DİTOPOLOJİK DOKU UZAYLARINDA KARDİNAL FONKSİYONLAR

Kadirhan POLAT

Doktora Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Topoloji Bilim Dalı
Doç. Dr. Tamer UĞUR
2014

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

DİTOPOLOJİK DOKU UZAYLARINDA KARDİNAL FONKSİYONLAR

Kadirhan POLAT

MATEMATİK ANABİLİM DALI
Topoloji Bilim Dalı

ERZURUM
2014

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAY FORMU

DİTOPOLOJİK DOKU UZAYLARINDA KARDİNAL FONKSİYONLAR

Doç. Dr. Tamer UĞUR danışmanlığında, Kadirhan POLAT tarafından hazırlanan bu çalışma 17/10/2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı – Topoloji Bilim Dalı'nda Doktora tezi olarak **oybirliği** ile kabul edilmiştir.

Başkan	: Prof.Dr. Ahmet IŞIK	*İmza*	:
Üye	: Prof.Dr. Ahmet KÜÇÜK	*İmza*	:
Üye	: Prof.Dr. Abdullah KOPUZLU	*İmza*	:
Üye	: Doç.Dr. Hakan ŞİMŞEK	*İmza*	:
Üye	: Doç.Dr. Tamer UĞUR	*İmza*	:

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu 23/10/2014 tarih ve 42/1459 nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. İhsan EFEOĞLU
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Doktora Tezi

DİTOPOLOJİK DOKU UZAYLARINDA KARDİNAL FONKSİYONLAR

Kadirhan POLAT

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Topoloji Bilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Tamer UĞUR

Bu çalışmada, dikardinal fonksiyon kavramı ve ditopolojik doku uzaylarının sınıflandırılmasında kullanılabilen ağırlık, koağırlık, net ağırlığı, konet ağırlığı, yoğunlaşma, koyoğunlaşma, duyarlı yoğunluk, koduyarlı koyoğunluk, pseudo karakter ve kopseudo karakter kavramları tanımlanmıştır. S ($\mathcal{P}$ veya Q) kümesi ve ditopolojik doku uzaylarında tanımladığımız dikardinal fonksiyonlar arasındaki birçok ilişki verilmiştir. Tüm ditopolojik doku uzaylarının sınıfı veya T_0, T_1, ko-T_1 ve bi-T_1 aksiyomlarından birini sağlayan bir alt sınıfı seçilerek S nin, tüm p-kümelerin $\mathcal{P}$ kümesinin ve tüm q-kümelerin Q kümesinin sınırları üzerinde bazı kullanışlı sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca, ağırlık-koyoğunlaştırıcı ve koağırlık-yoğunlaştırıcı difonksiyon çiftlerinin birbirini sınırladığı gösterilmiştir. Bununla birlikte, bir $\mathfrak{D}_1$ regüler uzayının ağırlığının ve bir $\mathfrak{D}_2$ koregüler uzayının koağırlığının sırasıyla en çok $2^{pd(\mathfrak{D}_1)}$ ve $2^{co\text{-}pd(\mathfrak{D}_2)}$ kardinale sahip olduğu gösterilmiştir.

2014, 97 sayfa

Anahtar Kelimeler: Doku uzayı, Ditopoloji, Ditopolojik doku uzayı, Kardinal fonksiyon, Kardinal sabit, Dikardinal fonksiyon, Dikardinal sabit.

ABSTRACT

Doctoral Thesis

CARDINAL FUNCTIONS ON DITOPOLOGICAL TEXTURE SPACES

Kadirhan POLAT

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Discipline of Topology

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Tamer UĞUR

In this study, the concept of dicardinal function, and then weight, coweight, densification, codensification, net weight, conet weight, precise density, coprecise density, pseudo character, copseudo character which are able to be used in classifying of ditopological texture spaces are defined. It is given a considerable number of relationships between the set S ($\mathcal{P}$ or Q) and dicardinal functions that we defined in ditopological texture spaces. By choosing the subclasses satisfying axiom T_0, T_1, co-T_1, bi-T_1 the class of all ditopological texture spaces, some useful results on bounds of S, the set $\mathcal{P}$ of all p-sets and the set Q of all q-sets are obtained. Furthermore, it is shown that the pairs of the difunctions weight-codensification and coweight-densification restrict each others. Besides, it is shown that the density of a regular space $\mathfrak{D}_1$ and the codensity of a coregular space $\mathfrak{D}_2$ have at most the cardinality $2^{pd(\mathfrak{D}_1)}$ and $2^{co\text{-}pd(\mathfrak{D}_2)}$, respectively.

2014, 97 pages

Keywords: Texture space, Ditopology, Ditopological texture space, Cardinal function, Cardinal invariant, Dicardinal function, Dicardinal invariant.

TEŞEKKÜR

Doktora tezi olarak sunduğum bu çalışma, Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde hazırlanmıştır.

Tez hazırlama sürecinde yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen tez danışmanım Sayın Doç. Dr. Tamer UĞUR'a teşekkürlerimi arz ederim.

Üniversitemizin Topoloji Anabilim Dalı Öğretim Üyeleri'nden Sayın Prof. Dr. Ahmet Küçük, Sayın Prof. Dr. Abdullah KOPUZLU ve İlköğretim Matematik Eğitimi Anabilim Dalı Öğretim Üyesi Sayın Prof. Dr. Ahmet IŞIK'a teşekkürlerimi arz ederim.

Bilgi ve tecrübeleriyle tez çalışmama ivme kazandıran Sayın Yrd. Doç. Dr. Ceren Sultan ELMALI'ya teşekkürlerimi arz ederim.

Her zaman için bana tam destek veren ve güvenlerini hissettiren aileme ve varlığıyla huzur veren nişanlıma sonsuz minnettarlığımı dile getirmek isterim.

Kadirhan POLAT
Ekim, 2014

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\neg$	Mantıksal değil işlemi
$\forall$	Evrensel niceleyici
$\exists$	Varlıksal niceleyici
$\exists!$	Teklik niceleyicisi
$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \xi, \varsigma$	Ordinal
Ord	Ordinallerin sınıfı
Ard	Ardıl ordinallerin sınıfı
Lim	Limit ordinallerin sınıfı
ω	En küçük sonsuz kardinal
$\kappa, \lambda, \mu, \nu, \rho$	Kardinal
Card	Kardinallerin sınıfı
$\lvert x \rvert$	x kümesinin kardinali
$\mathcal{P}(x)$	x kümesinin kuvvet kümesi
${}^{x}2$	x kümesinden $\{0,1\}$ kümesine tanımlı fonksiyonların kümesi
ICard	Sonsuz kardinallerin sınıfı
κ^{+}	κ kardinalinin ardılı
$\aleph_0$	En küçük sonsuz kardinal
$\aleph_1$	En küçük sayılamaz kardinal
$\kappa + \lambda$	κ ve λ nın kardinal toplamı
$\kappa . \lambda$	κ ve λ nın kardinal çarpımı
${}^{x}\mathrm{y}$	x kümesinden y kümesine tanımlı fonksiyonların kümesi
κ^{λ}	κ kardinalinin λ kuvveti (üsteli)
$[x]^{\lambda}$	Kardinali λ olan x kümesinin alt kümelerinin sınıfı
$[x]^{\leq\lambda}$	Kardinali en çok λ olan x kümesinin alt kümelerinin sınıfı
$\wedge A$	A kümesinin en büyük alt sınırı

$\bigvee A$	A kümesinin en küçük üst sınırı
$x \wedge y$	$\sup\{x, y\}$
$x \vee y$	$\inf\{x, y\}$
$(S, \mathcal{S})$	Doku uzayı
$(S, \mathcal{S}, \sigma)$	Tümleyenli doku uzayı
P_s	p-küme
Q_s	q-küme
$çek(A)$	A nın çekirdeği
$\bar{P}_{(s,t)}$	$\mathcal{P}(S) \times \mathcal{T}$ çarpım dokusunun bir p-kümesi
$\bar{Q}_{(s,t)}$	$\mathcal{P}(S) \times \mathcal{T}$ çarpım dokusunun bir q-kümesi
$\bar{P}_{(t,s)}$	$\mathcal{P}(T) \times \mathcal{S}$ çarpım dokusunun bir p-kümesi
$\bar{Q}_{(t,s)}$	$\mathcal{P}(T) \times \mathcal{S}$ çarpım dokusunun bir q-kümesi
(r, R)	Dibağıntı
$r^{\leftarrow}$	r bağıntısının tersi
$R^{\leftarrow}$	R kobağıntısının tersi
$(r, R)^{\leftarrow}$	(r, R) dibağıntısının tersi
$r^{\rightarrow}A$	r bağıntısının A-kesiti
$R^{\rightarrow}A$	R kobağıntısının A-kesiti
$r^{\leftarrow}B$	r bağıntısının B-önkesiti
$R^{\leftarrow}B$	R kobağıntısının B-önkesiti
$(q, Q) \circ$	(p, P) ve (q, Q) dibağıntılarının bileşkesi
(f, F)	Difonksiyon
$f^{\rightarrow}A$	A kümesinin (f, F) difonksiyonu altındaki görüntüsü
$F^{\rightarrow}A$	A kümesinin (f, F) difonksiyonu altındaki kogörüntüsü
$f^{\leftarrow}B$	B kümesinin (f, F) difonksiyonu altındaki ters görüntüsü
$F^{\leftarrow}B$	B kümesinin (f, F) difonksiyonu altındaki ters kogörüntüsü
τ	Topoloji
κ	Kotopoloji

(τ, κ)	Ditopoloji
$(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$	Ditopolojik doku uzayı
$(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa, \sigma)$	Tümleyenli ditopolojik doku uzayı
$]A[$	A nın içi
$[A]$	A nın kapanışı
$(\tau \cup \kappa)^{\vee}$	$\tau \cup \kappa$ sınıfının elemanlarının keyfi en küçük üst sınırlarının kümesi
$(\tau \cup \kappa)^{\cap}$	$\tau \cup \kappa$ sınıfının elemanlarının keyfi arakesitlerinin kümesi
$\lvert X \rvert$	X topolojik uzayının kardinali
$o(X)$	$\lvert \tau \rvert + \omega$
$w(X)$	X topolojik uzayının ağırlığı
$d(X)$	X topolojik uzayının yoğunluğu
$RO(X)$	X topolojik uzayının regüler açık alt kümelerinin sınıfı
$nw(X)$	X topolojik uzayının net ağırlığı
$\psi(X)$	X in pseudo karakteri
$o(\mathfrak{D})$	$\lvert \tau \rvert + \omega$
$c(\mathfrak{D})$	$\lvert \kappa \rvert + \omega$
$oc(\mathfrak{D})$	$\lvert \tau \cup \kappa \rvert + \omega$
$w(\mathfrak{D})$	$\mathfrak{D}$ ditopolojik doku uzayının ağırlığı
$co\text{-}w(\mathfrak{D})$	$\mathfrak{D}$ ditopolojik doku uzayının koağırlığı
$r(\mathfrak{D})$	$\mathfrak{D}$ ditopolojik doku uzayının yoğunlaşması
$co\text{-}r(\mathfrak{D})$	$\mathfrak{D}$ ditopolojik doku uzayının koyoğunlaşması
$A^{\rtimes}$	A nın kapanışının içi
$A^{\ltimes}$	A nın içinin kapanışı
$RO(\mathfrak{D})$	$\mathfrak{D}$ ditopolojik doku uzayının regüler açık kümelerinin sınıfı
$RC(\mathfrak{D})$	$\mathfrak{D}$ ditopolojik doku uzayının regüler kapalı kümelerinin sınıfı
$pd(\mathfrak{D})$	$\mathfrak{D}$ ditopolojik doku uzayının duyarlı yoğunluğu
$co\text{-}pd(\mathfrak{D})$	$\mathfrak{D}$ ditopolojik doku uzayının koduyarlı koyoğunluğu
$nw(\mathfrak{D})$	$\mathfrak{D}$ ditopolojik doku uzayının net ağırlığı

$co\text{-}nw(\mathfrak{D})$	$\mathfrak{D}$ ditopolojik doku uzayının konet ağırlığı
$\Psi(\mathfrak{D})$	$\mathfrak{D}$ ditopolojik doku uzayının pseudo karakteri
co-$\Psi(\mathfrak{D})$	$\mathfrak{D}$ ditopolojik doku uzayının kopseudo karakteri

1. GİRİŞ

Küme teorisine en yakın olan kardinal sabitler, küme teorisini temel alan genel topolojide önemli bir role sahiptir. Kardinal sabitler topolojik uzayların sınıflandırılmasında en kullanışlı araçlardır. Kardinal sabitlerle sınıflandırılmış bazı önemli topolojik uzay sınıflarından örnek verilirse ayrılabilir uzaylar, kompakt uzaylar ve sayılabilir bir tabana sahip topolojik uzaylar ilk akla gelenlerdendir. Bunun yanı sıra, kardinal sabitler kullanılarak topolojik özellikler nicel olarak karşılaştırılabilir ve onlarla ilgili mevcut sonuçlar genellenebilir.

1920'den bu yana birçok araştırmacı kardinal fonksiyonlar teorisinin gelişimine katkı yapmıştır. 1920'nin sonlarında Alexandroff ve Urysohn (1929), her kompakt mükemmel normal uzayın $\leq 2^{\omega}$ kardinale sahip olduğunu gösterdiler. Čech ve Pospíšil (1938)'in elde ettiği sonuçlardan birisi şunu ifade eder: Her kompakt, birinci sayılabilir uzay $\leq \omega$ ya da $\geq 2^{\omega}$ kardinale sahiptir. 1940'larda Hewitt (1946), Marczewski (1947) ve Pondiczery (1944) tarafından gösterilen bir sonuç ise en fazla 2^{ω} ayrılabilir uzayın çarpımının da yine bir ayrılabilir uzay olduğunu ifade eder. 1965'de De Groot'un elde ettiği sonuçlardan birisi Alexandroff ve Urysohn'un yukarıda belirtilen sonucunu genelleştirmiştir: Her alt uzayı Lindelöf olan bir Hausdorff uzay $\leq 2^{\omega}$ kardinale sahiptir. 1969'da Arhangel'skii, her Lindelöf, birinci sayılabilir, Hausdorff uzayın $\leq 2^{\omega}$ kardinale sahip olduğunu göstermiştir.

Brown (1993) tarafından sunulan fuzzy yapı kavramı Brown ve Ertürk (2000) tarafından geliştirilerek doku uzayı ismini aldı. Bu yapı, tümleyenden bağımsız olarak matematiksel kavramların incelenmesini mümkün kılar. Doku uzayının bu yapısından hareket edilerek, bir doku uzayı üzerinde verilecek uygun bir topolojinin iç ve kapanış kavramlarının dualitesinin varlığının korunamayacağı sezgisel olarak açıktır. Bu ise açık küme aksiyomlarının ve kapalı küme aksiyomlarının ikisini birden sağlamak zorunda olmayan bir topoloji anlamına gelir. Brown'un ditopoloji tanımı tümleyenden ve açık-kapalı küme aksiyomlarının birbirinden bağımsızlığına imkân vermektedir.

Üç makaleden oluşan çalışmada ise, Brown *et al.* 2004'de ilk ikisini, 2006'da ise son çalışmasını sunmuştur. Bunlardan ilki 'Temel Kavramlar' başlığıyla yayınlanmıştır. Yazarlar kategorik ortamda ditopolojik uzaylarda dibağıntı, difonksiyon kavramlarının sistematik bir formunu ve dfTex kategorisini sunmuşlardır. İkinci çalışmada, ditopolojik doku uzayların dfDitop kategorisi ve bisürekli difonksiyon kavramı tanımlanmıştır. Üçüncü çalışmanın konusu ise genel ditopolojik doku uzaylarında ayırma aksiyomları üzerinedir. Brown ve Gohar (2009) ditopolojik ortamda kompaktlığı çalışmıştır.

Bu tezde, dikardinal fonksiyon kavramı verildikten sonra ditopolojik doku uzaylarının sınıflandırılmasında en kullanışlı araçlardan olan ağırlık, koağırlık, net ağırlığı, konet ağırlığı, yoğunlaşma, koyoğunlaşma, duyarlı yoğunluk, koduyarlı koyoğunluk, pseudo karakter ve kopseudo karakter tanımlanmıştır. S ($\mathcal{P}$ veya $\mathcal{Q}$) kümesi ve ditopolojik doku uzaylarında tanımlanan yukarıdaki dikardinal fonksiyonlar arasında nasıl bir ilişkinin olduğu sorusu doğaldır. Bu soru üzerinden hareketle bu çalışmada, ditopolojik doku uzayları için ağırlık, koağırlık, net ağırlığı, konet ağırlığı, yoğunlaşma, koyoğunlaşma, duyarlı yoğunluk, koduyarlı koyoğunluk, pseudo karakter, kopseudo karakter dikardinal fonksiyonları incelenmiştir.

Sunulan bu tez, Kuramsal Temeller, Materyal ve Yöntemler, Araştırma Bulguları ve Sonuçlar bölümlerinden oluşmaktadır.

Kuramsal Temeller bölümü, 'Kardinaller' ve 'Doku Uzayları' başlıklarından oluşmaktadır. 'Kardinaller' bölümündeki aksiyomatik küme teorisi, ordinal (sıral) ve kardinal sayılar başlıklarında bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir. 'Doku Uzayları' bölümünde doku uzayının temel kavramları ve doku uzayları üzerinde ditopoloji kavramı ve sonrasında bu konuyla alakalı bazı tanım ve teoremler verilmiştir.

Materyal ve Yöntemler bölümünde, genel topolojik uzaylarda bilinen bazı kardinal fonksiyon kavramlarına yer verilmiştir. Bu kavramların tüm topolojik uzayların sınıfı (ya da belirli bir ayırma aksiyomunu sağlayan alt sınıfı) için topolojik uzayın kardinali üzerinde ya da topolojinin kardinali üzerindeki sınırlamalarıyla ilgili bazı teoremler ispatlarıyla birlikte verilmiştir.

Araştırma Bulguları bölümünde, ditopolojik doku uzaylarında dikardinal fonksiyon tanımı verilmiştir. Daha sonra, ağırlık, koağırlık, net ağırlığı, konet ağırlığı, yoğunlaşma, koyoğunlaşma, duyarlı yoğunluk, koduyarlı koyoğunluk, pseudo karakter ve kopseudo karakter kavramları verilmiştir. Tüm ditopolojik uzayların sınıfı veya belirli bir alt sınıfı için tanımlanan dikardinal fonksiyonlarla ilgili bazı önemli teoremler ispatlanmıştır.

Sonuçlar bölümünde, Araştırma Bulguları'ndaki teorem ve sonuçlar özet halinde verilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Kardinaller

2.1.1. Aksiyomatik küme teorisi

Aksiyomatik olarak küme teorisinin inşası için aşağıdaki on aksiyoma ihtiyaç duyulur (Bernays 1991).

Aksiyom (Boş Kümenin Varlığı) 2.1.1.1: Herhangi bir eleman ihtiva etmeyen küme vardır. Yani,

$$\exists x \forall y \neg y \in x$$

dir.

Aksiyom (Genişleme) 2.1.1.2: Aynı elemanlara sahip iki küme eşittir. Yani,

$$\forall x \forall x' \left(\forall y (y \in x \Leftrightarrow y \in x') \Rightarrow x = x'\right)$$

dir.

Aksiyom (Çiftleme) 2.1.1.3: Herhangi küme çifti verildiğinde, sadece bu kümeleri eleman olarak kabul eden bir küme vardır. Yani,

$$\forall x \forall y \exists z \forall u \big(u \in z \Leftrightarrow (u = x \vee u = y)\big)$$

dir.

$z = \{x, y\}$ gösterimi,

$$\forall u\big(u \in z \Leftrightarrow (u = x \vee u = y)\big)$$

formülüne denk olarak alınırsa çiftleme aksiyomu,

$$\forall x \forall y \exists z \; z = \{x, y\}$$

olarak yazılır.

Aksiyom (Birleşim) 2.1.1.4: Bir küme verildiğinde, sadece bu kümenin her bir elemanının elemanlarını eleman olarak kabul eden bir küme vardır. Yani,

$$\forall x \exists y \forall z\big(z \in y \Leftrightarrow \exists \mathrm{w}(w \in x \wedge z \in w)\big)$$

dir.

Aksiyom (Alt Küme) 2.1.1.4: Keyfi bir özellik ve bir küme verildiğinde, sadece bu kümenin verilen özelliği sağlayan elemanlarını eleman olarak kabul eden bir küme vardır. Yani herhangi bir φ formülü için,

$$\forall x \exists y \forall z \left(z \in y \Leftrightarrow \big(z \in x \wedge \varphi(z)\big)\right)$$

dir.

Aksiyom (Kuvvet Kümesi) 2.1.1.5: Bir küme verildiğinde, sadece bu kümenin tüm alt kümelerini eleman olarak kabul eden bir küme vardır. Yani,

$$\forall x \exists y \forall z\big(z \in y \Leftrightarrow \forall w(w \in z \Rightarrow w \in x)\big)$$

dir.

Tanım 2.1.1.6: Herhangi a, b, c kümeleri için $\varphi(a, b)$ ve $\varphi(a, c)$ den $b = c$ sonucu çıkıyorsa φ özelliğine fonksiyonel denir (Holz *et al*. 2009).

Aksiyom (Yer Değiştirme) 2.1.1.7: Keyfi bir fonksiyonel özellik ve bir küme verildiğinde, bu fonksiyonel özelliği bu kümedeki bir elemanla birlikte sağlayan elemanları eleman olarak kabul eden bir küme vardır. Yani herhangi bir φ formülü için,

$$\forall A \left(\forall x \exists!\, y\big(x \in A \Rightarrow \varphi(x, y)\big)\right) \Rightarrow \exists B \forall z \left(z \in B \Leftrightarrow \exists x\big(x \in A \wedge \varphi(x, z)\big)\right)$$

dir.

Aksiyom (Sonsuzluk) 2.1.1.8: Boş kümeyi ve her a elemanı için $a \cup \{a\}$ yı eleman olarak kabul eden bir küme vardır. Yani,

$$\exists x\big(\emptyset \in x \wedge \forall y(\, y \in x \Rightarrow y \cup \{y\} \in x)\big)$$

dir.

Aksiyom (Kurulum) 2.1.1.9: Boştan farklı bir küme ortak elemanları olmayan bir elemanı vardır. Yani,

$$A \neq \emptyset \Rightarrow \exists x(x \in A \wedge A \cap x = \emptyset)$$

dir.

Aksiyom (Seçim) 2.1.1.10: Elemanlarından biri boş küme olan ve elemanları ikişerli ayrık olan bir küme verildiğinde bu kümenin her bir elemanıyla bir ve yalnız bir ortak elemanı olan bir küme vardır. Yani,

$$\forall x\left(\left(\emptyset \in x \wedge \forall u, v \in x(u \neq v \Rightarrow u \cap v = \emptyset)\right) \Rightarrow \exists z \forall u \in x \exists w(u \cap z = \{w\})\right)$$

dir.

2.1.2. Ordinal sayılar

Tanım 2.1.2.1: Bir A sınıfının her elemanı A nın bir alt kümesi ise, yani,

$$\forall x \forall y\big((y \in x \wedge x \in A) \Rightarrow y \in A\big)$$

veya buna denk olarak,

$$\forall x(x \in A \Rightarrow x \subseteq A)$$

önermesi geçerli ise A ya geçişmeli denir (Schlöder 2013).

Tanım 2.1.2.2: Tüm elemanları geçişmeli olan geçişmeli bir kümeye bir ordinal sayı veya ordinal denir ve $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \xi, \varsigma$ harflerinden biri ile gösterilirler. Tüm ordinallerin sınıfı Ord ile gösterilir (Schlöder 2013).

Buna göre yukarıdaki tanım aşağıdaki şekilde de verilebilir:

$$\alpha \in \mathrm{Ord} :\Leftrightarrow \text{'}\alpha \text{ geçişmeli'} \wedge (\forall \beta \in \alpha \text{ '}\beta \text{ geçişmeli'})$$

dir. Ordinal tanımından $\emptyset$ nin bir ordinal olduğu açıktır. $0 \coloneqq \emptyset$ olarak tanımlanır (Schlöder 2013).

Teorem 2.1.2.3: α bir ordinal ve $\beta \in \alpha$ ise β bir ordinaldir (Holz *et al*. 2009).

Tanım 2.1.2.4: α bir küme olsun. $\alpha + 1 \coloneqq a \cup \{a\}$ olarak tanımlanır (Schlöder 2013).

Burada aslında $+1(\alpha) = \alpha + 1$ olarak tanımlı $+1 : \mathrm{Ord} \to \mathrm{Ord}$ birli işleminin varlığına işaret edilir.

Teorem 2.1.2.5: α bir ordinal ise $\alpha + 1$ ordinaldir (Schlöder 2013).

Tanım 2.1.2.6: α ve β iki ordinal olsun. Bu durumda,

$$\alpha < \beta :\Leftrightarrow \alpha \in \beta$$

olarak tanımlanır (Levy 2012).

Teorem 2.1.2.7: Her α ordinali için $\alpha < \alpha + 1$ dir (Levy 2012).

Teorem 2.1.2.8: $(\mathrm{Ord}, <)$ tam(lineer) sıralıdır. Yani,

1) $\forall\alpha \;\; \alpha \nless \alpha$ (sınırlı),

2) $\forall\alpha\forall\beta\forall\gamma \;\; \alpha < \beta \wedge \beta < \gamma \Rightarrow \alpha < \gamma$ (geçişmeli),

3) $\forall\alpha\forall\beta \;\; \alpha < \beta \vee \beta < \alpha \vee \alpha = \beta$ (lineer)

dir (Tarski 1956).

Teorem 2.1.2.9: Her $\alpha \neq 0$ ordinali için $0 < \alpha$ dır. Yani 0 en küçük ordinaldir (Enderton 1977).

Tanım 2.1.2.10: α bir ordinal sayı olsun. $\alpha = \beta + 1$ olacak şekilde bir β ordinali varsa α ordinaline ardıl ordinal denir. Tüm ardıl ordinallerin sınıfı Ard ile gösterilir (Holz *et al*. 2009).

Buna göre yukarıdaki tanım aşağıdaki şekilde de verilebilir:

$$\alpha \in \text{Ard} :\Leftrightarrow \exists \beta \in \text{Ord}(\alpha = \beta + 1)$$

dir (Holz *et al*. 2009).

Tanım 2.1.2.11: α bir ordinal sayı olsun. α ordinali hiçbir ordinal sayının ardılı değilse α ordinaline limit ordinal denir. Tüm limit ordinallerin sınıfı Lim ile gösterilir (Holz *et al*. 2009)

Buna göre yukarıdaki tanım aşağıdaki şekilde de verilebilir:

$$\alpha \in \text{Lim} :\Leftrightarrow \alpha \neq 0 \wedge \big(\forall \beta \in \text{Ord}(\alpha \neq \beta + 1)\big)$$

dir (Holz *et al*. 2009).

Teorem 2.1.2.12: Her α ordinali için ya $\alpha = 0$ ya $\alpha \in \text{Ard}$ ya da $\alpha \in \text{Lim}$ dir (Sierpiński 1958).

Teorem 2.1.2.13: Her α, β ordinalleri için $\beta < \alpha + 1$ ise $\beta \leq \alpha$ dır. Yani $\beta < \alpha \vee \beta = \alpha$ dır (Sierpiński 1958).

Teorem 2.1.2.14: Her α, β ordinalleri için $\beta < \alpha$ ise $\beta + 1 \leq \alpha$ dır (Sierpiński 1958).

Teorem 2.1.2.15: α, β iki ordinal olsun. $\beta = \alpha + 1$ olması için gerek ve yeter şart $\alpha < \gamma < \beta$ şartını sağlayan herhangi bir γ ordinalinin olmamasıdır. Yani,

$$\beta = \alpha + 1 \Leftrightarrow \forall \gamma \in \mathrm{Ord} \ \neg(\alpha < \gamma < \beta)$$

dır (Ergun 2005).

Teorem 2.1.2.16: α bir ordinal olsun. $\alpha \in \mathrm{Lim}$ olması için gerek ve yeter şart $\alpha \neq 0$ ve her $\beta < \alpha$ için $\beta + 1 < \alpha$ dır. Yani,

$$\alpha \in \mathrm{Lim} \Leftrightarrow \big(\alpha \neq 0 \wedge (\forall \beta < \alpha \ \ \beta + 1 < \alpha)\big)$$

dır (Ergun 2005).

Teorem 2.1.2.17: φ ordinallerin bir özelliği olsun. Bu durumda,

1) $\varphi(\emptyset)$ (taban adımı),

2) $\forall \alpha \in \mathrm{Ard} \ \ \varphi(\alpha) \Rightarrow \varphi(\alpha + 1)$ (ardıl adım),

3) $\forall \alpha \in \mathrm{Lim} \ \forall \beta < \alpha \ \ \varphi(\beta) \Rightarrow \varphi(\alpha)$ (limit adım)

şartları sağlanıyorsa $\forall \alpha \in \mathrm{Ord}$ için $\varphi(\alpha)$ korunur (Schlöder 2013).

Tanım 2.1.2.18: 0 ı içeren ve $+1$ işlemi altında kapalı olan en küçük küme ω ile gösterilir. Yani,

$$\omega := \bigcap \{ w \in \mathrm{Ord} \mid 0 \in w \wedge \forall v \in w \ \ v + 1 \in w \}$$

dır (Ergun 2005).

Teorem 2.1.2.19: ω en küçük limit ordinaldir (Ergun 2005).

Tanım 2.1.2.20: 1 ordinali $1 \coloneqq 0 + 1 = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$ olarak tanımlanır (Holz *et al*. 2009).

Tanım 2.1.2.21: α, β, γ ordinaller olsun. Ordinal toplam aşağıdaki gibi yinelemeli olarak tanımlanır.

1) $\alpha + 0 = \alpha$,

2) $\beta \in$ Ard ve $\beta = \gamma + 1$ ise $\alpha + \beta \coloneqq (\alpha + \gamma) + 1$,

3) $\beta \in$ Lim ise $\alpha + \beta \coloneqq \bigcup_{\gamma < \beta}(\alpha + \gamma)$

dır (Schlöder 2013).

Tanım 2.1.2.22: α, β, γ ordinaller olsun. Ordinal çarpım aşağıdaki gibi yinelemeli olarak tanımlanır.

1) $\alpha . 0 = 0$,

2) $\beta \in$ Ard ve $\beta = \gamma + 1$ ise $\alpha . \beta \coloneqq (\alpha . \gamma) + \alpha$,

3) $\beta \in$ Lim ise $\alpha . \beta \coloneqq \bigcup_{\gamma < \beta}(\alpha . \gamma)$

dır (Holz *et al*. 2009).

Tanım 2.1.2.23: α, β, γ ordinaller olsun. Ordinal üstel aşağıdaki gibi yinelemeli olarak tanımlanır.

1) $\alpha^0 = 1$,

2) $\beta \in$ Ard ve $\beta = \gamma + 1$ ise $\alpha^\beta \coloneqq (\alpha^\gamma).\alpha$,

3) $\beta \in$ Lim ise $\alpha^\beta \coloneqq \bigcup_{\gamma<\beta}(\alpha^\gamma)$

dır (Holz *et al*. 2009).

Teorem 2.1.2.24: A ordinallerin bir kümesi ise $\bigcup A$ bir ordinaldir (Holz *et al*. 2009).

Teorem 2.1.2.25: Her α, β ordinalleri için $\alpha + \beta$, $\alpha.\beta$ ve α^β ordinallerdir (Levy 2012).

Tanım 2.1.2.26: A ordinallerin bir kümesi olsun. A nın supremumu,

$$\sup A \coloneqq \min\{\alpha \in \mathrm{Ord} \mid \forall\beta \in A \;\; \beta \leq \alpha\}$$

olarak tanımlanır (Bourbaki 1998).

Teorem 2.1.2.27: A ordinallerin bir kümesi olsun. $\sup A = \bigcup A$ dır (Holz *et al*. 2009).

