# HİPERBOLİK UZAYLARDA ÖZEL DÖNÜŞÜM SINIFLARININ ORTAK SABİT NOKTALARINA İTERATİV YAKLAŞIMLAR

**Birol GÜNDÜZ**

**Doktora Tezi**
**Matematik Anabilim Dalı**
**Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı**
**Prof. Dr. Sezgin AKBULUT**
**2014**

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**DOKTORA TEZİ**

# HİPERBOLİK UZAYLARDA ÖZEL DÖNÜŞÜM SINIFLARININ ORTAK SABİT NOKTALARINA İTERATİV YAKLAŞIMLAR

**Birol GÜNDÜZ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**
**Analiz ve Fonksiyolar Teorisi Bilim Dalı**

**ERZURUM**
**2014**

**T.C.**
**ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**TEZ ONAY FORMU**

**HİPERBOLİK UZAYLARDA ÖZEL DÖNÜŞÜM SINIFLARININ ORTAK SABİT NOKTALARINA İTERATİV YAKLAŞIMLAR**

Prof. Dr. Sezgin AKBULUT danışmanlığında, Birol GÜNDÜZ tarafından hazırlanan bu çalışma 12/12/2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı - Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı'nda Doktora tezi olarak **oybirliği** ile kabul edilmiştir.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Başkan | : Prof. Dr. Murat ÖZDEMİR | *İmza* | : |
| Üye | : Prof. Dr. Rabil AYAZOĞLU | *İmza* | : |
| Üye | : Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU | *İmza* | : |
| Üye | : Prof. Dr. Sezgin AKBULUT | *İmza* | : |
| Üye | : Prof. Dr. Abdullah KAPLAN | *İmza* | : |

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu 31/12/2014 tarih ve 52/1756 nolu kararı ile onaylanmıştır.

**Prof. Dr. İhsan EFEOĞLU**
**Enstitü Müdürü**

**Not:** Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

# ÖZET

Doktora Tezi

**HİPERBOLİK UZAYLARDA ÖZEL DÖNÜŞÜM SINIFLARININ ORTAK SABİT NOKTALARINA İTERATİV YAKLAŞIMLAR**

Birol GÜNDÜZ

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Sezgin AKBULUT

Bu tez de ilk olarak genişlemeyen dönüşümlerin sonlu iki ailesi için hiperbolik uzaylarda bir ve iki adımdan oluşan iki şema teşkil edilmiştir. Bu iterasyon şemalarının $\Delta$-yakınsaklığı ile ilgili teoremler verilerek ispatlanmıştır. Daha sonra konveks metrik uzaylarda asimptotik quasi genişlemeyen dönüşümlerin sonlu bir ailesi için $n$-adım iterasyon şeması teşkil edilerek bu şemanın yakınsaklığı çalışılmıştır.

**2014, 76 sayfa**

**Anahtar Kelimeler:** Genişlemeyen dönüşüm, sabit nokta, güçlü ve $\Delta$ yakınsama, hiperbolik uzay, konveks metrik uzay.

# ABSTRACT

Ph. D. Thesis

**ITERATIVE APPROXIMATIONS TO COMMON FIXED POINTS OF SPECIAL MAPPING CLASSES IN HYPERBOLIC SPACES**



Birol GÜNDÜZ

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Dicipline of Analysis and Functions Theory

Supervisor: Prof. Dr. Sezgin AKBULUT



In this thesis, firstly a one step and two step iteration process for two finite families of nonexpansive mappings are constructed in hyperbolic spaces. The $\Delta$-convergence of this schemes are proved with giving related theorems. Then, an $n$-step iteration process for a finite family of asymptotically quasi nonexpansive mappings in convex metric spaces is constructed and the convergence of this scheme is studied.



**2014, 76 pages**

**Keywords:** Nonexpansive mapping, fixed point, strong and $\Delta$-convergence, hyperbolic space, convex metric space.

# TEŞEKKÜR

Bu çalışmada bana her türlü kolaylığı sağlayan, bilgi ve tecrübeleriyle beni destekleyen çok değerli hocam Prof. Dr. Sayın Sezgin AKBULUT'a ve Prof. Dr. Sayın Murat ÖZDEMİR'e en içten dileklerimle teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Tezin hazırlanması sürecinde değerli fikirlerinden yararlandığım Doç. Dr. Sayın Safeer Hussain KHAN'a ve Doç. Dr. Sayın İsa YILDIRIM'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, çalışmalarım esnasında kendilerinden görmüş olduğum destek ve güvenden dolayı aileme teşekkür ederim.

Doktora eğitimim boyunca "Yurt İçi Doktora Burs Programı" ile tarafıma vermiş olduğu destekten dolayı TÜBİTAK'a teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

**Birol GÜNDÜZ**
**Aralık, 2014**

## İÇİNDEKİLER

## SİMGELER DİZİNİ

| | |
|---|---|
| $A(K,\{x_n\})$ | $\{x_n\}$ dizisinin $K$ kümesine göre tüm asimptotik merkezlerinin kümesi |
| $A(\{x_n\})$ | $\{x_n\}$ dizisinin $X$ uzayına göre tüm asimptotik merkezlerinin kümesi |
| $B(x,r)$ | $x$ merkezli $r$ yarıçaplı açık yuvar |
| $\overline{B}(x,r)$ | $x$ merkezli $r$ yarıçaplı kapalı yuvar |
| $B_X$ | $X$ uzayındaki kapalı birim yuvar |
| $C[0,1]$ | $[0,1]$ aralığıda tanımlı sürekli fonksiyonların kümesi |
| $c_o$ | 0 a yakınsayan dizilerin uzayı |
| $C^1(\mathbb{R})$ | $\mathbb{R}$ de birinci mertebeden türevlenebilir sürekli fonksiyonların kümesi |
| $diam\ (X)$ | $X$ kümesinin çapı |
| $F(T)$ | $T$ dönüşümünün sabit noktalarının kümesi |
| $\mathcal{F}$ | $T_1, T_2, \cdots, T_n$ dönüşümlerinin ortak sabit noktalarının kümesi |
| $l_p$ | $p$. kuvveti toplanabilir dizilerin kümesi |
| $l_1$ | Serisi mutlak yakınsak dizilerin uzayı |
| $l_\infty$ | Sınırlı dizilerin uzayı |
| $r(K,\{x_n\})$ | $\{x_n\}$ dizisinin $K$ kümesine göre asimptotik yarıçapı |
| $r(\{x_n\})$ | $\{x_n\}$ dizisinin $X$ uzayına göre göre asimptotik yarıçapı |
| $(X,d,W)$ | Konveks metrik veya hiperbolik uzay |
| $\Delta(x_1,x_2,x_3)$ | Geodezik üçgen |
| $\Delta$ -$\lim_n x_n$ | $\{x_n\}$ dizisinin $\Delta$-limiti |
| $\eta(r,\varepsilon)$ | $X$ uzayının konvekslik modülü |

# 1. GİRİŞ

Matematiğin temel branşlarından biri olan Fonksiyonel Analiz, birçok farklı alanda uygulamalara sahiptir. Metrik uzaylar, Fonksiyonel Analizin temelini oluşturur. Bu uzaylar esas itibariyle reel doğruyu genişletmekle beraber uygulamalı bilimlerdeki önemli problemlerin çözümü için bir taban teşkil eder. Son dönemlerde sabit nokta teorisindeki gelişmeler metrik uzayların önemini biraz daha arttırmıştır.

Matematiğin birçok temel dalının arakesitinde yer alan sabit nokta teorisi birçok uygulama alanına sahiptir. İntegral denklemleri, adi ve kısmi diferansiyel denklemleri, lineer denklem sistemlerini ve ekonomideki denklemleri bu uygulama alanlarına örnek verebiliriz. Sabit nokta teoremleri Picard varlık teklik teoremi, Newton-Rapshon metodu gibi nümerik metodlar, adi diferansiyel denklemlerin çözümünün varlık teorisinde kullanılmakla beraber yaklaşım teorisi, optimizasyon ve uygulamaları, varyasyonel ve lineer eşitsizlikler gibi birçok alanda büyük rol oynamaktadır. Diğer taraftan sabit nokta iterasyonları fizik, kimya, biyoloji, mühendislik ve ekonomi gibi birçok alana uygulanmaktadır.

1912 yılında Brouwer, $n$ boyutlu Öklit uzayının birim yuvarından kendisi üzerine tanımlı sürekli fonksiyonların en az bir sabit noktaya sahip olduğunu göstererek sabit nokta teorisinin temellerini atmıştır. 1930 da Schauder sonsuz boyutlu uzaylar için Brouwer'in teoremini genelleştirmiş ve bu teoremin Banach uzaylarının kapalı sınırlı konveks alt kümelerinde geçerli olduğunu göstermiştir. Brouwer'in bu teoremi analizdeki denklemlerin nümerik çözümlerine yaklaşmada önemli rol oynar. 1935 de Tychonoff yukarıda bahsedilen Brouwer'in teoremini lokal konveks bir lineer uzayın kompakt ve konveks bir alt kümesine genişletmiştir.

Sabit nokta teorisi üç temel alanda gelişmektedir. Bunlar Topolojik Sabit Nokta Teorisi, Metrik Sabit Nokta Teorisi, Ayrık Sabit Nokta Teorisidir. Bu üç alanın tarihsel gelişimi Brouwer Sabit Nokta Teoremi, Banach Sabit Nokta Teoremi, Tarski Sabit Nokta

Teoremi olarak adlandırılan üç teoreme dayanmaktadır. Bizim tezimiz Metrik Sabit Nokta Teorisi alanındadır.

Metrik sabit nokta teorisinin ortaya çıkışı, Stefan Banach'ın 1922 de verdiği Banach Daralma İlkesine dayandırılsa da esas itibariyle 19. yüzyılın sonlarında Picard'ın ardışık yaklaşıklar metodu ile denklem çözümlerinin varlık ve tekliğini göstermesi ile başlamıştır. Banach Daralma ilkesi, bir iterasyon vasıtasıyla daraltan dönüşümlerin sabit noktasını bulmada kullanılabilir. Bu işlem sonucunda kurulan iterasyon sabit noktaya yeterince yakın bir değer verir. İterasyondaki tekrar sayısı arttırılarak daha iyi bir sonuç elde edilir. Bu sonuca ulaşmak için birçok yazar hata terimli iterasyon şemalarını kullanmışlardır.

Rhoades and Soltuz (2004) Mann iterasyonunun yakınsamasının farklı dönüşüm sınıfları için uygun şartlar altında Ishıkawa ve Noor iterasyonun yakınsamasına denk olduğunu göstermiştir. Bu bağlamda birçok araştırmacı farklı dönüşüm sınıfları için iterasyonların denkliklerini incelemiştir. Diğer taraftan iterasyonların yakınsama hızlarını mukayese etmek de önem arz eder. İlk olarak Rhoades (1976) artan ve azalan fonksiyonlar için Mann ve Ishikawa iterasyonlarının yakınsama hızlarındaki farkı örneklerle göstermiştir.

Son zamanlarda özellikle bilgisayar teknolojisindeki gelişmelere bağlı olarak iterasyon teorisi de önem kazanmış ve bu teori ile ilgili çalışmalar oldukça artmıştır. Bu çalışmalar aşağıdaki hedeflere yönelik gerçekleşmektedir:

a) Lineer olmayan dönüşümlerin sabit noktalarına yaklaşmak.

b) Lineer operatör denklemlerin çözümünü bulmak.

c) Varyasyonel eşitsizlikleri incelemek.

d) İterasyonların yakınsama hızlarını kıyaslamak.

e) Dönüşümlerin ortak sabit noktasına iterasyonların yakınsamasını incelemek.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünden sonra, Kuramsal Temeller adını alan ikinci bölümde, bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde öncelikle konveks metrik uzay ve hiperbolik uzay tanımları verilerek örneklendirilmiştir. Daha sonra sabit nokta iterasyon şemaları tanıtılmıştır.

Tezimizin orijinal kısmını teşkil eden dördüncü bölümde ilk olarak genişlemeyen dönüşümlerin sonlu iki ailesi için bir ve iki adımdan oluşan iki şema teşkil edilmiştir. Bu iterasyon şemalarının $\Delta$-yakınsaklığı ile ilgili teoremler verilerek ispatlanmıştır. Son olarak konveks metrik uzaylarda asimptotik quasi genişlemeyen dönüşümlerin sonlu bir ailesi için $n$-adım iterasyon şeması teşkil edilerek bu şemanın yakınsaklığı çalışılmıştır. Tartışma ve Sonuç adını alan beşinci bölümde çalışmalarımızda elde ettiğimiz sonuçlarla literatürdeki çalışmalar karşılaştırılmıştır.

# 2. KURAMSAL TEMELLER

## 2.1. Sabit Nokta Kavramı ve Bazı Özel Dönüşüm Sınıfları

Bu bölümde tezimizde kullanacağımız temel kavramlar örneklendirilerek verilecektir.

**Tanım 2.1.1 (Sabit Nokta):** $X$ boş olmayan bir küme ve $T: X \to X$ herhangi bir dönüşüm olsun. Eğer $Tx = x$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, bu $x$ noktasına $T$ dönüşümünün sabit noktası denir.

O halde $Tx = x$ denkleminin çözümü veya çözümleri $T$ nin sabit noktalarıdır. $T$ nin tüm sabit noktalarının kümesi $F(T)$ ile gösterilir.

**Örnek 2.1.2: a)** $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $Tx = x^2$ dönüşümünün iki sabit noktası vardır ve $F(T) = \{0,1\}$ dir.

**b)** $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x, 0)$ dönüşümünün sonsuz sayıda sabit noktası vardır.

**c)** Düzlemin döndürülmesi bir tek sabit noktaya sahiptir ve bu sabit nokta dönme merkezidir.

**d)** $X = C^1(\mathbb{R}) = \{f: f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ birinci mertebeden türevlenebilir sürekli fonksiyon}\}$ ve $T: X \to X$, $T\big(\varphi(x)\big) = \varphi'(x)$ olsun. Buna göre, $\varphi(x) = e^x$ fonksiyonu $T$ dönüşümünün sabit noktasıdır.

**e)** Herhangi bir $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dönüşümünün sabit noktası yoktur.

**f)** $T: (0,1] \to (0,1]$, $Tx = \sin x$ dönüşümünün sabit noktası yoktur. Bu dönüşüm için $x = 0$ noktası tek sabit nokta olabilirdi. Fakat $0 \notin (0,1]$ dır.

**g)** $X = [0, \infty)$ ve $T: X \to X$, $Tx = x^2 + b$, $b > \frac{1}{4}$ olsun. Bu durumda $T$ nin hiçbir sabit noktası yoktur.

$X$ boştan farklı bir küme ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Herhangi bir $x \in X$ için $T^n(x)$ dönüşümü $T^{n+1}(x) = T(T^n(x))$ şeklinde tanımlanır ve $x'$in $T$ altındaki $n$. iterasyonu olarak adlandırılır.

$T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler yazılabilir :

**i.** Keyfi bir $n \in \mathbb{N}$ için $F(T) \subset F(T^n)$ dir.

**ii.** Keyfi bir $n \in \mathbb{N}$ için $F(T^n) = \{x\}$ ise, $F(T) = \{x\}$ dir. Ancak bunun tersi genelde doğru değildir. Örneğin, $T: \{a, b, c\} \to \{a, b, c\}$ dönüşümü $T(a) = c$, $T(b) = b$, $T(c) = a$ olarak tanımlanırsa, $F(T^2) = \{a, b, c\}$ olduğu halde $F(T) = \{b\}$ dir.

$X$ boş olmayan bir küme ve $T_1, T_2, \dots, T_n: X \to X$ herhangi $n$ dönüşüm olsun. Eğer $T_1 x = T_2 x = \cdots = T_n x$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, bu $x$ noktasına $T_1, T_2, \dots, T_n$ dönüşümlerinin ortak sabit noktası denir. Bu dönüşümlerin ortak sabit noktalarının kümesi $\mathcal{F} = F(T_1) \cap F(T_2) \cap \cdots \cap F(T_n)$ ile gösterilir. Aşağıda birden fazla dönüşümün ortak sabit noktalarıyla ilgili örnekler verilmiştir.

**Örnek 2.1.2: a)** $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $T_1, T_2, T_3: X \to X$, $T_1(x, y) = (x, 0)$, $T_2(x, y) = (x, 2y)$ ve $T_3(x, y) = (x, \frac{y}{2})$ dönüşümlerinin ortak sabit noktalarının kümesi $\mathcal{F} = F(T) \cap F(T_2) \cap F(T_3) = \{(x, 0): x \in \mathbb{R}\}$ dir.

**b)** $X = \mathbb{R}$ olmak üzere $T_1, T_2: X \to X$, $T_1(x) = x + \sin x$ ve $T_2(x) = x + \tan x$ dönüşümlerinin ortak sabit noktalarının kümesi $\mathcal{F} = F(T_1) \cap F(T_2) = \{k\pi: k \in \mathbb{Z}\}$ dir.

**Tanım 2.1.3 (Daraltan Dönüşüm):** $(X, d)$ bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

olacak şekilde bir $k \geq 0$ sabit sayısı varsa, $T$ ye Lipschitzian dönüşüm denir. Eğer yukarıdaki eşitsizlik $0 \leq k < 1$ olması halinde sağlanıyorsa $T$ dönüşümüne daraltan (contraction) dönüşüm denir.

Lipschitz koşulunu sağlayan her dönüşüm düzgün sürekli olduğundan daraltan dönüşümler de düzgün süreklidir. Dolayısıyla $T$ sürekli değilse, bir daraltan dönüşüm de olamaz. Buna karşın $T$ daraltan dönüşüm olmasa bile, herhangi bir $n$ için $T^n$ daraltan bir dönüşüm olabilir.

**Örnek 2.1.4:** $C[0,1] = \{f : f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ sürekli fonksiyon}\}$ kümesini $d(f,g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)|\, dt$ metriği ile gözönüne alalım. $T : C[0,1] \to C[0,1]$ dönüşümü $T\big(f(t)\big) = \int_0^t f(s)ds$ olarak tanımlansın. Bu durumda her $f, g \in C[0,1]$ için

$$\begin{aligned}
d\big(T(f),T(g)\big) &= \int_0^1 \big|T\big(f(t)\big) - T\big(g(t)\big)\big|\, dt \\
&= \int_0^1 |\int_0^t f(s)ds - \int_0^t g(s)ds| dt \\
&\leq \int_0^1 \int_0^t |f(s) - g(s)|\, dsdt \\
&\leq \int_0^1 \{\int_0^1 |f(s) - g(s)|\, ds\} dt \\
&= \int_0^1 dt \int_0^1 |f(s) - g(s)|\, ds \\
&= d(f,g)
\end{aligned}$$

olur. Yani $d\big(T(f),T(g)\big) \leq d(f,g)$ olduğundan $T$ dönüşümü daraltan değildir.

Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
d\big(T^2(f),T^2(g)\big) &= \int_0^1 \big|T^2\big(f(t)\big) - T^2\big(g(t)\big)\big|\, dt \\
&= \int_0^1 |T\big(T(f(t))\big) - T(T(g(t)))|\, dt
\end{aligned}$$

$$= \int_0^1 |T[\int_0^t f(s)ds] - T[\int_0^t g(s)ds]|\, dt,$$

yazabiliriz. Şayet

$$\int_0^t f(s)ds = u(t) \quad \text{ve} \quad \int_0^t g(s)ds = v(t)$$

olarak alınırsa,

$$\begin{aligned}
d\big(T^2(f), T^2(g)\big) &= \int_0^1 |T(u(t)) - T(v(t))|\; dt \\
&= \int_0^1 |\int_0^t u(z)dz - \int_0^t v(z)dz|\, dt \\
&\leq \int_0^1 \int_0^t |\int_0^t f(s)ds - \int_0^t g(s)ds| dzdt \\
&\leq \int_0^1 \{\int_0^t [\int_0^t |f(s) - g(s)|\, ds]\, dz\}\, dt \\
&\leq \int_0^1 \{\int_0^t [\int_0^1 |f(s) - g(s)|\, ds]\, dz\}\, dt \\
&= \int_0^1 [\int_0^t d(f,g)dz]\, dt = \int_0^1 d(f,g)\, [\int_0^t dz]dt \\
&= d(f,g) \int_0^1 tdt = \frac{1}{2} d(f,g)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $k = \frac{1}{2} < 1$ olup, $T^2$ dönüşümü daraltandır.

**Tanım 2.1.5 (Kesin Daraltan Dönüşüm):** $(X, d)$ bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ ve $x \neq y$ için,

$$d(Tx, Ty) < d(x, y)$$

ise, $T$ ye kesin daraltan dönüşüm (contractive) denir.

Bir $T$ dönüşümü daraltan dönüşüm ise kesin daraltan dönüşümdür. Ancak bu ifadenin tersi doğru değildir. Bunu bir örnekle gösterelim.

**Örnek 2.1.6:** $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$ ve $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $Tx = 1 + \ln(1 + e^x)$ olsun. $T$ dönüşümü kesin daraltan olup daraltan değildir. Çünkü

$$T'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} < 1$$

dir. Ayrıca Ortalama Değer Teoremi'nden $[x, y]$ aralığında

$$T'(c) = \frac{T(x) - T(y)}{x - y}$$

olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $T'(c) < 1$ olur. Yani,

$$T'(c) = \frac{T(x) - T(y)}{x - y} < 1 \Rightarrow |T(x) - T(y)| < |x - y|$$

dir.

Tam metrik uzaylarda tanımlanan kesin daraltan dönüşümlerin sabit noktaya sahip olması gerekmez. Buna karşın eğer sabit nokta varsa, bu sabit nokta tektir.

**Örnek 2.1.7:** $X = [1, +\infty)$, $d(x, y) = |x - y|$ ve $Tx = x + \frac{1}{x}$ olsun. Bu durumda $x \neq y$ için

$$d\big(T(x), T(y)\big) = \left|x + \frac{1}{x} - y - \frac{1}{y}\right| = \left(1 - \frac{1}{xy}\right)|x - y| < d(x, y)$$

olur. Dolayısı ile $T$ dönüşümü kesin daraltandır. Ancak $Tx = x + \frac{1}{x} \neq x$ dir. Yani $T$ nin sabit noktası yoktur.

Bu tip dönüşümlerin sabit noktası olduğunu garanti etmek için çalışılan uzayın kompakt olması yeterlidir.

**Tanım 2.1.8 (Genişlemeyen Dönüşüm):** $(X, d)$ bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için,

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$$

ise, $T$ ye genişlemeyen (nonexpansive) dönüşüm denir.

**Örnek 2.1.9:** $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$ ve $T: X \to X$, $Tx = x - 2$ olsun. Bu durumda

$$d(Tx, Ty) = |x - 2 - y + 2| = |x - y| = d(x, y)$$

olduğundan $T$ genişlemeyen bir dönüşümdür. Fakat bu dönüşüm ne daraltan ne de kesin daraltandır.

Herhangi bir Banach uzayında tanımlı genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarının var olması gerekmez. Bunun için, uzay üzerinde veya dönüşüm üzerinde bazı sınırlandırmalar yapılması gereklidir. 1965 yılında Browder, Goebel ve Kirk daha sonra tanımlayacağımız düzgün konveks bir Banach uzayının kapalı sınırlı ve konveks alt kümesi üzerinde tanımlı genişlemeyen bir dönüşümün sabit noktaya sahip olduğunu ispatlamıştır.

**Tanım 2.1.10 (Düzgün Lipschitzian Dönüşüm):** $X$ bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(T^n x, T^n y) \leq L d(x, y)$$

olacak şekilde $L > 0$ sayısı varsa, $T$ ye düzgün Lipschitzian dönüşüm denir.

