DİTOPOLOJİK DOKU UZAYLARININ WALLMAN-TİP KOMPAKTLAŞTIRMASI

Kübra ÖZKAN

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Topoloji Bilim Dalı
Doç. Dr. Tamer UĞUR
2014

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DİTOPOLOJİK DOKU UZAYLARININ WALLMAN-TİP KOMPAKTLAŞTIRMASI

Kübra ÖZKAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI
Topoloji Bilim Dalı

ERZURUM
2014

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAY FORMU

DİTOPOLOJİK DOKU UZAYLARININ WALLMAN-TİP KOMPAKTLAŞTIRMASI

Doç. Dr. Tamer UĞUR danışmanlığında, Kübra ÖZKAN tarafından hazırlanan bu çalışma 03/07/2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı – Topoloji Bilim Dalı'nda Topoloji Yüksek Lisans tezi olarak **oybirliği/~~oy çokluğu~~** (3/3) ile kabul edilmiştir.

Başkan : Abdullah KOPUZLU *İmza* :

Üye : Erdem KOCADAĞISTAN *İmza* :

Üye : Tamer UĞUR *İmza* :

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu 10/07/2014 tarihi ve 28/877 nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. İhsan EFEOĞLU
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

DİTOPOLOJİK DOKU UZAYLARININ WALLMAN-TİP KOMPAKTLAŞTIRILMASI

Kübra ÖZKAN

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Topoloji Bilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Tamer UĞUR

Bu çalışmada, ditopolojik doku uzayları için Wallman-tip kompaktlaştırmanın elde edilmesini sağlayan yeni bir yaklaşım sunulmuştur. Daha önce yapılan çalışmalarda, ditopolojik doku uzaylarının tek nokta kompaklaştırması yapılmış ve disüzgeç kavramı tanımlanarak bu kavram yardımıyla Wallman kompaktlaştırması elde edilmiştir. Bu çalışmada, diğer çalışmadan farklı olarak genel topoloji de iyi bilinen normal taban kavramı ditopolojik doku uzaylarına taşınmış ve bu normal taban yardımıyla bir Wallman-tip kompaktlaştırma olan $(S^*, \mathcal{S}^*, \tau^*, \kappa^*)$ ditopolojik doku uzayı tanımlanmıştır. Ayrıca, bu ditopolojik doku uzayının dikompakt olup olmadığı incelenmiştir.

2014, 46 sayfa

Anahtar Kelimeler: Doku uzayları, Ditopolojik doku uzayları, Normal taban, Wallman-tip kompaktlaştırma.

ABSTRACT

Master Thesis

THE WALLMAN-TYPE COMPACTIFICATION OF DITOPOLOGICAL TEXTURE SPACES

Kübra ÖZKAN

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Topology of Science

Supervisor: Doç. Dr. Tamer UĞUR

In this study, it is presented a new approach providing to get Wallman-type compactification of ditopological texture space. In previous studies, one-point compactification of ditopological texture space was made and Wallman type compactification was gotten with the help of this concepts by defining concepts of difilter . In this study, as distinct from the other study, the concept of normal base well-known in general topology is relocated to ditopological texture space and by via of the normal base, $(S^*, \mathcal{S}^*, \tau^*, \kappa^*)$ ditopological texture, which is a Wallman type compactification, is defined. In adddition, the ditopological texture space is examined wheather dicompact or not.

2014, 46 pages

Keywords: Texture space, Ditopological texture space, Normal base, Wallman-type compactification.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Bu çalışmada bana her türlü kolaylığı sağlayan ve desteklerini esirgemeyen çok değerli hocam Sayın Doç. Dr. Tamer UĞUR'a en içten teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Çok değerli bilgilerinden yararlandığım ve tez çalışmalarım süresince her türlü yardımı benden esirgemeyen Sayın Yrd. Doç. Dr. Ceren Sultan ELMALI'ya teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Matematik bölümünde hiçbir zaman yardımlarını esirgemeyen başta bölüm başkanı Sayın Prof. Dr. Abdullah MAĞDEN olmak üzere, topoloji bilim dalımızın değerli öğretim üyeleri Sayın Prof. Dr. Ahmet KÜÇÜK'e, Sayın Prof. Dr. Abdullah KOPUZLU'ya ve matematik bölümünün tüm değerli öğretim elemanlarına, ayrıca çalışmalarım boyunca kendilerinden görmüş olduğum destek ve güvenden dolayı aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans eğitimim boyunca "2228 – Son Sınıf Lisans Öğrencileri için Lisansüstü Burs programı" ile tarafıma vermiş olduğu maddi destekten dolayı TÜBİTAK'a teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Kübra ÖZKAN
Haziran, 2014

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\mathcal{P}(S)$	:	S nin tüm altkümeleri ailesi
$\vee$	:	Supremum (Sup)
$\wedge$	:	İnfimum (İnf)
$(S, \mathcal{S})$	:	Doku uzayı
$(S, \mathcal{S}, \sigma)$	:	Tümleyenli doku uzayı
P_s	:	p-küme
Q_s	:	q-küme
A^b	:	A nın çekirdeği
(τ, κ)	:	Ditopolojik uzay
$(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$	:	Ditopolojik doku uzayı
$[A]$	:	A nın kapanışı
$]A[$	:	A nın içi
$\prod_{i \in I} A_i$	:	A_i ailesinin çarpımı
$\otimes_{i \in I} \mathcal{S}_i$	:	$\mathcal{S}_i$ dokulanmalarının çarpım dokulanması
$\bar{P}_{(s,t)}$	:	$\mathcal{P}(S) \otimes \mathcal{T}$ çarpım dokusunun p-kümesi
$\bar{Q}_{(s,t)}$	:	$\mathcal{P}(S) \otimes \mathcal{T}$ çarpım dokusunun q-kümesi
(r, R)	:	Dibağıntı
$(r, R)^{\leftarrow}$	:	Dibağıntının tersi
(f, F)	:	Difonksiyon
$f^{\rightarrow} A$	:	A nın görüntüsü
$F^{\rightarrow} A$	:	A nın kogörüntüsü
$f^{\leftarrow} A$	:	A nın ters görüntüsü
$F^{\leftarrow} A$	:	A nın ters kogörüntüsü
(i_S, I_S)	:	$(S, \mathcal{S})$ üzerindeki birim dibağıntı (birim difonksiyon)
$w(X, \beta)$	:	X in Wallman kompaktlaştırması
S_τ	:	τ nun bir alttabanı
S_κ	:	κ nın bir alttabanı
S_τ^*	:	Açık kümelerin tabanı

S_{κ}^{*} : Kapalı kümelerin kotabanı

$(S^*, \mathcal{S}^*, \tau^*, \kappa^*)$: S^* üzerindeki ditopolojik doku uzayı

e_{τ} : S_{τ} dan S_{τ}^{*} a bir gömülme

e_{κ} : S_{κ} dan S_{κ}^{*} a bir gömülme

(e_{τ}, e_{κ}) : S den S^* a bir digömülme

1. GİRİŞ

Analizde bir çok temel teorem, kapalı ve sınırlı aralıklar üzerinde tanımlıdır. Bu tür teoremlerden biri Bolzano-Weierstrass Teoremi ($\mathbb{R}$, reel sayılar kümesinin sınırlı ve sonsuz elemana sahip her A altkümesinin en az bir yığılma noktası vardır) ve bir diğeri ise Heine-Borel Teoremi ($\mathbb{R}$, reel sayılar kümesinin kapalı ve sınırlı her A altkümesinin her açık örtüsü sonlu bir altörtüye sahiptir) dir. $\mathbb{R}$, reel sayılar kümesinin kapalı ve sınırlı altkümelerinin sahip olduğu bu tip özelliklerin genel topolojik uzaylarda da var olup olmadığı sorusu, bugün matematikte baskın konuma gelen ve her açık örtüden sonlu bir altörtü seçilebilmesi özelliğine dayanan kompaktlık kavramını ortaya çıkarmıştır. Çalışılan herhangi bir kompakt olmayan uzay, kompakt olan bir başka uzayın yoğun bir altuzayına homeomorf yapılarak kompakt hale getirilebilmiştir. Bu işleme ise uzayın genişlemesi anlamına gelen kompaktlaştırma adı verilmiştir.

İlk olarak Tietze (1924) tek nokta kompaktlaştırması kavramını kullanmıştır. Aynı yıl Alexandroff and Urysohn (1924) kompaktlaştırmanın, sayılabilir kompakt uzayların bir genişlemesi olduğu fikrini ortaya atmışlardır. Ancak bu düşünce ilerleyen yıllarda değişmiştir. Tychonoff (1930) tamamen regüler uzayların kompaktlaştırılması ile ilgili oldukça önemli çalışmalar yapmıştır. Stone and Cech (1937) Tychonoff'un yapmış olduğu çalışmaları geliştirerek Stone-Cech kompaktlaştırmasını oluşturmuşlardır. Aynı yıl Cartan filtre ve ultra-filtre kavramlarını tanımlayarak farklı kompaktlaştırma metodlarının literatüre girmesine yardımcı olmuştur.

Wallman (1938) T_1 şartını sağlayan uzayların kapalı kümeleri için, elemanları ultra filtreler olan bir taban oluşturmuş ve bu tabanı kullanarak kendi adıyla anılan yeni bir kompaktlaştırma metodu elde etmiştir. Fan and Gottesman (1952) taban elemanları açık kümeler olan regüler bir uzayda çalışarak, bir Wallman-tip kompaktlaştırma olan Fan-Gottesman kompaktlaştırmasını elde etmişlerdir. Frink (1964) normal taban ile ilişkilendirdiği Tychonoff uzayın kompaktlaştırmasını inşa etmeye çalıştı. Bunu yaparken Wallman-tip kompaktlaştırmaların tanımlanmasının önünü açmıştır. Daha sonraki yıllarda, (Njastad 1966; Steiner 1968; Biles 1970; Ul’janov 1977) gibi bir çok matematikçi Wallman-tip kompaktlaştırmalar üzerine pek çok çalışmalar yapmışlardır.

Elmalı and Uğur (2009) T_4 ve normal A_2 gibi bazı özel uzayların Fan-Gottesman kompaktlaştırmalarının Wallman-tipli kompaktlaştırmalar olduğunu gösterdiler. Bu çalışmanın devamında ise Elmalı *et al.* (2010) lokal kompakt Hausdorff uzayların kompaktlaştırmaları arasındaki ilişkileri incelediler.

Belirtisiz (Fuzzy) kümelerin nokta tabanlı bir temsilcisi olan, doku yapısı Brown (1993a, 1993b) tarafından belirtisiz yapılar adıyla tanımlanmış, sonraki yıllarda yapılan çalışmalarla geliştirilerek doku uzayları adını almıştır. Brown ve bir çok matematikçi tarafından ilerleyen yıllarda yapılan çalışmalarda, genel topolojideki bir çok kavram bu uzaylarda yeniden tanımlanmıştır. Bünyesinde pek çok matematiksel yapıyı bulundurması, üzerinde tanımlı olan bir çok yapının güçlü bir dualiteye sahip olması ve tümleyenden bağımsız bir oluşuma izin vermesi doku uzaylarını daha kullanışlı hale getirmiştir. Doku teorisi üzerine geniş bir literatür mevcuttur. Tamamen dağılımlı, özel bir örgü olan dokulanma kavramı ve doku uzayları üzerinde tanımlı ditopolojik doku uzaylarına ilişkin temel kavramlar ve bu uzayın daha iyi anlaşılabilmesi için gerekli ön bilgiler (Brown 1993a, 1993b; Brown and Diker 1998a, 1998b; Brown and Ertürk 2000a, 2000b; Brown *et al.* 2004a, 2004b, 2006) dan bulunabilir.

Doku uzaylarının kompaktlaştırılması ile ilgili çalışmalar Diker and Uğur (2004, 2006, 2009) tarafından yapılmıştır. Bu çalışmalarda doku uzaylarının tek nokta, Wallman ve Stone-Cech kompaktlaştırmaları incelenmiştir.

Bu çalışmada, Diker ve Uğur’un çalışmalarından farklı olarak, Wallman-tip kompaktlaştırma elde etmemizi sağlayan yeni bir yöntem verilmiştir. Bu yöntem de ditopolojik doku uzaylarında daha önce tanımlanmamış ancak genel topolojide iyi bilinen normal taban kavramı ditopolojik doku uzaylarında tanımlanarak, bu taban yardımıyla Wallman-tip kompaktlaştırma elde edilmiştir.

Bu çalışmanın birinci bölümü olan kuramsal temellerde örgü, kompakt uzaylar, kompaktlık çeşitleri, kompaktlaştırma, Alexandroff ve Stone-Cech kompaktlaştırmaları ile ilgili bazı tanım ve teoremler verilmiştir. İkinci bölümü olan materyal ve yöntemde doku uzayı, ditopolojik doku uzayı ve bu uzaylardaki dibağıntı, difonksiyon, ayırma aksiyomları, dikompaktlık ve genel topolojik uzaylarda tanımlı Wallman kompaktlaştırma ile ilgili genel ifadeler verilmiştir. Üçüncü bölümü olan araştırma bulguları bölümünde ise, $(S^*, \mathcal{S}^*, \tau^*, \kappa^*)$ ditopolojik doku uzayı tanımlanmış ve bu uzay üzerinde tanımlı dinormal taban yardımıyla Wallman-tip kompaktlaştırma elde edilmiştir. Dördüncü bölümü olan tartışma ve sonuç bölümünde ise araştırma bulguları bölümünde yapılan çalışmalarla ilgili sonuçlar verilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölüm, tez içerisinde ön bilgi olarak ihtiyaç duyulan tanım ve teoremleri içermektedir.

Tanım 2.1.1 (Kısmi Sıralı Küme): Bir L kümesi ve bu küme üzerinde tanımlanan $\leq$ bağıntısı göz önüne alınsın.

(i) Her $x \in L$ için $x \leq x$ (yansıma),
(ii) $x, y \in L$ için $x \leq y$ ve $y \leq x \Rightarrow x = y$ (ters simetrik),
(iii) $x, y, z \in L$ için $x \leq y$ ve $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (geçişlilik),

şartlarını sağlayan $\leq$ bağıntısına L kümesi üzerinde tanımlı kısmi sıralama bağıntısı ve $(L, \leq)$ ikilisine de bir kısmi sıralı küme denir (Ergun 2005).

Tanım 2.1.2 (Tam Sıralı Küme): $(L, \leq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. Her $x, y \in L$ noktaları için, ya $x < y$, ya $y < x$ ya da $x = y$ şartı sağlanıyorsa, yani L nin herhangi iki öğesi karşılaştırılabilir ise, $\leq$ bağıntısına L üzerinde tanımlı tam sıralama bağıntısı ve $(L, \leq)$ ikilisine de tam sıralı küme denir (Ergun 2005).

Tanım 2.1.3 (Tam Sıralı): $(L, \leq)$ kısmi sıralı küme ve $A \subset L$ olsun. Eğer A kümesinin herhangi iki elemanı karşılaştırılabiliyorsa $(L, \leq)$ ile tam sıralıdır denir (Yüksel 2002) .