Teorem 2.1.2.28: α, β, γ ordinaller olsun. Aşağıdakiler sağlanır:

1) a) $0 + \alpha = \alpha = \alpha + 0$ b) $\beta \leq \alpha + \beta$

c) $\beta < \gamma \Rightarrow \alpha + \beta < \alpha + \gamma$ d) $\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$

e) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$

2) a) $0.\alpha=0=\alpha.0$ b) $1.\alpha=\alpha=\alpha.1$

c) $0<\alpha \wedge \beta<\gamma \Rightarrow \alpha.\beta<\alpha.\gamma$ d) $\alpha\leq\beta \Rightarrow \alpha.\gamma\leq\beta.\gamma$

e) $(\alpha.\beta).\gamma=\alpha.(\beta.\gamma)$

3) a) $\beta\neq 0 \Rightarrow 0^{\beta}=0$ b) $1^{\beta}=1$

c) $1<\alpha \wedge \beta<\gamma \Rightarrow \alpha^{\beta}<\alpha^{\gamma}$ d) $\alpha\leq\beta \Rightarrow \alpha^{\gamma}\leq\beta^{\gamma}$

e) $1<\alpha \Rightarrow \beta\leq\alpha^{\beta}$ f) $\alpha^{\beta+\gamma}=\alpha^{\beta}.\alpha^{\gamma}$

g) $\left(\alpha^{\beta}\right)^{\gamma}=\alpha^{\beta.\gamma}$

dır (Tarski 1956).

Teorem 2.1.2.29: α,β iki ordinal olsun. Aşağıdakiler sağlanır.

1) $\alpha\leq\beta$ ise $\alpha+\gamma=\beta$ olacak şekilde bir ve yalnız bir γ ordinali vardır.

2) $\beta\neq 0$ ise $\alpha=\beta.\xi+\eta$ ve $\eta<\beta$ olacak şekilde bir ve yalnız bir ξ ve η ordinal çifti vardır.

3) $\alpha\neq 0$ ve $\beta>1$ ise $\alpha=\beta^{\sigma}.\tau+\gamma \wedge 1\leq\tau<\beta \wedge \gamma<\beta^{\sigma}$ olacak şekilde bir ve yalnız bir σ, τ ve γ ordinal üçlüsü vardır (Holz *et al*. 2009).

2.1.3. Kardinal sayılar

Teorem 2.1.3.1: $(x,\prec)$ iyi sıralı olsun. Bu durumda, bir ve yalnız bir α ordinali ve f fonksiyon çifti için $f : (x,\prec) \to (\alpha,\in)$ izomorfizmdir (Ergun 2005).

Teorem 2.1.3.2: Aşağıdaki ifadeler denktir.

1) Seçim aksiyomu

2) İyi sıralama ilkesi: Her x kümesi için $(x,\prec)$ iyi sıralı olacak şekilde bir $\prec$ bağıntısı vardır.

3) $\forall x \forall y \exists f \big(f : x \to y$ bire-bir $\vee$ $f : y \to x$ bire-bir$\big)$,

4) $\forall x \forall y \big((x \neq \emptyset \wedge y \neq \emptyset) \Rightarrow \exists f (f : x \to y$ örten $\vee f : y \to x$ örten$)\big)$

dir (Ergun 2005).

Tanım 2.1.3.3: Kendisinden daha küçük ordinaller ile aralarında bire-bir örten bir fonksiyon bulunmayan ordinale kardinal sayı veya kısaca kardinal denir ve $\kappa, \lambda, \mu, \nu, \rho$ harflerinden biri ile gösterilirler. Tüm kardinallerin sınıfı Card ile gösterilir (Holz *et al*. 2009).

Buna göre yukarıdaki tanım aşağıdaki şekilde de verilebilir:

$$\kappa \in \mathrm{Card} :\Leftrightarrow \neg\big(\exists \alpha < \kappa\ \exists f (f : \kappa \to \alpha \text{ bire-bir örten})\big)$$

(Holz *et al*. 2009).

x bir küme olsun. Seçim aksiyomu ve Teorem 2.1.3.2 ye göre $(x, \prec)$ iyi sıralı olacak şekilde bir $\prec$ bağıntısı vardır. x iyi sıralanabilir olduğundan Teorem 2.1.3.1 e göre x ile aralarında bire-bir örten bir fonksiyon bulunan ordinaller vardır. Bu ordinallerin en küçüğünün bir kardinal olduğu açıktır. Bu bilgiler ışığında aşağıdaki tanım verilir.

Tanım 2.1.3.4: x bir küme olsun. x ile aralarında bire-bir örten bir fonksiyon bulunan ordinallerin en küçüğüne x in kardinal sayısı veya kısaca kardinali denir ve $|x|$ ile gösterilir.

Buna göre yukarıdaki tanım aşağıdaki şekilde de verilebilir:

$$|x| := \min\{\alpha \in Ord \mid \exists f(x \to \alpha \text{ bire-bir örten})\}$$

dir (Engelking 1989).

Kardinal tanımından, her x kümesi için $|x| \in \mathrm{Card}$ olduğu açıktır. Yine kardinal tanımından $\forall \alpha \in \mathrm{Ord}$ $|\alpha| \leq \alpha$ geçerlidir. Ayrıca $\alpha \in \mathrm{Card} \Rightarrow |\alpha| = \alpha$ geçerlidir. $\big(\alpha, \beta \in Card \wedge \exists f\big(f : \alpha \to \beta \text{ bire-bir örten}\big)\big) \Rightarrow \alpha = \beta$ geçerlidir.

Tanım 2.1.3.5: x bir küme olsun. $|x|$ den x e bire-bir örten bir fonksiyona x in bir numaralandırması denir (Enderton 1977).

Teorem 2.1.3.6: x, y iki küme olsun. $f : x \to y$ ve $g : y \to x$ bire-bir fonksiyonları varsa bu durumda x ile y arasında bire-bir örten bir fonksiyon vardır (Bernays 1991).

Teorem 2.1.3.7: x, y iki küme olsun. $x \subseteq y$ ise x den y ye bire-bir bir fonksiyon vardır (Ergun 2005).

Teorem 2.1.3.8: x, y iki küme olsun. Aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

1) $|x| = |y| \Leftrightarrow \exists f\big(f : x \to y$ bire-bir örten$\big)$,

2) $|x| \leq |y| \Leftrightarrow \exists f\big(f : x \to y$ bire-bir$\big)$,

3) $x \neq \emptyset \Rightarrow \big(|x| \leq |y| \Leftrightarrow \exists f(f : y \to x$ örten$)\big)$

dir (Holz *et al*. 2009).

Teorem 2.1.3.9: $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{Card}$ ise $\sup \mathcal{A} = \bigcup \mathcal{A} \in \mathrm{Card}$ dir (Ergun 2005).

Teorem 2.1.3.10: x bir küme olsun. Bu durumda, aşağıdakiler geçerlidir.

1) $|x| < |\mathcal{P}(x)|$,

2) ${}^{x}2 \coloneqq \{f \mid f\colon x \to \{0,1\}\}$ olmak üzere $|\mathcal{P}(x)| = |{}^{x}2|$,

3) $\forall \kappa \in Card\ \exists \lambda \in Card\ \ \kappa < \lambda$

dir (Juhász 1980).

Tanım 2.1.3.11: κ bir kardinal olsun. $\kappa < \omega$ ise κ ya sonlu kardinal denir. $\kappa \geq \omega$ ise κ ya sonsuz kardinal denir. Sonsuz kardinallerin sınıfı ICard ile gösterilir (Enderton 1977).

ω nın her elemanının bir kardinal olduğu açıktır. Ayrıca en küçük sonsuz kardinal ω dır.

Teorem 2.1.3.10 3) e göre bir κ kardinali için onun ardılından bahsedebiliriz.

Tanım 2.1.3.12: κ bir kardinal olsun. κ dan büyük en küçük kardinale κ nın kardinal ardılı veya kısaca ardılı denir ve κ^{+} ile gösterilir (Sierpiński 1958).

Teorem 2.1.3.13: Ord sınıfından ICard sınıfına tanımlı bir ve yalnız bir $\in$-izomorfizmi tanımlıdır (Holz *et al*. 2009).

Bu teoreme göre aşağıdaki tanımı verelim.

Tanım 2.1.3.14: Ord sınıfından ICard sınıfına tanımlı bir ve yalnız bir $\in$-izomorfizmine alef ($aleph$) fonksiyonu denir ve $\aleph$ ile gösterilir. $\alpha \in \mathrm{Ord}$ için $\aleph(\alpha)$ gösterimi yerine $\aleph_\alpha$ kullanılır. Özel olarak $\aleph_0$ en küçük sonsuz kardinaldir. Yani $\aleph_0 = \omega$ ve $\aleph_1$ en küçük sayılamaz kardinaldir. Yani $\aleph_1 = (\aleph_0)^{+}$ dır. Bazen $\aleph_\alpha$ yerine ω_α gösterimi kullanılır (Ergun 2005).

Teorem 2.1.3.15: Aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

1) κ bir sonsuz kardinal ise $\kappa = \aleph_\alpha$ olacak şekilde bir α ordinali vardır.

2) $\alpha < \beta$ ise $\aleph_\alpha < \aleph_\beta$ dir.

3) $\aleph_0 = \omega$, $\aleph_{\alpha+1} = (\aleph_\alpha)^{+}$, $\lambda \in \mathrm{Lim}$ ise $\aleph_\lambda = \sup\{\aleph_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$ dir (Ergun 2005).

Tanım 2.1.3.16: κ, λ iki kardinal olsun. Bu durumda,

$$\kappa + \lambda := |\kappa \times \{0\} \cup \lambda \times \{1\}| \text{ ve } \kappa . \lambda := |\kappa \times \lambda|$$

kardinallerine sırasıyla κ ve λ nın kardinal toplamı ve kardinal çarpımı denir (Holz *et al*. 2009).

Tanım 2.1.3.17: x, y iki küme olsun. Bu durumda, ${}^{x}\mathrm{y} \coloneqq \{f \mid f\colon x \to y\}$ olarak tanımlanır (Schlöder 2013).

Tanım 2.1.3.18: κ, λ iki kardinal olsun. Bu durumda,

$$\kappa^{\lambda} \coloneqq \left| {}^{\lambda}\kappa \right|$$

olarak tanımlanan kardinale κ kardinalinin λ kuvveti veya üsteli denir (Enderton 1977).

Teorem 2.1.3.10 1) ve 2) ye göre $\forall \kappa \in \mathrm{Card}\ \ \kappa < 2^{\kappa}$ ve $\kappa^{+} \leq 2^{\kappa}$ sonucu verilir.

Teorem (Continuum Hipotezi) 2.1.3.19: $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ dir (Enderton 1977).

Teorem (Genelleştirilmiş Continuum Hipotezi) 2.1.3.20: $\forall \alpha \in \mathrm{Ord}\ \ 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ (Enderton 1977).

Teorem 2.1.3.21: x ve y, $|x| = \kappa$ ve $|y| = \lambda$ olacak şekilde iki küme olsun. Bu durumda,

1) $\kappa + \lambda = |x \times \{0\} \cup y \times \{1\}|$,

2) $\kappa . \lambda = |x \times y|$,

3) $\kappa^{\lambda} = \left| {}^{y}\mathrm{x} \right|$

olur (Holz *et al*. 2009).

Teorem 2.1.3.22: $\diamond$, ordinal toplam, ordinal çarpım veya ordinal üstel olsun. α, β ordinallerinden biri sıfırdan farklı diğeri sonsuz ise,

$$|\alpha \diamond \beta| \leq \max\{|\alpha|, |\beta|\}$$

dir (Holz *et al*. 2009).

Teorem 2.1.3.23: $\kappa, \lambda, \mu, \nu$ kardinaller olsun. Aşağıdakiler sağlanır.

1) a) $(\kappa + \lambda) + \mu = \kappa + (\lambda + \mu)$ b) $\kappa + \lambda = \lambda + \kappa$

2) a) $(\kappa . \lambda) . \mu = \kappa . (\lambda . \mu)$ b) $\kappa . \lambda = \lambda . \kappa$

c) $\kappa . 0 = 0$ d) $\kappa . 1 = \kappa$

e) $\kappa . (\lambda + \mu) = \kappa . \lambda + \kappa . \mu$

3) a) $\kappa^{\lambda + \mu} = \kappa^{\lambda} . \kappa^{\mu}$ b) $\left(\kappa^{\lambda}\right)^{\mu} = \kappa^{\lambda . \mu}$

c) $(\kappa . \lambda)^{\mu} = \kappa^{\mu} . \lambda^{\mu}$ d) $\kappa^0 = 1$ ve $\kappa \neq 0$ için $0^{\kappa} = 0$

e) $\kappa^1 = \kappa, 1^{\kappa} = 1$ f) $\kappa^2 = \kappa . \kappa$

4) $\kappa \leq \mu$ ve $\lambda \leq \nu$ ise

a) $\kappa + \lambda \leq \mu + \nu$ b) $\kappa . \lambda \leq \mu . \nu$

c) $\lambda \neq 0 \Rightarrow \kappa^{\lambda} \leq \mu^{\nu}$

dir (Tarski 1956).

Teorem 2.1.3.24: κ, λ kardinallerinden biri sıfırdan farklı diğeri sonsuz ise,

$$\kappa + \lambda = \kappa . \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$$

dır (Holz *et al*. 2009).

Tanım 2.1.3.25: a bir küme olsun. Bu durumda,

$$[a]^{\lambda} \coloneqq \{x \subseteq a \mid |x| = \lambda\},$$

$$[a]^{\leq \lambda} \coloneqq \{x \subseteq a \mid |x| \leq \lambda\}$$

olarak tanımlanır (Juhász 1980).

Teorem 2.1.3.26: a, $|a| = \kappa$ olacak şekilde sonsuz bir küme ve λ bir kardinal olsun. Bu durumda, $\lambda \leq \kappa$ ise $\left|[a]^{\lambda}\right| = \left|[a]^{\leq \lambda}\right| = |a|^{\lambda} = \kappa^{\lambda}$ ve $\lambda > \kappa$ ise $\left|[a]^{\lambda}\right| = \left|[a]^{\leq \lambda}\right| = 0$ dır (Juhász 1980).

2.2. Doku Uzayları

2.2.1. Temel kavramlar

Bu kısımda verilen tanım, teorem ve örnekler için bazı kaynaklardan faydalanılmıştır (Birkhoff 1967; Munkres 1975; Enderton 1977; Gierz *et al.* 1980; Bernays 1991; Bourbaki 1998; Willard 2004; Levy 2012).

Tanım 2.2.1.1: A ve B kümeleri ve $a \in A$, $b \in B$ elemanları verilsin. $(a, b) \coloneqq \{\{a\}, \{a, b\}\}$ şeklinde tanımlanan kümeye bir sıralı ikili denir.

Tanım 2.2.1.2: A ve B iki küme olsun. $A \times B \coloneqq \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$ şeklinde tanımlanan kümeye A ve B kümelerinin (kartezyen) çarpımı denir.

Tanım 2.2.1.3: A ve B iki küme olsun. $R \subseteq A \times B$ alt kümesine bir A ve B kümeleri arasında bir bağıntı ya da kısaca bağıntı denir. Özel olarak bir $R \subseteq A \times A$ kümesine A üzerinde bir bağıntıdır denir.

Tanım 2.2.1.4: A bir küme ve $\leq$, A üzerinde bir bağıntı olsun. $\forall x, y, z \in A$ için,

1) $x \leq x$,

2) $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$,

3) $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$

şartları sağlanırsa $\leq$ bağıntısına A üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı ve $(A, \leq)$ sıralı ikilisine de bir kısmi sıralı küme denir.

Tanım 2.2.1.5: $(A, \leq)$ bir kısmi sıralı küme olsun. $\forall x, y \in A$ için $x \leq y \vee y \leq x$ şartı sağlanıyorsa $\leq$ bağıntısına A üzerinde bir tam sıralama bağıntısı ve $(A, \leq)$ sıralı ikilisine bir tam sıralı küme denir.

Tanım 2.2.1.6: $(A, \leq)$ bir kısmi sıralı küme $m, M \in A$ olsun. $\forall x \in A$ için $x \leq m \Rightarrow m = x$ şartı sağlanıyorsa m ye A nın bir minimal elemanı denir. $\forall x \in A$ için $M \leq x \Rightarrow M = x$ şartı sağlanıyorsa M ye A nın bir maksimal elemanı denir.

Tanım 2.2.1.7: $(A, \leq)$ bir kısmi sıralı küme $m, M \in A$ olsun. $\forall x \in A$ için $m \leq x$ şartı sağlanıyorsa m ye A nın en küçük (minimum) elemanı denir. $\forall x \in A$ için $x \leq M$ şartı sağlanıyorsa M ye A nın en büyük (maksimum) elemanı denir.

Tanım 2.2.1.8: $(A, \leq)$ bir kısmi sıralı küme, $B \subseteq A$ ve $m, M \in A$ olsun. olsun. $\forall x \in B$ için $m \leq x$ şartı sağlanıyorsa m ye B nin bir alt sınırı denir. $\forall x \in B$ için $x \leq M$ şartı sağlanıyorsa M ye B nin bir üst sınırı denir.

Teorem 2.2.1.9: $(A, \leq)$ bir kısmi sıralı küme, $B \subseteq A$ olsun. B nin alt sınırlarının kümesinin en büyük elemanı ve üst sınırlarının kümesinin en küçük elemanı tektir.

Tanım 2.2.1.10: $(A, \leq)$ bir kısmi sıralı küme, $B \subseteq A$ olsun. B nin tüm alt sınırlarının kümesinin en büyük elemanına B nin infremum'u (ebas'ı) denir ve $\inf B$ ile gösterilir. B nin tüm üst sınırlarının kümesinin en küçük elemanına B nin supremum'u (eküs'ü) denir ve $\sup B$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.1.11: $(A, \leq)$ bir kısmi sıralı küme olsun. $\forall x, y \in A$ için $\inf\{x, y\}$ ve $\sup\{x, y\}$ varsa $(A, \leq)$ kısmi sıralı kümesine bir latis (kafes) denir. Bundan böyle $\inf\{x, y\}$ yerine $x \wedge y$ ve $\sup\{x, y\}$ yerine $x \vee y$ gösterimleri kullanılacaktır.

Tanım 2.2.1.12: $(A, \leq)$ bir kısmi sıralı küme olsun. $\forall B \subseteq A$ için $\inf B$ ve $\sup B$ varsa $(A, \leq)$ kısmi sıralı kümesine bir tam latis (tam kafes) denir. Bundan böyle $\inf B$ yerine $\bigwedge B$ ve $\sup B$ yerine $\bigvee B$ gösterimleri kullanılacaktır.

Örnekler 2.2.1.13: İlk üç örnekte verilen sıralama doğal sıralamadır.

1) $(\mathbb{N}, \leq)$ bir latistir. Ancak $\bigvee \mathbb{N}$ olmadığından tam latis değildir.

2) $(\mathbb{R}, \leq)$ bir latistir. Ancak $\bigwedge \mathbb{R}$ ve $\bigvee \mathbb{R}$ olmadığından tam latis değildir.

3) $([0,1], \leq)$ bir tam latistir.

4) Boştan farklı bir X kümesi için $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ bir tam latistir. Çünkü $\forall \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ için $\bigwedge \mathcal{A} = \bigcap \mathcal{A} \in \mathcal{P}(X)$ ve $\bigvee \mathcal{A} = \bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{P}(X)$ dir.

Teorem 2.2.1.14: X boştan farklı bir küme, $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}(X)$ olsun. Bu durumda,

1) $\forall \mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}$ için $\bigcap \mathcal{A} \in \mathcal{L}$,

2) $X \in \mathcal{L}$

şartları sağlanırsa $(\mathcal{L}, \subseteq)$ ye tam latis denir.

Sonuç 2.2.1.15: X boştan farklı bir küme, $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}(X)$ olsun. $(\mathcal{L}, \subseteq)$ bir tam latis ise,

$$\bigvee \mathcal{A} = \bigcup \mathcal{A} \Leftrightarrow \bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{L}$$

dir.

Tanım 2.2.1.16: $(L, \leq)$ bir tam latis olsun. Bu durumda, $\forall x, y, z \in L$ için,

1) $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$,

2) $(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$

şartları sağlanırsa $(L, \leq)$ ye dağılımlı latis denir.

Tanım 2.2.1.17: $(L, \leq)$ bir tam latis olsun. Keyfi bir I indis kümesi, $\forall i \in I$ için keyfi J_i indis kümeleri ve $\forall j \in J_i$ için $a_j^i \in L$ olmak üzere,

$$\bigwedge_{i \in I} \bigvee_{j \in J_i} a_j^i = \bigvee_{\gamma \in \prod_{i \in I} J_i} \bigwedge_{i \in I} a_{\gamma(i)}^i$$

şartı sağlanırsa $(L, \leq)$ ye tamamen dağılımlı latis denir.

Teorem 2.2.1.18: Boştan farklı bir X kümesi için $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ tam latisi tamamen dağılımlıdır.

2.2.2. Doku uzayı

Bu kısımda verilen tanım, teorem ve örnekler için bazı kaynaklardan faydalanılmıştır (Brown 1993a, 1993b; Brown and Diker 1998; Brown and Ertürk 2000a, 2000b; Brown *et al.* 2004a, 2004b; Yıldız 2005; Uğur 2007).

Tanım 2.2.2.1: S boştan farklı bir küme ve $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(S)$ olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanırsa $(S, \mathcal{S})$ ikilisine doku uzayı denir.

1) $\emptyset, S \in \mathcal{S}$, $(\mathcal{S}, \subseteq)$ bir tam latis ve $\mathcal{S}$ deki sup ve inf işlemleri, $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ latisindeki kesişim ve birleşim işlemleriyle şu biçimde ilişkilidir: Her I indis kümesi ve $\forall i \in I$ için $A_i \in \mathcal{S}$ olmak üzere,

$$\bigwedge_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} A_i,$$

ve her sonlu I indis kümesi ve $\forall i \in I$ için $A_i \in \mathcal{S}$ olmak üzere,

$$\bigvee_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} A_i$$

dir.

2) $\mathcal{S}$ tamamen dağılımlıdır.

3) $\mathcal{S}$, S nin noktalarını ayırır. Yani her $\forall s_1, s_2 \in S$ ve $\exists A \in \mathcal{S}$ için,

$$s_1 \neq s_2 \Rightarrow (s_1 \in A \not\ni s_2 \vee s_1 \notin A \ni s_2)$$

dir.

Tanım 2.2.2.2: $(S,\mathcal{S})$ bir doku uzayı ve $\sigma : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ bir fonksiyon olsun. $\forall A, B \in \mathcal{S}$ için,

1) $\sigma\big(\sigma(A)\big) = A$,

2) $A \subseteq B \Rightarrow \sigma(B) \subseteq \sigma(A)$

şartları sağlanırsa σ ya $\mathcal{S}$ üzerinde bir tümleyen işlemi ve $(S,\mathcal{S},\sigma)$ üçlüsüne tümleyenli doku uzayı denir.

Tanım 2.2.2.3: $(S,\mathcal{S})$ bir doku uzayı ve $s \in S$ olsun. $P_s \coloneqq \bigcap\{A \in \mathcal{S} \mid s \in A\}$ kümesine p-küme ve $Q_s \coloneqq \bigvee\{A \in \mathcal{S} \mid s \notin A\} = \bigvee\{P_t \mid s \notin P_t\}$ kümesine de q-küme denir.

Tanım 2.2.2.4: $(S,\mathcal{S})$ bir doku uzayı ve $A \in \mathcal{S}$ olsun. Bu durumda,

$$çek(A) \coloneqq \bigcap\big\{\bigcup\{A_i \mid i \in I\} \mid \{A_i \mid i \in I\} \subseteq \mathcal{S}, A = \bigvee\{A_i \mid i \in I\}\big\}$$

olarak tanımlanan kümeye A nın çekirdeği denir.

Teorem 2.2.2.5: $(S,\mathcal{S})$ bir doku uzayı olsun. $\forall A \in \mathcal{S}$ için,

$$A = \bigvee_{s \in A} P_s$$

dir.

Teorem 2.2.2.6: Herhangi bir $(S,\mathcal{S},\sigma)$ tümleyenli doku uzayı için aşağıdaki eşitlikler korunur.

1) Her I indis kümesi ve $\forall i \in I$ için $A_i \in \mathcal{S}$ olmak üzere,

$$\sigma(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigvee_{i\in I} \sigma(A_i) \;\; ve \; \sigma(\bigvee_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} \sigma(A_i),$$

2) $\forall A \in \mathcal{S}$ için $A = \bigcap_{t\in\sigma(A)} \sigma(P_t)$,

3) $\forall s \in S$ için $P_s = \bigcap_{t\in\sigma(P_s)} \sigma(P_t)$,

4) $\forall s, t \in S$ için $t \in \sigma(P_s) \Leftrightarrow s \in \sigma(P_t)$

dir.

Tanım 2.2.2.7: $(S, \mathcal{S})$ bir doku uzayı olsun. $\forall s \in S$ için $P_s \nsubseteq Q_s$ ise $\mathcal{S}$ dokusuna sade doku denir.

Teorem 2.2.2.8: $(S, \mathcal{S})$ bir doku uzayı olsun. Aşağıdakiler denktir.

1) $(S, \mathcal{S})$ bir sade dokudur.

2) $\forall \mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}$ için $\bigcup \mathcal{A} = \bigvee \mathcal{A}$ dır.

3) $\mathcal{S}$ birleşim işlemi altında kapalıdır.

Tanım 2.2.2.9: $(S, \mathcal{S})$ bir doku uzayı olsun. $\forall s, t \in S$ için $Q_s \subseteq Q_t \Rightarrow P_s \subseteq P_t$ oluyorsa $(S, \mathcal{S})$ doku uzayına koayrılmış denir.

Teorem 2.2.2.10: $(S, \mathcal{S})$ bir doku uzayı olsun. Aşağıdaki ifadeler doğrudur.

1) $\forall s \in S,\ \forall A \in \mathcal{S}$ için $s \notin A \Rightarrow A \subseteq Q_s \Rightarrow s \notin çek(A)$,

2) $\forall A \in \mathcal{S}$ için $çek(A) = \{s \in S \mid A \nsubseteq Q_s\}$,

3) Herhangi bir I indis kümesi, $\forall i \in I$ için $A_i \in \mathcal{S}$ olmak üzere,

$$çek(\bigvee_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} çek(A_i),$$

4) $\forall A \in \mathcal{S}$ için $A = \min\{B \in \mathcal{S} \mid çek(A) \subseteq B\}$,

5) $\forall A, B \in \mathcal{S}$ için $A \nsubseteq B \Rightarrow A \nsubseteq Q_s$ ve $P_s \nsubseteq B$ olacak şekilde bir $s \in S$ vardır,

6) $\forall A \in \mathcal{S}$ için $A = \bigcap\{Q_s \mid P_s \nsubseteq A\}$,

7) $\forall A \in \mathcal{S}$ için $A = \bigvee\{P_s \mid A \nsubseteq Q_s\}$

dir.

Teorem 2.2.2.11: $(S, \mathcal{S})$ bir doku uzayı olsun. Aşağıdaki ifadeler doğrudur.

1) $\forall A \in \mathcal{S}$ için $çek(A) \in \mathcal{S} \Leftrightarrow çek(A) = A$,

2) $\forall s \in S$ için $s \notin çek(S) \Leftrightarrow Q_s = S$,

3) $\forall A \in \mathcal{S}$ için $çek(A) = \{s \in çek(S) \mid A \nsubseteq Q_s\}$,

4) $\forall A, B \in \mathcal{S}, \forall s \in S$ için $A \subseteq B \Leftrightarrow (A \nsubseteq Q_s \Rightarrow B \nsubseteq Q_s)$

dir.

Teorem 2.2.2.12: $(S, \mathcal{S}, \sigma)$ bir tümleyenli doku uzayı olsun. Aşağıdaki ifadeler doğrudur. $\forall A, B \in \mathcal{S}$ için,

1) $A = \bigvee\{\sigma(Q_s) \mid A \not\subseteq \sigma(P_s)\} = \bigcap\{\sigma(P_s) \mid \sigma(Q_s) \not\subseteq A\}$ dir.

2) $A \not\subseteq B \Rightarrow A \not\subseteq \sigma(P_s)$ ve $\sigma(Q_s) \not\subseteq B$ olacak şekilde bir $s \in S$ vardır.

Tanım 2.2.2.13: $(S_i, \mathcal{S}_i)_{i\in\{1,2\}}$ birer doku uzayı, $\theta : S_1 \to S_2$ ve $\hat{\theta} : \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ birer fonksiyon olsun. θ bire-bir ve örten, $\hat{\theta}(A) = \theta(A)$ ve $\hat{\theta}$ bire-bir ve örtense θ fonksiyonuna bir doku izomorfizmi, aralarında bir izomorfizm olan dokulara ise izomorf dokular denir ve $(S_1, \mathcal{S}_1) \approx (S_2, \mathcal{S}_2)$ olarak gösterilir.

Teorem 2.2.2.14: $\theta : (S_1, \mathcal{S}_1) \to (S_2, \mathcal{S}_2)$ bir doku izomorfizmi, I bir indis kümesi ve $\{A_i \mid i \in I\} \subseteq \mathcal{S}_1$ olsun. Aşağıdaki ifadeler doğrudur.

1) $\theta(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} \theta(A_i)$,

2) $\theta(\bigvee_{i\in I} A_i) = \bigvee_{i\in I} \theta(A_i)$

dir.

Tanım 2.2.2.15: $(S, \mathcal{S})$ bir doku uzayı ve $V \in \mathcal{S}$ olsun. $\mathcal{V} := \{A \cap V \mid A \in \mathcal{S}\}$ olmak üzere $(V, \mathcal{V})$ ikilisine $(S, \mathcal{S})$ doku uzayının bir temel alt dokusu denir.

Tanım 2.2.2.16: I bir indeks kümesi, $(S_i, \mathcal{S}_i)_{i\in I}$ doku uzayları ve $S = \prod_{i\in I} S_i$, S_i lerin bilinen çarpım kümesi olsun. Her $k \in I$ ve $A \subseteq S_k$ için,

$$Y_i = \begin{cases} A & i = k \text{ ise} \\ S_i & i \neq k \text{ ise} \end{cases}$$

olmak üzere $E(k,A) = \prod_{i\in I} Y_i$ verilsin.

$$\varepsilon = \left\{ \bigcup_{k\in K} E(k,L_k) \mid K \subseteq I, L_k \in \mathcal{S}_k \right\}$$

olarak tanımlansın. ε kümesinin elemanlarının keyfi birleşimlerinden oluşan kümeyi $\mathcal{S}$ ile gösterelim. Bu durumda, $(S,\mathcal{S})$ ye $(S_i,\mathcal{S}_i)_{i\in I}$ doku uzaylarının çarpım dokusudur denir ve $\mathcal{S} = \otimes_{i\in I} \mathcal{S}_i$ ile gösterilir.

$(S,\mathcal{S})$ ve $(T,\mathcal{T})$ iki doku olsun. Bu durumda, $\mathcal{P}(S)\times\mathcal{T}$ çarpım dokusunun p-küme ve q-kümeleri sırasıyla $\bar{P}_{(s,t)}$ ve $\bar{Q}_{(s,t)}$ ile gösterilir ve $\bar{P}_{(s,t)} = \{s\}\times P_t$ ve $\bar{Q}_{(s,t)} = \big((S-\{s\})\times T\big) \cup (S\times Q_t)$ dir. $\mathcal{P}(T)\times\mathcal{S}$ çarpım dokusunun p-küme ve q-kümeleri sırasıyla $\bar{P}_{(t,s)}$ ve $\bar{Q}_{(t,s)}$ ile gösterilir.

Teorem 2.2.2.17: $\mathcal{P}(S)\times\mathcal{T}$ ve $\mathcal{P}(T)\times\mathcal{S}$ çarpım dokuları için aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

1) $\bar{P}_{(s,t)} \not\subseteq \bar{Q}_{(s,t')} \Leftrightarrow P_t \not\subseteq Q_{t'}$,

2) $\bar{P}_{(t,s)} \not\subseteq \bar{Q}_{(t,s')} \Leftrightarrow P_s \not\subseteq Q_{s'}$

dir.