**Tanım 2.1.11 (Asimptotik Genişlemeyen Dönüşüm):** $X$ bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(T^n x, T^n y) \leq (1 + k_n) d(x, y)$$

olacak şekilde $k_n \to 0$ şartını sağlayan bir $\{k_n\} \subset [0, \infty)$ dizisi varsa, $T$ ye asimptotik genişlemeyen dönüşüm denir (Goebel and Kirk 1972).

Yukarıdaki tanımlardan görüleceği gibi asimptotik genişlemeyen bir dönüşüm aynı zamanda düzgün $L$-Lipschitzian bir dönüşümdür. Ayrıca asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin sınıfı, genişlemeyen dönüşümlerin bir genellemesidir. Yani genişlemeyen bir dönüşüm aynı zamanda asimptotik genişlemeyen bir dönüşümdür. Fakat bu ifadelerin tersi doğru değildir.

**Örnek 2.1.12:** $X = \ell_2 = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots): \ \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty\}$ Hilbert uzayı, $B_X = \{x \in X: \|x\| \leq 1\}$ de bu uzayda kapalı birim yuvar ve $\{a_i\}$, $\prod_{i=2}^{\infty} a_i = 1/2$ $(0 < a_i < 1)$ şartını sağlayan bir reel dizi olsun. $T: B_X \to B_X$ dönüşümünü

$$T(x_1, x_2, x_3, \cdots) = (0, x_1^2, a_2 x_2, a_3 x_3, \cdots),$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda her $x, y \in B_X$ için

$$\|Tx - Ty\|_2 \leq 2\|x - y\|_2$$

dir. Diğer taraftan, her $x, y \in B_X$ ve $n \geq 2$ için

$$\|T^n x - T^n y\|_2 \leq 2 \prod_{i=2}^{n} a_i \, \|x - y\|_2$$

olur. $n \to \infty$ için limit alınırsa, $k_n = 1 - 2\prod_{i=2}^{n} a_i \to 0$ olduğu görülür. Dolayısıyla $T$ asimptotik genişlemeyen bir dönüşümdür fakat genişlemeyen bir dönüşüm değildir.

**Tanım 2.1.13 (Quasi Genişlemeyen Dönüşüm):** $X$ bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $p \in F(T) \neq \emptyset$ ve her $x \in X$ için

$$d(Tx, p) \leq d(x, p)$$

ise, $T$ ye quasi genişlemeyen dönüşüm denir (Petryshyn and Williamson 1973).

**Sonuç 2.1.14:** En az bir sabit noktaya sahip olan genişlemeyen bir dönüşüm quasi-genişlemeyen bir dönüşümdür ve lineer quasi genişlemeyen bir dönüşüm genişlemeyen bir dönüşümdür.

Aşağıdaki örnek ile lineer olmayan sürekli quasi genişlemeyen dönüşümlerin genişlemeyen dönüşüm olmadığı gösterilmiştir.

**Örnek 2.1.15:** $X = \ell_\infty = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots) : \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ sınırlı$\}$ ve $K = B_X = \{x \in l_\infty : \|x\|_\infty \leq 1\}$ alt kümesi verilsin. Her $x = (x_1, x_2, x_3, \cdots) \in K$ için $T: K \to K$ dönüşümünü

$$Tx = (0, x_1^2, x_2^2, x_3^2, \cdots)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu dönüşüm lineer olmayan sürekli bir dönüşüm ve $F(T) = \{0\}$ dır. Her $x \in K$ için

$$\|Tx - 0\|_\infty = \|(0, x_1^2, x_2^2, x_3^2, \cdots)\|_\infty \leq \|(0, x_1, x_2, x_3, \cdots)\|_\infty = \|x - p\|_\infty$$

olur. Dolayısıyla $T$ quasi genişlemeyen bir dönüşümdür. Buna rağmen $x = (1/2, 1/2, \cdots)$ ve $y = (3/4, 3/4, \cdots)$ için

$$\|Tx - Ty\|_\infty = \left\| \left(0, \frac{5}{16}, \frac{5}{16}, \cdots\right) \right\|_\infty = \frac{5}{16} > \frac{1}{4} = \|x - y\|_\infty$$

olduğundan $T$ genişlemeyen bir dönüşüm değildir.

**Tanım 2.1.16 (Asimptotik Quasi Genişlemeyen Dönüşüm):** $X$ bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $p \in F(T) \neq \emptyset$, her $x \in X$ ve her $n \geq 1$ için

$$d(T^n x, p) \leq (1 + k_n) d(x, p)$$

olacak şekilde $\lim\limits_{n \to \infty} k_n = 0$ şartını sağlayan bir $\{k_n\} \in [0, \infty)$ dizisi varsa, $T$ dönüşümüne asimptotik quasi genişlemeyen dönüşüm denir (Qihou 2002).

Asimptotik quasi genişlemeyen dönüşümlerin sınıfı, quasi genişlemeyen dönüşümlerin bir genellemesidir. Yani quasi genişlemeyen bir dönüşüm aynı zamanda asimptotik quasi-genişlemeyen bir dönüşümdür. Fakat bu ifadenin tersi genelde doğru değildir.

**Örnek 2.1.17:** $X = l_2$ olsun. $T: X \to X$ dönüşümünü $Tx = (0, 2x_1, 0, 0, \cdots, 0, \cdots)$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $F(T) = \{0\}$ ve ayrıca her $n = 2,3,4, \cdots$ için $T^n x = (0,0,0, \cdots, 0, \cdots)$ dır. $k_n = \frac{1}{n}$ olmak üzere $\{k_n\}$ ve $p \in F(T)$ için,

$$\|Tx - p\|_2 = 2\|x_1\|_2 \leq (1 + k_1)\|x - p\|_2$$

ve

$$\|T^n x - p\|_2 \leq (1 + k_n)\|x_n - p\|_2$$

olur. Dolayısıyla $T$ asimptotik quasi genişlemeyen bir dönüşümdür. Ancak $T$ quasi genişlemeyen dönüşüm değildir. Çünkü $x_0 = (1,0,0, \cdots, 0, \cdots) \in X$ için

$$\|Tx_0 - p\|_2 = \|0,2,0,0, \cdots, 0, \cdots\|_2 = 2 > 1 = \|x_0 - p\|_2$$

dır.

Yukarıda verdiğimiz dönüşümler arasındaki ilişki aşağıdaki şekilde verilebilir.

$$\begin{tikzcd} \text{Genişlemeyen Dönüşüm} \arrow[r, Rightarrow, "\boldsymbol{F(T) \neq \emptyset}"'] \arrow[d, Rightarrow] & \text{Quasi-Genişlemeyen Dönüşüm} \arrow[d, Rightarrow] \\ \text{Asimptotik Genişlemeyen Dönüşüm} \arrow[r, Rightarrow, "\boldsymbol{F(T) \neq \emptyset}"'] & \text{Asimptotik Quasi Genişlemeyen Dönüşüm} \end{tikzcd}$$

## 2.2. Sabit Nokta Teorisinin Temel Teoremleri

Daraltan, kesin daraltan, genişlemeyen ve Lipschitzian gibi dönüşümlerin bazılarının sabit noktası olmadığı halde, bazılarının bir veya birden fazla sabit noktası olabilir. Bu bölümde, hangi dönüşümlerin sabit noktalarının var ve bu sabit noktaların hangi koşullar altında tek olduğuna dair teorem ve örnekler ifade edilecektir.

**Teorem 2.2.1:** $[a, b]$, $\mathbb{R}$ de bir kapalı aralık ve $f: [a, b] \to [a, b]$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda $f(c) = c$ olacak şekilde bir $c \in [a, b]$ sayısı vardır.

**İspat:** Her $x \in [a,b]$ için $T(x) = x - f(x)$ şeklinde bir $T:[a,b] \to \mathbb{R}$ dönüşümü tanımlayalım. Bu durumda $T$ sürekli bir dönüşümdür. Eğer $f(a) \geq a$ ise, $T(a) \leq 0$ ve $f(b) \leq b$ ise, $T(b) \geq 0$ olur. Ara değer teoremi gereğince $T(c) = 0$ olacağından $f(c) = c$ olacak şekilde bir $c \in [a,b]$ vardır.

**Teorem 2.2.2 (Brouwer Sabit Nokta Teoremi):** $B_X$, $\mathbb{R}^n$ de kapalı birim küre (dolayısıyla $\mathbb{R}^n$ nin bir kompakt konveks alt kümesi) olsun. Bu durumda $f: B_X \to B_X$ sürekli dönüşümü en az bir sabit noktaya sahiptir (Khamsi and Kirk 2001).

Bu teorem sonlu boyutlu uzaylarda geçerli olan bir teoremdir. Yani, Brouwer'ın bu teoremi herhangi bir Banach uzayında geçerli değildir. Bu durumu bir örnekle izah edelim.

**Örnek 2.2.3:** $B_X = \{x \in X: \|x\| \leq 1\}$, $X = c_0 = \{x = (x_1, x_2 \cdots, x_i, \cdots) : x_i \to 0\}$ Banach uzayında kapalı birim küre olsun. $x = (x_1, x_2, \dots)$ için

$$T: B_X \to B_X,\ T(x) = (1 - |x_1|, x_1, x_2, \dots)$$

dönüşümünü göz önüne alalım. Her $x, y \in B_X$ için

$$\|Tx - Ty\|_\infty = \|x - y\|_\infty$$

olduğundan $T$ süreklidir. Ancak, $Tx = x$ denkleminin $B_X$ de bir çözümü yoktur.

**Teorem 2.2.4 (Schauder Sabit Nokta Teoremi):** $X$ bir Banach uzayı, $K \subseteq X$ boş olmayan kompakt konveks bir alt küme ve $f: K \to K$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda $f$, en az bir sabit noktaya sahiptir (Khamsi and Kirk 2001).

**Teorem 2.2.5 (Banach Daralma İlkesi):** $(X, d)$ tam metrik uzay ve $T: X \to X$ daraltan bir dönüşüm olsun. Bu durumda $T$ bir tek sabit noktaya sahiptir (Tahakashi 2009).

**İspat:** $T$ daraltan dönüşüm olduğundan her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

olacak şekilde $k \in [0,1)$ sayısı vardır. $x_0 \in X$ keyfi bir nokta olsun. Buradan

$$x_1 = Tx_0,\ x_2 = Tx_1 = T^2x_0\ , \dots,\ x_{n+1} = Tx_n = T^{n+1}x_0$$

olacak şekilde bir $\{x_n\}$ dizisi oluşturalım. O halde

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d(Tx_n, Tx_{n-1}) \leq kd(x_n, x_{n-1}) \\ &= kd(Tx_{n-1}, Tx_{n-2}) \leq k^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq \cdots \\ &\leq k^n d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

olur. Şayet $m \geq n$ kabul edilirse yukarıdaki eşitsizlikten

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_m) \\ &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq k^n d(x_1, x_0) + k^{n+1} d(x_1, x_0) + \cdots + k^{m-1} d(x_1, x_0) \\ &= k^n (1 + k + k^2 + \cdots + k^{m-n-1}) d(x_1, x_0) \\ &\leq k^n \left(\frac{1}{1-k}\right) d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

olup $k \in [0,1)$ olduğundan

$$\frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0) \to 0$$

dır. Yani $\{x_n\}$, $X$ de bir Cauchy dizisidir. $X$ tam olduğundan $x_n \to x$ olacak şekilde $x \in X$ vardır. Şimdi iddia ediyoruz ki bu $x \in X$, $T$ nin sabit noktasıdır. Gerçekten

$$Tx = T\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} Tx_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x$$

dir. Üstelik bu $x$ tektir. Bir an için kabul edelim ki $x$ gibi $y$ de $T$ nin başka bir sabit noktasıdır. Buradan

$$d(x, y) = d(Tx, Ty) \leq kd(x, y), \qquad 0 \leq k < 1$$

olup

$$(1-k)d(x, y) \leq 0$$

yazılır. O halde $d(x, y) = 0$ olup $x = y$ dir.

**Örnek 2.2.6:** $K = [0,1] \subset \mathbb{R}$, $T: K \to K$, $Tx = \frac{x}{5}$ olsun. $x_0 = \frac{1}{5}$ olarak seçelim. Buradan

$$x_1 = Tx_0 = \frac{1}{25}$$

$$x_2 = Tx_1 = T^2x_0 = \frac{1}{125}$$

$$x_3 = Tx_2 = T^2x_1 = T^3x_0 = \frac{1}{625}$$

$$\vdots$$

$$x_n = Tx_{n-1} = T^2x_{n-2} = \cdots = T^nx_0$$

$$\vdots$$

şeklinde bir $\{x_n\}$ dizisi elde edilir. $n \to \infty$ için

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

olur. Dolayısıyla $T$ dönüşümünün sabit noktası $0 \in [0,1]$ dir. Sabit nokta tanımından da

$$Tx = x \Rightarrow \frac{x}{5} = x \Rightarrow x = 5x \Rightarrow x = 0$$

dir. Yani $x = 0$, $T$ dönüşümünün sabit noktasıdır. Ancak dönüşümlerin sabit noktalarını tanımdan hareket ederek bulmak her zaman kolay değildir. Bu sebeple farklı dönüşüm sınıflarının sabit noktalarının bulunmasında iterasyon metodları kullanılır.

**Teorem 2.2.7:** $(X, d)$ bir tam metrik uzay ve $n \in \mathbb{N}$ için $T^n$ bir daraltan dönüşüm olacak şekilde bir $T: X \to X$ dönüşümü verilsin. Bu durumda $T$ bir tek sabit noktaya sahiptir (Khamsi and Kirk 2001).

**İspat:** Banach sabit nokta teoremi gereğince, $T^n$ bir tek $x_0$ sabit noktasına sahiptir. Dolayısıyla

$$T^{n+1}x_0 = T(T^nx_0) = Tx_0$$

yazılır. Ayrıca $Tx_0$, $T^n$ nin bir sabit noktasıdır. $T^n$ nin sabit noktası tek olduğu için $Tx_0 = x_0$ olur. Eğer $Ty = y$ ise, bu durumda $T^ny = y$ olur. Bu da $y = x_0$ olmasını gerektirir.

**Teorem 2.2.8:** $(X, d)$ bir kompakt metrik uzay ve $T: X \to X$ kesin daraltan bir dönüşüm olsun. Bu durumda $T$ bir tek $x_0$ sabit noktasına sahiptir. Üstelik her $x \in X$ ve $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\lim_{n\to\infty} T^n x = x_0$$

dir (Khamsi and Kirk 2001).

**İspat:** $x \in X$ için,

$$\phi(x) = d(x, Tx)$$

şartını sağlayan bir $\phi: X \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonunu tanımlayalım. Bu durumda $\phi$ sürekli ve alttan sınırlıdır. Bu yüzden $\phi$, bir $x_0 \in X$ noktasında minimum değerini alır. $x_0 \neq Tx_0$ olduğunu kabul edelim. Buradan

$$\phi(Tx_0) = d(Tx_0, T^2x_0) < d(x_0, Tx_0) = \phi(x_0)$$

elde edilir. Bu ise $x_0 = Tx_0$ olmasını gerektirir. Şimdi $x \in X$ noktası ve $(d(T^n x, x_0))$ dizisi verilsin. Şayet $T^n x \neq x_0$ ise,

$$d(T^{n+1}x, x_0) = d(T^{n+1}x, Tx_0) < d(T^n x, x_0)$$

olur. Bu nedenle $(d(T^n x, x_0))$ dizisi kesin azalandır. Sonuç olarak $n \to \infty$ için

$$r = \lim_{n\to\infty} d(T^n x, x_0)$$

limiti vardır ve $r \geq 0$ dır. Ayrıca $X$ kompakt olduğu için $(T^n x)$ dizisi yakınsak bir $(T^{n_k} x)$ alt dizisine sahiptir. $\lim_{k\to\infty} T^{n_k} x = z$ diyelim. $(T^n x)$ dizisi azalan olduğundan

$$r = d(z, x_0) = \lim_{k\to\infty} d(T^{n_k} x, x_0) = \lim_{k\to\infty} d(T^{n_k+1} x, x_0) = d(Tz, x_0)$$

olur. Eğer $z \neq x_0$ ise, bu durumda

$$d(Tz, x_0) = d(Tz, Tx_0) < d(z, x_0)$$

dir. Bu ise $(T^n x)$ in herhangi yakınsak alt dizisinin $x_0$ noktasına yakınsadığını gösterir. O halde $\lim_{n\to\infty} T^n x = x_0$ dır.

**Örnek 2.2.9:** $X = [a, b]$, $d(x, y) = |x - y|$ ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $T$, $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli, $(a, b)$ açık aralığında türevlenebilir bir dönüşüm ve her $x \in (a, b)$ için,

$$|T'x| \leq k < 1$$

şartını sağlıyorsa bu durumda $T$ nin $X$ de bir tek sabit noktası vardır. Gerçekten de ortalama değer teoreminden her $x, y \in [a, b]$ için $c \in (a, b)$ olmak üzere,

$$|Tx - Ty| = T'(c)|(x - y)| \leq k|x - y|$$

olur. Böylece Banach daralma ilkesi gereği $T$ nin bir tek sabit noktası vardır.

Tam olmayan metrik uzaylarda tanımlanan daraltan dönüşümlerin sabit noktası olması gerekmediği aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

**Örnek 2.2.10:** $X = (0,1]$ ve $T: X \to X$, $Tx = \frac{2x}{7}$ dönüşümü verilsin. Bu durumda

$$d(Tx, Ty) = \left|\frac{2x}{7} - \frac{2y}{7}\right| = \frac{2}{7}|x - y| = \frac{2}{7}d(x, y)$$

olduğundan $T$ bir daraltan dönüşümdür. Fakat $T$ nin $X$ de bir sabit noktası yoktur. Çünkü sabit noktanın tanımından $\frac{2x}{7} = x \Rightarrow 2x = 7x \Rightarrow x = 0$ olur. Burada $x = 0 \notin (0,1] = X$ olduğundan $T$ nin $X$ de bir sabit noktası yoktur.

Aşağıdaki örnekte, tam metrik uzay üzerinde tanımlanan genişlemeyen bir dönüşümün bir sabit noktaya sahip olması gerekmediği gösterilmiştir.

**Örnek 2.2.11:** $X = c_0$ Banach uzayı ve $B_X$ kapalı birim yuvarı verilsin. Her $x \in B_X$ için

$$T(x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots) = (1, x_1, x_2, x_3, \cdots)$$

şeklinde tanımlanan $T: B_X \to B_X$ dönüşümünü alalım. $T$ genişlemeyen bir dönüşüm ve $x = (1,1,1, \dots)$, $T$ nin bir sabit noktasıdır. Fakat, $x = (1,1,1, \dots) \notin B_X$ dır. Yani $T$ genişlemeyen dönüşümü $B_X$ de bir sabit noktaya sahip değildir.

Yine tam olmayan metrik uzaylarda tanımlanan kesin daraltan dönüşümlerin sabit noktasının olması gerekmediği aşağıdaki örnekte verilmiştir.

**Örnek 2.2.12:** $X = c_0$ uzayı $d(x,y) = \|x-y\| = \sup_{i\in\mathbb{N}}|x_i - y_i|$ metriği ile verilsin. $B_X$ kapalı birim yuvarını alalım. $x \in B_X$ ve $i = 2,3,\ldots$ için $y_1 = (1+\|x\|)/2$ ve $y_i = \left(1-1/2^{i+1}\right)x_{i-1}$ olarak seçilirse, $|y_1| \leq 1$ ve $|y_i| \leq |x_{i-1}| \leq 1$ dir. Bu halde

$$T: B_X \to B_X\ ,\ T(x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots) = (y_1, y_2, \cdots, y_i, \cdots)$$

dönüşümü tanımlanabilir. $x$ ve $y$ nin $B_X$ de farklı iki nokta olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\|Tx - Ty\| &= \sup\left\{\frac{\|x\|-\|y\|}{2}, \left(1-\frac{1}{2^{i+1}}\right)|x_{i-1} - y_{i-1}| : i = 2,3,\cdots\right\}\\ &\leq \sup\left\{\frac{\|x-y\|}{2}, \left(1-\frac{1}{2^{i+1}}\right)|x_{i-1} - y_{i-1}| : i = 2,3,\cdots\right\}\\ &< \|x-y\|\end{aligned}$$

elde edilir. Yani $T$ kesin daraltan bir dönüşümdür. $Tv = v$ olacak şekilde bir $v \in B_X$ noktasının var olduğunu kabul edelim. Böylece $i \geq 2$ ve $v_1 = (1+\|v\|)/2 > 0$ için

$$|v_i| = \left(1-\frac{1}{2^{i+1}}\right)|v_{i-1}|$$

olur. Bu ise her $i \geq 2$ için

$$\begin{aligned}|v_i| &= \left(1-\frac{1}{2^{i+1}}\right)|v_{i-1}|\\ &= \left(1-\frac{1}{2^{i+1}}\right)\left(1-\frac{1}{2^{i}}\right)|v_{i-2}|\\ &\vdots\\ &= \prod_{k=0}^{i-2}\left(1-\frac{1}{2^{i+1-k}}\right)|v_1|\\ &\geq \left(1-\sum_{k=0}^{i-2}\frac{1}{2^{i+1-k}}\right)|v_1|\end{aligned}$$

$$= \left(1 - \sum_{j=3}^{i+1} \frac{1}{2^j}\right)|v_1|$$

$$> \frac{3}{4}|v_1|$$

olmasını gerektirir. $i \to \infty$ iken $v_i \to 0$ olduğundan bu mümkün değildir. Dolayısıyla $T$ dönüşümünün $B_X$ de herhangi bir sabit noktası yoktur.

**Tanım 2.2.13 (Düzgün Konveks Uzay):** $X$ bir Banach uzayı olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve $\|x\| \leq 1,\ \|y\| \leq 1$ ve $\|x - y\| \geq \varepsilon$ şartlarını sağlayan her $x, y \in X$ için

$$\frac{1}{2}\|x + y\| \leq 1 - \delta(\varepsilon)$$

olacak şekilde $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa, $X$ e düzgün (uniformly) konveks uzay adı verilir (Aksoy and Khamsi 1990).

Hilbert uzayları düzgün konveks Banach uzaylarıdır. Buna rağmen $\ell_1 = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots):\ \sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2 < \infty\}$ ve $\ell_\infty = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots) : \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ sınırlı$\}$ uzayları sırasıyla $\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$ ve $\|x\|_\infty = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$ normlarına göre düzgün konveks uzay değillerdir.

Goebel ve Kirk, düzgün konveks bir Banach uzayında tanımlı asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktaya sahip olduğunu aşağıdaki teoremle ispatlamışlardır.

**Teorem 2.2.14:** $X$ düzgün konveks Banach uzayı, $K$ da bu uzayın boş olmayan kapalı sınırlı ve konveks bir alt kümesi ve $T: K \to K$ asimptotik genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Bu durumda $T$, $K$ da bir sabit noktaya sahiptir (Goebel and Kirk 1972).

Kirk 2004 yılında Goebel ve Kirk'in bu teoremini daha genel bir uzay olan CAT(0) uzaylarına genelleştirmiştir. Bu teoremi vermeden önce CAT(0) uzaylarını ve bu uzay ile ilgili bazı kavramları tanımlayalım.

**Tanım 2.2.15:** $(X, d)$ bir metrik uzay olsun. $x, y \in X$ noktalarını birleştiren $c: [0, l] \subset \mathbb{R} \to X$ sürekli dönüşümü

**i)** $c(0) = x$, $c(l) = y$

**ii)** Her $t, t' \in [0, l]$ için $d\big(c(t), c(t')\big) = |t - t'|$ dir. Yani $c$ bir izometridir.

**iii)** $d(x, y) = l$

şartlarını sağlıyorsa bu dönüşüme bir geodezik yol denir.