Tanım 2.1.4 (Zincir): $(L, \leq)$ kısmi sıralı küme ve $A \subset L$ bir altküme olsun. Eğer A tam sıralı ise, A kümesine L kümesi içinde bir zincir denir (Ergun 2005).

Tanım 2.1.6 (Sınırlılık): $(L, \leq)$ kısmi sıralı küme, $A \subset L$ bir altküme ve $x, y \in L$ olsun. Eğer $\forall a \in A$ için, $a \leq x$ ve $y \leq a$ ise sırasıyla x elemanına A kümesinin bir üst sınırı ve y elemanına A kümesinin bir alt sınırı denir. Eğer A kümesi bir üst sınıra sahipse, A

kümesine üstten sınırlı ve eğer A kümesi bir altsınıra sahipse, A kümesine alttan sınırlı denir. Ayrıca A kümesi, hem alt hem de üst sınıra sahip ise, A kümesine sınırlı denir. Bir kümenin alt ve üst sınırları kümenin kendisine ait olmayabilir (Yüksel 2002).

Tanım 2.1.7 (İnfumum, Supremum): $(L, \leq)$ kısmi sıralı kümesi ve $A \subset L$ altkümesi verilsin. A kümesinin alt sınırlarının en büyüğüne, A kümesinin en büyük alt sınırı (infumumu) denir ve $\inf(\mathrm{A})$ şeklinde gösterilir. Benzer şekilde, A kümesinin üst sınırlarının en küçüğüne, A kümesinin en küçük üst sınırı (supremumu) denir ve $\sup(\mathrm{A})$ şeklinde gösterilir. Bir A kümesi, en küçük üst sınıra ve en büyük alt sınıra sahip ise, bu elemanlar tektir (Yüksel 2002).

$x, y \in L$ için $A = \{x, y\}$ kümesinin en büyük alt sınırı $\inf(\mathrm{A}) = x \wedge y$ ve en küçük üst sınırı $\sup(\mathrm{A}) = x \vee y$ şeklinde ifade edilir (Davey and Priestley 2002).

Tanım 2.1.8 (Örgü): $(L, \leq)$ kısmi sıralı küme ve $L \neq \emptyset$ olsun. L nin elemanlarının her çiftinin, en büyük alt sınırı ve en küçük üst sınırı mevcut ise, $(L, \leq)$ kısmi sıralı kümesine örgü denir. Yani, her $x, y \in L$ için $x \vee y$ ve $x \wedge y$ var ise L ye örgü denir (Birkhoff 1967).

Teorem 2.1.9 : L bir örgü ve $x, y \in L$ olsun. Aşağıdaki özellikler denktir:

(i) $x \leq y$,
(ii) $x \wedge y = x$,
(iii) $x \vee y = y$ (Davey and Priestley 2002).

Teorem 2.1.10 : L bir örgü olsun. Her $x, y, z \in L$ için aşağıdaki özellikler sağlanır:

(i) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z, x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ (Birleşme),
(ii) $x \vee y = y \vee x, x \wedge y = y \wedge x$ (Değişme),
(iii) $x \wedge (x \vee y) = x,\ x \vee (x \wedge y) = x$ (Yutma),

(iv) $x \vee x = x, x \wedge x = x$ (Sabit Kuvvetlilik) (Cohn 2002).

Tanım 2.1.11 (Tam Örgü): $(L, \leq)$ bir kısmi sıralı küme olsun. L kümesinin boştan farklı her altkümesinin en küçük üst sınırı ve en büyük alt sınırı varsa, $(L, \leq)$ kısmi sıralı kümesine tam örgü denir. $A \subseteq L$ olmak üzere A kümesinin en küçük üst sınırı $\bigvee A$ ve en küçük alt sınırı $\bigwedge A$ biçiminde gösterilir. Yani; $\sup(A) = \bigvee A$ ve $\inf(A) = \bigwedge A$ dir (Birkhoff 1967).

Örnek 2.1.12: $\mathbb{I} = [0,1]$ bilinen anlamdaki sıralama ile tam örgü oluşturur.

Önerme 2.1.13 : Bir kısmi sıralı L kümesinin herhangi bir A altkümesi de kısmi sıralıdır. Fakat L örgü olsa bile A nın örgü olması gerekmez. A nın bir örgü olabilmesi için $\bigvee$ ve $\bigwedge$ işlemlerine göre kapalı olması gerekir (Cohn 2002).

Teorem 2.1.14 : Her tam örgü bir örgüdür. Fakat tersi doğru değildir (Birkhoff 1967).

Örnek 2.1.15: $(\mathbb{R}, \leq)$ ikilisi bir örgüdür fakat $\mathbb{R}$ kümesinin en büyük elemanı ve en küçük elemanı yok olduğundan bir tam örgü değildir. Benzer mantıkla, $(\mathbb{N}, \leq)$ ikilisi bir örgüdür fakat tam örgü değildir.

Teorem 2.1.16: $X \in \mathcal{L}$ olmak üzere $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}(X)$, keyfi arakesit altında kapalı bir aile ise $(\mathcal{L}, \subseteq)$ ikilisi bir tam örgüdür (Birkhoff 1967).

Örnek 2.1.17: $X \neq \emptyset$ olmak üzere $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ bir tam örgüdür. $\mathcal{P}(X)$ in bir altailesinin elemanlarının arakesiti bu ailenin infimumu ve birleşimi de bu ailenin supremumudur.

Sonuç 2.1.18 : $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}(X)$ keyfi arakesit altında kapalı bir aile , $(\mathcal{L}, \subseteq)$ bir tam örgü ve $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}$ olsun. Bu durumda,

$$\bigvee \mathcal{A} = \bigcup \mathcal{A} \Leftrightarrow \bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{L}$$

önermesi sağlanır (Birkhoff 1967).

Tanım 2.1.19 (Dağılımlı Örgü): $x, y, z \in L$ olmak üzere,

(1) $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$,
(2) $(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$,

eşitliklerini sağlayan $(L, \leq)$ tam örgüsüne dağılımlı örgü denir (Birkhoff 1967).

Tanım 2.1.20 (Tamamen Dağılımlı Örgü): I indis kümesi, $i \in$ I ve J_i indis kümesi için $j \in J_i$ ve $a_j^i \in L$ olmak üzere,

$$\bigwedge_{i \in I} \bigvee_{j \in J_i} a_j^i = \bigvee_{\gamma \in \prod_{i \in I} J_i} \bigwedge_{i \in I} a_{\gamma(i)}^i$$

eşitliğini sağlayan $(L, \leq)$ tam örgüsüne tamamen dağılımlı örgü denir (Birkhoff 1967).

Teorem 2.1.21 : X boştan farklı bir küme olmak üzere $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ tam örgüsü tamamen dağılımlı örgüdür (Gohar 2002).

Teorem 2.1.22: $\mathbb{I} = [0,1]$ ve $\mathcal{J} = \{[0, r] \mid r \in \mathbb{I}\} \cup \{[0, r) \mid r \in \mathbb{I}\}$ olmak üzere $(\mathcal{J}, \subseteq)$ ikilisi tam ve tamamen dağılımlı bir örgüdür (Gohar 2002).

Teorem 2.1.23: $L = (0,1]$ ve $\mathcal{L} = \{(0, \mathrm{r}] | \, r \in L\} \cup \{\emptyset\}$ olmak üzere $(\mathcal{L}, \subseteq)$ ikilisi tam ve tamamen dağılımlı bir örgüdür (Gohar 2002).

Lemma 2.1.24 (Zorn Lemması): Her zinciri bir üst sınıra sahip olan, boştan farklı kısmi sıralı bir kümenin en az bir maximal elemanı vardır (Ergun 2005).

Tanım 2.1.25 (Sonlu Karaktere Sahip Aile): $\mathfrak{I}$ bir kümeler ailesi olmak üzere aşağıda verilen özellikleri sağlayan $\mathfrak{I}$ ailesine sonlu karaktere sahip aile denir.

(1) Her $A \in \mathfrak{I}$ için, A nın her sonlu altkümesi $\mathfrak{I}$ ailesi tarafından içerilmelidir.

(2) Eğer herhangi bir A kümesinin her sonlu altkümesi $\mathfrak{I}$ tarafından içeriliyorsa, A da $\mathfrak{I}$ ailesi tarafından içerilir.

Herhangi bir $\mathfrak{I}$ kümeler ailesi sonlu karaktere sahip ise bu aile için aşağıdaki özellikler geçerlidir:

(1) Her $A \in \mathfrak{I}$ için, A nın sonlu veya sonsuz her altkümesi $\mathfrak{I}$ tarafından içerilir.

(2) $\mathfrak{I}$ kümeler ailesi içerme ile kısmi sıralı olmak üzere $\mathfrak{I}$ ailesinin elemanlarının her zincirinin birleşimi de $\mathfrak{I}$ de olup, Zorn Lemmasından bu ailenin en az bir maximal elemanı vardır (Ergun 2005).

Lemma 2.1.26 (Teichmuller-Tukey Lemması): Boştan farklı, sonlu karaktere sahip kümelerin her sınıfı bir maximal elemana sahiptir (Ergun 2005).

Tanım 2.1.27 (Topolojik Uzay): X boştan farklı bir küme olmak üzere aşağıda verilen özellikleri sağlayan her $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ ailesine X kümesi üzerinde bir topoloji ve (X, τ) ikilisine de topolojik uzay denir:

(1) $X, \emptyset \in \tau$,

(2) $\forall G_1, G_2 \in \tau \Longrightarrow G_1 \cap G_2 \in \tau$,

(3) $\forall G_i \in \tau, i \in I \Longrightarrow \bigcup_{i \in I} G_i \in \tau$.

Burada τ nun elemanlarına, (X, τ) topolojik uzayının açık kümeleri adı verilir (Bülbül 2004).

Lemma 2.1.28 (Alexander Alttaban Lemması): (X, τ) bir topolojik uzay ve $\mathcal{S}$ ailesi, τ topolojisinin herhangi bir alttabanı olsun. (X, τ) uzayının kompakt olması için gerek ve yeter şart X kümesinin, $\mathcal{S}$ alttabanınındaki bazı elemanlardan oluşan, her örtüsünün sonlu bir altörtüsünün var olmasıdır (Yüksel 2002).

Tanım 2.1.29 (Kapanış): (X, τ) bir topolojik uzay, $A \subset X$ olsun. A kümesini içeren bütün kapalı kümelerin arakesitine A nın kapanışı denir ve $\bar{A}$ ile gösterilir. Yani, $\{F_i \mid i \in I\}$, X kümesinin A yı ihtiva eden tüm kapalı kümelerinin bir ailesi olmak üzere $\bar{A} = \bigcap_{i \in I} F_i$ dir (Lipschutz 1965).

Tanım 2.1.30 (Yoğun küme): X bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer $\bar{A} = X$ oluyor ise A kümesine X uzayında yoğundur denir (Lipschutz 1965).

Tanım 2.1.31 (Filtre): $X \neq \emptyset$ ve $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ boş olmayan kümeler ailesi olsun.

(1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$,
(2) $A, B \in \mathcal{F}$ ise $A \cap B \in \mathcal{F}$ dir,
(3) $A \in \mathcal{F}$ ve $A \subset B$ ise $B \in \mathcal{F}$ dir,

özelliklerini sağlayan $\mathcal{F}$ ailesine X üzerinde filtredir denir (Yıldız 2005).

Tanım 2.1.32 (Ultra Filtre): $\mathcal{F}$, X kümesi üzerinde bir filtre olsun. Eğer $\mathcal{F}$ filtresi X üzerindeki bütün filtrelerin en incesi ise, yani $\mathcal{F}$ filtresi X üzerindeki hiçbir filtre tarafından tam olarak kapsanamıyorsa, $\mathcal{F}$ ye ultra filtre denir (Yıldız 2005).

Tanım 2.1.33 (Altuzay Topoloji): (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun.

$$\tau_A = \{A \cap G \mid G \in \tau\}$$

ailesi A kümesi üzerinde bir topolojidir. Bu topolojiye τ nun A altkümesi üzerinde ürettiği altuzay topolojisi denir. Ayrıca, (A, τ_A) topolojik uzayına da (X, τ) nun bir altuzayı denir (Bülbül 2004).

Tanım 2.1.34 (Komşuluk): (X, τ) bir topolojik uzay ve $M, U \subset X$ olsun. Eğer $M \subset G \subset U$ olacak şekilde bir $G \in \tau$ açık kümesi varsa, U kümesine bu uzayda M kümesinin bir komşuluğu denir (Bülbül 2004).

Tanım 2.1.35 (Süreklilik): (X, τ) ve (Y, τ') iki topolojik uzay, $f: X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon ve $x \in X$ olsun. Eğer $f(x)$ noktasının her $V \subset Y$ komşuluğu için, $f(U) \subset V$ olacak şekilde x noktasının bir $U \subset X$ komşuluğu varsa, f fonksiyonuna x noktasında süreklidir denir. Eğer f fonksiyonu $\forall x \in X$ noktası için sürekli ise f fonksiyonuna X uzayı üzerinde süreklidir denir (Yüksel 2002).

Tanım 2.1.36 (Homeomorfizm): (X, τ) ve (Y, τ') iki topolojik uzay ve $f: X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer f birebir, örten, sürekli ve tersi de sürekli ise f fonksiyonuna homeomorfizm denir. Eğer X ve Y topolojik uzayları arasında bir homeomorfizm varsa, X ve Y topolojik uzaylarına da homeomorf uzaylar denir (Yıldız 2005).

Tanım 2.1.37 (Gömülme): (X, τ) ve (Y, τ') topolojik uzaylar olsun. X uzayı Y uzayının bir altuzayına homeomorf ise, X uzayı Y uzayının içine dahil edilebilir (gömülebilir) denir (Munkres 1975).

Tanım 2.1.38 (Hausdorff Uzay): (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer her $x, y \in X$, $x \neq y$ için $x \in G$, $y \in H$ ve $G \cap H = \emptyset$ olacak şekilde $G, H \subset X$ gibi iki açık küme varsa, bu (X, τ) topolojik uzayına Hausdorff (T_2) uzayı denir (Lipschutz 1965).

Tanım 2.1.39 (Tamamen Regüler Uzay): (X, τ) bir topolojik uzay olsun. $\mathbb{R}$ nin (alışılmış topolojisine göre) $\mathbb{I} = [0,1]$ altuzayını göz önüne alalım. Uzayın kapalı bir $F \subset X$ altkümesi ve bir $x \in X$ $(x \notin F)$ noktası için eğer $f(x) = 0$, $f(F) = 1$ şeklinde tanımlanan sürekli bir $f: X \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu varsa, (X, τ) uzayına tamamen regüler uzay denir (Yıldız 2005).

