınarak

$$\begin{cases} \left[(sin\varphi)^{k_{n+1}+k_{n+2}}\phi\dfrac{d\phi}{d\varphi}\right]_0^{2\pi} - \displaystyle\int_0^{2\pi}(sin\varphi)^{k_{n+1}+k_{n+2}}\left(\dfrac{d\phi}{d\varphi}\right)^2 d\varphi \\ -\displaystyle\int_0^{2\pi}\dfrac{k_{n+1}}{cos\varphi}(sin\varphi)^{k_{n+1}+k_{n+2}^{-1}}\phi\dfrac{d\phi}{d\varphi}d\varphi \\ +(P_n + k_{n+1}k_{n+2})\displaystyle\int_0^{2\pi}(sin\varphi)^{k_{n+1}+k_{n+2}}\phi^2 d\varphi = 0 \end{cases} \tag{4.60}$$

elde edilir. Öte yandan ϕ ve $\frac{d\phi}{d\varphi}$ ifadeleri $\varphi = 0$ ve $\varphi = 2\pi$ için sonlu olduklarından (4.60)'ın ilk terimi sıfırdır. Böylece

$$\begin{cases} P_n\,(P_n + k_{n+1}k_{n+2})\displaystyle\int_0^{2\pi}(sin\varphi)^{k_{n+1}+k_{n+2}}\phi^2 d\varphi \\ = \displaystyle\int_0^{2\pi}(sin\varphi)^{k_{n+1}+k_{n+2}}\left(\dfrac{d\phi}{d\varphi}\right)^2 d\varphi + k_{n+1} - \displaystyle\int_0^{2\pi}\dfrac{(sin\varphi)^{k_{n+1}+k_{n+2}^{-1}}}{cos\varphi}\phi\dfrac{d\phi}{d\varphi}d\varphi \end{cases} \tag{4.61}$$

eşitliğine varılır.

(4.61)'in ikinci tarafına I_4 denilir ve ϕ ile $\frac{d\phi}{d\varphi}$nin değerleri yerlerine konulursa,

$$\begin{cases} I_4 = 4\int_0^{2\pi} (sin\varphi)^{\,k_{n+1}+k_{n+2}} cos^2\varphi \left[-\frac{a\,b}{c}\;F(-a+1,b+1;c+1;)sin^2\varphi\right]^2 d\varphi \\ -2k_{n+1}\int_0^{2\pi} (sin\varphi)^{\,k_{n+1}+k_{n+2}}\frac{a\,b}{c}F(-a+1,b+1;c+1;sin^2\varphi)F(a,b;c;sin^2\varphi)d\varphi \end{cases}$$

elde edilir. (4.62)

$\frac{(-a)_r\,(-b)_r}{(c)_r\,r!} = B_r$, $\frac{(-a)_s\,(-b)_s}{(c)_s\,s!} = B_s$ farz edilip (4.62) ifadesi yeniden yazılırsa,

$$\begin{cases} I_4 = 4\int_0^{2\pi} (sin\varphi)^{\,k_{n+1}+k_{n+2}} cos^2\varphi \\ \cdot\left[\sum_{r=0}^{a=1}\frac{(-a+r)(b+r)}{c+r}B_r\,(sin\varphi)^{\,2r}\right]\left[\sum_{s=0}^{a=1}\frac{(-a+s)(b+s)}{c+s}B_s\,(sin\varphi)^{\,2s}\right]d\varphi \qquad (4.63) \\ -2k_{n+1}\int_0^{2\pi} (sin\varphi)^{\,k_{n+1}+k_{n+2}}\left[\sum_{s=0}^{a=1}\frac{(-a+r)(b+s)}{c+r}B_r\,(sin\varphi)^{\,2r}\right]\left[\sum_{s=0}^{a}B_s\,(sin\varphi)^{\,2s}\right]d\varphi \end{cases}$$