Bu $c$ dönüşümünün görüntüsüne de $x$ den $y$ ye bir geodezik doğru parçası denir. Eğer bu geodezik doğru parçası tek ise $[x, y]$ ile gösterilir. $X$ kümesindeki her iki nokta çifti bir geodezik yardımıyla birleştirilebiliyorsa bu uzaya geodezik uzay denir. Her $x, y \in X$ için $x$ ve $y$ noktalarını birleştiren bir tek geodezik varsa, bu uzay tek türlü geodezik uzay olarak adlandırılır.

$(X, d)$ geodezik uzay ve $x_1, x_2, x_3 \in X$ olsun. $x_1, x_2, x_3$ noktaları ve bu noktalar arasındaki geodezik doğru parçalarının birleşimine geodezik üçgen denir ve $\Delta(x_1, x_2, x_3)$ ile gösterilir.

$(X, d)$ uzayındaki $\Delta(x_1, x_2, x_3)$ geodezik üçgeni için bir karşılaştırma üçgeni, her $i, j \in \{1,2,3\}$ için

$$d_{\mathbb{R}^2}\big(\bar{x}_i, \bar{x}_j\big) = d\big(x_i, x_j\big)$$

şartını sağlayan $\mathbb{R}^2$ Öklid uzayında $\bar{\Delta}(x_1, x_2, x_3) = \Delta(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ şeklindeki bir üçgendir.

Bir geodezik uzayın CAT(0) uzayı olması için uygun boyuttaki tüm geodezik üçgenlerin aşağıdaki karşılaştırma aksiyomunu (CAT(0) eşitsizliğini) sağlaması gerekir.

**Tanım 2.2.16:** $(X, d)$ bir geodezik metrik uzay, $\Delta$ bir geodezik üçgen ve bu üçgen için karşılaştırma üçgeni $\bar{\Delta}$ olsun. Her $x, y \in \Delta$ ve $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{\Delta}$ için $d(x, y) \leq d_{\mathbb{R}^2}(\bar{x}, \bar{y})$ ise $\Delta$ geodezik üçgeni CAT(0) eşitsizliğini sağlıyor denir.

CAT(0) uzayında $x, y_1, y_2$ üç nokta ve $y_0$ ise $[y_1, y_2]$ doğru parçasının orta noktası olmak üzere CAT(0) eşitsizliğinden

$$d(x, y_0)^2 \leq \frac{1}{2}d(x, y_1)^2 + \frac{1}{2}d(x, y_2)^2 - \frac{1}{4}d(y_1, y_2)^2 \tag{CN}$$

eşitsizliği elde edilir. Bruhat and Tits (1972) tarafından ispatlanan bu eşitsizlik (CN) eşitsizliği olarak bilinir.

Bir geodezik uzayın CAT(0) uzayı olması için gerek ve yeter şart (CN) eşitsizliğini sağlamasıdır.

**Teorem 2.2.17:** $X$ bir CAT(0) uzayı ve $x, y \in X$ olsun. Her $t \in [0,1]$ için

$$d(x, z) = td(x, y) \text{ ve } d(y, z) = (1 - t)d(x, y)$$

olacak şekilde bir tek $z \in [x, y]$ vardır (Dhompongsa and Panyanak 2008).

Bu teoremi sağlayan $z \in [x, y]$ noktasını ifade etmek için $(1 - t)x \oplus ty$ notasyonu kullanılır. Bu durumda CN eşitsizliği

$$d((1 - t)y_1 \oplus ty_2, x)^2 \leq \frac{1}{2}d(y_1, x)^2 + \frac{1}{2}d(y_2, x)^2 - \frac{1}{4}d(y_1, y_2)^2$$

şeklinde verilebilir.

**Teorem 2.2.18:** $X$ bir tam CAT(0) uzayı, $K$ da bu uzayın boş olmayan kapalı konveks sınırlı bir alt kümesi ve $T: K \to K$ asimptotik genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Bu durumda $T$, $K$ da bir sabit noktaya sahiptir (Kirk 2004).

# 3. MATERYAL ve YÖNTEM

## 3.1. Konveks Metrik Uzaylar ve Hiperbolik Uzaylar

Takahashi (1972) konveks metrik uzay kavramını tanımlamış ve bu uzayda genişlemeyen dönüşümler için sabit nokta teorisi alanında çalışmıştır. Daha sonra metrik uzaylar üzerine konveks bir yapı kurmak için farklı çalışmalar yapılmıştır. Bu konveks yapı hiperbolik uzaylarda vardır. Hiperbolik uzay kavramı için literatürde farklı tanımlar mevcuttur. (Kirk 1982; Goebel and Kirk 1983; Goebel and Reich 1984; Kirk and Martinez-Yanez 1990; Reich and Shafrir 1990; Kohlenbach 2005). Bu çalışmada Kohlenbach (2005) tarafından verilen hiperbolik uzaylar üzerinde çalışılacaktır. Bu uzay, Goebel and Kirk (1983) tarafından tanımlanan hiperbolik tip uzaylara göre daha kısıtlayıcı, fakat Reich and Shafrir (1990) tarafından tanımlanan hiperbolik uzaylardan daha geneldir. CAT(0) ve Banach uzayları, Hilbert yuvarı bu uzayın özel durumlarıdır.

**Tanım 3.1.1:** $(X,d)$ metrik uzay ve $W: X^2 \times [0,1] \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x,y,u \in X$ ve $\alpha \in [0,1]$ için,

$$d\big(u, W(x,y,\alpha)\big) \leq \alpha d(u,x) + (1-\alpha) d(u,y)$$

şartı sağlanıyorsa, $W$ dönüşümüne $X$ üzerinde bir konveks yapı ve $W$ konveks yapısı ile birlikte $X$ e konveks metrik uzay denir. Bu uzayı göstermek için $(X,d,W)$ notasyonu kullanılır (Takahashi 1972).

Konveks metrik uzaylar normlu uzaylardan dolayısıyla Banach uzaylarından daha geneldir. Yani bu uzaylar konveks metrik uzayların özel halleridir. Bunu göstermek için $X$ in bir normlu uzay ve $x,y,u \in X$, $\alpha \in [0,1]$ için $W$ dönüşümünün $W(x,y,\alpha) = \alpha x + (1-\alpha)y$ olarak tanımlandığını kabul edelim. Bu durumda

$$\begin{aligned} d\big(u, W(x,y,\alpha)\big) &= \|u - (\alpha x + (1-\alpha)y)\| \\ &\leq \alpha\|u - x\| + (1-\alpha)\|u - y\| \end{aligned}$$

$$= \alpha d(u,x) + (1-\alpha)d(u,y)$$

olur. Dolayısıyla her normlu uzay bir konveks metrik uzaydır. Fakat bunun tersi doğru değildir.

**Örnek 3.1.2:** $X = \{(x_1, x_2) \in R^2 : x_1 > 0, x_2 > 0\}$ olsun. Her $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \in [0,1]$ için $W: X \times X \times [0,1] \to X$ dönüşümünü

$$W(x,y,\alpha) = \left(\alpha x_1 + (1-\alpha)y_1, \frac{\lambda x_1 x_2 + (1-\lambda)y_1 y_2}{\lambda x_1 + (1-\lambda)y_1}\right)$$

ve $d: X \times X \to [0,\infty)$ metriğini

$$d(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_1 x_2 - y_1 y_2|$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $(X,d,W)$ bir konveks metrik uzay olduğu halde normlu uzay değildir.

**Tanım 3.1.3:** $(X,d,W)$ bir konveks metrik uzay ve $K$ da $X$ in boş olmayan bir alt kümesi olsun. Her $(x,y,\alpha) \in K \times K \times [0,1]$ için $W(x,y,\alpha) \in K$ ise $K$ ya konvekstir denir (Takahashi 1972).

**Örnek 3.1.4:** $X$ bir konveks metrik uzay ve $x \in X$ olsun. $B(x,r)$ açık ve $\overline{B}(x,r)$ kapalı yuvarları konvekstir (Takahashi 1972).

**Çözüm:** Her $y,z \in B(x,r)$ ve $\alpha \in [0,1]$ için $W(y,z,\alpha) \in X$ dir. $X$ bir konveks metrik uzay olduğundan

$$d(x, W(y,z,\alpha) \le \alpha d(x,y) + (1-\alpha)d(x,z) < \alpha r + (1-\alpha)r = r$$

olur. Böylece $W(y,z,\alpha) \in B(x,r)$ olup $B(x,r)$ açık yuvar konvekstir. Benzer şekilde $\overline{B}(x,r)$ kapalı yuvarının da konveksliği gösterilebilir.

**Tanım 3.1.5:** $(X,d)$ metrik uzay ve $W: X^2 \times [0,1] \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x,y,z,w \in X$ ve $\alpha, \beta \in [0,1]$ için, W1. $d\big(u, W(x,y,\alpha)\big) \leq \alpha d(u,x) + (1-\alpha)d(u,y)$

W2. $d\big(W(x,y,\alpha), W(x,y,\beta)\big) = |\alpha - \beta| d(x,y)$

W3. $W(x,y,\alpha) = W\big(y,x,(1-\alpha)\big)$

W4. $d\big(W(x,z,\alpha), W(y,w,\alpha)\big) \leq \alpha d(x,y) + (1-\alpha)d(z,w)$

şartları sağlanıyorsa $(X,d)$ metrik uzayına hiperbolik uzay denir ve yine $(X,d,W)$ ile gösterilir (Kohlenbach2005).

Bu tanımdaki (W1) şartından her hiperbolik uzayın bir konveks metrik uzay olduğu görülür. Ancak her konveks metrik uzay bir hiperbolik uzay değildir.

**Örnek 3.1.6:** $X = \mathbb{R}$ olsun. Her $x, y \in \mathbb{R}$, $\alpha \in [0,1]$ için $W: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0,1] \to \mathbb{R}$ dönüşümünü

$$W(x,y,\alpha) = \alpha x + (1-\alpha)y$$

ve $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0,\infty)$ metriğini

$$d(x,y) = \frac{|x-y|}{1-|x-y|}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $X$ konveks metrik uzay olduğu halde hiperbolik uzay değildir.

Diğer taraftan her Banach uzayı bir hiperbolik uzaydır. Bunu görmek için Banach uzayını norm metriği ile düşünüp $W(x,y,\alpha) = \alpha x + (1-\alpha)y$ almak yeterlidir. Ancak her hiperbolik uzay bir Banach uzayı teşkil etmez. Yine $W(x,y,\alpha) = \alpha x \oplus (1-\alpha)y$ alınırsa her $CAT(0)$ uzayının bir hiperbolik uzay olduğu görülür.

**Örnek 3.1.7:** $H$ kompleks Hilbert uzayı ve $B_H$, $H$ de açık birim yuvar olsun. $B_H$ üzerinde

$$\sigma(x,y) = \frac{(1-\|x\|^2)(1-\|y\|^2)}{|1-\langle x,y\rangle|^2}$$

olmak üzere

$$d(x,y) = \operatorname{argtanh}\big(1-\sigma(x,y)\big)^{\frac{1}{2}}$$

olarak tanımlanan Poincare metriğini düşünelim. $(B_H, d)$ metrik uzayı Hilbert yuvarı olarak adlandırılır. Hilbert yuvarı bir hiperbolik uzay olmasına rağmen Banach uzayı değildir.

**Tanım 3.1.8:** $(X,d,W)$ hiperbolik uzay olsun. Her $x,y,u \in X$, $r>0$ ve $\varepsilon \in (0,2]$ için

$$\left.\begin{array}{l} d(x,u) \le r \\ d(y,u) \le r \\ d(x,y) \ge \varepsilon r \end{array}\right\} \text{ iken } d\left(W\left(x,y,\frac{1}{2}\right),u\right) \le (1-\delta)r$$

olacak şekilde $\delta \in (0,1]$ varsa, $X$ e düzgün konveks hiperbolik uzay denir (Shimizu and Takahashi 1996).

Verilen bir $r>0$ ve $\varepsilon \in (0,2]$ için $\delta = \eta(r,\varepsilon)$ eşitliğini sağlayan $\eta: (0,\infty) \times (0,2] \to (0,1]$ dönüşümüne düzgün konvekslik modülü denir. Sabit bir $\varepsilon$ için $\eta$ modülü $r$ ye göre azalıyorsa $\eta$ modülüne monotondur denir.

**Teorem 3.1.9:** Her $CAT(0)$ uzayı, $\eta(r,\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{8}$ konvekslik modülü ile düzgün konveks bir hiperbolik uzaydır (Leuştean 2007).

**İspat:** $X$ bir $CAT(0)$ uzayı, $r>0$, $\varepsilon \in (0,2]$ ve için $d(x,a) \le r$, $d(y,a) \le r$, $d(x,y) \ge \varepsilon r$ olmak üzere $a,x,y \in X$ olsun. Bu durumda CN eşitsizliğinden

$$d\left(\left(W\left(x,y,\frac{1}{2}\right)\right),a\right) = d\left(\frac{1}{2}x \oplus y\frac{1}{2},a\right)$$

$$\le \sqrt{\frac{1}{2}d(x,a)^2 + \frac{1}{2}d(y,a)^2 - \frac{1}{4}d(x,y)^2}$$

$$\le \sqrt{\frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{4}\varepsilon^2 r^2}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}} \cdot r$$
$$\leq \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{8}\right) r$$

elde edilir. Böylece $X$ düzgün konveks ve konvekslik modülü $\eta(r,\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{8}$ dir.

**Tanım 3.1.10 :** $(X,d,W)$ hiperbolik uzay olsun. Herhangi $x,y \in X$ ve $\lambda \in [0,1]$ için $d(z,x) = \lambda d(x,y)$ ve $d(z,y) = (1-\lambda)d(x,y)$ olacak şekilde bir tek $z \in X$ varsa, bu uzaya kesin konveks hiperbolik uzay denir (Takahashi 1972).

**Teorem 3.1.11:** Düzgün konveks hiperbolik bir uzay kesin konvekstir (Leuştean 2007).

**İspat:** $(X,d,W)$, $\eta$ monoton düzgün konvekslik modülüne sahip düzgün konveks bir hiperbolik uzay olsun. Bir an için $(X,d,W)$ uzayının kesin konveks olmadığını kabul edelim. Bu durumda $x,y \in X$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$d(z,x) = d(w,x) = \lambda d(x,y), \quad d(z,y) = d(w,y) = (1-\lambda)d(x,y)$$

olacak şekilde birbirinden farklı $z,w \in X$ vardır. Buradan hemen $x \neq y$ ve $\lambda \in (0,1)$ yazılır. $r_1 := \lambda d(x,y) > 0$, $r_2 := (1-\lambda)d(x,y) > 0$, $\varepsilon_1 := \frac{d(z,w)}{r_1}$ ve $\varepsilon_2 := \frac{d(z,w)}{r_2}$ olarak tanmlayalim. Buradan $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in (0,2]$ olduğu kolayca görülür. Böylece düzgün konveksliğin tanımından

$$d\left(W\left(z,w,\frac{1}{2}\right),x\right) \leq \big(1-\eta(r_1,\varepsilon_1)\big)r_1, \quad d\left(W\left(z,w,\frac{1}{2}\right),y\right) \leq \big(1-\eta(r_2,\varepsilon_2)\big)r_2$$

elde edilir. $x \neq y$ olduğundan ya $\eta(r_1,\varepsilon_1) < 1$ yada $\eta(r_2,\varepsilon_2) < 1$ olmak zorundadır. Üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} d(x,y) &\leq d\left(W\left(z,w,\frac{1}{2}\right),x\right) + d\left(W\left(z,w,\frac{1}{2}\right),y\right) \\ &\leq \big(1-\eta(r_1,\varepsilon_1)\big)r_1 + \big(1-\eta(r_2,\varepsilon_2)\big)r_2 \\ &< r_1 + r_2 = d(x,y) \end{aligned}$$

bulunur. Bu çelişki ispatı tamamlar.

**Lemma 3.1.12:** $(X, d, W)$ düzgün konveks bir hiperbolik uzay ve $\eta$ monoton düzgün konvekslik modülü olsun. Kabul edelim ki $r > 0$, $\varepsilon \in (0,2]$, $a, x, y \in X$ olmak üzere

$$d(x,a) \leq r, d(y,a) \leq r \text{ ve } d(x,y) \geq \varepsilon r$$

dir. Bu durumda $\lambda \in [0,1]$ için

**a)** $d(W(x,y,\lambda),a) \leq \big(1 - 2\lambda(1-\lambda)\eta(r,\varepsilon)\big)r$ dir.

**b)** $\psi \leq \varepsilon$ olacak şekilde bir $\psi \in (0,2]$ için

$$d(W(x,y,\lambda),a) \leq \big(1 - 2\lambda(1-\lambda)\eta(r,\psi)\big)r$$

dir.

**c)** Herhangi bir $s \geq r$ için

$$d(W(x,y,\lambda),a) \leq \left(1 - 2\lambda(1-\lambda)\eta\left(s, \frac{\varepsilon r}{s}\right)\right)s$$

dir.

**d)** $\eta$ monton ise bu durumda herhangi bir $s \geq r$ için

$$d(W(x,y,\lambda),a) \leq \big(1 - 2\lambda(1-\lambda)\eta(s,\varepsilon)\big)r$$

dir (Kohlenbach and Leuştean 2010).

**Teorem 3.1.13:** $(X, d, W)$ tam düzgün konveks hiperbolik uzay ve $\eta$ monoton düzgün konvekslik modülü olsun. $X$ in boş olmayan kapalı sınırlı konveks alt kümelerinin herhangi bir azalan dizisinin arakesiti boştan farklıdır (Kohlenbach and Leuştean 2010).

**İspat:** $\{K_n\}_{n\geq 1}$, $X$ in boş olmayan kapalı sınırlı konveks alt kümelerinin herhangi bir azalan dizisi ve $x \in X$ olsun. Eğer $x \in K_n$ ise ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\bigcap_{n\geq 1} K_n \neq \emptyset$ olur. $K_n$ kapalı olduğundan $d(x, K_n) > 0$ ve $x \neq K_n$ olacak şekilde $N \in \mathbb{N}$ olduğunu kabul edelim. Eğer $r \coloneqq d(x, K_n)$ ise bu durumda $\{r_n\}$ dizisi negatif terimli artan ve $a \in K_1$ olmak üzere $d(x,a) + diam(K_1)$ den sınırlıdır. O halde, $r \coloneqq \lim r_n = \sup r_n \geq r_N > 0$ olur. $D_n \coloneqq K_n \cap \overline{\mathrm{U}}\left(x, r + \frac{1}{n}\right)$ olarak tanımlayalım. Bu durumda $\{D_n\}$, $X$ in boş olmayan kapalı bir alt kümesinde azalan bir dizidir. $d_n \coloneqq diam\{D_n\}$ ve $0 \leq d \coloneqq \lim d_n = \inf d_n$ olsun. Kabul edelim ki; $d > 0$ ve $\frac{1}{K} \leq \frac{d}{2}$ olmak üzere $K \in \mathbb{N}$ dir. Herhangi $n \geq K$ için $d(x_n, y_n) \geq d_n - \frac{1}{n} \geq d - \frac{1}{n} \geq \frac{d}{2}$ olacak şekilde $x_n, y_n \in D_n$ vardır.

$$d(x_n, x) \leq r + \frac{1}{n}, d(y_n, x) \leq r + \frac{1}{n}, d(x_n, y_n) \geq \frac{d}{2} \geq \left(r + \frac{1}{n}\right)\frac{d}{2(r+1)}, \frac{d}{2(r+1)} \leq 1$$

ve $X$ düzgün konveks olduğundan, her $n \geq K$ için

$$r_n \leq d\left(W\left(x_n, y_n, \frac{1}{2}\right), x\right) \leq \left(1 - \eta\left(r + \frac{1}{n}, \frac{d}{2(r+1)}\right)\right)\left(r + \frac{1}{n}\right)$$

elde edilir. Ayrıca $r + \frac{1}{n} \leq r + 1$ ve $\eta$ monoton olduğundan

$$r_n \leq \left(1 - \eta\left(r + 1, \frac{d}{2(r+1)}\right)\right)\left(r + \frac{1}{n}\right)$$

elde edilir. Bu ifadede $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$r_n \leq \left(1 - \eta\left(r + 1, \frac{d}{2(r+1)}\right)\right) \cdot r < r$$

bulunur. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $d = 0$ olmak zorundadır. Bu ve $X$ in tam olması $\bigcap_{n>1} D_n \neq \emptyset$ olmasını gerektirir. O halde $\bigcap_{n>1} K_n \neq \emptyset$ dir.

Aşağıdaki teoremi vermeden önce alttan yarı sürekli fonksiyon tanımını verelim: $X$ bir metrik uzay olmak üzere $f: X \to [-\infty, \infty]$ olsun. Her $\lambda \in \mathbb{R}$ için $\Gamma_{f,\lambda} = \{x: f(x) \leq \lambda\}$ kümeleri kapalı ise $f$ fonksiyonuna alttan yarı sürekli denir.

**Teorem 3.1.14:** $(X, d, W)$ tam düzgün konveks hiperbolik uzay ve $\eta$ monoton düzgün konvekslik modülü olsun. $K$, $X$ in boş olmayan kapalı konveks alt kümesi ve $f: K \to [0, \infty)$ foksiyonu konveks ve alttan yarı sürekli olsun. Ayrıca kabul edelim ki $K$ daki her $\{x_n\}$ dizisi ve bir $a \in X$ için $\lim_{n\to\infty} d(x_n, a) = \infty$ iken $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$ dir. Bu durumda $f$ fonksiyonu $K$ üzerinde minimum değer alır. Ayrıca her $x \neq y$ için

$$f\left(W\left(x, y, \frac{1}{2}\right)\right) < \max\{f(x), f(y)\}$$

ise, $f$ minimum değerini bir tek noktada alır (Leuştean 2010).

**İspat:** $\alpha$, $f$ nin $K$ üzerindeki infumumu ve

$$K_n := \left\{x \in K : f(x) \leq \alpha + \frac{1}{n}\right\}$$

olsun. Teorem 3.1.13, $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine uygulanırsa $x^* \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ nin var olduğu görülür. Buradan her $n \geq 1$ için $f(x^*) \leq \alpha + \frac{1}{n}$ yazılır ve böylece $f(x^*) \leq \alpha$ olur. $\alpha$, $f$ nin infimumu olduğundan $f(x^*) = \alpha$ dir. Yani $f$ fonksiyonu $K$ üzerinde minimum değer alır. Şimdi bu değerin tek olduğunu gösterelim. $f$ fonksiyonunun minimum değerlerini $x^* \neq y^*$ olmak üzere $x^*$ ve $y^*$ noktalarında aldığını kabul edelim. $K$ konveks olduğundan

$$W\left(\frac{1}{2}x^* + \frac{1}{2}y^*\right) \in K \text{ ve } f\left(W\left(x^*, y^*, \frac{1}{2}\right)\right) < \max\{f(x^*), f(y^*)\} = \alpha$$

olur. Bu çelişki ispatı tamamlar.

### 3.2. Δ-Yakınsaklık ve Hiperbolik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri

İlk olarak asimptotik merkezle ilgili bazı tanım ve teoremleri verelim.

$(X, d)$ bir metrik uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan bir küme ve $\{x_n\}$, $X$ de sınırlı bir dizi olsun. Her $m \in \mathbb{N}$ ve $y \in X$ için aşağıdaki fonksiyonları tanımlayalım.

$$r_m(\cdot, \{x_n\}) : X \to [0, \infty), \;\; r_m(y, \{x_n\}) = \sup\{d\,(y, x_n) : n \geq m\}$$

$$r(\cdot, \{x_n\}) : X \to [0, \infty), \;\; r(y, \{x_n\}) = \operatorname{limsup}_n d(y, x_n) = \inf_m r_m(y, \{x_n\})$$
$$= \lim_{m\to\infty} r_m(y, \{x_n\})$$

Bu fonksiyonların bazı özellikleri aşağıdaki lemmada verilmiştir.