Tanım 2.1.40 (Örtü): (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. $\mathcal{A} = \{A_i | \ i \in I\}$, X in altkümelerinin bir ailesi olmak üzere eğer $A \subset \bigcup_{i \in I} A_i$ oluyor ise $\mathcal{A}$ ailesine A nın bir örtüsü denir. Eğer $A = X$ ise, $\mathcal{A}$ ailesine X in bir örtüsü denir (Bülbül 2004).

Tanım 2.1.41 (Altörtü): (X, τ) bir topolojik uzay, $A \subset X$ ve $\mathcal{A} = \{A_i | \ i \in I\}$ ailesi X in bir örtüsü olsun. Eğer $J \subset I$ olmak üzere $\mathcal{A}' = \{A_i \in \mathcal{A} | \ i \in J\}$ ailesi X in yine bir örtüsü oluyor ise $\mathcal{A}'$ ailesine $\mathcal{A}$ nın bir altörtüsü denir (Bülbül 2004).

Tanım 2.1.42 (Sonlu Örtü): (X, τ) bir topolojik uzay ve $\mathcal{A} = \{A_i | \ i \in I\}$, X uzayının bir örtüsü olsun. Eğer $\mathcal{A}$ nın eleman sayısı sonlu ise, $\mathcal{A}$ ya X uzayının bir sonlu örtüsü denir (Bülbül 2004).

Tanım 2.1.43 (Açık Örtü): (X, τ) bir topolojik uzay ve $\mathcal{A} = \{A_i | \ i \in I\}$, X uzayının bir örtüsü olsun. Eğer $\mathcal{A}$ nın her elemanı bu uzayda açık ise, $\mathcal{A}$ ya X uzayının bir açık örtüsü denir (Bülbül 2004).

Tanım 2.1.44 (Kapalı Örtü): (X, τ) bir topolojik uzay ve $\mathcal{A} = \{A_i | \ i \in I\}$, X uzayının bir örtüsü olsun. Eğer $\mathcal{A}$ nın her elemanı bu uzayda kapalı ise, $\mathcal{A}$ ya X uzayının bir kapalı örtüsü denir (Bülbül 2004).

Tanım 2.1.45 (Kompakt Uzay): (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer X in her açık örtüsünün sonlu bir altörtüsü varsa, X topolojik uzayına kompakt uzay denir (Yıldız 2005).

Tanım 2.1.46 (Sonlu Arakesit Özelliği): $\mathcal{A} = \{A_i | \ i \in I\}$ kümeler ailesi olsun. Eğer $\mathcal{A}$ nın her sonlu altailesinin $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_n}$ elemanlarının arakesiti boştan farklı ise, yani,

$A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_n} \neq \emptyset$ ise bu $\mathcal{A}$ ailesine sonlu arakesit özelliğine sahiptir denir (Bülbül 2004).

Tanım 2.1.47 (Dizisel Kompakt Uzay): (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer X deki her dizinin yakınsak bir altdizisi varsa, X uzayına dizisel kompakt uzay denir (Yıldız 2005).

Tanım 2.1.48 (Sayılabilir Kompakt Uzay): (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer X in sayılabilir her açık örtüsünün sonlu bir altörtüsü varsa, X uzayına sayılabilir kompakt uzay denir (Yıldız 2005).

Tanım 2.1.49 (Lokal Kompakt Uzay): (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer $\forall x \in X$ noktasının X uzayında kompakt bir komşuluğu varsa, X uzayına lokal (yerel) kompakt uzay denir (Yıldız 2005).

Teorem 2.1.50 (Tychonoff Teoremi): $(X_i, \tau_i)_{i \in I}$ boştan farklı topolojik uzayların bir ailesi olsun. Bu durumda, $\prod_{i \in I} X_i$ çarpım uzayı kompakttır $\Leftrightarrow$ Her $i \in I$ için (X_i, τ_i) kompakttır (Bülbül 2004).

Tanım 2.1.51 (Uzayın Genişlemesi): (X, τ)ve (Y, τ') topolojik uzaylar olmak üzere $A \subset Y$ altkümesi Y kümesinde yoğun olsun. Eğer (X, τ) uzayından (A, τ'_A) altuzayına bir homeomorfizm varsa, (Y, τ') uzayına (X, τ) uzayının bir genişlemesi denir. Burada T_α herhangi bir ayırma aksiyomu olmak üzere (Y, τ') genişlemeye,

T_α - genişlemesi denir $\Leftrightarrow$ (Y, τ'), T_α -uzayı ise (Yıldız 2005).

Tanım 2.1.52 (Kompaktlaştırma): (X, τ) herhangi bir topolojik uzay, (Y, τ') kompakt bir uzay olsun. Eğer X uzayı Y uzayının yoğun bir altkümesine homeomorf ise,

(Y, τ') uzayına (X, τ) uzayının bir kompaktlaştırması veya kompaktlaması denir (Yıldız 2005).

Tanım 2.1.53 (Alexandroff Kompaktlaştırma): (X, τ) kompakt olmayan lokal kompakt bir hausdorff uzay, $p \notin X$ ve $X^* = X \cup \{p\}$ olsun. X^* üzerindeki topoloji $\tau^* = \{G | \, G \in \tau\} \cup \{\{p\} \cup (X - L) | \, L \subset X, L \; kompakt\}$ biçiminde tanımlansın. Bu durumda, (X^*, τ^*) kompakt bir hausdorff uzay ve (X, τ), bu uzayın bir yoğun altuzayıdır. Dolayısıyla (X^*, τ^*), (X, τ) uzayının bir kompaktlaştırmasıdır. Bu kompaktlaştırmaya Alexandroff (tek nokta) kompaktlaştırma denir (Willard 1970).

Tanım 2.1.54 (n-nokta Kompaktlaştırma): (X, τ) herhangi bir topolojik uzay ve (Y, τ') kompakt bir uzay olsun. $i: X \longrightarrow Y$ dahil etme fonksiyonunu göz önüne alalım. Eğer $i(X)$, Y uzayında yoğun ise, (i, Y) ikilisine X uzayının bir kompaktlaştırması denir. Eğer $Y - i(X)$ kümesi n elemanlı ise, (i, Y) ye n-nokta (point) kompaktlaştırma denir (Yıldız 2005).

Örnek 2.1.55 : $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi üzerinde alışılmış topolojiye göre, $X = (0,1)$ açık aralığı ve $Y = [0,1]$ olsun. $i: X \longrightarrow Y$ fonksiyonu dahil etme fonksiyonu olup, $i\big((0,1)\big) \subset [0,1]$ altkümesi $[0,1]$ de yoğundur. Bu durumda, $[0,1] - i\big((0,1)\big) = \{0,1\}$ olduğundan (i, Y), X in 2-nokta kompaktlaştırmasıdır (Yıldız 2005).

Tanım 2.1.56 (Stone-Cech Kompaktlaştırma): X bir tamamen regüler uzay ve J bir indis kümesi olsun. X kümesindeki bütün sınırlı, sürekli ve reel değerli olan fonksiyonların $\{f_i\}_{i \in J}$ koleksiyonunu göz önüne alalım. Her $i \in J$ için, $\mathbb{R}$ den $f_i(X)$ i ihtiva eden bir $\mathbb{I}_i$ kapalı aralığını seçelim. Burada, $\mathbb{I}_i = [ebas \; f_i(X), ek\ddot{u}s \; f_i(X)\,]$ biçiminde tanımlansın. O halde, $e(X) = \big(f_i(X)\big)_{i \in J}$ olmak üzere $e: X \longrightarrow \prod_{i \in J} \mathbb{I}_i$ dönüşümü tanımlanır. Teorem 3.1.50 de verilen Tychonoff Teoreminden, $\prod_{i \in J} \mathbb{I}_i$ çarpım uzayı kompakttır. X in tamamen regüler olmasından dolayı, $\{f_i\}_{i \in J}$ koleksiyonu, noktaları X uzayındaki kapalı kümelerden ayırır.

Dolayısıyla, gömülme teoreminden (Munkres 1975), e dönüşümü bir gömülmedir. e gömülmesi ile elde edilen kompaktlaştırmaya X in Stone-Cech kompaktlaştırması denir ve $\beta(X)$ ile gösterilir (Munkres 1975).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Doku Uzayları

Tanım 3.1.1 (Doku Uzayı): S boştan farklı bir küme olsun. Eğer aşağıdaki özellikler sağlanırsa, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(S)$ ailesine S kümesinin bir dokulanması, $(S, \mathcal{S})$ ikilisine de bir doku uzayı veya kısaca doku denir.

(1) $(\mathcal{S}, \subseteq)$, S ve $\emptyset$ kümeyi içeren bir tam örgüdür.

(2) $(\mathcal{S}, \subseteq)$ ikilisi üzerindeki infimum ve supremum işlemleri, $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ ikilisi üzerindeki arakesit ve birleşim işlemleri ile bağlantılıdır. Bu bağlantı şu şekilde verilebilir: Her J indis kümesi için $j \in J, A_j \in \mathcal{S}$ olmak üzere,

$$\bigcap_{j \in J} A_j = \bigwedge_{j \in J} A_j$$

ve her sonlu J indis kümesi için $j \in J, A_j \in \mathcal{S}$ olmak üzere,

$$\bigcup_{j \in J} A_j = \bigvee_{j \in J} A_j$$

dir.

(3) $\mathcal{S}$ tamamen dağılımlıdır, yani her I indis kümesi , $i \in I$ ve J_i indis kümesi için $j \in J_i$ ve $A_i^j \in \mathcal{S}$ olmak üzere

$$\bigcap_{i \in I} \bigvee_{j \in J_i} A_i^j = \bigvee_{\gamma \in \prod_{i \in I} J_i} \bigwedge_{i \in I} A_{\gamma(i)}^i$$

dir.

(4) $\mathcal{S}, S$ kümesinin noktalarını ayırır. Yani, $s_1, s_2 \in S$ ve $s_1 \neq s_2$ için $s_1 \in A, s_2 \notin A$ veya $s_2 \in A, s_1 \notin A$ olacak şekilde bir $A \in \mathcal{S}$ vardır (Brown 1993a).

Tanım 3.1.2 (Tümleyenli Doku Uzayı): $(S, \mathcal{S})$ bir doku uzayı olsun.

(i) $\forall A \in \mathcal{S}, \sigma^2(A) = A,$
(ii) $\forall A, B \in \mathcal{S}, A \subseteq B \Rightarrow \sigma(B) \subseteq \sigma(A)$

şartlarını sağlayan, $\sigma: \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ dönüşümüne $(S, \mathcal{S})$ doku uzayı üzerinde bir tümleyen ve $(S, \mathcal{S}, \sigma)$ uzayına da tümleyenli doku uzayı denir (Brown 1993a).

Tanım 3.1.3 (p-küme, q-küme): $(S, \mathcal{S})$ bir doku uzayı ve her $s \in S$ için

$$P_s = \bigcap \{A \in \mathcal{S} | s \in A\}$$

ve

$$Q_s = \bigvee \{A \in \mathcal{S} | s \notin A\} = \bigvee \{P_u | u \in S, s \notin P_u\}$$

kümelerine sırasıyla p-küme ve q-küme denir (Brown 1993a).

Örnek 3.1.4 :

(1) $L = (0,1]$ ve $\mathcal{L} = \{(0,r] | \, r \in [0,1]\}$ olmak üzere $(L, \mathcal{L})$ ikilisi bir doku uzayıdır. Burada $r \in L$ için $P_r = Q_r = (0,r]$ olarak bulunur.Ayrıca $\forall r \in L$ için $\lambda\big((0,r]\big) = (0, 1-r]$ biçiminde tanımlanan $\lambda: L \longrightarrow L$ dönüşümü $(L, \mathcal{L})$ dokusu üzerinde bir tümleyen dönüşümüdür (Brown and Ertürk 2000a).
(2) $\mathbb{I} = [0,1]$ ve $\mathcal{J} = \{[0,r] \mid r \in [0,1]\} \cup \{[0,r) | \, r \in [0,1]\}$ olmak üzere $(\mathbb{I}, \mathcal{J})$ ikilisi bir doku uzayıdır. Burada $r \in \mathbb{I}$ için $P_r = [0,r]$ ve $Q_r = [0,r)$ olur. Diğer yandan, $\forall r \in \mathbb{I}$ için $\sigma([0,r]) = [0, 1-r), \sigma([0,r)) = [0, 1-r]$ biçiminde tanımlanan $\sigma: \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{I}$ dönüşümü $(\mathbb{I}, \mathcal{J})$ dokusu üzerinde bir tümleyen dönüşümüdür. Bu şekilde

tanımlanan $(\mathbb{I}, \mathcal{J}, \sigma)$ tümleyenli dokusuna birim aralık dokusu adı verilir (Brown and Ertürk 2000a).

Tanım 3.1.5 (Çekirdek): $(S, \mathcal{S})$ bir doku uzayı ve $A \in \mathcal{S}$ olsun.

$$A^b = \bigcap \{ \bigcup \{A_i | i \in I\} \, | \{A_i | i \in I\} \subseteq \mathcal{S}, A = \bigvee \{A_i | i \in I\} \}$$

biçiminde tanımlanan A^b kümesine, A kümesinin çekirdeği denir. A^b ifadesi bazı kaynaklarda $core(A)$ şeklinde de ifade edilebilir (Brown *et al.* 2004a).

Doku uzaylarında $A^b \subseteq A$ olduğu açıktır ve $A^b \notin \mathcal{S}$ olabilir. Yani, bir kümenin çekirdeğinin dokuya ait olması gerekmez.

Örnek 3.1.6 : Örnek 3.1.4(1) de verilen $(L, \mathcal{L})$ doku uzayını göz önüne alalım. $r \in L$ olmak üzere $(0, r] \in \mathcal{L}$ nin çekirdeği $(0, r]^b = (0, r)$ olur. Burada dikkat edilirse $(0, r) \notin \mathcal{L}$ dir (Brown *et al.* 2004a).

Tanım 3.1.7 (Çarpım Dokusu): $\{(S_i, \mathcal{S}_i) | i \in I\}$ doku uzayları ve $S = \prod_{i \in I} S_i$ kümesi, S_i kümelerinin kartezyen çarpımı olsun. Her $k \in I$ ve $A \subseteq S_k$ için

$$Y_i = \begin{cases} A, & \text{eğer } i = k, \\ S_{i,} & \text{eğer } i \neq k, \end{cases}$$

olacak şekilde, $E(k, A) = \prod_{i \in I} Y_i$ kümesini göz önüne alalım.

$$\varepsilon = \left\{ \bigcup_{k \in K} E\,(k, L_k) | K \subseteq I, L_k \in \mathcal{S}_k \right\}$$

olmak üzere, $\mathcal{S}$ kümesi, ε kümesinin elemanlarının keyfi arakesitinden oluşan aile olsun. $\mathcal{S}$ ailesi, S kümesi üzerinde bir doku tanımlar. Bu tanımlanan $(S, \mathcal{S})$ dokusuna

$\{(S_i, \mathcal{S}_i) | i \in I\}$ ailesinin çarpım dokusu denir. Çarpım dokusu $\mathcal{S} = \otimes_{i \in I} \mathcal{S}_i$ biçiminde gösterilir (Brown and Ertürk 2000a).

