TOPOLOJİK ROUGH KÜMELERİ ÜZERİNE

Hatice Kübra SARI

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Topoloji Bilim Dalı
Prof. Dr. Abdullah KOPUZLU
2014

ATATÜRK ÜNİVERİSTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TOPOLOJİK ROUGH KÜMELERİ ÜZERİNE

Hatice Kübra SARI

MATEMATİK ANABİLİM DALI
Topoloji Bilim Dalı

ERZURUM
2014

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAY FORMU

TOPOLOJİK ROUGH KÜMELERİ ÜZERİNE

Prof. Dr. Abdullah KOPUZLU danışmanlığında, Hatice Kübra SARI tarafından hazırlanan bu çalışma 26/12/2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı – Topoloji Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak **oybirliği** ile kabul edilmiştir.

Başkan : Prof.Dr.Ahmet KÜÇÜK *İmza* :

Üye : Prof.Dr.Abdullah KOPUZLU *İmza* :

Üye : Doç.Dr.Mutlu KUNDAKÇI *İmza* :

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu 31/12/2014 tarih ve 52/1749 nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. İhsan EFEOĞLU
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

TOPOLOJİK ROUGH KÜMELERİ ÜZERİNE

Hatice Kübra SARI

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Topoloji Bilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Abdullah KOPUZLU

Bu tezde, ilk olarak denklik bağıntıları üzerine kurulu Pawlak rough kümeler tanıtılmış ve bu denklik bağıntıları ile üretilen topoloji sunulmuştur. Daha sonra sağ komşuluklarla tanımlanan Yao'nun rough kümeleri tanıtılmış ve çeşitli topolojik özellikleri sunulmuştur. Son olarak Zhu'nun örtü tabanlı rough kümeleri tanıtılarak örtülerle oluşturulan yaklaşım işlemleri üzerine çalışmalar sunulmuştur. Ayrıca keyfi ikili bağıntılar üzerine kurulu rough kümelerin bazı topolojik özellikleri verilmiştir.

2014, 56 sayfa

Anahtar Kelimeler: Rough Küme, Topolojik Rough Küme, Yaklaşım Operatörleri, Geçişme İfadesi, Örtü tabanlı rough kümeler.

ABSTRACT

MS Thesis

ON TOPOLOGİCAL ROUGH SETS

Hatice Kübra SARI

Ataturk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Discipline of Topology

Supervisor: Prof. Dr. Abdullah KOPUZLU

In this thesis, firstly Pawlak's rough sets based on equivalence relations are introduced and topology generated by this equivalence relations is presented. Then, Yao's rough sets defined through right neighborhood are introduced and various topological properties of these are presented. Finally, Zhu's covering-based rough sets are introduced. Studies on approximation operations defined through this coverings are presented.

2014, 56 pages

Keywords: Rough Sets, Topological Rough Sets, Approximation Operators, Transmissing Expression, Covering-based Rough Sets.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma, Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde hazırlanmıştır.

Tez çalışmamı hazırlama sürecinde bilgi ve tecrübelerini esirgemeyen, bana yol gösteren değerli hocam Sayın Prof. Dr. Abdullah KOPUZLU'ya teşekkürlerimi arz ederim.

Tezin hazırlanması sürecinde değerli fikirlerinden yararlandığım Sayın Prof. Dr. Ahmet KÜÇÜK'e, Sayın Doç. Dr. Tamer UĞUR'a ve Matematik Bölümü'nde gerekli ilgi ve yardımı esirgemeyen anabilim dalımızın değerli öğretim üyelerine sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmamda bana yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen sevgili arkadaşlarım Şuheda TÜRKAN ve Tuba ÇAKMAK'a teşekkür ederim.

Bu süreçte bana desteğini ve güvenini daima hissettiren aileme minnettarlığımı sunarım.