**Lemma 3.2.1:** $(X,d)$ bir metrik uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan bir küme ve $\{x_n\}$, $X$ de sınırlı bir dizi olsun. $y \in X$ olmak üzere

**a)** Her $m \in \mathbb{N}$ için $r_m(\cdot,\{x_n\})$ genişlemeyen bir dönüşümdür.

**b)** $r(\cdot,\{x_n\})$ süreklidir ve bir $a \in X$ için $d(y,a) \to \infty$ iken $r(y,\{x_n\}) \to \infty$ dir.

**c)** $r(y,\{x_n\}) = 0$ olması için gerek ve yeter şart $\lim_{n\to\infty} x_n = y$ olmasıdır.

**d)** $K$ konveks ve $(X,d,W)$ bir konveks metrik uzay ise $r(y,\{x_n\})$ bir konveks fonksiyondur (Leuştean 2010).

**Tanım 3.2.2 :** $(X,d)$ bir metrik uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan bir küme ve $\{x_n\}$, $X$ de sınırlı bir dizi olsun.

**a)** $\{x_n\}$ dizisinin $K$ kümesine göre asimptotik yarıçapı

$$r(K,\{x_n\}) = \inf\{r(y,\{x_n\}): y \in K\}$$

olarak tanımlanır. $\{x_n\}$ dizisinin $X$ e göre göre asimptotik yarıçapı $r(\{x_n\})$ ile gösterilir.

**b)** Eğer $r(k,\{x_n\}) = r(K,\{x_n\}) = \min\{r(y,\{x_n\}) : y \in K\}$ ise $k \in K$ noktasına $\{x_n\}$ dizisinin $K$ kümesine göre asimptotik merkezi denir.

$\{x_n\}$ dizisinin $K$ kümesine göre tüm asimptotik merkezlerinin kümesi $A(K,\{x_n\})$ ile gösterilir. $K = X$ iken $k$ noktasına kısaca $\{x_n\}$ dizisinin asimptotik merkezi denir ve $A(K,\{x_n\})$ yerine $A(\{x_n\})$ notasyonu kullanılır.

Banach ve CAT(0) uzaylarında sınırlı her dizi kapalı konveks bir alt kümeye göre bir tek asimptotik merkeze sahiptir (Dhompongsa *et al.* 2006). Aşağıdaki teorem Leuştean (2010) tarafından ispatlanmış ve bu özelliğin tam düzgün konveks hiperbolik uzaylarda sağlandığı gösterilmiştir.

**Teorem 3.2.3:** $(X, d, W)$ monoton düzgün konvekslik modülüne sahip tam düzgün konveks bir hiperbolik uzay olsun. Ayrıca $K$ da $X$ in boş olmayan kapalı konveks alt kümesi olsun. Bu durumda $X$ deki her sınırlı $\{x_n\}$ dizisi $K$ ya göre bir tek asimptotik merkeze sahiptir (Leuştean 2010).

**İspat:** $\eta$ monoton düzgün konvekslik modülü olsun. Teorem 3.1.14 kullanalarak $r(\cdot, \{x_n\}): K \to [0, \infty)$ fonksiyonunun minimum değerini bir tek noktada aldığını göstereceğiz. Lemma 3.2.1 den dolayı $r(\cdot, \{x_n\}): K \to [0, \infty)$ fonksiyonunu sürekli ve bir $a \in X$ için $d(y, a) \to \infty$ iken $r(y, \{x_n\}) \to \infty$ dir. Böylece geriye $y \neq z$ olmak üzere $y, z \in K$ için

$$r\left(W\left(y, z, \frac{1}{2}\right), \{x_n\}\right) < \max\{r(y, \{x_n\}), r(z, \{x_n\})\}$$

olduğunu göstermek kalır. $M \coloneqq \max\{r(y, \{x_n\}), r(z, \{x_n\})\} > 0$ olsun. Her $\varepsilon \in (0,1]$ ve $n \geq N$ için

$$d(y, x_n), d(z, x_n) \leq M + \varepsilon \leq M + 1$$

olacak şekilde $N$ doğal sayısı vardır. Ayrıca

$$d(y, z) = \frac{d(y, z)}{M + \varepsilon}(M + \varepsilon) \geq \frac{d(y, z)}{M + 1}(M + \varepsilon)$$

dir. Böylece Lemma 3.1.12 (d) uygulayarak $n \geq N$ için

$$d\left(W\left(y, z, \frac{1}{2}\right), x_n\right) \leq \left(1 - \eta\left(M + 1, \frac{d(y, z)}{M + 1}\right)\right)(M + \varepsilon)$$

ve buradan

$$r\left(W\left(y, z, \frac{1}{2}\right), \{x_n\}\right) \leq \left(1 - \eta\left(M + 1, \frac{d(y, z)}{M + 1}\right)\right)(M + \varepsilon)$$

elde edilir. $\varepsilon \to 0$ için limit alınırsa

$$r\left(W\left(y, z, \frac{1}{2}\right), \{x_n\}\right) \leq \left(1 - \eta\left(M + 1, \frac{d(y, z)}{M + 1}\right)\right)M$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Metrik uzaylarda $\Delta$-yakınsama kavramı Lim (1976) tarafından tanıtılmış ve CAT(0) uzaylarında Dhompongsa and Panyanak (2008) tarafından incelenmiştir. Khan *et al.* (2012) daha genel hiperbolik uzaylarda $\Delta$-yakınsama kavramını incelemeye devam etmiştir.

**Tanım 3.2.4:** $(X,d)$ bir metrik uzay, $x \in X$ ve $\{x_n\}$, $X$ de bir dizi ve olsun. $\{x_n\}$ dizisinin her $\{u_n\}$ alt dizisi bir tek $x$ asimptotik merkezine sahipse $\{x_n\}$ dizisi $x$ e $\Delta$-yakınsar denir. Bu durum $\Delta$ -$\lim_n x_n = x$ şeklinde yazılır ve $x$ e $\{x_n\}$ dizisinin $\Delta$ – limiti denir.

Hiperbolik uzaylardaki $\Delta$ yakınsama kavramı ile Opial şartı arasında yakın bir ilişki vardır. Bu ilişkiden bahsetmeden önce Opial şartını verelim.

**Tanım 3.2.5 (Opial Şartı):** $X$ Banach uzayında $x_n \rightharpoonup x$ zayıf yakınsaması $y \neq x$ olmak üzere her $y \in X$ için

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_n - x\| < \limsup_{n\to\infty} \|x_n - y\|$$

olmasını gerektiriyorsa, bu durumda $X$, Opial şartını sağlıyor denir (Opial 1967).

Dikkat edilirse $X$ bir hiperbolik uzay olmak üzere $x$ noktasına $\Delta$-yakınsayan $\{x_n\} \subset X$ dizisi ve $y \neq x$ olcak şekilde $y \in X$ için

$$\limsup_{n\to\infty} d(x_n, x) < \limsup_{n\to\infty} d(x_n, y)$$

dir. Dolayısıyla $X$, Opial şartını sağlar. O halde $\Delta$ yakınsama kavramı Opial şartını sağlayan Banach uzaylarındaki zayıf yakınsama ile çakışır (Kirk and Panyanak 2008).

Son olarak hiperbolik uzaylarda genişlemeyen ve asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin hangi şartlar altında sabit noktalara sahip olduğu gösterilecektir. Bunun için öncelikle aşağıdaki lemmalar verilmiştir.

**Lemma 3.2.6:** $(X, d)$ bir metrik uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan bir küme ve $A(K, \{x_n\}) = \{c\}$ olmak üzere $\{x_n\}$, $X$ de sınırlı bir dizi olsun. Ayrıca her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n \geq 0$, $\limsup_{n\to\infty} \alpha_n \leq 1$ ve $\limsup_{n\to\infty} \beta_n \leq 0$ olmak üzere $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ reel diziler olsun. Her $n \geq N$ için

$$d(y, x_{n+p}) \leq \alpha_n d(c, x_n) + \beta_n$$

şartını sağlayan $p, N \in \mathbb{N}$ mevcut olacak şekilde $y \in K$ nın var olduğunu kabul edelim. Bu durumda $y = c$ dir (Leuştean 2010).

**İspat:** Hipotezden

$$\begin{aligned} r(y, \{x_n\}) &= \limsup_{n\to\infty} d(y, x_n) \\ &= \limsup_{n\to\infty} d(y, x_{n+p}) \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} (\alpha_n d(c, x_n) + \beta_n) \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \alpha_n \cdot \limsup_{n\to\infty} d(c, x_n) + \limsup_{n\to\infty} \beta_n \\ &= r(c, \{x_n\}) \end{aligned}$$

yazılabilir. $r(c, \{x_n\}) = \min\{r(z, \{x_n\}): z \in K\}$ olduğundan $c$ tektir. Bu nedenle $y = c$ dir.

**Teorem 3.2.7:** $(X, d, W)$ bir tam hiperbolik uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan kapalı konveks küme ve $T: K \to K$ genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

**a)** $T$ nin bir sabit noktası vardır.

**b)** $K$ da $\lim_{n\to\infty} d(u_n, Tu_n) = 0$ olacak şekilde sınırlı bir $\{u_n\}$ dizisi vardır.

**c)** Herhangi bir $x \in K$ için $\{T^n x\}$ Picard iterasyon dizisi sınırlıdır.

**d)** Her $x \in K$ için $\{T^n x\}$ Picard iterasyon dizisi sınırlıdır (Leuştean 2010).

**İspat: (a)⇒(b):** $p$, $T$ nin bir sabit noktası olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $u_n \coloneqq p$ olarak tanımlanırsa $u_n$ sınırlı bir dizi ve $\lim_{n\to\infty} d(u_n, Tu_n) = 0$ dir.

**(b)⇒(a):** Teorem 3.2.3 den $\{u_n\}$ dizisi $K$ ya göre bir tek asimptotik merkeze sahiptir. Buna c diyelim. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(Tc, u_n) \leq d(Tc, Tu_n) + d(Tu_n, u_n) \leq d(c, u_n) + d(Tu_n, u_n)$$

yazılır. $y \coloneqq Tc$ ve $p \coloneqq N \coloneqq 0$, $\alpha_n \coloneqq 1$, $\beta_n \coloneqq d(u_n, Tu_n)$ alınarak Lemma 3.2.6, bu ifadeye uygulanırsa $Tc = c$ bulunur.

**(a)⇒(c):** Eğer $p$, $T$ dönüşümünün bir sabit noktası ise her $n \in \mathbb{N}$ için $T^n p = p$ dir. Dolayısıyla $\{T^n x\}$ Picard iterasyon dizisi sınırlıdır.

**(c)⇒(d):** $T$ genişlemeyen dönüşüm olduğundan her $x, y \in K$ için $d(T^n x, T^n y) \leq d(x, y)$ dir. Bu ve (c) den sonuç görülür.

**(d)⇒(a):** $c$, $\{T^n x\}$ dizisinin tek asimptotik merkezi olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(Tc, T^{n+1}x) \leq d(c, T^n x)$$

dir. Böylece $y \coloneqq Tc$, $x_n \coloneqq T^n x$ ve $p \coloneqq 1$, $N \coloneqq 0$, $\alpha_n \coloneqq 1$, $\beta_n \coloneqq 0$ alınarak Lemma 3.2.6 bu ifadeye uygulanırsa $Tc = c$ bulunur.

**Sonuç 3.2.8:** $(X, d, W)$ bir tam hiperbolik uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan kapalı konveks küme ve $T: K \to K$ genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Bu durumda $T$ nin bir sabit noktası vardır (Leuştean 2010).

**Teorem 3.2.9:** $(X, d, W)$, $\eta$ monoton düzgün konvekslik modülüne sahip tam düzgün konveks bir hiperbolik uzay ve $K$ da $X$ in boş olmayan kapalı sınırlı konveks alt kümesi olsun. Bu durumda $T: K \to K$ asimptotik genişlemeyen dönüşümü $K$ kümesinde bir sabit noktaya sahiptir (Kohlenbach and Leuştean 2010).

### 3.3. Bazı Önemli Tanım ve Lemmalar

Bu kısımda teoremlerimizin ispatında kullanacağımız bazı tanım ve lemmaları vereceğiz.

**Tanım 3.3.1**: $K$, bir $X$ metrik uzayının boş olmayan bir alt kümesi ve $T: K \to K$ bir dönüşüm olsun. $K$ daki $d(x_n, Tx_n) \to 0$ şartını sağlayan her sınırlı $\{x_n\}$ dizisinin $K$ da bir $x^*$ noktasına güçlü yakınsayan $\{x_{n_j}\}$ alt dizisi varsa $T$ dönüşümüne semikompaktır denir.

**Tanım 3.3.2 (($A$) Şartı):** $K$, bir $X$ Banach uzayının boş olmayan bir alt kümesi, $T: K \to K$ bir dönüşüm ve $F(T) \neq \emptyset$ olsun. Eğer her $r > 0$ için $f(r) > 0$, $f(0) = 0$ olacak şekilde azalmayan bir $f: [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonu var ve her $x \in K$ için

$$\|x - Tx\| \geq f\left(d\big(x, F(T)\big)\right)$$

ise, $T$ ye $(A)$ şartını sağlıyor denir (Senter and Dotson 1974).

Burada $d\big(x, F(T)\big) = \inf_{y \in F(T)} d(x, y)$ dir. Tan ve Xu ya göre $(A)$ şartı, $K$ nın kompaktlığından daha zayıftır (Tan and Xu 1993).

Khan ve Fukhar-ud-din (2005), $T_1, T_2: K \to K$ iki dönüşüm için $(A)$ şartını aşağıdaki şekilde genelleştirmiştir.

**Tanım 3.3.3 (($A'$) Şartı):** $X$ Banach uzayının boş olmayan bir $K$ alt kümesi ve $T_1, T_2: K \to K$ dönüşümleri verilsin. Eğer her $r > 0$ için $f(r) > 0$, $f(0) = 0$ olacak şekilde azalmayan bir $f: [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonu var ve her $x \in K$ için

$$\frac{1}{2}(\|x - T_1 x\| + \|x - T_2 x\|) \geq f\left(d\big(x, F(T)\big)\right)$$

ise, $T_1, T_2: K \to K$ dönüşümleri $(A')$ şartını sağlıyor denir (Khan and Fukhar-ud-din 2005).

$T_1 = T_2 = T$ olarak alınırsa $(A)$ şartının $(A')$ nün özel bir hali olduğu görülür.

**Lemma 3.3.4:** $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ ve $\{\delta_n\}$ negatif olmayan reel sayı dizileri için

$$a_{n+1} \leq (1+\delta_n)a_n + b_n, \quad n \geq 1$$

eşitsizliği sağlansın. Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < \infty$ ise bu durumda

**a)** $\lim_{n\to\infty} a_n$ limiti vardır.

**b)** $\liminf_{n\to\infty} a_n = 0$ veya $\limsup_{n\to\infty} a_n = 0$ ise $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ dır (Tan and Xu 1993).

**İspat:** $m, n \geq 1$ için

$$\begin{aligned}
a_{n+m+1} &\leq (1+\delta_{n+m})a_{n+m} + b_{n+m} \\
&\leq (1+\delta_{n+m})(a_{n+m} + b_{n+m}) \\
&\leq (1+\delta_{n+m})\big((1+\delta_{n+m-1})(a_{n+m-1} + b_{n+m-1}) + b_{n+m}\big) \\
&\;\vdots \\
&\leq \left(\prod_{i=n}^{n+m}(1+\delta_i)\right)\left(a_n + \sum_{i=n}^{n+m} b_i\right)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \leq \left(\prod_{i=n}^{\infty}(1+\delta_i)\right)\left(a_n + \sum_{i=n}^{\infty} b_i\right)$$

olur. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < \infty$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} \prod_{i=n}^{\infty}(1+\delta_i) = 1$ ve $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=n}^{\infty} b_i = 0$ elde edilir. Son eşitsizlikten $\limsup_{n\to\infty} a_n \leq \liminf_{n\to\infty} a_n$ yazılabilir. O halde $\lim_{n\to\infty} a_n$ limiti vardır.

**Lemma 3.3.5:** $X$ düzgün konveks bir reel Banach uzayı ve $n \geq 1$ için $0 \leq p \leq t_n \leq q < 1$ olsun. $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$, $X$ de iki dizi olmak üzere uygun bir $r \geq 0$ için

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_n\| \leq r, \qquad \limsup_{n\to\infty} \|y_n\| \leq r, \qquad \lim_{n\to\infty} \|t_n x_n + (1-t_n)y_n\| = r$$

şartları sağlansın. Bu durumda $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$ dır (Schu 1991).

2010 yılında Laowang and Panyanak (2010), Schu (1991) nun Banach uzaylarında ispatladığı bu lemmayı, tam düzgün konveks hiperbolik uzaylarda ispatlamıştır. Fakat ispat sabit bir $\varepsilon$ için düzgün konvekslik modülünün $r$ ile artmasına bağlı olarak verilmiştir. 2012 yılında Khan *et al.* (2012) bu lemmayı daha fazla genelleştirerek $r$ den bağımsız olarak aşağıdaki gibi vermiştir.

**Lemma 3.3.6:** $(X, d, W)$ monoton düzgün konvekslik modülüne sahip tam düzgün konveks bir hiperbolik uzay olsun. $x \in X$ ve $b, c \in (0,1)$ için $\{\alpha_n\}$, $[b, c]$ aralığında bir dizi olsun. $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$, $X$ de iki dizi olmak üzere uygun bir $r \geq 0$ için

$$\limsup_{n\to\infty} d(x_n, x) \leq r\,, \qquad \limsup_{n\to\infty} d(y_n, x) \leq r, \qquad \lim_{n\to\infty} d(W(x_n, y_n, \alpha_n), x) = r$$

şartları sağlansın. Bu durumda $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$ dır (Khan *et al.* 2012).

**İspat :** $r = 0$ ise ispat açıktır. Kabul edelimki; $r > 0$ ve $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \neq 0$ olsun. $n_1 \in \mathbb{N}$ ise $\lambda > 0$ ve her $n \geq n_1$ için $d(x_n, y_n) \geq \frac{\lambda}{2} > 0$ olur. $\limsup_{n\to\infty} d(x_n, x) \leq r$ ve $\limsup_{n\to\infty} d(x_n, x) \leq r$ olduğundan $n \geq 1$ için

$$d(x_n, x) \leq r + \frac{1}{n} \quad \text{ve} \quad d(y_n, x) \leq r + \frac{1}{n}$$

yazılır. Ayrıca $d(x_n, y_n) \geq \frac{\lambda}{2} \geq \left(r + \frac{1}{n}\right)\frac{\lambda}{2(r+1)}$ dir. Burada $\frac{\lambda}{2(r+1)} \leq 1$ dir. Bu nedenle Lemma 3.1.12 (a) den

$$\begin{aligned} d(W(x_n, y_n, \alpha_n), x) &\leq \left(1 - 2\alpha_n(1-\alpha_n)\eta\left(r + \frac{1}{n}\,, \frac{\lambda}{2(r+1)}\right)\right)\left(r + \frac{1}{n}\right) \\ &\leq \left(1 - 2\alpha_n(1-\alpha_n)\eta\left(r + 1\,, \frac{\lambda}{2(r+1)}\right)\right)\left(r + \frac{1}{n}\right) \\ &\leq \left(1 - 2b(1-c)\eta\left(r + 1\,, \frac{\lambda}{2(r+1)}\right)\right)\left(r + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} d(W(x_n, y_n, \alpha_n), x) \leq \lim_{n\to\infty}\left(1 - 2b(1-c)\eta\left(r + 1\,, \frac{\lambda}{2(r+1)}\right)\right)\left(r + \frac{1}{n}\right) < r$$

olur. Bu da $r \geq 0$ için $\lim_{n\to\infty} d(W(x_n, y_n, \alpha_n), x) = r$ olması ile çelişir. O halde $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$ dır.

Khan *et al.* (2012), Bose and Laskar (1985) ın bir sonucunun metrik versiyonunu aşağıdaki gibi verip ispatlamıştır. Bu lemma, verdiğimiz iterasyon şemalarının $\Delta$-yakınsamasında önemli bir rol oynayacaktır.

**Lemma 3.3.7:** $X$ düzgün konveks bir hiperbolik uzayı ve $K$ da $X$ nin boş olmayan, kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. $\{x_n\}$, $A(\{x_n\}) = \{y\}$ ve $r(\{x_n\}) = \rho$ olacak şekilde sınırlı bir dizi olsun. Eğer $\{y_m\}$, $K$ da $lim_{m\to\infty} r(y_m, \{x_n\}) = \rho$ şartını sağlayan başka bir dizi ise $\lim_{m\to\infty} y_m = y$ dir (Khan *et al.* 2012).

**İspat:** Eğer $\lim_{m\to\infty} y_n \neq y$ ise $M > 0$ ve her $j \in \mathbb{N}$ için $d\left(y_{m_j}, y\right) \geq \frac{M}{2}$ olacak şekilde $\{y_m\}$ dizisinin $\left\{y_{m_j}\right\}$ alt dizisi vardır. $\rho$, $\{x_n\}$ dizisinin asimptotik yarıçapı ve $\varepsilon \in (0,1]$ olmak üzere $\varepsilon \to 0$ iken

$$(\rho, \varepsilon)\left(1 - \eta\left(\rho + 1, \frac{M}{2(\rho+1)}\right)\right) < \rho \tag{3.1}$$

olur. $A(\{x_n\}) = \{y\}$ olduğundan her $\varepsilon \in (0,1]$ ve her $n \geq N_1$ için $d(y, x_n) \leq \rho + \varepsilon$ olacak şekilde $N_1$ doğal sayısı vardır. Ayrıca $\lim_{n\to\infty} r(y_m, \{x_n\}) = \rho = \lim_{j\to\infty} r\left(y_{m_j}, \{x_n\}\right)$ olduğundan her $j$ için $j \geq j^*$ olacak şekilde $j^*$ doğal sayısı vardır. Bu yüzden $n \geq N_2$ için $d\left(y_{m_j}, x_n\right) \leq \rho + \varepsilon$ olacak şekilde $N_2$ doğal sayısı vardır. Yani $n \geq N = \max\{N_1, N_2\}$ olmak üzere

$$d(y, x_n) \leq \rho + \varepsilon \leq \rho + 1 \text{ ve } d\left(y_{m_j}, x_n\right) \leq \rho + \varepsilon \leq \rho + 1$$

dir. Lemma 3.1.12 (a) den

$$d\left(W\left(y, y_{m_j}, \frac{1}{2}\right), x_n\right) \leq \left(1 - \eta\left(\rho + \varepsilon, \frac{M}{2(\rho+1)}\right)\right)(\rho + \varepsilon)$$

$$\leq \left(1-\eta\left(\rho+1,\frac{M}{2(\rho+1)}\right)\right)(\rho+\varepsilon)$$

yazılır. $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$r\left(W\left(y,y_{m_j},\frac{1}{2}\right),x_n\right) \leq \left(1-\eta\left(\rho+1,\frac{M}{2(\rho+1)}\right)\right)(\rho+\varepsilon)$$

bulunur. $\varepsilon \to 0$ için limit alınır ve (3.1) kullanılırsa $r\left(W\left(y,y_{m_j},\frac{1}{2}\right),x_n\right) < \rho$ elde edilir. Bu ise $\rho$ nun $\{x_n\}$ dizisinin asimptotik yarıçapı olması ile çelişir. O halde $\lim_{m\to\infty} y_n = y$ dir.

### 3.4. İterasyon Yöntemleri

Bir dönüşümün sabit noktasını veya noktalarını bulurken çeşitli iterasyon yöntemleri kullanılır. Bunlardan bazıları, Picard iterasyonu, Krasnoselskij iterasyonu, Mann iterasyonu, Ishikawa iterasyonu, Noor iterasyonu ve Rhoades'in $n$-adım iterasyonudur. Bu iterasyonları ve konveks metrik uzaylardaki versiyonlarını verelim.