Tanım 3.1.8 (Bağıntı): $(S, \mathcal{S})$ ve $(T, \mathcal{T})$ doku uzayları ve $\mathcal{P}(S) \otimes \mathcal{T}$ ifadesi $(S, \mathcal{P}(S))$ ve $(T, \mathcal{T})$ dokularının çarpım dokusu olsun. $s \in S$ ve $t \in T$ için

$$\bar{P}_{s \times t} = \{s\} \times P_t \text{ ve } \bar{Q}_{s \times t} = (S \backslash \{s\} \times T) \cup (S \times Q_t)$$

biçiminde tanımlanmak üzere,

(1) $r \not\subseteq \bar{Q}_{(s,t)}, P_{s'} \not\subseteq Q_s \Rightarrow r \not\subseteq \bar{Q}_{(s',t)}$,

(2) $r \not\subseteq \bar{Q}_{(s,t)} \Rightarrow P_s \not\subseteq Q_{s'},\ r \not\subseteq \bar{Q}_{(s',t)}$ olacak şekilde bir $s' \in S$ vardır.

şartlarını sağlayan $r \in \mathcal{P}(S) \otimes \mathcal{T}$ kümesine $(S, \mathcal{S})$ dokusundan $(T, \mathcal{T})$ dokusuna tanımlı bir bağıntı denir (Brown *et al.* 2004a).

Tanım 3.1.9 (Kobağıntı): $(S, \mathcal{S})$ ve $(T, \mathcal{T})$ doku uzayları ve $\mathcal{P}(S) \otimes \mathcal{T}$ ifadesi $(S, \mathcal{P}(S))$ ve $(T, \mathcal{T})$ dokularının çarpım dokusu olsun. $s \in S$ ve $t \in T$ için

$$\bar{P}_{s \times t} = \{s\} \times P_t \text{ ve } \bar{Q}_{s \times t} = (S \backslash \{s\} \times T) \cup (S \times Q_t)$$

biçiminde tanımlanmak üzere,

(1) $\bar{P}_{(s,t)} \not\subseteq R, P_s \not\subseteq Q_{s'} \Rightarrow \bar{P}_{(s',t)} \not\subseteq R$,

(2) $\bar{P}_{(s,t)} \not\subseteq R \Rightarrow P_{s'} \not\subseteq Q_s,\ \bar{P}_{(s',t)} \not\subseteq R$ olacak şekilde bir $s' \in S$ vardır.

şartlarını sağlayan $R \in \mathcal{P}(S) \otimes \mathcal{T}$ kümesine $(S, \mathcal{S})$ dokusundan $(T, \mathcal{T})$ dokusuna tanımlı bir kobağıntı denir (Brown *et al.* 2004a).

Tanım 3.1.10 (Dibağıntı): r, $(S,\mathcal{S})$ doku uzayından $(T,\mathcal{T})$ doku uzayına tanımlı bir bağıntı ve R, $(S,\mathcal{S})$ doku uzayından $(T,\mathcal{T})$ doku uzayına tanımlı bir kobağıntı ise (r,R) ikilisine $(S,\mathcal{S})$ dokusundan $(T,\mathcal{T})$ dokusuna tanımlı bir dibağıntı denir. Dibağıntılar $(r,R)\colon (S,\mathcal{S}) \longrightarrow (T,\mathcal{T})$ veya $(S,\mathcal{S}) \xrightarrow{(r,R)} (T,\mathcal{T})$ biçiminde gösterilir (Brown *et al.* 2004a).

Tanım 3.1.11 (Birim Dibağıntı): $(S,\mathcal{S})$ bir doku uzayı olsun.

$$i_{(S,\mathcal{S})} = \bigvee\{\bar{P}_{(s,s)} | s \in S\}$$

biçiminde tanımlanan bağıntıya $(S,\mathcal{S})$ dokusu üzerinde birim bağıntı,

$$I_{(S,\mathcal{S})} = \bigcap\{\bar{Q}_{(s,s)} | s \in S\}$$

biçiminde tanımlanan kobağıntıya $(S,\mathcal{S})$ üzerinde birim kobağıntı ve $\left(i_{(S,\mathcal{S})}, I_{(S,\mathcal{S})}\right)$ dibağıntısına da $(S,\mathcal{S})$ üzerinde birim dibağıntı denir. $\left(i_{(S,\mathcal{S})}, I_{(S,\mathcal{S})}\right)$ dibağıntısı, (i_S, I_S) biçiminde veya (i,I) biçiminde de gösterilebilir (Brown *et al.* 2004a).

Tanım 3.1.12 (Bağıntının Tersi): $(S,\mathcal{S})$ ve $(T,\mathcal{T})$ doku uzayları olsun. r, $(S,\mathcal{S})$ doku uzayından $(T,\mathcal{T})$ doku uzayına bir bağıntı olmak üzere,

$$r^{\leftarrow} = \bigcap\{\bar{Q}_{(t,s)} | r \not\subseteq \bar{Q}_{(s,t)}\}$$

biçiminde tanımlanan kobağıntıya r bağıntısının tersi denir (Brown *et al.* 2004a).

Tanım 3.1.13 (Kobağıntının Tersi): $(S,\mathcal{S})$ ve $(T,\mathcal{T})$ doku uzayları olsun. R, $(S,\mathcal{S})$ doku uzayından $(T,\mathcal{T})$ doku uzayına bir kobağıntı olmak üzere,

$$R^{\leftarrow} = \bigvee \{ \bar{P}_{(t,s)} | \bar{P}_{(s,t)} \not\subseteq R \}$$

biçiminde tanımlanan bağıntıya R kobağıntısının tersi denir (Brown *et al.* 2004a).

Tanım 3.1.14 (Dibağıntının Tersi): $(S, \mathcal{S})$ ve $(T, \mathcal{T})$ doku uzayları olsun. (r, R), $(S, \mathcal{S})$ doku uzayından $(T, \mathcal{T})$ doku uzayına bir dibağıntı olmak üzere $(r, R)^{\leftarrow} = (R^{\leftarrow}, r^{\leftarrow})$ biçiminde tanımlı olan dibağıntıya, (r, R) dibağıntısının tersi denir (Brown *et al.* 2004a).

Önerme 3.1.15 : (r, R), $(S, \mathcal{S})$ doku uzayından $(T, \mathcal{T})$ doku uzayına bir dibağıntı olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar sağlanır:

(1) Her $s \in S, t \in T$ için $r \not\subseteq \bar{Q}_{(s,t)} \Leftrightarrow \bar{P}_{(t,s)} \not\subseteq r^{\leftarrow}$ ve $\bar{P}_{(s,t)} \not\subseteq R \Leftrightarrow R^{\leftarrow} \not\subseteq \bar{Q}_{(t,s)}$ olur.
(2) $(r^{\leftarrow})^{\leftarrow} = r$ ve $(R^{\leftarrow})^{\leftarrow} = R$ olur.
(3) $(m, M) \colon (S, \mathcal{S}) \longrightarrow (T, \mathcal{T})$ bir dibağıntı olmak üzere $r \subseteq m \Leftrightarrow m^{\leftarrow} \subseteq r^{\leftarrow}$ ve $R \subseteq M \Leftrightarrow M^{\leftarrow} \subseteq R^{\leftarrow}$ olur (Brown *et al.* 2004a).

Tanım 3.1.16 (Bağıntının Kesiti): (r, R), $(S, \mathcal{S})$ doku uzayından $(T, \mathcal{T})$ doku uzayına bir dibağıntı olsun. $A \in \mathcal{S}$ olmak üzere,

$$r^{\rightarrow} A = \bigcap \{ Q_t | \forall s, r \not\subseteq \bar{Q}_{(s,t)} \Rightarrow A \subseteq Q_s \} \in \mathcal{T}$$

biçiminde tanımlanan $r^{\rightarrow} A$ kümesine r bağıntısının A-kesiti denir (Brown *et al.* 2004a).

Tanım 3.1.17 (Kobağıntının Kesiti): (r, R), $(S, \mathcal{S})$ doku uzayından $(T, \mathcal{T})$ doku uzayına bir dibağıntı olsun. $A \in \mathcal{S}$ olmak üzere,

$$R^{\rightarrow} A = \bigvee \{ P_t | \forall s, \bar{P}_{(s,t)} \not\subseteq R \Rightarrow P_s \subseteq A \} \in \mathcal{T}$$

biçiminde tanımlanan $R^{\rightarrow}A$ kümesine R kobağıntısının A-kesiti denir (Brown *et al.* 2004a).

Tanım 3.1.18 (Bağıntının Önkesiti): (r, R), $(S, \mathcal{S})$ doku uzayından $(T, \mathcal{T})$ doku uzayına bir dibağıntı olsun. $B \in \mathcal{T}$ olmak üzere,

$$(r^{\leftarrow})^{\rightarrow}B = \bigvee \{P_s | \forall s, r \not\subseteq \bar{Q}_{(s,t)} \Longrightarrow P_t \subseteq B\} \in \mathcal{S}$$

biçiminde tanımlanan $r^{\leftarrow}$ kobağıntısının B-kesitine, r bağıntısının B-önkesiti denir ve $r^{\leftarrow}B$ ile gösterilir (Brown *et al.* 2004a).

Tanım 3.1.19 (Kobağıntının Önkesiti): (r, R), $(S, \mathcal{S})$ doku uzayından $(T, \mathcal{T})$ doku uzayına bir dibağıntı olsun. $B \in \mathcal{T}$ olmak üzere,

$$(R^{\leftarrow})^{\rightarrow}B = \bigcap \{Q_s | \forall s, \bar{P}_{(s,t)} \not\subseteq R \Longrightarrow B \subseteq Q_t\} \in \mathcal{S}$$

biçiminde tanımlanan $R^{\leftarrow}$ bağıntısının B-kesitine, R kobağıntısının B-önkesiti denir ve $R^{\leftarrow}B$ ile gösterilir (Brown *et al.* 2004a).

Tanım 3.1.20 (Difonksiyon): (f, F), $(S, \mathcal{S})$ doku uzayından $(T, \mathcal{T})$ doku uzayına bir dibağıntı olsun.

(1) $s, s' \in S$ için $P_s \not\subseteq Q_{s'}$ ise $f \not\subseteq \bar{Q}_{(s,t)}$ ve $\bar{P}_{(s',t)} \not\subseteq F$ olacak şekilde bir $t \in T$ vardır.
(2) $t, t' \in T$ ve $s \in S$ için $f \not\subseteq \bar{Q}_{(s,t)}$ ve $\bar{P}_{(s,t')} \not\subseteq F$ ise $P_{t'} \not\subseteq Q_t$ dir.

şartlarını sağlayan, (f, F) dibağıntısına difonksiyon denir. (f, F) difonksiyonu, $(f, F): (S, \mathcal{S}) \rightarrow (T, \mathcal{T})$ veya $(S, \mathcal{S}) \xrightarrow{(f,F)} (T, \mathcal{T})$ biçiminde gösterilir (Brown *et al.* 2004a).

Tanım 3.1.21 (Birim Difonksiyon): $(S,\mathcal{S})$ üzerinde tanımlı (i_S, I_S) birim dibağıntısına birim difonksiyon denir (Brown *et al.* 2004a).

Tanım 3.1.22 (Görüntü): (f,F), $(S,\mathcal{S})$ doku uzayından $(T,\mathcal{T})$ doku uzayına bir difonksiyon olmak üzere $A \in \mathcal{S}$ olsun. f bağıntısının A-kesitine, A kümesinin (f,F) altındaki görüntüsü denir ve $f^{\rightarrow}A$ biçiminde gösterilir (Brown *et al.* 2004a).

Tanım 3.1.23 (Kogörüntü): (f,F), $(S,\mathcal{S})$ doku uzayından $(T,\mathcal{T})$ doku uzayına bir difonksiyon olmak üzere $A \in \mathcal{S}$ olsun. F kobağıntısının A-kesitine, A kümesinin (f,F) altındaki kogörüntüsü denir ve $F^{\rightarrow}A$ biçiminde gösterilir (Brown *et al.* 2004a).

Tanım 3.1.24 (Ters Görüntü): (f,F), $(S,\mathcal{S})$ doku uzayından $(T,\mathcal{T})$ doku uzayına bir difonksiyon olmak üzere $B \in \mathcal{T}$ olsun. f bağıntısının B-önkesitine, B kümesinin (f,F) altındaki ters görüntüsü denir ve $f^{\leftarrow}B$ biçiminde gösterilir (Brown *et al.* 2004a).

Tanım 3.1.25 (Ters Kogörüntü): (f,F), $(S,\mathcal{S})$ doku uzayından $(T,\mathcal{T})$ doku uzayına bir difonksiyon olmak üzere $B \in \mathcal{T}$ olsun. F kobağıntısının B-önkesitine, B kümesinin (f,F) altındaki ters kogörüntüsü denir ve $F^{\leftarrow}B$ biçiminde gösterilir (Brown *et al.* 2004a).

Teorem 3.1.26 : (f,F), $(S,\mathcal{S})$ doku uzayından $(T,\mathcal{T})$ doku uzayına bir difonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır:

(1) Her $A \in \mathcal{S}$ için $f^{\leftarrow}(F^{\rightarrow}A) \subseteq A \subseteq F^{\leftarrow}(f^{\rightarrow}A)$ dir.
(2) Her $B \in \mathcal{T}$ için $f^{\rightarrow}(F^{\leftarrow}B) \subseteq B \subseteq F^{\rightarrow}(f^{\leftarrow}B)$ dir.
(3) Her $B \in \mathcal{T}$ için $f^{\leftarrow}B = F^{\leftarrow}B$ dir (Brown *et al.* 2004a).

Tanım 3.1.27 (Örtenlik): $(f,F)\colon (S,\mathcal{S}) \to (T,\mathcal{T})$ bir difonksiyon olsun. Eğer $t, t' \in T$ ve $\exists s \in S$ için $P_t \not\subseteq Q_{t'} \Longrightarrow f \not\subseteq \bar{Q}_{(s,t')}$ ve $\overline{P}_{(s,t)} \not\subseteq F$ şartını sağlayan (f,F) difonksiyonuna örten denir (Brown *et al.* 2004a).

Tanım 3.1.28 (Birebirlik): $(f,F):(S,\mathcal{S}) \to (T,\mathcal{T})$ bir difonksiyon olsun. Eğer $s,s' \in S$ ve $t \in T$ için $f \not\subseteq \bar{Q}_{(s,t)}$ ve $\bar{P}_{(s',t)} \not\subseteq F \Longrightarrow P_s \not\subseteq Q_{s'}$ şartını sağlayan (f,F) difonksiyonuna birebir denir (Brown *et al.* 2004a).

Tanım 3.1.29 (Bijektiflik): Hem birebir, hem de örten olan $(f,F):(S,\mathcal{S}) \to (T,\mathcal{T})$ difonksiyonuna bijektif denir (Brown *et al.* 2004a).