Tanım 2.2.2.18: $(S,\mathcal{S})$ ve $(T,\mathcal{T})$ iki doku ve $r \in \mathcal{P}(S)\times\mathcal{T}$ olsun. Bu durumda,

1) $\big(r \not\subseteq \bar{Q}_{(s,t)} \wedge P_{s'} \not\subseteq Q_s\big) \Rightarrow r \not\subseteq \bar{Q}_{(s',t)}$,

2) $\exists s' \in S \;\; r \not\subseteq \bar{Q}_{(s,t)} \Rightarrow \big(P_s \not\subseteq Q_{s'} \wedge r \not\subseteq \bar{Q}_{(s',t)}\big)$

şartları sağlanıyorsa r ye $(S, \mathcal{S})$ den $(T, \mathcal{T})$ ye bir bağıntı denir.

Tanım 2.2.2.19: $(S, \mathcal{S})$ ve $(T, \mathcal{T})$ iki doku ve $R \in \mathcal{P}(S) \times \mathcal{T}$ olsun. Bu durumda,

1) $\left(\bar{P}_{(s,t)} \nsubseteq R \wedge P_s \nsubseteq Q_{s'}\right) \Rightarrow \bar{Q}_{(s',t)} \nsubseteq R$,

2) $\exists s' \in S \;\; \bar{P}_{(s,t)} \nsubseteq R \Rightarrow \left(P_{s'} \nsubseteq Q_s \wedge \bar{P}_{(s',t)} \nsubseteq R\right)$

şartları sağlanıyorsa R ye $(S, \mathcal{S})$ den $(T, \mathcal{T})$ ye bir kobağıntı denir.

Tanım 2.2.2.20: $(S, \mathcal{S})$ ve $(T, \mathcal{T})$ iki doku olsun. r ve R sırasıyla $(S, \mathcal{S})$ den $(T, \mathcal{T})$ ye bağıntı ve kobağıntı olsun. Bu durumda, (r, R) çiftine $(S, \mathcal{S})$ den $(T, \mathcal{T})$ ye bir dibağıntı denir.

Tanım 2.2.2.21: $(S, \mathcal{S})$ ve $(T, \mathcal{T})$ iki doku ve r, $(S, \mathcal{S})$ den $(T, \mathcal{T})$ ye bağıntı olsun. Bu durumda,

$$r^{\leftarrow} = \bigcap \left\{\bar{Q}_{(s,t)} \mid r \nsubseteq \bar{Q}_{(s,t)}\right\}$$

kobağıntısına r nin tersi denir.

Tanım 2.2.2.22: $(S, \mathcal{S})$ ve $(T, \mathcal{T})$ iki doku ve R, $(S, \mathcal{S})$ den $(T, \mathcal{T})$ ye kobağıntı olsun. Bu durumda,

$$R^{\leftarrow} = \bigvee \left\{\bar{P}_{(t,s)} \mid \bar{P}_{(s,t)} \nsubseteq R\right\}$$

bağıntısına R nin tersi denir.

Tanım 2.2.2.23: $(S,\mathcal{S})$ ve $(T,\mathcal{T})$ iki doku ve (r,R), $(S,\mathcal{S})$ den $(T,\mathcal{T})$ ye dibağıntı olsun. $(r,R)^{\leftarrow}=(R^{\leftarrow},r^{\leftarrow})$ olarak tanımlanan $(r,R)^{\leftarrow}$ dibağıntısına (r,R) nin tersi denir.

Teorem 2.2.2.24: (r,R), $(S,\mathcal{S})$ den $(T,\mathcal{T})$ ye dibağıntı olsun. Bu durumda,

1) $\forall s\in S$ ve $\forall t\in T$ için $r\not\subseteq \overline{Q}_{(s,t)} \Leftrightarrow \overline{P}_{(t,s)}\not\subseteq r^{\leftarrow}$ ve $\overline{P}_{(s,t)}\not\subseteq R \Leftrightarrow R^{\leftarrow}\not\subseteq \overline{Q}_{(t,s)}$ dir.

2) $(r^{\leftarrow})^{\leftarrow}=r$ ve $(R^{\leftarrow})^{\leftarrow}=R$ dir.

3) (m,M), $(S,\mathcal{S})$ den $(T,\mathcal{T})$ ye dibağıntı olsun. $r\subseteq m \Leftrightarrow m^{\leftarrow}\subseteq r^{\leftarrow}$ ve $R\subseteq M \Leftrightarrow M^{\leftarrow}\subseteq R^{\leftarrow}$ dir.

Tanım 2.2.2.25: $(S,\mathcal{S})$ ve $(T,\mathcal{T})$ iki doku, (r,R), $(S,\mathcal{S})$ den $(T,\mathcal{T})$ ye dibağıntı ve $A\subseteq S$ olsun. Bu durumda,

$$r^{\rightarrow}A=\bigcap\left\{Q_t \mid \forall s\in S\ r\not\subseteq \bar{Q}_{(s,t)} \Rightarrow A\subseteq Q_s\right\}\in\mathcal{T}$$

kümesine r nin A-kesiti ve

$$R^{\rightarrow}A=\bigvee\left\{P_t \mid \forall s\in S\ \bar{P}_{(s,t)}\not\subseteq R \Rightarrow P_s\subseteq A\right\}\in\mathcal{T}$$

kümesine R nin A-kesiti denir.

Tanım 2.2.2.26: $(S,\mathcal{S})$ ve $(T,\mathcal{T})$ iki doku, (r,R), $(S,\mathcal{S})$ den $(T,\mathcal{T})$ ye dibağıntı ve $B\subseteq T$ olsun. $(r^{\leftarrow})^{\rightarrow}B\in\mathcal{S}$ kümesine *r nin B-önkesiti* denir ve $r^{\leftarrow}B$ ile gösterilir. $(R^{\leftarrow})^{\rightarrow}B\in\mathcal{S}$ kümesine *R nin B-önkesiti* denir ve $R^{\leftarrow}B$ ile gösterilir.

Teorem 2.2.2.27: (r_1,R_1) ve (r_2,R_2), $(S,\mathcal{S})$ den $(T,\mathcal{T})$ ye iki dibağıntı olsun. Bu durumda, $\forall A\in\mathcal{S}$ için,

$$r_1 = r_2 \Leftrightarrow r_1^{\rightarrow}A = r_2^{\rightarrow}A \text{ ve } R_1 = R_2 \Leftrightarrow R_1^{\rightarrow}A = R_2^{\rightarrow}A$$

dir.

Teorem 2.2.2.28: (r, R), $(S, \mathcal{S})$ den $(T, \mathcal{T})$ ye dibağıntı olsun. Bu durumda, $\forall B \in \mathcal{T}$ için,

1) $r^{\leftarrow}B = \bigvee\left\{P_s \mid \forall t \in T \;\; r \nsubseteq \overline{\mathrm{Q}}_{(s,t)} \Rightarrow P_t \subseteq B\right\}$,

2) $R^{\leftarrow}B = \bigcap\left\{Q_s \mid \forall t \in T \;\; \overline{\mathrm{P}}_{(s,t)} \nsubseteq \mathrm{R} \Rightarrow B \subseteq Q_t\right\}$

dir.

Teorem 2.2.2.29: (r, R), $(S, \mathcal{S})$ den $(T, \mathcal{T})$ ye dibağıntı olsun. Bu durumda,

1) $r \nsubseteq \overline{\mathrm{Q}}_{(s,t)} \Leftrightarrow r^{\rightarrow}P_s \nsubseteq \mathrm{Q}_{\mathrm{t}}$,

2) $\overline{\mathrm{P}}_{(s,t)} \nsubseteq \mathrm{R} \Leftrightarrow P_t \nsubseteq R^{\rightarrow}Q_s$

dir.

Teorem 2.2.2.30: (r_1, R_1) ve (r_2, R_2), $(S, \mathcal{S})$ den $(T, \mathcal{T})$ ye iki dibağıntı olsun. Bu durumda, $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{S}$, $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{T}$ için,

1) $(r_1 \subseteq r_2 \wedge A_1 \subseteq A_2) \Rightarrow r_1^{\rightarrow}A_1 \subseteq r_2^{\rightarrow}A_2$,

2) $(R_1 \subseteq R_2 \wedge A_1 \subseteq A_2) \Rightarrow R_1^{\rightarrow}A_1 \subseteq R_2^{\rightarrow}A_2$,

3) $(r_1 \subseteq r_2 \wedge B_1 \subseteq B_2) \Rightarrow r_2^{\leftarrow} B_1 \subseteq r_1^{\leftarrow} B_2$,

4) $(R_1 \subseteq R_2 \wedge B_1 \subseteq B_2) \Rightarrow R_2^{\leftarrow} B_1 \subseteq R_1^{\leftarrow} B_2$

dir.

Teorem 2.2.2.31: (r, R), $(S, \mathcal{S})$ den $(T, \mathcal{T})$ ye bir dibağıntı olsun. Bu durumda,

1) $r^{\rightarrow}\emptyset = \emptyset$ ve $R^{\rightarrow}S = T$,

2) $\forall A \in \mathcal{S}$ için $A \subseteq r^{\leftarrow}(r^{\rightarrow}A)$ ve $R^{\leftarrow}(R^{\rightarrow}A) \subseteq A$,

3) $\forall B \in \mathcal{T}$ için $r^{\rightarrow}(r^{\leftarrow}B) \subseteq B$ ve $B \subseteq R^{\rightarrow}(R^{\leftarrow}B)$,

4) $\forall \mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}$ için $r^{\rightarrow}\mathcal{A} \coloneqq \{r^{\rightarrow}A \mid A \in \mathcal{A}\}$ ve $R^{\rightarrow}\mathcal{A} \coloneqq \{R^{\rightarrow}A \mid A \in \mathcal{A}\}$ olmak üzere $r^{\rightarrow}(\bigvee\mathcal{A}) = \bigvee(r^{\rightarrow}\mathcal{A})$ ve $R^{\rightarrow}(\bigcap\mathcal{A}) = \bigcap(R^{\rightarrow}\mathcal{A})$,

5) $\forall \mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ için $r^{\leftarrow}\mathcal{B} \coloneqq \{r^{\leftarrow}B \mid B \in \mathcal{B}\}$ ve $R^{\leftarrow}\mathcal{B} \coloneqq \{R^{\leftarrow}B \mid B \in \mathcal{B}\}$ olmak üzere $r^{\leftarrow}(\bigcap\mathcal{B}) = \bigcap(r^{\leftarrow}\mathcal{B})$ ve $R^{\leftarrow}(\bigvee\mathcal{B}) = \bigvee(R^{\leftarrow}\mathcal{B})$

dir.

Tanım 2.2.2.32: $(p, P) : (S, \mathcal{S}) \rightarrow (T, \mathcal{T})$ ve $(q, Q) : (T, \mathcal{T}) \rightarrow (U, \mathcal{U})$ dibağıntıları verilsin. p ile q bağıntılarının bileşkesi,

$$q \circ p = \bigvee\{\bar{P}_{(s,u)} \mid \exists t \in T \; p \nsubseteq \bar{Q}_{(s,t)} \wedge q \nsubseteq \bar{Q}_{(t,u)}\},$$

P ile Q kobağıntılarının bileşkesi,

$$Q \circ P = \bigcap \{ \bar{Q}_{(s,u)} \mid \exists t \in T\ \bar{P}_{(s,t)} \nsubseteq \mathrm{P} \wedge \bar{P}_{(t,u)} \nsubseteq \mathrm{Q} \}$$

ve (p, P) ile (q, Q) dibağıntılarının bileşkesi,

$$(q, Q) \circ (p, P) = (q \circ p, Q \circ P)$$

olarak tanımlanır.

Teorem 2.2.2.33: $(p, P) : (S, \mathcal{S}) \to (T, \mathcal{T})$ ve $(q, Q) : (T, \mathcal{T}) \to (U, \mathcal{U})$ dibağıntıları verilsin. Bu durumda,

$$[(q, Q) \circ (p, P)]^{\leftarrow} = (p, P)^{\leftarrow} \circ (q, Q)^{\leftarrow}$$

dir.

Teorem 2.2.2.34: $(p, P) : (S, \mathcal{S}) \to (T, \mathcal{T})$ ve $(q, Q) : (T, \mathcal{T}) \to (U, \mathcal{U})$ dibağıntıları verilsin. Bu durumda,

1) $\forall A \in \mathcal{S}$ için $(q \circ p)^{\to} A = q^{\to}(p^{\to}(A))$ ve $(Q \circ P)^{\to} A = Q^{\to}(P^{\to} A)$ dır.

2) $\forall B \in \mathcal{U}$ için $(q \circ p)^{\leftarrow} B = p^{\leftarrow}(q^{\leftarrow}(B))$ ve $(Q \circ P)^{\leftarrow} B = P^{\leftarrow}(Q^{\leftarrow} B)$ dır.

Teorem 2.2.2.35: $(S, \mathcal{S}, \sigma)$ ve $(T, \mathcal{T}, \theta)$ tümleyenli doku uzayları ve (r, R), $(S, \mathcal{S})$ den $(T, \mathcal{T})$ ye bir dibağıntı olsun. Bu durumda,

1) $r' \coloneqq \bigcap \left\{ \overline{Q}_{(s,t)} \mid \exists u, v \in T\ \ r \nsubseteq \overline{Q}_{(u,v)}, \sigma(Q_s) \nsubseteq \mathrm{Q_u}, P_v \nsubseteq \theta(P_t) \right\}$ kümesi $(S, \mathcal{S}, \sigma)$ dan $(T, \mathcal{T}, \theta)$ ya bir kobağıntıdır.

2) $R' := \bigvee\{\overline{P}_{(s,t)} \mid \exists u, v \in T \ \overline{P}_{(u,v)} \nsubseteq \mathrm{R}, P_u \nsubseteq \sigma(P_s), \theta(Q_t) \nsubseteq Q_v\}$ kümesi $(S, \mathcal{S}, \sigma)$ dan $(T, \mathcal{T}, \theta)$ ya bir bağıntıdır.

Tanım 2.2.2.36: $(S, \mathcal{S}, \sigma)$ ve $(T, \mathcal{T}, \theta)$ tümleyenli doku uzayları ve (r, R), $(S, \mathcal{S})$ den $(T, \mathcal{T})$ ye bir dibağıntı olsun. Yukarıdaki teoremde tanımlanan r' kobağıntısına ve R' bağıntısına sırasıyla r bağıntısının tümleyeni ve R kobağıntısının tümleyeni denir. $(r, R)' := (R', r')$ dibağıntısına (r, R) dibağıntısının tümleyeni denir.

Teorem 2.2.2.37: $(S, \mathcal{S}, \sigma)$ ve $(T, \mathcal{T}, \theta)$ tümleyenli doku uzayları ve (r, R), $(S, \mathcal{S})$ den $(T, \mathcal{T})$ ye bir dibağıntı olsun. Bu durumda,

1) $(r')' = r$ ve $(R')' = R$ dir.

2) $(r')^{\leftarrow} = (r^{\leftarrow})'$ ve $(R')^{\leftarrow} = (R^{\leftarrow})'$ dir.

3) $\forall A \in \mathcal{S}$ için $\theta((r')^{\rightarrow}A) = r^{\rightarrow}\sigma(A)$ ve $\theta((R')^{\rightarrow}A) = R^{\rightarrow}\sigma(A)$ dır.

4) $\forall B \in \mathcal{T}$ için $r^{\leftarrow}\theta(A) = \sigma((r')^{\leftarrow}B)$ ve $R^{\leftarrow}\theta(B) = \sigma((R')^{\leftarrow}B)$ dir.

5) $(U, \mathcal{U}, \nu)$ bir tümleyenli doku uzayı ve (q, Q), $(T, \mathcal{T})$ den $(U, \mathcal{U})$ ya bir dibağıntı olsun. Bu durumda, $(q \circ r)' = q' \circ r'$ ve$(Q \circ R)' = Q' \circ R'$ dir.

Tanım 2.2.2.38: (f, F), $(S, \mathcal{S})$ den $(T, \mathcal{T})$ ye bir dibağıntı olsun. Bu durumda,

1) (D_1) $s, s' \in S$ için $P_s \nsubseteq \mathrm{Q}_{s'}$ ise $f \nsubseteq \bar{Q}_{(s,t)}$ ve $\bar{P}_{(s',t)} \nsubseteq \mathrm{F}$ olacak şekilde bir $t \in T$ vardır.

2) (D_2) $t, t' \in T$ ve $s \in S$ için $f \nsubseteq \bar{Q}_{(s,t)}$ ve $\bar{P}_{(s,t')} \nsubseteq \mathrm{F}$ ise $P_{t'} \nsubseteq \mathrm{Q}_{\mathrm{t}}$ dir.

şartları sağlanıyorsa (f, F) dibağıntısına difonksiyon denir ve $(f, F) : (S, \mathcal{S}) \to (T, \mathcal{T})$ ile gösterilir.

Teorem 2.2.2.39: (r, R), $(S, \mathcal{S})$ den $(T, \mathcal{T})$ ye bir dibağıntı olsun. Bu durumda, aşağıdaki ifadeler denktir.

1) (r, R), (D_1) şartını sağlar.

2) $\forall A \in \mathcal{S}$ için $r^{\leftarrow}(R^{\rightarrow}A) \subseteq A$ dır.

3) $\forall B \in \mathcal{T}$ için $r^{\leftarrow}B \subseteq R^{\leftarrow}B$ dir.

4) $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{S}$ için $r^{\rightarrow}A_1 \subseteq R^{\rightarrow}A_2 \Rightarrow A_1 \subseteq A_2$ dir.

Teorem 2.2.2.40: (r, R), $(S, \mathcal{S})$ den $(T, \mathcal{T})$ ye bir dibağıntı olsun. Bu durumda, aşağıdaki ifadeler denktir.

1) (r, R), (D_2) şartını sağlar.

2) $\forall B \in \mathcal{T}$ için $r^{\rightarrow}(R^{\leftarrow}B) \subseteq B$ dir.

Teorem 2.2.2.41: (f, F), $(S, \mathcal{S})$ den $(T, \mathcal{T})$ ye bir dibağıntı olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

1) (f, F) bir difonksiyondur.

2) $\forall A \in \mathcal{S}$ için $f^{\leftarrow}\big(F^{\rightarrow}(A)\big) \subseteq A \subseteq F^{\leftarrow}\big(f^{\rightarrow}(A)\big)$ ve $\forall B \in \mathcal{T}$ için $f^{\rightarrow}\big(F^{\leftarrow}(B)\big) \subseteq B \subseteq F^{\rightarrow}\big(f^{\leftarrow}(B)\big)$ dir.

3) $\forall B \in \mathcal{T}$ için $f^{\leftarrow}B = F^{\leftarrow}B$ dir.

Tanım 2.2.2.42: $(f, F) : (S, \mathcal{S}) \to (T, \mathcal{T})$ bir difonksiyon olsun. $A \in \mathcal{S}$ ve $B \in \mathcal{T}$ olsun. Bu durumda, $f^{\rightarrow}A$, $F^{\rightarrow}A$, $f^{\leftarrow}B$, $F^{\leftarrow}B$ ye sırasıyla A nın (f, F) difonksiyonu altındaki görüntüsü, kogörüntüsü, ters görüntüsü, ters kogörüntüsü denir.

Teorem 2.2.2.43: $(f, F) : (S, \mathcal{S}) \to (T, \mathcal{T})$ bir difonksiyon olsun. Bu durumda,

1) $f^{\rightarrow}\emptyset = \emptyset$ ve $F^{\rightarrow}S = T$ dir.

2) $f^{\leftarrow}\emptyset = F^{\leftarrow}\emptyset = \emptyset$ ve $f^{\leftarrow}T = F^{\leftarrow}T = S$ dir.

Teorem 2.2.2.44: $(f, F) : (S, \mathcal{S}) \to (T, \mathcal{T})$ ve $(g, G) : (T, \mathcal{T}) \to (U, \mathcal{U})$ iki difonksiyon olsun. Bu durumda, $(g, G) \circ (f, F)$ bileşkesi $(S, \mathcal{S})$ den $(U, \mathcal{U})$ ya bir difonksiyondur.

Tanım 2.2.2.45: $(f, F) : (S, \mathcal{S}) \to (T, \mathcal{T})$ bir difonksiyon olsun. Bu durumda,

1) $\forall s, s' \in S$ ve $\forall t \in T$ için $f \nsubseteq \overline{Q}_{(s,t)}$ ve $\overline{P}_{(s',t)} \nsubseteq F \Rightarrow P_s \nsubseteq Q_{s'}$ ise (f, F) difonksiyonuna bire-bir denir.

2) $\forall t, t' \in T$ için $P_t \nsubseteq Q_{t'} \Rightarrow \exists s \in S$ için $f \nsubseteq \overline{Q}_{(s,t')}$ ve $\overline{P}_{(s,t)} \nsubseteq F$ ise (f, F) difonksiyonuna örten denir.

Teorem 2.2.2.46: $(f, F) : (S, \mathcal{S}) \to (T, \mathcal{T})$ bir difonksiyon olsun. Bu durumda,

1. (f, F) nin örten olması için gerek ve yeter şart $(f, F)^{\leftarrow}$ nin (D_1) şartını sağlamasıdır.

2. (f, F) nin bire-bir olması için gerek ve yeter şart $(f, F)^{\leftarrow}$ nin (D_2) şartını sağlamasıdır.

3. (f, F) nin bire-bir ve örten olması için gerek ve yeter şart $(f, F)^{\leftarrow}$ nin bir difonksiyon olmasıdır.

Teorem 2.2.2.47: $(f, F) : (S, \mathcal{S}) \to (T, \mathcal{T})$ bir difonksiyon olsun. (f, F) difonksiyonu bire-bir ise,

1) $\forall A \in \mathcal{S}$ için $F^{\leftarrow}(f^{\rightarrow}A) = A = f^{\leftarrow}(F^{\rightarrow}A)$ dır.

2) $\forall A \in \mathcal{S}$ için $f^{\rightarrow}A \subseteq F^{\rightarrow}A$ dır.

3) $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{S}$ için $F^{\rightarrow}A_1 \subseteq f^{\rightarrow}A_2 \Rightarrow A_1 \subseteq A_2$ dir.

Teorem 2.2.2.48: $(f, F) : (S, \mathcal{S}) \to (T, \mathcal{T})$ bir difonksiyon olsun. (f, F) difonksiyonu örten ise,

1) $\forall B \in \mathcal{T}$ için $F^{\rightarrow}(f^{\leftarrow}B) = B = f^{\rightarrow}(F^{\leftarrow}B)$ dir.

2) $\forall A \in \mathcal{S}$ için $F^{\rightarrow}A \subseteq f^{\rightarrow}A$ dır.

3) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{T}$ için $f^{\leftarrow}B_1 \subseteq F^{\leftarrow}B_2 \Rightarrow B_1 \subseteq B_2$ dir.

Teorem 2.2.2.49: $(S, \mathcal{S}, \sigma)$ ve $(T, \mathcal{T}, \theta)$ tümleyenli doku uzayları, $(f, F) : (S, \mathcal{S}) \to (T, \mathcal{T})$ bir difonksiyon ve $(f, F)'$, (f, F) nin tümleyeni olsun. Bu durumda,

1) $(f, F)'$, $(S, \mathcal{S})$ den $(T, \mathcal{T})$ ye bir difonksiyondur.

2) $\forall A \in \mathcal{S}$ için $(f')^{\rightarrow}A = \theta\big(f^{\rightarrow}\sigma(A)\big)$ ve $(F')^{\rightarrow}A = \theta\big(F^{\rightarrow}\sigma(A)\big)$ dır.

3) $\forall B \in \mathcal{T}$ için $(f')^{\leftarrow}B = \sigma\big(f^{\leftarrow}\theta(B)\big)$ ve $(F')^{\leftarrow}B = \sigma\big(F^{\leftarrow}\theta(B)\big)$ dir.

2.2.3. Ditopolojik doku uzayı

Bu kısımda verilen tanım, teorem ve örnekler için bazı kaynaklardan faydalanılmıştır (Brown 1993a, 1993b; Ertürk 1993; Brown and Diker 1998; Brown *et al.* 2004; Yıldız 2005; Brown *et al.* 2006; Uğur 2007; Yıldız and Özçağ 2013).

Tanım 2.2.3.1: $(S, \mathcal{S})$ bir doku uzayı ve $\tau, \kappa \subseteq \mathcal{S}$ olsun. Bu durumda,

1) $S, \emptyset \in \tau$ ve $S, \emptyset \in \kappa$,

2) $\forall G, H \in \tau \;\; G_1 \cap G_2 \in \tau$ ve $\forall F, K \in \kappa \;\; F \cup K \in \kappa$,

3) $\forall I \; \forall i \in I \;\; G_i \in \tau \Rightarrow \bigvee_{i \in I} G_i \in \tau$ ve $\forall I \; \forall i \in I \; K_i \in \kappa \Rightarrow \bigcap_{i \in I} K_i \in \kappa$

şartları sağlanıyorsa τ ve κ ya sırasıyla $(S, \mathcal{S})$ üzerinde topoloji ve kotopoloji, (τ, κ) çiftine $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir ditopoloji ve $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ dörtlüsüne de bir ditopolojik doku uzayı denir.

Tanım 2.2.3.2: $(S, \mathcal{S}, \sigma)$ bir tümleyenli doku uzayı ve (τ, κ), $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir ditopoloji olsun. $\forall A \in \mathcal{S}$ için,

$$A \in \tau \Leftrightarrow \sigma(A) \in \kappa$$

şartı sağlanıyorsa (τ, κ) çiftine $(S, \mathcal{S}, \sigma)$ üzerinde bir tümleyenli ditopoloji ve $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa, \sigma)$ beşlisine tümleyenli ditopolojik doku uzayı denir.

Tanım 2.2.3.3: $(S_i, \mathcal{S}_i, \tau_i, \kappa_i)_{i \in \{1,2\}}$ ditopolojik uzaylar ve $(f, F) : (S_1, \mathcal{S}_1) \to (S_2, \mathcal{S}_2)$ bir difonksiyon olsun.

1) $\forall G \in \tau_2$ için $F^{\leftarrow} G \in \tau_1$ ise, (f, F) ye sürekli denir.

2) $\forall K \in \kappa_2$ için $f^{\leftarrow}K \in \kappa_1$ ise, (f, F) ye kosürekli denir.

3) (f, F) sürekli ve kosürekli ise, (f, F) ye ikili-sürekli denir.

4) $\forall G \in \tau_1$ için $f^{\rightarrow}G \in \tau_2$ ise, (f, F) ye açıktır denir.

5) $\forall G \in \tau_1$ için $F^{\rightarrow}G \in \tau_2$ ise, (f, F) ye koaçıktır denir.

6) $\forall K \in \kappa_1$ için $F^{\rightarrow}K \in \kappa_2$ ise, (f, F) ye kapalı denir.

7) $\forall K \in \kappa_1$ için $f^{\rightarrow}K \in \kappa_2$ ise, (f, F) ye kokapalı denir.

8) (f, F) difonksiyonu bire-bir, örten, ikili-sürekli, tersi ikili-sürekli ise, (f, F) difonksiyonuna bir dihomeomorfizm denir.

Tanım 2.2.3.4: $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ bir ditopolojik uzay, $\mathcal{B} \subseteq \tau$ ve $\mathcal{F} \subseteq \kappa$ olsun. Bu durumda,

1) Eğer,

$$\forall G \in \tau\ \exists \mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}\ \ G = \bigvee \mathcal{B}_0$$

şartı sağlanıyorsa, $\mathcal{B}$ ye $\mathfrak{D}$ için bir taban ve

$$\forall K \in \kappa\ \exists \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}\ \ G = \bigcap \mathcal{F}_0$$

şartı sağlanıyorsa, $\mathcal{F}$ ye $\mathfrak{D}$ için bir kotaban denir.

2) Eğer,

$$\{\bigcap\beta \mid \beta \subseteq \mathcal{B}\},\ \mathfrak{D} \text{ için bir tabandır}$$

şartı sağlanıyorsa, $\mathcal{B}$ ye $\mathfrak{D}$ için bir alttaban ve

$$\{\bigcup\beta \mid \beta \subseteq \mathcal{F}, \beta \text{ sonlu}\},\ \mathfrak{D} \text{ için bir kotabandır}$$

şartı sağlanıyorsa, $\mathcal{F}$ ye $\mathfrak{D}$ için bir koalttaban denir.

Teorem 2.2.3.5: $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ bir ditopolojik uzay olsun. Bu durumda, aşağıdaki ifadeler denktir.

1) $\mathcal{B}$, $\mathfrak{D}$ için bir tabandır.

2) $\forall G \in \tau\ \exists B \in \mathcal{B}\ \ G \nsubseteq Q_s \Rightarrow (B \nsubseteq Q_s \wedge B \subseteq G)$ dir.

3) $\forall G \in \tau\ \exists B \in \mathcal{B}\ \ G \nsubseteq Q_s \Rightarrow P_s \subseteq B \subseteq G$ dir.

Teorem 2.2.3.6: $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ bir ditopolojik uzay olsun. Bu durumda, aşağıdaki ifadeler denktir.

1) $\mathcal{F}$, $\mathfrak{D}$ için bir kotabandır.

2) $\forall K \in \kappa\ \exists F \in \mathcal{F}\ \ P_s \nsubseteq K \Rightarrow (K \subseteq F \wedge P_s \nsubseteq F)$ dir.

3) $\forall K \in \kappa\ \exists F \in \mathcal{F}\ \ P_s \nsubseteq K \Rightarrow K \subseteq F \subseteq Q_s$ dir.

Tanım 2.2.3.7: $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ bir ditopolojik uzay ve $A \in \mathcal{S}$ olsun. Bu durumda,

$$]A[\ \coloneqq \bigvee\{G \mid G \subseteq A\}$$

olarak tanımlanan kümeye A nın içi ve

$$[A] \coloneqq \bigcap\{K \mid A \subseteq K\}$$

olarak tanımlanan kümeye de A nın kapanışı denir.

Tanım 2.2.3.8: $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ bir ditopolojik uzay ve $A \in \mathcal{S}$ olsun. $[A] = S$ oluyorsa A ya $\mathfrak{D}$ de yoğun ve $]A[= \emptyset$ oluyorsa A ya $\mathfrak{D}$ de koyoğun denir.

Tanım 2.2.3.9: $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ bir ditopolojik uzay olsun. Bu durumda,

$$\forall G \in \tau \ \ G \nsubseteq Q_s \Rightarrow [P_s] \subseteq G$$

şartı sağlanıyorsa, $\mathfrak{D}$ ye R_0 denir.

$$\forall K \in \kappa \ \ P_s \nsubseteq K \Rightarrow K \subseteq]Q_s[$$

şartı sağlanıyorsa, $\mathfrak{D}$ ye ko-R_0 denir. $\mathfrak{D}$, R_0 ve ko-R_0 ise, $\mathfrak{D}$ ye bi-R_0 denir.

Tanım 2.2.3.10: $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ bir ditopolojik uzay olsun. Bu durumda,

$$\forall G \in \tau \ \ (G \nsubseteq Q_s \wedge P_t \nsubseteq G) \Rightarrow \exists H \in \tau \ \ (H \nsubseteq Q_s \wedge P_t \nsubseteq [H])$$

şartı sağlanıyorsa, $\mathfrak{D}$ ye R_1 denir.

$$\forall K \in \kappa \ \ (P_s \nsubseteq K \wedge K \nsubseteq Q_t) \Rightarrow \exists F \in \kappa \ \ (P_s \nsubseteq F \wedge]F[\nsubseteq Q_t)$$

şartı sağlanıyorsa, $\mathfrak{D}$ ye ko-R_1 denir. $\mathfrak{D}$, R_1 ve ko-R_1 ise, $\mathfrak{D}$ ye bi-R_1 denir.

