# SCHRÖDİNGER DENKLEMİ İÇİN VERİLMİŞ BİR OPTİMAL KONTROL PROBLEMİNDE DÜZGÜN ÇÖZÜM İNCELEMESİ

**Hülya DURUR**

**Doktora Tezi**
**Matematik Anabilim Dalı**
**Uygulamalı Matematik Bilim Dalı**
**Prof. Dr. Murat SUBAŞI**
**2014**

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**DOKTORA TEZİ**

# SCHRÖDİNGER DENKLEMİ İÇİN VERİLMİŞ BİR OPTİMAL KONTROL PROBLEMİNDE DÜZGÜN ÇÖZÜM İNCELEMESİ

**Hülya DURUR**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**
**Uygulamalı Matematik Bilim Dalı**

**ERZURUM**
**2014**

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAY FORMU

**SCHRÖDİNGER DENKLEMİ İÇİN VERİLMİŞ BİR OPTİMAL KONTROL PROBLEMİNDE DÜZGÜN ÇÖZÜM İNCELEMESİ**

Prof. Dr. Murat SUBAŞI danışmanlığında, Hülya DURUR tarafından hazırlanan bu çalışma 16 /12/2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı – Uygulamalı Matematik Bilim Dalı'nda Doktora olarak **oybirliği** ile kabul edilmiştir.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Başkan | : Prof. Dr. Alaattin ESEN | *İmza* | : |
| Üye | : Prof. Dr. Murat SUBAŞI | *İmza* | : |
| Üye | : Yrd. Doç. Dr. Arzu AYKUT | *İmza* | : |
| Üye | : Yrd. Doç. Dr. Tevfik İŞLEYEN | *İmza* | : |
| Üye | : Yrd. Doç. Dr. Yeşim SARAÇ | *İmza* | : |

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu 18/12/2014 tarih ve 50/1689 nolu kararı ile onaylanmıştır.

**Prof. Dr. İhsan EFEOĞLU**
**Enstitü Müdürü**

**Not:** Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

# ÖZET

Doktora Tezi

**SCHRÖDİNGER DENKLEMİ İÇİN VERİLMİŞ BİR OPTİMAL KONTROL PROBLEMİNDE DÜZGÜN ÇÖZÜM İNCELEMESİ**



Hülya DURUR

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Murat SUBAŞI



Bu tezde, Schrödinger denklemi için verilmiş bir optimal kontrol problemi ele alınmıştır. İlk bölümde optimal kontrol teorisi hakkında genel bir giriş yapıldıktan sonra, ikinci bölümde tezin oluşturulmasında temel teşkil edecek olan diğer bölümlerde kullanılan teoremler, lemmalar ve bazı matematiksel kavramlara yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, ele alınan optimal kontrol problemi, olası kontrollerin kümesi olan ölçülebilir, kendisi ve birinci türevi karesel integrallenebilir fonksiyonlar uzayında incelenmeye başlanmıştır. İlk olarak Schrödinger başlangıç-sınır değer probleminin çözümünün varlığı, tekliği ve kararlılığına ait sonuçlar ispatlanmıştır. Sonra optimal kontrol probleminin çözümünün varlığı ve tekliğine ait sonuçlar tartışılmıştır. Sonrasında tezin bilime getirdiği yenilik olarak ifade edilebilen seçilen fonksiyonelin diferensiyellenebilmesi ve eşlenik problemin elde edilmesi konuları incelenmiştir. Daha sonra incelenen fonksiyonel için gradyenin sürekliliği ispat edilerek bu sayede nümerik incelemeler yapılmasına imkânlar hazırlanmıştır. Son olarak optimal çözüme yakınsayacak bir minimalleştirici dizi kurulması için uygun bir algoritma verilmiştir.



**2014, 60 Sayfa**

**Anahtar Kelimeler:** Optimal Kontrol, Frechet Diferansiyellenebilme, Zamana Bağlı Schrödinger Denklemi.

## ABSTRACT

Ph. D. Thesis

**INVESTIGATING REGULAR SOLUTION ON AN OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR GIVEN SCHRÖDİNGER EQUATION**

**Hülya DURUR**

Ataturk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Department of Applied Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Murat SUBAŞI

In this thesis, an optimal control problem for a given Schrödinger equation has been considered. In the first section after a general introduction about the theory of optimal control, in the second section, the theorems, lemmas and some mathematical concepts which will be used in other sections and constitute the basis of the thesis, have been given. In the third section, the considered optimal control problem has been started to investigate in the set of admissible controls which consists of measurable, square integrable functions with their first derivatives. First, the results about existence, uniqueness and stability of the solution of Schrödinger initial-boundary value problem have been proven. Then, the outcomes of existence and uniqueness of the solution of optimal control problems have been discussed. Consequently, the issues of differentiability of the functional and obtaining the adjoint problem that can be taken as innovation to science of this thesis, have been examined. By proving the continuity of the considered functional, opportunities to deal with numerical treatment have been held. Finally, an appropriate algorithm has been given for establishing a minimizing sequence which converges to optimal solution.

**2014, 60 Pages**

**Keywords:** Optimal Control, Frechet Differentiability, Time Dependent Schrödinger Equation.

## TEŞEKKÜR

Doktoram süresince Ardahan Üniversitesi Yönetiminin sağlamış olduğu kolaylıklardan dolayı özelliklede Ardahan Üniversitesi Rektörü Sayın Prof. Dr. Ramazan KORKMAZ'a teşekkürlerimi sunarım.

Doktora tezi olarak sunduğum bu çalışmada, değerli bilgi ve katkılarını benden esirgemeyen, bana matematik ile ilgili farklı bakış açısı ve bilimsel düşünme becerisi kazandıran ve bizzat tezimle ilgilenen Atatürk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyelerinden danışman hocam Sayın Prof. Dr. Murat SUBAŞI'na sonsuz teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Çalışmamın her safhasında büyük bir sabırla yanımda yer alarak tezim hakkındaki görüş ve düşüncelerini esirgemeyen Seda İĞRET ARAZ'a; eğitim ve öğretimimin ilk basamaklarını oluşturan, bende okuma bilinci uyandıran, beni bu yönde yönlendiren ve çalışmalarım esnasında maddi-manevi desteğiyle her zaman yanımda olan canım aileme -özellikle de annem Neslihan DURUR ve babam Ali DURUR'a- sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

**Hülya DURUR**
**Kasım, 2014**

## İÇİNDEKİLER

# SİMGELER DİZİNİ

| | |
|---|---|
| $\forall$ | Her yerde |
| $\overset{\circ}{\forall}$ | Hemen hemen her yerde |
| $i=\sqrt{-1}$ | Sanal birim |
| $T>0$ | Verilen sayı |
| $\Omega=(0,l)\times(0,T)$ | $\mathbb{R}^2$ uzayında verilen bölge |
| $\Omega_t=(0,l)\times(0,t)$ | $\mathbb{R}^2$ uzayında verilen bölge |
| $L_2(0,l)$ | $(0,l)$ aralığında ölçülebilir ve karesi integrallenebilir fonksiyonlar uzayı |
| $L_2(\Omega)$ | $\Omega$ aralığında ölçülebilir ve karesi integrallenebilir fonksiyonlar uzayı |
| $H^1(0,l)$ | Kendisi ve birinci mertebeden genelleştirilmiş türevleri $L_2(0,l)$ uzayına ait olan fonksiyonların oluşturduğu Hilbert uzayı |
| $H^1(\Omega)$ | Kendisi ve birinci mertebeden genelleştirilmiş türevleri $L_2(\Omega)$ uzayına ait olan fonksiyonların oluşturduğu Hilbert uzayı |
| $o\left(\|\Delta\varphi\|^2\right)$ | $\|\Delta\varphi\|^2$ ifadesinden daha hızlı sıfıra giden terim |
| $\delta_k^m$ | Kronecker sabiti |

# 1. GİRİŞ

Fiziğin önemli alanlarından biri olan mekanik süreçleri açıklayan Schrödinger denklemi, aslında kuantum mekanik süreçlerin ana denklemidir. Parçacıkların durumunu açıklayan mekanik süreçler iki kısma ayrılır:

1. Klasik Mekanik Süreçler,
2. Kuantum Mekanik Süreçler.

Bir diğer ismi "Newton Mekanik Süreçler" olan klasik mekanik süreçlerde, bir cismin başlangıç durumu ve hızı belli bir zaman (başlangıç) anında biliniyor ise bu cismin istenilen zaman anında durumu belirlenebilir. Ancak kuantum mekanik süreçlerde durum farklıdır. Eğer bir parçacığın durumu belli ise hızı belli değil; hızı belli ise durumu belli değildir. Bu duruma kuantum mekanikte "Belirsizlik Prensibi'' denir. Bu nedenle kuantum mekanik objeleri durumunu bir tek olarak belirlemek mümkün değildir. Kuantum mekanik objenin durumu belli bir olasılıkla belirlenebilir. Kuantum mekanik süreçler çeşitli diferansiyel denklemler ile açıklanabilir. 1926 yılında Ervin Schrödinger tarafından incelenen bu tür diferansiyel denklemler, günümüzde "Schrödinger Denklemi" olarak bilinmektedir.

Şimdi, $\Omega := (x,t) \in (0,l) \times (0,T)$ bölgesinde verilmiş

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - v(t)\psi = 0, \ (x,t) \in \Omega \tag{1.1}$$

$$\psi(x,0) = \varphi(x), \ \psi(0,t) = \psi(l,t) = 0 \tag{1.2}$$

Schrödinger başlangıç-sınır değer problemi ele alınsın.

Bu denklem, manyetik alanda hareket eden kuantum mekaniksel bir parçacık için dalga fonksiyonunun denklemidir. Burada $\hbar = 1$ Planck sabiti ve $m$ parçacığın kütlesi olup $v(t)$ fonksiyonu $(0,T)$ aralığında sisteme etki eden dış elektrik alanının gerilimi olarak kontrol fonksiyonu rolünü oynar. $\psi(x,t)$ parçacığa eşlik eden dalga fonksiyonudur. Parçacığın $(0,l)$ bölgesinin içinde hareket ettiği ve başlangıç durumunun $\varphi(x)$ olduğu biliniyorsa (1.2) başlangıç-sınır şartları yazılabilir.

Bu tür kuantum sisteminin kontrolü şöyle ifade edilebilir:

Parçacığın $t = T$ anında $y(x)$ konumunda olma olasılığını maksimum yapacak $v(t)$ potansiyel fonksiyonu nedir? Başka bir deyişle

$$|P(T)|^2 = \left| \int_0^l \psi(x,T;v)\,\overline{y}(x)\,dx \right|^2 \qquad (1.3)$$

olasılık fonksiyonunu maksimum yapacak $v(t)$ fonksiyonu nedir? Önce

$$J(v) = \int_0^l |\psi(x,T;v) - y(x)|^2\, dx \qquad (1.4)$$

fonksiyoneli oluşturulup bu fonksiyonel

$$J(v) = \int_0^l |\psi(x,T;v) - y(x)|^2\, dx = \int_0^l |\psi(x,T;v)|^2\, dx + \int_0^l |y(x)|^2\, dx - 2\,\mathrm{Re}\int_0^l \psi(x,T;v)\,\overline{y}(x)\,dx$$

şeklinde düşünülürse, $y(x)$ önceden verilmiş konum olduğundan bununla ilgili olasılık

$$\int_0^l |y(x)|^2\, dx = 1$$

olacaktır. Ayrıca hesaplanacak $\psi(x,T;v)$ değeri için

$$\int_0^l |\psi(x,T;v)|^2 \, dx \le c(sabit)$$

olacağı göz önünde bulundurulursa (1.3) fonksiyonelini maksimum yapma problemi (1.4) fonksiyonelini minimum yapma problemine denktir.

Genel olarak $v(t)$ potansiyel fonksiyonu $(0,T)$ aralığında süreksiz fonksiyondur. Bu fonksiyonu, karesiyle integrallenebilen fonksiyonların sınıfı olan $L_2(0,T)$ uzayından seçmek daha uygun olacaktır.

Bu şekildeki problemler daha önce İskenderov ve Tagiyev 1983; Butkovsky *et al.* 1984; Vorontsov and Shmalgauzen 1985; Hao 1986; Potapov *et al.* 1987; Silla 1991; Yagubov *et al.* 1997, 2012; Mahmudov 1997; Yıldız vd 1997; Subaşı 2002, 2004; Baundouin 2005; Yetişkin vd 2010 gibi bilim insanlarının çalışmalarında incelenmiştir. Bu çalışmalarda (1.1)-(1.2) problemi için

$$I_\alpha(v) = \int_0^l |\psi(x,T;v) - y(x)|^2 \, dx + \alpha \|v - w\|^2_{L_2(0,T)} \tag{1.5}$$

fonksiyonelinin

$$\hat{V} = \left\{ v(t):\ v \in L_2(0,T),\ \ \|v(t)\|_{L_2(0,T)} \le \tilde{v} \right\} \tag{1.6}$$

kümesinde minimumu incelenmiştir. Çözümün varlığı ve tekliğine ait optimal kontrol teorisini geliştiren sonuçlar elde edilmiştir. Fakat çözümün seçilen uzayda kararlılığı konusunda kesin sonuçlar elde edilememiştir. Yani,

$$\lim_{m\to\infty} I_\alpha\left(v^m\right) = I_{\alpha*} = \min_{v\in V} I_\alpha\left(v\right) \tag{1.7}$$

olacak şekilde $I_\alpha(v)$ fonksiyoneli için öyle bazı $\{v^m\}\subset\hat{V}$ minimalleştirici dizileri vardır ki bu diziler, $L_2(0,T)$ normumda $v^*$ minimum elemanına yakınsamayabilir, yani

$$\lim_{m\to\infty}\left\|v^m(t)-v^*(t)\right\|_{L_2(0,T)} \not\to 0 \tag{1.8}$$

durumuyla karşılaşılabilir.

Bu çalışmanın amacı, $I_\alpha(v)$ fonksiyonelini $\hat{V}$ kümesinde minimalleştirme problemi yerine

$$J_\alpha(v) = \int_0^l \left|\psi(x,T;v)-y(x)\right|^2 dx + \alpha\left\|v-w\right\|^2_{H^1(0,\mathrm{T})}$$

fonksiyonelini oluşturup, bu fonksiyonelin

$$V = \left\{v(t):\ v\in H^1(0,T), \left\|v(t)\right\|_{H^1(0,T)} \le \tilde{v}\right\}$$

kümesinde minimalleştirilmesi problemini incelemektir. $H^1(0,T)$ uzayının $L_2(0,T)$ uzayına kompakt gömülmesi sayesinde, $H^1(0,T)$ uzayında bulunacak zayıf yakınsayan minimalleştirici dizi, $L_2(0,T)$ uzayında güçlü yakınsayacaktır. Yani, $V$ kümesinde

$$\lim_{m\to\infty} J_\alpha\left(v^m\right) = J_{\alpha*} = \min_{v\in V} J_\alpha\left(v\right) \tag{1.9}$$

problemini inceleyerek istenen

$$\lim_{m\to\infty}\left\|v^m(t)-v^*(t)\right\|_{L_2(0,T)}=0$$

yakınsaması elde edilecektir.

Diğer yandan $L_2(0,T)$ uzayında güçlü yakınsama elde etmek için (1.9) problemi seçildiği zaman bazı sorunlar ortaya çıkabilir. Örneğin $H^1(0,T)$ uzayındaki gradyen nasıl hesaplanmalıdır? Bu gradyenin Lipschitz sürekliliği nasıl ispatlanabilir?

Literatürde, $H^1(0,T)$ uzayında bu tip soruların cevapları eksiktir. Tezde bu sorular ele alınmıştır.

Böylece tezde incelenen optimal kontrol problemi,

$$J_\alpha(v)=\int_0^l\left|\psi(x,T;v)-y(x)\right|^2dx+\alpha\left\|v-w\right\|^2_{H^1(0,\mathrm{T})}$$

fonksiyonelini

$$V=\left\{v(t):\ v\in H^1(0,T),\left\|v(t)\right\|_{H^1(0,T)}\le\tilde{v}\right\}$$

kümesinde

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-v(t)\psi=0,\ \ (x,t)\in\Omega$$

$$\psi(x,0)=\varphi(x),\ \ \psi(0,t)=\psi(l,t)=0,\ t\in(0,T)$$

şartları altında minimum yapma problemidir. Burada $\hbar=1$ ve $a_0=1/2m$ olarak alınmıştır.