Tanım 3.1.30 (Ditopolojik Doku Uzayı): $(S,\mathcal{S})$ bir doku uzayı olsun.

(1) $\tau \subseteq \mathcal{S}$ olmak üzere,

(a) $S,\emptyset \in \tau$,
(b) $G_1,G_2 \in \tau \Longrightarrow G_1 \cap G_2 \in \tau$,
(c) $G_j \in \tau, j \in J \Longrightarrow \bigvee_{j\in J} G_j \in \tau$.

şartlarını sağlayan τ ailesine $(S,\mathcal{S})$ doku uzayı üzerinde bir topoloji ve τ nun elemanlarına da topolojinin açık kümeleri denir.

(2) $\kappa \subseteq \mathcal{S}$ olmak üzere,

(a) $S,\emptyset \in \kappa$,
(b) $K_1,K_2 \in \kappa \Longrightarrow K_1 \cup K_2 \in \kappa$,
(c) $K_j \in \kappa, j \in J \Longrightarrow \bigcap_{j\in J} K_j \in \kappa$.

şartlarını sağlayan κ ailesine $(S,\mathcal{S})$ doku uzayı üzerinde bir kotopoloji ve κ nın elemanlarına da kotopolojinin kapalı kümeleri denir.

(3) τ, $(S,\mathcal{S})$ doku uzayı üzerinde bir topoloji ve κ, $(S,\mathcal{S})$ doku uzayı üzerinde bir kotopoloji olmak üzere (τ,κ) çiftine $(S,\mathcal{S})$ doku uzayı üzerinde bir ditopoloji ve $(S,\mathcal{S},\tau,\kappa)$ ya ise bir ditopolojik doku uzayı denir (Brown and Diker 1998a).

Tanım 3.1 31 (Tümleyenli Ditopoloji): $(S, \mathcal{S})$ bir doku uzayı ve σ, $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir tümleyen olsun. $\kappa = \{\sigma(G) | G \in \tau\}$ şartını sağlayan (τ, κ) ditopolojisine $(S, \mathcal{S}, \sigma)$ üzerinde tümleyenli ditopoloji denir (Brown and Diker 1998a).

Örnek 3.1.32 : Örnek 3.1.4(2) de verilen $(\mathbb{I}, \mathcal{J}, \sigma)$ dokusunu göz önüne alalım. Burada, $\tau = \{[0, r) | \ 0 \leq r \leq 1\} \cup \{\mathbb{I}\}$ ve $\kappa = \{[0, r] | \ 0 \leq r \leq 1\} \cup \{\emptyset\}$ biçiminde tanımlanan (τ, κ) çifti $(\mathbb{I}, \mathcal{J}, \sigma)$ dokusu üzerinde bir ditopolojidir ve özel olarak bu ditopolojiye doğal ditopoloji denir (Brown *et al.* 2004b).

Tanım 3.1.33 (Komşuluk): (τ, κ), $(S, \mathcal{S})$ doku uzayı üzerinde bir ditopoloji olsun. $s \in S^b$ için $P_s \subseteq G \subseteq N \nsubseteq Q_s$ şartını sağlayan bir $G \in \tau$ varsa $N \in \mathcal{S}$ kümesine, s nin komşuluğu denir (Brown *et al.* 2006).

Tanım 3.1.34 (Kokomşuluk): (τ, κ), $(S, \mathcal{S})$ doku uzayı üzerinde bir ditopoloji olsun. $s \in S^b$ için $P_s \nsubseteq M \subseteq K \subseteq Q_s$ şartını sağlayan bir $K \in \kappa$ varsa $M \in \mathcal{S}$ kümesine, s nin kokomşuluğu denir (Brown *et al.* 2006).

Tanım 3.1.35 (Kapanış, İç): (τ, κ), $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir ditopoloji ve $A \in \mathcal{S}$ olsun. Bu durumda

$$[A] = \bigcap \{F \mid A \subseteq F, F \in \kappa\}$$

kümesine A nın kapanışı ve

$$]A[= \bigvee \{G \mid G \subseteq A, G \in \tau\}$$

kümesine ise A nın içi denir (Brown *et al.* 2004b).

Örnek 3.1.36: Örnek 3.1.32 verilen doğal ditopoloji için $[\mathbb{I}] = [[0, r)] = [0, r]$ ve $[\mathbb{I}] =][0, r][= [0, r)$ dir (Brown *et al.* 2004b**).**

Tanım 3.1.37 (İkili Yoğunluk): (τ,κ), $(S,\mathcal{S})$ doku uzayı üzerinde bir ditopoloji ve $A\in\mathcal{S}$ olsun.

(1) Eğer her $G\in\tau\backslash\{\emptyset\}$ için, $G\cap A\neq\emptyset$ oluyorsa A kümesine S uzayı üzerinde yoğun denir.
(2) Eğer her $F\in\kappa\backslash\{S\}$ için, $A\nsubseteq F$ oluyorsa A kümesine S uzayı üzerinde koyoğun denir.
(3) Eğer A kümesi S uzayında yoğun ve koyoğun ise, A kümesine ikili yoğun denir. Bunun yanı sıra, her $G\in\tau$ ve her $K\in\kappa\backslash\{S\}$ için $G\nsubseteq K$ olacak şekilde $G\cap A\nsubseteq$ K şartı sağlanıyorsa, A kümesinin yoğun ve koyoğun olduğu açıktır (Uğur and Diker 2006).

Tanım 3.1.38 (İkili Süreklilik): $k=1,2$ için $(S_k,\mathcal{S}_k,\tau_k,\kappa_k)$ ditopolojik uzaylar ve $(f,F):(S_1,\mathcal{S}_1)\to(S_2,\mathcal{S}_2)$ bir difonksiyon olsun. Eğer her $G\in\tau_2$ için $F^{\leftarrow}G\in\tau_1$ oluyor ise, (f,F) difonksiyonuna sürekli, benzer şekilde her $K\in\kappa_2$ için $f^{\leftarrow}K\in\kappa_1$ oluyor ise, (f,F) difonksiyonuna kosürekli denir. Eğer (f,F) difonksiyonu hem sürekli hem de kosürekli ise, (f,F) difonksiyonuna ikili sürekli denir (Brown *et al.* 2004b).

Tanım 3.1.39 (Homeomorfizm): $k=1,2$ için $(S_k,\mathcal{S}_k,\tau_k,\kappa_k)$ ditopolojik doku uzayları ve $(f,F):(S_1,\mathcal{S}_1)\to(S_2,\mathcal{S}_2)$ bir difonksiyon olsun. (f,F) difonksiyonu birebir, örten, ikili sürekli ve tersi ikili sürekli ise, (f,F) difonksiyonuna bir dihomeomorfizm denir (Brown *et al.* 2004b).

Tanım 3.1.40 (Açık, Koaçık Difonksiyon): $k=1,2$ için $(S_k,\mathcal{S}_k,\tau_k,\kappa_k)$ ditopolojik doku uzayları ve $(f,F):(S_1,\mathcal{S}_1)\to(S_2,\mathcal{S}_2)$ bir difonksiyon olsun. Eğer her $G\in\tau_1$ için $f^{\rightarrow}G\in\tau_2$ oluyor ise (f,F) difonksiyonuna açık difonksiyon ve benzer şekilde her $G\in\tau_1$ için $F^{\rightarrow}G\in\tau_2$ oluyor ise (f,F) difonksiyonuna koaçık difonksiyon denir (Brown *et al.* 2004b).

Tanım 3.1.41 (Kapalı, Kokapalı Difonksiyon): $k = 1, 2$ için $(S_k, \mathcal{S}_k, \tau_k, \kappa_k)$ ditopolojik doku uzayları ve $(f, F): (S_1, \mathcal{S}_1) \to (S_2, \mathcal{S}_2)$ bir difonksiyon olsun. Eğer her $K \in \kappa_1$ için $F^{\to}K \in \kappa_2$ oluyor ise (f, F) difonksiyonuna kapalı ve benzer şekilde her $K \in \kappa_1$ için $f^{\to}K \in \kappa_2$ oluyor ise (f, F) difonksiyonuna kokapalı denir (Brown *et al.* 2004b).

Tanım 3.1.42 (Taban, Kotaban, Alttaban, Koalttaban): (τ, κ), $(S, \mathcal{S})$ doku uzayı üzerinde bir ditopoloji olsun.

(1) $\beta \subseteq \tau$ olmak üzere τ daki her küme, β daki kümelerin supremumu olarak yazılabiliyorsa, β ya (τ, κ) ditopolojisinin tabanı denir.

(2) $\beta \subseteq \kappa$ olmak üzere κ daki her küme, β daki kümelerin keyfi arakesiti olarak yazılabiliyorsa, β ya (τ, κ) ditopolojisinin kotabanı denir.

(3) $\beta \subseteq \tau$ olmak üzere, β daki kümelerin sonlu arakesitlerinin kümesi, τ için bir taban oluyorsa, β ya (τ, κ) ditopolojisinin alttabanı denir.

(4) $\beta \subseteq \kappa$ olmak üzere, β daki kümelerin sonlu birleşimlerinin kümesi, κ için bir taban oluyorsa β ya (τ, κ) ditopolojisinin koalttabanı denir (Brown *et al.* 2004b).

Tanım 3.1.43 (Toplam Dokusu): $(S_i, \mathcal{S}_i)_{i \in I}$ doku uzayları ve $i \neq j$ olmak üzere $S_i \cap S_j = \emptyset$ olsun.

$$S = \bigcup_{i \in I} S_i \text{ ve } \mathcal{S} = \{A \mid A \subseteq S, A \cap S_i \in \mathcal{S}_i, \forall i \in I\}$$

olarak tanımlanmak üzere $\mathcal{S}$ ailesi, S kümesi üzerinde bir doku uzayıdır. Bu şekilde tanımlanan $(S, \mathcal{S})$ doku uzayına, $(S_i, \mathcal{S}_i)_{i \in I}$ dokularının toplam dokusu denir. Ditopolojik toplam $(\coprod_{i \in I} S_i, \oplus_{i \in I} \mathcal{S}_i, \oplus_{i \in I} \tau_i, \oplus_{i \in I} \kappa_i)$ biçiminde gösterilir (Brown and Ertürk 2000a).

Tanım 3.1.45 (Bi-R_0, Bi-R_1, Bi-regüler Ditopoloji): $(S, \mathcal{S})$ bir doku uzayı ve (τ, κ), $(S, \mathcal{S})$ üzerinde tanımlı bir ditopoloji olsun.

(a) $G \in \tau, G \nsubseteq Q_s \Longrightarrow [P_s] \subseteq G$ şartını sağlayan (τ, κ) ya R_0,

(b) $F \in \kappa, P_s \nsubseteq F \Longrightarrow F \subseteq]Q_s[$ şartını sağlayan (τ, κ) ya ko-R_0,

(c) R_0 ve ko-R_0 olan (τ, κ) ya bi-R_0,

(d) $G \in \tau, G \nsubseteq Q_s, P_t \nsubseteq G \Longrightarrow \exists H \in \tau, H \nsubseteq Q_s, P_t \nsubseteq [H]$ şartını sağlayan (τ, κ) ya R_1,

(e) $F \in \kappa, P_s \nsubseteq F, F \nsubseteq Q_t \Longrightarrow \exists K \in \kappa, P_s \nsubseteq K,]K[\subseteq Q_t$ şartını sağlayan (τ, κ) ya ko-R_1,

(f) R_1 ve ko-R_1 olan (τ, κ) ya bi-R_1,

(g) $G \in \tau, G \nsubseteq Q_s \Longrightarrow \exists H \in \tau, H \nsubseteq Q_s, [H] \nsubseteq G$ şartını sağlayan (τ, κ) ya regüler,

(h) $F \in \kappa, P_s \nsubseteq F \Longrightarrow \exists K \in \kappa, P_s \nsubseteq K, F \subseteq]K[$ şartını sağlayan (τ, κ) ya koregüler,

(i) Regüler ve ko-regüler olan (τ, κ) ya biregüler denir (Brown *et al.* 2006).

Teorem 3.1.46: (τ, κ), $(S, \mathcal{S})$ doku uzayı üzerinde tanımlı bir ditopoloji olsun.

(1) (τ, κ), regüler ve $s \in S, G \in \tau, G \nsubseteq Q_s$ ise $P_s \subseteq H \subseteq [H] \subseteq G$ olacak şekilde bir $H \in \tau$ vardır.

(2) (τ, κ), koregüler ve $s \in S, F \in \kappa, P_s \nsubseteq F$ ise $F \subseteq]K[\subseteq K \subseteq Q_s$ olacak şekilde bir $K \in \kappa$ vardır (Brown *et al.* 2006).

Tanım 3.1.47 (T_0 Ditopoloji): $(S, \mathcal{S})$ bir doku uzayı ve (τ, κ), $(S, \mathcal{S})$ üzerinde tanımlı bir ditopoloji olsun. $s, t \in S$ ve $Q_s \nsubseteq Q_t$ için $P_s \nsubseteq H \nsubseteq Q_t$ olacak şekilde $\exists H \in \tau \cup \kappa$ var ise (τ, κ) ditopolojisine T_0 denir (Uğur and Diker 2009).

Tanım 3.1.48 (Bi-T_1, Bi-T_2, Bi-T_3 Ditopoloji): $(S, \mathcal{S})$ bir doku uzayı ve (τ, κ), $(S, \mathcal{S})$ üzerinde tanımlı bir ditopoloji olsun.

(1) T_0 ve R_0 olan (τ, κ) ditopolojisine T_1,

(2) T_0 ve ko-R_0 olan (τ, κ) ditopolojisine ko-T_1,

(3) T_0 ve bi-R_0 olan (τ, κ) ditopolojisine bi- T_1 ,

(4) T_0 ve R_1 olan (τ, κ) ditopolojisine T_2,

(5) T_0 ve ko-R_1 olan (τ, κ) ditopolojisine ko-T_2,

(6) T_0 ve bi-R_1 olan (τ, κ) ditopolojisine bi-T_2 ,

(7) T_0 ve regüler olan (τ, κ) ditopolojisine T_3,

(8) T_0 ve koregüler olan (τ, κ) ditopolojisine ko- T_3,

(9) T_0 ve biregüler olan (τ, κ) ditopolojisine bi- T_3 denir (Brown *et al.* 2006).

Tanım 3.1.49 (Tamamen Biregüler Ditopoloji): $(S, \mathcal{S})$ bir doku uzayı ve (τ, κ), $(S, \mathcal{S})$ üzerinde tanımlı bir ditopoloji olsun.

(1) $G \in \tau, G \nsubseteq Q_s$ için $P_s \subseteq f^{\leftarrow}P_0$ ve $F^{\leftarrow}Q_1 \subseteq G$ şartını sağlayan bir ikili sürekli $(f, F) : (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa) \to (\mathbb{I}, \mathcal{J}, \tau_{\mathbb{I}}, \kappa_{\mathbb{I}})$ difonksiyonu varsa, (τ, κ) ditopolojisine tamamen regüler denir.