**Picard İterasyonu:** $(X,d)$ bir metrik uzay, $K \subseteq X$ kapalı bir alt küme ve $T : K \to K$ bir dönüşüm olsun. $x_0 \in X$ olmak üzere Picard iterasyonu,

$$x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0, \;\; n = 1,2,\ldots$$

şeklinde tanımlanır (Picard 1890). Picard iterasyonu literatürde bazen ardışık yaklaşıklar dizisi (sequence of successive approximations) olarak da adlandırılır.

Tam metrik uzayda tanımlı daraltan dönüşümlerin sabit noktalarına yaklaşmak için kullanılan iterasyonlardan biri de Picard iterasyonudur. Daraltan dönüşüm yerine farklı sınıftan bir dönüşüm alınırsa Picard iterasyonu, dönüşümün sabit noktasına yakınsamayabilir.

**Örnek 3.4.1:** $X = [0,1]$ olmak üzere $T: [0,1] \to [0,1]$, $Tx = 1 - x$ olsun. $T$ genişlemeyen bir dönüşüm ve $F(T) = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ dir. Herhangi bir $x_0 = a \neq \frac{1}{2}$ noktası için Picard iterasyonu,

$$\begin{aligned}
x_1 &= Tx_0 = 1 - a \\
x_2 &= Tx_1 = T^2x_0 = a \\
x_3 &= Tx_2 = T^2x_1 = T^3x_0 = 1 - a \\
&\vdots \\
x_n &= Tx_{n-1} = T^2x_{n-2} = \cdots = T^nx_0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

şeklinde olup bu ise $(a, 1 - a, a, 1 - a, \dots)$ salınımlı dizisine karşılık gelir. Bu dizi $a \neq \frac{1}{2}$ için yakınsak olmadığından, Picard iterasyonu dönüşümün sabit noktasına yakınsamaz. Dolayısıyla istenilen sabit noktayı bulmak için diğer iterasyon yöntemlerini göz önüne almak gerekir.

**Krasnoselskij İterasyonu:** $(N, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve $T : N \to N$ bir dönüşüm olsun. $x_0 \in N$ ve $\lambda \in [0,1]$ için Krasnoselskij iterasyonu,

$$x_{n+1} = (1 - \lambda)x_n + \lambda Tx_n, \;\; n = 0,1,2, \dots$$

şeklinde tanımlanır. Krasnoselskij İterasyonu $\lambda = 1$ için Picard iterasyonuna indirgenir (Krasnoselskij 1955). Bu iterasyon konveks ve hiperbolik uzaylarda

$$x_{n+1} = W(x_n, Tx_n, \lambda)$$

şeklinde tanımlanır.

**Mann İterasyonu:** Mann tarafından 1953 yılında kurulmuş ve Banach daralma ilkesini sağlamayan dönüşümlerin sabit noktalarını elde etmek için kullanılmıştır. $X$ bir normlu uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan konveks bir alt küme, $T: K \to K$ bir dönüşüm ve $x_0 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere Mann iterasyonu,

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n Tx_n\,, \;\; n = 0,1,2, \dots$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{\alpha_n\}$, $(0,1)$ aralığında

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$$

şartlarını sağlayan bir dizidir (Mann 1953). Bu iterasyon konveks metrik ve hiperbolik uzaylarda

$$x_{n+1} = W(x_n, Tx_n, \alpha_n)$$

şeklinde tanımlanır.

Mann'ın sonuçları Franks and Marzec (1971) çalışmasında, aynı şekilde Franks ve Marzec'in sonuçları da Rhoades (1974) çalışmasında genişletmiştir. Yine Rhoades (1974) çalışmasıyla, herhangi bir kapalı ve sınırlı aralıktan yine bu aralığa tanımlı bir dönüşüm (self-map) için Mann iterasyonunun bu dönüşümün bir sabit noktasına yakınsadığını göstermiştir. Khan *et al.* (2010), Mann iterasyonunu quasi genişlemeyen dönüşümler için konveks metrik uzaylarda çalışmış ve yakınsama teoremleri elde edilmiştir. Hiperbolik uzaylarda Mann iterasyonu Leuştean (2010) tarafından genişlemeyen dönüşümler için ve Kohlenbach and Leuştean (2010) tarafından asimptotik genişlemeyen dönüşümler için çalışmıştır.

**Örnek 3.4.2:** $X = \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ kümesi üzerinde $T: X \to X$, $Tx = \frac{1}{x}$ olarak tanımlanırsa, Mann iterasyonu $T$ dönüşümünün sabit noktası olan $x = 1$ e yakınsar.

**Ishikawa İterasyonu:** 1974 yılında S. Ishikawa tarafından kurulmuş ve Lipschitzian ve pseudocontractive dönüşümler için Mann iterasyon yönteminin yetersizliği durumunda yeni bir iterasyon metodu olarak oluşturulmuştur. Bu iterasyon ilk olarak bir Hilbert uzayının konveks ve kompakt alt kümesi üzerinde tanımlı Lipschitzian ve pseudocontractive bir dönüşümün sabit noktaya güçlü yakınsadığını göstermek amacıyla kullanılmıştır (Berinde 2006). $X$ bir normlu uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan konveks alt küme, $T: K \to K$ bir dönüşüm ve $x_0 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere Ishikawa iterasyonu,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n\,, \\ \quad y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T x_n, \quad n = 0,1,2,\dots \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\} \in (0,1)$ ve

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0\,, \quad \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$$

dir (Ishikawa 1974). Bu iterasyon konveks metrik ve hiperbolik uzaylarda

$$\begin{cases} x_{n+1} = W(x_n, Ty_n, \alpha_n) \\ \quad y_n = W(x_n, Tx_n, \beta_n) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Ishikawa iterasyonunda $\beta_n = 0$ alınırsa, bu iterasyon Mann iterasyonuna indirgenir. Buna rağmen Mann ve Ishikawa iterasyonları için yakınsama sonuçları arasında genel bir bağ yoktur (Berinde 2006).

Rhoades and Şoltuz (2004) dönüşümlerin çeşitli sınıfları için Ishikawa iterasyonunun yakınsaklığının, Mann iterasyonunun yakınsaklığına denk olduğunu göstermişlerdir.

Tian (2005) bu iterasyonun konveks metrik uzaylarda asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktasına yakınsamasını incelemiştir. Daha sonra Wang (2009), Liu *et al.* (2010), Khan *et al.* (2010), Chang *et al.* (2010) farklı dönüşüm sınıfları için bu iterasyonu konveks metrik uzaylarda çalışmıştır. Hiperbolik uzaylarda ise Kohlenbach and Leuştean (2010) asimptotik genişlemeyen dönüşümler için bu iterayon şemasını çalışmıştır. Zhao *et al.* (2013), bu iterasyonu daha genel bir dönüşüm çeşidi için çalışmıştır.

**Noor İterasyonu:** 2000 yılında Noor tarafından kurulmuştur. $X$ bir normlu uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan konveks alt küme, $T: K \to K$ bir dönüşüm ve $x_0 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere Noor iterasyonu,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n\,, \\ \quad y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T z_n\,, \\ \quad z_n = (1-\gamma_n)x_n + \gamma_n T x_n, \quad n = 0,1,2,\ldots \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\} \in (0,1)$ ve

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0\,, \quad \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0\,, \quad \lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$$

dur (Noor 2000). Bu iterasyon konveks metrik ve hiperbolik uzaylarda

$$\begin{cases} x_{n+1} = W(x_n, Ty_n, \alpha_n)\,, \\ \quad y_n = W(x_n, Tz_n, \beta_n)\,, \\ \quad z_n = W(x_n, Ty_n, \gamma_n), \quad n = 0,1,2,\dots \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Xu ve Noor, Noor iterasyonunun düzgün konveks bir Banach uzayının kapalı, sınırlı ve konveks alt kümesinden kendi üzerine tanımlanmış asimptotik genişlemeyen bir dönüşümün sabit noktaya yakınsaklığını çalışmışlardır (Xu and Noor 2002).

Saluja (2011) ve Lee (2011) farklı dönüşüm sınıfları için konveks metrik uzaylarda güçlü yakınsama teoremleri ispat etmişlerdir. Khan *et al.* (2014), Noor ve Ishikawa iterasyonlarının asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin ortak sabit noktaya güçlü ve Δ-yakınsamalarını göstermiştir.

***n*-Adım İterasyon (Multistep Iteration) Metodu:** 2004 yılında Rhoades ve Şoltuz tarafından kurulmuştur. $X$ bir normlu uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan konveks alt küme, $T: K \to K$ bir dönüşüm ve $x_0 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere $n$-adım iterasyonu $p \geq 2$ için

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n^1, \\ \quad y_n^i = \left(1-\beta_n^i\right)x_n + \beta_n^i T z_n^{i+1}, \\ z_n^{p-1} = \left(1-\beta_n^{p-1}\right)x_n + \beta_n^{p-1} T x_n, \quad i = 1, 2, \dots, p-2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$\{\alpha_n\} \subset (0,1), \ \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0\,, \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$$

ve

$$\left\{\beta_n^i\right\} \subset [0,1)\,, \ 1 \leq i \leq p-1\,, \ \lim_{n\to\infty} \beta_n^1 = 0$$

dır (Rhoades and Şoltuz 2004). Bu iterasyon konveks metrik ve hiperbolik uzaylarda

$$\begin{cases} x_{n+1} = W(x_n, Ty_n^1, \alpha_n)\,, \\ \quad y_n^i = W\left(x_n, Tz_n^{i+1}, \beta_n^i\right), \\ z_n^{p-1} = W\left(x_n, Tx_n, \beta_n^{p-1}\right), \quad i = 1, 2, \dots, p-2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Chidume and Ali (2007) bu iterasyonu asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin sonlu bir ailesi için Banach uzaylarında çalışmıştır. Khan *et al.* (2008) asimptotik quasi genişlemeyen dönüşümlerin sonlu bir ailesi için *n*-adım iterasyonunun güçlü ve zayıf yakınsamasını incelemiştir. Chidume and Ali (2007) ve Khan *et al.* (2008) de verilen güçlü yakınsama sonuçlarını Khan and Ahmed (2010) konveks metrik uzaylara genelleştirmiştir. Khan and Fukhar-ud-din (2014) hiperbolik uzaylarda daha genel dönüşüm sınıfları için *n*-adım iterasyonunun güçlü yakınsamasını incelemiştir.

# 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde, çalışmamızda elde ettiğimiz teorem ve sonuçlara yer verilecektir.

İlk olarak, genişlemeyen dönüşümlerin sonlu iki ailesi için tek adımlı yeni bir iterasyon şeması teşkil edilmiş ve daha sonra hiperbolik uzaylarda bu iterasyon şeması için güçlü ve $\Delta$-yakınsama teoremleri verilmiştir. Daha sonra iki adımlı yeni bir iterasyon şeması göz önüne alınarak yine hiperbolik uzaylarda genişlemeyen dönüşümlerin sonlu iki ailesi için güçlü ve $\Delta$-yakınsama teoremleri verilmiştir. Son olarak daha genel bir uzay olan konveks metrik uzaylarda asimptotik quasi genişlemeyen dönüşümlerin sonlu bir ailesi için n-adımlı bir iterasyon şeması teşkil edilmiştir. Bu iterasyon şeması için de aynı uzaylarda güçlü yakınsama teoremleri verilmiştir.

## 4.1. Hiperbolik Uzaylarda Genişlemeyen Dönüşümlerin Sonlu İki Ailesi İçin Tek Adım İterasyon Şemasının Yakınsaklığı

$K$, $X$ hiperbolik uzayının boş olmayan bir alt kümesi ve $\{T_i : i = 1,2,3,\dots,N\}$, $\{S_i : i = 1,2,3,\dots,N\}$ $K$ kümesinden $K$ kümesine tanımlı genişlemeyen dönüşümlerin sonlu iki ailesi olsun. $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$, $0 < a \le \alpha_n, \beta_n \le b < 1$ ve $\alpha_n + \beta_n < 1$ şartlarını sağlayan $(0,1)$ aralığında herhangi iki dizi ve $x_1 \in K$ herhangi bir nokta olmak üzere $\{x_n\}$ iterasyon şemasını

$$x_{n+1} = W\left(T_n x_n, W\left(x_n, S_n x_n, \frac{\beta_n}{1-\alpha_n}\right), \alpha_n\right) \tag{4.1}$$

şeklinde teşkil edelim. Burada $T_n = T_{n(modN)}$ ve $S_n = S_{n(modN)}$ dir. Bu şema genişlemeyen iki dönüşüm ailesi için Hiperbolik uzaylarda yeni bir iterasyon yöntemidir.

Bu bölümde $\{T_i : i = 1,2,3,\dots,N\}$, $\{S_i : i = 1,2,3,\dots,N\}$ genişlemeyen dönüşüm ailelerinin ortak sabit noktalarının kümesi $\mathcal{F}$ ile göstereceğiz. Yani

$$\mathcal{F} := \left( \bigcap_{i \in \{1,2,\ldots,N\}} F(T_i) \right) \cap \left( \bigcap_{i \in \{1,2,\ldots,N\}} F(S_i) \right)$$

alacağız. Öncelikle genişlemeyen dönüşümlerin sonlu iki ailesinin ortak sabit noktalarının kümesinin boştan farklı olabileceğini gösterelim. Bunun için $T_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve $S_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dönüşümlerini her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$T_n x = \frac{2x + n - 1}{2n} \quad \text{ve} \quad S_n x = \frac{n^2 - 2x + 1}{2n^2}$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda $n \in \mathbb{N}$ için $T_n$ ve $S_n$ genişlemeyen dönüşümler ve $\mathcal{F} := \left(\bigcap_{i \in \{1,2,\ldots,N\}} F(T_i)\right) \cap \left(\bigcap_{i \in \{1,2,\ldots,N\}} F(S_i)\right) = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ dir.

(4.1) iterasyon şeması için güçlü ve $\Delta$-yakınsama teoremlerinin ispatlanabilmesi için ihtiyaç duyulan bazı lemmalar aşağıda verilmiştir.

**Lemma 4.1.1:** $K$, $X$ hiperbolik uzayının boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi ve $\{T_i : i = 1,2,3,\ldots,N\}$, $\{S_i : i = 1,2,3,\ldots,N\}$ genişlemeyen dönüşümlerin sonlu iki ailesi olsun. Eğer $p \in \mathcal{F} \neq \emptyset$ ve herhangi bir $x_1 \in K$ için $\{x_n\}$ dizisi (4.1) ile tanımlanmış ise

$$\lim_{n \to \infty} d(x_n, p)$$

limiti vardır.

**İspat:** $p \in \mathcal{F}$ olsun. (4.1) den

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, p) &= d\left(W\left(T_n x_n, W\left(x_n, S_n x_n, \frac{\beta_n}{1 - \alpha_n}\right), \alpha_n\right), p\right) \\ &\leq \alpha_n d(T_n x_n, p) + (1 - \alpha_n) d\left(W\left(x_n, S_n x_n, \frac{\beta_n}{1 - \alpha_n}\right), p\right) \\ &\leq \alpha_n d(x_n, p) + \beta_n d(x_n, p) + (1 - \alpha_n - \beta_n) d(S_n x_n, p) \\ &\leq \alpha_n d(x_n, p) + \beta_n d(x_n, p) + (1 - \alpha_n - \beta_n) d(x_n, p) \end{aligned}$$

yazarız. Yani

$$d(x_{n+1}, p) \leq d(x_n, p)$$

olur. O halde $p \in \mathcal{F}$ için $\lim_{n\to\infty} d(x_n, p)$ limiti vardır.

**Lemma 4.1.2:** $(X, d, W)$, $\eta$ monoton düzgün konvekslik modülüne sahip düzgün konveks bir hiperbolik uzay olsun. $K$, $X$ in boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi ve $\{T_i : i = 1,2,3, \dots, N\}$, $\{S_i : i = 1,2,3, \dots, N\}$ genişlemeyen dönüşümlerin sonlu iki ailesi olsun. Eğer $p \in \mathcal{F} \neq \emptyset$ ve herhangi bir $x_1 \in K$ için $\{x_n\}$ dizisi (4.1) ile tanımlanmış ise, her $l \in \{1,2,3, \dots, N\}$ için

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, T_l x_n) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, S_l x_n) = 0$$

dır.

**İspat:** Lemma 4.1.1 den her $p \in \mathcal{F}$ için $\lim_{n\to\infty} d(x_n, p)$ limiti vardır. $c \geq 0$ için $\lim_{n\to\infty} d(x_n, p) = c$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, p) = \lim_{n\to\infty} d\left(W\left(T_n x_n, W\left(x_n, S_n x_n, \tfrac{\beta_n}{1-\alpha_n}\right), \alpha_n\right), p\right) = c \tag{4.2}$$

olur. Ayrıca $n = 1,2, \dots$ için $T_n$ genişlemeyen dönüşüm olduğundan

$$d(T_n x_n, p) \leq d(x_n, p)$$

olur. Buradan

$$\limsup_{n\to\infty} d(T_n x_n, p) \leq c \tag{4.3}$$

elde ederiz. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} d\left(W\left(x_n, S_n x_n, \frac{\beta_n}{1-\alpha_n}\right), p\right) &\leq \frac{\beta_n}{1-\alpha_n} d(x_n, p) + \left(1 - \frac{\beta_n}{1-\alpha_n}\right) d(S_n x_n, p) \\ &\leq \frac{\beta_n}{1-\alpha_n} d(x_n, p) + \left(1 - \frac{\beta_n}{1-\alpha_n}\right) d(x_n, p) \\ &= d(x_n, p) \end{aligned}$$

dir. Bu eşitsizliğin her iki tarafının üst limitini alırsak

$$\limsup_{n\to\infty} d\left(W\left(x_n, S_n x_n, \tfrac{\beta_n}{1-\alpha_n}\right), p\right) \leq c \tag{4.4}$$

buluruz. (4.2), (4.3) ve (4.4) ifadelerine Lemma 3.3.6 yı uygularsak

$$\lim_{n\to\infty} d\left(T_n x_n, W\left(x_n, S_n x_n, \frac{\beta_n}{1-\alpha_n}\right)\right) = 0 \tag{4.5}$$

elde ederiz. Ayrıca

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, T_n x_n) &= d\left(W\left(T_n x_n, W\left(x_n, S_n x_n, \frac{\beta_n}{1-\alpha_n}\right), \alpha_n\right), T_n x_n\right) \\ &\leq \alpha_n d(T_n x_n, T_n x_n) + (1-\alpha_n) d\left(T_n x_n, W\left(x_n, S_n x_n, \frac{\beta_n}{1-\alpha_n}\right)\right) \end{aligned}$$

dir. Böylece (4.5) den

$$\lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, T_n x_n) = 0 \tag{4.6}$$

olur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, p) &= d\left(W\left(T_n x_n, W\left(x_n, S_n x_n, \frac{\beta_n}{1-\alpha_n}\right), \alpha_n\right), p\right) \\ &\leq \alpha_n d(T_n x_n, p) + (1-\alpha_n) d\left(W\left(x_n, S_n x_n, \frac{\beta_n}{1-\alpha_n}\right), p\right) \end{aligned}$$

olup, bu eşitsizliği düzenlensek

$$d(x_{n+1}, p) - \alpha_n d(x_n, p) \leq (1-\alpha_n) d\left(W\left(x_n, S_n x_n, \frac{\beta_n}{1-\alpha_n}\right), p\right)$$

elde ederiz. Bu eşitsizliğin her iki tarafının alt limitini alırsak

$$c \leq \liminf_{n\to\infty} d\left(W\left(x_n, S_n x_n, \frac{\beta_n}{1-\alpha_n}\right), p\right) \tag{4.7}$$

buluruz. (4.4) ve (4.7) den

$$\lim_{n\to\infty} d\left(W\left(x_n, S_n x_n, \frac{\beta_n}{1-\alpha_n}\right), p\right) = c \tag{4.8}$$

yazarız. $\limsup_{n\to\infty} d(S_n x_n, p) \leq c$ olduğu gözönüne alarak (4.8) ve Lemma 3.3.6 den

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, S_n x_n) = 0 \tag{4.9}$$

elde ederiz. Ayrıca

$$d\left(W\left(x_n, S_n x_n, \frac{\beta_n}{1-\alpha_n}\right), x_n\right) \leq \frac{\beta_n}{1-\alpha_n} d(x_n, x_n) + \left(1 - \frac{\beta_n}{1-\alpha_n}\right) d(x_n, S_n x_n)$$

olup (4.9) ve bu eşitsizlikten,

$$\lim_{n\to\infty} d\left(W\left(x_n, S_n x_n, \frac{\beta_n}{1-\alpha_n}\right), x_n\right) = 0 \tag{4.10}$$

yazarız. (4.1) den

$$\begin{aligned}
d(x_{n+1}, x_n) &= d\left(W\left(T_n x_n, W\left(x_n, S_n x_n, \frac{\beta_n}{1-\alpha_n}\right), \alpha_n\right), x_n\right) \\
&\leq \alpha_n d(T_n x_n, x_n) + (1-\alpha_n) d\left(W\left(x_n, S_n x_n, \frac{\beta_n}{1-\alpha_n}\right), x_n\right) \\
&\leq \alpha_n \{d(x_{n+1}, x_n) + d(T_n x_n, x_{n+1})\} \\
&\quad + (1-\alpha_n) d\left(W\left(x_n, S_n x_n, \frac{\beta_n}{1-\alpha_n}\right), x_n\right)
\end{aligned}$$

buluruz. Bu eşitsizlik düzenlenirse

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \frac{b}{1-b} d(T_n x_n, x_{n+1}) + d\left(W\left(x_n, S_n x_n, \frac{\beta_n}{1-\alpha_n}\right), x_n\right)$$

elde ederiz. (4.6) ve (4.10) kullanılarak yukarıdaki eşitsizliğin üst limitini alırsak

$$\lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, x_n) = 0$$

olur. Böylece her $l = 1,2,\cdots,N$ için

$$\lim_{n\to\infty} d(x_{n+l}, x_n) = 0 \tag{4.11}$$

buluruz. Üçgen eşitsizliğinden

$$d(x_n, T_n x_n) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, T_n x_n)$$

olup (4.6) ve (4.11) den

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, T_n x_n) = 0 \tag{4.12}$$

elde ederiz. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
d(x_n, T_{n+l} x_n) &\leq d(x_n, x_{n+l}) + d(x_{n+l}, T_{n+l} x_{n+l}) + d(T_{n+l} x_{n+l}, T_{n+l} x_n) \\
&\leq d(x_n, x_{n+l}) + d(x_{n+l}, T_{n+l} x_{n+l}) + d(x_{n+l}, x_n) \\
&\leq 2d(x_n, x_{n+l}) + d(x_{n+l}, T_{n+l} x_{n+l})
\end{aligned}$$

dır. Yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafının limiti alırsak, (4.11) ve (4.12) den her $l = 1,2,\cdots,N$ için

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, T_{n+l}x_n) = 0$$

yazarız. Her $l = 1,2,\cdots,N$ için $\{d(x_n, T_l x_n)\}$ dizisi $\bigcup_{l=1}^{N} \{d(x_n, T_{n+l}x_n)\}$ dizisinin bir altdizisi ve $\lim_{n\to\infty} d(x_n, T_{n+l}x_n) = 0$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, T_l x_n) = 0$$

olur. Benzer şekilde her $l = 1,2,\cdots,N$ için

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, S_{n+l}x_n) = 0$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, S_l x_n) = 0$$

buluruz. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Şimdi hiperbolik uzaylarda genişlemeyen dönüşümlerin sonlu iki ailesi için (4.1) iterasyon şemasının güçlü ve Δ-yakınsama teoremleri verilecektir.