şeklinde olur veya polinomların çarpımları kuralından faydalanılarak,

$$\begin{cases} I_4 = 4\sum_{r=0}^{a-1}\sum_{s=0}^{a-1}\frac{(-a+r)\,(b+r)\,(-a+s)\,(b+s)}{(c+r)\,(c+s)}B_rB_s\int_0^{2\pi} (sin\varphi)^{\,k_{n+1}+k_{n+2}{}^{+2r+2s+2}} \\ \cdot(1-sin^2\varphi)\,d\varphi \\ +2k_{n+1}\sum_{r=0}^{a-1}\sum_{s=0}^{a}\frac{(-a+r)\,(b+r)}{c+r}B_rB_s\int_0^{2\pi} (sin\varphi)^{\,k_{n+1}+k_{n+2}{}^{+2r+2s+2}}\,d\varphi \qquad (4.64) \end{cases}$$

sonucu elde edilir. n (4.64) eşitliğinin ikinci tarafındaki integrallerin değerlerini hesaplanması için $k_{n+1}+k_{n+2}$ nin çift ve ya tek olmasına göre iki hal düşünülmesi gerekir.

Birinci Hal:

$k_{n+1}+k_{n+2}$ çift bir sayı olsun. (4.51) formülüne göre (4.64) deki integrali

$$\left\{\begin{aligned} & I_4 = 4\pi \sum_{r=0}^{a-1}\sum_{s=0}^{a-1} \frac{(-a+r)\,(b+r)(-a+s)\,(b+s)}{(c+r)\,(c+s)} B_r B_s \\ & \cdot\left[\frac{\Gamma\left(k_{n+1}+k_{n+2}{}^{+2r+2s+3}\right)}{2^{k_{n+1}+k_{n+2}{}^{+2r+2s+1}}\Gamma\left(\frac{k_{n+1}+k_{n+2}}{2}+r+s+2\right)}\right. \\ & \left. -\frac{\Gamma\left(k_{n+1}+k_{n+2}{}^{+2r+2s+5}\right)}{2^{k_{n+1}+k_{n+2}{}^{+2r+2s+3}}\Gamma\left(\frac{k_{n+1}+k_{n+2}}{2}+r+s+3\right)}\right] \\ & +2k_{n+1} \sum_{r=0}^{a-1}\sum_{s=0}^{a} \frac{(-a+r)\,(b+r)}{c+r} B_r B_s \frac{\Gamma\left(k_{n+1}+k_{n+2}{}^{+2r+2s+5}\right)}{2^{k_{n+1}+k_{n+2}{}^{+2r+2s+3}}\Gamma\left(\frac{k_{n+1}+k_{n+2}}{2}+r+s+1\right)} \end{aligned}\right. \tag{4.65}$$

şeklinde yazılabilir.Öte yandan (4.65)'de köşeli parantez içindeki iki kısmın paydaları eşit kılınıp, a, b, c, B_r, $B_s$nin değerleri yerlerine konulursa (4.65) eşitliği,