(2) $K \in \kappa$, $P_s \nsubseteq K$ için $K \subseteq f^{\leftarrow}P_0$ ve $F^{\leftarrow}Q_1 \subseteq Q_s$ şartını sağlayan bir ikili sürekli $(f, F) : (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa) \to (\mathbb{I}, \mathcal{J}, \tau_{\mathbb{I}}, \kappa_{\mathbb{I}})$ difonksiyonu varsa, (τ, κ) ditopolojisine tamamen koregüler denir.

(3) Tamamen regüler ve tamamen ko-regüler olan (τ, κ) ditopolojisine tamamen biregüler denir (Brown *et al.* 2006).

Tanım 3.1.50 (Bi-$T_{3\frac{1}{2}}$ Ditopoloji): $(S, \mathcal{S})$ bir doku uzayı ve (τ, κ), $(S, \mathcal{S})$ üzerinde tanımlı bir ditopoloji olsun.

(1) T_0 ve tamamen regüler olan (τ, κ) ditopolojisine $T_{3\frac{1}{2}}$,

(2) T_0 ve tamamen koregüler olan (τ, κ) ditopolojisine *ko*-$T_{3\frac{1}{2}}$,

(3) T_0 ve tamamen biregüler olan (τ, κ) ditopolojisine *bi*-$T_{3\frac{1}{2}}$ denir (Brown *et al.* 2006).

Sonuç 3.1.51:

(1) Regüler $\Longrightarrow R_1 \Longrightarrow R_0$ ve koregüler $\Longrightarrow$*ko*-R_1 $\Longrightarrow$*ko*-R_0 dir.

(2) $T_{3\frac{1}{2}} \Longrightarrow T_3 \Longrightarrow T_2 \Longrightarrow T_1 \Longrightarrow T_0$, ko-$T_{3\frac{1}{2}}$ $\Longrightarrow$ko-T_3 $\Longrightarrow$ko-T_2 $\Longrightarrow$ ko-T_1 $\Longrightarrow$ T_0 ve bi-$T_{3\frac{1}{2}}$ $\Longrightarrow$bi-T_3 $\Longrightarrow$bi-T_2 $\Longrightarrow$ bi-T_1 $\Longrightarrow$ T_0 dir (Brown *et al.* 2006).

Sonuç 3.1.52: $(S, \mathcal{S}, \sigma)$ üzerinde tanımlı (τ, κ) tümleyenli ditopolojisi için R_0(sırasıyla R_1, regüler), ko-R_0(sırasıyla ko-R_1, koregüler) ve bi-R_0 (sırasıyla bi-R_1, biregüler) ifadeleri denktir (Brown *et al.* 2006).

Sonuç 3.1.53: $(S, \mathcal{S}, \sigma)$ üzerinde tanımlı (τ, κ) tümleyenli ditopolojisi için T_1(sırasıyla T_2, T_3), ko-T_1(sırasıyla ko-T_2, ko-T_3) ve bi-T_1 (sırasıyla bi-T_2, bi-T_3) ifadeleri denktir (Brown *et al.* 2006).

Tanım 3.1.54 (Kompakt Doku Uzayı): $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ bir ditopolojik doku uzayı olsun. Bu durumda $S = \bigvee_{i \in I} G_i$, $G_i \in \tau$, $i \in I$ için, J, I nın sonlu bir altkümesi olmak üzere $S = \bigcup_{j \in J} G_j$ şartı sağlanıyorsa $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayına kompakt denir (Brown and Diker 1998a).

Tanım 3.1.55 (Kokompakt Doku Uzayı): $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ bir ditopolojik doku uzayı olsun. Bu durumda $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset, F_i \in \kappa$ için, J, I nın sonlu bir altkümesi olmak üzere $\bigcap_{j \in J} F_j = \emptyset$ şartı sağlanıyorsa $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayına kokompakt denir (Brown and Diker 1998a).

Tanım 3.1.56 (Stable Doku Uzayı): $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ bir ditopolojik doku uzayı olsun. Bu durumda $K \neq S$ olan her $K \in \kappa$ için kompakt, yani $K \subseteq \bigvee_{i \in I} G_i$, $G_i \in \tau$, $i \in I$ için J, I nın sonlu bir altkümesi olmak üzere $K \subseteq \bigcup_{j \in J} G_j$, şartı sağlanıyorsa $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayına stable denir (Brown and Diker 1998a).

Tanım 3.1.57 (Kostable Doku Uzayı): $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ bir ditopolojik doku uzayı olsun. Bu durumda $G \neq \emptyset$ olan her $G \in \tau$ için kokompakt, yani $\bigcap_{i \in I} F_i \subseteq G, F_i \in \kappa, i \in I$ için J, I nın sonlu bir altkümesi olmak üzere $\bigcap_{j \in J} F_j \subseteq G$, şartı sağlanıyorsa $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayına kostable denir (Brown and Diker 1998a).

Tanım 3.1.58 (Dikompakt Doku Uzayı): $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayı kompakt, kokompakt, stable ve kostable ise bu ditopolojiye dikompakt denir (Brown and Diker 1998a).

Tanım 3.1.59 (Diaile): $(S, \mathcal{S})$ bir doku uzayı ve (τ, κ), $(S, \mathcal{S})$ üzerinde tanımlı bir ditopoloji olsun. Bu durumda $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{S} \times \mathcal{S}$ kümesine $(S, \mathcal{S})$ doku uzayı üzerinde bir diaile denir. $\mathcal{D} \subseteq \tau \times \kappa$ şartını sağlayan bir $\mathcal{D}$ diailesine açık ve kokapalı, $\mathcal{D} \subseteq \kappa \times \tau$ şartını sağlayan bir $\mathcal{D}$ diailesine kapalı ve koaçık diaile denir. (Brown and Diker 1998a).

Tanım 3.1.60 (Sonlu Exclusion Özelliği): $(S, \mathcal{S})$ bir doku uzayı ve (τ, κ), $(S, \mathcal{S})$ üzerinde tanımlı bir ditopoloji olsun. Bu durumda $i = 1, 2, \cdots, n$ olmak üzere $(F_i, G_i) \in \mathcal{D}$ için,

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_i \not\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} G_i$$

şartını sağlayan $\mathcal{D}$ diailesine sonlu exclusion özelliğine sahiptir (fep) denir (Brown and Diker 1998a).

Tanım 3.1.61 (Sınırlı Diaile): $(S, \mathcal{S})$ bir doku uzayı ve (τ, κ), $(S, \mathcal{S})$ üzerinde tanımlı bir ditopoloji olsun. Bu durumda

$$\bigcap \{F \mid F \in dom\,\mathcal{D}\} \not\subseteq \bigvee \{G \mid G \in ran\,\mathcal{D}\}$$

şartını sağlayan kapalı koaçık $\mathcal{D}$ diailesine, $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ doku uzayı üzerinde sınırlıdır denir (Brown and Diker 1998a).

Tanım 3.1.62 (Sonlu, Kosonlu Diaile): $(S, \mathcal{S})$ bir doku uzayı ve (τ, κ), $(S, \mathcal{S})$ üzerinde tanımlı bir ditopoloji ve $\mathcal{D} = \{(G_i, F_i) \mid G_i, F_i \in \mathcal{S}, i \in I\}$ bir diaile olsun. Bu durumda $dom\,\mathcal{D}$ sonlu ise $\mathcal{D}$ diailesine sonlu ve ran $\mathcal{D}$ sonlu ise $\mathcal{D}$ diailesine kosonlu denir (Yıldız and Brown 2007).

Tanım 3.1.63 (Diörtü): $(S,\mathcal{S})$ bir doku uzayı ve (τ,κ), $(S,\mathcal{S})$ üzerinde tanımlı bir ditopoloji olsun. $\mathcal{D} = \{(G_i, F_i) | \, G_i, F_i \in \mathcal{S}, i \in I\}$ bir diaile olmak üzere, eğer I nın her I_1, I_2 parçalanışları için (aşikar parçalanışlarda dahil)

$$\bigcap_{i \in I_1} F_i \subseteq \bigvee_{i \in I_2} G_i$$

şartı sağlanıyorsa $\mathcal{D}$ diailesine $(S,\mathcal{S})$ doku uzayının bir diörtüsü denir (Brown and Diker 1998a).

Teorem 3.1.64: $(S,\mathcal{S},\tau,\kappa)$ ditopolojik doku uzayının dikompakt olması için gerek ve yeter şart her açık, kokapalı diörtüsünün sonlu, kosonlu bir altdiörtüye sahip olmasıdır (Yıldız and Brown 2007).

Teorem 3.1.65: $(S,\mathcal{S},\tau,\kappa)$ bir ditopolojik doku uzayı olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) $(S,\mathcal{S},\tau,\kappa)$ ditopolojik doku uzayı kompakt, kokompakt, stable ve kostabledir.
(2) Kapalı, koaçık ve sonlu exclusion özelliğine sahip her diaile sınırlıdır.
(3) Her açık, kokapalı diörtü, sonlu ve kosonlu olan bir altdiörtüye sahiptir (Brown and Diker 1998a).

Önerme 3.1.66: $(S,\mathcal{S})$ bir doku uzayı ve (τ,κ), $(S,\mathcal{S})$ üzerinde tanımlı bir ditopoloji olsun.

(1) $\mathcal{S}$ deki kompakt, stable kümelerin sonlu birleşimi kompakt ve stabledir.
(2) $\mathcal{S}$ deki kokompakt, kostable kümelerin sonlu arakesiti kokompakt ve kostabledir (Diker 2004).

Örnek 3.1.67: Örnek 3.1.4(1) de verilen $(L,\mathcal{L})$ dokusunu göz önüne alalım.

(1) $\tau = \{\emptyset, L\}$ ve $\kappa = \mathcal{L}$ olmak üzere (τ, κ) ditopolojisi tanımlansın. τ sonlu olduğu için (τ, κ) kompakttır. Ancak, kokompakt değildir. Çünkü, örneğin, kapalı kümelerin $\mathcal{F} = \{(0, {}^1\!/_n] | n = 1,2, \dots\}$ ailesi $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$ şartını sağlar fakat $\mathcal{F}$ in hiçbir sonlu altkümesi boş bir arakesite sahip değildir.

(2) Dual olarak, $\tau = \mathcal{L}$ ve $\kappa = \{\emptyset, L\}$ olsun. (τ, κ) ditopolojisi, kokompakttır fakat kompakt değildir (Brown and Gohar 2009).

Teorem 3.1.68: Herhangi sayıda dikompakt doku uzayının keyfi çarpımı yine dikompakttır (Brown 1993a).

Tanım 3.1.69 (Normal Ditopoloji): $(S, \mathcal{S})$ bir doku uzayı ve (τ, κ), $(S, \mathcal{S})$ üzerinde tanımlı bir ditopoloji olsun. $F \subseteq G$ olmak üzere $G \in \tau$ ve $F \in \kappa$ için $F \subseteq H \subseteq [H] \subseteq G$ şartını sağlayan bir $H \in \tau$ varsa, (τ, κ) ditopolojisine normal denir (Brown and Diker 1998b).

Tanım 3.1.70 (Bi-T_4 Ditopoloji): $(S, \mathcal{S})$ bir doku uzayı ve (τ, κ), $(S, \mathcal{S})$ üzerinde tanımlı bir ditopoloji olsun.

(1) T_1 ve normal olan (τ, κ) ditopolojisine T_4,

(2) ko-T_1 ve normal olan (τ, κ) ditopolojisine ko-T_4,

(3) T_4 ve ko-T_4 olan (τ, κ) ditopolojisine bi-T_4 denir **(**Brown *et al.* 2006).

Teorem 3.1.71: R_0, normal olan bir ditopolojik doku uzayı regüler(tamamen regüler), ko-R_0 ve normal olan bir ditopolojik doku uzayı koregüler (tamamen koregüler) dir **(**Brown *et al.* 2006).

Sonuç 3.1.72: $T_4 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow T_3$, ko- T_4 ⇒ko-$T_{3\frac{1}{2}}$ ⇒ko-T_3 ve bi- T_4 ⇒bi-$T_{3\frac{1}{2}}$ ⇒bi-T_3 dür **(**Brown *et al.* 2006).

Tanım 3.1.73 (Temel Ditopolojik Altdoku Uzayı): $(S,\mathcal{S},\tau,\kappa)$ bir ditopolojik doku uzayı olsun. $N\in\mathcal{S}$ ve $\mathcal{S}_N=\{A\cap N|A\in\mathcal{S}\}$ olmak üzere $\mathcal{V}=\mathcal{S}_N$ ailesine N üzerine indirgenmiş doku ve $(N,\mathcal{V})$ çiftine de $(S,\mathcal{S})$ doku uzayının bir temel altdoku uzayı denir (Brown and Ertürk 2000b). Burada, eğer $\tau_N=\{G\cap N|G\in\tau\}$ ve $\kappa_N=\{K\cap N|K\in\kappa\}$ biçiminde tanımlanırsa, (τ_N,κ_N) ditopolojisine N üzerine indirgenmiş ditopoloji ve $(N,\mathcal{S}_N,\tau_N,\kappa_N)$ ditopolojik doku uzayına ise $(S,\mathcal{S},\tau,\kappa)$ doku uzayının bir temel ditopolojik altdoku uzayı denir (Diker 2004).

Teorem 3.1.74: $(f,F):(S,\mathcal{S})\longrightarrow(T,\mathcal{T})$ bir difonksiyon ve $A\in\mathcal{S}$, $B\in\mathcal{T}$ olacak şekilde $(A,\mathcal{S}_A)$ ve $(B,\mathcal{S}_B)$ sırasıyla $(S,\mathcal{S})$ ve $(T,\mathcal{T})$ doku uzaylarının temel altdoku uzayları olsun. $s\in A$ ve $t\in B$ için $\bar{P}^{A\times B}_{(s,t)}$ ve $\bar{Q}^{A\times B}_{(s,t)}$, $\mathcal{P}(A)\otimes\mathcal{T}_B$ çarpım dokusunun sırasıyla p-kümeleri ve q-kümeleri olmak üzere

$$f_{A\times B}=\bigvee\left\{\bar{P}^{A\times B}_{(s,t)}|(\exists s'\in A),(P_s\not\subseteq Q_{s'}),\left(f\not\subseteq\ \bar{Q}_{(s',t)}\right)\right\}$$

ve

$$F_{A\times B}=\bigcap\left\{\bar{Q}^{A\times B}_{(s,t)}|(\exists s'\in A),(P_{s'}\not\subseteq Q_s),\left(\ \bar{P}_{(s',t)}\not\subseteq\ F\right)\right\}$$

olacak şekilde $f^{\to}A\subseteq B$ ise, $(f_{A\times B},F_{A\times B})$ ikilisi $(A,\mathcal{S}_A)$ altdoku uzayından $(B,\mathcal{S}_B)$ altdoku uzayına tanımlı bir difonksiyondur (Uğur and Diker 2006).