**Teorem 4.1.3:** $(X, d, W)$, $\eta$ monoton düzgün konvekslik modülüne sahip tam düzgün konveks bir hiperbolik uzay olsun. $K$, $X$ in boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi ve $\{T_i : i = 1,2,3,\dots,N\}$, $\{S_i : i = 1,2,3,\dots,N\}$ genişlemeyen dönüşümlerin sonlu iki ailesi olsun. Herhangi bir $x_1 \in K$ için $\{x_n\}$ dizisi (4.1) ile tanımlansın ve $\mathcal{F} \neq \emptyset$ olsun. $\{x_n\}$ iterasyon şemasının bir $p \in \mathcal{F}$ ye güçlü yakınsaması için gerek ve yeter şart $\liminf_{n\to\infty} d(x_n, \mathcal{F}) = 0$ olmasıdır.

**İspat:** Gerek şart açıktır. Bu nedenle sadece yeter şartı ispatlayacağız. Tersine $\liminf_{n\to\infty} d(x_n, \mathcal{F}) = 0$ olduğunu kabul edelim. Lemma 4.1.1 den

$$d(x_{n+1}, p) \le d(x_n, p)$$

ve böylece

$$d(x_{n+1}, \mathcal{F}) \le d(x_n, \mathcal{F})$$

yazarız. Dolayısıyla $\lim_{n\to\infty} d(x_n, \mathcal{F})$ limiti vardır. Hipotezden $\lim_{n\to\infty} d(x_n, \mathcal{F}) = 0$ elde ederiz. Şimdi $\{x_n\}$ dizisinin $K$ da bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. $\varepsilon > 0$ olsun. $\lim_{n\to\infty} d(x_n, \mathcal{F}) = 0$ olduğundan dolayı her $n \geq n_0$ için

$$d(x_n, \mathcal{F}) < \frac{\varepsilon}{4}$$

olacak şekilde bir $n_0$ sabiti vardır. Yani $\inf\{d(x_{n_0}, p) : p \in \mathcal{F}\} < \frac{\varepsilon}{4}$ dir. O halde $d(x_{n_0}, p^*) < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde $p^* \in \mathcal{F}$ vardır. Bu durumda $m, n \geq n_0$ için

$$\begin{aligned} d(x_{n+m}, x_n) &\leq d(x_{n+m}, p^*) + d(p^*, x_n) \\ &\leq 2d(x_{n_0}, p^*) \\ &\leq 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $\{x_n\}$ dizisi $K$ da bir Cauchy dizisidir. $X$ tam olduğundan $\{x_n\}$ yakınsatır. Yakınsadığı nokta $q$ olsun. Her $l = 1,2,\cdots,N$ için $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, T_l x_n) = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} d(q, T_l q) &\leq d(q, x_n) + d(x_n, T_l x_n) + d(T_l x_n, T_l q) \\ &\leq d(q, x_n) + d(x_n, T_l x_n) + d(x_n, q) \\ &\to 0 \quad (n \to \infty) \end{aligned}$$

olup, $d(q, T_l q)$ buluruz. Yani $q$ noktası $\{T_i : i = 1,2,3, \dots, n\}$ genişlemeyen dönüşüm ailesinin ortak sabit noktasıdır. Benzer şekilde $q$ noktasının $\{S_i : i = 1,2,3, \dots, n\}$ genişlemeyen dönüşüm ailesinin ortak sabit noktası olduğu gösterilir. Sonuç olarak $q \in \mathcal{F}$ dir.

Teorem 4.1.3 ün bir uygulaması olarak aşağıdaki teoremi verelim. Bunun için $(A')$ şartını dönüşüm sınıflarımıza uygun olarak yazalım.

$(X, d, W)$ bir hiperbolik uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan bir küme, $\{T_i : i = 1,2,3, \dots, N\}$ ve $\{S_i : i = 1,2,3, \dots, N\}$, $K$ üzerinde tanımlı genişlemeyen dönüşümlerin sonlu iki ailesi olsun. Her $x \in K$ için

$$\max_{1\leq l\leq N}\left\{\frac{1}{2}\big(d(x,T_lx)+d(x,S_lx)\big)\right\}\geq f\big(d(x,\mathcal{F})\big)$$

oluyorsa $\{T_i: i = 1,2,3,\dots,N\}$ ve $\{S_i: i = 1,2,3,\dots,N\}$ aileleri (B) şartını sağlıyor denir.

**Teorem 4.1.4:** $(X,d,W)$, $\eta$ monoton düzgün konvekslik modülüne sahip tam düzgün konveks bir hiperbolik uzay olsun. $K$, $X$ in boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi ve $\{T_i: i = 1,2,3,\dots,N\}$, $\{S_i: i = 1,2,3,\dots,N\}$ genişlemeyen dönüşümlerin sonlu iki ailesi olsun. Herhangi bir $x_1 \in K$ için $\{x_n\}$ dizisi (4.1) ile tanımlansın. Eğer $\mathcal{F} \neq \emptyset$ ve $\{T_i: i = 1,2,3,\dots,n\}$ ve $\{S_i: i = 1,2,3,\dots,n\}$ dönüşüm aileleri $(B)$ şartını sağlıyor ise, $\{x_n\}$ iterasyon şeması $\{T_i: i = 1,2,3,\dots,n\}$ ve $\{S_i: i = 1,2,3,\dots,n\}$ dönüşüm ailelerinin ortak bir sabit noktasına güçlü yakınsar.

**İspat:** Lemma 4.1.1 den $p \in F$ için $\lim_{n\to\infty} d(x_n,F)$ limiti vardır. Ayrıca, Lemma 4.1.2 den her $l = 1,2,\cdots,N$ için $\lim_{n\to\infty} d(x_n,T_lx_n) = \lim_{n\to\infty} d(x_n,S_lx_n) = 0$ dir. $(B)$ Şartından dolayı $\lim_{n\to\infty} f\big(d(x_n,\mathcal{F})\big) = 0$ olur. $f$ azalmayan ve $f(0) = 0$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} d(x_n,F) = 0$ dır. Böylece Teorem 4.1.3 den $\{x_n\}$ bir $p \in F$ ye güçlü yakınsar.

**Teorem 4.1.5:** $(X,d,W)$, $\eta$ monoton düzgün konvekslik modülüne sahip tam düzgün konveks bir hiperbolik uzay olsun. $K$, $X$ in boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi ve $\{T_i: i = 1,2,3,\dots,N\}$, $\{S_i: i = 1,2,3,\dots,N\}$ genişlemeyen dönüşümlerin sonlu iki ailesi olsun. Herhangi bir $x_1 \in K$ için $\{x_n\}$ dizisi (4.1) ile tanımlansın. Eğer $\mathcal{F} \neq \emptyset$ ise $\{x_n\}$ iterasyon şeması $\{T_i: i = 1,2,3,\dots,N\}$ ve $\{S_i: i = 1,2,3,\dots,N\}$ dönüşüm ailelerinin ortak bir sabit noktasına $\Delta$-yakınsar.

**İspat:** Lemma 4.1.1 den $\{x_n\}$ dizisi sınırlıdır ve böylece Teorem 3.2.3 den $\{x_n\}$ bir tek asimptotik merkeze sahiptir. Yani; $A(\{x_n\}) = \{x\}$. Kabul edelimki $\{u_n\}$ dizisi $\{x_n\}$ nin $A(\{u_n\}) = \{u\}$ olacak şekilde herhangi bir altdizisi olsun. Bu durumda Lemma 4.1.2 den her $l = 1,2,\cdots,N$ için $\lim_{n\to\infty} d(u_n,T_lu_n) = \lim_{n\to\infty} d(u_n,S_lu_n) = 0$ dır. $u$ nun $\{T_i: i = 1,2,3,\dots,N\}$ ve $\{S_i: i = 1,2,3,\dots,N\}$ ailelerinin ortak sabit noktası olduğunu iddia ediyoruz.

$K$ da $\{v_m\}$ dizisini $v_m = T_m u$ ile tanımlayalım. Burada $T_m = T_{m(modN)}$ dır. Öte yandan

$$d(v_n, u_n) \leq d(T_m u, T_m u_n) + d(T_m u_n, T_{m-1} u_n) + \cdots + d(T u_n, u_n)$$
$$\leq d(u, u_n) + \sum_{i=1}^{m-1} (u_n, T_i u_n)$$

dir. Dolayısıyla

$$r(v_m, \{u_n\}) = \limsup_{n\to\infty} d(v_m, u_n) \leq \limsup_{n\to\infty} d(u, u_n) = r(u, \{u_n\})$$

yazarız. Bu $m \to \infty$ iken $|r(v_m, \{u_n\}) - r(u, \{u_n\})| \to 0$ olmasını gerektirir. Böylece Lemma 3.3.7 den $T_{m(modN)} u = u$ olur. O halde $u$, $\{T_i : i = 1,2,3, \dots, N\}$ ailesinin ortak sabit noktasıdır. Aynı kabullerle $u$ nun $\{S_i : i = 1,2,3, \dots, N\}$ ailesinin ortak sabit noktası olduğu gösterilebilir. Bu yüzden $u$ nun $\{T_i : i = 1,2,3, \dots, N\}$ ve $\{S_i : i = 1,2,3, \dots, N\}$ nin ortak sabit noktası olduğu görülür. Dahası Lemma 4.1.1 den $\lim_{n\to\infty} d(x_n, u)$ limiti vardır.

Kabul edelimki; $x \neq u$ olsun. Asimptotik merkezin tekliğinden,

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} d(u_n, u) &< \limsup_{n\to\infty} d(u_n, x) \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} d(x_n, x) \\
&< \limsup_{n\to\infty} d(x_n, u) \\
&= \limsup_{n\to\infty} d(u_n, u)
\end{aligned}$$

olup bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $x = u$ dur. $\{x_n\}$ nin $\{u_n\}$ altdizisi keyfi olduğundan, $\{x_n\}$ nin bütün $\{u_n\}$ altdizileri için $A(\{u_n\}) = \{u\}$ dir. Bu da $\{x_n\}$ nin $\{T_i : i = 1,2,3, \dots, N\}$ ve $\{S_i : i = 1,2,3, \dots, N\}$ ailelerinin ortak sabit noktasına $\Delta$-yakınsadığını gösterir.

Son olarak Teorem 4.1.4 ve Teorem 4.1.5 in sonuçları olarak aşağıdaki toremleri veriyoruz.

**Teorem 4.1.6:** $(X, d, W)$, $\eta$ monoton düzgün konvekslik modülüne sahip tam düzgün konveks bir hiperbolik uzay olsun. $K$, $X$ in boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi ve $T$, $S$ iki genişlemeyen dönüşüm olsun. Herhangi bir $x_1 \in K$ için $\{x_n\}$ dizisi

$$x_{n+1} = W\left(Tx_n, W\left(x_n, Sx_n, \frac{\beta_n}{1-\alpha_n}\right), \alpha_n\right) \tag{4.13}$$

olarak tanımlansın. Eğer $\mathcal{F} := F(T) \cap F(S) \neq \emptyset$ ve $T, S$ dönüşümleri $(A')$ şartını sağlıyorsa $\{x_n\}$ iterasyon şeması $T$ ve $S$ dönüşümlerinin ortak bir sabit noktasına güçlü yakınsar.

**İspat:** Teorem 4.1.4 de her $l \in \{1,2,3, \dots, N\}$ için $T_i = T$ ve $S_i = S$ alınırsa ispat açıkır.

**Teorem 4.1.7:** $(X, d, W)$, $\eta$ monoton düzgün konvekslik modülüne sahip tam düzgün konveks bir hiperbolik uzay olsun. $K$, $X$ in boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi ve $T$, $S$ iki genişlemeyen dönüşüm olsun. Herhangi bir $x_1 \in K$ için $\{x_n\}$ dizisi (4.13) ile tanımlansın. Eğer $\mathcal{F} := F(T) \cap F(S) \neq \emptyset$ ise $\{x_n\}$ iterasyon şeması $T$ ve $S$ dönüşümlerinin ortak bir sabit noktasına Δ-yakınsar.

**İspat:** Teorem 4.1.5 de her $l \in \{1,2,3, \dots, N\}$ için $T_i = T$ ve $S_i = S$ alınırsa ispat açıktır.

## 4.2. Hiperbolik Uzaylarda Genişlemeyen Dönüşümlerin Sonlu İki Ailesi İçin iki Adım İterasyon Şemasının Yakınsaklığı

$K$, $X$ hiperbolik uzayının boş olmayan bir alt kümesi ve $\{T_i : i = 1,2,3, \dots, N\}$, $\{S_i : i = 1,2,3, \dots, N\}$ $K$ kümesinden $K$ kümesine tanımlı genişlemeyen dönüşümlerin sonlu iki ailesi olsun. $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$, $0 < a \leq \alpha_n, \beta_n \leq b < 1$ ve $\alpha_n + \beta_n < 1$ şartlarını sağlayan $(0,1)$ aralığında herhangi iki dizi ve $x_1 \in K$ herhangi bir nokta olmak üzere $\{x_n\}$ iterasyon şemasını

$$\begin{cases} x_{n+1} = W(y_n, S_n y_n, \alpha_n) \\ y_n = W(x_n, T_n x_n, \beta_n) \end{cases}, \quad n \geq 1 \tag{4.14}$$

şeklinde teşkil edelim. Burada $T_n = T_{n(modN)}$ ve $S_n = S_{n(modN)}$ dir. Bu şema hiperbolik uzaylarda ilk defa kullanılmıştır. (4.14) iterasyon şeması için güçlü ve $\Delta$-yakınsama teoremlerini vermeden önce bu teoremlerin ispatında kullanacağımız bazı lemmaları aşağıda verelim.

**Lemma 4.2.1:** $X$ bir hiperbolik uzay ve $K$ da $X$ in boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi olsun. $\{T_i: i = 1,2,3, \dots, N\}$ ve $\{S_i: i = 1,2,3, \dots, N\}$ genişlemeyen dönüşümlerin sonlu iki ailesi ve $F \neq \emptyset$ olsun. Eğer $p \in \mathcal{F}$ ve herhangi bir $x_1 \in K$ için $\{x_n\}$ dizisi (4.14) ile tanımlanmış ise

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, p)$$

limiti vardır.

**İspat:** $p \in \mathcal{F}$ olsun. Bu durumda (4.14) den

$$\begin{aligned} d(y_n, p) &= d(W(x_n, T_n x_n, \beta_n), p) \\ &\leq (1-\beta_n) d(x_n, p) + \beta_n d(T_n x_n, p) \\ &\leq (1-\beta_n) d(x_n, p) + \beta_n d(x_n, p) \\ &= d(x_n, p) \end{aligned} \tag{4.15}$$

ve

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, p) &= d(W(y_n, S_n y_n, \alpha_n), p) \\ &\leq (1-\alpha_n) d(y_n, p) + \alpha_n d(S_n y_n, p) \\ &\leq (1-\alpha_n) d(y_n, p) + \alpha_n d(y_n, p) \\ &= d(y_n, p) \\ &\leq d(x_n, p) \end{aligned}$$

olur. Böylece $d(x_{n+1}, p) \leq d(x_n, p)$ olup $p \in F$ için $\lim_{n\to\infty} d(x_n, p)$ limiti vardır.

**Lemma 4.2.2:** $X$, $\eta$ monoton düzgün konvekslik modülüne sahip düzgün konveks bir hiperbolik uzay ve $K$ da $X$ in boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi olsun. $\{T_i: i = 1,2,3, \dots, N\}$ ve $\{S_i: i = 1,2,3, \dots, N\}$ genişlemeyen dönüşümlerin sonlu iki ailesi ve $\mathcal{F} \neq$

$\emptyset$ olsun. Eğer $p \in \mathcal{F}$ ve herhangi bir $x_1 \in K$ için $\{x_n\}$ dizisi (4.14) ile tanımlanmış ise her $l \in \{1,2,3,\dots,N\}$ için

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, T_l x_n) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, S_l x_n) = 0$$

dır.

**İspat:** Lemma 4.2.1 den $\lim_{n\to\infty} d(x_n, p)$ limitinin varlığını biliyoruz. O halde $\lim_{n\to\infty} d(x_n, p) = c$ diyelim. Eğer $c = 0$ ise sonuç açıktır. Kabul edelim ki $c > 0$ olsun. (4.15) eşitsizliğinden $d(y_n, p) \leq d(x_n, p)$ yazarız. Bu eşitsizliğin her iki yanının üst limitini alarak

$$\limsup_{n\to\infty} d(y_n, p) \leq c \tag{4.16}$$

buluruz. Ayrıca $n = 1,2,\dots$ için $S_n$ genişlemeyen dönüşüm olduğundan $d(S_n y_n, p) \leq d(y_n, p)$ ve böylece,

$$\limsup_{n\to\infty} d(S_n y_n, p) \leq \text{c} \tag{4.17}$$

yazarız. (4.14) den

$$\lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, p) = \lim_{n\to\infty} d(W(y_n, S_n y_n, \alpha_n), p) = c \tag{4.18}$$

dir. (4.16), (4.17), (4.18) ve Lemma 3.3.6 yı kullanarak

$$\lim_{n\to\infty} d(y_n, S_n y_n) = 0 \tag{4.19}$$

elde ederiz. Diğer taraftan

$$\limsup_{n\to\infty} d(T_n x_n, p) \leq \limsup_{n\to\infty} d(x_n, p) \leq c \tag{4.20}$$

dir. (4.14) den

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, p) &= d(W(y_n, S_n y_n, \alpha_n), p) \\ &\leq (1-\alpha_n) d(y_n, p) + \alpha_n d(S_n y_n, p) \\ &\leq (1-\alpha_n) d(y_n, p) + \alpha_n d(S_n y_n, y_n) + \alpha_n d(y_n, p) \\ &\leq d(y_n, p) + d(S_n y_n, y_n) \end{aligned}$$

buluruz. $\lim_{n\to\infty} d(x_n, p) = c$ olduğunu ve (4.19) u gözönüne alarak bu eşitsizliğin her iki yanının alt limitini alırsak

$$\liminf_{n\to\infty} d(y_n, p) \geq c \tag{4.21}$$

elde ederiz. Dolayısıyla (4.16) ve (4.21) den $\lim_{n\to\infty} d(y_n, p) = c$ buluruz. Böylece

$$\lim_{n\to\infty} d(y_n, p) = \lim_{n\to\infty} d(W(x_n, T_n x_n, \beta_n), p) = c \tag{4.22}$$

yazarız. (4.20), (4.22) ve Lemma 3.3.6 den

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, T_n x_n) = 0 \tag{4.23}$$

buluruz. $y_n = W(x_n, T_n x_n, \beta_n)$ ve (4.23) den

$$\begin{aligned} d(y_n, x_n) &= d(W(x_n, T_n x_n, \beta_n), x_n) \\ &\leq \beta_n d(T_n x_n, x_n) \\ &\to 0 \quad (n \to \infty) \end{aligned} \tag{4.24}$$

elde ederiz. Üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} d(x_n, S_n x_n) &\leq d(x_n, y_n) + d(y_n, S_n x_n) \\ &\leq d(x_n, y_n) + d(y_n, S_n y_n) + d(S_n y_n, S_n x_n) \\ &\leq d(x_n, y_n) + d(y_n, S_n y_n) + d(y_n, x_n) \end{aligned}$$

olur. (4.19) ve (4.24) den

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, S_n x_n) = 0 \tag{4.25}$$

buluruz. (4.14) den

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d(W(y_n, S_n y_n, \alpha_n), x_n) \\ &\leq (1-\alpha_n) d(y_n, x_n) + \alpha_n d(S_n y_n, x_n) \\ &\leq (1-\alpha_n) d(y_n, x_n) + \alpha_n d(S_n y_n, y_n) + \alpha_n d(y_n, x_n) \\ &\leq d(y_n, x_n) + d(S_n y_n, y_n) \end{aligned}$$

yazarız. Bu eşitsizlikte (4.19) ve (4.24) ifadelerini kullanırsak

$$\lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, x_n) = 0$$

elde ederiz. Böylece her $l = 1,2,\cdots,N$ için

$$\lim_{n\to\infty} d(x_{n+l}, x_n) = 0 \tag{4.26}$$

buluruz. Üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} d(x_n, T_{n+l}x_n) &\leq d(x_n, x_{n+l}) + d(x_{n+l}, T_{n+l}x_{n+l}) + d(T_{n+l}x_{n+l}, T_{n+l}x_n) \\ &\leq d(x_n, x_{n+l}) + d(x_{n+l}, T_{n+l}x_{n+l}) + d(x_{n+l}, x_n) \\ &\leq 2d(x_n, x_{n+l}) + d(x_{n+l}, T_{n+l}x_{n+l}) \end{aligned}$$

dır. Bu eşitsizlikte her iki tarafın limitini alırsak, (4.23) ve (4.26) den her $l = 1,2,\cdots,N$ için

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, T_{n+l}x_n) = 0$$

buluruz. Her $l = 1,2,\cdots,N$ için, $\{d(x_n, T_l x_n)\}$ dizisi $\bigcup_{l=1}^{N} \{d(x_n, T_{n+l}x_n)\}$ dizisinin bir altdizisi ve $\lim_{n\to\infty} d(x_n, T_{n+l}x_n) = 0$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, T_l x_n) = 0$$

elde ederiz. Benzer şekilde her $l = 1,2,\cdots,N$ için

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, S_{n+l}x_n) = 0$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, S_l x_n) = 0$$

buluruz. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Öncelikle hiperbolik uzaylarda (4.14) iterasyon şeması için güçlü yakınsama teoremleri vereceğiz.

**Teorem 4.2.3:** $X$, $\eta$ monoton düzgün konvekslik modülüne sahip tam düzgün konveks bir hiperbolik uzay ve $K$ da $X$ in boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi olsun. $\{T_i : i = 1,2,3,\dots,N\}$ ve $\{S_i : i = 1,2,3,\dots,N\}$ genişlemeyen dönüşümlerin sonlu iki ailesi ve $\mathcal{F} \neq \emptyset$ olsun. Herhangi bir $x_1 \in K$ için (4.14) ile tanımlananan $\{x_n\}$ dizisi bir $p \in \mathcal{F}$ ye güçlü yakınsaması için gerek ve yeter şart $\liminf_{n\to\infty} d(x_n, \mathcal{F}) = 0$ olmasıdır.

**İspat:** Gerek şart açık olup sadece yeter şartı ispatlayacağız. $\liminf_{n\to\infty} d(x_n, \mathcal{F}) = 0$ olduğunu kabul edelim. Lemma 4.2.1 den $d(x_{n+1}, p) \leq d(x_n, p)$ ve böylece $d(x_{n+1}, \mathcal{F}) \leq d(x_n, \mathcal{F})$ olur. Bu durumda $\lim_{n\to\infty} d(x_n, \mathcal{F})$ limiti vardır. Hipotezden $\lim_{n\to\infty} d(x_n, \mathcal{F}) = 0$ buluruz. Teorem 4.1.3 deki yöntem ile görülür ki $\{x_n\}$, $K$ da bir Cauchy dizisidir. $X$ tam olduğundan $\{x_n\}$ yakınsaktır. $x_n \to q$ olsun. Her $l \in \{1,2,3, \dots, N\}$ için $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, T_l x_n) = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} d(q, T_l q) &\leq d(q, x_n) + d(x_n, T_l x_n) + d(T_l x_n, T_l q) \\ &\leq d(q, x_n) + d(x_n, T_l x_n) + d(x_n, q) \\ &\to 0 \quad (n \to \infty) \end{aligned}$$

olup, $d(q, T_l q)$ buluruz. Yani $q \in \bigcap_{i\in\{1,2,\dots,N\}} F(T_i)$ dir. Benzer şekilde $q \in \bigcap_{i\in\{1,2,\dots,N\}} F(S_i)$ olduğu gösterilir. Sonuç olarak $q \in \mathcal{F}$ dir.