Tezin 2. bölümünde, bu tezin oluşturulmasında temel teşkil edecek olan bir sonraki bölümlerde kullanılan teoremler ve lemmalar ile bazı kavramların tanımları verilmiştir.

3.1. bölümde Schrödinger başlangıç-sınır değer probleminin genelleştirilmiş çözümünün varlığı, tekliği ve kararlılığı Toyoğlu (2010) çalışmasından yararlanılarak ispatlanmıştır.

3.2. bölümde optimal kontrol probleminin çözümünün varlığı ve tekliğine ait sonuçlar tartışılmıştır.

3.3. bölümde tezin bilime getirdiği yenilik olarak ifade edilebilecek, seçilen fonksiyonelin diferensiyellenebilmesi ve eşlenik problemin elde edilebilmesi konuları incelenmiştir. Ayrıca bölümde bu fonksiyonel için gradyenin sürekliliği ispat edilerek bu sayede nümerik incelemeler yapılmasına imkânlar hazırlanmıştır.

3.4. bölümde optimal çözüme yakınsayan bir minimalleştirici dizi kurulması adımları ele alınmıştır.

## 2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde, (Ladyzhenskaya *et al.* 1968; Lions and Magenes 1972; Kolmogorov and Fomin 1989; Vasilyev 1981) kitaplarından ve Goebel (1979) çalışmasından yararlanılarak ileride kullanılacak olan bazı tanım ve teoremler verilecektir.

**Tanım 2.1:** $L_2(\Omega)$ Hilbert uzayı olup elemanları $\Omega$ bölgesinde ölçülebilir ve modülünün karesiyle integrallenebilir fonksiyonların uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde verilmektedir:

$$\langle \psi, \phi \rangle_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} \psi(x,t)\bar{\phi}(x,t)\,dxdt,$$
$$\|\psi\|_{L_2(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle_{L_2(\Omega)}}.$$

Örneğin, $x^{-\alpha}$ fonksiyonları ancak $\alpha < \frac{1}{2}$ için $L_2(0,1)$ uzayının elemanıdır.

**Tanım 2.2:** $L_\infty(\Omega)$ Banach uzayı olup $\Omega$ bölgesinde ölçülebilir sınırlı ve sonlu

$$\|\psi\|_{L_\infty(\Omega)} = \underset{(x,t)\in\Omega}{ess\sup}|\psi(x,t)|$$

normuna sahip $\psi = \psi(x,t)$ fonksiyonlarının uzayıdır.

**Tanım 2.3:** $C^k([0,T],B)$ Banach uzayı olup elemanları $[0,T]$ aralığında tanımlanmış $k$. mertebeden sürekli türevlere sahip ve değerleri $B$-Banach uzayına ait fonksiyonların uzayıdır. Burada norm aşağıdaki şekilde belirtilmektedir:

$$\|u\|_{C^k([0,T],B)} = \sum_{m=0}^{k} \max_{0\le t\le T} \left\| \frac{d^m u(t)}{dt^m} \right\|_B < +\infty.$$

**Tanım 2.4:** $H^1(\Omega)$ Hilbert uzayı olup elemanları, kendisi ve değişkenlerine göre birinci mertebeden genelleştirilmiş kısmi türevleri, $L_2(\Omega)$ uzayından olan Sobolev uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\langle \psi, \phi \rangle_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega \left( \psi(x,t)\overline{\phi}(x,t) + \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x}\frac{\partial \overline{\phi}(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t}\frac{\partial \overline{\phi}(x,t)}{\partial t} \right) dxdt,$$

$$\|\psi\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle_{H^1(\Omega)}}.$$

$\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ uzayı $H^1(\Omega)$ uzayının alt uzayı olup $\Omega$ bölgesinde sürekli türevlenebilir ve $\Omega$'nın sınırında sıfıra dönüşen fonksiyonlar, bu uzayda yoğundur.

**Tanım 2.5:** $H^2(0,l)$ Hilbert uzayı olup elemanları, kendisi ve ikinci mertebeye kadar genelleştirilmiş türevleri $L_2(0,l)$ uzayından olan Sobolev uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde gösterilmektedir:

$$\langle \psi, \phi \rangle_{H^2(0,l)} = \int_0^l \left( \psi(x)\phi(x) + \frac{\partial \psi(x)}{\partial x}\frac{\partial \phi(x)}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2} \right) dx,$$

$$\|\psi\|_{H^2(0,l)} = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle_{H^2(0,l)}}.$$

**Tanım 2.6:** $H^{2,1}(\Omega)$ Hilbert uzayı olup elemanları, kendisi, birinci değişkenine göre ikinci mertebeye kadar ve ikinci değişkenine göre birinci mertebeden genelleştirilmiş kısmi türevleri $L_2(\Omega)$ uzayından olan Sobolev uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\langle \psi,\phi \rangle_{H^{2,1}(\Omega)} = \int_{\Omega} \left( \psi(x,t)\overline{\phi}(x,t) + \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x}\frac{\partial \overline{\phi}(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \overline{\phi}(x,t)}{\partial x^2} \right.$$

$$\left. + \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t}\frac{\partial \overline{\phi}(x,t)}{\partial t} \right) dxdt,$$

$$\|\psi\|_{H^{2,1}(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi,\psi \rangle_{H^{2,1}(\Omega)}};$$

$$\overset{\circ}{H}{}^{2,1}(\Omega) \equiv H^{2,1}(\Omega) \cap \overset{\circ}{H}{}^{1,0}(\Omega).$$

**Tanım 2.7:** $\{x_n\}$, $(X,\|\ \|)$ normlu uzayında bir dizi olsun. Eğer $\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0$ oluyorsa $\{x_n\}$ dizisi $x \in X$ elemanına normda ya da kuvvetli yakınsar denir.

**Tanım 2.8:** Sürekli fonksiyonların uzayı üzerinde

$$\| f \| = \sup_{x\in X} | f(x) |$$

olarak tanımlanan norm düzgün ya da sup normu olarak adlandırılır. $\{f_n\}$, bir $X$ metrik uzayı üzerinde sınırlı, reel değerli fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer, $\lim_{n\to\infty}\| f_n - f \| = 0$ oluyorsa $\{f_n\}$ dizisi $f \in X$ fonksiyonuna düzgün yakınsar denir. Burada norm sup normudur.

**Tanım 2.9:** $V$, $X$ lineer uzayının bir alt kümesi olsun. Eğer $u,v \in V$ ve $\alpha \in [0,1]$ için $\alpha u + (1-\alpha)v \in V$ oluyorsa, $V$ kümesine $X$ 'de konveks (dışbükey) küme denir.

**Tanım 2.10:** $(X,\|\ \|)$ bir normlu uzay olsun. $0 < \varepsilon \le 2$ şartını sağlayan her $\varepsilon$ sayısı için, eğer $x,y \in X$ için $\|x\| = \|y\| = 1$ ve $\|x-y\| \ge \varepsilon$ iken $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \le 1-\delta(\varepsilon)$ olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon)>0$ sayısı varsa $\left(X,\|\ \|\right)$ uzayına düzgün konveks uzay denir. $1<p<\infty$ için $L_p\left(\Omega\right)$ uzayı düzgün konveks uzaydır.

**Tanım 2.11:** $\left(X,\|\ \|\right)$ bir normlu uzay ve $E\subset X$ olsun. $E$ içindeki her dizinin $E$'de bir limit noktası varsa $E$ kümesine $X$'de kompakt küme denir.

**Tanım 2.12:** $E$, $\left(X,\|\ \|\right)$ Banach uzayının bir alt kümesi olsun. Eğer $E$ içindeki her $\left\{x_n\right\}$ dizisinin bir $x\in E$ noktasına zayıf yakınsayan bir alt dizisi varsa $E$ kümesine $\left(X,\|\ \|\right)$'de zayıf kompakt küme denir.

**Tanım 2.13:** $X$ normlu uzayında bir $E$ kümesi verilsin. Eğer $E$'deki bütün yakınsak dizilerin limit noktaları bu kümedeyse $E$ kümesine $X$'de kapalı küme denir.

**Tanım 2.14:** $X$, Banach uzayı ve $E\subset X$ olsun. Eğer $\left\{x_n\right\}\in E$ ve $\left\{x_n\right\}$ dizisi bir $x$ elemanına zayıf yakınsadığında $x\in E$ ise $E$ kümesine $X$'de zayıf kapalıdır denir.

**Tanım 2.15:** $X$, bir normlu uzay ve $E\subset X$ olsun. Eğer $X$'in her bir $x$ elemanı, $E$'nin elemanlarının bir dizisinin limiti ise $E$' ye $X$' de yoğundur denir.

**Tanım 2.16:** $J(u)$ fonksiyoneli $B$ Banach uzayının $U$ alt kümesinde tanımlanmış olsun. Eğer $u\in U$ noktasına kuvvetli yakınsayan $\left\{u_k\right\}\in U$ dizisi için $\underline{\lim}_{k\to\infty} J(u_k)\geq J(u)$ şartı sağlanıyorsa $J(u)$ fonksiyoneline $u$ noktasında aşağıdan yarı süreklidir denir.

**Tanım 2.17:** $J(u)$ fonksiyoneli $B$ Banach uzayının $U$ alt kümesinde tanımlanmış olsun. Eğer $u\in U$ noktasına zayıf yakınsayan $\left\{u_k\right\}\in U$ dizisi için $\underline{\lim}_{k\to\infty} J(u_k)\geq J(u)$

şartı sağlanıyorsa $J(u)$ fonksiyoneline $u$ noktasında aşağıdan zayıf yarı süreklidir denir.

**Tanım 2.18:** $F$, bir $I$ aralığı üzerinde tanımlı $f(t)$ fonksiyonlarının bir dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $f \in F$ için $t_1,\ t_2 \in I$ olmak üzere $|t_1 - t_2| \leq \delta(\varepsilon)$ olduğunda $|f(t_1) - f(t_2)| \leq \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa $F$'ye $I$ üzerinde denk süreklidir denir.

**Tanım 2.19:** $F$, bir $I$ aralığı üzerinde tanımlı $f(t)$ fonksiyonlarının bir dizisi olsun. Eğer her $t \in I$ ve her $f \in F$ için $|f(t)| \leq M$ olacak şekilde negatif olmayan bir $M$ sayısı varsa $F$'ye $I$ üzerinde düzgün sınırlıdır denir.

**Teorem 2.1 (Arzela-Ascoli):** Sınırlı bir $I$ aralığı üzerinde $F$, $f(t)$ fonksiyonlarının bir dizisi olsun. Eğer $F$, düzgün sınırlı ve denk sürekli ise $F$, $I$ üzerinde düzgün yakınsak olan bir dizi içerir (Hsieh and Sibuya 1999).

**Tanım 2.20:** $B$ herhangi bir Banach uzayı ve $J(u)$ fonksiyoneli $u$ noktasının herhangi bir $\omega(u,\gamma) = \{v : v \in B,\ \|v - u\| < \gamma\}$ komşuluğunda tanımlanmış olsun. Eğer fonksiyonelin artımı için

$$\lim_{\|h\|_B \to 0} \frac{o(h,u)}{\|h\|_B} = 0$$

olacak şekilde $\delta J(u) = J(u+h) - J(u) = \left(J'(u), h\right)_B + o(h,u)$ şartını sağlayan $J'(u) \in B^*$ elemanı varsa, bu takdirde $J(u)$ fonksiyoneli $u$ noktasında Frechet anlamında diferansiyellenebilirdir denir.

**Teorem 2.2 (Weierstrass Teoremi):** $U$ , $B$ -Banach uzayında zayıf kompakt bir küme olsun. $J(u)$ ise bu kümede tanımlanan sonlu değerlere sahip ve aşağıdan zayıf yarı sürekli bir fonksiyonel olsun. Bu takdirde, $J_* = \inf_U J(u) > -\infty,\ \ U_* = \{u \in U : J(u) = J_*\} \neq \varnothing$ zayıf kompakttır ve $U$ 'dan alınan herhangi minimalleştirici dizi, minimum noktaları kümesine zayıf yakınsar (Vasilyev 1981).

**Teorem 2.3:** Kabul edelim ki $\tilde{X}$ düzgün konveks uzay, $U$ kümesi $\tilde{X}$ uzayının kapalı sınırlı kümesi, $I(v)$ fonksiyoneli $U$ kümesi üzerinde tanımlanan aşağıdan sınırlı ve aşağıdan yarı sürekli fonksiyonel ve $\alpha > 0,\ \beta \geq 1$ verilen sayılar olsun. Bu takdirde $\tilde{X}$ uzayında her yerde yoğun olan öyle bir $G$ altkümesi vardır ki, $\forall w \in G$ için

$$J_\alpha(v) = I(v) + \alpha \|v - w\|_{\tilde{X}}^{\beta}$$

fonksiyoneli $U$ kümesi üzerinde en küçük değerini alır. Eğer $\beta > 1$ ise $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli en küçük değerini $U$ kümesi üzerinde bir tek noktada alır **(**Goebel 1979).

**Teorem 2.4:** $U$, $B$-Banach uzayının konveks bir alt kümesi, $J(u)$ fonksiyoneli bu kümede birinci mertebeden sürekli türevlenebilir bir fonksiyonel ve $U_* = \left\{u \in U :\ J(u) = J_* = \inf_U J(u)\right\}$ kümesi $J(u)$ fonksiyonelinin minimum noktalarının kümesi olsun. Bu takdirde $\forall u_* \in U_*$ ve $\forall u \in U$ için $\left(J'(u_*), u - u_*\right)_B \geq 0$ şartı sağlanır (Vasilyev 1981).

**Lemma 2.1 (Gronwall):** Eğer $g(t)$ fonksiyonu $t_0 \leq t \leq t_1$ üzerinde sürekli bir fonksiyon ve

$$0 \leq g(t) \leq K + L\int_{t_0}^{t} g(s)ds$$

eşitsizliğini sağlarsa, $t_0 \leq t \leq t_1$ üzerinde

$$0 \leq g(t) \leq K \exp\left(L\left(t - t_0\right)\right)$$

dır. Burada $K$ ve $L$ negatif olmayan sabitlerdir (Hsieh and Sibuya 1999).

**Lemma 2.2 (Cauchy- Bunyakowski Eşitsizliği):** $u, v \in L_2(\Omega)$ elemanları için,

$$\left| \int_\Omega u\bar{v} dx d\tau \right| \leq \left( \int_\Omega |u|^2 \, dx d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_\Omega |v|^2 \, dx d\tau \right)^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Ladyzhenskaya *et al.* 1968).

**Lemma 2.3 ($\varepsilon -$Cauchy Eşitsizliği):** Keyfi $a, b$ sayıları ve herhangi $\varepsilon > 0$ için

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2}|a|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}|b|^2$$

eşitsizliği geçerlidir (Ladyzhenskaya *et al.* 1968).

# 3. MATERYAL ve YÖNTEM

## 3.1. Schrödinger Denkleminin Katsayısıyla Yönetilen Optimal Kontrol Problemi

Bu tezde,

$$J_\alpha(v) = \int_0^l \left|\psi(x,T;v) - y(x)\right|^2 dx + \alpha \left\|v - w\right\|^2_{H^1(0,T)} \tag{3.1.1}$$

fonksiyonelinin minimumunun

$$V = \left\{ v(t):\ v \in H^1(0,T), \left\|v(t)\right\|_{H^1(0,T)} \le \tilde{v} \right\} \tag{3.1.2}$$

kümesi üzerinde

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - v(t)\psi = 0,\ (x,t) \in \Omega, \tag{3.1.3}$$

$$\psi(x,0) = \varphi(x),\ x \in (0,l),\ \psi(0,t) = \psi(l,t) = 0 \tag{3.1.4}$$

şartları altında ele alınmıştır. Burada $i^2 = -1$; $\hbar = 1$, $a_0 = \dfrac{\hbar^2}{2m} > 0$, $\alpha \ge 0$, $T > 0$ verilen reel sayılar; $\tilde{v} > 0$ verilen sayı; $\Omega_t = (0,l) \times (0,t)$; $\Omega = \Omega_T$; $S = \{0,l\} \times (0,T)$, $y(x) \in L_2(0,l)$, $w(t) \in H^1(0,T)$, $\varphi(x)$ verilen fonksiyonlar olup,

$$\varphi \in \overset{\circ}{H}{}^2(0,l) \tag{3.1.5}$$

şartı sağlanır.