Tanım 2.2.3.11: $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ bir ditopolojik uzay olsun. Bu durumda,

$$\forall G \in \tau \;\; G \nsubseteq Q_s \Rightarrow \exists H \in \tau \;\; (H \nsubseteq Q_s \wedge [H] \subseteq G)$$

şartı sağlanıyorsa, $\mathfrak{D}$ ye regüler denir.

$$\forall K \in \kappa \;\; P_s \nsubseteq K \Rightarrow \exists F \in \kappa \;\; (P_s \nsubseteq F \wedge K \subseteq \,]F[)$$

şartı sağlanıyorsa, $\mathfrak{D}$ ye koregüler denir. $\mathfrak{D}$, regüler ve koregüler ise, $\mathfrak{D}$ ye biregüler denir.

Teorem 2.2.3.12: $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ bir ditopolojik doku uzayı olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

1) $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ regülerdir.

2) $\forall s \in S \; \forall G \in \tau \; \exists H \in \tau \;\; G \nsubseteq Q_s \Rightarrow P_s \subseteq H \subseteq [H] \subseteq G$ dir.

3) $\forall G \in \tau \; \exists \mathcal{H} \subseteq \tau \;\; G = \bigvee \mathcal{H} = \bigvee\{[H] \mid H \in \mathcal{H}\}$ dir.

Teorem 2.2.3.13: $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ bir ditopolojik doku uzayı olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

1) $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ koregülerdir.

2) $\forall s \in S \; \forall K \in \kappa \; \exists F \in \kappa \;\; P_s \nsubseteq K \Rightarrow \mathrm{K} \subseteq \,]F[\, \subseteq \mathrm{F} \subseteq Q_s$ dir.

3) $\forall K \in \kappa \; \exists \mathcal{F} \subseteq \kappa \;\; K = \bigcap \mathcal{F} = \bigcap\{]F[\mid F \in \mathcal{F}\}$ dir.

Tanım 2.2.3.14: $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ bir ditopolojik uzay olsun. Bu durumda,

$(\tau \cup \kappa)^{\vee} \coloneqq \{\bigvee \mathcal{C} \mid \mathcal{C} \subseteq \tau \cup \kappa\}$ ve $(\tau \cup \kappa)^{\cap} \coloneqq \{\bigcap \mathcal{C} \mid \mathcal{C} \subseteq \tau \cup \kappa\}$

olmak üzere,

$$\forall s, t \in S\ \exists C \in (\tau \cup \kappa)^{\vee}\ \ Q_s \nsubseteq Q_t \Rightarrow P_s \nsubseteq C \nsubseteq Q_t$$

veya buna denk olarak,

$$\forall s, t \in S\ \exists C \in (\tau \cup \kappa)^{\cap}\ \ Q_s \nsubseteq Q_t \Rightarrow P_s \nsubseteq C \nsubseteq Q_t$$

şartı sağlanıyorsa, $\mathfrak{D}$ ye T_0 (Kolmogorov) denir.

Teorem 2.2.3.15: Aşağıdakiler T_0 ditopolojik uzayının karakteristik özellikleridir.

1) $\forall s, t \in S\ \exists C \in \tau \cup \kappa\ \ Q_s \nsubseteq Q_t \Rightarrow P_s \nsubseteq C \nsubseteq Q_t$,

2) $\forall s, t \in S\ \ ([P_s] \subseteq [P_t] \wedge]Q_s[\ \subseteq\ ]Q_t[\,) \Rightarrow Q_s \subseteq Q_t$

dir.

Tanım 2.2.3.16: $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ bir ditopolojik uzay olsun. $\mathfrak{D}$, T_0 ve R_0 ise $\mathfrak{D}$ ye T_1 denir. $\mathfrak{D}$, T_0 ve ko-R_0 ise $\mathfrak{D}$ ye ko-T_1 denir. $\mathfrak{D}$, T_0 ve bi-R_0 ise $\mathfrak{D}$ ye bi-T_1 denir.

Teorem 2.2.3.17: Aşağıdakiler T_1 ditopolojik uzayının karakteristik özellikleridir.

1) $\forall A \in \mathcal{S}\ \exists \mathcal{K} \subseteq \kappa\ \ A = \bigvee \mathcal{K}$,

2) $\forall s, t \in S\ \exists K \in \kappa\ \ Q_s \nsubseteq Q_t \Rightarrow P_s \nsubseteq K \nsubseteq Q_t$

dir.

Teorem 2.2.3.18: Aşağıdakiler ko-T_1 ditopolojik uzayının karakteristik özellikleridir.

1) $\forall A \in \mathcal{S}\ \exists \mathcal{G} \subseteq \tau\ \ A = \bigcap \mathcal{G}$,

2) $\forall s, t \in S\ \exists G \in \tau\ \ Q_s \nsubseteq Q_t \Rightarrow P_s \nsubseteq G \nsubseteq Q_t$

dir.

Tanım 2.2.3.19: $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ bir ditopolojik uzay olsun. $\mathfrak{D}$, T_0 ve R_1 ise, $\mathfrak{D}$ ye T_2, T_0 ve ko-R_1 ise, $\mathfrak{D}$ ye ko-T_2 ve T_0 ve bi-R_1 ise, $\mathfrak{D}$ ye bi-T_2 denir.

Teorem 2.2.3.20: $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ bir ditopolojik uzay olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

1) $\mathfrak{D}$, bi-T_2 dir.

2) $\forall s, t \in S\ \exists G \in \tau\ \exists K \in \kappa\ \ Q_s \nsubseteq Q_t \Rightarrow (G \subseteq K \wedge P_s \nsubseteq K \wedge G \nsubseteq Q_t)$ dir.

3. MATERYAL ve YÖNTEMLER

3.1. Kardinal Fonksiyonlar

Tanım (Kardinal Fonksiyon) 3.1.1: Tüm topolojik uzayların sınıfından (veya belirli bir alt sınıfından) tüm sonsuz kardinal sayıların sınıfına tanımlı bir ϕ fonksiyonu verilsin. Eğer her $(X_i, \tau_i)_{i\in\{1,2\}}$ topolojik uzay çifti için,

$$'X_1 \text{ ve } X_2 \text{ homeomorf uzaylar}' \Rightarrow \phi(X_1) = \phi(X_2)$$

şartı sağlanıyorsa, ϕ ye kardinal fonksiyon denir (Juhász 1979).

Tanım 3.1.2: (X, τ) bir topolojik uzay olsun. X deki noktaların sayısı ile ω nın kardinal toplamına X in kardinali denir ve $|X|$ ile gösterilir (Juhász 1979).

Tanım 3.1.3: (X, τ) bir topolojik uzay olsun. X in açık alt kümelerinin sayısı ile ω nın kardinal toplamına τ nun kardinali denir ve $o(X)$ ile gösterilir (Juhász 1979).

Tanım 3.1.4: (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Bu durumda,

$$w(X) \coloneqq \min\{|\mathcal{B}| \mid \mathcal{B}, \text{X için bir taban}\} + \omega$$

kardinaline X in ağırlığı denir (Juhász 1980).

Teorem 3.1.5: Her (X, τ) topolojik uzayı için,

$$w(X) \leq o(X) \leq 2^{|X|}$$

dir (Juhász 1980).

Teorem 3.1.6: Bir (X, τ) topolojik uzayı T_0 ise,

$$|X| \leq 2^{w(X)}$$

dir (Engelking 1989).

Teorem 3.1.7: Bir (X, τ) topolojik uzayı T_0 ise,

$$|X| \leq o(X)$$

dir (Kunen and Vaughan 1984).

Tanım 3.1.8: (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Bu durumda,

$$d(X) \coloneqq \min\{|D| \mid D \subseteq X, \overline{D} = X\} + \omega$$

kardinaline X in yoğunluğu denir (Kunen and Vaughan 1984).

Burada, $d(X) \leq \omega$ ise, X in ayrılabilir olduğunu söyleriz.

Teorem 3.1.9: Her (X, τ) bir topolojik uzayı için,

$$d(X) \leq |X|$$

dir (Kunen and Vaughan 1984).

Teorem 3.1.10: Her (X, τ) bir topolojik uzayı için,

$$d(X) \leq w(X)$$

dir (Engelking 1989).

Sonuç 3.1.11: Her ikinci sayılabilir uzay ayrılabilirdir (Engelking 1989).

Teorem 3.1.12: Bir (X,τ) topolojik uzayı T_2 ise,

$$|X| \leq 2^{2^{d(X)}}$$

dir (Comport 1971).

Sonuç 3.1.13: Bir (X,τ) topolojik uzayı T_2 ise,

$$d(X) \leq w(X) \leq o(X) \leq 2^{2^{2^{d(X)}}}$$

eşitsizlikleri geçerlidir (Kunen and Vaughan 1984).

Sonuç 3.1.14: Her ayrılabilir Hausdorff uzay en çok $2^{2^{\omega}}$ kardinale sahiptir ve en çok $2^{2^{2^{\omega}}}$ açık kümeye sahiptir (Kunen and Vaughan 1984).

Teorem 3.1.15: (X,τ) bir topolojik uzay ve $RO(X)$, X in tüm regüler açık alt kümelerinin sınıfı olsun. Bu durumda,

$$RO(X) \leq 2^{d(X)}$$

dir (De Groot 1965).

Bir regüler uzayda tüm regüler açık kümelerin sınıfı topoloji için bir tabandır. Bu bilgi ışığında aşağıdaki sonucu veririz.

Sonuç 3.1.16: Bir (X,τ) topolojik uzayı regüler ise,

$$w(X) \leq 2^{d(X)}$$

dir (De Groot 1965).

Tanım 3.1.17: (X,τ) bir topolojik uzay ve $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{P}(X)$ olsun. Bu durumda, $\forall G \in \tau$ $\exists \mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ için,

$$G = \bigcup \mathcal{M}$$

şartı sağlanıyorsa $\mathcal{N}$ ye X de bir net denir (Engelking 1989).

Yukarıdaki tanıma göre her taban aynı zamanda açık kümelerden oluşan bir nettir.

Tanım 3.1.18: (X,τ) bir topolojik uzay olsun. Bu durumda,

$$nw(X) \coloneqq \min\{|\mathcal{N}| \mid \mathcal{N}, X \text{ de bir ağ}\} + \omega$$

kardinaline X in net ağırlığı denir (Engelking 1989).

Teorem 3.1.19: Her (X,τ) topolojik uzayı için,

$$o(X) \leq 2^{nw(X)}$$

dir (Juhász 1980).

Sonuç 3.1.20: Her (X,τ) topolojik uzayı için,

$$d(X) \leq w(X) \leq o(X) \leq \min\{2^{|X|}, 2^{nw(X)}\}$$

dir (Juhász 1980).

Teorem 3.1.21: Her (X, τ) topolojik uzayı için,

$$d(X) \leq nw(X)$$

dir (Engelking 1989).

Teorem 3.1.22: Her (X, τ) topolojik uzayı için,

$$nw(X) \leq w(X)$$

dir (Kunen and Vaughan 1984).

Teorem 3.1.23: Her (X, τ) topolojik uzayı için,

$$nw(X) \leq |X|$$

dir (Engelking 1989).

Sonuç 3.1.24: Her (X, τ) topolojik uzayı için,

$$d(X) \leq nw(X) \leq \min\{|X|, w(X)\}$$

eşitsizlikleri geçerlidir (Juhász 1980).

Tanım 3.1.25: (X, τ) bir topolojik uzay, $A \subseteq X$ ve $\mathcal{U} \subseteq \tau$ olsun. Bu durumda,

$$A = \bigcap \mathcal{U}$$

şartı sağlanıyorsa, $\mathcal{U}$ ya A nın bir lokal ψ-tabanı denir (Kunen and Vaughan 1984).

Tanım 3.1.26: (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Bu durumda,

$$\psi(A, X) \coloneqq \min\{|\mathcal{U}| \mid \mathcal{U}, X \text{ de } A \text{ nın bir } \psi\text{- tabanı}\},$$

$$\psi(p, X) \coloneqq \psi(\{p\}, X)$$

olmak üzere,

$$\psi(X) \coloneqq \sup\{\psi(p, X) \mid p \in X\} + \omega$$

kardinaline X in pseudo karakteri denir (Kunen and Vaughan 1984).

Pseudo karakter kavramı sadece T_1 uzaylarının sınıfı için bir kardinal fonksiyondur.

Teorem 3.1.27: Bir (X, τ) topolojik uzayı T_1 ise,

$$|X| \leq nw(X)^{\psi(X)}$$

dir (Charlesworth 1977).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Dikardinal Fonksiyonlar

Bu kısımda bir doku uzayının p-kümelerinin sınıfını $\mathcal{P}$ ile q-kümelerinin sınıfını Q ile gösterilir.

Teorem 4.1.1: $(S, \mathcal{S})$ bir doku uzayı olsun. Bu durumda,

1) $|S| = |\mathcal{P}|$,

2) $(S, \mathcal{S})$ doku uzayı koayrılmış ise, $|S| = |\mathcal{Q}|$

dir (Polat *et al.* 2014).

İspat: $(S, \mathcal{S})$ bir doku uzayı olsun.

1) Doku uzayı tanımından, $\mathcal{S}$, S nin noktalarını ayırdığından $\forall s, t \in S$ için $s \neq t \Rightarrow P_s \neq P_t$ önermesi geçerlidir. Ayrıca p-küme tanımından $\forall s, t \in S$ için $P_s \neq P_t \Rightarrow s \neq t$ önermesi geçerlidir. Böylece $|S| = |\mathcal{P}|$ dir.

2) $(S, \mathcal{S})$ doku uzayı koayrılmış olsun. $s, t \in S$ farklı nokta çifti verilsin. Bu durumda, $P_s \neq P_t$ ve dolayısıyla $P_s \nsubseteq P_t$ veya $P_t \nsubseteq P_s$ olur. $(S, \mathcal{S})$, koayrılmış olduğundan $Q_s \nsubseteq Q_t$ veya $Q_t \nsubseteq Q_s$ dir; buradan $Q_s \neq Q_t$ olur. Böylece S den $\mathcal{Q}$ ya bire-bir bir fonksiyon vardır. Şimdi de $Q_s \neq Q_t$ olacak şekilde $s, t \in S$ nokta çifti verilsin. Bu durumda, $Q_s \nsubseteq Q_t$ veya $Q_t \nsubseteq Q_s$ olur. q-küme tanımından $P_s \nsubseteq P_t$ veya $P_t \nsubseteq P_s$ yazılır. Buradan $P_s \neq P_t$ ve dolayısıyla $s \neq t$ dir. Böylece $\mathcal{Q}$ dan S ye bire-bir bir fonksiyon vardır. Böylece Teorem 2.1.3.6 ve Teorem 2.1.3.8 (1) e göre $|S| = |\mathcal{Q}|$ yazılır.

Teorem 4.1.2: $(S, \mathcal{S})$ ve $(T, \mathcal{T})$ doku uzayı çifti izomorf olsun. Bu durumda,

1) $|\mathcal{P}_{(S,\mathcal{S})}| = |\mathcal{P}_{(T,\mathcal{T})}|$,

2) $|\mathcal{Q}_{(S,\mathcal{S})}| = |\mathcal{Q}_{(T,\mathcal{T})}|$.

İspat: θ, $(S, \mathcal{S})$ ve $(T, \mathcal{T})$ doku uzayları arasında bir doku izomorfizmi olsun.

1) p-küme tanımından $s \in S$ için $\theta(P_s) = \theta(\bigcap\{A \in \mathcal{S} \mid s \in A\})$ yazılır. θ, $(S, \mathcal{S})$ ve $(T, \mathcal{T})$ doku uzayları arasında bir doku izomorfizmi olduğundan Teorem 2.2.2.14 (1) e göre $\theta(P_s) = \bigcap\{\theta(A) \mid A \in \mathcal{S}, s \in A\}$ yazılır. Buradan $\theta(P_s) = \bigcap\{\theta(A) \in \mathcal{T} \mid \theta(s) \in \theta(A)\}$ yazılır. θ bire-bir ve örten olduğundan $\theta(P_s) = \bigcap\{B \in \mathcal{T} \mid \theta(s) \in B\}$ yazılır. Buradan $\theta(P_s) = P_{\theta(s)}$ olur. Yani $\theta(P_s) \in \mathcal{P}_{(T,\mathcal{T})}$ olduğu görülür. Buradan $|\mathcal{P}_{(S,\mathcal{S})}| \leq |\mathcal{P}_{(T,\mathcal{T})}|$ yazılır. θ^{-1} in de doku izomorfizmi olduğu göz önüne alındığında benzer adımlarla $t \in T$ için $\theta^{-1}(P_t) \in \mathcal{P}_{(S,\mathcal{S})}$ olduğu görülür. Buradan $|\mathcal{P}_{(T,\mathcal{T})}| \leq |\mathcal{P}_{(S,\mathcal{S})}|$ yazılır.

2) q-küme tanımından $s \in S$ için $\theta(Q_s) = \theta(\bigvee\{A \in \mathcal{S} \mid s \notin A\})$ yazılır. θ, $(S, \mathcal{S})$ ve $(T, \mathcal{T})$ doku uzayları arasında bir doku izomorfizmi olduğundan Teorem 2.2.2.14 (1) e göre $\theta(Q_s) = \bigvee\{\theta(A) \mid A \in \mathcal{S}, s \notin A\}$ yazılır. θ bire-bir olduğundan $\theta(Q_s) = \bigvee\{\theta(A) \in \mathcal{T} \mid \theta(s) \notin \theta(A)\}$ yazılır. θ bire-bir ve örten olduğundan $\theta(Q_s) = \bigvee\{B \in \mathcal{T} \mid \theta(s) \notin B\}$ yazılır. Buradan $\theta(Q_s) = Q_{\theta(s)}$ olur. Yani $\theta(Q_s) \in \mathcal{Q}_{(T,\mathcal{T})}$ dir. Buradan $|\mathcal{Q}_{(S,\mathcal{S})}| \leq |\mathcal{Q}_{(T,\mathcal{T})}|$ yazılır. θ^{-1} in de doku izomorfizmi olduğu göz önüne alındığında benzer adımlarla $t \in T$ için $\theta^{-1}(Q_t) \in \mathcal{Q}_{(S,\mathcal{S})}$ olduğu görülür. Buradan $|\mathcal{Q}_{(T,\mathcal{T})}| \leq |\mathcal{Q}_{(S,\mathcal{S})}|$ yazılır.

Tanım (Dikardinal Fonksiyon) 4.1.3: Tüm ditopolojik doku uzayların sınıfından(veya belirli bir alt sınıfından) tüm sonsuz kardinal sayıların sınıfına tanımlı bir ϕ fonksiyonu verilsin. $(S_i, \mathcal{S}_i)_{i\in\{1,2\}}$ doku uzay çifti izomorf olmak üzere $\mathfrak{D}_i = (S_i, \mathcal{S}_i, \tau_i, \kappa_i)_{i\in\{1,2\}}$ ditopolojik doku uzay çifti için,

$$\text{'}\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2 \text{ dihomeomorf uzaylar'} \Rightarrow \phi(\mathfrak{D}_1) = \phi(\mathfrak{D}_2)$$

şartı sağlanıyorsa, ϕ ye dikardinal fonksiyon denir (Polat *et al.* 2014).

Tanım 4.1.4: $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ bir ditopolojik doku uzayı olsun. $o(\mathfrak{D})$ ve $c(\mathfrak{D})$ sırasıyla $\mathfrak{D}$ deki açık kümelerin sayısı ile ω nın kardinal toplamı ve $\mathfrak{D}$ deki kapalı kümelerin sayısı ile ω nın kardinal toplamı olarak tanımlanır. $oc(\mathfrak{D})$, $\tau \cup \kappa$ daki kümelerin sayısı ile ω nın kardinal toplamı olarak tanımlanır (Polat *et al.* 2014).

Teorem 4.1.5: Her $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayı için,

$$\max\{o(\mathfrak{D}), c(\mathfrak{D})\} \leq oc(\mathfrak{D}) \leq |\mathcal{S}| \leq 2^{|S|}$$

dir (Polat *et al.* 2014).

İspat: $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ bir ditopolojik doku uzayı olsun. Doku uzayı tanımına göre $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(S)$ yazılır. Teorem 2.1.3.7 ve Teorem 2.1.3.8 (2) ye göre $|\mathcal{S}| \leq |\mathcal{P}(S)|$ dir. Teorem 2.1.3.10 (2) ye göre $|\mathcal{S}| \leq |\mathcal{P}(S)| = |{}^{S}2|$ ve Teorem 2.1.3.21 (3) e göre $|\mathcal{S}| \leq |\mathcal{P}(S)| = |{}^{S}2| = 2^{|S|}$ olur. Ditopolojik doku uzayı tanımından $\tau \cup \kappa \subseteq \mathcal{S}$ yazılır. Buradan Teorem 2.1.3.7 ve Teorem 2.1.3.8 (2) ye göre $oc(\mathfrak{D}) \leq |\mathcal{S}|$ yazılır. Ayrıca $\tau \subseteq \tau \cup \kappa$ olduğundan $o(\mathfrak{D}) \leq oc(\mathfrak{D})$ ve $\kappa \subseteq \tau \cup \kappa$ olduğundan $c(\mathfrak{D}) \leq oc(\mathfrak{D})$ ve dolayısıyla $\max\{o(\mathfrak{D}), c(\mathfrak{D})\} \leq oc(\mathfrak{D})$ dir. Böylece tüm eşitsizlikler gösterilmiş olur.

Ditopolojik doku uzayı tanımından dolayı $o(\mathfrak{D})$ ve $c(\mathfrak{D})$ den biri diğerini genelde sınırlamaz.

Yardımcı Teorem 4.1.6: $(S, \mathcal{S}, \sigma)$ tümleyenli doku uzayı olsun. Bu durumda,

1) σ bire-bir ve örtendir.

2) $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}$ olsun. σ bire-bir ise $\sigma|_{\mathcal{A}}$ kısıtlanış fonksiyonu da bire-birdir.

İspat: $(S, \mathcal{S})$ bir doku uzayı ve $\sigma : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ fonksiyonu $\mathcal{S}$ üzerinde bir tümleyen işlemi olsun.

1) $A \neq B$ olacak şekilde keyfi $A, B \in \mathcal{S}$ kümeleri verilsin. σ bir fonksiyon olduğundan $\sigma(A), \sigma(B) \in \mathcal{S}$ dir. $\sigma(A) = C$ ve $\sigma(B) = D$ diyelim. Tümleyenli doku uzayı tanımına göre $A = \sigma\big(\sigma(A)\big) = \sigma(C)$ ve $B = \sigma\big(\sigma(B)\big) = \sigma(D)$ olur. Bu durumda, $\sigma(C) \neq \sigma(D)$ yazılır. Buradan $\sigma(C) \nsubseteq \sigma(D) \vee \sigma(D) \nsubseteq \sigma(C)$ yazılır. Yine tümleyenli doku uzayı tanımına göre $D \nsubseteq C \vee C \nsubseteq D$ olur. Yani $C \neq D$ dir. Buradan $\sigma(A) \neq \sigma(B)$ yazılır. Böylece σ bire-birdir. $B \in \mathcal{S}$ verilsin. σ bir fonksiyon olduğundan $\sigma(B) \in \mathcal{S}$ olur. $\sigma(B) = A$ diyelim. Tümleyenli doku uzayı tanımına göre $B = \sigma\big(\sigma(B)\big) = \sigma(A)$ dır. Böylece σ örtendir.

2) $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}$ ve σ bire-bir olsun. $A \neq B$ olacak şekilde keyfi $A, B \in \mathcal{A}$ kümeleri verilsin. σ bire-bir olduğundan $\sigma|_{\mathcal{A}}(A) = \sigma(A) \neq \sigma(B) = \sigma|_{\mathcal{A}}(B)$ olur. A ve B kümeleri keyfi olduğundan $\sigma|_{\mathcal{A}}$ kısıtlanış fonksiyonu bire-birdir.

Teorem 4.1.7: $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa, \sigma)$ bir tümleyenli ditopolojik doku uzayı olsun. Bu durumda,

$$o(\mathfrak{D}) = c(\mathfrak{D})$$

dir.

İspat: $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa, \sigma)$ bir tümleyenli ditopolojik doku uzayı olsun. $\varphi : \tau \to \kappa$ fonksiyonu $\forall G \in \tau$ için $\varphi(G) = \sigma(G)$ olarak tanımlansın. Ditopolojik doku uzayı tanımına göre $\tau \subseteq \mathcal{S}$ olduğundan φ, σ nın τ ya kısıtlanışıdır. Dolayısıyla φ iyi tanımlıdır. Yardımcı Teorem 4.1.6 (2) ye göre φ bire-birdir. Keyfi bir $K \in \kappa$ kapalı kümesi verilsin. Bu durumda, $K \in \mathcal{S}$ dir. σ bir fonksiyon olduğundan $\varphi(K) \in \mathcal{S}$ olur. $\varphi(K) = G$ olsun. Tümleyenli doku uzayı tanımından $K = \varphi(G)$ yazılır. Tümleyenli ditopolojik doku uzayı tanımından, $K \in \kappa$ olduğundan $G = \varphi(K) \in \tau$ olur. Yani $K \in \kappa$, $\varphi(G) = K$ ve $G \in \tau$ dur. K kapalı kümesi keyfi olarak alındığından φ örtendir. Buradan Teorem 2.1.3.8 (1) e göre $|\tau| = |\kappa|$ ve dolayısıyla $o(\mathfrak{D}) = c(\mathfrak{D})$ yazılır.

Teorem 4.1.8: Bir $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayı T_0 (Kolmogorov) ise,

$$|\mathcal{Q}| \leq \max\{o(\mathfrak{D}), c(\mathfrak{D})\}$$

dir (Polat *et al.* 2014).

İspat: Bir $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayı T_0 olsun. $\varphi : \mathcal{Q} \to \tau \times \kappa$ fonksiyonu $\varphi(Q_s) = (]Q_s[, [P_s])$ olarak tanımlansın. İç ve kapanış tanımlarından φ nin iyi tanımlı olduğu açıktır. $Q_s \nsubseteq Q_t$ olsun. $\mathfrak{D}$, T_0 olduğundan Teorem 2.2.3.15 (2) ye göre $[P_s] \nsubseteq [P_t] \vee]Q_s[\nsubseteq]Q_t[$ ve dolayısıyla $[P_s] \neq [P_t] \vee]Q_s[\neq]Q_t[$ olur. Bu durumda, $\varphi(Q_s) \neq \varphi(Q_t)$ yazılır. Q_s ve Q_t keyfi olarak alındığından φ bire-birdir. Teorem 2.1.3.8 (2) ye göre $|\mathcal{Q}| \leq |\tau \times \kappa|$ olur. Teorem 2.1.3.21 (2) ye göre $|\tau \times \kappa| = |\tau|.|\kappa|$ yazılır. Teorem 2.1.3.23 (4b) ye göre $|\tau \times \kappa| = |\tau|.|\kappa| \leq o(\mathfrak{D}).c(\mathfrak{D})$ olur. Teorem 2.1.3.24 e göre $|\tau \times \kappa| = |\tau|.|\kappa| \leq o(\mathfrak{D}).c(\mathfrak{D}) = \max\{o(\mathfrak{D}), c(\mathfrak{D})\}$ olduğundan $|\mathcal{Q}| \leq \max\{o(\mathfrak{D}), c(\mathfrak{D})\}$ yazılır.

Sonuç 4.1.9: Bir $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa, \sigma)$ tümleyenli ditopolojik doku uzayı T_0 (Kolmogorov) ise,

$$|\mathcal{Q}| \leq o(\mathfrak{D}) = c(\mathfrak{D})$$

dir.

İspat: Bir $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa, \sigma)$ tümleyenli ditopolojik doku uzayı T_0 olsun. $\mathfrak{D}$, T_0 olduğundan Teorem 4.1.8 e göre $|Q| \leq \max\{o(\mathfrak{D}), c(\mathfrak{D})\}$ yazılır. $\mathfrak{D}$ tümleyenli ditopolojik doku uzayı olduğundan Teorem 4.1.7 ye göre $o(\mathfrak{D}) = c(\mathfrak{D})$ olur. Böylece $|Q| \leq o(\mathfrak{D}) = c(\mathfrak{D})$ yazılır.

Sonuç 4.1.10: Her Kolmogorov ditopolojik koayrılmış doku uzayı için,

$$|S| \leq \max\{o(\mathfrak{D}), c(\mathfrak{D})\}.$$

İspat: $(S, \mathcal{S})$ doku uzayı koayrılmış ve $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayı T_0 olsun. $(S, \mathcal{S})$ koayrılmış olduğundan Teorem 4.1.1 (2) ye göre $|S| = |Q|$ olur. $\mathfrak{D}$, T_0 olduğundan Teorem 4.1.8 e göre $|S| = |Q| \leq \max\{o(\mathfrak{D}), c(\mathfrak{D})\}$ ve dolayısıyla $|S| \leq \max\{o(\mathfrak{D}), c(\mathfrak{D})\}$ yazılır.

Sonuç 4.1.11: Her Kolmogorov tümleyenli ditopolojik koayrılmış doku uzayı için,

$$|S| \leq o(\mathfrak{D}) = c(\mathfrak{D})$$

dir.

İspat: $(S, \mathcal{S}, \sigma)$ tümleyenli doku uzayı koayrılmış ve $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa, \sigma)$ tümleyenli ditopolojik doku uzayı T_0 olsun. $\mathfrak{D}$ Kolmogorov ditopolojik koayrılmış doku uzayı olduğundan Sonuç 4.1.10 a göre $|S| \leq \max\{o(\mathfrak{D}), c(\mathfrak{D})\}$ ve $\mathfrak{D}$ tümleyenli ditopolojik doku uzayı olduğundan Teorem 4.1.7 ye göre $o(\mathfrak{D}) = c(\mathfrak{D})$ olur. Böylece $|S| \leq o(\mathfrak{D}) = c(\mathfrak{D})$ yazılır.

Tanım (Ağırlık ve Koağırlık) 4.1.12: $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ bir ditopolojik doku uzayı olsun. Bu durumda,

$$w(\mathfrak{D}) \coloneqq \min\{|\mathcal{B}| \mid \mathcal{B}, (\tau, \kappa) \text{ için bir taban}\} + \omega,$$

$$co\text{-}w(\mathfrak{D}) \coloneqq \min\{|\mathcal{B}| \mid \mathcal{B}, (\tau, \kappa) \text{ için bir kotaban}\} + \omega$$

kardinallerine sırasıyla $\mathfrak{D}$ nin ağırlığı ve koağırlığı denir (Polat *et al.* 2014).

Teorem 4.1.13: Her $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayı için,

1) $w(\mathfrak{D}) \leq o(\mathfrak{D})$

2) $co\text{-}w(\mathfrak{D}) \leq c(\mathfrak{D})$

dir.

İspat: $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ bir ditopolojik doku uzayı olsun.

1) $\mathcal{B}$, $|\mathcal{B}| = w(\mathcal{D})$ olacak şekilde $\mathfrak{D}$ için bir taban olsun. Taban tanımından $\mathcal{B} \subseteq \tau$ yazılır. Teorem 2.1.3.7 ve Teorem 2.1.3.8 (2) ye göre $|\mathcal{B}| \leq |\tau|$ ve dolayısıyla $w(\mathfrak{D}) \leq o(\mathfrak{D})$ dir.

2) $\mathcal{F}$, $|\mathcal{F}| =$ co-$w(\mathcal{D})$ olacak şekilde $\mathfrak{D}$ için bir kotaban olsun. Kotaban tanımından $\mathcal{F} \subseteq \kappa$ yazılır. Teorem 2.1.3.7 ve Teorem 2.1.3.8 (2) ye göre $|\mathcal{F}| \leq |\kappa|$ ve dolayısıyla $co\text{-}w(\mathfrak{D}) \leq c(\mathfrak{D})$ olur.

Teorem 4.1.14: Her $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa, \sigma)$ tümleyenli ditopolojik doku uzayı için,

$$w(\mathfrak{D}) = co\text{-}w(\mathfrak{D})$$

dir.