$$\begin{cases} I_4 = \pi \displaystyle\sum_{r=0}^{\frac{1}{2}(P_n-2)} \sum_{s=0}^{\frac{1}{2}(P_n-2)} \frac{(-P_n+2r)\left(P_n k_{n+1} + k_{n+2}{}^{+2r}\right)(-P_n+2s)\left(P_n k_{n+1} + k_{n+2}{}^{+2s}\right)}{\left(1+k_{n+2}{}^{+2r}\right)\left(1+k_{n+2}{}^{+2s}\right)} \\ \cdot \dfrac{\left(-\frac{1}{2}P_n\right)_r \left[\frac{1}{2}\left(P_n k_{n+1} + k_{n+2}\right)\right]_r}{\left[\frac{1}{2}(1+k_{n+2})\right]_r r!} \dfrac{\left(-\frac{1}{2}P_n\right)_s \left[\frac{1}{2}\left(P_n k_{n+1} + k_{n+2}\right)\right]_s}{\left[\frac{1}{2}(1+k_{n+2})\right]_s s!} \\ \cdot \dfrac{\left(k_{n+1} + k_{n+2}{}^{+2r+2s-4}\right)\Gamma\left(k_{n+1} + k_{n+2}{}^{+2r+2s+3}\right)}{2^{k_{n+1}+k_{n+2}{}^{+2r+2s+3}}\,\Gamma\left(\frac{k_{n+1}+k_{n+2}}{2} + r + s + 3\right)} \\ +k_{n+1}\pi \displaystyle\sum_{r=0}^{\frac{1}{2}(P_n-2)} \sum_{s=0}^{\frac{1}{2}P_n} \frac{(-P_n+2r)\left(P_n k_{n+1} + k_{n+2}{}^{+2r}\right)}{1+k_{n+2}{}^{+2r}} \\ \cdot \dfrac{\left(-\frac{1}{2}P_n\right)_r \left[\frac{1}{2}\left(P_n k_{n+1} + k_{n+2}\right)\right]_r}{\left[\frac{1}{2}(1+k_{n+2})\right]_r r!} \dfrac{\left(-\frac{1}{2}P_n\right)_s \left[\frac{1}{2}\left(P_n k_{n+1} + k_{n+2}\right)\right]_s}{\left[\frac{1}{2}(1+k_{n+2})\right]_s s!} \end{cases} \tag{4.66}$$

şekline dönüşür ve dolayısıyla (4.57) integralinin değeri

$$\int_0^{2\pi} (sin\varphi)^{\,k_{n+1}+k_{n+2}} \phi^2 \, d\varphi = \frac{I_4}{P_n\,(P_n k_{n+1} + k_{n+2})} \tag{4.67}$$

olarak hesaplanır.

İkinci Hal:

$k_{n+1} + k_{n+2}$tek sayı olsun. (4.55) ifadesine göre (4.64) ifadesindeki integralin değerinin sıfır olacağı açıktır. Dolayısıyla

$$\int_0^{2\pi} (sin\varphi)^{\,k_{n+1}+k_{n+2}} \phi^2 \, d\varphi = 0 \tag{4.68}$$

elde edilir. Bu sonuç, ϕ fonksiyonu için bir nevi ortonormallik özeliği meydana çıkarmaktadır.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

5.1. Y_μ Fonksiyonu İçin Bir Özelik

$$Y'_\mu = \prod_{j=1}^{n} (sin\theta_j)^{\,P'_j} \square'_j \phi' \;\; ve \;\; Y''_\mu = \prod_{j=1}^{n} (sin\theta_j)^{\,P''_j} \square''_j \phi''$$

ve hiperküre üzerinde yüzey elemanı

$$ds = \prod_{j=1}^{n} (sin\theta_j)^{\,n-j+1} d\theta_j \;\, d\varphi$$

olmak üzere

$$\int_0^\pi \cdot\cdot$$

$$\cdot \int_0^\pi \int_\theta^{2\pi} \prod_{j=1}^{n} (sin\theta_j)^{\,k_j+\cdots+k_{n+2}} \; (sin\varphi_j)^{\,k_{n+1}+k_{n+2}} \; Y'_\mu Y''_\mu \; ds \tag{5.1}$$

integralinin değeri belirtilmek istensin. Görülür ki (5.1) ifadesi n+1 tane belirli integralin çarpımından ibarettir. Bunların hesabı için sonuncusu olan

$$\int_0^{2\pi} (sin\varphi)^{\,k_{n+1}+k_{n+2}} \phi' \phi'' d\varphi \tag{5.2}$$