Görüldüğü üzere her bir $v \in V$ için (3.1.3)-(3.1.4) şartlarından $\psi = \psi(x,t)$ fonksiyonunun bulunması problemi Schrödinger denklemi için başlangıç-sınır değer problemidir. Bu problemin çözümü olarak her $\eta \in L_2(\Omega)$ için

$$\int_{\Omega} \left[ i\frac{\partial \psi}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - v(t)\psi \right] \overline{\eta}(x,t)\,dxdt = 0$$

eşitliğini sağlayan $\psi = \psi(x,t) \equiv \psi(x,t;v) \in \overset{\circ}{H}{}^{2,1}(\Omega)$ fonksiyonu anlaşılır.

Toyoğlu (2010) çalışmasından faydalanılarak, Schrödinger başlangıç-sınır değer probleminin çözümünün varlığı, tekliği ve kararlılığı aşağıdaki teorem ile ifade edilebilir.

**Teorem 1:** $\varphi(x)$ fonksiyonunun (3.1.5) şartını sağladığı kabul edilsin. Bu takdirde, (3.1.3)-(3.1.4) başlangıç sınır değer probleminin her bir $v \in V$ için $\overset{\circ}{H}{}^{2,1}(\Omega)$ uzayından olan çözümü vardır, çözüm tektir ve çözüm için aşağıdaki değerlendirme geçerlidir:

$$\|\psi\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^{2,1}(\Omega)} \le c_0 \|\varphi\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^{2}(0,l)} \tag{3.1.6}$$

Burada $c_0 > 0$ sayısı $\varphi$ den bağımsızdır.

**İspat:** Galerkin yöntemi ile bu teorem ispatlanabilir. Temel fonksiyonlar sistemi olarak $\overset{\circ}{H}{}^{2}(0,l)$ uzayından olan ve

$$\mathcal{L}u_k = -a_0 \frac{d^2 u_k}{dx^2} = \lambda_k u_k,\ x \in (0,l) \tag{3.1.7}$$

$$u_k(0) = u_k(l) = 0 \tag{3.1.8}$$

özdeğer probleminin $\lambda_k,\ k = 1,2,...$ özdeğerlerine karşılık gelen çözümler sistemi kullanılacaktır. Bu şartlar altında (3.1.7)-(3.1.8) probleminin özdeğerleri reeldir, negatif değildir ve $k \to \infty$ için $\lambda_k \to +\infty$ şartlarını sağlar (Ladyzhenskaya *et al.* 1968). Özfonksiyonlar ise reel fonksiyonlardır. Bunların yanı sıra özfonksiyonlar $L_2(0,l),\ \overset{\circ}{H}{}^1(0,l),\ \overset{\circ}{H}{}^2(0,l)$ uzaylarında ortogonallik şartlarını sağlar.

$u_k = u_k(x),\ k = 1,2,...$ fonksiyonlarının $L_2(0,l)$ de ortonormal olsun. Yani,

$$(u_k, u_m)_{L_2(0,l)} = \int_0^l u_k(x) u_m(x)\, dx = \delta_k^m,\ k, m = 1,2,... \tag{3.1.9}$$

şartını sağlasın. Burada $\delta_k^m$ sabitleri Kronecker sabitleridir. Yani

$$\delta_k^m = \begin{cases} 1, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases} \qquad k, m = 1,2,...$$

dir.

$\overset{\circ}{H}{}^1(0,l)$ ve $\overset{\circ}{H}{}^2(0,l)$ uzaylarında ortogonallik şu anlamdadır;

$$(u_k, u_m)_{\overset{\circ}{H}{}^1(0,l)} = \int_0^l a_0 \frac{du_k}{dx} \frac{du_m}{dx}\, dx = \lambda_k \delta_k^m \tag{3.1.10}$$

$$(u_k, u_m)_{\overset{\circ}{H}{}^2(0,l)} = \int_0^l (\mathcal{L}u_k \mathcal{L}u_m)\, dx = \lambda_k^2 \delta_k^m. \tag{3.1.11}$$

$u_k = u_k(x)$ fonksiyonları için

$$\|u_k\|_{\overset{\circ}{H}{}^2(0,l)} \le d_k < +\infty, \quad k = 1, 2, ... \tag{3.1.12}$$

şartı sağlansın. Burada $d_k > 0$ belirli sayılardır. Galerkin yöntemine göre (3.1.3)-(3.1.4) başlangıç sınır değer probleminin çözümü için

$$\psi^N(x,t) = \sum_{k=1}^{N} C_k^N(t) u_k(x) \tag{3.1.13}$$

sonlu yaklaşımları aranır. Burada $C_k^N(t)$ katsayıları $C_k^N(t) = \left(\psi^N(.,t), u_k\right)_{L_2(0,l)}$ formülü ile tanımlanır ve

$$i\left(\frac{\partial \psi^N}{\partial t}, u_k\right)_{L_2(0,l)} = \left(a_0 \frac{\partial \psi^N}{\partial x}, \frac{du_k}{dx}\right)_{L_2(0,l)} + \left(v(t)\psi^N, u_k\right)_{L_2(0,l)} \quad k = \overline{1,N} \tag{3.1.14}$$

$$C_k^N(0) = (\varphi, u_k)_{L_2(0,l)} = \varphi_k, \quad k = \overline{1,N} \tag{3.1.15}$$

Cauchy probleminin çözümüdür.

(3.1.14)-(3.1.15) problemi 1. mertebeden adi diferensiyel denklemler sistemi için Cauchy problemidir. Denklemlerin katsayıları ve sağ tarafı karesiyle integrallenebilir fonksiyonlardır. Pontryagin (1976) ve Vasilyev (1980) çalışmalarından bilindiği üzere, verilen şartlar altında (3.1.14)-(3.1.15) Cauchy probleminin çözümü vardır ve çözüm tektir.

Aşağıdaki lemma ile Cauchy probleminin çözümünün $(0,T)$ aralığında düzgün sınırlı olduğunu gösteren bir değerlendirme verilmektedir:

**Lemma 1:** (3.1.14)-(3.1.15) Cauchy probleminin çözümü için,

$$\int_0^T \sum_{k=1}^N \left|C_k^N(t)\right|^2 dt + \int_0^T \sum_{k=1}^N \left|\frac{dC_k^N(t)}{dt}\right|^2 dt \le \left\|\psi^N\right\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^{2,1}(\Omega)} \le c_0 \left\|\varphi\right\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^{2}(0,l)} \qquad (3.1.16)$$

değerlendirmesi geçerlidir.

**İspat:** (3.1.14) sistemindeki $k$. denklem $\overline{C}_k^N(t)$ ile çarpılıp $k$ üzerinden 1'den $N$'ye kadar toplandıktan sonra $(0,t)$ aralığı üzerinden integrallenirse

$$\int_{\Omega_t} \left[ i\frac{\partial \psi^N}{\partial t}\overline{\psi}^N - a_0\left|\frac{\partial \psi^N}{\partial x}\right|^2 - v(\tau)\left|\psi^N\right|^2 dxd\tau \right] = 0$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten onun kompleks eşleniği çıkarılırsa

$$\int_{\Omega_t} \left( \frac{\partial \psi^N}{\partial t}\overline{\psi}^N + \frac{\partial \overline{\psi}^N}{\partial t}\psi^N \right) dxd\tau = 0$$

eşitliği elde edilir. Buradan da

$$\int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t}\left|\psi^N\right|^2 dxd\tau = 0$$

yazılır. Böylece kolaylıkla

$$\left\|\psi^N(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)} = \left\|\psi^N(.,0)\right\|^2_{L_2(0,l)} \qquad (3.1.17)$$

eşitliği elde edilir. $\psi^N(x,t)$ için olan formül kullanılırsa

$$\left\|\psi^N(.,0)\right\|^2_{L_2(0,l)} = \sum_{k=1}^{N}\left|C_k^N(0)\right|^2 = \sum_{k=1}^{N}\left|\varphi_k\right|^2 \le \sum_{k=1}^{\infty}\left|\varphi_k\right|^2 = \left\|\varphi\right\|^2_{L_2(0,l)} \qquad (3.1.18)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik kullanılarak (3.1.16) eşitsizliği aşağıdaki biçimde yazılabilir:

$$\left\|\psi^N(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)} \le \left\|\varphi\right\|^2_{L_2(0,l)},\ \forall t\in[0,T]. \qquad (3.1.19)$$

Şimdi $\psi^N$ sonlu toplamının $x$'e göre 1. mertebeden türevini ele alalım. Bunun için (3.1.14) sistemine kısmi integrasyon formülü uygulanarak aşağıdaki biçimde yazılır:

$$i\left(\frac{\partial\psi^N}{\partial t},u_k\right)_{L_2(0,l)} + a_0\left(\frac{\partial^2\psi^N}{\partial x^2},u_k\right)_{L_2(0,l)} - \left(v(t)\psi^N,u_k\right)_{L_2(0,l)} = 0,\ k=\overline{1,N}. \qquad (3.1.20)$$

Bu sistemdeki $k$. denklem $\lambda_k\bar{C}_k^N(t)$ ile çarpılıp, $k$ üzerinden 1'den $N$'ye kadar toplandıktan sonra $[0,T]$ aralığı üzerinden integrallenirse

$$\int_{\Omega_t}\left(-ia_0\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\frac{\partial^2\bar{\psi}^N}{\partial x^2} - a_0^2\left|\frac{\partial^2\psi^N}{\partial x^2}\right|^2 + a_0v(\tau)\psi^N\frac{\partial^2\bar{\psi}^N}{\partial x^2}\right)dxd\tau = 0 \qquad (3.1.21)$$

eşitliği elde edilir. $u_k(0)=u_k(l)=0$ sınır şartı ve $\psi^N(x,t)$ için olan formül kullanılırsa

$$\frac{\partial\psi^N(0,t)}{\partial t} = \frac{\partial\psi^N(l,t)}{\partial t} = 0,\ t\in[0,T] \qquad (3.1.22)$$

sınır şartı elde edilir. Bu şart ve kısmi integrasyon formülü (3.1.21) eşitliğinin sol tarafındaki birinci terime uygulanırsa

$$\int_{\Omega_t}\left[ia_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\right)\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial x}-a_0^2\left|\frac{\partial^2\psi^N}{\partial x^2}\right|^2+a_0v(\tau)\psi^N\frac{\partial^2\overline{\psi}^N}{\partial x^2}\right]dxd\tau=0$$

eşitliği yazılabilir. Bu eşitlikten onun kompleks eşleniği çıkarılırsa aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$\int_{\Omega_t}\left[a_0i\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\right)\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial x}\right)\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\right)\right]dxd\tau+2ia_0\int_{\Omega_t}v(\tau)\operatorname{Im}\left(\psi^N\frac{\partial^2\overline{\psi}^N}{\partial x^2}\right)dxd\tau=0$$

Buradan da

$$a_0\int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial t}\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\right|^2dxd\tau=-2a_0\int_{\Omega_t}v(\tau)\operatorname{Im}\left(\psi^N\frac{\partial^2\overline{\psi}^N}{\partial x^2}\right)dxd\tau$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten kolaylıkla

$$\left\|\frac{\partial\psi^N}{\partial x}(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)}\le\left\|\frac{\partial\psi^N}{\partial x}(.,0)\right\|^2_{L_2(0,l)}+2\int_{\Omega_t}\left|v(\tau)\psi^N\right|\left|\frac{\partial^2\psi^N}{\partial x^2}\right|dxd\tau$$

eşitsizliği elde edilir.

$\varepsilon$-Cauchy eşitsizliği uygulanırsa sağ taraftaki terimler yeniden düzenlenerek

$$\left\|\frac{\partial\psi^N}{\partial x}(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)}\le\left\|\frac{\partial\psi^N}{\partial x}(.,0)\right\|^2_{L_2(0,l)}+\int_{\Omega_t}\left|v(\tau)\psi^N(x,\tau)\right|^2dxd\tau+\int_0^t\left\|\frac{\partial^2\psi^N}{\partial x^2}\right\|^2_{L_2(0,l)}d\tau \qquad (3.1.23)$$

eşitsizliği elde edilebilir.

$v(t)$ fonksiyonlarının üzerine konulan şartlar ve Cauchy-Bunyakowski eşitsizliği kullanılırsa eşitsizliğin sağ tarafındaki 2. terim aşağıdaki gibi değerlendirilebilir:

$$\int_{\Omega_t} \left| v(\tau)\psi^N(x,\tau) \right|^2 dx d\tau \le \int_{\Omega_t} \left| v(\tau) \right|^2 \left| \psi^N(x,\tau) \right|^2 dx d\tau$$
$$\le \max_{0\le\tau\le t} \left\| \psi^N(.,\tau) \right\|^2_{L_2(0,l)} l \int_0^T \left| v(t) \right|^2 dt \le \tilde{v}^2 l \max_{0\le\tau\le t} \left\| \psi^N(.,\tau) \right\|^2_{L_2(0,l)} .$$

Bu eşitsizlik, (3.1.23) eşitsizliğinde dikkate alınırsa ve (3.1.18) değerlendirmesi kullanılırsa her $t \in [0,T]$ için

$$\left\| \frac{\partial \psi^N}{\partial x}(.,t) \right\|^2_{L_2(0,l)} \le \left\| \frac{\partial \psi^N}{\partial x}(.,0) \right\|^2_{L_2(0,l)} + \tilde{v}^2 l \frac{l^2}{2} \left\| \varphi \right\|^2_{H^1(0,l)} + \int_0^t \left\| \frac{\partial^2 \psi^N}{\partial x^2} \right\|^2_{L_2(0,l)} d\tau \quad (3.1.24)$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca

$$\left\| \varphi \right\|^2_{L_2(0,l)} \le \frac{l^2}{2} \left\| \varphi \right\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^1(0,l)}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Burada (3.1.18) ve

$$\left\| \frac{\partial \psi^N}{\partial x}(.,0) \right\|^2_{L_2(0,l)} \le \left\| \varphi \right\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^1(0,l)} \quad (3.1.25)$$

eşitsizliği uygulanırsa, (3.1.24) eşitsizliğinden aşağıdaki eşitsizliğin geçerli olduğu elde edilir:

$$\left\| \frac{\partial \psi^N}{\partial x}(.,t) \right\|^2_{L_2(0,l)} \le c_1 \|\varphi\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^1(0,l)} + \int_0^t \left\| \frac{\partial^2 \psi^N}{\partial x^2} \right\|^2_{L_2(0,l)} d\tau, \ \forall t \in [0,T]. \qquad (3.1.26)$$

Burada $c_1 = 1 + \frac{1}{2} l^3 \tilde{v}^2 > 0$ sayıları $N$ ve $t$ den bağımsızdır.

Şimdi, (3.1.26) eşitsizliğinin sağ tarafındaki sonuncu terim değerlendirmeye çalışalım. Bunun için (3.1.20) sistemindeki $k$. denklem $\lambda_k^2 \overline{C}_k^N(t)$ fonksiyonu ile çarpılıp $k$ üzerinden 1'den $N$ 'ye kadar toplandıktan sonra $[0,T]$ aralığı üzerinden integrallenirse, (3.1.3) denkleminin katsayıları üzerine konulan şartlar kullanılarak kısmi integrasyon formülünün yardımıyla aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\int_{\Omega_t} \left[ i a_0^2 \frac{\partial}{\partial t}\left( \frac{\partial^2 \psi^N}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 \overline{\psi}^N}{\partial x^2} + a_0^3 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left( \frac{\partial^2 \psi^N}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 \overline{\psi}^N}{\partial x^2} - a_0^2 v(\tau) \left( \frac{\partial^2 \psi^N}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 \overline{\psi}^N}{\partial x^2} \right] dx d\tau = 0. \qquad (3.1.27)$$

Bu eşitliğin sol tarafındaki 2. terim, kısmi integrasyon formülü yardımıyla ve

$$\left. \frac{\partial^2 \overline{\psi}^N}{\partial x^2} \right|_{x=0}^{x=l} = 0, \ t \in [0,T] \qquad (3.1.28)$$

sınır şartı altında

$$\int_{\Omega_t} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left( \frac{\partial^2 \psi^N}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 \overline{\psi}^N}{\partial x^2} dx d\tau = \int_0^T \frac{\partial}{\partial x}\left( \frac{\partial^2 \psi^N}{\partial x^2} \right) \left. \frac{\partial^2 \overline{\psi}^N}{\partial x^2} \right|_{x=0}^{x=l} - \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial x}\left( \frac{\partial^2 \psi^N}{\partial x^2} \right) \frac{\partial}{\partial x}\left( \frac{\partial^2 \overline{\psi}^N}{\partial x^2} \right) dx d\tau$$

$$= -\int_{\Omega_t} \left| \frac{\partial}{\partial x}\left( \frac{\partial^2 \psi^N}{\partial x^2} \right) \right|^2 dx d\tau$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitlik kullanılarak (3.1.27) eşitliği

$$\int_{\Omega_t}\left[ia_0^2\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2\psi^N}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2\overline{\psi}^N}{\partial x^2}-a_0^3\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\psi^N}{\partial x^2}\right)\right|^2-a_0^2 v(\tau)\left(\frac{\partial^2\psi^N}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2\overline{\psi}^N}{\partial x^2}\right]dxd\tau=0. \quad (3.1.29)$$

şeklinde yazılabilir.