Yüksek lisans eğitimim boyunca "Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı" ile tarafıma vermiş olduğu destekten dolayı TÜBİTAK'a teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Hatice Kübra SARI
Aralık, 2014

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$A = (U, R)$	Yaklaşım uzayı
$com(A)$	A yaklaşım uzayındaki tüm kompoze kümeler ailesi
$\underline{R}(X)$	X kümesinin R bağıntısına göre alt yaklaşım kümesi
$\overline{R}(X)$	X kümesinin R bağıntısına göre üst yaklaşım kümesi
$BND(X)$	X kümesinin R bağıntısına göre sınırı
$\underline{Edg}(X)$	X kümesinin R bağıntısına göre iç sınırı
$\overline{Edg}(X)$	X kümesinin R bağıntısına göre dış sınırı
$-X$ ve X^c	X kümesinin tümleyeni
$POS(X)$	X kümesinin R bağıntısına göre pozitif bölgesi
$NEG(X)$	X kümesinin R bağıntısına göre negatif bölgesi
$\mu_X^R(x)$	X kümesinin R bağıntısına göre rough üyelik fonksiyonu
R_τ	τ ile oluşturulan denklik bağıntısı
$RO(U)$	U nun topolojik rough sınıfı
U/R	R denklik bağıntısının denklik sınıflarının kümesi
$A^b{}_\tau$	A kümesinin τ topolojisine göre sınırı
$\overline{A}_\tau$	A kümesinin τ topolojisine göre kapanışı
$A^\circ{}_\tau$	A kümesinin τ topolojisine göre içi
$P(U)/R_\tau$	(U, τ) topolojik uzayındaki topolojik rough sınıfları
$[P(U)/R_\tau]_X$	(U, τ) daki alttopolojik rough sınıfları
$P(X)/R_{\tau_X}$	(U, τ) daki rölatif topolojik rough sınıfları
$r_R(x)$	$x \in U$ nun sağ komşuluğu
R_s	R bağıntısının geçişme ifadesi
$\underline{X}$	Sağ komşuluklara göre alt yaklaşım kümesi
$\overline{X}$	Sağ komşuluklara göre üst yaklaşım kümesi
$N(x)$	x in örtülerle tanımlanan komşuluğu
$IL_C(X)$ ve X_+	C örtüsüyle oluşturulan alt yaklaşım kümesi
$IH_C(X)$ ve X^+	C örtüsüyle oluşturulan üst yaklaşım kümesi
$reduct(C)$	C örtüsünün indirgeyeni

ŞEKİLLER DİZİNİ

ÇİZELGELER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Rough küme 1982'de Pawlak tarafından kesin olmayan bilginin belirsizliği ve anlaşılmazlığıyla ilgili bir araç olarak tanıtıldı. Bu teorinin obje sınıflandırmasının temeli bir denklik bağıntısıdır. Teorinin esas kavramı, bir uzay üzerinde bir denklik bağıntısıyla oluşturulan alt ve üst yaklaşım operatörleridir. Yıllardır rough kümeleri; belirsiz veya kesin olmayan bilginin tanımlanması, bilgi analizleri, bilgi bağımlılığının değerlendirilmesi ve tanımlanması, belirsiz ve eksik bilgi verisine dayanan akıl yürütme gibi çeşitli problemlerin çözümünde değerli bir araç oldu.

Rough küme teorisinde Pawlak'ın bahsettiği uzay, topolojisi R nin denklik sınıflarıyla oluşturulan yaklaşım uzayıdır. Bu uzay her açık kümenin kapalı olduğu Clopen topolojisi olarak bilinen özel bir sınıfa aittir. Clopen topolojisi geçişken yaklaşımların bir türüdür. Bu topolojik uzay çok sınırlayıcıdır. Lin (1988) genel durumlardan söz edebilmek için komşuluk sistemini tanıttı.

Yao (1998), sağ komşuluk üzerine kurulu yeni bir tip rough küme tanıttı ve Lashin *et al.* (2005), bir elemanın bu elemanı içeren sağ komşuluklarını bir alt taban kabul ederek Yao tarafından tanımlanan rough küme için bir topoloji üretti. Kondo (2006), bir genelleştirilmiş rough küme üzerinde her yansımalı bağıntının bir topoloji üretebileceğini ispatladı.