integralinden başlamak daha uygun olur. Önceden (4.54) , (4.56) ifadelerinden bilindiği üzere, (5.2) ifadesinin değeri ya $P'_n \neq P''_n$ ve $k_{n+1} = 0 \; ise$ sıfırdır veya $k_{n+1} + k_{n+2}$ tek sayı ise sıfırdır. Eğer $P'_n = P''_n$ ve $k_{n+1} + k_{n+2}$ de çift sayı ise, (5.2) ifadesi daima sıfırdan farklıdır. Bu takdirde $P'_{n-1} \neq P''_{n-1}$ ise (5.2) daima sıfırdan farklıdır. $P'_{n-1} \neq P''_{n-1}$ olduğu kabul edilerek

$$\int_{0}^{2\pi} (sin\varphi)^{\,2P_n 1+k_n+k_{n+1}+k_{n+2}} \square'_n \square''_n \, d\theta_n \qquad (5.3)$$

integralinin incelenmesi gerekir. Bu defa yine (4.14) ifadesinden elde edilen özelik gereğince (5.3) ifadesi ancak $k_n = 0$ olduğu zaman sıfır değerini alır. Eğer $P'_{n-1} = P''_{n-1}$ ise (5.3) ifadesi daima sıfırdan farklıdır. Bu defa $P'_n = P''_n$, $P'_{n-1} = P''_{n-1}$ ve $P'_{n-2} \neq P''_{n-2}$ farz ederek,

$$\int_{0}^{2\pi} (sin\varphi)^{\,2P_{n-1}2+k_{n-1}+\cdots+k_{n+2}} \square'_{n-1} \square''_{n-1} \, d\theta_{n-1} \qquad (5.4)$$

integralinin incelenmesi gerekir. Yine önceden (4.14) ifadesinde de görüldüğü üzere (5.4) integrali ancak $k_{n-1} = 0$ ise sıfır değerini alır. Eğer $P'_{n-2} = P''_{n-2}$ ise (5.4) ifadesi daima sıfırdan farklıdır. Aynı işleme benzer tarzda devam olunarak (5.1) ifadesinin sıfıra eşit olma koşulları elde edilebilir ve şu sonuçlara varılır:

a. Eğer $k_{n+1} + k_{n+2}$ tek sayı ise (5.1) daima sıfırdır.

b. Eğer P'_n, $P'_{n-1}, \cdots, P'_j \cdots, P'_1$ ve $P''_n, P''_{n-1} \cdots, P''_j, \cdots, P''_1$ sayıları sıra ile eşit değil iseler, (5.1.1) integralinin sıfıra eşit olması $k_1, k_2, \cdots\ k_{n+1}$in sıfır olmasına bağlıdır. Örneğin, $P'_{j-1} \neq P''_{j-1}$ ve $P'_j = P''_j$ ise (5.1) ifadesi, $k_j = 0$ için sıfır değerini alır. k_j nin sıfırdan farklı olması halinde I_5 ile göstereceğimiz (5.1) integralinin değeri

$$I_5 = \prod_{j=1}^{n} \frac{I_1}{(P'_{j-1} - P''_{j-1})\,(P'_{j-1} + P''_{j-1} + m_j)} \cdot \frac{I_3}{(P'_n - P''_n)\,(P'_n + P''_n + k_{n+1} + k_{n+2})}$$

(5.5)

olarak yazılabilir.

5.2. Y_μ Fonksiyonu İçin İkinci Bir Özelik

$$\int_0^{\pi} \cdots \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \prod_{j=1}^{n} (sin\theta_j)^{\,k_{\mathrm{j}+\cdots+}k_{n+2}} \; (sin\theta)^{\,k_{n+1}+k_{n+2}} Y_\mu^2 \; ds \tag{5.6}$$

integralinin değeri belirtilmek istensin. (4.68) ifadesinden bilinmektedir ki $k_{n+1} + k_{n+2}$ bir tek sayı ise (5.6) ifadesinin değeri sıfırdır. Aynı şekilde (4.39) , (4.40) ve (4.67) ifadelerinden kolayca görülür ki, $k_{n+1} + k_{n+2}$ nin çift sayı olması halinde (5.6) ifadesinin değeri daima sıfırdan farklıdır ve $n + 1$ tane belirli integralin çarpımına eşittir. I_6 ile gösterilecek olan bu çarpımın değeri,

$$I_6 = \prod_{j=1}^{n} \frac{I_2}{(P_{j-1} - P_j)\,(P_{\mathrm{j}-1} + P_j + m_j)} \cdot \frac{I_4}{P_n\,(P_n + k_{n+1} + k_{n+2})} \tag{5.7}$$

şeklinde yazılabilir.