Bu eşitlikten onun kompleks eşleniği olan

$$\int_{\Omega_t}\left[-ia_0^2\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2\overline{\psi}^N}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2\psi^N}{\partial x^2}+a_0^3\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\psi^N}{\partial x^2}\right)\right|^2-a_0^2 v(\tau)\left(\frac{\partial^2\overline{\psi}^N}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2\psi^N}{\partial x^2}\right]dxd\tau=0.$$

çıkarılırsa

$$\int_{\Omega_t}\left[i\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2\psi^N}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2\overline{\psi}^N}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2\overline{\psi}^N}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2\psi^N}{\partial x^2}\right\}-2iv(\tau)\operatorname{Im}\left(\frac{\partial^2\psi^N}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2\overline{\psi}^N}{\partial x^2}\right]dxd\tau=0.$$

elde edilir. Buradan

$$\int_{\Omega_t}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left|\frac{\partial^2\psi^N}{\partial x^2}\right|^2-2v(\tau)\operatorname{Im}\left|\frac{\partial^2\psi^N}{\partial x^2}\right|^2\right]dxd\tau=0.$$

eşitliği elde edilir.

$$\operatorname{Im}\left|\frac{\partial^2\psi^N}{\partial x^2}\right|^2=0$$

olduğundan

$$\int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial t}\left|\frac{\partial^2\psi^N}{\partial x^2}\right|^2 dxd\tau=0$$

ve

$$\left\|\frac{\partial^2\psi^N}{\partial x^2}(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)}=\left\|\frac{\partial^2\psi^N}{\partial x^2}(.,0)\right\|^2_{L_2(0,l)} \tag{3.1.30}$$

biçiminde yazılabilir.

Bu eşitlikte

$$\left\|\frac{\partial^2\psi^N}{\partial x^2}(.,0)\right\|^2_{L_2(0,l)} \le \|\varphi\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^2(0,l)} \tag{3.1.31}$$

eşitsizliği kullanılırsa

$$\left\|\frac{\partial^2\psi^N}{\partial x^2}(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)} \le \|\varphi\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^2(0,l)} \tag{3.1.32}$$

bulunur.

Öte yandan,

$$\left\|\frac{\partial^2\psi^N}{\partial x^2}(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)} \le \|\varphi\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^2(0,l)}+\int_0^t\left\|\frac{\partial\psi^N}{\partial x}(.,\tau)\right\|^2_{L_2(0,l)}d\tau$$

olduğu kolaylıkla görülebilir. Bu eşitsizlik (3.1.26) ile taraf tarafa toplanırsa

$$\left\|\frac{\partial\psi^N}{\partial x}(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)}+\left\|\frac{\partial^2\psi^N}{\partial x^2}(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)} \le c_1\frac{l^2}{2}\|\varphi\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^2(0,l)}+\|\varphi\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^2(0,l)}+\int_0^t\left[\left\|\frac{\partial\psi^N}{\partial x}(.,\tau)\right\|^2_{L_2(0,l)}+\left\|\frac{\partial^2\psi^N}{\partial x^2}\right\|^2_{L_2(0,l)}\right]d\tau$$

eşitsizliği elde edilir.

$$\|\varphi\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^1(0,l)} \le \frac{l^2}{2}\|\varphi\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^2(0,l)}$$

olduğundan

$$\left\|\frac{\partial\psi^N}{\partial x}(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)}+\left\|\frac{\partial^2\psi^N}{\partial x^2}(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)}\le c_2\|\varphi\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^2(0,l)}+\int_0^t\left[\left\|\frac{\partial\psi^N}{\partial x}(.,\tau)\right\|^2_{L_2(0,l)}+\left\|\frac{\partial^2\psi^N}{\partial x^2}\right\|^2_{L_2(0,l)}\right]d\tau \quad (3.1.33)$$

elde edilir. Burada $c_2=1+c_1\dfrac{l^2}{2}$ şeklindedir.

Burada

$$g(t)=\left\|\frac{\partial\psi^N}{\partial x}(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)}+\left\|\frac{\partial^2\psi^N}{\partial x^2}(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)}$$

ile gösterilip (3.1.33) eşitsizliğinde Gronwall lemması uygulanırsa

$$\left\|\frac{\partial\psi^N}{\partial x}(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)}+\left\|\frac{\partial^2\psi^N}{\partial x^2}(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)}\le c_2e^t\|\varphi\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^2(0,l)} \quad (3.1.34)$$

değerlendirmesinin geçerli olduğu elde edilir. Bu eşitsizlik ile (3.1.19) eşitsizliğini taraf tarafa toplanarak

$$\|\psi^N(.,t)\|^2_{L_2(0,l)}+\left\|\frac{\partial\psi^N}{\partial x}(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)}+\left\|\frac{\partial^2\psi^N}{\partial x^2}(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)}\le\|\varphi\|^2_{L_2(0,l)}+c_2e^t\|\varphi\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^2(0,l)}$$

yazılır.

$$\|\varphi\|^2_{L_2(0,l)}\le\frac{l^2}{2}\|\varphi\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^1(0,l)}\le\frac{l^4}{4}\|\varphi\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^2(0,l)} \quad (3.1.35)$$

olduğundan

$$\left\|\psi^N(.,t)\right\|_{L_2(0,l)}^2+\left\|\frac{\partial\psi^N}{\partial x}(.,t)\right\|_{L_2(0,l)}^2+\left\|\frac{\partial^2\psi^N}{\partial x^2}(.,t)\right\|_{L_2(0,l)}^2\le\frac{l^4}{4}\|\varphi\|_{\overset{\circ}{H}{}^2(0,l)}^2+c_2e^t\|\varphi\|_{\overset{\circ}{H}{}^2(0,l)}^2=c_3\|\varphi\|_{\overset{\circ}{H}{}^2(0,l)}^2$$

olur. Burada $c_3=\frac{l^4}{4}+c_2e^t$ şeklindedir. Bu ise

$$\left\|\psi^N(.,t)\right\|_{\overset{\circ}{H}{}^2(0,l)}^2\le c_3\|\varphi\|_{\overset{\circ}{H}{}^2(0,l)}^2,\quad\forall t\in[0,T]\tag{3.1.36}$$

demektir.

Şimdi $\frac{\partial\psi^N}{\partial t}$ türevini değerlendirmeye çalışalım. Bunun için (3.1.20) sistemindeki $k$. denklem $\frac{d\bar{C}_k^N(t)}{dt}$ ile çarpılıp $k$ üzerinden 1’den $N$ ’ye kadar toplandıktan sonra $(0,t)$ aralığı üzerinden integrallenirse

$$\int_{\Omega_t} i\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right|^2dxd\tau=\int_{\Omega_t}\left(-a_0\frac{\partial^2\psi^N}{\partial x^2}+v(\tau)\psi^N\right)\frac{\partial\bar{\psi}^N}{\partial t}dxd\tau\tag{3.1.37}$$

eşitliği elde edilir. Cauchy-Bunyakowski ve $\varepsilon-$ Cauchy eşitsizliği uygulanırsa

$$\int_0^t\left\|\frac{\partial\psi^N(.,\tau)}{\partial t}\right\|_{L_2(0,l)}^2d\tau\le\int_0^t\left\|-a_0\frac{\partial^2\psi^N}{\partial x^2}+v(\tau)\psi^N\right\|_{L_2(0,l)}\left\|\frac{\partial\bar{\psi}^N}{\partial t}\right\|_{L_2(0,l)}d\tau$$
$$\le\frac{\varepsilon}{2}\int_0^t\left\|-a_0\frac{\partial^2\psi^N}{\partial x^2}+v(\tau)\psi^N\right\|_{L_2(0,l)}^2d\tau+\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t\left\|\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\right\|_{L_2(0,l)}^2d\tau$$

yazılır. $\varepsilon=1$ değeri için

$$\int_0^t \left\| \frac{\partial \psi^N(.,\tau)}{\partial t} \right\|_{L_2(0,l)}^2 d\tau \le \int_0^t \left\| -a_0 \frac{\partial^2 \psi^N}{\partial x^2} + v(\tau)\psi^N \right\|_{L_2(0,l)}^2 d\tau$$

$$\le 2a_0^2 \int_0^t \left\| \frac{\partial^2 \psi^N}{\partial x^2} \right\|_{L_2(0,l)}^2 d\tau + 2\tilde{v}^2 \int_0^t \left\| \psi^N \right\|_{L_2(0,l)}^2 d\tau$$

eşitsizliği elde edilir. (3.1.19) ve (3.1.34) değerlendirmeleri uygulanırsa (3.1.35) eşitsizliği ile birlikte

$$\int_0^t \left\| \frac{\partial \psi^N(.,\tau)}{\partial \tau} \right\|_{L_2(0,l)}^2 d\tau \le c_4 \left\| \varphi \right\|_{\overset{\circ}{H}{}^2(0,l)}^2, \quad \forall t \in [0,T] \tag{3.1.38}$$

değerlendirmesi elde edilir. Burada $c_4 = 2c_2 a_0^2 e^t + 2\tilde{v}^2 t \dfrac{l^2}{4}$ şeklindedir.

(3.1.36) değerlendirmesi $(0,T)$ aralığı üzerinden integrallenirse ve (3.1.38) ifadesinde $t = T$ için elde edilen değerlendirme ile toplanırsa

$$\left\| \psi^N \right\|_{\overset{\circ}{H}{}^{2,1}(\Omega)}^2 \le c_5 \left\| \varphi \right\|_{\overset{\circ}{H}{}^2(0,l)}^2 \tag{3.1.39}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $c_5 = \left(l^2 + 2\tilde{v}^2\right)\dfrac{Tl^2}{4} + \left(1 + 2a_0^2\right)\left(1 + \left(1 + \dfrac{1}{2} l^3 \tilde{v}^2\right)\dfrac{l^2}{2}\right)e^T$

şeklindedir.

Böylece

$$\int_0^T \sum_{k=1}^N \left| C_k^N(t) \right|^2 dt = \left\| \psi^N \right\|_{L_2(\Omega)}^2$$

$$\int_0^T \sum_{k=1}^N \left| \frac{dC_k^N(t)}{dt} \right|^2 dt = \left\| \frac{\partial \psi^N}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega)}^2$$

eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa ve

$$\left\|\psi^N\right\|^2_{L_2(\Omega)} + \left\|\frac{\partial \psi^N}{\partial t}\right\|^2_{L_2(\Omega)} \le \left\|\psi^N\right\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^{2,1}(\Omega)}$$

eşitsizliği kullanılırsa, $c_0 = c_5$ kabul edilerek (3.1.38) değerlendirmesinden Lemma 1 de yer alan,

$$\int_0^T \sum_{k=1}^N \left|C_k^N(t)\right|^2 dt + \int_0^T \sum_{k=1}^N \left|\frac{dC_k^N(t)}{dt}\right|^2 dt \le \left\|\psi^N\right\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^{2,1}(\Omega)} \le c_5 \left\|\varphi\right\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^2(0,l)}$$

değerlendirmesinin geçerli olduğu elde edilir. Böylece Lemma 1 ispatlanmış olur.

Şimdi teoremin ispatı şöyle devam ettirilir:

Bu amaçla öncelikle $C_{N,k}(t) = \left(\psi^N(.,t), u_k\right)_{L_2(0,l)}$, $k; N = 1,2,...$ biçiminde $C_{N,k}(t)$ fonksiyon dizisi tanımlanır. Lemma 1 de yer alan değerlendirme kullanılırsa $C_{N,k}(t)$ fonksiyon dizisi için $[0,T]$ aralığında

$$\max_{0\le t\le T}\left|C_{N,k}(t)\right| \le c_6, \quad N; k = 1,2,... \tag{3.1.40}$$

biçiminde olan düzgün sınırlılık şartı elde edilebilir. Her bir $k$ için $C_{N,k}(t)$, $N; k = 1,2,...$ fonksiyon dizisinin $[0,T]$ aralığında denk sürekli olduğunu göstermek amacıyla, (3.1.14) sistemi $[t, t+\Delta t]$ aralığı üzerinden integrallenirse

$$i\int_t^{t+\Delta t}\int_0^l \frac{\partial \psi^N(x,\tau)}{\partial t} u_k(x)\,dx\,d\tau = \int_t^{t+\Delta t}\int_0^l a_0 \frac{\partial \psi^N(x,\tau)}{\partial x}\frac{du_k(x)}{dx}\,dx\,d\tau + \int_t^{t+\Delta t}\int_0^l v(\tau)\psi^N u_k(x)\,dx\,d\tau$$

eşitliği elde edilir. Buradan $C_{N,k}\left(t\right)$ fonksiyon dizisi için olan formül kullanılırsa, Cauchy-Bunyakowski eşitsizliğinin yardımıyla

$$\begin{aligned}\left|C_{N,k}\left(t+\Delta t\right)-C_{N,k}\left(t\right)\right| \leq a_0 \int_t^{t+\Delta t} \left\|\frac{\partial \psi^N\left(x,\tau\right)}{\partial x}\right\|_{L_2(0,l)} d\tau \left\|\frac{du_k\left(x\right)}{dx}\right\|_{L_2(0,l)} \\ + \int_t^{t+\Delta t} \left|v\left(\tau\right)\right| d\tau \max_{0\leq t\leq T} \left\|\psi^N\left(.,t\right)\right\|_{L_2(0,l)} \left\|u_k\right\|_{L_2(0,l)}\end{aligned} \tag{3.1.41}$$

eşitsizliği elde edilebilir. Bu eşitsizliğin sağ tarafına Cauchy-Bunyakowski eşitsizliği uygulansın. Ayrıca Lemma 1 de yer alan değerlendirme ve $u_k$'lar için varsayılan (3.1.12) şartı kullanılırsa

$$\left|C_{N,k}\left(t+\Delta t\right)-C_{N,k}\left(t\right)\right| \leq c_7 d_k \left(\Delta t\right)^{1/2}, \quad N;k=1,2,..., \ t\in\left[0,T\right] \tag{3.1.42}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $c_7>0$ sabiti $N$ ve $k$'dan bağımsızdır.

Böylece $C_{N,k}\left(t\right),\ N;k=1,2,...$ fonksiyonlar dizisinin $\left[0,T\right]$ aralığında düzgün sınırlı olduğu ve her bir $k$ için $\left[0,T\right]$ aralığında denk sürekli olduğu ispatlanır. Bu durumda, Arzela-Ascoli teoremine göre $\left\{C_{N,k}\left(t\right)\right\}$ fonksiyonlar dizisinden her bir $k$ için $\left\{C_{N_m,k}\left(t\right)\right\}$ alt dizisi seçilebilir ki bu dizi $\left[0,T\right]$ aralığında $C_k\left(t\right)$ fonksiyonuna düzgün yakınsar. $C_k\left(t\right)$ limit fonksiyonları kullanılarak aşağıdaki şekilde

$$\psi\left(x,t\right)=\sum_{k=1}^{\infty} C_k\left(t\right)u_k\left(x\right) \tag{3.1.43}$$

fonksiyonu oluşturulur. $\left\{C_{N_m,k}\left(t\right)\right\}$ fonksiyonlar dizisinin düzgün yakınsaması kullanılarak, $\left\{\psi^{N_m}\left(x,t\right)\right\}$ dizisinin $\left[0,T\right]$ aralığında düzgün olarak $L_2\left(0,l\right)$ uzayında (3.1.43) biçiminde tanımlanan $\psi\left(x,t\right)$ fonksiyonuna zayıf yakınsadığı elde edilir. Gerçekten, herhangi $g \in L_2\left(0,l\right)$ fonksiyonu verildiğinde her $t \in \left[0,T\right]$ için

$$\begin{aligned}\left(\psi^{N_m}\left(.,t\right)-\psi\left(.,t\right),g\right)_{L_2(0,l)} &= \sum_{k=1}^{s}\left(g,u_k\right)_{L_2(0,l)}\left(\psi^{N_m}\left(.,t\right)-\psi\left(.,t\right),u_k\right)_{L_2(0,l)} \\ &+\left(\psi^{N_m}\left(.,t\right)-\psi\left(.,t\right),\sum_{k=s+1}^{\infty}\left(g,u_k\right)_{L_2(0,l)}u_k\right)_{L_2(0,l)}\end{aligned} \tag{3.1.44}$$

eşitliği yazılabilir. Burada

$$\left|\left(\psi^{N_m}\left(.,t\right)-\psi\left(.,t\right),\sum_{k=s+1}^{\infty}\left(g,u_k\right)_{L_2(0,l)}u_k\right)_{L_2(0,l)}\right| \le c_8\left(\sum_{k=s+1}^{\infty}\left|\left(g,u_k\right)_{L_2(D)}\right|^2\right)^{1/2} \equiv c_9 R\left(s\right) \tag{3.1.45}$$

şeklindedir. $c_9>0$ sabiti $N_m$ 'den bağımsızdır.