Zhu (2007), komşuluk denilen topolojik bir kavramdan yeni bir tip örtü tabanlı rough küme tanıttı. Thuan (2009) bir örtü rough kümeler ailesi için topolojik yapı metodu tanıttı ve bu topolojik uzay üzerine kurulu bazı üst yaklaşımları kıyasladı.

Li (2010) bir bağıntının geçişme ifadesi kavramını tanıttı ve rough kümelerin topolojik özellikleri üzerine pek çok ilginç sonuç elde etti. Mahanta and Das (2011) bir bağıntının geçişme ifadesi fikrinin sonucu olan geçişen sağ komşuluk kavramını tanıttı ve genelleştirilmiş rough kümelerin topolojik özellikleri üzerine bazı sonuçlar elde etti.

Sunulan bu tez, Giriş, Kuramsal Temeller, Materyal ve Yöntemler, Araştırma Bulguları ve Tartışma ve Sonuçlar olmak üzere beş bölümden oluşmaktadır.

Kuramsal Temeller bölümünde, ilk olarak çalışmada kullanılan temel topolojik kavramlar tanıtıldı. Sonrasında ise Pawlak Rough kümelerinin ve topolojik rough kümelerinin tanımları ve temel özellikleri verilmiştir.

Materyal ve Yöntemler bölümünde, ilk olarak topolojik uzaylarda rough kümeleri ele alan çalışmalara yer verilmiştir. Ayrıca orijinal rough üyelik fonksiyonunun topolojik uzaylara genişletilmesiyle elde edilen rough kümeler tanıtılmıştır. Daha sonra topolojik rough sınıfları kavramından hareketle rölatif topolojik rough sınıfı tanımı verilmiştir. Sonrasında Yao'nun sağ komşuluklar üzerine kurduğu yeni bir tip rough küme ve bu rough kümeleri kurmak için kullandığı geçişme ifadesi kavramı tanıtılmıştır. Yao tarafından çalışılan bu rough kümeler üzerinden tanımlanan topoloji verilmiştir. Ayrıca bu rough kümelerin bazı topolojik özellikleri incelenmiştir. Son olarak komşuluk kavramından hareketle yeni bir tip örtü tabanlı rough küme tanıtılarak, bu yeni tip rough kümelerin alt ve üst yaklaşım işlemleri arasındaki ilişki verilmiştir. Aynı alt yaklaşım işlemini üreten iki örtü altındaki durumlar ve aynı üst yaklaşım işlemini üreten iki örtü altındaki durumlar incelenmiştir.

Araştıma bulguları ve tartışma bölümünde, Yao'nun sağ komşuluklar üzerine kurduğu yaklaşımlar ile Zhu'nun örtüler üzerine kurduğu yaklaşımlar arasındaki ilişki araştırıldı. Ayrıca keyfi ikili bağıntılarla oluşturulan rough kümelerin bazı özellikleri verildi.

Sonuçlar bölümünde, bir önceki bölümlerde incelenen kavramlar ve bu kavramlarla ilgili bazı sonuçlar özet halinde verilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Topolojik Kavramlar

Tanım 2.1.1: X ve Y boştan farklı kümeler olsun. X in her bir x elemanına Y nin bir y elemanını karşılık getiren bir kurala X den Y ye bir bağıntı denir. X den X e bir R bağıntısına X de bir bağıntı denir (Koçak 2011).

Tanım 2.1.2: X boş olmayan bir küme ve R de X de bir bağıntı olsun. Eğer R, X de yansıyan, simetrik ve geçişken bir bağıntı ise R ye bir denklik bağıntısı denir. xRy olan X deki tüm y elemanlarının R bağıntısına göre x in denklik sınıfları denir. $[x]$ ile gösterilir (Koçak 2011).

Tanım 2.1.3: (X, τ) bir topolojik uzay, $A \subseteq X$ ve $a \in A$ olsun. Eğer $a \in G_a \subseteq A$ olacak şekilde bir $G_a \in \tau$ açık kümesi varsa A kümesine a nın bir komşuluğu denir. Eğer özel olarak A açık ise A ya bir açık komşuluk denir (Mucuk 2009).