Burada $I_1, I_{2,} I_3, I_4, I_5 \; ve \; I_6$ arasında bir ilişki mevcuttur.

Tezde geniş uygulama alanına sahip olan harmaonik fonksiyonlar ve harmonik polinomlar ile R^3 de küresel koordinatlar cinsinden ifade edilen küresel harmonikler ve *n+2* değişkenli uzayda küresel koordinatlarda hiperküresel harmonikler ele alınmıştır. Böylece Matematik, Fizik ve Mühendislik dallarında kullanılan harmaonik fonksiyonlar ve harmonik polinomlar ile küresel harmonikler ve özellikle hiper küresel harmonikler konularında çalışacak diğer bilim insanlarının teorik ve uygulama açısından faydalanabilecekleri bir çalışma ortaya çıkarılmıştır.

KAYNAKLAR

Anar, İ. E., 2005. Kısmi Diferansiyel Denklemler, Palme Yayıncılık, 522 s, Ankara.

Andrews, E. Askey R. and Ranjan, R., 1999. Special Functions, Cambridge University Press, 680 p, Cambridge, England.

Çevik, A., 2004. Harmonik Fonksiyonların Temel Özellikleri ve Poliharmonik Fonksiyonlar. Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara Üniversitesi, Ankara.

Dağ, İ., 1973. Hiper Küresel Harmonikler. Doktora tezi, Atatürk Üniversitesi Yayınları No: 266, Erzurum.

Duffy, D. G., 1997. Advanced Engineering Mathemetics, CRC Press Inc. 768 p, Boca Roton, Florida, U.S.A.

Kart, C., 1970. $\Sigma\ Harmonik$ Homogen Polinomlar. Doktora tezi, Fen Fakültesi, Ankara Üniversitesi, Ankara.

Taşdelen, F., 1989. Küresel Harmonikler ve Homogen Poliharmonik Fonksiyonlar. Yüksek Lisans Tezi, Fen Fakültesi, Ankara Üniversitesi, Ankara.

Yıldırım, A. Z., 2005. Harmonik ve Poliharmonik Polinomlar. Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara Üniversitesi, Ankara.

ÖZGEÇMİŞ

1976'da Erzurum'da doğmuştur. Kültür Kurumu İlkokulu, G. A. M. P. Ortaokulu, Erzurum Fen Lisesi ve Erzurum Lisesinde okumuştur.1993'te Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fatih Eğitim Fakültesi, Matematik Öğretmenliği bölümünü kazanarak 1997'de mezun olmuştur. Horasan Ç. P. Lisesi, Horasan Lisesi, Erzurum Atatürk A.T. ve E.M. Lisesinde çalışmış ve askerliğini 1999'da Asteğmen Öğretmen olarak Horasan Lisesinde yapmıştır. M.E.B.'den 2002'de ayrılarak Erzurum'da Özel Bil, Sınav, Osen, Birey dershanelerinde ve Özel İstiklal Lisesinde çalıştıktan sonra 2008'de tekrar M.E.B.'e dönerek Pasinler M.T.E.M.'de ve sonra Bursa İznik A.T. ve E.M. Lisesi'nde çalışmıştır. 2011'den itibaren İznik Anadolu Lisesinde Matematik Öğretmeni olarak çalışmaktadır. Yabancı dili İngilizcedir. Evli ve bir kız çocuğu babasıdır.