$s$ numarası, $c_9R\left(s\right)$ toplamı önceden verilen herhangi bir $\frac{\varepsilon}{2}>0$ sayısından küçük olacak şekilde yeteri kadar büyük seçilebilir. Yukarıda ispat edildiği gibi belirlenmiş bir $m$ için $N_m$ numarasının yeteri kadar büyük değerlerinde tüm $t \in \left[0,T\right]$ için (3.1.44) eşitliğinin sağ tarafındaki 1. terim $\frac{\varepsilon}{2}>0$ sayısından küçük olacaktır. Bu takdirde (3.1.44) eşitliği ve (3.1.45) eşitsizliği kullanılarak

$$\left|\left(\psi^{N_m}\left(.,t\right)-\psi\left(.,t\right),g\right)_{L_2(0,l)}\right|<\varepsilon,\ \forall t \in \left[0,T\right]$$

elde edilir. Buradan da, istenilen sonuç $\left\{\psi^{N_m}(x,t)\right\}$ dizisinin $[0,T]$ aralığında düzgün olarak $L_2(0,l)$ uzayında $\psi(x,t)$ fonksiyonuna zayıf yakınsadığı elde edilir. (3.1.21) değerlendirmesine göre, $N=N_m$ için $\left\{\psi^{N_m}(x,t)\right\}$ dizisinden $H^{2,1}(\Omega)$ uzayında $\psi(x,t)$ fonksiyonuna zayıf yakınsayan bir alt dizi seçilebilir. Kolaylık olması için zayıf yakınsayan bu alt dizi de $\left\{\psi^{N_m}(x,t)\right\}$ ile gösterilsin. Bu takdirde, $\left\{\psi^{N_m}(x,t)\right\}$, $\left\{\frac{\partial\psi^{N_m}(x,t)}{\partial x}\right\}$, $\left\{\frac{\partial^2\psi^{N_m}(x,t)}{\partial x^2}\right\}$ ve $\left\{\frac{\partial\psi^{N_m}(x,t)}{\partial t}\right\}$ dizileri $L_2(\Omega)$ uzayında sırasıyla $\psi(x,t)$, $\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}$, $\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}$, $\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}$ fonksiyonlarına zayıf yakınsar. Bu zayıf yakınsama kullanılarak (3.1.16) değerlendirmesinde $N=N_m$ için $m\to\infty$ iken alt limite geçilirse $\psi(x,t)$ limit fonksiyonu için, teoremin hükmünde yer alan (3.1.6) değerlendirmesinin geçerli olduğu elde edilebilir. Böylece $\psi(x,t)$ limit fonksiyonunun $H^{2,1}(\Omega)$ uzayına ait olduğu elde edilir.

Şimdi bu limit fonksiyonunun (3.1.3)-(3.1.4) başlangıç sınır değer probleminin çözümü olduğunu gösterelim. Bu amaçla ilk önce $\psi(x,t)$ fonksiyonunun (3.1.3) denklemini $\forall(x,t)\in\overset{\circ}{\Omega}$ için sağladığı ispatlanmalıdır. Bunun için (3.1.20) sisteminin $k$. denklemi her $\bar{\eta}_k(t)$ fonksiyonu ile çarpılarak, $k$ üzerinden 1'den $N'\leq N$ ye kadar toplandıktan sonra, elde edilen eşitlik $[0,T]$ aralığı üzerinden integrallenirse

$$\int_{\Omega}\left[i\frac{\partial\psi^N}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\psi^N}{\partial x^2}-v(t)\psi^N\right]\bar{\eta}^{N'}(x,t)\,dxdt=0 \qquad (3.1.46)$$

integral özdeşliği elde edilir. Burada

$$\eta^{N'}(x,t)=\sum_{k=1}^{N'}\eta_k(t)u_k(x) \quad (3.1.47)$$

herhangi fonksiyondur.

Bu integral özdeşliğinden $\bar{\eta}^{N'}(x,t)$ fonksiyonu belirlenmiş bir fonksiyon farz edilerek $N=N_m,\ m=1,2,...$ alt dizisi üzerinden limite geçilebilir. Gerçekten $\{\psi^{N_m}(x,t)\}$ dizisinin $H^{2,1}(\Omega)$ uzayında zayıf yakınsadığı ve bu dizinin $L_2(0,l)$ uzayında $[0,T]$ aralığında düzgün olarak zayıf yakınsadığı göz önünde bulundurularak (3.1.46) integral özdeşliğinde $N=N_m$ için $m\to\infty$ iken limite geçilirse,

$$\int_\Omega\left[i\frac{\partial\psi}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-v(t)\psi\right]\bar{\eta}^{N'}(x,t)dxdt=0$$

integral özdeşliği elde edilir.

Burada $\eta^{N'}(x,t)$ fonksiyonları (3.1.47) biçiminde tanımlanan herhangi test fonksiyonlarıdır. $\eta_k(t)$ ve $u_k(x)$ fonksiyonlarının özelliği kullanılırsa, bu test fonksiyonlarının $L_2(\Omega)$ uzayında her yerde yoğun olduğu ispatlanabilir. Bu sebeple sonuncu integral özdeşliği her $\eta\in L_2(\Omega)$ fonksiyonu için

$$\int_\Omega\left[i\frac{\partial\psi}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-v(t)\psi\right]\bar{\eta}(x,t)dxdt=0 \quad (3.1.48)$$

biçiminde yazılabilir. Burada $\eta(x,t)$ fonksiyonu $L_2(\Omega)$ uzayından olan herhangi bir fonksiyon olduğundan $\overset{\circ}{\forall}(x,t)$ için $\psi(x,t)$ fonksiyonunun (3.1.3) denklemini sağladığı elde edilir.

Şimdi $\psi(x,t)$ limit fonksiyonunun (3.1.4) başlangıç ve sınır şartlarını sağladığını ispatlayalım. $H^{2,1}(\Omega)$ uzayı, gömme teoremine göre $L_2(S)$ uzayına kompakt gömüldüğünden ve $\psi^{N_m}(.,0)\in H^1(0,l)$ olduğundan ve $H^1(0,l)$ uzayı $L_2(0,l)$ uzayına kompakt gömüldüğünden $\psi(x,t)$ fonksiyonuna $H^{2,1}(\Omega)$ uzayında zayıf yakınsayan $\{\psi^{N_m}(x,t)\}$ alt dizisi için aşağıdaki limit bağıntıları yazılabilir. $m\to\infty$ için

$$\left\|\psi^{N_m}(.,0)-\psi(.,0)\right\|_{L_2(0,l)} \longrightarrow 0 \qquad (3.1.49)$$

$$\left\|\psi^{N_m}-\psi\right\|_{L_2(S)} \longrightarrow 0 \qquad (3.1.50)$$

bağıntıları geçerlidir.

$\psi^{N_m}(x,0)=\varphi(x),\ x\in(0,l)$ şartı ve (3.1.49) limit bağıntısı kullanılıp,

$$\int_0^l \left|\psi(x,0)-\varphi(x)\right|^2 dx \le 2\int_0^l \left|\psi(x,0)-\psi^{N_m}(x,0)\right|^2 dx + 2\int_0^l \left|\psi^{N_m}(x,0)-\varphi(x)\right|^2 dx$$

eşitsizliğinin her iki tarafında $m\to\infty$ için limite geçilirse

$$\int_0^l \left|\psi(x,0)-\varphi(x)\right|^2 dx = 0$$

elde edilir. Buradan da, $\psi(x,t)$ limit fonksiyonunun başlangıç şartını sağladığı elde edilir. Aynı biçimde $\psi(x,t)$ limit fonksiyonunun sınır şartını sağladığı gösterilebilir. Gerçekten $\psi^{N_m}\big|_S = 0$ sınır şartı ve (3.1.50) limit bağıntısı kullanılıp

$$\int\limits_S \left|\psi(\xi,t)\right|^2 d\xi dt \le 2\int\limits_S \left|\psi(\xi,t)-\psi^{N_m}(\xi,t)\right|^2 d\xi dt + 2\int\limits_S \left|\psi^{N_m}(\xi,t)\right|^2 d\xi dt$$

eşitsizliğinin her iki tarafında $m \to \infty$ için limite geçilirse

$$\int\limits_S \left|\psi(\xi,t)\right|^2 d\xi dt = 0$$

elde edilir. Buradan da $\psi(\xi,t) = 0,\ \overset{\circ}{\forall}(\xi,t) \in S$ olduğu yani limit fonksiyonunun sınır şartını sağladığı elde edilir.

Böylece, $\psi(x,t)$ fonksiyonunun (3.1.3)-(3.1.4) başlangıç-sınır değer probleminin $\overset{o}{H}{}^{2,1}(\Omega)$ uzayından olan hemen hemen her yerde çözümünün olduğu ispatlandı ve bu fonksiyon için (3.1.6) değerlendirmesinin geçerli olduğu gösterildi.

Çözümün tekliği direkt olarak (3.1.6) değerlendirmesi kullanılarak ispatlanabilir. Böylece Teorem 1 ispatlandı.

## 3.2. Optimal Kontrol Probleminin Çözümünün Varlığı ve Tekliği

Bu bölümde incelediğimiz optimal kontrol probleminin çözümünün varlığı ve tekliğiyle ilgili sorular cevaplandırılacaktır.

Aşağıdaki teorem, (3.1.1)-(3.1.4) optimal kontrol probleminin $\alpha \geq 0$ için en az bir çözüme sahip olduğunu ifade etmektedir.

**Teorem 2:** Teorem 1'in şartları sağlandığı kabul edilsin ve $\alpha \geq 0$ olsun. Bu takdirde, (3.1.1)-(3.1.4) optimal kontrol problemi en az bir çözüme sahiptir.

**İspat:** Herhangi bir $\{v^m\} \subset V$ minimalleştirici dizi alınsın. Yani

$$\lim_{m\to\infty} J_\alpha\left(v^m\right) = J_\alpha\left(v^*\right) = \inf_{v\in V} J_\alpha\left(v\right)$$

eşitliği sağlansın. Bu minimalleştirici diziye karşılık gelen Schrödinger başlangıç-sınır değer probleminin $\psi_m = \psi_m\left(x,t\right) \equiv \psi\left(x,t;v^m\right)$ çözüm fonksiyonları Teorem 1'in şartlarını sağlar ve bu fonksiyonlar için

$$\left\|\psi_m\right\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^{2,1}(\Omega)} \leq c_0 \left\|\varphi\right\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^{2}(0,l)} = c_{10},\ m = 1,2,... \tag{3.2.1}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $c_{10} > 0$ sayısı $m$ den bağımsızdır.

$V$ kümesi $H^1\left(0,T\right)$ uzayının kapalı, sınırlı, konveks alt kümesi olduğundan $\{v^m\}$ minimalleştirici dizisinden $v \in H^1\left(0,T\right)$'ye zayıf yakınsayan $\{v^{m_k}\}$ alt dizisi seçilebilir. Kolaylık olması için bu alt dizi de $\{v^m\}$ ile gösterilsin. Bu takdirde, $\{v^m\}$ alt dizisi için aşağıdaki limit bağıntısı yazılabilir. $m \to \infty,\ q \in H^1\left(0,T\right)$ için

$$\int_0^T \left(v^m\left(t\right)q\left(t\right) + v^{m\prime}\left(t\right)q'\left(t\right)\right)dt \longrightarrow \int_0^T \left(v\left(t\right)q\left(t\right) + v'\left(t\right)q'\left(t\right)\right)dt \tag{3.2.2}$$

olacaktır.

$V$ kümesi $H^1\left(0,T\right)$ uzayında kapalı, sınırlı ve konveks küme olduğundan Kolmogorov and Fomin (1989) çalışmasındaki bilinen teoreme göre $V$ kümesi zayıf kapalı küme olacaktır. Yani $v \in V$ olacaktır.

(3.2.1) değerlendirmesine göre, $\left\{v^m\right\}$ alt dizisine karşılık gelen ve (3.1.3)-(3.1.4) başlangıç sınır değer probleminin çözümler dizisi olan $\left\{\psi_m\left(x,t\right)\right\}$ dizisinden $H^{2,1}\left(\Omega\right)$ uzayında $\psi\left(x,t\right)$ elemanına zayıf yakınsayan $\left\{\psi_{m_k}\left(x,t\right)\right\}$ alt dizisi seçilebilir. Kolaylık olması için, söylenen anlamda zayıf yakınsayan alt dizi de $\left\{\psi_m\left(x,t\right)\right\}$ ile gösterilsin. Bu takdirde, aşağıdaki limit bağıntıları geçerlidir. $m \to \infty$ için,

$$\psi_m \longrightarrow \psi,\ L_2\left(\Omega\right) \text{ uzayında zayıf} \tag{3.2.3}$$

$$\frac{\partial \psi_m}{\partial x} \longrightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x},\ L_2\left(\Omega\right) \text{ uzayında zayıf} \tag{3.2.4}$$

$$\frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x^2} \longrightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2},\ L_2\left(\Omega\right) \text{ uzayında zayıf} \tag{3.2.5}$$

$$\frac{\partial \psi_m}{\partial t} \longrightarrow \frac{\partial \psi}{\partial t},\ L_2\left(\Omega\right) \text{ uzayında zayıf} \tag{3.2.6}$$

şeklindedir.

$H^{2,1}\left(\Omega\right)$ uzayı $C^o\left(\left[0,T\right],L_2\left(0,l\right)\right)$ uzayına kompakt gömüldüğünden $m \to \infty$ için

$$\left\|\psi_m - \psi\right\|_{C^o\left(\left[0,T\right],L_2\left(0,l\right)\right)} \longrightarrow 0 \tag{3.2.7}$$

olur. Dolayısıyla her $t \in [0,T]$ için $t$ ye göre düzgün olarak $m \to \infty$ için

$$\psi_m(.,t) \longrightarrow \psi(.,t),\ L_2(0,l) \text{ uzayında kuvvetli} \tag{3.2.8}$$

limit bağıntısı geçerlidir.

Her bir $m = 1, 2, \ldots$ için $\psi_m(x,t)$ fonksiyonu (3.1.3)-(3.1.4) başlangıç sınır değer probleminin $\overset{o}{H}{}^{2,1}(\Omega)$ uzayına ait olan hemen hemen her yerde çözümü olduğundan her $\eta \in L_2(\Omega)$ için

$$\int_{\Omega_t} \left[ i\frac{\partial \psi_m}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x^2} - v(t)\psi_m \right] \overline{\eta}(x,t) dxdt = 0 \tag{3.2.9}$$

integral özdeşliği yazılabilir.

(3.2.3), (3.2.5) ve (3.2.6) limit bağıntıları kullanılırsa $m \to \infty$ için

$$\int_{\Omega} \left( i\frac{\partial \psi_m}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x^2} \right) \overline{\eta}\, dxdt \longrightarrow \int_{\Omega} \left( i\frac{\partial \psi}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \overline{\eta}\, dxdt \tag{3.2.10}$$

limit bağıntısı elde edilir. Burada

$$\int_{\Omega} v^m(t)\psi_m \overline{\eta}\, dxdt \longrightarrow \int_{\Omega} v(t)\psi \overline{\eta}\, dxdt \tag{3.2.11}$$

limit bağıntısının geçerli olduğu ispatlanmalıdır. Aşağıdaki eşitliğin geçerli olduğu açıktır:

$$\int_{\Omega} v^m(t)\psi_m\bar{\eta}\,dxdt=\int_{\Omega}\left(v^m(t)-v(t)\right)\psi\bar{\eta}\,dxdt$$
$$+\int_{\Omega} v^m(t)\left(\psi_m(x,t)-\psi(x,t)\right)\bar{\eta}\,dxdt+\int_{\Omega} v(t)\psi(x,t)\bar{\eta}\,dxdt. \tag{3.2.12}$$

Bu eşitliğin sağ tarafındaki 1. ve 2. terimlerin limitleri incelendiğinde $\eta\in L_2(\Omega)$, $\psi\in C^{\circ}\left([0,T],L_2(0,l)\right)$ olduğundan her $t\in[0,T]$ için $\int_0^l \psi\bar{\eta}\,dx\in L_2(0,T)$ olduğu elde edilir. Bu takdirde, $q(t)=\int_0^l \psi\bar{\eta}\,dx$ seçilerek, (3.2.2) limit bağıntısı kullanılırsa, $m\to\infty$ için

$$\int_{\Omega}\left(v^m(t)-v(t)\right)\psi(x,t)\bar{\eta}(x,t)\,dxdt\longrightarrow 0 \tag{3.2.13}$$

limit bağıntısı elde edilir.