Tanım 2.1.4: (X, τ) bir topolojik uzay ve β da açık kümelerin bir sınıfı olsun. τ nun her elemanı β koleksiyonuna ait olan elemanların birleşimi olarak yazılabiliyorsa β ya τ topolojisinin bir tabanı denir. Yani, $\beta \subseteq \tau$ olsun. $U \in \tau$ ise $i \in I$ için $B_i \in \beta$ olmak üzere $U = \bigcup_{i \in I} B_i$ olacak şekilde bir I indis kümesi varsa β ya τ topolojisinin bir tabanı denir (Koçak 2011).

Tanım 2.1.5: (X, τ) bir topolojik uzay ve S, X in bazı açık altkümelerinin bir sınıfı olsun. Eğer S sınıfındaki kümelerin sonlu kesişimlerinden elde edilen β sınıfı τ için bir taban oluşturuyorsa S sınıfına τ topolojisi için bir alttaban denir (Mucuk 2009).

Tanım 2.1.6: (X, τ) bir topolojik uzay, $x \in X$ ve β_x de x noktasını içeren açık kümelerin sınıfı olsun. $x \in U$ özelliğindeki her $U \in \tau$ için $B \subseteq U$ olacak şekilde bir

$B \in \beta_x$ varsa β_x sınıfına x noktasının komşuluklarının bir tabanı veya x noktasının bir lokal tabanı denir. Yani,

i) $\beta_x \subseteq \tau$ dur,
ii) $B \in \beta_x$ ise $x \in B$ dir,
iii) $x \in U$ özelliğindeki her $U \in \tau$ için $B \subseteq U$ olacak şekilde bir $B \in \beta_x$ vardır.

şartları sağlanıyorsa β_x koleksiyonuna x noktasının komşuluklarının bir tabanı veya x noktasının bir lokal tabanı denir (Koçak 2011).

Tanım 2.1.7: (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Her $x \in X$ noktasının sayılabilir bir lokal tabanı varsa (X, τ) uzayına birinci sayılabilir uzay denir (Koçak 2011).

Tanım 2.1.8: (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer bu uzayın sayılabilir bir tabanı varsa bu uzaya ikinci sayılabilir uzay denir (Mucuk 2009).

Tanım 2.1.9: (X, τ) bir topolojik uzay, $A \subseteq X$ ve $\mathcal{G}$ de X in altkümelerinin bir sınıfı olsun. Eğer $A \subseteq \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G$ ise $\mathcal{G}$ sınıfına A nın bir örtüsü denir. Burada özel olarak $X = \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G$ ise $\mathcal{G}$ sınıfına X in bir örtüsü denir. Eğer $\mathcal{G}$ deki tüm kümeler açık ise $\mathcal{G}$ sınıfına A nın bir açık örtüsü denir. Bir $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$ sınıfı A nın bir örtüsü olmak üzere eğer $\mathcal{G}$ örtüsünün bir $\mathcal{G}'$ alt sınıfı da aynı zamanda A nın bir örtüsü ise bu $\mathcal{G}'$ alt sınıfına A nın bir alt örtüsü adı verilir (Mucuk 2009).

Tanım 2.1.10: (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Eğer A kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa A ya bir kompakt küme denir. Özel olarak eğer X in her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa (X, τ) uzayına bir kompakt uzay denir (Mucuk 2009).

Tanım 2.1.11: Bir (X, τ) topolojik uzayı verilsin. Eğer her bir $x \in X$ noktasının kompakt olan bir K komşuluğu varsa bu uzaya lokal kompakt uzay denir (Mucuk 2009).

Tanım 2.1.12: (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Birleşimleri X olan ayrık açık U, V kümelerine X in bir ayrışımı denir. Eğer X in bir ayrışımı yoksa bu uzaya bağlantılı uzay denir (Munkres 2000).

Tanım 2.1.13: (X, τ) bir topolojik uzayı verilsin. Eğer her $x \in X$ noktasının X de bağlantılı kümelerden oluşan bir komşuluk tabanı varsa (X, τ) uzayına lokal bağlantılı uzay denir (Yüksel 2011).

Tanım 2.1.14: (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Eğer $\overline{A} = X$ ise A ya X de yoğun küme denir. X in sayılabilir yoğun bir altkümesi varsa bu uzaya ayrılabilir uzay denir (Yüksel 2011).