İspat: $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa, \sigma)$ bir tümleyenli ditopolojik doku uzayı olsun. $\mathcal{B}$, $\mathfrak{D}$ için bir taban olsun. $\mathcal{F}_{\mathcal{B}} \coloneqq \{\sigma(B) \mid B \in \mathcal{B}\}$ olarak tanımlansın. $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ nin $\mathfrak{D}$ için bir kotaban olduğunu gösterelim. $\mathcal{B} \subseteq \tau$ olduğundan tümleyenli ditopolojik doku uzayı tanımına göre $\mathcal{F}_{\mathcal{B}} \subseteq \kappa$ olur. Keyfi bir $K \in \kappa$ kapalı kümesi verilsin. σ örten olduğundan ve tümleyenli ditopolojik doku uzayı tanımına göre $\exists G \in \tau$ için $K = \sigma(G)$ yazılır. $\mathcal{B}$, $\mathfrak{D}$ için bir taban olduğundan $\exists \mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}$ için $G = \bigvee \mathcal{B}_0$ olur. Buradan $K = \sigma(G) = \sigma(\bigvee \mathcal{B}_0)$ yazılır. Teorem 2.2.2.6 (1) e göre $\mathcal{F}_0 \coloneqq \{\sigma(B) \mid B \in \mathcal{B}_0\} \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ olmak üzere $\sigma(\bigvee \mathcal{B}_0) = \bigcap \mathcal{F}_0$ ve buradan $K = \bigcap \mathcal{F}_0$ yazılır. K keyfi bir kapalı küme olduğundan $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$, $\mathfrak{D}$ için bir kotabandır.

Şimdi de $|\mathcal{B}| = |\mathcal{F}_{\mathcal{B}}|$ olduğunu gösterelim. $\varphi : \mathcal{B} \to \mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ fonksiyonu $\forall B \in \mathcal{B}$ için $\varphi(B) = \sigma(B)$ olarak tanımlansın. φ nin iyi tanımlı olduğu açıktır. $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ nin tanımından ve Yardımcı Teorem 4.1.6 (2) ye göre φ bire-birdir. Yine $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ nin tanımından φ örtendir. Buradan Teorem 2.1.3.8 (1) e göre $|\mathcal{B}| = |\mathcal{F}_{\mathcal{B}}|$ olur. Yani her tabanın eş kuvveti olan bir kotaban vardır. Buradan $co\text{-}w(\mathfrak{D}) \leq w(\mathfrak{D})$ yazılır.

$\mathcal{F}$, $\mathfrak{D}$ için bir kotaban olsun. $\mathcal{B}_{\mathcal{F}} \coloneqq \{\sigma(F) \mid F \in \mathcal{F}\}$ olarak tanımlansın. $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ nin $\mathfrak{D}$ için bir taban olduğunu gösterelim. $\mathcal{F} \subseteq \kappa$ olduğundan tümleyenli ditopolojik doku uzayı tanımına göre $\mathcal{B}_{\mathcal{F}} \subseteq \tau$ dur. Keyfi bir $G \in \tau$ açık kümesi verilsin. σ örten olduğundan ve tümleyenli ditopolojik doku uzayı tanımına göre $\exists K \in \kappa$ için $G = \sigma(K)$ yazılır. $\mathcal{F}$, $\mathfrak{D}$ için bir kotaban olduğundan $\exists \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ için $K = \bigcap \mathcal{F}_0$ olur. Buradan $G = \sigma(K) = \sigma(\bigcap \mathcal{F}_0)$ yazılır. Teorem 2.2.2.6 (1) e göre $\mathcal{B}_0 \coloneqq \{\sigma(F) \mid F \in \mathcal{F}_0\} \subseteq \mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ olmak üzere $\sigma(\bigcap \mathcal{F}_0) = \bigvee \mathcal{B}_0$ ve buradan $G = \bigvee \mathcal{B}_0$ yazılır. G keyfi bir açık küme olduğundan $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$, $\mathfrak{D}$ için bir tabandır.

Şimdi de $|\mathcal{F}| = |\mathcal{B}_{\mathcal{F}}|$ olduğunu gösterelim. $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ fonksiyonu $\forall F \in \mathcal{F}$ için $\phi(F) = \sigma(F)$ olarak tanımlansın. ϕ nin iyi tanımlı olduğu açıktır. $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ nin tanımından ve Yardımcı Teorem 4.1.6 (2) ye göre ϕ bire-bir ve örtendir. Buradan Teorem 2.1.3.8 (1) e göre $|\mathcal{F}| = |\mathcal{B}_{\mathcal{F}}|$ olur. Yani her kotabanın eş kuvveti olan bir taban vardır. Buradan $w(\mathfrak{D}) \leq co\text{-}w(\mathfrak{D})$ dir.

$\mathfrak{D}$ nin her bir tabanı ile eş kuvvette bir kotaban ve her bir kotabanı ile eş kuvvette bir taban olduğundan $w(\mathfrak{D}) = co\text{-}w(\mathfrak{D})$ yazılır.

Sonuç 4.1.15: Her $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa, \sigma)$ tümleyenli ditopolojik doku uzayı için,

$$w(\mathfrak{D}) = co\text{-}w(\mathfrak{D}) \leq o(\mathfrak{D}) = c(\mathfrak{D}) \leq \mathcal{S}$$

dir.

İspat: $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa, \sigma)$ bir tümleyenli ditopolojik doku uzayı olsun. Teorem 4.1.5 e göre $\max\{o(\mathfrak{D}), c(\mathfrak{D})\} \leq |\mathcal{S}|$ yazılır. $\mathfrak{D}$ tümleyenli ditopolojik doku uzayı olduğundan Teorem 4.1.7 ye göre $o(\mathfrak{D}) = c(\mathfrak{D}) \leq |\mathcal{S}|$ yazılır. Teorem 4.1.13 (2) ye göre $co\text{-}w(\mathfrak{D}) \leq c(\mathfrak{D}) = o(\mathfrak{D})$ olur. $\mathfrak{D}$ tümleyenli ditopolojik doku uzayı olduğundan Teorem 4.1.14 e göre $w(\mathfrak{D}) = co\text{-}w(\mathfrak{D}) \leq o(\mathfrak{D}) = c(\mathfrak{D}) \leq \mathcal{S}$ yazılır.

Teorem 4.1.16: Bir $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayı T_0 ise,

$$|\mathcal{Q}| \leq 2^{\max\{w(\mathfrak{D}), co\text{-}w(\mathfrak{D})\}}$$

dir.

İspat: $\mathcal{B}$, $|\mathcal{B}| = w(\mathcal{D})$ olacak şekilde $\mathfrak{D}$ için bir taban ve $\mathcal{F}$, $|\mathcal{F}| = \text{co-}w(\mathcal{D})$ olacak şekilde $\mathfrak{D}$ için bir kotaban olsun. $\varphi : \mathcal{Q} \to \mathcal{P}(\mathcal{B} \times \mathcal{F})$ fonksiyonu,

$$\varphi(Q_s) := \{(B, F) \in \mathcal{B} \times \mathcal{F} \mid P_s \subseteq B \vee F \subseteq Q_s\}$$

olarak tanımlansın. φ nin iyi tanımlı olduğu açıktır. $Q_s \nsubseteq Q_t$ verilsin. $\mathfrak{D}$ bir T_0 uzayı olduğundan Teorem 2.2.3.15 (1) e göre $\exists C \in \tau \cup \kappa$ için $P_s \nsubseteq C \nsubseteq Q_t$ olur.

$C \in \tau$ olması durumunda, $\mathcal{B}$, $\mathfrak{D}$ için bir taban olduğundan Teorem 2.2.3.5 (3) e göre $\exists B \in \mathcal{B}$ için $P_t \subseteq B \subseteq C$ dir. Üstelik $B \subseteq C$ ve $P_s \nsubseteq C$ olduğundan $P_s \nsubseteq B$ olur. Yani $P_t \subseteq B$ ve $P_s \nsubseteq B$ olur. Bu durumda, $\varphi(Q_s) \neq \varphi(Q_t)$ yazılır.

$C \in \kappa$ olması durumunda, $\mathcal{F}$, $\mathfrak{D}$ için bir kotaban olduğundan Teorem 2.2.3.6 (3) e göre $\exists F \in \mathcal{F}$ için $C \subseteq F \subseteq Q_s$ dir. Üstelik $C \subseteq F$ ve $C \nsubseteq Q_t$ olduğundan $F \nsubseteq Q_t$ olur. Yani $F \subseteq Q_s$ ve $F \nsubseteq Q_t$ yazılır. Bu durumda, $\varphi(Q_s) \neq \varphi(Q_t)$ olur. Buna göre φ bire-birdir.

Böylece Teorem 2.1.3.8 (2) ye göre $|\mathcal{Q}| \leq |\mathcal{P}(\mathcal{B} \times \mathcal{F})|$ olur. Teorem 2.1.3.10 (2) ye göre $|\mathcal{Q}| \leq |\mathcal{P}(\mathcal{B} \times \mathcal{F})| = \left|{}^{\mathcal{B}\times\mathcal{F}}2\right|$ ve Teorem 2.1.3.21 (3) e göre $|\mathcal{Q}| \leq |\mathcal{P}(\mathcal{B} \times \mathcal{F})| = \left|{}^{\mathcal{B}\times\mathcal{F}}2\right| = 2^{|\mathcal{B}\times\mathcal{F}|}$ dir. Teorem 2.1.3.21 (3) ve Teorem 2.1.3.24 e göre $|\mathcal{B} \times \mathcal{F}| = \max\{|\mathcal{B}|, |\mathcal{F}|\}$ olduğundan Teorem 2.1.3.23 (4c) ye göre $|\mathcal{Q}| \leq 2^{|\mathcal{B}\times\mathcal{F}|} \leq 2^{\max\{|\mathcal{B}|,|\mathcal{F}|\}} \leq 2^{\max\{w(\mathfrak{D}),co\text{-}w(\mathfrak{D})\}}$ yazılır.

Sonuç 4.1.17: Bir $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa, \sigma)$ tümleyenli ditopolojik doku uzayı T_0 ise,

$$|\mathcal{Q}| \leq 2^{w(\mathfrak{D})} = 2^{co\text{-}w(\mathfrak{D})}$$

dir.

İspat: Bir $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa, \sigma)$ tümleyenli ditopolojik doku uzayı T_0 olsun. $\mathfrak{D}$, T_0 olduğundan Teorem 4.1.16 ya göre $|\mathcal{Q}| \leq 2^{\max\{w(\mathfrak{D}),co\text{-}w(\mathfrak{D})\}}$ yazılır. $\mathfrak{D}$ tümleyenli ditopolojik doku uzayı olduğundan Teorem 4.1.14 e göre $w(\mathfrak{D}) = co\text{-}w(\mathfrak{D})$ ve Teorem 2.1.3.23 (4c) ye göre $2^{w(\mathfrak{D})} = 2^{co\text{-}w(\mathfrak{D})}$ dir. Böylece tüm eşitsizlikler gösterilmiş olur.

Sonuç 4.1.18: Her Kolmogorov ditopolojik koayrılmış doku uzayı için,

$$|S| \leq 2^{\max\{w(\mathfrak{D}),co\text{-}w(\mathfrak{D})\}}$$

dir.

İspat: $(S,\mathcal{S})$ doku uzayı koayrılmış ve $\mathfrak{D}=(S,\mathcal{S},\tau,\kappa)$ ditopolojik doku uzayı T_0 olsun. $(S,\mathcal{S})$ doku uzayı koayrılmış olduğundan Teorem 4.1.1 (2) ye göre $|S|=|Q|$ olur. $\mathfrak{D}$, T_0 olduğundan Teorem 4.1.16 ya göre $|S|=|Q|\leq 2^{\max\{w(\mathfrak{D}),co\text{-}w(\mathfrak{D})\}}$ ve dolayısıyla $|S|\leq 2^{\max\{w(\mathfrak{D}),co\text{-}w(\mathfrak{D})\}}$ yazılır.

Sonuç 4.1.19: Her Kolmogorov tümleyenli ditopolojik koayrılmış doku uzayı için,

$$|S|\leq 2^{w(\mathfrak{D})}=2^{co\text{-}w(\mathfrak{D})}$$

dir.

İspat: $(S,\mathcal{S},\sigma)$ tümleyenli doku uzayı koayrılmış ve $\mathfrak{D}=(S,\mathcal{S},\tau,\kappa,\sigma)$ tümleyenli ditopolojik doku uzayı T_0 olsun. $(S,\mathcal{S})$ doku uzayı koayrılmış olduğundan Teorem 4.1.1 (2) ye göre $|S|=|Q|$ olur. $\mathfrak{D}$ Kolmogorov tümleyenli ditopolojik doku uzayı olduğundan Sonuç 4.1.17 ye göre $|S|=|Q|\leq 2^{w(\mathfrak{D})}=2^{co\text{-}w(\mathfrak{D})}$ ve dolayısıyla $|S|\leq 2^{w(\mathfrak{D})}=2^{co\text{-}w(\mathfrak{D})}$ yazılır.

Tanım (Yoğunlaştırıcı ve Koyoğunlaştırıcı) 4.1.20: $\mathfrak{D}=(S,\mathcal{S},\tau,\kappa)$ bir ditopolojik doku uzayı olsun. $\mathcal{S}$ nin bir $\mathcal{A}$ alt ailesi verilsin. $\bigvee\mathcal{A}$, $\mathfrak{D}$ de yoğun ise $\mathcal{A}$ ya $\mathfrak{D}$ de yoğunlaştırıcı denir. $\bigcap\mathcal{A}$, $\mathfrak{D}$ de koyoğun ise $\mathcal{A}$ ya $\mathfrak{D}$ de koyoğunlaştırıcı denir (Polat *et al.* 2014).

Tanım (Yoğunlaşma ve Koyoğunlaşma) 4.1.21: $\mathfrak{D}=(S,\mathcal{S},\tau,\kappa)$ bir ditopolojik doku uzayı olsun. Bu durumda,

$$r(\mathfrak{D})\coloneqq\min\{|\mathcal{A}|\mid\mathcal{A},\mathfrak{D}\text{ de bir yoğunlaştırıcı}\}+\omega,$$

$$co\text{-}r(\mathfrak{D})\coloneqq\min\{|\mathcal{A}|\mid\mathcal{A},\mathfrak{D}\text{ de bir koyoğunlaştırıcı}\}+\omega$$

kardinallerine sırasıyla $\mathfrak{D}$ nin yoğunlaşması ve koyoğunlaşması denir (Polat *et al.* 2014).

Şimdi, bir $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayında ağırlık ile koyoğunlaştırıcı, koağırlık ile yoğunlaştırıcı arasındaki ilişkiyi gösteren teoremi verelim.

Teorem 4.1.22: Her $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayı için,

1) $co\text{-}r(\mathfrak{D}) \leq w(\mathfrak{D})$,

2) $r(\mathfrak{D}) \leq co\text{-}w(\mathfrak{D})$

dir (Polat *et al.* 2014).

İspat: Bir $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayı verilsin.

1) $\mathcal{B} = \{B_p\}_{p\in P}$, $|\mathcal{B}| = w(\mathcal{D})$ olacak şekilde $\mathfrak{D}$ için $\emptyset$ yi içermeyen bir taban olsun. Her bir $p \in P$ için $B_p \nsubseteq Q_{s_p}$ olacak şekilde belirli bir Q_{s_p} q-kümesini seçerek $\mathcal{M} = \{Q_{s_p}\}_{p\in P}$ kümesini tanımlayalım. Bu durumda, $\forall p \in P$ için $B_p \nsubseteq \bigcap\mathcal{M}$ yazılır. Üstelik $\forall\beta \subseteq \mathcal{B}$ için $\bigvee\beta \nsubseteq \bigcap\mathcal{M}$ dir. Boştan farklı keyfi bir $G \in \tau$ açık kümesi verilsin. $\mathcal{B}$, $\mathfrak{D}$ için bir taban olduğundan, $\exists\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}$ için $G = \bigvee\mathcal{B}_0$ olur. Buradan $G = \bigvee\mathcal{B}_0 \nsubseteq \bigcap\mathcal{M}$ yazılır. $G \neq \emptyset$ açık kümesi keyfi olarak alındığından koyoğun küme tanımından $]\bigcap\mathcal{M}[= \emptyset$ yazılır. Bu durumda, $\mathcal{M}$, $\mathfrak{D}$ de bir koyoğunlaştırıcıdır. $\varphi : \mathcal{B} \to \mathcal{M}$ fonksiyonu $\varphi(B_p) = Q_{s_p}$ olarak tanımlansın. $\mathcal{M}$ nin tanımından, φ nin iyi tanımlı ve hatta örten olduğu açıktır. Teorem 2.1.3.8 (3) e göre $|\mathcal{M}| \leq |\mathcal{B}|$ yazılır. Koyoğunlaşma tanımına göre $co\text{-}r(\mathfrak{D}) \leq |\mathcal{M}|$ olduğundan $co\text{-}r(\mathfrak{D}) \leq w(\mathfrak{D})$ yazılır.

2) $\mathcal{F} = \{\mathrm{F}_r\}_{r\in R}$, $|\mathcal{F}| = \text{co-}w(\mathcal{D})$ olacak şekilde $\mathfrak{D}$ için S yi içermeyen bir kotaban olsun. Her bir $r \in R$ için $P_{s_r} \nsubseteq F_r$ olacak şekilde belirli bir $\mathrm{P}_{\mathrm{s}_\mathrm{r}}$ p-kümesini seçerek

$\mathcal{N} = \{\mathrm{P}_{\mathrm{s_r}}\}_{r\in R}$ kümesini tanımlayalım. Bu durumda, $\forall r \in R$ için $\bigvee\mathcal{N} \nsubseteq \mathrm{F_r}$ olur. Üstelik $\forall\beta \subseteq \mathcal{F}$ için $\bigvee\mathcal{N} \nsubseteq \bigcap\beta$ yazılır. S den farklı keyfi bir $K \in \kappa$ kapalı kümesi verilsin. $\mathcal{F}$, $\mathfrak{D}$ için bir kotaban olduğundan, $\exists\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ için $K = \bigcap\mathcal{F}_0$ dır. Buradan $\bigvee\mathcal{N} \nsubseteq \bigcap\mathcal{F}_0 = \mathrm{K}$ olur. $K \neq S$ kapalı kümesi keyfi olarak alındığından yoğun küme tanımından $[\bigvee\mathcal{N}] = S$ yazılır. Bu durumda, $\mathcal{N}$, $\mathfrak{D}$ de bir yoğunlaştırıcıdır. $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{N}$ fonksiyonu $\phi(F_r) = P_{s_r}$ olarak tanımlansın. $\mathcal{N}$ nin tanımından, ϕ nin iyi tanımlı ve hatta örten olduğu açıktır. Teorem 2.1.3.8 (3) e göre $|\mathcal{N}| \leq |\mathcal{F}|$ yazılır. Yoğunlaşma tanımına göre $r(\mathfrak{D}) \leq |\mathcal{N}|$ olduğundan $r(\mathfrak{D}) \leq co\text{-}w(\mathfrak{D})$ yazılır.

Teorem 4.1.23: $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa, \sigma)$ bir tümleyenli ditopolojik doku uzayı olsun. Bu durumda,

$$r(\mathfrak{D}) = co\text{-}r(\mathfrak{D})$$

dir.

İspat: $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa, \sigma)$ bir tümleyenli ditopolojik doku uzayı olsun. $\mathcal{M}$, $\mathfrak{D}$ nin bir yoğunlaşması olsun. $\mathcal{N}_{\mathcal{M}} \coloneqq \{\sigma(M) \mid M \in \mathcal{M}\}$ olarak tanımlansın. $\mathcal{N}_{\mathcal{M}}$ nin $\mathfrak{D}$ nin bir koyoğunlaşması olduğunu gösterelim. σ bir fonksiyon olduğundan $\mathcal{N}_{\mathcal{M}} \subseteq \mathcal{S}$ yazılır. Tümleyenli doku uzayı tanımına göre $]\bigcap\mathcal{N}_{\mathcal{M}}[= \sigma(\sigma(\,]\bigcap\mathcal{N}_{\mathcal{M}}[\,))$ olur. Teorem 2.2.2.6 (1) ve tümleyenli ditopolojik doku uzayı tanımına göre $\sigma(\sigma(\,]\bigcap\mathcal{N}_{\mathcal{M}}[\,)) = \sigma([\sigma(\bigcap\mathcal{N}_{\mathcal{M}})])$ yazılır. $\mathcal{N}_{\mathcal{M}}$ nin tanımından ve Teorem 2.2.2.6 (1) e göre $\sigma([\sigma(\bigcap\mathcal{N}_{\mathcal{M}})]) = \sigma([\bigvee\mathcal{M}])$ yazılır. $\mathcal{M}$, $\mathfrak{D}$ nin bir yoğunlaşması olduğundan $\sigma([\bigvee\mathcal{M}]) = \sigma(S) = \emptyset$ yazılır. İlk ve son eşitliklerden $]\bigcap\mathcal{N}_{\mathcal{M}}[= \emptyset$ olduğu görülür. Yani $\mathcal{N}_{\mathcal{M}}$, $\mathfrak{D}$ nin bir koyoğunlaşmasıdır. Şimdi de $|\mathcal{M}| = |\mathcal{N}_{\mathcal{M}}|$ olduğunu gösterelim. $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}_{\mathcal{M}}$ fonksiyonu $\forall M \in \mathcal{M}$ için $\varphi(M) = \sigma(M)$ olarak tanımlansın. Buradan φ nin iyi tanımlı olduğu açıktır. $\mathcal{N}_{\mathcal{M}}$ nin tanımından ve Yardımcı Teorem 4.1.6 (2) ye göre φ bire-birdir. Yine $\mathcal{N}_{\mathcal{M}}$ nin tanımından, φ nin örten olduğu açıktır. Buradan Teorem 2.1.3.8 (1) e göre $|\mathcal{M}| = |\mathcal{N}_{\mathcal{M}}|$ olur. Yani her yoğunlaşmanın eş kuvveti olan bir koyoğunlaşma vardır. Buradan $co\text{-}r(\mathfrak{D}) \leq r(\mathfrak{D})$ yazılır.

$\mathcal{N}$, $\mathfrak{D}$ nin bir koyoğunlaşması olsun. $\mathcal{M}_{\mathcal{N}} \coloneqq \{\sigma(N) \mid N \in \mathcal{N}\}$ olarak tanımlansın. $\mathcal{M}_{\mathcal{N}}$ nin $\mathfrak{D}$ nin bir yoğunlaşması olduğunu gösterelim. σ bir fonksiyon olduğundan $\mathcal{M}_{\mathcal{N}} \subseteq \mathcal{S}$ olur. Tümleyenli doku uzayı tanımına göre $[\bigvee \mathcal{M}_{\mathcal{N}}] = \sigma\big(\sigma([\bigvee \mathcal{M}_{\mathcal{N}}])\big)$ yazılır. Teorem 2.2.2.6 (1) ve ve tümleyenli ditopolojik doku uzayı tanımına göre $\sigma\big(\sigma([\bigvee \mathcal{M}_{\mathcal{N}}])\big) = \sigma(\,]\sigma(\bigvee \mathcal{M}_{\mathcal{N}})[\,)$ yazılır. $\mathcal{M}_{\mathcal{N}}$ nin tanımından ve Teorem 2.2.2.6 (1) e göre $\sigma(\,]\sigma(\bigvee \mathcal{M}_{\mathcal{N}})[\,) = \sigma(\,]\bigcap \mathcal{N}[\,)$ yazılır. $\mathcal{N}$, $\mathfrak{D}$ nin bir koyoğunlaşması olduğundan $\sigma(\,]\bigcap \mathcal{N}[\,) = \sigma(\emptyset) = \sigma\big(\sigma(S)\big) = S$ olur. İlk ve son eşitliklerden $[\bigvee \mathcal{M}_{\mathcal{N}}] = S$ yazılır. Yani $\mathcal{M}_{\mathcal{N}}$, $\mathfrak{D}$ nin bir yoğunlaşmasıdır. Şimdi de $|\mathcal{N}| = |\mathcal{M}_{\mathcal{N}}|$ olduğunu gösterelim. $\phi : \mathcal{N} \to \mathcal{M}_{\mathcal{N}}$ fonksiyonu $\forall N \in \mathcal{N}$ için $\phi(N) = \sigma(N)$ olarak tanımlansın. Buradan ϕ nin iyi tanımlı olduğu açıktır. $\mathcal{M}_{\mathcal{N}}$ nin tanımından ve Yardımcı Teorem 4.1.6 (2) ye göre ϕ bire-birdir. Yine $\mathcal{M}_{\mathcal{N}}$ nin tanımından, ϕ nin örten olduğu açıktır. Buradan Teorem 2.1.3.8 (1) e göre $|\mathcal{N}| = |\mathcal{M}_{\mathcal{N}}|$ olur. Yani her koyoğunlaşmanın eş kuvveti olan bir yoğunlaşma vardır. Buradan $r(\mathfrak{D}) \leq co\text{-}r(\mathfrak{D})$ yazılır.

$\mathfrak{D}$ deki her bir yoğunlaştırıcı ile eş kuvvette bir koyoğunlaştırıcı ve her bir koyoğunlaştırıcı ile eş kuvvette bir yoğunlaştırıcı olduğundan $r(\mathfrak{D}) = co\text{-}r(\mathfrak{D})$ yazılır.

Sonuç 4.1.24: Her $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayı için,

1) $co\text{-}r(\mathfrak{D}) \leq o(\mathfrak{D})$,

2) $r(\mathfrak{D}) \leq c(\mathfrak{D})$

dir.

İspat: $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ bir ditopolojik doku uzayı olsun.

1) Teorem 4.1.13 (1) e göre $w(\mathfrak{D}) \leq o(\mathfrak{D})$ dir. Teorem 4.1.22 (1) e göre $co\text{-}r(\mathfrak{D}) \leq w(\mathfrak{D}) \leq o(\mathfrak{D})$ ve dolayısıyla $co\text{-}r(\mathfrak{D}) \leq o(\mathfrak{D})$ yazılır.

2) Teorem 4.1.13 (2) ye göre $co\text{-}w(\mathfrak{D}) \leq c(\mathfrak{D})$ olur. Teorem 4.1.22 (2) ye göre $r(\mathfrak{D}) \leq co\text{-}w(\mathfrak{D}) \leq c(\mathfrak{D})$ ve dolayısıyla $r(\mathfrak{D}) \leq c(\mathfrak{D})$ yazılır.

Sonuç 4.1.25: Her $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa, \sigma)$ tümleyenli ditopolojik doku uzayı için,

$$r(\mathfrak{D}) = co\text{-}r(\mathfrak{D}) \leq w(\mathfrak{D}) = co\text{-}w(\mathfrak{D})$$

dir.

İspat: $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa, \sigma)$ bir tümleyenli ditopolojik doku uzayı olsun. Bu durumda, Teorem 4.1.22 ye göre $co\text{-}r(\mathfrak{D}) \leq w(\mathfrak{D})$ olur. Teorem 4.1.14 e göre $w(\mathfrak{D}) = co\text{-}w(\mathfrak{D})$ dir. Teorem 4.1.23 e göre $r(\mathfrak{D}) = co\text{-}r(\mathfrak{D})$ yazılır.

Sonuç 4.1.26: $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa, \sigma)$ bir tümleyenli ditopolojik doku uzayı olsun. Bu durumda,

$$r(\mathfrak{D}) = co\text{-}r(\mathfrak{D}) \leq o(\mathfrak{D}) = c(\mathfrak{D}) \leq \mathcal{S}$$

dir.

İspat: $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa, \sigma)$ bir tümleyenli ditopolojik doku uzayı olsun. Bu durumda, Teorem 4.1.24 e göre $co\text{-}r(\mathfrak{D}) \leq o(\mathfrak{D})$ olur. Teorem 4.1.5 e göre $\max\{o(\mathfrak{D}), c(\mathfrak{D})\} \leq |\mathcal{S}|$ yazılır. $\mathfrak{D}$ tümleyenli ditopolojik doku uzayı olduğundan Teorem 4.1.7 ye göre $o(\mathfrak{D}) = c(\mathfrak{D}) \leq |\mathcal{S}|$ yazılır. Teorem 4.1.23 e göre $r(\mathfrak{D}) = co\text{-}r(\mathfrak{D})$ yazılır.

Bundan sonra, $][R][$ yerine $R^{\rtimes}$ ve $[\,]R[\,]$ yerine $R^{\ltimes}$ kısa gösterimleri kullanılacaktır.

Tanım 4.1.27: $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ bir ditopolojik doku uzayı olsun. Bu durumda,

1) $R \in \tau$ verilsin. $R^{\rtimes} = R$ oluyorsa R ye regüler açık denir. Tüm regüler açık kümelerin sınıfı $RO(\mathfrak{D})$ ile gösterilir.

2) $R \in \kappa$ verilsin. $R^{\ltimes} = R$ oluyorsa R ye regüler kapalı denir. Tüm regüler kapalı kümelerin sınıfı $RC(\mathfrak{D})$ ile gösterilir.

Tanım 4.1.28: $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ bir ditopolojik doku uzayı ve $D \in \mathcal{S}$ olsun. Bu durumda,

1) $\forall G \in \tau$ ve $\forall K \in \kappa$ için,

$$(G \cap D \subseteq K \wedge D \nsubseteq K) \Rightarrow G \subseteq K$$

oluyorsa D ye $\mathfrak{D}$ de bir duyarlı küme denir.

2) $\forall G \in \tau$ ve $\forall K \in \kappa$ için,

$$(G \subseteq K \cup D \wedge G \nsubseteq D) \Rightarrow G \subseteq K$$

oluyorsa D ye $\mathfrak{D}$ de bir koduyarlı küme denir.

Yardımcı Teorem 4.1.29: $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa, \sigma)$ bir ditopolojik doku uzayı ve $D \in \mathcal{S}$ olsun. Bu durumda,

1) D nin $\mathfrak{D}$ de yoğun olması için gerek ve yeter şart $\sigma(D)$ nın $\mathfrak{D}$ de koyoğun olmasıdır.

2) D nin $\mathfrak{D}$ de duyarlı olması için gerek ve yeter şart $\sigma(D)$ nın $\mathfrak{D}$ de koduyarlı olmasıdır.

İspat: $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa, \sigma)$ bir tümleyenli ditopolojik doku uzayı olsun.

1) $\Rightarrow$: D, $\mathfrak{D}$ de bir yoğun küme olsun. Bu durumda, yoğun küme tanımından $[D] = S$ yazılır. σ bir fonksiyon olduğundan $\sigma([D]) = \sigma(S)$ olur. Teorem 2.2.2.6 (1) ve tümleyenli ditopolojik doku uzayı tanımına göre $]\sigma(D)[= \sigma(S)$ dir. $\sigma(S) = \emptyset$ olduğundan $]\sigma(D)[= \emptyset$ yazılır. Yani $\sigma(D)$, $\mathfrak{D}$ de bir koyoğun kümedir.

$\Leftarrow$: D, $\mathfrak{D}$ de bir koyoğun küme olsun. Bu durumda, koyoğun küme tanımından $]D[= \emptyset$ yazılır. σ bir fonksiyon olduğundan $\sigma(]D[) = \sigma(\emptyset)$ dur. Teorem 2.2.2.6 (1) ve tümleyenli ditopolojik doku uzayı tanımına göre $[\sigma(D)] = \sigma(\emptyset)$ olur. $\sigma(S) = \emptyset$ olduğundan $]\sigma(D)[= \sigma\big(\sigma(S)\big) = \emptyset$ yazılır. Yani $\sigma(D)$, $\mathfrak{D}$ de bir yoğun kümedir.