Teorem 3.1.75: (f,F), $(S,\mathcal{S})$ doku uzayından $(T,\mathcal{T})$ doku uzayına tanımlı bir dibağıntı, $A\in\mathcal{S}$ ve $B\in\mathcal{T}$ olsun.

(i) $f_{A\times B}=f\cap(A\times B)$ dir.

(ii) Eğer $B\subseteq\ F^{\to}A$ ise $F\cap(A\times B)=F_{A\times B}$ dir.

(iii) $(f_{A\times B},F_{A\times B})$, $(A,\mathcal{S}_A)$ altdoku uzayından $(T,\mathcal{T})$ doku uzayına tanımlı bir dibağıntıdır (Uğur and Diker 2006).

Tanım 3.1.76 (Kısıtlama): $(f_{A\times B}, F_{A\times B})$ difonksiyonuna, (f, F) difonksiyonunun $(A, \mathcal{S}_A)$ ve $(B, \mathcal{S}_B)$ altdoku uzaylarına kısıtlaması denir (Uğur and Diker 2006).

3.2. Wallman-Tip Kompaktlaştırma

Tanım 3.2.1 (Taban): X bir topolojik uzay ve β, X in kapalı altkümelerinin bir ailesi olsun. Eğer X in her bir kapalı altkümesi, β nın bazı altailelerinin arakesiti olarak yazılabiliyor ise veya buna denk olarak X in her bir G kapalı altkümesi ve $X - G$ nin her bir x noktası için $x \notin B$ ve $G \subseteq B$ olacak şekilde bir $B \in \beta$ varsa β ailesine kapalı kümeler için bir taban denir (Hart *et al.* 2004).

Tanım 3.2.2 (Alttaban): X bir topolojik uzay ve $\mathcal{S}$, X uzayının kapalı altkümelerinin bir ailesi olsun. Eğer $\mathcal{S}$ nin sonlu altailelerinin herhangi birleşimlerinin oluşturduğu aile X in kapalı kümeleri için bir taban oluşturuyor ise, $\mathcal{S}$ ailesine X in kapalı altkümeleri için bir alttaban denir (Hart *et al.* 2004).

Tanım 3.2.3 (Centered Sistem) : $\mathcal{S}$, X kümesinin kapalı altkümeleri için bir alttaban ve $\wp$, $\mathcal{S}$ alttabanının bir altailesi olsun. $\wp$ nun her sonlu $\{S_1, S_2, \cdots, S_n\}$ altailesi için,

$$S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n \neq \emptyset$$

oluyor ise $\wp$ ya $\mathcal{S}$ nin centered sistemi denir (Hart *et al.* 2004).

Wallman-tip kompaktlaştırmanın elde ediliş adımları:

Alexander Alttaban Lemmasından, X in kompakt olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{S}$ nin her bir centered sisteminin boştan farklı bir arakesite sahip olmasıdır.

X bir topolojik uzay ve $\mathcal{S}$, X in kapalı altkümelerinin bir alttabanı olsun. Teichmuller-Tukey Lemmasından $\mathcal{S}$ alttabanının her bir centered sistemi bir maximal centered sistem tarafından kapsanır. $w(X,\mathcal{S})$, $\mathcal{S}$ alttabanının tüm maximal centered sistemlerinin kümesi olsun. $w(X,\mathcal{S})$ kümesinin elemanları $\xi,\eta,\omega,\cdots$ gibi Yunan harfleriyle gösterilsin. $w(X,\mathcal{S})$ üzerinde bir topoloji, $\forall S\in\mathcal{S}$ için $S^{*}=\{\xi\in w(X,\mathcal{S})|S\in\xi\}$, $w(X,\mathcal{S})$ nin bir alt kümesi olmak üzere, kapalı kümelerin bir alttabanı olarak $\mathcal{S}^{*}=\{S^{*}|S\in\mathcal{S}\}$ biçiminde tanımlanır.

$w(X,\mathcal{S})$ nin bir G altkümesini göz önüne alalım. G nin kapalı olması için gerek ve yeter şart, $w(X,\mathcal{S})$ deki her bir ξ elemanı için $\xi\notin G$ olmak üzere $G\subseteq S_1^{*}\cup S_2^{*}\cup\cdots\cup S_n^{*}$ ifadesinin sağlanması ve $\xi\notin S_i^{*}$ $(i=1,2,\dots,n$ $)$ olmak üzere $S_1,S_2,\cdots,S_n$ nin $\mathcal{S}$ de var olmasıdır. $w(X,\mathcal{S})$ nin en önemli özelliği şu şekildedir: $\mathcal{S}$ de bulunan tüm $S_1,S_2,\cdots,S_n$ ler için $S_1\cap S_2\cap\cdots\cap S_n\neq\emptyset$ şartının sağlanması için gerek ve yeter şart $S_1^{*}\cap S_2^{*}\cap\cdots\cap S_n^{*}\neq\emptyset$ şartının sağlanmasıdır. Bundan sonraki kısımda bu özelliğin kolayca hatırlanabilmesi amacıyla bu özelliğe $w(X,\mathcal{S})$ nin anahtar özelliği diyelim.

Alexander Alttaban Lemmasından faydalanılarak $w(X,\mathcal{S})$ nin kompakt olup olmadığı incelenebilir. $\mathcal{S}^{*}$ ın bir centered sistemi olarak $\wp^{*}$ ı alalım. $\wp^{*}$ ın aynı zamanda maximal olduğu farz edilebilir. $w(X,\mathcal{S})$ nin anahtar özelliğinden $\wp=\{S|\,S^{*}\in\wp^{*}\}$ ailesi $\mathcal{S}$ kümesinin bir maximal centered sistemidir. O halde, $\wp$, $w(X,\mathcal{S})$ nin $\wp^{*}$ daki her kümeye ait olan bir noktasıdır. Dolayısıyla $\bigcap\wp^{*}\neq\emptyset$ olup $w(X,\mathcal{S})$ kompakttır.

$e\colon X\longrightarrow w(X,\mathcal{S})$, $e(X)=\{S\in\mathcal{S}|x\in S\}$ biçiminde tanımlı aile, bir topolojik gömülme olsun. Burada $\mathcal{S}$ kümesi üzerinde herhangi bir kısıtlamaya ihtiyaç yoktur. Herhangi bir $x\in X$ için $e(X)$ ailesinin maximal centered sistem olması gerekmez. e bir dönüşüm olsa bile gömülme olmasına gerek yoktur.

Tanım 3.2.4 (Dağılımlı): Eğer $\mathcal{S}$ nin her bir S elemanı ve $x\notin S$ olacak şekilde X in herbir x noktası için $x\in T\subseteq X-S$ olacak şekilde $\mathcal{S}$ de bir T elemanı varsa $\mathcal{S}$ alttabanına dağılımlı (disjunctive) denir (Frink 1964).

$\mathcal{S}$, X uzayının bir alttabanı olmak üzere $\mathcal{S}$ disjunctive ise X uzayı T_1 dir ve $e: X \longrightarrow w(X, \mathcal{S})$ dönüşümü gömülmedir. Dolayısıyla, $\mathcal{S}$ için $w(X, \mathcal{S})$ kompakt uzayı, X uzayının bir kompaktlaştırmasıdır.

Tanım 3.2.5 (Halka): Bir X kümesinin altkümelerinden oluşan $\mathfrak{A}$ ailesinin her sonlu $\{U_1, U_2, \cdots, U_n\}$ altailesi sonlu arakesit ve birleşim altında kapalıysa $\mathfrak{A}$ ya halka (ring) adı verilir (Frink 1964).

$\mathcal{S}$, X topolojik uzayının kapalı altkümelerinin bir alttabanı olmak üzere eğer $\mathcal{S}$ bir ring ise $\mathcal{S}$ kapalı kümeler için bir tabandır.

Tanım 3.2.6 (Normal Taban): $A, B \in \mathcal{S}$, $A \cap B = \emptyset$ için $A \cap D = \emptyset$, $B \cap C = \emptyset$, $C \cup D = X$ olacak şekilde $C, D \in \mathcal{S}$ elemanları varsa $\mathcal{S}$ ailesine normaldir denir (Hart *et al.* 2004).

Tanım 3.2.7 (Wallman Kompaktlaştırma): X bir topolojik uzay ve β, X uzayının kapalı altkümelerinin bir tabanı olsun. β, ring, disjunctive ve normal taban özelliklerini sağlıyor ise β ya Wallman taban denir. β, Wallman taban ise, $w(X, \beta)$ ya Wallman kompaktlaştırma denir (Hart *et al.* 2004).

Ring, disjunctive ve normal taban özelliklerinden $w(X, \beta)$ uzayı kompakt ve Hausdorff bir uzaydır (Hart *et al.* 2004).

Tanım 3.2.8 (Wallman-Tip Kompaktlaştırma): Herhangi bir uzayın kompaktlaştırması bir taban yardımıyla elde ediliyorsa, bu kompaktlaştırma türüne Wallman-tip kompaktlaştırma denir (Njastad 1966).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Dikompaktlaştırma

Tanım 4.1.1 (Dikompaktlaştırma): $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ve $(T, \mathcal{T}, u, v)$ ditopolojik doku uzayları, $(f, F): (S, \mathcal{S}) \longrightarrow (T, \mathcal{T})$ bir difonksiyon olmak üzere (N, T_N, u_N, v_N), $(T, \mathcal{T}, u, v)$ ditopolojik doku uzayının bir ikili yoğun ditopolojik temel altdoku uzayı olsun. Eğer, $(f_{S\times N}, F_{S\times N}): (S, \mathcal{S}) \rightarrow (N, T_N)$ kısıtlaması bir dihomeomorfizm ise, (f, F) difonksiyonuna bir digömme denir. Eğer $(T, \mathcal{T}, u, v)$ ditopolojik doku uzayı dikompakt ise $((f, F), (T, \mathcal{T}, u, v))$ ikilisine $(S, \mathcal{S})$ doku uzayının bir dikompaktlaştırması denir (Uğur and Diker 2006).

Ditopolojik doku uzayları için Wallman-tip kompaktlaştırmanın elde ediliş adımları:

4.2. $(\boldsymbol{S}^*, \boldsymbol{\mathcal{S}}^*, \boldsymbol{\tau}^*, \boldsymbol{\kappa}^*)$ Uzayı

$(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$, bi-$T_4$ ditopolojik doku uzayının normal taban yardımıyla Wallman-tip kompaktlaştırmasına bakalım. S_τ, τ nun bir alttabanı olsun. $\mathcal{H}$, S_τ nun bir altailesi olmak üzere, eğer $\mathcal{H}$ nın her sonlu $\{G_1, G_2, \ldots, G_n\}$ altailesi için

$$[G_1] \cap [G_2] \cap \ldots \cap [G_n] \neq \emptyset$$

şartı sağlanıyorsa, $\mathcal{H}$, S_τ nun centered sistemidir denir. Zorn Lemmasından, her centered sistemin en az bir maksimal centered sistemi vardır. Bu maksimal elemanlar x^*, y^*, z^* ... şeklinde gösterilir. S^*, bütün centered sistemlerin kümesi olsun.

$$\widetilde{H} = \{x^* \in S^* : [G] \subset H, G \in x^*\}$$

ifadesi verilsin. Bu ifadede $F = [G]$ olarak alınırsa

$$\widetilde{H} = \{x^* \in S^* : G \subset F \subset H, G \in x^*, H \in \tau, F \in \kappa\}$$

ifadesi elde edilir.

Şimdi de aynı ifadeleri kotopoloji için elde etmeye çalışalım:

S_κ , κ nın bir alttabanı olsun. S_κ nın $\mathcal{F}$ altailesini göz önüne alalım. $\mathcal{F}$ nin her sonlu $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ altailesi için

$$F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_n = S$$

şartı sağlanıyorsa $\mathcal{F}$ ye, κ nın centered sistemidir denir. Teichmuller-Tukey Lemmasından, S_κ nın her centered sistemi bir maksimal tarafından içerilir. Bu maksimaller $\xi^*, \gamma^*, \beta^*, \ldots$ gibi yıldızlı yunan harfleri ile gösterilir ve S^* tarafından içerilirler.

$$\widetilde{F} = \{\, \xi^* \in S^* : F \subset H, F \in \xi^*, H \in \tau, F \in \kappa\}$$

biçiminde tanımlansın.

S^* üzerindeki ditopoloji, açıklar için bir taban olarak,

$$S_\tau^* = \left\{\widetilde{H} : H \in S_\tau\right\}$$

ve kapalılar için bir kotaban olarak,

$$S_\kappa^* = \{\widetilde{F} : F \in S_\kappa\}$$

ifadeleri alınarak tanımlanır. Özel olarak, S_τ^* ile S_κ^* a dinormal taban denir.

S^* üzerindeki dokuyu tanımlayalım. $T,$ açık kümelerin bütün maksimal centered sistemlerinin ailesi ve V de kapalı kümelerin bütün maksimal centered sistemlerinin ailesi olsun. T ve V üzerindeki dokular sırasıyla $\mathcal{T} = \{\widetilde{H}: H \subset \mathcal{S}\}$ ve $\mathcal{V} = \{\widetilde{V}: V \subset \mathcal{S}\}$ dir. Özel olarak, $S^* = T \cup V$ olarak alınırsa, S^* üzerindeki doku $\mathcal{S}^* = \mathcal{T} \oplus \mathcal{V}$ biçiminde tanımlıdır. Çalışmamızın bundan sonraki kısımlarında karışıklıklardan kaçınmak amacıyla $(S^*, \mathcal{T} \oplus \mathcal{V}, \tau^*, \kappa^*)$ ditopolojik doku uzayı $(S^*, \mathcal{S}^*, \tau^*, \kappa^*)$ ile gösterilecektir.

Şimdi de $(S^*, \mathcal{S}^*, \tau^*, \kappa^*)$ ditopolojik doku uzayının dikompakt olup olmadığını inceleyelim:

Herhangi bir ditopolojik doku uzayının dikompakt olabilmesi için gerek ve yeter şart uzayın kompakt, kokompakt, stable ve kostable olmasıdır:

$(S^*, \mathcal{S}^*, \tau^*, \kappa^*)$ ditopolojik doku uzayının dikompakt olduğunu göstermek için ilk olarak kokompakt olduğunu gösterelim:

$\widetilde{K}, (S^*, \mathcal{S}^*, \tau^*, \kappa^*)$ ditopolojik doku uzayının bir altkümesi olsun. $\widetilde{K}$ nın kapalı olması için gerek ve yeter şart $\xi^* \notin \widetilde{K}$ olmak üzere S^* daki her ξ^* elemanı için S de,

$$\widetilde{K} \subseteq \widetilde{F}_1 \cup \widetilde{F}_2 \cup \ldots \cup \widetilde{F}_n$$

şartını sağlayan $F_1, F_2, \ldots, F_n$ nin var olmasıdır. S^*ın anahtar özelliğinden, S deki bütün $F_1, F_2, \ldots, F_n$ ler için,

$$F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_n = S$$

şartının sağlanması için gerek ve yeter şart

$$\widetilde{F}_1 \cup \widetilde{F}_2 \cup \ldots \cup \widetilde{F}_n = S$$

olmasıdır.