Tanım 2.1.15: (X, τ) bir topolojik uzay, $x \in X$ ve $A \subseteq X$ olsun. $x \in U \subseteq A$ olacak şekilde bir U açık kümesi varsa x noktasına A nın bir iç noktası denir. A nın bütün iç noktalarının kümesine A nın içi denir ve A^o ile gösterilir. Yani,

$$A^o = \{x \in X : x \in U \subseteq A \text{ özelliğinde en az bir } U \in \tau \text{ vardır}\}$$

olarak tanımlanır (Koçak 2011).

Tanım 2.1.16: (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. A kümesini kapsayan en küçük kapalı kümeye A nın kapanışı denir, $\overline{A}$ ile gösterilir (Mucuk 2009).

Tanım 2.1.17: (X, τ) bir topolojik uzay olsun. X kümesinin her farklı nokta çiftinden en az birini içeren diğerini içermeyen bir açık küme varsa bu uzaya T_0-uzayı denir. Diğer bir deyişle $x \neq y$ özelliğindeki her $x, y \in X$ noktaları için,

$$x \in U \text{ ve } y \notin U \text{ veya } y \in U \text{ ve } x \notin U$$

olacak şekilde bir $U \in \tau$ varsa bu uzaya T_0-uzayı denir (Koçak 2011).

Tanım 2.1.18: (X,τ) bir topolojik uzay olsun. X kümesinin her farklı nokta çifti için, bu noktaları ayrı ayrı içeren iki açık küme varsa bu uzaya T_1-uzayı denir. Diğer bir deyişle $x \neq y$ özelliğindeki her $x, y \in X$ noktaları için,

$$x \in U, y \notin U \text{ ve } y \in V, x \notin V$$

olacak şekilde $U, V \in \tau$ kümeleri varsa bu uzaya T_1-uzayı denir (Koçak 2011).

Tanım 2.1.19: (X,τ) bir topolojik uzay olsun. X kümesinin her farklı nokta çifti için, bu noktaları ayrı ayrı içeren ayrık ve açık iki küme varsa bu uzaya T_2-uzayı veya Hausdorff uzay denir. Bir başka değişle, $x \neq y$ özelliğindeki her $x, y \in X$ için,

$$x \in U, y \in V \text{ ve } U \cap V = \emptyset$$

olacak şekilde $U, V \in \tau$ kümeleri varsa (X,τ) uzayına T_2-uzayı veya Hausdorff uzayı denir (Koçak 2011).

Tanım 2.1.20: (X,τ) bir topolojik uzay olsun. X kümesinin her K kapalı kümesi ve $x \notin K$ özellikli her $x \in X$ için $K \subseteq U$ ve $x \in V$ olacak şekilde U ve V ayrık açık kümeleri varsa bu uzaya regüler uzay denir. (Mucuk 2009).

Tanım 2.1.21: Regüler olan bir T_1-uzayına T_3-uzayı denir (Mucuk 2009).

Tanım 2.1.22: (X,τ) bir topolojik uzay olsun. $K_1, K_2 \subseteq X$ ayrık kapalı kümeler olmak üzere $K_1 \subseteq U$ ve $K_2 \subseteq V$ olacak şekilde X in U ve V ayrık açık alt kümeleri varsa bu uzaya normal uzay denir (Mucuk 2009).

Tanım 2.1.23: Normal olan bir T_1-uzayına T_4-uzayı denir (Mucuk 2009).

Tanım 2.1.24: X boştan farklı bir küme olsun. $d: X \times X \to [0, +\infty]$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlarsa d ye X üzerinde bir pseudo-metrik dönüşüm denir. $\forall x, y, z \in X$ için,

i) $d(x, x) = 0$
ii) $d(x, y) = d(y, x)$
iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Engelking 1977).

Tanım 2.1.25: $\forall x \in X$, $r > 0$ için $B(x, r) = \{y: y \in X, d(x, y) \leq r\}$ verilsin. Eğer $B(x, r) = \{y: y \in X, d(x, y) \leq r\}$ (X, τ) nun bir tabanını oluşturacak şekilde bir d pseudo-metrik dönüşümü varsa, (X, τ) topolojik uzayına pseudo -metriklenebilir uzay denir (Engelking 1977).