2) $\Rightarrow$: $D \in \mathcal{S}$ bir duyarlı küme olsun. $\sigma(D)$ nin bir koduyarlı küme olduğunu gösterelim. $G \subseteq K \cup \sigma(D)$ ve $G \nsubseteq \sigma(D)$ olacak şekilde keyfi bir $G \in \tau$ açık kümesi ve keyfi bir $K \in \kappa$ kapalı kümesi verilsin. $G \subseteq K$ olduğunu gösterirsek $\sigma(D)$ nin koduyarlı bir küme olduğunu göstermiş oluruz. Tümleyenli doku uzayı tanımına göre $\sigma\big(K \cup \sigma(D)\big) \subseteq \sigma(G)$ ve $D = \sigma\big(\sigma(D)\big) \nsubseteq \sigma(\mathrm{G})$ yazılır. Teorem 2.2.2.6 (1) e göre $\sigma\big(K \cup \sigma(D)\big) = \sigma(K) \cap \sigma\big(\sigma(D)\big) = \sigma(K) \cap D$ olur. Tümleyenli ditopolojik doku uzayı tanımına göre $\sigma(K) \in \tau$ ve $\sigma(G) \in \kappa$ dır. $H = \sigma(K)$ ve $F = \sigma(G)$ olarak tanımlanırsa $H \cap D \subseteq F$ ve $D \nsubseteq F$ yazılır. D bir duyarlı küme olduğundan $H \subseteq F$ yazılır. Buradan tümleyenli doku uzayı tanımına göre $\sigma(F) \subseteq \sigma(H)$ olur. $H = \sigma(K)$ ve $F = \sigma(G)$ olduğundan tümleyenli doku uzayı tanımına göre $G = \sigma\big(\sigma(G)\big) \subseteq \sigma\big(\sigma(K)\big) = K$ yazılır. Yani $\sigma(D)$ bir koduyarlı kümedir.

$\Leftarrow$: $D \in \mathcal{S}$ bir koduyarlı küme olsun. $\sigma(D)$ nin bir duyarlı küme olduğunu gösterelim. $G \cap \sigma(D) \subseteq K$ ve $\sigma(D) \nsubseteq K$ olacak şekilde keyfi bir $G \in \tau$ açık kümesi ve keyfi bir $K \in \kappa$ kapalı kümesi verilsin. $G \subseteq K$ olduğunu gösterirsek $\sigma(D)$ nin duyarlı bir küme olduğunu göstermiş oluruz. Tümleyenli doku uzayı tanımına göre $\sigma(K) \subseteq \sigma(G \cap \sigma(D))$ ve $\sigma(\mathrm{K}) \nsubseteq \sigma\big(\sigma(D)\big) = D$ olur. Teorem 2.2.2.6 (1) e göre $\sigma(K) = \sigma(G) \cup \sigma\big(\sigma(D)\big) = \sigma(G) \cup D$ yazılır. Tümleyenli ditopolojik doku uzayı tanımına göre $\sigma(K) \in \tau$ ve $\sigma(G) \in \kappa$ olur. $H = \sigma(K)$ ve $F = \sigma(G)$ olarak tanımlanırsa $H \subseteq F \cup D$ ve $H \nsubseteq D$ yazılır. D bir koduyarlı küme olduğundan $H \subseteq F$ yazılır. Buradan tümleyenli doku uzayı tanımına göre $\sigma(F) \subseteq \sigma(H)$ olur. $H = \sigma(K)$ ve $F = \sigma(G)$ olduğundan tümleyenli doku uzayı tanımına göre $G = \sigma(\sigma(G)) \subseteq \sigma(\sigma(K)) = K$ yazılır. Yani $\sigma(D)$ bir duyarlı kümedir.

Tanım (Duyarlı Yoğunluk ve Koduyarlı Koyoğunluk) 4.1.30: $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ bir ditopolojik doku uzayı olsun. Bu durumda,

$$pd(\mathfrak{D}) \coloneqq \min\{|\mathrm{A}| \mid \mathrm{A}, \mathfrak{D} \text{ de bir duyarlı yoğun küme}\} + \omega,$$

$$co\text{-}pd(\mathfrak{D}) \coloneqq \min\{|\mathrm{A}| \mid \mathrm{A}, \mathfrak{D} \text{ de bir koduyarlı koyoğun küme}\} + \omega$$

kardinallerine sırasıyla $\mathfrak{D}$ nin duyarlı yoğunluğu ve koduyarlı koyoğunluğu denir.

Yardımcı Teorem 4.1.31: $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ bir ditopolojik doku uzayı ve D, $\mathfrak{D}$ de bir duyarlı yoğun küme olsun. Bu durumda, $\forall G \in \tau$ için,

$$[G] = [G \cap D]$$

dir.

İspat: D, $\mathfrak{D}$ de bir duyarlı yoğun küme olsun ve keyfi bir $G \in \tau$ verilsin. İspatı tamamlamak için $\bigcap\{K \in \kappa \mid G \subseteq K\} = \bigcap\{K \in \kappa \mid G \cap D \subseteq K\}$ olduğunu göstermemiz gerekir. Bunun için de $\forall K \in \kappa$ için $G \subseteq K \Leftrightarrow G \cap D \subseteq K$ olduğunu göstermemiz yeterlidir.

$\forall K \in \kappa$ için $G \subseteq K \Rightarrow G \cap D \subseteq K$ olduğu açıktır. $G \cap D \subseteq K$ olsun. $K = S$ olması durumunda $G \subseteq K$ olduğu açıktır. $K \neq S$ olsun. D yoğun olduğundan, $D \nsubseteq K$ ve D duyarlı olduğundan, $G \subseteq K$ olur. Buradan $\forall K \in \kappa$ için $G \cap D \subseteq K \Rightarrow G \subseteq K$ önermesi geçerlidir deriz.

Yardımcı Teorem 4.1.32: $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ bir ditopolojik doku uzayı ve D, $\mathfrak{D}$ de bir koduyarlı koyoğun küme olsun. Bu durumda, $\forall K \in \kappa$ için,

$$]K[=]K \cup D[$$

dir.

İspat: D, (τ, κ) da bir koduyarlı koyoğun küme olsun ve keyfi bir $K \in \kappa$ verilsin. İspatı tamamlamak için $\bigvee\{G \in \tau \mid G \subseteq K\} = \bigvee\{G \in \tau \mid G \subseteq K \cup D\}$ olduğunu göstermemiz gerekir. Bunun için de $\forall G \in \tau$ için $G \subseteq K \Leftrightarrow G \subseteq K \cup D$ olduğunu göstermemiz yeterlidir.

$\forall G \in \tau$ için $G \subseteq K \Rightarrow G \subseteq K \cup D$ olduğu açıktır.

$G \subseteq K \cup D$ olsun. $G = \emptyset$ olması durumunda $G \subseteq K$ olduğu açıktır. $G \neq \emptyset$ olsun. D koyoğun olduğundan, $G \nsubseteq D$ ve D koduyarlı olduğundan Tanım 4.1.28 (2) ye gör $G \subseteq K$ yazılır. Buradan $\forall G \in \tau$ için $G \subseteq K \cup D \ \Rightarrow G \subseteq K$ önermesi geçerlidir deriz.

Teorem 4.1.33: Her $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayı için,

$$|RO(\mathfrak{D})| \leq 2^{pd(\mathfrak{D})}$$

dir.

İspat: D, $|D| \leq pd(\mathfrak{D})$ olacak şekilde $\mathfrak{D}$ de bir duyarlı yoğun küme olsun. $|\{A^{\rtimes} \mid A \subseteq D\}| \leq |\mathcal{P}(D)|$ olduğu açıktır. Dolayısıyla ispatın tamamlanması için Teorem 2.1.3.7 ve 2.1.3.8 (2) ye göre $RO(\mathfrak{D}) \subseteq \{A^{\rtimes} \mid A \subseteq D\}$ olduğunu göstermek yeterlidir. $R \in RO(\mathfrak{D})$ keyfi bir regüler açık küme olsun. $A = R \cap D$ olarak tanımlansın. R bir açık küme ve D bir duyarlı yoğun küme olduğundan Yardımcı Teorem 4.1.31 e göre $[A] = [R]$ yazılır.

R bir regüler açık küme olduğundan, $A^{\rtimes} = R$ yazılır. $A \subseteq D$ olduğundan $R \in \{A^{\rtimes} \mid A \subseteq D\}$ dir.

Teorem 4.1.34: Her $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayı için,

$$|RC(\mathfrak{D})| \leq 2^{co\text{-}pd(\mathfrak{D})}$$

dir.

İspat: D, $|D| \leq pd(\mathfrak{D})$ olacak şekilde $\mathfrak{D}$ de bir koduyarlı koyoğun küme olsun. $|\{A^{\ltimes} \mid A \subseteq D\}| \leq |\mathcal{P}(D)|$ olduğu açıktır. Dolayısıyla ispatın tamamlanması için için Teorem 2.1.3.7 ve 2.1.3.8 (2) ye göre $RC(\mathfrak{D}) \subseteq \{A^{\ltimes} \mid A \subseteq D\}$ olduğunu göstermek yeterlidir. $R \in RC(\mathfrak{D})$ keyfi bir regüler kapalı küme olsun. $A = R \cup D$ olarak tanımlansın. R bir kapalı küme ve D bir koduyarlı koyoğun küme olduğundan Yardımcı Teorem 4.1.32 ye göre $]A[=]R[$ yazılır. R bir regüler kapalı küme olduğundan, $A^{\ltimes} = R$ yazılır. $A \subseteq D$ olduğundan $R \in \{A^{\ltimes} \mid A \subseteq D\}$ yazılır.

Teorem 4.1.35: Her $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa, \sigma)$ tümleyenli ditopolojik doku uzayı için,

$$|RO(\mathfrak{D})| = |RC(\mathfrak{D})|$$

dir.

İspat: $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa, \sigma)$ bir tümleyenli ditopolojik doku uzayı olsun. $R \in RO(\mathfrak{D})$ olsun. R bir regüler açık küme olduğundan, $R = R^{\rtimes}$ yazılır. σ bir fonksiyon olduğundan $\sigma(R) = \sigma(R^{\rtimes})$ yazılır. Teorem 2.2.2.6 (1) ve tümleyenli ditopolojik doku uzayı tanımına göre $\sigma(R^{\rtimes}) = [\sigma([R])] = \sigma(R)^{\ltimes}$ olur. Buradan $\sigma(R) = \sigma(R)^{\ltimes}$ yazılır. Ayrıca regüler açık küme tanımına göre $R \in \tau$ olduğundan tümleyenli ditopolojik doku uzayı tanımına göre $\sigma(R) \in \kappa$ dır. Bu durumda, $\sigma(R) \in RC(\mathfrak{D})$ olur. Buradan $|RC(\mathfrak{D})| \leq |RO(\mathfrak{D})|$ yazılır.

Tersine $R \in RC(\mathfrak{D})$ olsun. R regüler kapalı küme olduğundan, $R = R^{\ltimes}$ dır. σ bir fonksiyon olduğundan $\sigma(R) = \sigma(R^{\ltimes})$ olur. Teorem 2.2.2.6 (1) ve tümleyenli ditopolojik doku uzayı tanımına göre $\sigma(R^{\ltimes}) =]\sigma(]R[)[= \sigma(R)^{\rtimes}$ olur. Buradan $\sigma(R) = \sigma(R)^{\rtimes}$ yazılır. Ayrıca regüler kapalı küme tanımına göre $R \in \kappa$ olduğundan tümleyenli ditopolojik doku uzayı tanımına göre $\sigma(R) \in \tau$ olur. Bu durumda, $\sigma(R) \in RO(\mathfrak{D})$ dir. Buradan $|RO(\mathfrak{D})| \leq |RC(\mathfrak{D})|$ yazılır.

Böylece $|RO(\mathfrak{D})| = |RC(\mathfrak{D})|$ olur.

Tanım 4.1.36: $(S, \mathcal{S}, \sigma)$ bir tümleyenli doku uzayı ve $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}$ olsun. Bu durumda,

1) $\forall A \in \mathcal{A}$ için $|A| \leq |\sigma(A)|$ oluyorsa, $\mathcal{A}$ ya σ-artan kardinalli denir.

2) $\forall A \in \mathcal{A}$ için $|\sigma(A)| \leq |A|$ oluyorsa, $\mathcal{A}$ ya σ-azalan kardinalli denir.

3) $\forall A \in \mathcal{A}$ için $|\sigma(A)| = |A|$ oluyorsa, $\mathcal{A}$ ya σ-durgun kardinalli denir.

Teorem 4.1.37: $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa, \sigma)$ bir tümleyenli ditopolojik doku uzayı olsun. Duyarlı yoğun kümelerin sınıfı σ-azalan kardinalli ise,

$$co\text{-}pd(\mathfrak{D}) \leq pd(\mathfrak{D})$$

dir.

İspat: $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa, \sigma)$ bir tümleyenli ditopolojik doku uzayı olsun. D, $\mathfrak{D}$ de keyfi bir duyarlı yoğun küme olsun. Yardımcı Teorem 4.1.29 (1) e göre $\sigma(D)$ bir koyoğun kümedir. Yardımcı Teorem 4.1.29 (2) ye göre $\sigma(D)$ bir koduyarlı kümedir. Bu durumda, $\mathfrak{D}$ de her D duyarlı yoğun kümesi için $\sigma(D)$, $\mathfrak{D}$ de koduyarlı koyoğun bir kümedir. Ayrıca duyarlı yoğun kümelerin sınıfı σ-azalan kardinalli olduğundan, her D

duyarlı yoğun kümesi için $|\sigma(D)| \leq |D|$ olur. Dolayısıyla $\mathfrak{D}$ nin duyarlı yoğunluğu ve koduyarlı koyoğunluğu tanımlarından $co\text{-}pd(\mathfrak{D}) \leq p(\mathfrak{D})$ yazılır.

Sonuç 4.1.38: Her $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayı için,

$$\max\{|RO(\mathfrak{D})|, |RC(\mathfrak{D})|\} \leq \max\left\{2^{pd(\mathfrak{D})}, 2^{co\text{-}pd(\mathfrak{D})}\right\}$$

dir.

İspat: $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ bir ditopolojik doku uzayı olsun. Teorem 4.1.33 e göre $|RO(\mathfrak{D})| \leq 2^{pd(\mathfrak{D})}$ ve dolayısıyla $|RO(\mathfrak{D})| \leq \max\left\{2^{pd(\mathfrak{D})}, 2^{co\text{-}pd(\mathfrak{D})}\right\}$ dir. Teorem 4.1.34 e göre $|RC(\mathfrak{D})| \leq 2^{co\text{-}pd(\mathfrak{D})}$ ve dolayısıyla $|RC(\mathfrak{D})| \leq \max\left\{2^{pd(\mathfrak{D})}, 2^{co\text{-}pd(\mathfrak{D})}\right\}$ olur. Böylece $\max\{|RO(\mathfrak{D})|, |RC(\mathfrak{D})|\} \leq \max\left\{2^{pd(\mathfrak{D})}, 2^{co\text{-}pd(\mathfrak{D})}\right\}$ yazılır.

Sonuç 4.1.39: Her $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa, \sigma)$ tümleyenli ditopolojik doku uzayı için,

$$|RO(\mathfrak{D})| = |RC(\mathfrak{D})| \leq \max\left\{2^{pd(\mathfrak{D})}, 2^{co\text{-}pd(\mathfrak{D})}\right\}$$

dir.

İspat: $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa, \sigma)$ bir tümleyenli ditopolojik doku uzayı olsun. Sonuç 4.1.36 ya göre $\max\{|RO(\mathfrak{D})|, |RC(\mathfrak{D})|\} \leq \max\left\{2^{pd(\mathfrak{D})}, 2^{co\text{-}pd(\mathfrak{D})}\right\}$ olur. $\mathfrak{D}$ tümleyenli ditopolojik doku uzayı olduğundan Teorem 4.1.35 e göre $|RO(\mathfrak{D})| = |RC(\mathfrak{D})|$ yazılır.

Sonuç 4.1.40: $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa, \sigma)$ bir tümleyenli ditopolojik doku uzayı olsun. Duyarlı yoğun kümelerin sınıfı σ-azalan kardinalli ise,

$$|RO(\mathfrak{D})| = |RC(\mathfrak{D})| \leq 2^{co\text{-}pd(\mathfrak{D})} \leq 2^{pd(\mathfrak{D})}$$

dir.

İspat: $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa, \sigma)$ bir tümleyenli ditopolojik doku uzayı olsun. Bu durumda, Sonuç 4.1.39 a göre $|RO(\mathfrak{D})| = |RC(\mathfrak{D})| \leq \max\left\{2^{pd(\mathfrak{D})}, 2^{co\text{-}pd(\mathfrak{D})}\right\}$ yazılır. Duyarlı yoğun kümelerin sınıfı σ-azalan kardinalli olduğundan Teorem 4.1.37 ye göre $co\text{-}pd(\mathfrak{D}) \leq pd(\mathfrak{D})$ yazılır. Buradan Teorem 2.1.3.23 (4c) ye göre $2^{co\text{-}pd(\mathfrak{D})} \leq 2^{pd(\mathfrak{D})}$ yazılır.

Yardımcı Teorem 4.1.41: $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ bir ditopolojik doku uzayı olsun. Bu durumda,

1) $\forall A \in \mathcal{S}$ için $A^{\rtimes}$ regüler açıktır.

2) $\forall A \in \mathcal{S}$ için $A^{\ltimes}$ regüler kapalıdır.

İspat: $A \in \mathcal{S}$ verilsin.

1) $A^{\rtimes}$ nin regüler açık olduğunu göstermek için $A^{\rtimes} = (A^{\rtimes})^{\rtimes}$ olduğunu göstermeliyiz. Kümenin kapanışı tanımından $A^{\rtimes} \subseteq [A^{\rtimes}]$ yazılır. Kümenin içi tanımından $]A^{\rtimes}[\subseteq (A^{\rtimes})^{\rtimes}$ ve regüler açık küme tanımına göre $A^{\rtimes} \in \tau$ olduğundan $A^{\rtimes} \subseteq (A^{\rtimes})^{\rtimes}$ yazılır. $B \coloneqq [A]$ olarak alınırsa $(A^{\rtimes})^{\rtimes} =]B[^{\rtimes}$ yazılır. Kümenin içi tanımından $]B[\subseteq B$ olduğundan $]B[^{\rtimes} \subseteq B^{\rtimes}$ yazılır. $B = [A]$ olduğundan $B^{\rtimes} = [A]^{\rtimes} = A^{\rtimes}$ yazılır. Buradan $(A^{\rtimes})^{\rtimes} \subseteq A^{\rtimes}$ elde edilir.

2) $A^{\ltimes}$ nın regüler kapalı olduğunu göstermek için $A^{\ltimes} = (A^{\ltimes})^{\ltimes}$ olduğunu göstermeliyiz. Kümenin içi tanımından $]A^{\ltimes}[\subseteq A^{\ltimes}$ yazılır. Kümenin kapanışı tanımından $(A^{\ltimes})^{\ltimes} \subseteq [A^{\ltimes}]$ ve regüler kapalı küme tanımına göre $A^{\ltimes} \in \kappa$ olduğundan $(A^{\ltimes})^{\ltimes} \subseteq A^{\ltimes}$ yazılır. $B \coloneqq\ ]A[$ olarak alınırsa $(A^{\ltimes})^{\ltimes} = [\,B\,]^{\ltimes}$ yazılır. Kümenin kapanışı tanımından $B \subseteq [B]$ olduğundan $B^{\ltimes} \subseteq [\,B\,]^{\ltimes}$ yazılır. $B =]A[$ olduğundan $B^{\ltimes} =]A[^{\ltimes} = A^{\ltimes}$ yazılır. Buradan $A^{\ltimes} \subseteq (A^{\ltimes})^{\ltimes}$ elde edilir.

Yardımcı Teorem 4.1.42: $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayı regüler olsun. Bu durumda, tüm regüler açık kümelerin sınıfı $\mathfrak{D}$ için bir tabandır.

İspat: Keyfi bir $s \in S$ için $G \nsubseteq Q_s$ olacak şekilde keyfi $G \in \tau$ verilsin. $\mathfrak{D}$ regüler olduğundan Teorem 2.2.3.12 (2) ye göre $\exists H \in \tau$ için $P_s \subseteq H \subseteq [H] \subseteq G$ olur. Kümenin içi tanımından $]H[\subseteq H^{\rtimes}$ ve $H \in \tau$ olduğundan $H =]H[$ yazılır. Buradan $P_s \subseteq H^{\rtimes}$ elde edilir. Diğer yandan kümenin içi tanımından ve $G \in \tau$ olduğundan $H^{\rtimes} \subseteq]G[= G$ olur. Yani $P_s \subseteq H^{\rtimes} \subseteq G$ dir. Yardımcı Teorem 4.1.41 (1) e göre $H^{\rtimes} \in RO(\mathfrak{D})$ yazılır. Yani $H^{\rtimes} = R$ dersek $R \in RO(\mathfrak{D})$ için $P_s \subseteq R \subseteq G$ olur. Burada s ve G keyfi alındığından Teorem 2.2.3.5 (3) e göre $RO(\mathfrak{D})$, $\mathfrak{D}$ için bir tabandır.

Teorem 4.1.43: Bir $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayı regüler ise,

$$w(\mathfrak{D}) \leq 2^{pd(\mathfrak{D})}$$

dir.

İspat: Teorem 4.1.33 e göre $|RO(\mathfrak{D})| \leq 2^{pd(\mathfrak{D})}$ yazılır. Yardımcı Teorem 4.1.42 ye göre $RO(\mathfrak{D})$, $\mathfrak{D}$ için bir taban olduğundan $\mathfrak{D}$ nin ağırlığı tanımından, $w(\mathfrak{D}) \leq |RO(\mathfrak{D})|$ yazılır. Böylece $w(\mathfrak{D}) \leq 2^{pd(\mathfrak{D})}$ olur.

Yardımcı Teorem 4.1.44: $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayı koregüler olsun. Bu durumda, tüm regüler kapalı kümelerin sınıfı $\mathfrak{D}$ için bir kotabandır.

İspat: Keyfi bir $s \in S$ için $P_s \nsubseteq K$ olacak şekilde keyfi $K \in \kappa$ verilsin. $\mathfrak{D}$ koregüler olduğundan Teorem 2.2.3.13 (2) ye göre $\exists F \in \kappa$ için $K \subseteq]F[\subseteq F \subseteq Q_s$ olur. Kümenin kapanışı tanımından $F^{\ltimes} \subseteq [F]$ ve $F \in \kappa$ olduğundan $[F] = F$ yazılır. Buradan $F^{\ltimes} \subseteq Q_s$ elde edilir. Diğer yandan kümenin kapanışı tanımından ve $K \in \kappa$ olduğundan $K = [K] \subseteq F^{\ltimes}$ yazılır. Yani $K \subseteq F^{\ltimes} \subseteq Q_s$ dir. Yardımcı Teorem 4.1.41 (2) ye göre $F^{\ltimes} \in$

$RC(\mathfrak{D})$ olur. Yani $F^{\ltimes} = R$ dersek $R \in RC(\mathfrak{D})$ için $K \subseteq R \subseteq Q_s$ yazılır. Burada s ve K keyfi alındığından Teorem 2.2.3.6 (3) e göre $RC(\mathfrak{D})$, $\mathfrak{D}$ için bir kotabandır.

Teorem 4.1.45: Bir $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayı koregüler ise,

$$co\text{-}w(\mathfrak{D}) \leq 2^{co\text{-}pd(\mathfrak{D})}$$

dir.

İspat: Teorem 4.1.34 e göre $|RC(\mathfrak{D})| \leq 2^{co\text{-}pd(\mathfrak{D})}$ dir. Yardımcı Teorem 4.1.44 e göre $co\text{-}w(\mathfrak{D}) \leq |RC(\mathfrak{D})|$ yazılır. Böylece $co\text{-}w(\mathfrak{D}) \leq 2^{co\text{-}pd(\mathfrak{D})}$ olur.

Sonuç 4.1.46: Bir $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayı biregüler ise,

$$\max\{w(\mathfrak{D}), co\text{-}w(\mathfrak{D})\} \leq 2^{\max\{pd(\mathfrak{D}), co\text{-}pd(\mathfrak{D})\}}$$

dir.

İspat: $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ bir ditopolojik doku uzayı biregüler olsun. $\mathfrak{D}$ biregüler olduğundan Teorem 4.1.43 e göre $w(\mathfrak{D}) \leq 2^{pd(\mathfrak{D})}$ ve dolayısıyla $w(\mathfrak{D}) \leq \max\left\{2^{pd(\mathfrak{D})}, 2^{co\text{-}pd(\mathfrak{D})}\right\} = 2^{\max\{pd(\mathfrak{D}), co\text{-}pd(\mathfrak{D})\}}$ olur. $\mathfrak{D}$ biregüler olduğundan Teorem 4.1.45 e göre $co\text{-}w(\mathfrak{D}) \leq 2^{co\text{-}pd(\mathfrak{D})}$ ve dolayısıyla $co\text{-}w(\mathfrak{D}) \leq \max\left\{2^{pd(\mathfrak{D})}, 2^{co\text{-}pd(\mathfrak{D})}\right\} = 2^{\max\{pd(\mathfrak{D}), co\text{-}pd(\mathfrak{D})\}}$ dir. Böylece $\max\{w(\mathfrak{D}), co\text{-}w(\mathfrak{D})\} \leq 2^{\max\{pd(\mathfrak{D}), co\text{-}pd(\mathfrak{D})\}}$ yazılır.

Sonuç 4.1.47: Bir $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa, \sigma)$ tümleyenli ditopolojik doku uzayı biregüler ise,

$$w(\mathfrak{D}) = co\text{-}w(\mathfrak{D}) \leq 2^{\max\{pd(\mathfrak{D}), co\text{-}pd(\mathfrak{D})\}}$$

dir.

İspat: Bir $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa, \sigma)$ tümleyenli ditopolojik doku uzayı biregüler olsun. $\mathfrak{D}$ tümleyenli ditopolojik doku uzayı olduğundan Teorem 4.1.14 e göre $w(\mathfrak{D}) = co\text{-}w(\mathfrak{D})$ dir. $\mathfrak{D}$ biregüler tümleyenli ditopolojik doku uzayı olduğundan Sonuç 4.1.46 ya göre $w(\mathfrak{D}) = co\text{-}w(\mathfrak{D}) \leq \max\left\{2^{pd(\mathfrak{D})}, 2^{co\text{-}pd(\mathfrak{D})}\right\} = 2^{\max\{pd(\mathfrak{D}), co\text{-}pd(\mathfrak{D})\}}$ yazılır.

Sonuç 4.1.48: Bir $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa, \sigma)$ tümleyenli ditopolojik doku uzayı biregüler olsun. Duyarlı yoğun kümelerin sınıfı σ-azalan kardinalli ise,

$$w(\mathfrak{D}) = co\text{-}w(\mathfrak{D}) \leq 2^{co\text{-}pd(\mathfrak{D})} \leq 2^{pd(\mathfrak{D})}$$

dir.

İspat: Bir $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa, \sigma)$ tümleyenli ditopolojik doku uzayı biregüler olsun. Bu durumda, $\mathfrak{D}$ biregüler tümleyenli ditopolojik doku uzayı olduğundan Sonuç 4.1.47 ye göre $w(\mathfrak{D}) = co\text{-}w(\mathfrak{D}) \leq 2^{\max\{pd(\mathfrak{D}), co\text{-}pd(\mathfrak{D})\}}$ yazılır. Duyarlı yoğun kümelerin sınıfı σ-azalan kardinalli olduğundan Teorem 4.1.37 ye göre $co\text{-}pd(\mathfrak{D}) \leq pd(\mathfrak{D})$ yazılır. Buradan Teorem 2.1.3.23 (4c) ye göre $2^{co\text{-}pd(\mathfrak{D})} \leq 2^{pd(\mathfrak{D})}$ yazılır.

Tanım (Net ve Konet) 4.1.49: $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ bir ditopolojik doku uzayı olsun. $\mathcal{N}$, $\mathcal{S}$ nin bir alt ailesi olsun. $\forall G \in \tau$ için $\mathcal{N}$ nin $G = \bigvee \mathcal{N}^*$ şartını sağlayan bir $\mathcal{N}^*$ alt ailesi varsa $\mathcal{N}$ ye $\mathfrak{D}$ de bir net denir. $\mathcal{M}$, $\mathcal{S}$ nin bir alt ailesi olsun. $\forall K \in \kappa$ için $\mathcal{M}$ nin $K = \bigcap \mathcal{M}^*$ şartını sağlayan bir $\mathcal{M}^*$ alt ailesi varsa $\mathcal{M}$ ye $\mathfrak{D}$ de bir konet denir (Polat *et al.* 2014).

Tanım (Net Ağırlığı ve Konet Ağırlığı) 4.1.50: $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ bir ditopolojik doku uzayı olsun. Bu durumda,

$$nw(\mathfrak{D}) \coloneqq \min\{|\mathcal{N}| \mid \mathcal{N}, \mathfrak{D} \text{ de bir net}\} + \omega,$$

$$co\text{-}nw(\mathfrak{D}) \coloneqq \min\{|\mathcal{N}| \mid \mathcal{N}, \mathfrak{D} \text{ de bir konet}\} + \omega$$

kardinallerine sırasıyla $\mathfrak{D}$ nin net ağırlığı ve konet ağırlığı denir (Polat *et al.* 2014).

Yardımcı Teorem 4.1.51: Her $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa, \sigma)$ tümleyenli ditopolojik doku uzayı, $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{S}$ ve $\mathcal{M}_{\mathcal{N}} \coloneqq \{\sigma(N) \mid N \in \mathcal{N}\}$ olsun. Bu durumda, $\mathcal{N}$, $\mathfrak{D}$ de bir net ise, $\mathcal{M}_{\mathcal{N}}$, $\mathfrak{D}$ de bir konettir.

İspat: $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa, \sigma)$ bir tümleyenli ditopolojik doku uzayı olsun. $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{S}$, $|\mathcal{N}| \leq nw(\mathfrak{D})$ olacak şekilde $\mathfrak{D}$ de bir net olsun. $\mathcal{M}_{\mathcal{N}} \coloneqq \{\sigma(N) \mid N \in \mathcal{N}\}$ olarak tanımlansın. Tümleyenli doku uzayı tanımına göre $\mathcal{M}_{\mathcal{N}} \subseteq \mathcal{S}$ dir. Keyfi bir $K \in \kappa$ kapalı kümesi verilsin. Tümleyenli ditopolojik doku uzayı tanımına göre $\sigma(K) \in \tau$ olur. $G = \sigma(K)$ olsun. $\mathcal{N}$, $\mathfrak{D}$ de bir net olduğundan $\exists \mathcal{N}_G \subseteq \mathcal{N}$ için $G = \bigvee \mathcal{N}_G$ yazılır. σ bir fonksiyon olduğundan $\sigma(G) = \sigma(\bigvee \mathcal{N}_G)$ dir. $G = \sigma(K)$ olduğundan tümleyenli doku uzayı e göre $\sigma(G) = \sigma\big(\sigma(K)\big) = K$ olur. Buradan $K = \sigma(\bigvee \mathcal{N}_G)$ yazılır. Teorem 2.2.2.6 (1) e göre $\mathcal{M}_K \coloneqq \{\sigma(N) \mid N \in \mathcal{N}_G\} \subseteq \mathcal{M}_{\mathcal{N}}$ olmak üzere $\sigma(\bigvee \mathcal{N}_G) = \bigcap \mathcal{M}_K$ olur. Buradan $K = \bigcap \mathcal{M}_K$ dır. Yani $\mathcal{M}_K \subseteq \mathcal{M}_{\mathcal{N}}$ için $K = \bigcap \mathcal{M}_K$ yazılır. $K \in \kappa$ kapalı kümesi keyfi olarak alındığından $\mathcal{M}_{\mathcal{N}}$, $\mathfrak{D}$ de bir konettir.

Yardımcı Teorem 4.1.52: Her $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa, \sigma)$ tümleyenli ditopolojik doku uzayı, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{S}$ ve $\mathcal{N}_{\mathcal{M}} \coloneqq \{\sigma(M) \mid M \in \mathcal{M}\}$ olsun. Bu durumda, $\mathcal{M}$, $\mathfrak{D}$ de bir konet ise, $\mathcal{N}_{\mathcal{M}}$, $\mathfrak{D}$ de bir nettir.