**Teorem 4.2.4:** $X$, $\eta$ monoton düzgün konvekslik modülüne sahip tam düzgün konveks bir hiperbolik uzay ve $K$ da $X$ in boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi olsun. $\{T_i : i = 1,2,3, \dots, N\}$ ve $\{S_i : i = 1,2,3, \dots, N\}$ genişlemeyen dönüşümlerin sonlu iki ailesi ve $F \neq \emptyset$ olsun. Herhangi bir $x_1 \in K$ için $\{x_n\}$ dizisi (4.14) ile tanımlansın. $\{T_i : i = 1,2,3, \dots, n\}$ ve $\{S_i : i = 1,2,3, \dots, n\}$ dönüşüm aileleri $(B)$ şartını sağlıyor ise, $\{x_n\}$ iterasyon şeması $\{T_i : i = 1,2,3, \dots, n\}$ ve $\{S_i : i = 1,2,3, \dots, n\}$ dönüşüm ailelerinin ortak bir sabit noktasına güçlü yakınsar.

**İspat:** Her $p \in F$ için Lemma 4.2.1 den $\lim_{n\to\infty} d(x_n, F)$ limiti var ve Lemma 4.2.2 den $\lim_{n\to\infty} d(x_n, T_l x_n) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, S_l x_n) = 0$ dir. $(B)$ şartından $\lim_{n\to\infty} d(x_n, F) = 0$ dır. Böylece Teorem 4.2.3 den $\{x_n\}$ bir $p \in F$ ye güçlü yakınsar.

(B) şartı $K$ kümesinin kompaktlığından ve genişlemeyen dönüşümlerin semi kompaktlığından daha zayıf olduğu için Teorem 4.2.4 ün bir sonuçu olarak aşağıdaki teoremi verebiliriz.

**Teorem 4.2.5:** $X$, $\eta$ monoton düzgün konvekslik modülüne sahip tam düzgün konveks bir hiperbolik uzay ve $K$ da $X$ in boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi olsun.

$\{T_i: i = 1,2,3, \dots, N\}$ ve $\{S_i: i = 1,2,3, \dots, N\}$ genişlemeyen dönüşümlerin sonlu iki ailesi ve $F \neq \emptyset$ olsun. Herhangi bir $x_1 \in K$ için $\{x_n\}$ dizisi (4.14) ile tanımlansın. Eğer $\{T_i: i = 1,2,3, \dots, N\}$ ve $\{S_i: i = 1,2,3, \dots, N\}$ dönüşüm ailelerindeki dönüşümlerden biri semikompakt ise $\{x_n\}$ iterasyon şeması $\{T_i: i = 1,2,3, \dots, N\}$ ve $\{S_i: i = 1,2,3, \dots, N\}$ dönüşüm ailelerinin ortak bir sabit noktasına güçlü yakınsar.

**İspat:** Kabul edelimki; $i_0, j_0 \in \{1,2,3, \dots, N\}$ için $T_{i_0}$ ve $S_{j_0}$ semikompakt olsun. Bu durumda Lemma 4.2.2 den $\lim_{n\to\infty} d(x_n, T_{i_0}x_n) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, S_{j_0}x_n) = 0$ olur. $T_{i_0}$ ve $S_{j_0}$ semi kompakt dönüşümler olduğundan $\{x_n\}$ dizisinin $\lim_{j\to\infty} x_{n_j} = p \in K$ olacak şekilde $\{x_{n_j}\}$ altdizisi vardır ve böylece

$$\lim_{n\to\infty} d\left(x_{n_j}, T_{i_0}x_{n_j}\right) = \lim_{n\to\infty} d\left(x_{n_j}, S_{j_0}x_{n_j}\right) = 0$$

dir. Şimdi Lemma 4.2.2 den her $l \in \{1,2,3, \dots, N\}$ için $\lim_{n\to\infty} d\left(x_{n_j}, T_l x_{n_j}\right) = 0$ yazarız. Böylece her $l \in \{1,2,3, \dots, N\}$ için $d(p, T_l p) = 0$ elde ederiz. Bu durumda $p$ noktası $\{T_i: i = 1,2,3, \dots, N\}$ dönüşüm ailesinin ortak sabit noktasıdır. Benzer şekilde $p$ noktası $\{S_i: i = 1,2,3, \dots, N\}$ dönüşüm ailesinin ortak sabit noktasıdır. Böylelikle $p \in \mathcal{F}$ olup, $\lim_{n\to\infty} d(x_n, F) = 0$ yazarız. O halde, Lemma 4.2.3 den $\{x_n\}$ iterasyon şeması $\{T_i: i = 1,2,3, \dots, N\}$ ve $\{S_i: i = 1,2,3, \dots, N\}$ dönüşüm ailelerinin ortak bir sabit noktasına güçlü yakınsar.

İkinci olarak hiperbolik uzaylarda (4.14) iterasyon şeması için $\Delta$-yakınsama teoremimizi vereceğiz. Bu teoremin ispatı Teorem 4.1.5 de kullanılan yöntem kullanılarak ispatlanır.

**Teorem 4.2.6:** $X$, $\eta$ monoton düzgün konvekslik modülüne sahip tam düzgün konveks bir hiperbolik uzay ve $K$ da $X$ in boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi olsun. $\{T_i: i = 1,2,3, \dots, N\}$ ve $\{S_i: i = 1,2,3, \dots, N\}$ genişlemeyen dönüşümlerin sonlu iki ailesi ve $\mathcal{F} \neq \emptyset$ olsun. Herhangi bir $x_1 \in K$ için $\{x_n\}$ dizisi (4.14) ile tanımlansın. Bu durumda $\{x_n\}$ iterasyon şeması $\{T_i: i = 1,2,3, \dots, N\}$ ve $\{S_i: i = 1,2,3, \dots, N\}$ dönüşüm ailelerinin ortak bir sabit noktasına $\Delta$-yakınsar.

**İspat:** Lemma 4.1.1 den $\{x_n\}$ dizisi sınırlı ve böylece Teorem 3.2.3 den $A(\{x_n\}) = \{x\}$ dir. Kabul edelimki $\{u_n\}$ dizisi $\{x_n\}$ nin $A(\{u_n\}) = \{u\}$ olacak şekilde herhangi bir altdizisi olsun. Bu durumda Lemma 4.2.2 den her $l = 1,2,\cdots,N$ için $\lim_{n\to\infty} d(u_n, T_l u_n) = \lim_{n\to\infty} d(u_n, S_l u_n) = 0$ dır. $K$ da $\{v_m\}$ dizisini $v_m = T_m u$ ile tanımlayalım. Burada $T_m = T_{m(modN)}$ dır. Diğer taraftan

$$d(v_n, u_n) \leq d(T_m u, T_m u_n) + d(T_m u_n, T_{m-1} u_n) + \cdots + d(T u_n, u_n)$$
$$\leq d(u, u_n) + \sum_{i=1}^{m-1} (u_n, T_i u_n)$$

olur. Buradan

$$r(v_m, \{u_n\}) = \limsup_{n\to\infty} d(v_m, u_n) \leq \limsup_{n\to\infty} d(u, u_n) = r(u, \{u_n\})$$

yazarız. Bu $m \to \infty$ iken $|r(v_m, \{u_n\}) - r(u, \{u_n\})| \to 0$ olmasını gerektirir. Böylece Lemma 3.3.7 den $T_{m(modN)} u = u$ olur. O halde $u$, $\{T_i : i \in I\}$ ailesinin ortak sabit noktasıdır. Aynı kabullerle $u$ nun $\{S_i : i = 1,2,3,\ldots,N\}$ ailesinin ortak sabit noktası olduğu gösterilebilir. Bu yüzden $u \in \mathcal{F}$ dir. Kabul edelimki; $x \neq u$ olsun. Asimptotik merkezin tekliğinden,

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} d(u_n, u) &< \limsup_{n\to\infty} d(u_n, x)\\ &\leq \limsup_{n\to\infty} d(x_n, x)\\ &< \limsup_{n\to\infty} d(x_n, u)\\ &= \limsup_{n\to\infty} d(u_n, u)\end{aligned}$$

olup bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $x = u$ dur. $\{x_n\}$ nin $\{u_n\}$ altdizisi keyfi olduğundan, $\{x_n\}$ nin bütün $\{u_n\}$ altdizileri için $A(\{u_n\}) = \{u\}$ dir. Bu da $\{x_n\}$ nin $\{T_i : i = 1,2,3,\ldots,N\}$ ve $\{S_i : i = 1,2,3,\ldots,N\}$ ailelerinin ortak sabit noktasına $\Delta$-yakınsadığını gösterir.

Yukarıda verdiğimiz teoremlerin sonuçlarını aşağıdaki teoremlerle verelim.

**Teorem 4.2.7:** $X$, $\eta$ monoton düzgün konvekslik modülüne sahip tam düzgün konveks bir hiperbolik uzay ve $K$ da $X$ in boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi olsun. $T$ ve $S$ iki genişlemeyen dönüşüm olmak üzere herhangi bir $x_1 \in K$ için $\{x_n\}$ dizisi

$$\begin{cases} x_{n+1} = W(y_n, Sy_n, \alpha_n) \\ y_n = W(x_n, Tx_n, \beta_n) \end{cases}, \quad n \geq 1 \tag{4.27}$$

ile tanımlansın. Eğer $F := F(T) \cap F(S) \neq \emptyset$ ve $T, S$ dönüşümleri $(A')$ şartını sağlıyor ise, $\{x_n\}$ iterasyon şeması $T$ ve $S$ dönüşümlerinin ortak bir sabit noktasına güçlü yakınsar.

**İspat:** Teorem 4.2.4 de her $l \in \{1,2,3, \dots, N\}$ için $T_i = T$ ve $S_i = S$ alınırsa ispat açıktır.

**Teorem 4.2.8:** $X$, $\eta$ monoton düzgün konvekslik modülüne sahip tam düzgün konveks bir hiperbolik uzay ve $K$ da $X$ in boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi olsun. $T$ ve $S$ iki genişlemeyen dönüşüm olmak üzere herhangi bir $x_1 \in K$ için $\{x_n\}$ dizisi (4.27) ile tanımlansın. Eğer $F := F(T) \cap F(S) \neq \emptyset$ ise $\{x_n\}$ iterasyon şeması $T$ ve $S$ dönüşümlerinin ortak bir sabit noktasına Δ-yakınsar.

**İspat:** Teorem 4.2.6 da her $l \in \{1,2,3, \dots, N\}$ için $T_i = T$ ve $S_i = S$ alınırsa ispat açıktır.

Teorem 4.2.3 ve Teorem 4.2.5 içinde yukardaki iki teoreme benzer sonuçlar verebiliriz.

## 4.3. Konveks Metrik Uzaylarda Asimptotik Quasi Genişlemeyen Dönüşümlerin Sonlu Bir Ailesi İçin n-Adım İterasyon Şemasının Yakınsaklığı

$(X, d, W)$, $W$ konveks yapısı ile verilen bir konveks metrik uzay ve $\{T_i : i = 1,2,3, \dots, N\}$, $X$ de tanımlı asimptotik quasi genişlemeyen dönüşümlerin sonlu bir ailesi olsun. Kabul edelimki her $n = 1,2, \dots$ ve $i = 1,2, \dots, N$ için $\alpha_{in} \in [0,1]$ dir. Herhangi bir $x_1 \in X$ için $\{x_n\}$ iterasyon dizisini

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= W\big(T_k^n y_{(k-1)n}, y_{(k-1)n}, \alpha_{kn}\big), \\ y_{(k-1)n} &= W\big(T_{k-1}^n y_{(k-2)n}, y_{(k-2)n}, \alpha_{(k-1)n}\big), \\ y_{(k-2)n} &= W\big(T_{k-2}^n y_{(k-3)n}, y_{(k-3)n}, \alpha_{(k-2)n}\big), \\ &\vdots \\ y_{2n} &= W(T_2^n y_{1n}, y_{1n}, \alpha_{2n}), \\ y_{1n} &= W(T_1^n y_{0n}, y_{0n}, \alpha_{1n}) \end{aligned} \tag{4.28}$$

şeklinde teşkil edelim. Burada her $n \in N$ için $y_{0n} = x_n$ dir. Bu şema konveks metrik uzaylarda ilk defa kullanılmıştır. (4.28) iterasyon şeması için güçlü yakınsama teoremleri ve bu teoremlerin bazı uygulamaları verilmeden önce bu teoremlerin ispatında kullanacağımız bazı lemmaları verelim.

**Lemma 4.3.1 :** $X$ bir konveks metrik uzay, $\{T_i : i = 1,2,3, \dots, N\}$ $X$ de tanımlı asimptotik quasi genişlemeyen dönüşümlerin sonlu bir ailesi ve $\mathcal{F} := \bigcap_{i=1}^{k} F(T_i) \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda her $n = 1,2, \dots$ ve $i = 1,2, \dots, N$ için

$$d(T_i^n x, p) \leq (1 + r_n) d(x, p)$$

olacak şekilde $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$ şartını sağlayan bir $\{r_n\} \subset [0, \infty)$ dizisi ve bir $p \in \mathcal{F}$ noktası vardır.

**İspat**: $\{T_i : i = 1,2,3, \dots, N\}$ $X$ de tanımlı asimptotik quasi genişlemeyen dönüşümlerin sonlu bir ailesi olduğundan her $x \in X$ ve her $i = 1,2, \dots, N$ için

$$d(T_i^n x, p_i) \leq (1 + r_{in}) d(x, p_i)$$

olcak şekilde $p_i \in F(T_i)$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} r_{in} = 0$ şartını sağlayan $\{r_{in}\} \subset [0, \infty)$ dizisi vardır. $r_n = max\{r_{1n}, r_{2n}, \dots, r_{kN}\}$ olsun. Bu durumda $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$ ve $\{r_n\} \subset [0, \infty)$ yazarız. $p \in \mathcal{F} := \bigcap_{i=1}^{k} F(T_i) \neq \emptyset$ olduğundan her $i = 1,2, \dots, k$ için $p \in F(T_i)$ dir. Böylece yukarıdaki eşitsizlik her $p \in F$ için sağlanır. Yani, her $n = 1,2, \dots$ ve $i = 1,2, \dots, N$ için

$$d(T_i^n x, p) \leq (1 + r_n) d(x, p)$$

olacak şekilde $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$ şartını sağlayan bir $\{r_n\} \subset [0, \infty)$ dizisi ve bir $p \in \mathcal{F}$ noktası vardır.

**Lemma 4.3.2:** $(X,d,W)$, $W$ konveks yapısı ile verilen bir konveks metrik uzay, $\{T_i: i = 1,2,3,\dots,N\}$ $X$ de tanımlı asimptotik quasi genişlemeyen dönüşümlerin sonlu bir ailesi ve $F \neq \emptyset$ olsun. $\sum_{n=1}^{\infty} r_n < \infty$ olmak üzere $\{x_n\}$ dizisi (4.28) ile tanımlansın. Bu durumda

**a)** Her $p \in \mathcal{F}$ ve $n \in N$ için $d(x_{n+1},p) \leq (1+r_n)^k d(x_n,p)$ dir.

**b)** Her $p \in \mathcal{F}$ ve $n,m \in N$ için $d(x_{n+1},p) \leq Md(x_n,p)$ olacak şekilde $M > 0$ vardır.

**İspat: a)** İspatımızı tümevarım yöntemini kullanarak yapacağız. Her $p \in F$ için (4.28) ve Lemma 4.3.1 den

$$\begin{aligned} d(y_{1n},p) &= d(W(T_1^n y_{0n}, y_{0n}, \alpha_{1n}),p) \\ &\leq \alpha_{1n} d(T_1^n y_{0n},p) + (1-\alpha_{1n}) d(y_{0n},p) \\ &\leq \alpha_{1n}(1+r_n)d(x_n,p) + (1-\alpha_{1n})d(x_n,p) \\ &\leq (1+\alpha_{1n} r_n)d(x_n,p) \\ &\leq (1+r_n)d(x_n,p) \end{aligned}$$

yazarız. $1 \leq j \leq N-2$ için $d\big(y_{jn},p\big) \leq (1+r_n)^j d(x_n,p)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$\begin{aligned} d\big(y_{(j+1)n},p\big) &= d\big(W\big(T_{j+1}^n y_{jn}, y_{jn}, \alpha_{(j+1)n}\big),p\big) \\ &\leq \alpha_{(j+1)n} d\big(T_{j+1}^n y_{jn},p\big) + \big(1-\alpha_{(j+1)n}\big) d\big(y_{jn},p\big) \\ &\leq \alpha_{(j+1)n}(1+r_n) d\big(y_{jn},p\big) + \big(1-\alpha_{(j+1)n}\big) d\big(y_{jn},p\big) \\ &\leq (1+r_n) d\big(y_{jn},p\big) \\ &\leq (1+r_n)(1+r_n)^j d(x_n,p) \\ &= (1+r_n)^{j+1} d(x_n,p) \end{aligned}$$

buluruz. Böylece tümevarımdan $i = 1,2,\dots,k-1$ için

$$d(y_{in},p) \leq (1+r_n)^i d(x_n,p) \tag{4.29}$$

elde ederiz. (4.28) ve (4.29) dan

$$\begin{aligned} d(x_{n+1},p) &= d\big(W\big(T_k^n y_{(k-1)n}, y_{(k-1)n}, \alpha_{kn}\big),p\big) \\ &\leq \alpha_{kn} d\big(T_k^n y_{(k-1)n},p\big) + (1-\alpha_{kn}) d\big(y_{(k-1)n},p\big) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \alpha_{kn}(1+r_n)d\big(y_{(k-1)n},p\big)+(1-\alpha_{kn})d\big(y_{(k-1)n},p\big)\\
&\leq (1+r_n)d\big(y_{(k-1)n},p\big)\\
&\leq (1+r_n)(1+r_n)^{k-1}d(x_n,p)\\
&= (1+r_n)^k d(x_n,p)
\end{aligned}
$$

olur.

**b)** $t \geq 0$ iken $1+t \leq e^t$ olduğundan $k = 1,2,\dots$ için $(1+t)^k \leq e^{kt}$ yazarız. Böylece (a) dan

$$
\begin{aligned}
d(x_{n+m},p) &\leq (1+r_{n+m-1})^k d(x_{n+m-1},p)\\
&\leq exp\{kr_{n+m-1}\}d(x_{n+m-1},p)\\
&\vdots\\
&\leq exp\left\{k\sum_{i=1}^{n+m-1} r_i\right\}d(x_n,p)\\
&\leq exp\left\{k\sum_{i=1}^{\infty} r_i\right\}d(x_n,p)
\end{aligned}
$$

elde ederiz. $M = exp\{k\sum_{i=1}^{\infty} r_i\} < \infty$ alınarak ispat tamamlanır.

**Teorem 4.3.3:** $(X,d,W)$, $W$ konveks yapısı ile verilen bir konveks metrik uzay, $\{T_i: i = 1,2,3,\dots,N\}$ $X$ de tanımlı asimptotik quasi genişlemeyen dönüşümlerin sonlu bir ailesi ve $\mathcal{F} \neq \emptyset$ olsun. $\sum_{n=1}^{\infty} r_n < \infty$ olmak üzere $\{x_n\}$ dizisi (4.28) ile tanımlansın. Eğer $\lim_{n\to\infty} d(x_n,\mathcal{F}) = 0$ ise $\{x_n\}$ bir cauchy dizisidir. Burada $d(x,F) = \inf\{d(x,p): p \in F\}$ dir.

**İspat:** Lemma 4.3.1 (b) yi kullanarak $\{x_n\}$ nin bir cauchy dizisi olduğunu göstereceğiz. $\lim_{n\to\infty} d(x_n,F) = 0$ olduğundan, her $\varepsilon > 0$ ve her $n \geq n_1$ için

$$d(x_n,F) < \frac{\varepsilon}{M+1}$$

olacak şekilde $n_1 \in N$ vardır. Böylece her $n \geq n_1$ için

$$d(x_n,q) < \tfrac{\varepsilon}{M+1} \tag{4.30}$$

olacak şekilde $q \in F$ vardır. Lemma 4.3.2 (a) ve (4.30) dan $n, m \geq n_1$ için

$$\begin{aligned} d(x_{n+m}, x_n) &\leq d(x_{n+m}, q) + d(x_n, q) \\ &\leq Md(x_n, q) + d(x_n, q) \\ &= (M+1)d(x_n, q) \\ &< (M+1)\left(\frac{\varepsilon}{M+1}\right) = \varepsilon \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece $\{x_n\}$ bir cauchy dizisidir.

Şimdi, konveks metrik uzaylarda asimptotik quasi genişlemeyen dönüşümlerin sonlu bir ailesi için (4.28) iterasyon şemasının güçlü yakınsaklığı ile ilgili teoremleri vereceğiz.

**Teorem 4.3.4:** $(X, d, W)$, $W$ konveks yapısı ile verilen bir konveks metrik uzay, $\{T_i : i = 1,2,3, \dots, N\}$ $X$ de tanımlı asimptotik quasi genişlemeyen dönüşümlerin sonlu bir ailesi ve $\mathcal{F} \neq \emptyset$ olsun. $\sum_{n=1}^{\infty} r_n < \infty$ olmak üzere $\{x_n\}$ dizisi (4.28) ile tanımlansın. Eğer

**a)** $\{x_n\}$, $\mathcal{F}$ de bir noktaya yakınsıyorsa $\liminf\limits_{n\to\infty} d(x_n, F) = \limsup\limits_{n\to\infty} d(x_n, F) = 0$ dir.

**b)** $X$ tam konveks metrik uzay olmak üzere $\liminf\limits_{n\to\infty} d(x_n, \mathcal{F}) = 0$ veya $\limsup\limits_{n\to\infty} d(x_n, \mathcal{F}) = 0$ şartlarından biri sağlanıyorsa $\{x_n\}$ dizisi $\mathcal{F}$ de bir noktaya yakınsar.

**İspat: a)** $p \in F$ olsun. $\{x_n\}$ dizisi $p \in \mathcal{F}$ ye yakınsadığından $\lim_{n\to\infty} d(x_n, p) = 0$ dır. Böylece verilen bir $\varepsilon > 0$ ve $\forall n \geq n_0$ için

$$d(x_n, p) < \varepsilon$$

olacak şekilde $n_0 \in N$ vardır. $p \in \mathcal{F}$ üzerinden infimum alınarak $\forall n \geq n_0$ için

$$d(x_n, F) < \varepsilon$$

buluruz. Böylece $\lim_{n\to\infty} d(x_n, \mathcal{F}) = 0$ elde ederiz. Bu da

$$\liminf_{n\to\infty} d(x_n, \mathcal{F}) = \limsup_{n\to\infty} d(x_n, \mathcal{F}) = 0$$

anlamına gelir.

**b)** Kabul edelimki $X$ tam ve $\liminf_{n\to\infty} d(x_n,\mathcal{F})=0$ veya $\limsup_{n\to\infty} d(x_n,\mathcal{F})=0$ şartlarından biri sağlanır. Bu durumda Lemma 3.3.4 (b) den $\lim_{n\to\infty} d(x_n,\mathcal{F})=0$ olur. $X$ in tamlığından ve Teorem 4.3.3 den $\lim_{n\to\infty} x_n = q \in X$ dir. Asimptotik quasi genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarının kümesi kapalı ve $\lim_{n\to\infty} d(x_n,\mathcal{F})=0$ oduğundan $q\in\mathcal{F}$ dir. Böylece $\{x_n\}$ dizisi $\mathcal{F}$ de bir noktaya yakınsar.

Son olarak konveks metrik uzaylarda asimptotik quasi genişlemeyen dönüşümlerin sonlu bir ailesi için (4.28) iterasyon şemasını ve Teorem 4.3.4 ü kullanarak güçlü yakınsama teoremleri vereceğiz.