Şimdi (3.2.12) ifadesinin sağ tarafındaki 2. terim değerlendirilmelidir. Cauchy-Bunyakowski eşitsizliği kullanılırsa

$$\left|\int_{\Omega} v^m(t)\left(\psi_m(x,t)-\psi(x,t)\right)\bar{\eta}(x,t)\,dxdt\right|$$
$$\le\int_{\Omega}\left|v^m(t)\right|\left|\psi_m(x,t)-\psi(x,t)\right|\left|\eta\right|dxdt$$
$$\le\sqrt{l}\left\|v^m\right\|_{L_2(0,T)}\left\|\eta\right\|_{L_2(\Omega)}\left\|\psi_m-\psi\right\|_{C^{\circ}([0,T],L_2(0,l))}$$

eşitsizliği yazılabilir. Böylece, $v^m\in V$ olduğu için sonuncu eşitsizlikten

$$\left|\int_{\Omega} v^m(t)\left(\psi_m(x,t)-\psi(x,t)\right)\bar{\eta}(x,t)\,dxdt\right|\le c_{11}\left\|\psi_m-\psi\right\|_{C^{\circ}([0,T],L_2(0,l))} \tag{3.2.14}$$

eşitsizliği elde edilebilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafında (3.2.7) limit bağıntısı kullanılarak $m \to \infty$ için limite geçilirse (3.2.12) eşitliğinin sağ tarafındaki 2. terimin limitinin sıfır olduğu elde edilir. Böylece son söylenen ve (3.2.13) limit bağıntısı kullanılıp, (3.2.12) eşitliğinin her iki tarafında $m \to \infty$ için limite geçilirse (3.2.11) limit bağıntısının geçerli olduğu elde edilir.

(3.2.10)-(3.2.11) limit bağıntıları kullanılarak (3.2.9) integral özdeşliğinin her iki tarafında $m \to \infty$ için limite geçilirse her $\eta \in L_2(\Omega)$ için

$$\int_{\Omega} \left[ i\frac{\partial \psi}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - v(t)\psi \right] \bar{\eta}(x,t)\,dxdt = 0 \qquad (3.2.15)$$

integral özdeşliğinin geçerli olduğu bilgisi elde edilir. Buradan, $\psi(x,t)$ limit fonksiyonunun (3.1.3) denklemini hemen hemen $(x,t) \in \Omega$ için sağladığı görülür.

Şimdi $\psi(x,t)$ limit fonksiyonunun (3.1.4) başlangıç ve sınır şartlarını sağladığı gösterilmelidir. $\psi_m(x,0) = \varphi(x),\ x \in (0,l)$ başlangıç şartı, $t=0$ için (3.2.8) limit bağıntısı ve

$$\int_0^l \left|\psi(x,0) - \varphi(x)\right|^2 dx \le 2\int_0^l \left|\psi(x,0) - \psi_m(x,0)\right|^2 dx + 2\int_0^l \left|\psi_m(x,0) - \varphi(x)\right|^2 dx$$

eşitsizliği kullanılarak, kolaylıkla $\psi(x,0) = \varphi(x),\ \overset{\circ}{\forall} x \in (0,l)$ başlangıç şartı elde edilir. Diğer bir deyişle, $\psi(x,t)$ limit fonksiyonu (3.1.4) başlangıç şartını sağlar.

$H^{2,1}(\Omega)$ uzayı $L_2(S)$ uzayına kompakt gömüldüğünden $m \to \infty$ için

$$\psi_m\big|_S \longrightarrow \psi\big|_S \tag{3.2.16}$$

limit bağıntısı elde edilir. Bu limit bağıntısı, $\psi_m\big|_S = 0$ sınır şartı ve

$$\int_S \left|\psi(\xi,t)\right|^2 d\xi dt \le 2\int_S \left|\psi(\xi,t)-\psi_m(\xi,t)\right|^2 d\xi dt + 2\int_S \left|\psi_m(\xi,t)\right|^2 d\xi dt$$

eşitsizliği kullanılarak kolaylıkla $\psi(\xi,t)=0,\ \forall(\xi,t)\in \overset{\circ}{S}$ sınır şartının geçerli olduğu elde edilir. Dolayısıyla, limit fonksiyonu (3.1.4) sınır şartını da sağlar. Böylece $\psi(x,t)$ limit fonksiyonunun (3.1.3)-(3.1.4) başlangıç sınır değer probleminin $\overset{o}{H}{}^{2,1}(\Omega)$ uzayından hemen hemen çözümü olduğu elde edilir. Yani $\psi = \psi(x,t) \equiv \psi(x,t;v)$ dir.

Diğer taraftan, $H^{2,1}(\Omega)$ uzayının normunun aşağıdan zayıf yarı sürekli olduğu dikkate alınıp (3.2.1) değerlendirmesinin her iki tarafında alt limite geçilirse limit fonksiyonu için (3.1.6) değerlendirmesini sağladığı elde edilir.

$t=T$ için (3.2.8) limit bağıntısı kullanılırsa $m\to\infty$ için

$$\psi_m(.,T)\longrightarrow\psi(.,T),\ L_2(0,l) \text{ uzayında zayıf} \tag{3.2.17}$$

limit bağıntısı yazılabilir. $\{v^m\}\subset V$ dizisinin $H^1(0,T)$ uzayında zayıf yakınsadığı, $L_2(0,l)$, $H^1(0,T)$ uzaylarının normlarının aşağıdan zayıf yarı sürekli olduğu ve $\alpha\ge 0$ olduğu dikkate alınıp, (3.2.17) limit bağıntısının yardımıyla kolaylıkla

$$J_{\alpha*} \le J_\alpha(v) \le \underline{\lim}_{m\to\infty} J_\alpha(v^m) = J_{\alpha*}$$

bağıntısı yazılabilir. Buradan, $J_\alpha\left(v\right)=J_{\alpha*}$ yani $v\in V$ nin $J_\alpha\left(v\right)$ fonksiyonelinin minimum noktası olduğu, dolayısıyla (3.1.1)-(3.1.4) optimal kontrol probleminin çözümü olduğu elde edilir.

Şimdi de $\alpha>0$ durumu için (3.1.1)-(3.1.4) optimal kontrol probleminin çözümünün varlığı ve tekliği incelenecektir.

Bu, aşağıdaki teorem ile gerçekleştirilebilir.

**Teorem 3:** Teorem 2'nin şartlarının sağlandığı ve $y\in L_2\left(0,l\right)$'nin verilen fonksiyon olduğu kabul edilsin. Bu takdirde, $H^1\left(0,T\right)$ uzayında her yerde yoğun olan öyle bir $G$ altkümesi vardır ki $\alpha>0$ için (3.1.1)-(3.1.4) optimal kontrol problemi bir tek çözüme sahiptir.

**İspat:** Öncelikle

$$J_0\left(v\right)=\int_0^l\left|\psi\left(x,T\right)-y\left(x\right)\right|^2dx \tag{3.2.18}$$

fonksiyonelinin $V$ kümesi üzerinde sürekli olduğu gösterilmelidir. $\delta v\in H^1\left(0,T\right)$ fonksiyonunun $v+\delta v\in V$ olacak biçimde $v\in V$ elemanına verilen artım olduğu kabul edilsin. Bu takdirde, (3.1.3)-(3.1.4) başlangıç sınır değer probleminin $v\in V$ ye karşılık gelen $\psi=\psi\left(x,t\right)\equiv\psi\left(x,t;v\right)$ çözümü $\delta\psi=\delta\psi\left(x,t\right)\equiv\psi\left(x,t;v+\delta v\right)-\psi\left(x,t;v\right)=\psi_\delta-\psi$ artımına sahip olacaktır. Burada $\psi_\delta=\psi_\delta\left(x,t\right)\equiv\psi\left(x,t;v+\delta v\right)$ fonksiyonu (3.1.3)-(3.1.4) başlangıç sınır değer probleminin $v+\delta v\in V$ elemanına karşılık gelen çözümüdür. (3.1.3)-(3.1.4) şartlarından $\delta\psi=\delta\psi\left(x,t\right)$ fonksiyonunun aşağıdaki başlangıç sınır değer probleminin çözümü olduğu kolaylıkla elde edilebilir:

$$i\frac{\partial\delta\psi}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\delta\psi}{\partial x^2}-\left(v(t)+\delta v(t)\right)\delta\psi=\delta v(t)\psi,\ \ (x,t)\in\Omega \tag{3.2.19}$$

$$\delta\psi(x,0)=0,\ x\in(0,l),\ \ \delta\psi(0,t)=\delta\psi(l,t)=0. \tag{3.2.20}$$

Şimdi bu başlangıç sınır değer probleminin çözümü değerlendirilmelidir. Bu amaçla, (3.2.19) denkleminin her iki tarafı $\delta\overline{\psi}(x,t)$ fonksiyonu ile çarpılıp $\Omega_t=(0,l)\times(0,t)$ bölgesi üzerinden integrallensin. (3.2.20) sınır şartları kullanılırsa, kolaylıkla aşağıdaki

$$\int_{\Omega_t}\left[i\frac{\partial\delta\psi}{\partial t}\delta\overline{\psi}-a_0\left|\frac{\partial\delta\psi}{\partial x}\right|^2-\left(v(\tau)+\delta v(\tau)\right)\left|\delta\psi\right|^2\right]dxd\tau=\int_{\Omega_t}\delta v(\tau)\psi\delta\overline{\psi}dxd\tau$$

eşitliği yazılabilir. Bu eşitlikten onun kompleks eşleniği çıkarılırsa, aşağıdaki

$$\int_{\Omega_t} i\left(\frac{\partial\delta\psi}{\partial t}\delta\overline{\psi}+\frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial t}\delta\psi\right)dxd\tau=2i\int_{\Omega_t}\delta v(\tau)\operatorname{Im}\left(\psi\delta\overline{\psi}\right)dxd\tau \tag{3.2.21}$$

eşitliği elde edilir. Buradan $\delta\psi(x,0)=0$ şartı ile

$$\left\|\delta\psi(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)}=2\int_{\Omega_t}\delta v(\tau)\operatorname{Im}\left(\psi\delta\overline{\psi}\right)dxd\tau,\ \ \forall t\in[0,T]$$

eşitliği yazılabilir. Bu eşitliğin sağ tarafı değerlendirilirse

$$\left\|\delta\psi(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)}\leq 2\int_{\Omega_t}\left|\delta v(\tau)\right|\left|\psi\right|\left|\delta\psi\right|dxd\tau$$

eşitsizliği yazılabilir. Buradan $v+\delta v\in V,\ \delta v\in H^1(0,T)$ olduğu göz önünde bulundurulursa bu son eşitsizliğin sağ tarafındaki terime Cauchy-Bunyakowski eşitsizliği uygulanırsa

$$\left\|\delta\psi(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)} \le 2\sqrt{l}\left(\int_0^T \left|\delta v(t)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \max_{0\le\tau\le t}\left\|\psi(.,\tau)\right\|_{L_2(0,l)}\left(\int_{\Omega_t}\left|\delta\psi\right|^2 dxd\tau\right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.2.22)$$

eşitsizliği elde edilir.

$\overset{\circ}{H}{}^{2,1}(\Omega)$ uzayı $C^{\circ}([0,T],L_2(0,l))$ uzayına gömüldüğünden gömme teoremine göre

$$\left\|\psi\right\|_{C^{\circ}([0,T],L_2(0,l))} \le c_{12}\left\|\psi\right\|_{\overset{\circ}{H}{}^{2,1}(\Omega)} \quad (3.2.23)$$

eşitsizliği yazılabilir. Burada $c_{12} > 0$ sayısı verilen sayıdır.

Bu eşitsizlik ve (3.1.6) değerlendirmesi (3.2.22) eşitsizliğinde dikkate alınırsa, kolaylıkla

$$\left\|\delta\psi(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)} \le c_{13}\left\|\delta v\right\|^2_{L_2(0,T)} + c_{14}\int_0^T \left\|\delta\psi(.,\tau)\right\|^2_{L_2(0,l)} d\tau,\ \forall t \in [0,T]$$

eşitsizliği yazılabilir. Burada $c_{13} > 0$ ve $c_{14} > 0$ sabitleri $\delta v$ den bağımsızdır.

Burada Gronwall lemması uygulanırsa

$$\left\|\delta\psi(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)} \le c_{15}\left\|\delta v\right\|^2_{H^1(0,T)},\ \forall t \in [0,T] \quad (3.2.24)$$

değerlendirmesi elde edilir. Burada $c_{15} > 0$ sayısı $\delta v$ ve $t$ den bağımsızdır.

Bu değerlendirme kullanılarak $J_0(v)$ fonksiyonelinin $v \in V$ elemanı üzerindeki artımı şöyle incelenir. (3.1.51) formülü kullanılırsa, fonksiyonelin artımı için

$$\delta J_0(v) = J_0(v+\delta v) - J_0(v) =$$
$$= 2\int_0^l \mathrm{Re}\left[\left(\psi(x,T) - y(x)\right)\delta\overline{\psi}(x,T)\right]dx + \left\|\delta\psi(.,T)\right\|^2_{L_2(0,l)} \qquad (3.2.25)$$

formülü yazılabilir. Burada Cauchy-Bunyakowski eşitsizliği uygulanıp (3.1.6) ve (3.2.24) değerlendirmeleri kullanılırsa

$$\left|\delta J_0(v)\right| \le c_{16}\left(\|\delta v\|_{H^1(0,T)} + \|\delta v\|^2_{H^1(0,T)}\right)$$

eşitsizliği yazılabilir. Burada $c_{16} > 0$ sayısı $\delta v$ den bağımsızdır.

Böylece bu eşitsizlikten $J_0(v)$ fonksiyonelinin her $v \in V$ elemanı için yani $V$ kümesi üzerinde sürekli olduğu elde edilir. Diğer taraftan, $V$ kümesi kapalı, sınırlı ve konveks küme; $H^1(0,T)$ uzayı ise düzgün konveks Banach uzayıdır (Yosida, 1980). Bu takdirde, Goebel (1979) çalışmasından bilinen teoreme göre $\alpha > 0$ için $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli $V$ kümesi üzerinde bir tek minimum noktasına sahip olur. Dolayısıyla (3.1.1)-(3.1.4) optimal kontrol problemi bir tek çözüme sahip olur. Böylece Teorem 3 ispatlanmış olur.

## 3.3. Amaç Fonksiyonelinin Diferansiyellenebilmesi ve Eşlenik Problem

Bu bölümde

$$J_\alpha(v) = \int_0^l \left|\psi(x,T;v) - y(x)\right|^2 dx + \alpha\int_0^T \left[(v-w)^2 + (v_t - w_t)^2\right]dt \to \min \qquad (3.3.1)$$

fonksiyoneli ve

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - v(t)\psi = 0, \ (x,t)\in\Omega, \qquad (3.3.2)$$

$$\psi(x,0)=\varphi(x),\ x\in(0,l),\ \psi(0,t)=\psi(l,t)=0 \tag{3.3.3}$$

Schrödinger başlangıç-sınır değer problemi ile verilmiş optimal kontrol probleminin çözümü için gerek şart elde edilecektir. Gerek şartın elde edilmesinde fonksiyonelin gradyeni kullanıldığından öncelikle (3.3.1) fonksiyonelinin diferensiyellenebilir olduğunun gösterilmesi gerekir. Bu amaçla, önce eşlenik problem elde edilir.