İspat: $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa, \sigma)$ bir tümleyenli ditopolojik doku uzayı olsun. $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{S}$, $|\mathcal{M}| \leq co\text{-}nw(\mathfrak{D})$ olacak şekilde $\mathfrak{D}$ de bir konet olsun. $\mathcal{N}_{\mathcal{M}} \coloneqq \{\sigma(M) \mid M \in \mathcal{M}\}$ olarak tanımlansın. Tümleyenli doku uzayı tanımına göre $\mathcal{N}_{\mathcal{M}} \subseteq \mathcal{S}$ olur. Keyfi bir $G \in \tau$ açık kümesi verilsin. Tümleyenli ditopolojik doku uzayı tanımına göre $\sigma(G) \in \kappa$ dır. $K = \sigma(G)$ olsun. $\mathcal{M}$, $\mathfrak{D}$ de bir konet olduğundan $\exists \mathcal{M}_K \subseteq \mathcal{M}$ için $K = \bigcap \mathcal{M}_K$ yazılır. σ bir fonksiyon olduğundan $\sigma(K) = \sigma(\bigcap \mathcal{M}_K)$ dir. $K = \sigma(G)$ olduğundan tümleyenli doku uzayı e göre $\sigma(K) = \sigma\big(\sigma(G)\big) = G$ olur. Buradan $G = \sigma(\bigcap \mathcal{M}_K)$ yazılır. Teorem

2.2.2.6 (1) e göre $\mathcal{N}_G \coloneqq \{\sigma(M) \mid M \in \mathcal{M}_K\} \subseteq \mathcal{N}_{\mathcal{M}}$ olmak üzere $\sigma(\bigcap \mathcal{M}_K) = \bigvee \mathcal{N}_G$ olur. Buradan $G = \bigvee \mathcal{N}_G$ dir. Yani $\mathcal{N}_G \subseteq \mathcal{N}_{\mathcal{M}}$ için $G = \bigvee \mathcal{N}_G$ yazılır. $G \in \tau$ açık kümesi keyfi olarak alındığından $\mathcal{N}_{\mathcal{M}}$, $\mathfrak{D}$ de bir nettir.

Teorem 4.1.53: Her $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa, \sigma)$ tümleyenli ditopolojik doku uzayı için,

$$nw(\mathfrak{D}) = co\text{-}nw(\mathfrak{D})$$

dir.

İspat: $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa, \sigma)$ bir tümleyenli ditopolojik doku uzayı olsun. $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{S}$, $|\mathcal{N}| \leq nw(\mathfrak{D})$ olacak şekilde $\mathfrak{D}$ de bir net olsun. $\mathcal{M}_{\mathcal{N}} \coloneqq \{\sigma(N) \mid N \in \mathcal{N}\}$ olarak tanımlansın. $\mathfrak{D}$ tümleyenli ditopolojik doku uzayı olduğundan Yardımcı Teorem 4.1.51 e göre $\mathcal{M}_{\mathcal{N}}$, $\mathfrak{D}$ de bir konettir. Şimdi $|\mathcal{N}| = |\mathcal{M}_{\mathcal{N}}|$ olduğunu gösterelim. $\varphi : \mathcal{N} \to \mathcal{M}_{\mathcal{N}}$ fonksiyonu $\forall N \in \mathcal{N}$ için $\varphi(N) = \sigma(N)$ olarak tanımlansın. φ nin iyi tanımlı olduğu açıktır. $\mathcal{M}_{\mathcal{N}}$ nin tanımından ve Yardımcı Teorem 4.1.6 (2) ye göre φ bire-birdir. Yine $\mathcal{M}_{\mathcal{N}}$ nin tanımından, φ nin örten olduğu açıktır. Buradan Teorem 2.1.3.8 (1) e göre $|\mathcal{N}| = |\mathcal{M}_{\mathcal{N}}|$ olur. Yani $\mathfrak{D}$ deki her netin eş kuvveti olan bir konet vardır. $\mathfrak{D}$ nin net ağırlığı ve konet ağırlığı tanımlarından $co\text{-}nw(\mathfrak{D}) \leq nw(\mathfrak{D})$ yazılır.

Tersine $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{S}$, $|\mathcal{M}| \leq co\text{-}nw(\mathfrak{D})$ olacak şekilde $\mathfrak{D}$ de bir konet olsun. $\mathcal{N}_{\mathcal{M}} \coloneqq \{\sigma(M) \mid M \in \mathcal{M}\}$ olarak tanımlansın. $\mathfrak{D}$ tümleyenli ditopolojik doku uzayı olduğundan Yardımcı Teorem 4.1.52 ye göre $\mathcal{N}_{\mathcal{M}}$, $\mathfrak{D}$ de bir nettir. Şimdi $|\mathcal{M}| = |\mathcal{N}_{\mathcal{M}}|$ olduğunu gösterelim. $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}_{\mathcal{M}}$ fonksiyonu $\forall M \in \mathcal{M}$ için $\varphi(M) = \sigma(M)$ olarak tanımlansın. φ nin iyi tanımlı olduğu açıktır. $\mathcal{N}_{\mathcal{M}}$ nin tanımından ve Yardımcı Teorem 4.1.6 (2) ye göre φ bire-birdir. Yine $\mathcal{N}_{\mathcal{M}}$ nin tanımından, φ nin örten olduğu açıktır. Buradan Teorem 2.1.3.8 (1) e göre $|\mathcal{M}| = |\mathcal{N}_{\mathcal{M}}|$ olur. Yani $\mathfrak{D}$ deki her konetin eş kuvveti olan bir net vardır. $\mathfrak{D}$ nin net ağırlığı ve konet ağırlığı tanımlarından $nw(\mathfrak{D}) \leq co\text{-}nw(\mathfrak{D})$ yazılır.

Böylece $nw(\mathfrak{D}) = co\text{-}nw(\mathfrak{D})$ yazılır.

Şimdi, net ağırlığı ve konet ağırlığının $\mathfrak{D}$ de S üzerinde sınırlara sahip olduğunu gösterelim.

Teorem 4.1.54: Bir $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayı T_0 ise,

$$|\mathcal{Q}| \leq 2^{\max\{nw(\mathfrak{D}), co\text{-}nw(\mathfrak{D})\}}$$

dir (Polat *et al.* 2014).

İspat: $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{S}$, $|\mathcal{N}| \leq nw(\mathfrak{D})$ olacak şekilde $\mathfrak{D}$ de bir net olsun. $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{S}$, $|\mathcal{M}| \leq co\text{-}nw(\mathfrak{D})$ olacak şekilde $\mathfrak{D}$ de bir konet olsun. Her bir $Q_s \in \mathcal{Q}$ için,

$$\mathcal{L}_{Q_s} \coloneqq \{(N, M) \in \mathcal{N} \times \mathcal{M} \mid P_s \not\subseteq N \vee P_s \not\subseteq M\}$$

kümesini tanımlayalım. $\varphi : \mathcal{Q} \to \mathcal{P}(\mathcal{N} \times \mathcal{M})$ fonksiyonu $\varphi(Q_s) = \mathcal{L}_{Q_s}$ olarak tanımlansın. Keyfi $Q_s \not\subseteq Q_t$ q-kümeleri verilsin. $\mathfrak{D}$, T_0 olduğundan Teorem 2.2.3.15 (1) e göre $\exists C \in \tau \cup \kappa$ için $P_s \not\subseteq C \not\subseteq Q_t$ olur.

$C \in \tau$ olması durumunda $\mathcal{N}$, $\mathfrak{D}$ de bir net olduğundan, $\exists \mathcal{N}_C \subseteq \mathcal{N}$ için $C = \bigvee \mathcal{N}_C$ yazılır. Buradan, $P_s \not\subseteq \bigvee \mathcal{N}_C \not\subseteq Q_t$ yazılır ve $\exists N \in \mathcal{N}_C$ için $P_s \not\subseteq N \not\subseteq Q_t$ olur. φ fonksiyonunun tanımından, $\varphi(Q_s) \neq \varphi(Q_t)$ yazılır.

$C \in \kappa$ olması durumunda $\mathcal{M}$, $\mathfrak{D}$ de bir konet olduğundan, $\exists \mathcal{M}_C \subseteq \mathcal{M}$ için $C = \bigcap \mathcal{M}_C$ yazılır. Buradan, $P_s \not\subseteq \bigcap \mathcal{M}_C \not\subseteq Q_t$ yazılır ve $\exists M \in \mathcal{M}_C$ için $P_s \not\subseteq M \not\subseteq Q_t$ olur. φ fonksiyonunun tanımından, $\varphi(Q_s) \neq \varphi(Q_t)$ yazılır.

Buna göre φ bire-birdir. Böylece Teorem 2.1.3.8 (2) ye göre $|Q| \leq |\mathcal{P}(\mathcal{N} \times \mathcal{M})|$ dir. Teorem 2.1.3.10 (2) ye göre $|Q| \leq |\mathcal{P}(\mathcal{N} \times \mathcal{M})| = \left|{}^{\mathcal{N}\times\mathcal{M}}2\right|$ ve Teorem 2.1.3.21 (3) e göre $|Q| \leq |\mathcal{P}(\mathcal{N} \times \mathcal{M})| = \left|{}^{\mathcal{N}\times\mathcal{M}}2\right| = 2^{|\mathcal{N}\times\mathcal{M}|}$ olur. Teorem 2.1.3.21 (3) ve Teorem 2.1.3.24 e göre $|\mathcal{N} \times \mathcal{M}| = \max\{|\mathcal{N}|, |\mathcal{M}|\}$ olduğundan Teorem 2.1.3.23 (4c) ye göre $|Q| \leq 2^{|\mathcal{N}\times\mathcal{M}|} \leq 2^{\max\{|\mathcal{N}|,|\mathcal{M}|\}} \leq 2^{\max\{nw(\mathfrak{D}),co\text{-}nw(\mathfrak{D})\}}$ yazılır.

Sonuç 4.1.55: Her Kolmogorov tümleyenli ditopolojik doku uzayı için,

$$|Q| \leq 2^{nw(\mathfrak{D})} = 2^{co\text{-}nw(\mathfrak{D})}$$

dir.

İspat: Bir $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa, \sigma)$ tümleyenli ditopolojik doku uzayı T_0 olsun. $\mathfrak{D}$, T_0 olduğundan Teorem 4.1.54 e göre $|Q| \leq 2^{\max\{nw(\mathfrak{D}),co\text{-}nw(\mathfrak{D})\}}$ yazılır. $\mathfrak{D}$ tümleyenli ditopolojik doku uzayı olduğundan Teorem 4.1.53 e göre $nw(\mathfrak{D}) = co\text{-}nw(\mathfrak{D})$ ve Teorem 2.1.3.23 (4c) ye göre $2^{nw(\mathfrak{D})} = 2^{co\text{-}\mathrm{nw}(\mathfrak{D})}$ olur. Böylece tüm eşitsizlikler gösterilmiş olur.

Sonuç 4.1.56: Her Kolmogorov ditopolojik koayrılmış doku uzayı için,

$$|S| \leq 2^{\max\{nw(\mathfrak{D}),co\text{-}nw(\mathfrak{D})\}}$$

dir (Polat *et al.* 2014).

İspat: $(S, \mathcal{S})$ doku uzayı koayrılmış ve $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayı T_0 olsun. $(S, \mathcal{S})$ koayrılmış olduğundan Teorem 4.1.1 (2) ye göre $|S| = |Q|$ dur. $\mathfrak{D}$, T_0 olduğundan Teorem 4.1.54 e göre $|S| = |Q| \leq 2^{\max\{nw(\mathfrak{D}),co\text{-}nw(\mathfrak{D})\}}$ ve dolayısıyla $|S| \leq 2^{\max\{nw(\mathfrak{D}),co\text{-}nw(\mathfrak{D})\}}$ yazılır.

Sonuç 4.1.57: Her Kolmogorov tümleyenli ditopolojik koayrılmış doku uzayı için,

$$|S| \leq 2^{nw(\mathfrak{D})} = 2^{co\text{-}nw(\mathfrak{D})}$$

dir.

İspat: $(S, \mathcal{S})$ doku uzayı koayrılmış ve $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayı T_0 olsun. $(S, \mathcal{S})$ koayrılmış olduğundan Teorem 4.1.1 (2) ye göre $|S| = |Q|$ dur. $\mathfrak{D}$ Kolmogorov tümleyenli ditopolojik doku uzayı olduğundan Teorem 4.1.55 e göre $|S| = |Q| \leq 2^{nw(\mathfrak{D})} = 2^{co\text{-}nw(\mathfrak{D})}$ ve dolayısıyla $|S| \leq 2^{nw(\mathfrak{D})} = 2^{co\text{-}nw(\mathfrak{D})}$ yazılır.

Tanım (Pseudo Taban ve Kopseudo Taban) 4.1.58: $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ bir ditopolojik doku uzayı ve $A \in \mathcal{S}$ olsun. $\mathcal{V}$, τ nun ve $\mathcal{K}$, κ nın bir alt ailesi olsun. Bu durumda, $A = \bigcap \mathcal{V}$ oluyorsa, $\mathcal{V}$ ye $\mathfrak{D}$ de A nın bir pseudo tabanı ve $A = \bigvee \mathcal{K}$ oluyorsa, $\mathcal{K}$ ya $\mathfrak{D}$ de A nın bir kopseudo tabanı denir (Polat *et al.* 2014).

Tanım (Pseudo Karakter ve Kopseudo Karakter) 4.1.59: $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ bir ditopolojik doku uzayı olsun. Bu durumda,

$$\Psi(s, \mathfrak{D}) \coloneqq \min\{|\mathcal{V}| \mid \mathcal{V},\ \mathfrak{D} \text{ de } P_s \text{ nin bir pseudo tabanı}\} + \omega,$$

$$\text{co-}\Psi(s, \mathfrak{D}) \coloneqq \min\{|\mathcal{K}| \mid \mathcal{K},\ \mathfrak{D} \text{ de } Q_s \text{ nin bir kopseudo tabanı}\} + \omega$$

olmak üzere,

$$\Psi(\mathfrak{D}) \coloneqq \sup\{\Psi(s, \mathfrak{D}) \mid s \in S\},$$

$$co\text{-}\Psi(\mathfrak{D}) \coloneqq \sup\{\text{co-}\Psi(s, \mathfrak{D}) \mid s \in S\}$$

kardinallerine sırasıyla $\mathfrak{D}$ nin pseudo karakteri ve kopseudo karakteri denir (Polat *et al.* 2014).

Yardımcı Teorem 4.1.60: $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa, \sigma)$ bir tümleyenli ditopolojik doku uzayı ve $\mathcal{V} \subseteq \tau$ olsun. $P_s = \sigma(Q_s)$ olacak şekilde $P_s \in \mathcal{P}$ verilsin. Bu durumda,

1) $\mathcal{V}$, $\mathfrak{D}$ de P_s nin bir pseudo tabanı ise $\mathcal{K} \coloneqq \{\sigma(V) \mid V \in \mathcal{V}\}$ ailesi de $\mathfrak{D}$ de Q_s nin bir kopseudo tabanıdır.

2) $\mathcal{V}$, $\mathfrak{D}$ de P_s nin bir pseudo tabanı ise $\mathcal{K} \coloneqq \{\sigma(V) \mid V \in \mathcal{V}\}$ olmak üzere,

$$|\mathcal{V}| = |\mathcal{K}|$$

dır.

İspat: $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa, \sigma)$ bir tümleyenli ditopolojik doku uzayı olsun. Bir $P_s \in \mathcal{P}$ p-kümesi verilsin. $\mathcal{V}$, $\mathfrak{D}$ de P_s nin bir pseudo tabanı olsun. $\mathcal{K} \coloneqq \{\sigma(V) \mid V \in \mathcal{V}\}$ olarak tanımlansın.

1) $\mathcal{V}$, $\mathfrak{D}$ de P_s nin bir pseudo tabanı olduğundan, $P_s = \bigcap \mathcal{V}$ yazılır. σ bir fonksiyon olduğundan $\sigma(P_s) = \sigma(\bigcap \mathcal{V})$ olur. $P_s = \sigma(Q_s)$ olduğundan tümleyenli doku uzayı tanımından $\sigma(P_s) = Q_s$ yazılır ve dolayısıyla $Q_s = \sigma(\bigcap \mathcal{V})$ olur. $(S, \mathcal{S}, \sigma)$ tümleyenli doku uzayı olduğundan Teorem 2.2.2.6 ya göre $Q_s = \sigma(\bigcap \mathcal{V}) = \bigvee \mathcal{K}$ olur. $\mathfrak{D}$ tümleyenli ditopolojik doku uzayı olduğundan, $\mathcal{K} \subseteq \kappa$ dır. Yani $\mathcal{K} \subseteq \kappa$ ve $Q_s = \bigvee \mathcal{K}$ yazılır. Bu durumda, kopseudo taban tanımına göre $\mathcal{K}$, $\mathfrak{D}$ de Q_s nin bir kopseudo tabanıdır.

2) $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{K}$ fonksiyonu $\forall V \in \mathcal{V}$ için $\varphi(V) = \sigma(V)$ olarak tanımlansın. Bu durumda, φ nin iyi tanımlı olduğu açıktır. $\mathcal{K}$ nın tanımından ve Yardımcı Teorem 4.1.6 (2) ye göre φ bire-birdir. Yine $\mathcal{K}$ nın tanımından, φ nin örten olduğu açıktır. Buradan Teorem 2.1.3.8 (1) e göre $|\mathcal{V}| = |\mathcal{K}|$ olur.

Teorem 4.1.61: Bir $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa, \sigma)$ tümleyenli ditopolojik doku uzayı ko-T_1 olsun. $P_s = \sigma(Q_s)$ ise,

$$co\text{-}\Psi(s,\mathfrak{D}) \leq \Psi(s,\mathfrak{D})$$

dir.

İspat: $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa, \sigma)$ tümleyenli ditopolojik doku uzayı ko-T_1 olsun. $P_s = \sigma(Q_s)$ olacak şekilde bir P_s p-kümesi verilsin. $\mathfrak{D}$, ko-T_1 olduğundan Teorem 2.2.3.18 (1) e göre $\mathfrak{D}$ de P_s nin bir pseudo tabanı vardır. Buna göre $|\mathcal{V}| \leq \Psi(s,\mathfrak{D})$ olacak şekilde $\mathfrak{D}$ de P_s nin bir $\mathcal{V}$ pseudo tabanı verilsin. $\mathcal{K} \coloneqq \{\sigma(V) \mid V \in \mathcal{V}\}$ olarak tanımlansın. $\mathfrak{D}$ tümleyenli ditopolojik doku uzayı ve $P_s = \sigma(Q_s)$ olduğundan Yardımcı Teorem 4.1.60 (1) e göre $\mathcal{K}$ ailesi $\mathfrak{D}$ de Q_s nin bir kopseudo tabanıdır ve Yardımcı Teorem 4.1.60 (2) ye göre $|\mathcal{V}| = |\mathcal{K}|$ olur. Yani $\mathfrak{D}$ de P_s nin her bir pseudo tabanına eş kuvvette olan $\mathfrak{D}$ de Q_s nin bir kopseudo tabanı vardır. Buradan Tanım 4.1.59 a göre $co\text{-}\Psi(s,\mathfrak{D}) \leq \Psi(s,\mathfrak{D})$ yazılır.

Sonuç 4.1.62: Bir $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa, \sigma)$ tümleyenli ditopolojik doku uzayı ko-T_1 olsun. $\forall s \in S$ için $P_s = \sigma(Q_s)$ ise,

$$co\text{-}\Psi(\mathfrak{D}) \leq \Psi(\mathfrak{D})$$

dir.

İspat: Bir $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa, \sigma)$ tümleyenli ditopolojik doku uzayı ko-T_1 ve $\forall s \in S$ için $P_s = \sigma(Q_s)$ olsun. Bu durumda, Teorem 4.1.61 ye göre $\forall s \in S$ için $co\text{-}\Psi(s,\mathfrak{D}) \leq \Psi(s,\mathfrak{D})$ yazılır. $\mathfrak{D}$ nin pseudo karakteri ve kopseudo karakteri tanımlarından, $co\text{-}\Psi(\mathfrak{D}) \leq \Psi(\mathfrak{D})$ yazılır.

Yardımcı Teorem 4.1.63: $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa, \sigma)$ bir tümleyenli ditopolojik doku uzayı ve $\mathcal{K} \subseteq \kappa$ olsun. $P_s = \sigma(Q_s)$ olacak şekilde $Q_s \in \mathcal{Q}$ verilsin. Bu durumda,

1) Bu durumda, $\mathcal{K}$, $\mathfrak{D}$ de Q_s nin bir kopseudo tabanı ise $\mathcal{V} \coloneqq \{\sigma(K) \mid K \in \mathcal{K}\}$ ailesi de $\mathfrak{D}$ de P_s nin bir pseudo tabanıdır.

2) $\mathcal{K}$, $\mathfrak{D}$ de Q_s nin bir kopseudo tabanı ise $\mathcal{V} := \{\sigma(K) \mid K \in \mathcal{K}\}$ olmak üzere,

$$|\mathcal{K}| = |\mathcal{V}|$$

dir.

İspat: $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa, \sigma)$ bir tümleyenli ditopolojik doku uzayı olsun. Bir $Q_s \in \mathcal{Q}$ q-kümesi verilsin. $\mathcal{K}$, $\mathfrak{D}$ de Q_s nin bir kopseudo tabanı olsun. $\mathcal{V} := \{\sigma(K) \mid K \in \mathcal{K}\}$ olarak tanımlansın.

1) $\mathcal{K}$, $\mathfrak{D}$ de Q_s nin bir kopseudo tabanı olduğundan, $Q_s = \bigvee\mathcal{K}$ yazılır. Buradan $\sigma(Q_s) = \sigma(\bigvee\mathcal{K})$ olur. $P_s = \sigma(Q_s)$ olduğundan $P_s = \sigma(\bigvee\mathcal{K})$ yazılır. $(S, \mathcal{S}, \sigma)$ tümleyenli doku uzayı olduğundan Teorem 2.2.2.6 ya göre $P_s = \sigma(\bigvee\mathcal{K}) = \bigcap\mathcal{V}$ dir. $\mathfrak{D}$ tümleyenli ditopolojik doku uzayı olduğundan, $\mathcal{V} \subseteq \tau$ olur. Yani $\mathcal{V} \subseteq \tau$ ve $P_s = \bigcap\mathcal{V}$ yazılır. Bu durumda, pseudo taban tanımına göre $\mathcal{V}$, $\mathfrak{D}$ de P_s nin bir pseudo tabanıdır.

2) $\varphi : \mathcal{K} \to \mathcal{V}$ fonksiyonu $\forall K \in \mathcal{K}$ için $\varphi(K) = \sigma(K)$ olarak tanımlansın. Bu durumda, φ nin iyi tanımlı olduğu açıktır. $\mathcal{V}$ nin tanımından ve Yardımcı Teorem 4.1.6 (2) ye göre φ bire-birdir. Yine $\mathcal{V}$ nin tanımından, φ nin örten olduğu açıktır. Buradan Teorem 2.1.3.8 (1) e göre $|\mathcal{K}| = |\mathcal{V}|$ olur.

Teorem 4.1.64: Bir $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa, \sigma)$ tümleyenli ditopolojik doku uzayı T_1 olsun. $P_s = \sigma(Q_s)$ ise,

$$\Psi(s, \mathfrak{D}) = co\text{-}\Psi(s, \mathfrak{D})$$

dir.

İspat: $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa, \sigma)$ tümleyenli ditopolojik doku uzayı T_1 olsun. $P_s = \sigma(Q_s)$ olacak şekilde bir Q_s p-kümesi verilsin. $\mathfrak{D}$, T_1 olduğundan Teorem 2.2.3.18 (1) e göre $\mathfrak{D}$ de Q_s

nin bir kopseudo tabanı vardır. Buna göre $|\mathcal{K}| \leq co\text{-}\Psi(s, \mathfrak{D})$ olacak şekilde $\mathfrak{D}$ de Q_s nin bir $\mathcal{K}$ kopseudo tabanı verilsin. $\mathcal{V} := \{\sigma(K) \mid K \in \mathcal{K}\}$ olarak tanımlansın. $\mathfrak{D}$ tümleyenli ditopolojik doku uzayı ve $P_s = \sigma(Q_s)$ olduğundan Yardımcı Teorem 4.1.63 (1) e göre $\mathcal{V}$ ailesi $\mathfrak{D}$ de P_s nin bir pseudo tabanıdır ve Yardımcı Teorem 4.1.63 (2) ye göre $|\mathcal{K}| = |\mathcal{V}|$ olur. Yani $\mathfrak{D}$ de Q_s nin her bir kopseudo tabanına eş kuvvette olan $\mathfrak{D}$ de P_s nin bir pseudo tabanı vardır. Buradan Tanım 4.1.59 a göre $\Psi(s, \mathfrak{D}) \leq co\text{-}\Psi(s, \mathfrak{D})$ yazılır.

Sonuç 4.1.65: Bir $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa, \sigma)$ tümleyenli ditopolojik doku uzayı T_1 olsun. $\forall s \in S$ için $P_s = \sigma(Q_s)$ ise,

$$\Psi(\mathfrak{D}) \leq co\text{-}\Psi(\mathfrak{D})$$

dir.

İspat: Bir $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa, \sigma)$ tümleyenli ditopolojik doku uzayı T_1 ve $\forall s \in S$ için $P_s = \sigma(Q_s)$ olsun. Bu durumda, Teorem 4.1.64 e göre $\forall s \in S$ için $\Psi(s, \mathfrak{D}) \leq co\text{-}\Psi(s, \mathfrak{D})$ yazılır. $\mathfrak{D}$ nin pseudo karakteri ve kopseudo karakteri tanımlarından, $co\text{-}\Psi(\mathfrak{D}) \leq \Psi(\mathfrak{D})$ yazılır.

Sonuç 4.1.66: Bir $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa, \sigma)$ tümleyenli ditopolojik doku uzayı bi-T_1 olsun. $\forall s \in S$ için $P_s = \sigma(Q_s)$ ise,

$$\Psi(\mathfrak{D}) = co\text{-}\Psi(\mathfrak{D})$$

dir.

İspat: Bir $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa, \sigma)$ tümleyenli ditopolojik doku uzayı bi-T_1 ve $\forall s \in S$ için $P_s = \sigma(Q_s)$ olsun. Bu durumda, Sonuç 4.1.62 ve Sonuç 4.1.65 e göre $\Psi(\mathfrak{D}) = co\text{-}\Psi(\mathfrak{D})$ yazılır.

Teorem 4.1.67: Bir $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayı ko-T_1 ise,

$$|\mathcal{P}| \leq nw(\mathfrak{D})^{\Psi(\mathfrak{D})}$$

dir (Polat *et al.* 2014).

İspat: $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{S}$, $|\mathcal{N}| \leq nw(\mathfrak{D})$ olacak şekilde $\mathfrak{D}$ de bir net olsun. $\mathfrak{D}$, co-T_1 olduğundan Teorem 2.2.3.18 (1) e göre $\forall P_s \in \mathcal{P}$ için $P_s = \bigcap \mathcal{V}_{P_s}$ olacak şekilde $\exists \mathcal{V}_{P_s} \subseteq \tau$ vardır. Pseudo taban tanımına göre $\mathfrak{D}$ de her bir p-kümenin pseudo tabanı vardır. Buna göre $\mathcal{V}_{P_s}$, $|\mathcal{V}_{P_s}| \leq \Psi(s, \mathfrak{D}) \leq \Psi(\mathfrak{D})$ olacak şekilde $\mathfrak{D}$ de P_s p-kümesinin bir pseudo tabanı olsun. Pseudo taban tanımına göre $P_s = \bigcap \mathcal{V}_{P_s}$ yazılır. Bu durumda, her bir $V \in \mathcal{V}_{P_s}$ için $P_s \subseteq V$ olur. Ayrıca $V \in \tau$ dur. Net tanımına göre her bir $V \in \mathcal{V}_{P_s}$ için $V \in \tau$ olduğundan $V = \bigvee \mathcal{N}_V$ olacak şekilde $\exists \mathcal{N}_V \subseteq \mathcal{N}$ vardır. Buna göre $P_s \subseteq \bigvee \mathcal{N}_V$ olur. Bu durumda, p-küme tanımından $\exists N_V \in \mathcal{N}_V$ için $P_s \subseteq N_V$ dir. Ayrıca $N_V \subseteq V$ yazılır. Buna göre her bir $V \in \mathcal{V}_{P_s}$ için $P_s \subseteq N_V \subseteq V$ olacak şekilde belirli bir $N_V \in \mathcal{N}$ elemanı seçilerek $\mathcal{N}_{P_s} := \{N_V \in \mathcal{N} \mid V \in \mathcal{V}_{P_s}\}$ olarak tanımlansın. $\varphi_{P_s} : \mathcal{V}_{P_s} \to \mathcal{N}_{P_s}$ fonksiyonu $\varphi_{P_s}(V) = N_V$ olarak tanımlansın. $\mathcal{N}_{P_s}$ nin tanımından dolayı φ_{P_s} iyi tanımlıdır. Yine $\mathcal{N}_{P_s}$ nin tanımından, $\forall N_V \in \mathcal{N}_{P_s}$ için $\varphi_{P_s}(V) = N_V$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{V}_{P_s}$ vardır. Dolayısıyla φ_{P_s} örtendir. Buradan Teorem 2.1.3.8 (3) e göre $|\mathcal{N}_{P_s}| \leq |\mathcal{V}_{P_s}|$ ve dolayısıyla $|\mathcal{N}_{P_s}| \leq \Psi(\mathfrak{D})$ yazılır. $\mathcal{N}_{P_s} \subseteq \mathcal{N}$ ve $|\mathcal{N}_{P_s}| \leq \Psi(\mathfrak{D})$ olduğundan, $\mathcal{N}_{P_s} \subseteq [\mathcal{N}]^{\leq \Psi(\mathfrak{D})}$ olur. Ayrıca $P_s \subseteq \bigcap \mathcal{N}_{P_s} \subseteq \bigcap \mathcal{V}_{P_s} = P_s$ ve dolayısıyla $\bigcap \mathcal{N}_{P_s} = P_s$ yazılır.

$\Psi : \mathcal{P} \to [\mathcal{N}]^{\leq \Psi(\mathfrak{D})}$ fonksiyonu $\Psi(P_s) = \mathcal{N}_{P_s}$ olarak tanımlansın. Ψ fonksiyonunun iyi tanımlı olduğu her bir P_s p-kümesi için $\mathcal{N}_{P_s}$ nin tanımından açıktır. $P_s \neq P_t$ olacak şekilde keyfi $P_s, P_t \in \mathcal{P}$ p-kümeleri verilsin. $P_s \not\subseteq P_t \vee P_t \not\subseteq P_s$ dir. Buradan $P_s \not\subseteq \bigcap \mathcal{N}_{P_t} \vee P_t \not\subseteq \bigcap \mathcal{N}_{P_s}$ yazılır. Bu durumda, $\exists N_{P_s} \in \mathcal{N}_{P_s}$ ve $\exists N_{P_t} \in \mathcal{N}_{P_t}$ için $P_s \not\subseteq N_{P_t} \vee P_t \not\subseteq N_{P_s}$ olur. Buna göre $\exists N_{P_s} \in \mathcal{N}_{P_s}$ için $\bigcap \mathcal{N}_{P_t} = P_t$ olduğundan $N_{P_s} \notin \mathcal{N}_{P_t}$ veya $\exists N_{P_t} \in \mathcal{N}_{P_t}$ için $\bigcap \mathcal{N}_{P_s} = P_s$ olduğundan $N_{P_t} \notin \mathcal{N}_{P_s}$ dir. Buradan $\Psi(P_s) = \mathcal{N}_{P_s} \neq \mathcal{N}_{P_t} = \Psi(P_t)$ yazılır. Dolayısıyla Ψ bire-birdir. Teorem 2.1.3.8 (2) ye göre $|\mathcal{P}| \leq \left|[\mathcal{N}]^{\leq \Psi(\mathfrak{D})}\right|$

olur. Teorem 2.1.3.26 ya göre $|\mathcal{P}| \leq \left|[\mathcal{N}]^{\leq \Psi(\mathfrak{D})}\right| = |\mathcal{N}|^{\Psi(\mathfrak{D})}$ dir. $|\mathcal{N}| \leq nw(\mathfrak{D})$ olduğundan Teorem 2.1.3.23 (4c) ye göre $|\mathcal{P}| \leq nw(\mathfrak{D})^{\Psi(\mathfrak{D})}$ yazılır.