**Teorem 4.3.5:** $(X,d,W), W$ konveks yapısı ile verilen bir tam konveks metrik uzay, $\{T_i: i=1,2,3,\dots,N\}$ $X$ de tanımlı asimptotik quasi genişlemeyen dönüşümlerin sonlu bir ailesi ve $F\neq\emptyset$ olsun. $\sum_{n=1}^{\infty} r_n<\infty$ olmak üzere $\{x_n\}$ dizisi (4.28) ile tanımlansın. Kabul edelim ki

**a)** $$\lim_{n\to\infty} d(x_n,x_{n+1})=0 \tag{4.30}$$

ve

**b)** $X$ de $\lim_{n\to\infty} d(y_n,y_{n+1})=0$ şartını sağlayan $\{y_n\}$ dizisi için

$$\liminf_{n\to\infty} d(y_n,F)=0 \quad \text{veya} \quad \limsup_{n\to\infty} d(y_n,F)=0 \tag{4.31}$$

dır. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisi $F$ de bir noktaya yakınsar.

**İspat:** (4.30) ve (4.31) den

$$\liminf_{n\to\infty} d(y_n,F)=0 \quad \text{veya} \quad \limsup_{n\to\infty} d(y_n,F)=0$$

olur. Böylece Teorem 4.3.4 (b) den $\{x_n\}$ dizisi $\mathcal{F}$ de bir noktaya yakınsar.

**Teorem 4.3.6:** $(X,d,W)$, $W$ konveks yapısı ile verilen bir tam konveks metrik uzay, $\{T_i: i=1,2,3,\dots,N\}$ $X$ de tanımlı asimptotik quasi genişlemeyen dönüşümlerin

$\lim_{n\to\infty} d(x_n, T_i x_n) = 0$ şartını sağlayan sonlu bir ailesi ve $\mathcal{F} \neq \emptyset$ olsun. $\sum_{n=1}^{\infty} r_n < \infty$ olmak üzere $\{x_n\}$ dizisi (4.28) ile tanımlansın. Eğer aşağıdaki ifadelerden biri doğruysa, $\{x_n\}$ dizisi $\mathcal{F}$ de bir noktaya yakınsar.

**a)** Her $t \in (0, \infty)$ için $g(t) > 0$, $g(0) = 0$ olacak şekilde $d(x_n, T_i x_n) \geq g\big(d(x_n, F)\big)$ şartını sağlayan azalmayan bir $g: [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonu vardır.

**b)** $f(0) = 0$ ve her $n \geq 1$ için $f\big(d(x_n, T_i x_n)\big) \geq d(x_n, \mathcal{F})$ şartlarını sağlayan 0 da sağdan sürekli bir $f: [0, \infty) \to [0, \infty)$ foksiyonu vardır.

**İspat:** İlk olarak (a) ifadesinin doğru olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} g\big(d(x_n, \mathcal{F})\big) \leq \lim_{n\to\infty} d(x_n, T_i x_n)$$

yazarız. O halde $\lim_{n\to\infty} g\big(d(x_n, F)\big) = 0$ ve $g$ fonksiyonunun özelliklerinden $\lim_{n\to\infty} d(x_n, F) = 0$ buluruz. Böylece Teorem 4.3.4 den $\{x_n\}$ dizisi $F$ de bir noktaya yakınsar.

Şimdi (b) ifadesinin doğru olduğunu kabul edelim. Bu halde

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, F) \leq \lim_{n\to\infty} f\big(d(x_n, T_i x_n)\big) = f\left(\lim_{n\to\infty} d(x_n, T_i x_n)\right) = f(0) = 0$$

buluruz. Bu durumda yine $\lim_{n\to\infty} d(x_n, F) = 0$ olup, $\liminf_{n\to\infty} d(x_n, F) = 0$ ve $\limsup_{n\to\infty} d(x_n, F) = 0$ dır. Dolayısıyla Teorem 4.3.4 den $\{x_n\}$ dizisi $\mathcal{F}$ nin bir noktasına yakınsar. Böylece ispat tamamlanmış olur.

# 5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu bölümde, çalışmamızda elde ettiğimiz sonuçların literatürdeki yerlerinden bahsedeceğiz.

İlk olarak hiperbolik uzaylarda genişlemeyen dönüşümlerin iki ailesi için tek adım iterasyon şeması ve yakınsaklığı ile ilgili bazı noktalara değinelim:

(4.1) iterasyonu $X$ Banach uzayı, $W(x,y,\alpha) = \alpha x + (1-\alpha)y$ ve $S_i = S, T_i = T$ alındığında

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_n - \beta_n)x_n + \alpha_n T x_n + \beta_n S x_n \tag{5.1}$$

iterasyonuna dönüşür. Ayrıca CAT(0) uzaylarında $W(x,y,\alpha) = \alpha x \oplus (1-\alpha)y$ ve $S_i = S$, $T_i = T$ olarak seçilirse (4.1) iterasyonu

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n \oplus (1-\alpha_n)\left[\frac{\alpha_n}{(1-\beta_n)} T x_n \oplus \left(1 - \frac{\alpha_n}{(1-\beta_n)}\right) S x_n\right] \tag{5.2}$$

iterasyonuna indirgenir. Yao and Chen (2007) Banach uzaylarında (5.1) iterasyonunu asimptotik genişlemeyen iki dönüşüm için çalışmıştır. Abbas and Khan (2011) CAT(0) uzaylarında (5.2) iterasyonunun iki genişlemeyen dönüşüm için $\Delta$-yakınsamasını elde etmiştir. (5.1) iterasyonu, $T = S$, $T = I$ veya $S = I$ alınarak yada $\{\alpha_n\}$ veya $\{\beta_n\}$ dizilerinden birinin tüm terimleri 0 seçilerek Mann iterasyonuna indirgenir. Diğer taraftan (5.1) iterasyonu Ishikawa iterasyonundan bağımsız fakat daha basittir. Bu yazdıklarımız ışığında aşağıdaki sonuç verilebilir.

**Sonuç 5.1: i)** Teorem 4.1.4 ve Teorem 4.1.5 Abbas and Khan (2011) ın sonuçlarını iki farklı yönden genelleştirir. Bunlardan birincisi, iki genişlemeyen dönüşümün sonlu iki genişlemeyen dönüşüm ailesine genellemesidir. İkinciside CAT(0) uzaylarından daha genel düzgün konveks hiperbolik uzaylara genişletilmesidir.

**ii)** Teorem 4.1.5, Abbas and Khan (2011) ın çalışmasındaki Teorem 1 i düzgün konveks hiperbolik uzaylara genişletmenin yanı sıra dönüşümlerin tanım kümelerinin sınırlı olması şartını da ortadan kaldırmıştır.

**iii)** Teorem 4.1.4 ve Teorem 4.1.5 de $S_i = I$ veya $T_i = I$ alınması durumunda Mann iterasyonu için benzer sonuçlar elde ederiz.

**iv)** (4.1) iterasyonu Ishikawa iterasyonuna kıyasla daha basit olduğundan (4.1) iterasyonu ile teoremlerimiz Dhompongsa and Panyanak (2008) ve Khan and Abbas (2011) in sonuçlarını genelleştirmiştir.

İkinci olarak hiperbolik uzaylarda genişlemeyen dönüşümlerin iki ailesi için iki adım iterasyon şeması ile ilgili bazı noktalara değinelim.

(4.14) iterasyonu, $X$ Banach uzayı, $W(x,y,\alpha) = \alpha x + (1-\alpha)y$ ve $S_i = T_i = T$ alındığında

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)y_n + \alpha_n T y_n \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T x_n \end{cases} \tag{5.2}$$

iterasyonuna dönüşür. (5.1) iterasyonunu ilk kez Thianwan (2009) tarafından Banach uzaylarında asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktasını bulmak için kullanılmıştır. (4.14) iterasyonuna hata terimleri eklenerek aşağıdaki şekilde yeniden tanımlanabilir.

$$\begin{cases} x_{n+1} = W\left(S_n y_n, W\left(y_n, u_n, \frac{b_n}{1-a_n}\right), a_n\right) \\ y_n = W\left(T_n x_n, W\left(x_n, v_n, \frac{d_n}{1-c_n}\right), c_n\right) \end{cases}, \quad n \geq 1 \tag{5.3}$$

Burada $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}, \{d_n\}$ dizileri $0 \leq a_n, b_n, c_n, d_n \leq 1$ olmak üzere $(0,1)$ aralığındadır. Ayrıca $\{u_n\}$ ve $\{v_n\}$ dizileri elemanları $K$ kümesinden alınan sınırlı dizilerdir. (4.14) iterasyonu için ispat edilen tüm teoremler (5.3) iterasyonu içinde benzer yöntemler kullanılarak ispat edilebilir.

Son olarak konveks metrik uzaylarda asimptotik quasi genişlemeyen dönüşümlerin bir ailesi için $n$-adım iterasyon şeması ile ilgili bazı noktalara değinelim.

(4.28) iterasyonu $X$ Banach uzayı ve $W(x, y, \alpha) = \alpha x + (1 - \alpha)y$ alındığında

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= (1 - \alpha_{kn})y_{(k-1)n} + \alpha_{kn}T_k^n y_{(k-1)n}, \\
y_{(k-1)n} &= \left(1 - \alpha_{(k-1)n}\right)y_{(k-2)n} + \alpha_{(k-1)n}T_{k-1}^n y_{(k-2)n}, \\
y_{(k-2)n} &= \left(1 - \alpha_{(k-2)n}\right)y_{(k-3)n} + \alpha_{(k-2)n}T_{k-2}^n y_{(k-3)n}, \\
&\vdots \\
y_{2n} &= (1 - \alpha_{2n})y_{1n} + \alpha_{2n}T_2^n y_{1n}, \\
y_{1n} &= (1 - \alpha_{1n})y_{0n} + \alpha_{1n}T_1^n y_{0n}
\end{aligned} \tag{5.4}$$

iterasyonuna dönüşür. Bu iterasyon Banach uzaylarında Kettapun *et al.* (2010) ve Yıldırım and Ozdemir (2011) tarafından asimptotik quasi genişlemeyen dönüşümler için çalışılmıştır. (5.4) iterasyonu özel olarak $k = 2$ ve $T_1 = T_2$ seçildiğinde (5.2) iterasyonuna ve $k = 3$ ve $T_1 = T_2 = T_3$ seçildiğinde Phuengrattana and Suantai (2011) tarafından tanımlanan

$$\begin{cases}
x_{n+1} = (1 - \alpha_n)y_n + \alpha_n T y_n, \\
y_n = (1 - \beta_n)z_n + \beta_n T z_n, \\
z_n = (1 - \gamma_n)x_n + \gamma_n T x_n
\end{cases}$$

SP iterasyonuna dönüşür. Buradan hareket edilerek aşağıdaki sonuç yazılabilir.

**Sonuç 5.2: i)** Banach uzayları, konveks metrik uzayların özel örnekleri olduğundan Teorem 4.3.4, Kettapun *et al.*(2010) un çalışmasındaki Teorem 3.2 ve Yıldırım and Ozdemir (2011) in çalışmasındaki Teorem 3.2 yi genelleştirir. Ayrıca her quasi genişlemeyen dönüşüm bir asimptotik quasi genişlemeyen dönüşüm olduğundan Kettapun *et al*. (2010) un çalışmasındaki Sonuç 3.3 ve Yıldırım and Ozdemir (2011) in çalışmasındaki Sonuç 3.4 de yine Teorem 4.3.4 ün özel bir halleridir.

**ii)** Teorem 4.3.6, Kettapun *et al*. (2010) un çalışmasındaki Teorem 4.1 i Banach uzaylarından konveks metrik uzaylara genelleştirir.

Diğer taraftan (4.28) iterasyonu hata terimleri eklenerek yeniden verilebilir ve (4.28) iterasyonu için ispat edilen tüm teoremler hata terimli bu iterasyon şeması içinde ispat edilebilir.

Bu tezden aşağıdaki makaleler yayınlanmıştır.

**1.** Gündüz, B. and Akbulut, S., 2013. Strong and Δ-convergence theorems in hyperbolic spaces. Miskolc Mathematical Notes, 14 (3), 915-925.

**2.** Gündüz, B., Khan S.H. and Akbulut, S., 2014. Common fixed points of two finite families of nonexpansive mappings in Kohlenbach hyperbolic spaces. Journal of Nonlinear Functional Analysis, (Baskıda).

**3.** Gündüz, B. and Akbulut, S., 2013. Strong convergence of an explicit iteration process for a finite family of asymptotically quasi-nonexpansive mappings in convex metric spaces. Miskolc Mathematical Notes, 14 (3), 905-913.

**KAYNAKLAR**


Abbas, M. and Khan, S.H., 2011. Some Δ-convergence theorems in CAT(0) spaces. Hacet. J. Math. Stat., 40 (4), 563 -569.

Aksoy, A. G. and Khamsi, M. A., 1990. Nonstandard Methods in Fixed Point Theory. ISBN 0-387-97364-8.

Bruhat, F. and Tits, J., 1972. Groupes réductifs sur un corps local. I. Données radicielles valuées, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., 41, 5-251.

Berinde, V., 2006. Iterative Approximation of Fixed Points. Lecture Notes in Math.

Bose, S.C. and Laskar, S.K., 1985. Fixed point theorems for certain class of mappings. J. Math. Phys. Sci., 19, 503-509.

Chang, S.S., Yang, L. and Wang, X.R., 2010. Stronger convergence theorems for an infinite family of uniformly quasi-Lipschitzian mappings in convex metric spaces. Appl. Math. Comput., 217, 277–282.

Chidume C.E. and Ali, B., 2007. Approximation of common fixed points for finite families of nonself asymptotically nonexpansive mappings in Banach spaces. J. Math. Anal. Appl., 326, 960–973.

Dhompongsa, S., Kirk, W.A. and Sims B., 2006. Fixed points of uniformly lipschitzian mappings. Nonlinear Anal., 65, 762–772.

Dhompongsa, S. and Panyanak, B., 2008. On Δ-convergence theorems in CAT(0) spaces. Comput. Math. Appl., 56, 2572-2579.

Franks, R. L. and Marzec, R. P., 1971. A theorem on mean-value iterations. Proc. Amer. Math. Soc., 30, 324-326.

Goebel, K. and Kirk, W. A., 1972. A fixed point theorem for asymptotically nonexpansive mappings. Proc. Amer. Math. Soc., 35, 171-174.

Goebel, K. and Kirk, W.A., 1983. Iteration processes for nonexpansive mappings. Topological Methods in Nonlinear Functional Analysis, Contemp. Math., 21, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1983, 115–123.

Goebel, K. and Reich, S., 1984. Uniform Convexity, Hyperbolic Geometry, and Nonexpansive Mappings. Marcel Dekker, New York.

Ishikawa, S., 1974. Fixed points by a new iteration method. Proc. Amer. Math. Soc., 44, 147-150.

Kettapun, A., Kananthai, A. and Suantai, S., 2010. A new approximation method for common fixed points of a finite family of asymptotically quasi-nonexpansive mappings in Banach spaces. Comput. Math. Appl., 60, 1430-1439.

Khamsi, M. A. and Kirk W. A., 2001. An Introduction to Metric Spaces and Fixed Point Theory.

Khan, S.H. and Abbas, M., 2011. Strong and Δ-convergence of some iterative schemes in CAT(0) spaces. Comput. Math. Appl., 61,109-116.

Khan, A.R. and Ahmed, M.A. , 2010. Convergence of a general iterative scheme for a finite family of asymptotically quasi-nonexpansive mappings in convex metric spaces and applications. Comput. Math. Appl., 59, 2990-2995.

Khan, A. R., Domlo A. A. and Fukhar-ud-din H., 2008. Common fixed points Noor iteration for a finite family of asymptotically quasi-nonexpansive mappings in Banach spaces. J. Math. Anal. Appl., 341, 1-11.

Khan, A.R. and Fukhar-ud-din, H., 2014. Common fixed point iterations of generalized asymptotically quasi-nonexpansive mappings in hyperbolic spaces. Journal of Applied Mathematics and Physics, 2014, 2, 170-175.

Khan, A.R., Fukhar-ud-din, H. and Domlo, A.A., 2010. Approximating fixed points of some maps in uniformly convex metric spaces. Fixed Point Theory Appl. 2010, Article ID 385986, 11 pages.

Khan A.R., Fukhar-ud-din H., Kalsoom A. and Lee, B.S., 2014. Convergence of a general algorithm of asymptotically nonexpansive maps in uniformly convex hyperbolic spaces. Applied Mathematics and Computation, 238, 547–556.

Khan A.R., Fukhar-ud-din, H. and Khan, M. A. A., 2012. An implicit algorithm for two finite families of nonexpansive maps in hyperbolic spaces. Fixed Point Theory and Applications, 2012:54.

Khan, S. H. and Fukhar-ud-din, H., 2005. Weak and stronge convergence of a scheme with errors of two nonexpansive mappings. Nonlinear Anal., 61, 1295-1301.

Kirk, W.A., 1982. Krasnosel'skii iteration process in hyperbolic spaces. Numer. Funct. Anal. Optim., 4, 371–381.

Kirk, W.A., 2004. Geodesic geometry and fixed point theory II. International Conference on Fixed Point Theory and Applications. Proceedings of the conference held in Valencia, July 13-19, 2003, Yokohama Publ., Yokohama, 113-142.

Kirk, W.A. and Martinez-Yanez, C., 1990. Approximate fixed points for nonexpansive mappings in uniformly convex spaces. Ann. Polon. Math., 51, 189–193.

Kirk, W. and Panyanak, B., 2008. A concept of convergence in geodesic spaces. Nonlinear Anal., 68, 3689-3696.

Krasnoselskij, M. A., 1955. Two remarks on the method of successive approximations. Uspehi Mat. Nauk., 10, 123-127.

Kohlenbach, U., 2005. Some logical metatheorems with applications in functional analysis, Trans. Amer. Math. Soc., 357, 89–128.

Kohlenbach, U. and Leuştean L., 2010. Asymptotically nonexpansive mappings in uniformly convex hyperbolic spaces. J. Eur. Math. Soc., 12, 71-92. doi: 10.4171/JEMS/190.

Laowang, W. and Panyanak, B., 2010. Approximating fixed points of nonexpansive nonself mappings in CAT(0) spaces. Fixed Point Theory Appl., 2010 367274, 11.

Lee, B.S., 2011. Strong convergence theorems with a Noor-type iterative scheme in convex metric spaces. Comput. Math. Appl., 61, 3218–3225.

Leuştean, L., 2007. A quadratic rate of asymptotic regularity for CAT(0)-spaces. J Math Anal Appl., 325, 386–399.

Leuştean, L., 2010. Nonexpansive iterations in uniformly convex W-hyperbolic spaces. Contemp. Math., 513, 193-210.

Lim, T.C., 1976. Remarks on some Fixed point theorems. Proc Am Math Soc., 60, 179–182.

Liu, Q., Liu, Z. and Huang, N., 2010. Approximating the common fixed points of two sequences ofuniformly quasi-Lipschitzian mappings in convex metric spaces. Applied Mathematics and Computation., 216, 883-889.

Mann, W. R., 1953. Mean value methods in iteration. Proc. Amer. Math. Soc., 4, 506-510.

Noor, M. A., 2000. New approximation schemes for general variational inequalities. J. Math. Anal. Appl., 251, 217-229.

Qihou, L., 2002. Iteration sequences for asymptotically quasi-nonexpansive mapping with an error member of uniform convex Banach space. J. Math.Anal. Appl., 266, 468-471.

Opial, Z., 1967. Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings. Bull. Amer. Math. Soc., 591-597.

Petryshyn, W. V. and Williamson, T. E., 1973. Strong and weak convergence of the sequence of successive approximations for quasi-nonexpansive mappings. J. Math. Anal. Appl., 43, 459-497.

Phuengrattana, W. and Suantai S., 2011. On the rate of convergence of Mann Ishikawa, Noor and SP iterations for continuous functions on an arbitrary interval. Journal of Computational and Applied Mathematics, 235, 3006-3014.

Picard, E. (Charles), 1890. Jour. de Math., (4) 6, 145-210.

Reich, S. and Shafrir, I., 1990. Nonexpansive iterations in hyperbolic spaces. Nonlinear Anal. 15, 537 558.

Rhoades, B. E., 1974. Fixed point iterations using infinite matrices. Trans. Amer. Math. Soc., 196, 161-176.

Rhoades, B. E., 1976. Comments on two fixed point iteration methods. J. Math. Anal. Appl., 56 (3), 741-750.

Rhoades, B. E. and Soltuz S. M., 2004. The equivalence between Mann-Ishikawa iterations and multistep iteration. Nonlinear Anal., 58, 219-228.

Saluja, G.S., 2011. Three-step iteration process for a finite family of asymptotically quasi-nonexpansive mappıngs in the intermediate sense in convex metrıc spaces. Bulletin of Mathematical Analysis and Applications, 3 (1), 89-101.

Senter, H. F. and Dotson, W. G., 1974. Approximating fixed points of nonexpansive mappings. Proc. Amer. Math. Soc., 44, 375-380.

Schu, J., 1991. Iterative construction of a fixed points of asymptotically nonexpansive mappings. J. Math. Anal. Appl., 158, 407-413.

Schu, J., 1991. Weak and strong convergence of fixed points of asymptotically nonexpansive mappings. Bull. Austral. Math. Soc., 43, 153-159.

Shimizu, T. and Takahashi, W., 1996. Fixed points of multivalued mappings in certain convex metric spaces. Topol Methods Nonlinear Anal., 8, 197–203.

Takahashi, W., 1970. A convexity in metric spaces and nonexpansive mappings. Kodai Math Sem Rep., 2, 142–149.

Takahashi, W., 2009. Introduction to nonlinear and convex analysis. Yokohama Publishers, Tokyo.

Tan, K. K. and Xu, H. K., 1993. Approximating fixed points of nonexpansive mappings by Ishikawa iteration process. J. Math. Anal. Appl., 178, 301-308.

Thianwan, S., 2009. Common fixed point of new iterations for two asymptotically nonexpansive nonself-mappings in a Banach space. J. Comput. Appl. Math., 224, 688-695.

Tian, Y. X., 2005. Convergence of an Ishikawa type Iterative scheme for asymptotically quasi- nonexpansive mapping. Computer and Mathematics with Applications, 49, 1905-1912.

Wang, C. and Liu, L., 2009. Convergence theorems for fixed points of uniformly quasi-Lipschitzian mappings in convex metric spaces. Nonlinear Anal., 70, 2067–2071.

Xu, B. and Noor M. A., 2002. Fixed point iterations for asymptotically nonexpansive mappings in Banach spaces. J. Math. Anal. Appl., 267, 444-453.

Yao Y., and Chen, R., 2007. Weak and strong convergence of a modified Mann iteration for asymptotically nonexpansive mappings. Nonlinear Funct. Anal. Appl., 12 (2), 307–315.

Yildirim, I. and Ozdemir M., 2009. Approximating common fixed points of asymptotically quasi-nonexpansive mappings by a new ıterative process. Arab. J. Sci. Eng., 36,393-403.

Zhao, L.C., Chang, S.S and Wang, X.R., 2013. Convergence Theorems for Total Asymptotically Nonexpansive Mappings in Hyperbolic Spaces. Journal of Applied Mathematics, 2013, , Article ID 689765.

## ÖZGEÇMİŞ

1986 yılında Erzurum'da doğdu. 2003 yılında Erzurum lisesinden mezun oldu. Aynı yıl girdiği Atatürk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2007 yılında mezun oldu. Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı'nda 2008 yılında başladığı yüksek lisans eğitimini 2011 yılında tamamladı. Aynı yıl Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı'nda doktora eğitimine TÜBİTAK burslu olarak başladı. Halen Erzincan Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.