Probleme karşılık gelen Lagrange fonksiyoneli

$$\begin{aligned}L(\psi,v,\phi)=\int_0^l\left|\psi(x,T)-y\right|^2dx&+\frac{1}{2}\int_\Omega\left(i\frac{\partial\psi}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-v(t)\psi\right)\overline{\phi}dxdt\\&+\frac{1}{2}\int_\Omega\left(-i\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\overline{\psi}}{\partial x^2}-v(t)\overline{\psi}\right)\phi dxdt\end{aligned}$$

şeklinde olup $\psi+\varepsilon\delta\psi$ artımı için

$$\begin{aligned}L(\psi+\varepsilon\delta\psi,v,\phi)=&\int_0^l\left|(\psi+\varepsilon\delta\psi)(x,T)-y\right|^2dx\\&+\frac{1}{2}\int_\Omega\left(i\frac{\partial(\psi+\varepsilon\delta\psi)}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2(\psi+\varepsilon\delta\psi)}{\partial x^2}-v(t)(\psi+\varepsilon\delta\psi)\right)\overline{\phi}dxdt\\&+\frac{1}{2}\int_\Omega\left(-i\frac{\partial\left(\overline{\psi}+\varepsilon\overline{\delta\psi}\right)}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\left(\overline{\psi}+\varepsilon\overline{\delta\psi}\right)}{\partial x^2}-v(t)\left(\overline{\psi}+\varepsilon\overline{\delta\psi}\right)\right)\phi dxdt\end{aligned}$$

elde edilir. Farkı hesaplarsak

$$L(\psi+\varepsilon\delta\psi,v,\phi)-L(\psi,v,\phi)=\int_0^l\left\{\left|(\psi+\varepsilon\delta\psi)(x,T)-y\right|^2-\left|\psi(x,T)-y\right|^2\right\}dx$$
$$+\frac{1}{2}\varepsilon\int_\Omega\left(i\frac{\partial\delta\psi}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\delta\psi}{\partial x^2}-v(t)\delta\psi\right)\overline{\phi}dxdt$$
$$+\frac{1}{2}\varepsilon\int_\Omega\left(-i\frac{\partial\overline{\delta\psi}}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\overline{\delta\psi}}{\partial x^2}-v(t)\overline{\delta\psi}\right)\phi dxdt$$

veya

$$L(\psi+\varepsilon\delta\psi,v,\phi)-L(\psi,v,\phi)=\varepsilon\int_0^l 2\left[\mathrm{Re}\left(\psi(x,T)-y\right)\overline{\delta\psi}(x,T)\right]dx+\varepsilon^2\int_0^l\left[\delta\psi(x,T)\right]^2dx$$
$$+\frac{1}{2}\varepsilon\int_0^l i\delta\psi(x,T)\overline{\phi}(x,T)dx+\frac{1}{2}\varepsilon\int_\Omega\left(-i\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\overline{\phi}}{\partial x^2}-v(t)\overline{\phi}\right)\delta\psi dxdt$$
$$+\frac{1}{2}\varepsilon\int_0^l -i\overline{\delta\psi}(x,T)\phi(x,T)dx+\frac{1}{2}\varepsilon\int_\Omega\left(i\frac{\partial\phi}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}-v(t)\phi\right)\overline{\delta\psi}dxdt$$

olup buradan

$$L(\psi+\varepsilon\delta\psi,v,\phi)-L(\psi,v,\phi)=\varepsilon\int_0^l 2\left[\mathrm{Re}\left(\psi(x,T)-y\right)\overline{\delta\psi}(x,T)\right]dx$$
$$+\varepsilon^2\int_0^l\left[\delta\psi(x,T)\right]^2dx+\varepsilon\int_0^l\mathrm{Re}\left[-i\overline{\delta\psi}(x,T)\phi(x,T)\right]dx$$
$$+\varepsilon\int_\Omega\mathrm{Re}\left(i\frac{\partial\phi}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}-v(t)\phi\right)\overline{\delta\psi}dxdt$$

yazılır. Terimleri birleştirerek

$$L(\psi+\varepsilon\delta\psi,v,\phi)-L(\psi,v,\phi)=\varepsilon\int_0^l\mathrm{Re}\left[2\left(\psi(x,T)-y\right)-i\phi(x,T)\right]\overline{\delta\psi}(x,T)dx$$
$$+\varepsilon^2\int_0^l\left[\delta\psi(x,T)\right]^2dx+\varepsilon\int_\Omega\mathrm{Re}\left(i\frac{\partial\phi}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}-v(t)\phi\right)\overline{\delta\psi}dxdt$$

şekline getirebiliriz.

Lagrange fonksiyoneli için birinci varyasyonun

$$\delta L = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{L(\psi + \varepsilon\delta\psi, v, \phi) - L(\psi, v, \phi)}{\varepsilon}$$

tanımı gereği

$$\delta L = \int_0^l \mathrm{Re}\left[2\left(\psi(x,T) - y\right) - i\phi(x,T)\right]\overline{\delta\psi}(x,T)\,dx$$
$$+ \int_\Omega \mathrm{Re}\left(i\frac{\partial\phi}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - v(t)\phi\right)\overline{\delta\psi}\,dxdt$$

eşitliği elde edilir. Optimal çözümün elde edilebilmesi için $\delta L = 0$ stasyonerlik şartının sağlanması gerekir. $\delta\psi$ fonksiyonu keyfi olduğundan $\delta L = 0$ şartının sağlanması için katsayılar sıfır olmalıdır.

Böylece aşağıdaki eşlenik problem elde edilir.

$$i\frac{\partial\phi}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - v(t)\phi = 0, \quad (x,t) \in \Omega \tag{3.3.4}$$

$$\phi(x,T) = -2i\left(\psi(x,T) - y\right), \quad \phi(0,t) = \phi(l,t) = 0. \tag{3.3.5}$$

Burada $\psi = \psi(x,t) \equiv \psi(x,t;v)$ fonksiyonu (3.1.3)-(3.1.4) başlangıç sınır değer probleminin $v \in V$ için çözümüdür.

Bu problemin çözümü olarak, $C^0\left([0,T], L_2(0,l)\right)$ uzayına ait olan, $\forall\gamma \in \overset{o}{H}{}^{2,1}(\Omega)$ için

$$\int_\Omega \phi\left(-i\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2\overline{\gamma}}{\partial x^2} - v(t)\overline{\gamma}\right)dxdt = \int_0^l i\phi(x,0)\overline{\gamma}(x,0)\,dx - 2\int_0^l \left(\psi(x,T) - y\right)\overline{\gamma}(x,T)\,dx \tag{3.3.6}$$

integral özdeşliğini sağlayan $\phi = \phi(x,t)$ fonksiyonu anlaşılmaktadır.

Teorem 1'in ispatında kullanılmış olan Galerkin yöntemi kullanılarak verilen şartlar altında aşağıdaki teorem ispatlanabilir:

**Teorem 4:** Teorem 1'in şartlarının sağlandığı ve $y \in L_2(0,l)$' nin verilen fonksiyon olduğu kabul edilsin. Bu takdirde, (3.3.4)-(3.3.5) eşlenik probleminin $C^{\mathrm{o}}\left([0,T], L_2(0,l)\right)$ uzayına ait olan bir tek çözümü vardır ve bu çözüm için aşağıdaki değerlendirmesi geçerlidir:

$$\|\phi(.,t)\|^2_{L_2(0,l)} \le c_{17}\left(\|\varphi\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^2(0,l)} + \|y\|^2_{L_2(0,l)}\right),\ \forall t \in [0,T]. \tag{3.3.7}$$

Burada $c_{17} > 0$ sayısı $\varphi,\ f$ ve $y$ den bağımsızdır.

Böylece amaç fonksiyonelinin gradyenini verecek olan aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 5:** Teorem 4'ün şartlarının sağlandığı ve $\alpha \ge 0$' ın verilen sayı olduğu kabul edilsin. Bu takdirde, $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli $V$ kümesi üzerinde Frechet anlamında diferensiyellenebilirdir ve onun gradyeni için aşağıdaki formül geçerlidir:

$$J'_\alpha(v) = \xi + 2\alpha(v - w) \tag{3.3.8}$$

Burada $\xi(t)$ fonksiyonu

$$\begin{gathered} \xi'' - \xi = \int_0^l \mathrm{Re}\left(\psi\bar{\phi}\right)dx \\ \xi'(0) = \xi'(T) = 0 \end{gathered} \tag{3.3.9}$$

probleminin çözümüdür.

**İspat:** $J_0(v)$ fonksiyonelinin artımı için olan

$$\delta J_0(v) = J_0(v+\delta v) - J_0(v) =$$
$$= 2\int_0^l \mathrm{Re}\left[\left(\psi(x,T) - y\right)\delta\overline{\psi}(x,T)\right]dx + \left\|\delta\psi(.,T)\right\|^2_{L_2(0,l)}$$

formülü kullanılarak her $v \in V$ noktasında $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin artımı

$$\begin{aligned}\delta J_\alpha(v) &= J_\alpha(v+\delta v) - J_\alpha(v) = \\ &= 2\int_0^l \mathrm{Re}\left[\left(\psi(x,T) - y\right)\delta\overline{\psi}(x,T)\right]dx + \\ &+ 2\alpha\int_0^T \left((v-w)\delta v + (v_t - w_t)\delta v_t\right)dt + \left\|\delta\psi(.,T)\right\|^2_{L_2(0,l)} + \alpha\left\|\delta v\right\|^2_{H^1(0,T)}\end{aligned} \tag{3.3.10}$$

biçiminde yazılabilir. Burada $\delta\psi = \delta\psi(x,t)$ fonksiyonu (3.2.19)-(3.2.20) başlangıç sınır değer probleminin çözümüdür.

(3.3.10) eşitliğinin sağ tarafındaki 1. terim yeniden ele alındığında $\delta\psi \in \overset{\circ}{H}{}^{2,1}(\Omega)$ olduğundan her $\eta \in L_2(\Omega)$ için

$$\int_\Omega \left( i\frac{\partial\delta\psi}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2\delta\psi}{\partial x^2} - \left(v(t) + \delta v(t)\right)\delta\psi \right)\overline{\eta}\,dxdt = \int_\Omega \delta v(t)\psi\overline{\eta}\,dxdt \tag{3.3.11}$$

integral özdeşliği yazılabilir. $\phi \in C^{o}\left([0,T], L_2(D)\right)$ olduğundan bu integral özdeşliğinde $\eta \in L_2(\Omega)$ nın yerine $\phi(x,t)$ fonksiyonu alınırsa

$$\int_\Omega \left( i\frac{\partial\delta\psi}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2\delta\psi}{\partial x^2} - \left(v(t) + \delta v(t)\right)\delta\psi \right)\overline{\phi}\,dxdt = \int_\Omega \delta v(t)\psi\overline{\phi}\,dxdt \tag{3.3.12}$$

eşitliği yazılabilir.

$\delta\psi \in \overset{\circ}{H}{}^{2,1}(\Omega)$ olduğundan, (3.3.6) integral özdeşliğinde $\gamma$ nın yerine $\delta\psi(x,t)$ alınırsa ve $\delta\psi(x,0)=0$ olduğu göz önünde bulundurulursa

$$\int_\Omega \phi\left(-i\frac{\partial\delta\overline{\psi}}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\delta\overline{\psi}}{\partial x^2}-v(t)\delta\overline{\psi}\right)dxdt=-2\int_0^l\left[\left(\psi(x,T)-y\right)\delta\overline{\psi}(x,T)\right]dx$$

eşitliği yazılabilir. Bu eşitliğin kompleks eşleniği yazılırsa

$$\int_\Omega \overline{\phi}\left(i\frac{\partial\delta\psi}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\delta\psi}{\partial x^2}-v(t)\delta\psi\right)dxdt=-2\int_0^l\left[\left(\overline{\psi}(x,T)-y\right)\delta\psi(x,T)\right]dx \quad (3.3.13)$$

eşitliği elde edilir. (3.3.12) eşitliğinden (3.3.13) eşitliği taraf tarafa çıkarılırsa

$$2\int_0^l\left[\left(\overline{\psi}(x,T)-y\right)\delta\psi(x,T)\right]dx=-\int_\Omega \delta v(t)\psi\overline{\phi}\,dxdt-\int_\Omega\left(\delta v(t)\right)\delta\psi\overline{\phi}\,dxdt$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik, onun kompleks eşleniğiyle toplanırsa

$$2\int_0^l \mathrm{Re}\left[\left(\psi(x,T)-y(x)\right)\delta\overline{\psi}(x,T)\right]dx=-\int_\Omega \delta v(t)\mathrm{Re}\left(\psi\overline{\phi}\right)dxdt-\int_\Omega \delta v(t)\mathrm{Re}\left(\delta\psi\overline{\phi}\right)dxdt \quad (3.3.14)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik, (3.3.10) formülünde dikkate alınırsa fonksiyonelin artımı için

$$\delta J_\alpha(v)=-\int_\Omega \delta v(t)\mathrm{Re}\left(\psi\overline{\phi}\right)dxdt+2\alpha\int_0^T\left(\left(v-w\right)\delta v+\left(v_t-w_t\right)\delta v_t\right)dt+R(\delta v) \quad (3.3.15)$$

formülü yazılabilir. Burada $R(\delta v)$

$$R(\delta v)=\|\delta\psi(.,T)\|_{L_2(0,l)}^2+\alpha\|\delta v\|_{H^1(0,T)}^2-\int_\Omega \delta v(t)\,\mathrm{Re}\left(\delta\psi\overline{\phi}\right)dxdt \tag{3.3.16}$$

formülüyle tanımlanır.

Şimdi $R(\delta v)$'nin 3. terimi değerlendirilsin. Bu amaçla

$$\left|\int_\Omega \delta v(t)\,\mathrm{Re}\left(\delta\psi\overline{\phi}\right)dxdt\right|\le\int_\Omega|\delta v(t)||\delta\psi||\phi|\,dxdt$$
$$\le\sqrt{2}\max_{0\le t\le T}\|\phi(.,t)\|_{L_2(0,l)}\max_{0\le t\le T}\|\delta\psi(.,t)\|_{L_2(0,l)}\left(\|\delta v\|_{L_2(0,T)}^2\right)^{1/2}$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu eşitsizlikte

$$\|\delta\psi(.,t)\|_{L_2(0,l)}^2\le c_{18}\|\delta v\|_{L_2(0,T)}^2,\ \forall t\in[0,T] \tag{3.3.17}$$

ve (3.3.7) değerlendirmesi kullanılırsa

$$\left|\int_\Omega \delta v(t)\,\mathrm{Re}\left(\delta\psi\overline{\phi}\right)dxdt\right|\le c_{19}\|\delta v\|_{L_2(0,T)}^2 \tag{3.3.18}$$

eşitsizliği elde edilir.

Böylece $R(\delta v)$ için

$$|R(\delta v)|\le c_{20}\|\delta v\|_{H^1(0,T)}^2 \tag{3.3.19}$$

bağıntısı elde edilir.

(3.3.19) bağıntısı kullanılarak fonksiyonelin artımı için olan (3.3.15) formülü

$$\delta J_{\alpha}(v)=\int_0^T\left\{-\int_0^l \operatorname{Re}\left(\psi\bar{\phi}\right)dx\right\}\delta v(t)\,dt+2\alpha\left\langle v-w,\delta v\right\rangle_{H^1(0,T)}+o\left(\|\delta v\|_{H^1(0,T)}\right) \quad (3.3.20)$$

biçiminde yeniden düzenlenebilir.

Aşağıdaki eşlenik problem tanımlanırsa

$$\begin{aligned} &\xi''-\xi=\int_0^l \operatorname{Re}\left(\psi\bar{\phi}\right)dx \\ &\xi'(0)=\xi'(T)=0 \end{aligned} \quad (3.3.21)$$

(3.3.20) ile verilen fonksiyonel (3.3.21) probleminin $\xi(t)$ çözümü ile

$$\delta J_{\alpha}(v)=\int_0^T\left[\xi(t)\delta v(t)+\xi'(t)\delta v'(t)\right]dt+2\alpha\left\langle v-w,\delta v\right\rangle_{H^1(0,T)}+o\left(\|\delta v\|_{H^1(0,T)}\right)$$

veya

$$\delta J_{\alpha}(v)=\left\langle \xi+2\alpha(v-w),\delta v\right\rangle_{H^1(0,T)}+o\left(\|\delta v\|_{H^1(0,T)}\right) \quad (3.3.22)$$

şeklinde yazılır. Böylece

$$J_{\alpha}'(v)=\xi+2\alpha(v-w) \quad (3.3.23)$$

Frechet türevi elde edilir. Böylece teorem 5 ispatlanmış olur.