Sonuç 4.1.68: Her ko-T_1 ditopolojik doku uzayı için,

$$|S| \leq nw(\mathfrak{D})^{\Psi(\mathfrak{D})}$$

dir (Polat *et al.* 2014).

İspat: Bir $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayı co-T_1 olsun. Teorem 4.1.1 e göre $|S| = |\mathcal{P}|$ dir. $\mathfrak{D}$, ko-T_1 olduğundan Teorem 4.1.67 ye göre $|S| = |\mathcal{P}| \leq nw(\mathfrak{D})^{\Psi(\mathfrak{D})}$ ve dolayısıyla $|S| \leq nw(\mathfrak{D})^{\Psi(\mathfrak{D})}$ yazılır.

Sonuç 4.1.69: Her ko-T_1 tümleyenli ditopolojik doku uzayı için,

$$|\mathcal{P}| \leq co\text{-}nw(\mathfrak{D})^{\Psi(\mathfrak{D})}$$

dir.

İspat: $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa, \sigma)$ tümleyenli ditopolojik doku uzayı ko-T_1 olsun. Bu durumda, Teorem 4.1.67 ye göre $|\mathcal{P}| \leq nw(\mathfrak{D})^{\Psi(\mathfrak{D})}$ yazılır. Teorem 4.1.53 e göre $nw(\mathfrak{D}) = co\text{-}nw(\mathfrak{D})$ dir.

Sonuç 4.1.70: Her ko-T_1 tümleyenli ditopolojik doku uzayı için,

$$|S| \leq co\text{-}nw(\mathfrak{D})^{\Psi(\mathfrak{D})}$$

dir.

İspat: Bir $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa, \sigma)$ tümleyenli ditopolojik doku uzayı ko-T_1 olsun. Teorem 4.1.1 e göre $|S| = |\mathcal{P}|$ dir. $\mathfrak{D}$, ko-T_1 olduğundan Sonuç 4.1.69 a göre $|S| = |\mathcal{P}| \leq co\text{-}nw(\mathfrak{D})^{\Psi(\mathfrak{D})}$ ve dolayısıyla $|S| \leq co\text{-}nw(\mathfrak{D})^{\Psi(\mathfrak{D})}$ yazılır.

Sonuç 4.1.71: Bir $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa, \sigma)$ tümleyenli ditopolojik doku uzayı bi-T_1 olsun. $\forall s \in S$ için $P_s = \sigma(Q_s)$ ise,

$$|\mathcal{P}| \leq nw(\mathfrak{D})^{\text{co-}\Psi(\mathfrak{D})}$$

dir.

İspat: Bir $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa, \sigma)$ tümleyenli ditopolojik doku uzayı bi-T_1 ve $\forall s \in S$ için $P_s = \sigma(Q_s)$ olsun. Bu durumda, Teorem 4.1.67 ye göre $|\mathcal{P}| \leq nw(\mathfrak{D})^{\Psi(\mathfrak{D})}$ yazılır. Teorem 4.1.66 ya göre $\Psi(\mathfrak{D}) = co\text{-}\Psi(\mathfrak{D})$ yazılır.

Sonuç 4.1.72: Bir $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa, \sigma)$ tümleyenli ditopolojik doku uzayı bi-T_1 olsun. $\forall s \in S$ için $P_s = \sigma(Q_s)$ ise,

$$|S| \leq nw(\mathfrak{D})^{\text{co-}\Psi(\mathfrak{D})}$$

dir.

İspat: Bir $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa, \sigma)$ tümleyenli ditopolojik doku uzayı bi-T_1 olsun. $\forall s \in S$ için $P_s = \sigma(Q_s)$ olsun. Teorem 4.1.1 e göre $|S| = |\mathcal{P}|$ dir. Sonuç 4.1.71 e göre $|S| = |\mathcal{P}| \leq nw(\mathfrak{D})^{\text{co-}\Psi(\mathfrak{D})}$ ve dolayısıyla $|S| \leq nw(\mathfrak{D})^{\text{co-}\Psi(\mathfrak{D})}$ yazılır.

Teorem 4.1.73: Bir $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayı T_1 ise,

$$|Q| \leq co\text{-}nw(\mathfrak{D})^{\text{co-}\Psi(\mathfrak{D})}$$

dir.

İspat: $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{S}$, $|\mathcal{M}| \leq co\text{-}nw(\mathfrak{D})$ olacak şekilde $\mathfrak{D}$ de bir konet olsun. $\mathfrak{D}$, T_1 olduğundan Teorem 2.2.3.18 (1) e göre $\forall Q_s \in \mathcal{Q}$ için $Q_s = \bigvee \mathcal{K}_{Q_s}$ olacak şekilde $\exists \mathcal{K}_{Q_s} \subseteq \kappa$ vardır. Kopseudo taban tanımına göre $\mathfrak{D}$ de her bir q-kümenin kopseudo tabanı vardır. Buna göre $\mathcal{K}_{Q_s}$, $\left|\mathcal{K}_{Q_s}\right| \leq co\text{-}\Psi(s,\mathfrak{D}) \leq co\text{-}\Psi(\mathfrak{D})$ olacak şekilde $\mathfrak{D}$ de Q_s q-kümesinin bir kopseudo tabanı olsun. Kopseudo taban tanımına göre $Q_s = \bigvee \mathcal{K}_{Q_s}$ dir. Bu durumda, her bir $K \in \mathcal{K}_{Q_s}$ için $K \subseteq Q_s$ olur. Ayrıca $K \in \kappa$ yazılır. Konet tanımına göre her bir $K \in \mathcal{K}_{Q_s}$ için $K \in \kappa$ olduğundan $K = \bigcap \mathcal{M}_K$ olacak şekilde $\exists \mathcal{M}_K \subseteq \mathcal{M}$ vardır. Buna göre $\bigcap \mathcal{M}_K \subseteq Q_s$ yazılır. Buradan $P_s \nsubseteq \bigcap \mathcal{M}_K$ olur. Buna göre $\exists M_K \in \mathcal{M}_K$ için $P_s \nsubseteq M_K$ ve dolayısıyla $M_K \subseteq Q_s$ dir. Ayrıca $K \subseteq M_K$ olur. Buna göre her bir $K \in \mathcal{K}_{Q_s}$ için $K \subseteq M_K \subseteq Q_s$ olacak şekilde belirli bir $M_K \in \mathcal{M}_K$ elemanı seçilerek $\mathcal{M}_{Q_s} := \left\{M_K \in \mathcal{M} \mid K \in \mathcal{K}_{Q_s}\right\}$ olarak tanımlansın. $\varphi_{Q_s} : \mathcal{K}_{Q_s} \to \mathcal{M}_{Q_s}$ fonksiyonu $\varphi_{Q_s}(K) = M_K$ olarak tanımlansın. $\mathcal{M}_{Q_s}$ nin tanımından dolayı φ_{Q_s} iyi tanımlıdır. Yine $\mathcal{M}_{Q_s}$ nin tanımından, $\forall M_K \in \mathcal{M}_{Q_s}$ için $\varphi_{Q_s}(K) = M_K$ olacak şekilde bir $K \in \mathcal{K}_{Q_s}$ vardır. Dolayısıyla φ_{Q_s} örtendir. Buradan Teorem 2.1.3.8 (3) e göre $\left|\mathcal{M}_{Q_s}\right| \leq \left|\mathcal{K}_{Q_s}\right|$ ve dolayısıyla $\left|\mathcal{M}_{Q_s}\right| \leq co\text{-}\Psi(\mathfrak{D})$ yazılır. $\mathcal{M}_{Q_s} \subseteq \mathcal{M}$ ve $\left|\mathcal{M}_{Q_s}\right| \leq co\text{-}\Psi(\mathfrak{D})$ olduğundan, $\mathcal{M}_{Q_s} \subseteq [\mathcal{M}]^{\leq co\text{-}\Psi(\mathfrak{D})}$ dir. Ayrıca $Q_s = \bigvee \mathcal{K}_{Q_s} \subseteq \bigvee \mathcal{M}_{Q_s} \subseteq Q_s$ ve dolayısıyla $\bigvee \mathcal{M}_{Q_s} = Q_s$ yazılır.

$\Psi : \mathcal{Q} \to [\mathcal{M}]^{\leq co\text{-}\Psi(\mathfrak{D})}$ fonksiyonu $\Psi(Q_s) = \mathcal{M}_{Q_s}$ olarak tanımlansın. Ψ fonksiyonunun iyi tanımlı olduğu her bir Q_s q-kümesi için $\mathcal{M}_{Q_s}$ nin tanımından açıktır. $Q_s \neq Q_t$ olacak şekilde keyfi $Q_s, Q_t \in \mathcal{Q}$ p-kümeleri verilsin. $Q_s \nsubseteq Q_t \vee Q_t \nsubseteq Q_s$ dir. Buradan $\bigvee \mathcal{M}_{Q_s} \nsubseteq Q_t \vee \bigvee \mathcal{M}_{Q_t} \nsubseteq Q_s$ yazılır. Bu durumda, $\exists M_{Q_s} \in \mathcal{M}_{Q_s}$ ve $\exists M_{Q_t} \in \mathcal{M}_{Q_t}$ için $M_{Q_s} \nsubseteq Q_t \vee M_{Q_t} \nsubseteq Q_s$ olur. Buna göre $\exists M_{Q_s} \in \mathcal{M}_{Q_s}$ için $\bigvee \mathcal{M}_{Q_t} = Q_t$ olduğundan $M_{Q_s} \notin \mathcal{M}_{Q_t}$ veya $\exists M_{Q_t} \in \mathcal{M}_{Q_t}$ için $\bigvee \mathcal{M}_{Q_s} = Q_s$ olduğundan $M_{Q_t} \notin \mathcal{M}_{Q_s}$ dir. Buradan $\Psi(Q_s) = \mathcal{M}_{Q_s} \neq \mathcal{M}_{Q_t} = \Psi(Q_t)$ olur. Dolayısıyla Ψ bire-birdir. Teorem 2.1.3.8 (2) ye göre $|\mathcal{Q}| \leq \left|[\mathcal{M}]^{\leq co\text{-}\Psi(\mathfrak{D})}\right|$ yazılır. Teorem 2.1.3.26 ya göre $|\mathcal{Q}| \leq \left|[\mathcal{M}]^{\leq co\text{-}\Psi(\mathfrak{D})}\right| = |\mathcal{M}|^{\text{co-}\Psi(\mathfrak{D})}$

yazılır. $|\mathcal{M}| \leq co\text{-}nw(\mathfrak{D})$ olduğundan Teorem 2.1.3.23 (4c) ye göre $|Q| \leq co\text{-}nw(\mathfrak{D})^{\text{co-}\Psi(\mathfrak{D})}$ yazılır.

Sonuç 4.1.74: Her T_1 ditopolojik koayrılmış doku uzayı için,

$$|S| \leq co\text{-}nw(\mathfrak{D})^{\text{co-}\Psi(\mathfrak{D})}$$

dir.

İspat: $(S, \mathcal{S})$ doku uzayı koayrılmış ve $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayı T_1 olsun. $(S, \mathcal{S})$ doku uzayı koayrılmış olduğundan Teorem 4.1.1 (2) ye göre $|S| = |Q|$ dur. $\mathfrak{D}$, T_1 olduğundan Teorem 4.1.73 e göre $|S| = |Q| \leq co\text{-}nw(\mathfrak{D})^{\text{co-}\Psi(\mathfrak{D})}$ ve dolayısıyla $|S| \leq co\text{-}nw(\mathfrak{D})^{\text{co-}\Psi(\mathfrak{D})}$ yazılır.

Sonuç 4.1.75: Her T_1 tümleyenli ditopolojik doku uzayı için,

$$|Q| \leq nw(\mathfrak{D})^{\text{co-}\Psi(\mathfrak{D})}$$

dir.

İspat: $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa, \sigma)$ tümleyenli ditopolojik doku uzayı T_1 olsun. Bu durumda, Teorem 4.1.73 e göre $|Q| \leq co\text{-}nw(\mathfrak{D})^{\text{co-}\Psi(\mathfrak{D})}$ yazılır. Teorem 4.1.53 e göre $nw(\mathfrak{D}) = co\text{-}nw(\mathfrak{D})$ dir.

Sonuç 4.1.76: Her T_1 tümleyenli ditopolojik koayrılmış doku uzayı için,

$$|S| \leq nw(\mathfrak{D})^{\text{co-}\Psi(\mathfrak{D})}$$

dir.

İspat: $(S, \mathcal{S})$ doku uzayı koayrılmış ve $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayı T_1 olsun. $(S, \mathcal{S})$ koayrılmış olduğundan Teorem 4.1.1 (2) ye göre $|S| = |Q|$ olur. $\mathfrak{D}$, T_1 tümleyenli ditopolojik doku uzayı olduğundan Sonuç 4.1.75 e göre $|S| = |Q| \leq nw(\mathfrak{D})^{\text{co-}\Psi(\mathfrak{D})}$ ve dolayısıyla $|S| \leq nw(\mathfrak{D})^{\text{co-}\Psi(\mathfrak{D})}$ yazılır.

Sonuç 4.1.77: Bir $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa, \sigma)$ tümleyenli ditopolojik doku uzayı bi-T_1 olsun. $\forall s \in S$ için $P_s = \sigma(Q_s)$ ise,

$$|Q| \leq co\text{-}nw(\mathfrak{D})^{\Psi(\mathfrak{D})}$$

dir.

İspat: Bir $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa, \sigma)$ tümleyenli ditopolojik doku uzayı bi-T_1 ve $\forall s \in S$ için $P_s = \sigma(Q_s)$ olsun. Bu durumda, Teorem 4.1.73 e göre $|Q| \leq co\text{-}nw(\mathfrak{D})^{\text{co-}\Psi(\mathfrak{D})}$ yazılır. Teorem 4.1.66 ya göre $\Psi(\mathfrak{D}) = co\text{-}\Psi(\mathfrak{D})$ yazılır.

Sonuç 4.1.78: Bir $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa, \sigma)$ tümleyenli ditopolojik koayrılmış doku uzayı bi-T_1 olsun. $\forall s \in S$ için $P_s = \sigma(Q_s)$ ise,

$$|S| \leq co\text{-}nw(\mathfrak{D})^{\Psi(\mathfrak{D})}$$

dir.

İspat: $(S, \mathcal{S})$ doku uzayı koayrılmış, $\mathfrak{D} = (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayı bi-T_1 ve $\forall s \in S$ için $P_s = \sigma(Q_s)$ olsun. $(S, \mathcal{S})$ koayrılmış olduğundan Teorem 4.1.1 (2) ye göre $|S| = |Q|$ olur. Bu durumda, Sonuç 4.1.77 ye göre $|S| = |Q| \leq co\text{-}nw(\mathfrak{D})^{\Psi(\mathfrak{D})}$ ve dolayısıyla $|S| \leq co\text{-}nw(\mathfrak{D})^{\Psi(\mathfrak{D})}$ yazılır.

5. SONUÇLAR

Ditopolojik doku uzaylarında tez içinde tanımlamış olduğumuz dikardinal fonksiyonlarla ilgili elde ettiğimiz sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Herhangi bir ditopolojik doku uzayı verildiğinde, açık kümelerin ve kapalı kümelerin sayısı üzerinde bir karşılaştırma yapılamaz. Ancak tümleyenli herhangi bir ditopolojik doku uzayı için açık kümelerin sayısı kapalı kümelerin sayısı kadardır, yani $o(\mathfrak{D}) = c(\mathfrak{D})$ dir.

T_0 aksiyomunu sağlayan herhangi bir ditopolojik doku uzayında q-kümelerinin sayısı ya açık kümelerin sayısı ya da kapalı kümelerin sayısından büyük olamaz, yani $|Q| \leq \max\{o(\mathfrak{D}), c(\mathfrak{D})\}$. Eğer uzay tümleyenli ise q-kümelerin sayısı hem açık kümelerin sayısı hem de kapalı kümelerin sayısından büyük olamaz, yani $|Q| \leq o(\mathfrak{D}) = c(\mathfrak{D})$ dir. Ayrıca, T_0 aksiyomunu sağlayan ditopolojik koayrılmış bir doku uzayı için uzayın eleman sayısı en fazla ya açık küme sayısı ya da kapalı küme sayısı kadardır, yani $|S| \leq \max\{o(\mathfrak{D}), c(\mathfrak{D})\}$.

Herhangi bir ditopolojik doku uzayında, uzayın ağırlığı en fazla uzaydaki açık küme sayısı kadardır, yani $w(\mathfrak{D}) \leq o(\mathfrak{D})$ dir. Ayrıca, uzayın koağırlığı uzaydaki kapalı küme sayısını geçemez, yani $co\text{-}w(\mathfrak{D}) \leq c(\mathfrak{D})$ dir.

Ditopolojik doku uzaylarında ağırlık ve koağırlığın eşit olması gerekmez. Uzayın tümleyenli olması durumunda bu eşitlik geçerlidir, yani $w(\mathfrak{D}) = co\text{-}w(\mathfrak{D})$ dir. Bu özel durumda, uzaydaki açık kümelerinin sayısı ve kapalı kümelerinin sayısı en az uzayın ağırlığı (veya koağırlığı) kadardır.

Bir ditopolojik doku uzayı T_0 ise q-kümelerinin sayısı en fazla ağırlığının kuvvetinin veya koağırlığının kuvvetinin kardinalidir, yani $|Q| \leq 2^{\max\{w(\mathfrak{D}), co\text{-}w(\mathfrak{D})\}}$ dir. Uzay aynı zamanda tümleyenli ise q-kümelerinin sayısı en fazla ağırlığının (veya koağırlığının) kuvvetinin kardinalidir, yani $|Q| \leq 2^{w(\mathfrak{D})} = 2^{co\text{-}w(\mathfrak{D})}$ dir. Ayrıca, T_0 aksiyomunu sağlayan herhangi bir ditopolojik koayrılmış doku uzayının kardinali ağırlığının kuvvetinin veya koağırlığının kuvvetinin kardinalini geçemez, yani $|S| \leq 2^{\max\{w(\mathfrak{D}), co\text{-}w(\mathfrak{D})\}}$ dir.

Herhangi bir ditopolojik doku uzayı için uzayın koyoğunlaşması uzayın ağırlığından, uzayın yoğunlaşması da uzayın koağırlığından büyük olamaz, yani $co\text{-}r(\mathfrak{D}) \leq w(\mathfrak{D})$ ve $r(\mathfrak{D}) \leq co\text{-}w(\mathfrak{D})$ eşitsizlikleri korunur. Buna göre, yoğunlaşma en fazla açık küme sayısı kadardır ve koyoğunlaşma kapalı küme sayısını geçemez. Diğer yandan, herhangi bir ditopolojik doku uzayının yoğunlaşması ve koyoğunlaşması arasında bir eşitlik olması gerekmez. Ancak uzay tümleyenli ise $r(\mathfrak{D}) = co\text{-}r(\mathfrak{D})$ eşitliği korunur.

Keyfi bir ditopolojik doku uzayında, regüler açık kümelerin sayısı en fazla duyarlı yoğunluğunun kuvveti kadardır ve regüler kapalı kümelerin sayısı en fazla koduyarlı koyoğunluğunun kuvveti kadardır, yani $|RO(\mathfrak{D})| \leq 2^{pd(\mathfrak{D})}$ ve $|RC(\mathfrak{D})| \leq 2^{co\text{-}pd(\mathfrak{D})}$ eşitsizlikleri korunur. Regüler açık kümelerin sayısı ve regüler kapalı kümelerin sayısı arasında bir eşitlik olması gerekmez. Ancak tümleyenli ditopolojik doku uzaylarında regüler açık kümelerin ve regüler kapalı kümelerin sayısı eşittir, yani $|RO(\mathfrak{D})| = |RC(\mathfrak{D})|$ dir. Sonuç olarak, şunlar söylenir: tümleyenli ditopolojik doku uzayında regüler açık kümelerin sınıfının kardinali koduyarlı koyoğunluğunun kuvvetininin kardinalini geçemez; regüler kapalı kümelerin sayısı en fazla duyarlı yoğunluğunun kuvveti kadardır.

Tümleyenli bir ditopolojik doku uzayının duyarlı yoğun kümelerinin sınıfı σ-azalan kardinalli ise duyarlı yoğunluğu, koduyarlı koyoğunlu için bir üst sınırdır, yani $co\text{-}pd(\mathfrak{D}) \leq pd(\mathfrak{D})$ eşitsizliği korunur. Bu özel durum altında, hem regüler açık kümelerin sayısı hem de regüler kapalı kümelerin sayısı, uzayın koduyarlı koyoğunluğunun kuvveti ve duyarlı yoğunlunun kuvveti arasında bulunamaz.

Herhangi bir regüler ditopolojik doku uzayının ağırlığı, duyarlı yoğunluğunun kuvvetininin kardinalini geçemez ve koağırlığı da en fazla koduyarlı koyoğunluğunun kuvvetinin kardinalidir, yani $w(\mathfrak{D}) \leq 2^{pd(\mathfrak{D})}$ ve $co\text{-}w(\mathfrak{D}) \leq 2^{co\text{-}pd(\mathfrak{D})}$ dir. Özel olarak, tümleyenli bir ditopolojik doku uzayının duyarlı yoğun kümelerinin sınıfı σ-azalan kardinalli ise, uzayın hem yoğunluğu hem de koyoğunluğu, duyarlı yoğunluğunun kuvvetinin kardinali ve koduyarlı koyoğunluğunun kuvvetinn kardinali arasında bulunamaz.

Keyfi bir T_0 ditopolojik doku uzayında q-kümelerinin sayısı en fazla net ağırlığının kuvvetinin veya konet ağırlığının kuvvetinin kardinalidir, yani $|Q| \leq 2^{\max\{nw(\mathfrak{D}), co\text{-}nw(\mathfrak{D})\}}$ dir. Ditopolojik doku uzaylarında net ağırlık ve konet ağırlığın eşit olması gerekmez. Uzayın tümleyenli olması durumunda bu eşitlik geçerlidir, yani $nw(\mathfrak{D}) = co\text{-}nw(\mathfrak{D})$ dir. Bir tümleyenli ditopolojik doku uzayı T_0 ise q-kümelerinin sayısı en fazla net ağırlığının (veya konet ağırlığının) kuvvetinin kardinalidir, yani $|Q| \leq 2^{nw(\mathfrak{D})} = 2^{co\text{-}nw(\mathfrak{D})}$ dir. Bunun yanı sıra, T_0 aksiyomunu sağlayan herhangi bir ditopolojik koayrılmış doku uzayının kardinali net ağırlığının kuvvetinin kardinalini veya konet ağırlığının kuvvetinin kardinalini geçemez, yani $|S| \leq 2^{\max\{nw(\mathfrak{D}), co\text{-}nw(\mathfrak{D})\}}$ dir.

Keyfi bir T_1 ditopolojik doku uzayı için $\forall s \in S$ için $P_s = \sigma(Q_s)$ ise uzayın pseudo karakteri kopseudo karakterini geçemez. Yine keyfi bir ko-T_1 ditopolojik doku uzayı için $\forall s \in S$ için $P_s = \sigma(Q_s)$ ise uzayın kopseudo karakteri pseudo karakterini geçemez. Bu bilgiler ışığında, bi-T_1 ditopolojik doku uzaylarında $\forall s \in S$ için $P_s = \sigma(Q_s)$ ise, pseudo karakteri ile kopseudo karakteri her zaman eşittir, yani $\Psi(\mathfrak{D}) = co\text{-}\Psi(\mathfrak{D})$ olur.

Herhangi bir T_1 ditopolojik doku uzayı için p-kümelerinin sınıfı en fazla $co\text{-}nw(\mathfrak{D})^{\text{co-}\Psi(\mathfrak{D})}$ kardinale sahiptir. Özel olarak, her T_1 ditopolojik koayrılmış doku uzayı için $co\text{-}nw(\mathfrak{D})^{\text{co-}\Psi(\mathfrak{D})}$ kardinali uzayın üst sınırıdır, yani $|S| \leq co\text{-}nw(\mathfrak{D})^{\text{co-}\Psi(\mathfrak{D})}$ dir. Ko-T_1 ditopolojik doku uzaylarında da p-kümelerinin sınıfının kardinali ve dolayısıyla uzayın kardinali $nw(\mathfrak{D})^{\Psi(\mathfrak{D})}$ kardinalini geçemez.

KAYNAKLAR

Alexandroff, P. and Urysohn P., 1929. Mémoire Sur Les Espaces Topologiques Compacts Dédié À Monsieur D. Egoroff. Verhandel. Koninkl. Nederl. Akad. Wet. Amsterdam, 14 (1).

Arhangel'skii, A.V., 1969. On the Cardinality of Bicompacta Satisfying the First Axiom of Countability. Soviet Math. Dokl, 10 (4).

Bernays, P., 1991. Axiomatic set theory. Courier Dover Publications, 256 p, USA.

Birkhoff, G., 1967. Lattice theory. American Mathematical Society, 420 p, USA.

Bourbaki N., 1998. Elements of Mathematics - General Topology: Chapters 1-4. Springer, 437 p, Berlin.

Brown L.M. Relations and functions on texture spaces, preprint.

Brown, L.M., 1993. Ditopological Fuzzy Structures I. Fuzzy Systems and A.I. Magazine, 3 (1).

Brown, L.M., 1993. Ditopological Fuzzy Structures II. Fuzzy Systems and A.I. Magazine, 3 (2).

Brown, L.M. and Diker M., 1998. Ditopological Texture Spaces and Intuitionistic Sets. Fuzzy Sets and Systems, 98 (2) 217 – 224.

Brown, L.M. and Ertürk R., 2000. Fuzzy Sets As Texture Spaces, I. Representation Theorems. Fuzzy Sets and Systems, 110 (2) 227 – 235.

Brown, L.M. and Ertürk R., 2000. Fuzzy Sets As Texture Spaces, II. Subtextures and Quotient Textures. Fuzzy Sets and Systems, 110 (2) 237 – 245.

Brown, L.M., Ertürk R. and Dost Ş., 2004. Ditopological Texture Spaces and Fuzzy Topology, I. Basic Concepts. Fuzzy Sets and Systems 147 (2) 171 – 199.

Brown, L.M., Ertürk R. and Dost Ş., 2004. Ditopological Texture Spaces and Fuzzy Topology, II. Topological Considerations. Fuzzy Sets and Systems, 147 (2) 201 – 231.

Brown, L.M., Ertürk R. and Dost Ş., 2006. Ditopological Texture Spaces and Fuzzy Topology, III. Separation Axioms. Fuzzy Sets and Systems, 157 (14) 1886 – 1912.

Brown, L.M. and Gohar M.M., 2009. Compactness in Ditopological Texture Spaces. Hacettepe J. Math. and Stat, 38 (1) 21 - 43.

Brown, L.M. and Gohar M.M., 2010. Strong Compactness of Ditopological Texture Spaces. Icms International Conference On Mathematıcal Science, 1309 (1).

Čech, E. and Pospíšil L.B., 1938. Sur Les Espaces Compacts. Publ. Fac. Sci, Univ. Masaryk Brno, 258 3-7.

Charlesworth, A., 1977. On the Cardinality of A Topological Space. Proceedings of the American Mathematical Society, 66 (1) 138 – 142.

Comport, W.W., 1971. A Survey of Cardinal Invariants. General Topology and Its Applications, 1 (2) 163 – 199.

De Groot, J., 1965. Discrete Subspaces of Hausdorff Spaces. Bulletin De L Academie Polonaise Des Sciences-Serie Des Sciences Mathematiques Astronomiques Et Physiques, 13 (8) 537.

Enderton, H.B., 1977. Elements of Set Theory. Academic Press, 279 p, New York.

Engelking, R., 1989. Chapter 1: Topological Spaces. General Topology, Ed: Ryszard Engelking. Heldermann Verlag, Berlin, 11-64.

Engelking, R., 1989. Chapter 2: Operations On Topological Spaces. General Topology, Ed: Ryszard Engelking. Heldermann Verlag, Berlin, 65-122.

Ergun, N., 2005. Kümeler Teorisine Giriş. Nobel Yayın Dağıtım, 630 p, Ankara.

Ertürk, R., 1993. Separation Axioms in Fuzzy Topology Characterized by Bitopologies. Fuzzy Sets and Systems, 58 206-209.

Gierz, G., Hofmann K.H., Keimel K., Lawson J.D., Mislove M., and Scott, D.S., 1980. A Compendium of Continuous Lattices. Spring, 371 p, Berlin.

Hewitt, E., 1946. A Remark On Density Characters. Bulletin of the American Mathematical Society, 52 (8) 641-643.

Holz, M., Steffens K. and Weitz E., 2009. Introduction to Cardinal Arithmetic. Birkhäuser Verlag, 304 p, Basel, Switzerland.

Juhász, I., 1979. Cardinal Functions in Topology. Math. Centre Tracts, 34 1 – 150.

Juhász, I., 1980. Cardinal Functions in Topology - Ten Years Later. Math. Centre Tracts, 123 2 – 97.

Kunen, K. and Vaughan J.E., 1984. Cardinal Functions I. Handbook of Set-Theoretic Topology, Ed: Kenneth Kunen and Jerry E. Vaughan. North-Holland, Amsterdam, 1 – 61.

Levy, A., 2012. Basic Set Theory. Courier Dover Publications, 398 p, USA.

Munkres, J.R., 1975. Topology. Prenctice Hall, 537 p, US.

Marczewski, E., 1947. Séparabilité Et Multiplication Cartésienne Des Espaces Topologiques. Fundamenta Mathematicae 34 (1) 127-143.

Polat, K., Elmalı C.S. and Uğur T., 2014. Cardinal Functions On Ditopological Texture Spaces. Life Sci J, 11 (9), 293-297.

Pondiczery, E.S., 1944. Power Problems in Abstract Spaces. Duke Mathematical Journal, 11 (4) 835-837.

Schlöder, J.J., 2013. Ordinal Arithmetic. Mathematical Institute of the University of Bonn. http://goo.gl/ulAJB7 (09.10.2014).

Sierpiński, W., 1958. Cardinal and Ordinal Numbers. Państwowe Wydawn Naukowe. 487 p, Warszawa, Poland.

Tarski, A., 1956. Ordinal Algebras. North-Holland Publishing Company, 133 p, Amsterdam.

Uğur, A.A., 2007. Doku Uzaylarının Kompaktlaştırmaları. Doktora Tezi, Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Willard, S., 2004. General Topology. Courier Dover Publications, 384 p, USA.

Yıldız, F. and Özçag S., 2013. the Ditopology Generated by Pre-Open and Pre-Closed Sets, and Submaximality in Textures. Filomat, 27 (1) 95 – 107.

Yıldız, G., 2005. Doku Uzaylarında Ditopolojik Uzaylar. Yüksek Lisans Tezi, Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

ÖZGEÇMİŞ

1985 Erzurum doğumlu Kadirhan POLAT, 2002 yılında Mehmet Akif Ersoy Lisesi'nden mezun oldu. Aynı yılda Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde lisans eğitimine başlamış ve 2006 yılında mezun oldu. 2007 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Topoloji Bilim Dalı'nda yüksek lisans eğitimine başladı. 2010 yılında yüksek lisans eğitimini tamamlayarak aynı yılda Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Topoloji Anabilim Dalı'nda Araştırma Görevlisi olarak göreve başladı. 2011 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Topoloji Bilim Dalı'nda doktora eğitimine başlayan Polat, aynı yıl Atatürk Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı Topoloji Bilim Dalı'nda ÖYP kapsamında araştırma görevlisi olarak görevlendirildi. Halen görevine devam etmektedir.