Şimdi de Alexander Alttaban Lemması yardımıyla S^* uzayının kokompakt olduğunu ispatlayalım.Varsayalım ki, M^*, S_κ^* ın centered sistemi ve $\widetilde{M}$ da maksimal olsun. Anahtar özelliğinden, $M = \{F|\tilde{F} \in \widetilde{M}\}$ ailesi S_κ nın bir maksimal centered sistemidir. Sonuç olarak, M, $(S^*, \mathcal{S}^*, \tau^*, \kappa^*)$ ditopolojisinin, $\widetilde{M}$ daki her kümeye ait olan bir noktasıdır. Bu durumda $\cap\widetilde{M} \neq \emptyset$ olur. Dolayısıyla S^* kokompakttır.

İkinci olarak, uzayın kompakt olduğunu gösterelim:

Farzedelim ki $\mathcal{V}^*$, S^* ın sonlu altdiörtüsü olmayan, bir açık diörtüsü olsun. Her $x^* \in S^*$ için, $\widetilde{U} \in \mathcal{V}^*$ kümesi ve $x^* \in S^* \cap \widetilde{B(\xi^*)} \subseteq \widetilde{U}$ olacak şekilde bir $B(\xi^*) \in S_\kappa$ kümesi bulabiliriz. S_κ^* ın sonlu $\xi_1^*, \xi_2^*, \dots, \xi_n^*$ noktalarını göz önüne alalım. Bu durumda,

$$\bigcup_{t=1}^{n}(S^* \cap \widetilde{B(\xi_t^*)}) \neq S^*$$

veya buna denk olarak $A(x^*) \in S_\tau$ ve S_τ^* ın sonlu $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ noktalarını göz önüne alırsak,

$$\bigcap_{i=1}^{n}\left[\widetilde{A(x_t^*)}\right] \neq \emptyset$$

yazılabilir. Şayet y^* bu arakesitte bir nokta ise $A(x_t^*) \in y^*$ dır. Böylece $\bigcap_{i=1}^{n}\left[\widetilde{A(x_t^*)}\right] \neq \emptyset$ olur. Buradan S_τ^* ın sonlu sayıda x^* noktalarını elde ederiz. Dolayısıyla

$$\{A(x^*): x^* \in S^*\}$$

yazılabilir.Bu aile S_τ üzerinde bir centered sistemdir ve Zorn Lemmasından S_τ da bir maksimal centered sistem tarafından içerilir. Başka bir deyişle, her $x^* \in S_\tau^*$ için $A(x^*) \in a^*$ olacak şekilde bir $a^* \in S_\tau^*$ noktası vardır. Özel olarak , $A(a^*) \in a^*$

yazabiliriz. Buradan $a^* \in \left[\widetilde{A(a^*)}\right]$ olur ve yukarıdaki ifade ile çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır ve S^* kompakttır.

Üçüncü olarak, uzayın stable olduğunu gösterelim:

S^* bir kompakt ditopolojik doku uzayı ve bir kompakt uzayın kapalı her altkümesi kompakt olduğundan, her $F^* \in \kappa^*$ kompakttır. Bu durumda,

$$F^* \subseteq \bigvee_{i \in I} G_i^* \Longrightarrow F^* \subseteq \bigcup_{j \in J} G_j^* \text{ , J sonlu}$$

dur. Dolayısıyla S^* stabledir.

Dördüncü olarak, uzayın kostable olduğunu gösterelim:

Kostableliği kurmak için

$$\bigcap_{i \in I} F_i^* \subseteq G^*$$

şartını sağlayacak şekilde $G^* \in \tau^*, G^* \neq \emptyset$ ve $F_i^* \in \kappa^*, i \in I$ yı alalım. J, I nın sonlu bir altkümesi olsun. Burada

$$\bigcap_{j \in J} F_j^* \subseteq G^*$$

olduğu kolayca görülebilir. Dolayısıyla S^* kostabledir.

Teorem 4.2.1: $e_\tau^{\rightarrow} G = \{x^* \in S_\tau^* : G \in x^*\}$ olacak şekilde e_τ, S_τ dan S_τ^* a bir gömülmedir.

Teorem 4.2.2: $e_{\kappa}^{\rightarrow}F = \{\xi^* \in S_\kappa^*: F \in \xi^*\}$ olacak şekilde e_κ, S_κ dan S_κ^* a bir kogömülmedir.

Teorem 4.2.3: $(e_\tau, e_\kappa)^{\rightarrow}Z = \begin{cases} Z \in \kappa \Longrightarrow \{\xi^* \in S_\kappa^*: Z \in \xi^*\} \\ Z \in \tau \Longrightarrow \{x^* \in S_\tau^*: Z \in x^*\} \\ Z \notin \tau, \kappa \Longrightarrow \{r^* \in S^*: Z \in r^*\} \end{cases}$ olacak şekilde (e_τ, e_κ), S den S^* a bir digömülmedir.

Teorem 4.2.1 ve Teorem 4.2.2 ün ispatları Teorem 4.2.3 ün ispatından kolayca görülebilir. Dolayısıyla sadece Teorem 4.2.3 ün ispatını göstermemiz yeterli olacaktır:

İspat 4.2.4: (e_τ, e_κ) nin, S den $(e_\tau, e_\kappa)^{\rightarrow}S$ ye bir dihomeomorfizm olduğunu gösterelim:

(1) $Z_1 \neq Z_2$ olsun. S, biregüler olduğundan,

$$(e_\tau, e_\kappa)^{\rightarrow}Z_1 \neq (e_\tau, e_\kappa)^{\rightarrow}Z_2$$

eşitsizliğinin sağlandığı kolayca görülebilir. Dolayısıyla (e_τ, e_κ), birebirdir.

(2) Her $\widetilde{H} \in \tau^*$ için

$$(e_\tau, e_\kappa)^{\leftarrow}\widetilde{H} = H \in \tau$$

olduğundan (e_τ, e_κ) süreklidir. Benzer şekilde, her $\tilde{F} \in \kappa^*$ için

$$(e_\tau, e_\kappa)^{\leftarrow}\tilde{F} = F \in \kappa$$

olduğundan (e_τ, e_κ) kosüreklidir. Dolayısıyla, (e_τ, e_κ) ikili süreklidir.

(3) İkili yoğunluğu göstermek için $(e_\tau, e_\kappa)^{\rightarrow}S$ nin, S^* ın bir ikili yoğun altkümesi olduğunu göstermemiz yeterlidir.

$$[(e_\tau, e_\kappa)^{\rightarrow}S] = \left[\{\widetilde{H}_i\}\right] = [\{x_i^* \in S_\tau |\, [G_i] \subset H_i, G_i \in x_i^*, i \in I\}]$$

olmak üzere, kapanış tanımı ve uzayın regüler, normal olduğu göz önüne alınırsa,

$$[(e_\tau, e_\kappa)^{\rightarrow} S] = \bigcap \{\tilde{F}_i \in \kappa^* : \widetilde{H}_i \subset \tilde{F}_i\} = S^*$$

olduğu açıktır. Dolayısıyla, (e_τ, e_κ) ikili yoğundur.

Sonuç olarak, (e_τ, e_κ) bir digömülmedir.

Sonuç 4.2.5: $(S^*, \mathcal{S}^*, \tau^*, \kappa^*)$, $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayının bir Wallman- tip kompaktlaştırmasıdır.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu çalışmada, topolojik uzaylardaki normal taban kavramı ditopolojik doku uzaylarına taşınmış, ditopolojik doku uzayları üzerindeki bu tabana dinormal taban adı verilmiştir. Bunun yanı sıra, açıklar ve kapalıların maksimallerini içeren S^* centered sistemler kümesi oluşturulmuştur. Bu S^* kümesi üzerinde $(S^*, \mathcal{S}^*, \tau^*, \kappa^*)$ ditopolojik doku uzayı tanımlanarak, ditopolojinin dikompakt olduğu gösterilmiştir. Bunu yaparken,

$$e_\tau^{\to} G = \{x^* \in S_\tau^* : G \in x^*\}$$

biçiminde tanımlanan e_τ nun bir gömülme,

$$e_\kappa^{\to} F = \{\xi^* \in S_\kappa^* : F \in \xi^*\}$$

biçiminde tanımlanan e_κ nın bir kogömülme ve

$$(e_\tau, e_\kappa)^{\to} Z = \begin{cases} Z \in \kappa \Longrightarrow \{\xi^* \in S_\kappa^* : Z \in \xi^*\} \\ Z \in \tau \Longrightarrow \{x^* \in S_\tau^* : Z \in x^*\} \\ Z \notin \tau, \kappa \Longrightarrow \{r^* \in S^* : Z \in r^*\} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan (e_τ, e_κ) nın bir digömülme olduğu gösterilmiştir.

Böylece, $(S^*, \mathcal{S}^*, \tau^*, \kappa^*)$ ın, $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayının bir Wallman-tip kompaktlaştırması olduğu sonucu elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

Aleksandrov, P.S. and Urysohn, P., 1929. Memorie sur les espaces topologiques compacts. Koninklijke Akademia Van Wetenschappen, 96p, Amsterdam.

Biles, C. M., 1970. Wallman-type Compactifications. Proceedings of the American Mathematical Society, 25, 363–368.

Birkhoff, G., 1967. Lattice Theory. American Mathematical Society Colloquium Publications, 418p, USA.

Brown, L. M., 1993a. Ditopological fuzzy structures I. Fuzzy Systems a A. I M, 3(1).

Brown, L. M., 1993b. Ditopological fuzzy structures II. Fuzzy Systems a A. I M, 3(2).

Brown, L. M. and Diker, M., 1998a. Ditopological texture spaces and intuitionistic sets. Fuzzy Sets and Systems, 98, 217-224.

Brown, L. M. and Diker, M., 1998b. Paracompactness and full normality in ditopological texture spaces. Journal of Mathematical Analysis Application, 227, 144-165.

Brown, L. M. and Ertürk, R., 2000a. Fuzzy sets as texture spaces, I. Representation theorems. Fuzzy Sets and Systems, 110, 227-236.

Brown, L. M. and Ertürk, R., 2000b. Fuzzy sets as texture spaces, II. Subtextures and quotient textures. Fuzzy Sets and Systems 110, 237-245.

Brown, L. M., Ertürk, R. and Dost S., 2004a. Ditopological texture spaces and fuzzy topology, I. Basic concepts. Fuzzy Sets and Systems, 147, 171-199.

Brown, L. M., Ertürk, R. and Dost S., 2004b. Ditopological texture spaces and fuzzy topology, II. Topological Consideration. Fuzzy Sets and Systems, 147, 201-231.

Brown, L. M., Ertürk, R. and Dost S., 2006. Ditopological texture spaces and fuzzy topology, III.Seperation axioms. Fuzzy Sets and Systems, 157, 1886-1912.

Brown, L.M. and Gohar, M.M., 2009. Compactness in Ditopological Texture Spaces, 38, 21-43.

Bülbül, A., 1994. Genel Topoloji, Karadeniz Teknik Üniversitesi Yayınları, 312p, Trabzon.

Cech, E., 1937. On bicompact spaces. Annals of Mathematics, 38(4), 823-844 .

Cohn, P. M., 2002. Basic Algebra: Groups, Rings and Fields. Springer-Verlag, 480p, London.

Davey, B. A. and Priestley, H. A., 2002. Introduction to Lattices and Order. Cambridge University Press, 298p, Cambridge.

Diker, M., 2004. One point compactification of ditopological texture space. Fuzzy Sets and Systems, 147, 233-248.

Elmali, C. and Ugur T., 2009. Fan-Gottesman Compactification of Some Specific Spaces is Wallman-Type Compactification. Chaos, Solitons & Fractals, 42(1), 17-19.

Elmali, C., Kopuzlu A. and Ugur T., 2010. A Characterization of compactifications of local compact hausdorff space. International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 7(2), 177-184.

Ergun, N., 2005. Kümeler Teorisine Giriş. Nobel Yayınları, 630p, Ankara.

Fan, K., and Gottesman, N., 1952. On Compactifications of Freudenthal and Wallman. İndag.Math., 14, 504-510.

Frink, O., 1964. Compactifications and Semi-normal Spaces. Amer. Journal Math., 86, 602-605.

Gohar, M.M., 2002. Compactness in ditopological texture spaces. PhD Thesis, Hacettepe University, Ankara.

Hart, K.P.,Nagata, J. and Vaughan, J.E., 2004, Encyclopedia of General Topology, Elsevier Press, North-Holland.

Lipschutz, S., 1965. General Topology, Temple University, 239p, New York.

Munkres, J.R., 1975. Topology A First Course ,Prentice-Hall,Inc.Englewood Ciffs, 413p, New Jersey.

Njastad, O., 1966. On Wallman-type Compactifications. Mathematische Zeitschrift, 91, 267-276.

Steiner E.F., 1968. Wallman spaces and compactifications. Fund. Math., 61, 295-304.

Stone, M.H., 1937. Applications of the theory of Boolean rings to general topology. Transactions of the American Mathematical Society, 41, 375-481.

Tietze, H., 1924. Beitrage zur allgemeinen Topologie II Überdie Einführung uneigentlicher Elemente. Mathematische Annalen, 91(3-4), 210-224 .

Tychonoff, A., 1930. Uberdie topologische Erweiterung von Raumen. Mathematische Annalen, 102(1), 544-561.

Ul'janov, V., 1977. Solution of a Basic Problem on Compactifications of Wallman Type. Soviet Mathematics Doklady, 18, 567-571.

Ugur, A. A. and Diker, M., 2006. A Wallman-type compactification of texture space. Fuzzy Sets and Systems, 157, 2683-2705.

Ugur, A. A. and Diker, M., 2009. Stone-Cech compactification of ditopological texture space. Quaestiones Mathematicae, 32(1), 15-33.

Wallman, H., 1938. Lattices and Topologıcal Spaces. Annals of Mathematics, 39, 112–126.

Willard, S.,1970. General Topology, Addison-Wesley Publishing Company, 345p, London.

Yüksel, Ş., 2002. Genel Topoloji. Selçuk Üniversitesi Basımevi, 490p, Konya.

Yıldız, C., 2005. Genel Topoloji,Gazi Basımevi, 336p, Ankara.

Yıldız, F. and Brown, L.M., 2007. Categories of Dicompact bi-T2 Texture Spaces and a Banach-Stone Theorem. Quaestiones Mathematicae, 30(2), 167-192.

ÖZGEÇMİŞ

1989 yılında Erzurum'da doğdu. İlk, orta ve lise öğretimini Erzurum da tamamladı. 2008 tarihinde Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümüne kazanarak lisans öğrenimine başladı ve 2012 yılında mezun oldu. Aynı yıl Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans öğrenimine başladı. Halen lisansüstü eğitimine devam etmektedir.