Şimdi gradyenin Lipschitz sürekliliği ile ilgili aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 6:** $J_{\alpha}'(v)$ gradyeni aşağıdaki Lipschitz eşitsizliğini sağlar.

$$\left\| J'_\alpha\left(v+\delta v\right) - J'_\alpha\left(v\right)\right\|^2_{H^1(0,T)} \le c_{21}\left\|\delta v\right\|^2_{H^1(0,T)} \tag{3.3.24}$$

Burada $c_{21}$ sayısı $\delta v$ artımından bağımsızdır.

**İspat:** $v+\delta v \in V$ artımına karşılık $J'_\alpha\left(v\right)$ fonksiyonelinin artımı

$$\begin{aligned} J'_\alpha\left(v+\delta v\right) - J'_\alpha\left(v\right) &= \xi_\delta + 2\alpha\left(v+\delta v - w\right) - \xi - 2\alpha\left(v-w\right) \\ &= \delta\xi + 2\alpha\delta v. \end{aligned} \tag{3.3.25}$$

şeklindedir. Burada $\delta\xi\left(t\right)$ fonksiyonu

$$\delta\xi''\left(t\right) - \delta\xi\left(t\right) = \int_0^l \mathrm{Re}\left(\psi_\delta \delta\overline{\phi} + \delta\psi\overline{\phi}\right)dx \tag{3.3.26}$$

fark probleminin çözümüdür. (3.3.26) probleminin $H^1\left(0,T\right)$ uzayında bir çözümü vardır ve bu çözüm

$$\left\|\delta\xi\left(t\right)\right\|_{H^1(0,T)} \le \left\| \int_0^l \left(\left|\psi_\delta\right|\left|\delta\phi\right| + \left|\delta\psi\right|\left|\phi\right|\right)dx \right\|_{L_2(0,T)} \tag{3.3.27}$$

eşitsizliğini sağlar. (3.3.27) eşitsizliğinin sağ tarafında yer alan

$$\delta\phi\left(x,t\right) = \phi_\delta\left(x,t\right) - \phi\left(x,t\right) = \phi\left(x,t;v+\delta v\right) - \phi\left(x,t;v\right)$$

fonksiyonu

$$\begin{gathered} i\frac{\partial\delta\phi}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2\delta\phi}{\partial x^2} - \left(v\left(t\right) + \delta v\left(t\right)\right)\delta\phi = \delta v\left(t\right)\phi,\ \left(x,t\right)\in\Omega \\ \delta\phi\left(x,T\right) = -2i\delta\psi\left(x,T\right),\ \delta\phi\left(0,t\right) = \delta\phi\left(1,t\right) = 0. \end{gathered} \tag{3.3.28}$$

probleminin çözümüdür ve bu fonksiyon

$$\left\|\delta\phi(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)} \le c_{22}\left\|\delta v\right\|^2_{L_2(0,T)},\ \forall t\in[0,T] \tag{3.3.29}$$

eşitsizliğini sağlar. Burada $c_{22}$ sayısı, $\delta v$ den bağımsızdır.

(3.3.27) eşitsizliğinin sağ tarafında yer alan diğer $\psi_\delta$ fonksiyonu

$$\left\|\psi_\delta\right\|^2_{L_2(\Omega)} \le \left\|\varphi\right\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^2(0,l)} \tag{3.3.30}$$

eşitsizliğini sağlar. Böylece (3.3.27) eşitsizliği

$$\left\|\delta\xi(t)\right\|^2_{H^1(0,T)} \le 2\left\|\psi_\delta\right\|^2_{L_2(\Omega)}\max_{0\le t\le T}\left(\left\|\delta\phi(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)}\right)+2\left\|\phi\right\|^2_{L_2(\Omega)}\max_{0\le t\le T}\left(\left\|\delta\psi(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)}\right).$$

özelliğine sahiptir. $\phi$, $\delta\psi(.,t)$, $\delta\phi(.,t)$ ve $\psi_\delta$ fonksiyonları ile ilgili (3.3.7), (3.3.27), (3.3.29) ve (3.3.30) eşitsizlikleri kullanılırsa, o zaman aşağıdaki değerlendirme elde edilir;

$$\left\|\delta\xi(t)\right\|^2_{H^1(0,T)} \le c_{23}\left\|\delta v\right\|^2_{L_2(0,T)}. \tag{3.3.31}$$

Burada $c_{23}$ sayısı , $\delta v$ den bağımsızdır.

$H^1(0,T)$ uzayında (3.3.25) eşitliğinin normunu alarak

$$\left\|J'_\alpha(v+\delta v)-J'_\alpha(v)\right\|^2_{H^1(0,T)} \le 2\left\|\delta\xi(t)\right\|^2_{H^1(0,T)}+8\alpha^2\left\|\delta v(t)\right\|^2_{H^1(0,T)}$$

eşitsizliğini elde ederiz ve (3.3.31) eşitsizliğini göz önüne alarak $J'_\alpha(v)$ gradyeni için aşağıdaki eşitsizlik geçerli olur;

$$\left\| J'_\alpha(v+\delta v) - J'_\alpha(v) \right\|^2_{H^1(0,T)} \le c_{24} \left\| \delta v \right\|^2_{H^1(0,T)}$$

Burada $c_{24}$ sayısı, $\delta v$ den bağımsızdır.

Böylece $J'_\alpha(v)$ gradyeninin $V$ kümesinde sürekli olduğu ve $c_{24} > 0$ sabiti ile Lipschitz eşitsizliğini sağladığı gösterilmiş olur.

Şimdi bir $v^* \in V$ elemanının optimal çözüm olabilmesi için aşağıdaki sonuç gerek şart olarak ifade edilebilir.

Eğer $v^* \in V$ kontrolü $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin minimum noktası ise, $J_\alpha(v)$ sürekli diferansiyellenebilir ve $V$ kümesinin konveks olması durumunda, (Vasilyev 1980) sayfa 28 deki teoreme göre aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir

$$\left\langle J'_\alpha(v^*), v - v^* \right\rangle_{H^1(0,T)} \ge 0, \ \forall v \in V.$$

Bu eşitsizlik bir $v^*$ elemanının optimal kontrol olabilmesi için gerek şartı ifade etmektedir.

Böylece incelenen problemde bir $v^*$ elemanının optimal kontrol olabilmesi için gerek şart

$$\left\langle \xi + 2\alpha(v^* - w), v - v^* \right\rangle_{H^1(0,T)} \ge 0, \ \forall v \in V. \tag{3.3.32}$$

olarak belirlenir.

### 3.4. Minimalleştirici Dizinin Kurulması

Şimdi, (3.3.23) ile verilen gradyen formülü kullanılarak $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli için optimal çözüme yakınsayan bir minimalleştirici dizi kurulabilir.

Bir $v^{\mathrm{o}} \in V$ başlangıç elemanı seçilir ve $m \geq 0$ için aşağıdaki adımlarla bir önceki $v^m$ fonksiyon değerinden bir sonraki $v^{m+1}$ fonksiyonu hesaplanır.

**1.** (3.1.3)-(3.1.4) probleminin (3.1.48) anlamındaki $\psi_m$ çözümü elde edilir.

**2.** $\psi_m$ fonksiyonu kullanılarak, (3.3.4)-(3.3.5) eşlenik probleminin (3.2.23) anlamındaki $\phi_m$ çözümü elde edilir.

**3.** $\psi_m$ ve $\phi_m$ fonksiyonlarını kullanılarak (3.3.9) ifadesindeki ikinci eşlenik problem için $\xi_m$ çözümü elde edilir.

**4.** $\xi_m$ fonksiyonu kullanılarak $J'_\alpha\left(v^m\right)$ gradyeni hesaplanır.

**5.**
$$v^{m+1} = v^m - \beta_m J'_\alpha\left(v^m\right) \tag{3.4.1}$$

elemanı hesaplanır ve bu elemanın $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin minimalleştiricisi olması için, aşağıdaki eşitsizlik sağlanacak şekilde

$$J_\alpha\left(v^{m+1}\right) - J_\alpha\left(v^m\right) = \beta_m\left[-\left\|J'_\alpha\left(v^m\right)\right\|^2 + \frac{o(\beta_m)}{\beta_m}\right] < 0$$

$\beta_m > 0$ sayıları seçilir.

Böylece, (3.4.1) ile oluşturulacak olan $\{v^m\}$ dizisi, $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli için $V$ kümesinde bir minimalleştirici dizi olacaktır.

# 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu çalışmada zamana bağlı bir Schrödinger denkleminin katsayısında yer alan potansiyel fonksiyonunun optimal kontrolü problemi ele alınmıştır. Amaç fonksiyoneli olarak, Schrödinger denkleminin çözümünün belirli bir final anında, yakın olması istenen konum fonksiyonunun yer aldığı bir olasılık fonksiyoneli seçilmiştir.

Yapılan çalışmaların yer aldığı 3. bölümde ilk olarak Schrödinger başlangıç-sınır değer probleminin genelleştirilmiş çözümünün varlığı, tekliği ve kararlılığına ait teoremler ifade edilerek ispatlanmıştır.

İkinci olarak 3.2 bölümde optimal kontrol probleminin çözümünün varlığı, genelleştirilmiş Weierstrass teoremine dayanarak fonksiyonelin sürekliliğinin ispatlanmasıyla, çözümün tekliği de Goebel tarafından verilen sonuçların problem için doğruluğunun sağlanması neticesinde elde edilmiştir.

Tezin 3.3 bölümünde literatürdeki çalışmalardan farklı olarak seçilen kontrollerin karesel integrallenebilir fonksiyon uzayından daha düzgün bir uzaydan seçilmesi durumunda, amaç fonksiyonelinin bu uzayda da diferensiyellenebileceği sonucuna ulaşılmıştır. Ayrıca bu seçime uygun olarak eşlenik problemin nasıl elde edilebileceği gösterilmiştir. Bu sonuçlar kullanılarak, amaç fonksiyonelinin gradyeninin sürekliliğine ait bir teorem ifade ve ispat edilmiştir. Bu sayede optimal kontrol problemi için nümerik metotların kullanılması mümkün olabilecektir.

Son olarak 3.4 bölümde optimal çözüme yakınsayan bir minimalleştirici dizi kurulması için gerekli algoritma verilmiştir.

# 5. SONUÇ

Bir Schrödinger denkleminde katsayı fonksiyonu olarak yer alan potansiyel fonksiyonun seçildiği uzay, kendisi ve birinci türeviyle karesel integrallenebilir fonksiyonların uzayı olması bakımıyla bu tezde incelenen problem literatürde yer alan daha önceki Schrödinger denklemiyle alakalı optimal kontrol içeren çalışmalardan oldukça farklıdır. Kontrol uzayının bu şekilde seçilmesi problemin diğer kısımlarında da önemli değişikliklere sebep olmuştur. Bu, amaç fonksiyonelinin diferansiyellenebilmesi kısmında görülmektedir. Literatürdeki konuyla alakalı diğer çalışmalarda, kontrollerin seçildiği uzay sadece karesel integrallenebilir fonksiyonlardan oluştuğundan, fonksiyonelin diferansiyeli bulunurken bir eşlenik probleme ihtiyaç duyulmuşken, bu tezde ele alınan çalışmada kontroller sürekli fonksiyonlar olduğundan bir eşlenik problem yetersiz kalmaktadır. Böylece ikinci bir eşlenik problem zaruri olmuştur. Bu ikinci eşlenik problemin çözümüne ait gerekli incelemeler de yapılarak istenilen diferansiyellenebilmenin mümkün olduğu ve sonuçta gradyenin de sürekli olduğu gösterilmiştir. Böylece sürekli potansiyel fonksiyonların kontrol edilebileceği sonucuna ulaşılabildiğinden bu çalışma optimal kontrol teorisi alanında teorik yenilikler getirmiştir.

**KAYNAKLAR**

Baundouin, L., Kavian, O. and Puel, J. P., 2005. Regularity for a Schrödinger equation with singuler potentials and application to bilinear optimal control. Journal Differential Equations, 216, 188-222.

Butkovsky, A.G. and Samoilenko Yu.İ., 1984. Kuantum mekanik süreçlerin kontrolü. Nauka, 256 p, Moscow.

Goebel, M., 1979. On existence of optimal control. Mathematische Nachrichten, Vol 93, 67-73.

Hao, D. N., 1986. Kuantum objektlerinin optimal kontrolü. Nauka, Moscow, N. 2, 14-20.

Hsieh, P.F. and Sibuya, Y., 1999. Basic Theory of Ordinary Differential Equations. Springer Verlag, 468 p, New York.

İskenderov, A. D. ve Tagiyev, R. G., 1983. Parabolik denklemlerin katsayılarında olan kontrolörle optimizasyon problemi. Diferansiyel Denklemler, 19 (8), 1324-1334.

Kolmogorov, A.N. and Fomin, S.V., 1989. Fonksiyonlar Teorisinin ve Fonksiyonel Analizin Elemanları. Nauka, 624 p, Moscow.

Ladyzhenskaya, O.A., Solonnikov, V.A. and Ural'steva, N.N., 1968. Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type. American Mathematical Society, 646 p, ABD.

Lions, J.L. and Magenes, E. 1972. Non Homegeneous Boundary Value Problems and Applications. Springer-Verlag, Vol. 1, Berlin.

Mahmudov, N. M., 1997. Lions fonksiyonelli kuantum mekanik sistemler için optimal kontrol problemlerinin farklar metoduyla çözümü. Azerbaycan Bilimler Akademisi Matematik Mekanik Enstitüsü Eserleri, 7, 79-82.

Pontryagin, L.S., 1976. Adi Diferansiyel Denklemler. Nauka, 332 p, Moskova.

Potapov, M. M., Razgulin, A. V. and Şameeva, T. Y., 1987. Schrödinger tipli optimal kontrol probleminin yaklaşımı ve regülarizasyonu. Moskova Devlet Üniversitesi Haberleri "Nümerik Analiz ve Sibernetik", 15(1), 8-13.

Silla, N., 1991. Schrödinger Tipli Kuantum Mekanik Sistemler için Optimal Kontrol Problemlerinin Nümerik Çözümü. Doktora Tezi, Bakü Devlet Üniversitesi, Bakü.

Subaşı M., 2002. An optimal control problem governed by the potential of a linear Schrödinger equation. Applied Mathematics and Computation, 131-1, 95-106.

Subaşı M., 2004. A variational method of optimal control problems for nonlinear Schrodinger equations. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 20(1), 82-89.

Toyoğlu, F., 2010. İki Boyutlu Schrödinger Denklemi için Optimal Kontrol Problemleri ve Onların Nümerik Çözümü. Dokrora Tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Vasilyev, F.P., 1980. Ekstremal Problemlerin Nümerik Çözüm Metodları. Nauka, 388 p, Moskova.

Vasilyev, F.P., 1981. Ekstremal Problemlerin Çözüm Metodları. Nauka, 400 p, Moskova.

Vorontsov, M.A. and Shmalgauzen, V.I., 1985. Adaptiv optiğin prensipleri. Nauka, 336 p, Moskova.
Yagubov, G. Ya. and Musayeva, M.A., 1997. Lineer olmayan Schrödinger denklemi için İdentifikasyon problemi hakkında. Diferansiyel Denklemler, 33 (12), 1691-1698.
Yagubov, G. Ya., Toyoğlu F. and Subaşı M., 2012. An optimal control problem for two-dimensional Schrödinger equation. Applied Mathematics and Computation 218, 6177–6187.
Yetişkin H. and Subaşı M., 2010. On the optimal control problem for Schrödinger equation with complex potential. Applied Mathematics and Computation, 216, 1896-1902.
Yıldız, B. and Yagubov, G. Ya., 1997. On an optimal control problem. Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol 88 , 275-287.
Yosida, K., 1980. Functional Analysis. Springer-Verlag, 624 p, New York.

## ÖZGEÇMİŞ

1986 yılında Antalya'nın Serik ilçesinde doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Serik'te tamamladı. 2004 yılında Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde lisans öğrenimine başlayarak 2008 yılında mezun oldu. Aynı yıl Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik alanında yüksek lisans öğrenimine başlayarak, 2010 yılında mezun oldu.

2010 yılında Ardahan Üniversitesi Meslek Yüksekokul'unda Öğretim Görevlisi olarak çalışmaya başladı. 2011 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik alanında doktora öğrenimine başladı. Halen Ardahan Üniversitesi Sosyal Bilimler Meslek Yüksekokul'unda Öğretim Görevlisi olarak çalışmaktadır.0