Tanım 2.1.26: (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Bu durumda A üzerindeki $\tau_A = \{U \cap A: U \in \tau\}$ topolojisine τ dan A üzerine indirgenmiş topoloji veya alt uzay topolojisi denir. (A, τ_A) uzayına da (X, τ) uzayının bir alt uzayı denir (Mucuk 2009).

Tanım 2.1.27: (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer X deki her açık küme kapalı ve her kapalı küme açık ise bu uzaya quasi-diskret topolojik uzay denir (Cech 1966).

2.2. Pawlak Rough Kümeler

Tanım 2.2.1: U bir evrensel küme olsun ve bir $R \subset U \times U$ denklik bağıntısı verilsin. Bu durumda $A = (U, R)$ ikilisine yaklaşım uzayı denir (Pawlak 1982).

Tanım 2.2.2: $A = (U, R)$ bir yaklaşım uzayı olsun. R denklik bağıntısının U/R denklik sınıflarına A daki elementer kümeler (atomlar) denir (Pawlak 1982).

Tanım 2.2.3: $A = (U, R)$ bir yaklaşım uzayı olsun. A daki elementer kümelerin her sonlu birleşimi A da kompoze (oluşmuş) küme olarak adlandırılır. A daki bütün kompoze kümelerinin ailesi $com(A)$ ile gösterilir. $A = (U, R)$ yaklaşım uzayındaki $com\ (A)$ ailesi U kümesi üzerinde bir topolojidir (Pawlak 1982).

Tanım 2.2.4: $A = (U, R)$ bir yaklaşım uzayı, X de U nun bir altkümesi olsun. X i kapsayan A daki en küçük kompoze kümeye X in A daki en iyi üst yaklaşımı denir. $\overline{R}(X)$ ile gösterilir. X de içerilen A daki en büyük kompoze kümeye de X in A daki en iyi alt yaklaşımı denir ve $\underline{R}(X)$ ile gösterilir. $U/R = \{R_x : x \in U\}$ olmak üzere, bu kümeler

$$\underline{R}(X) = \bigcup \{R_x \in U/R : R_x \subseteq X\},$$

$$\overline{R}(X) = \bigcup \{R_x \in U/R : R_x \cap X \neq \emptyset\}$$

şeklinde yazılır (Pawlak 1982).

Tanım 2.2.5: X bir $A = (U, R)$ yaklaşım uzayının bir altkümesi olsun.

$$Bnd(X) = \overline{R}(X) - \underline{R}(X)$$

kümesine X in A daki sınırı denir. Ayrıca,

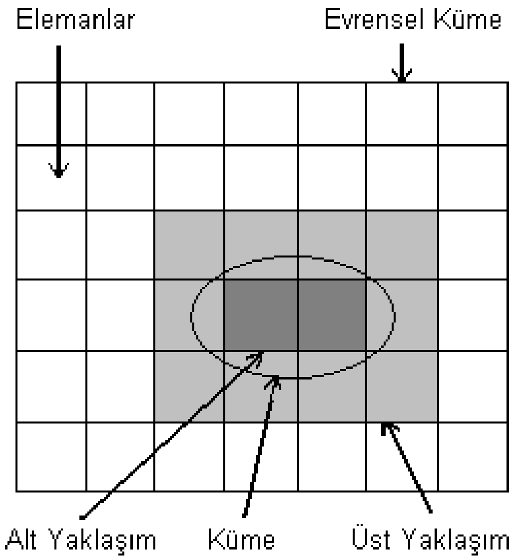
$$\underline{Edg}(X) = X - \underline{R}(X) \text{ ve } \overline{Edg}(X) = \overline{R}(X) - X$$

kümeleri de sırasıyla X in A daki iç ve dış sınırları olarak adlandırılır (Pawlak 1982).

Bir $A = (U, R)$ yaklaşım uzayının bir X altkümesi için,

$$Bnd(X) = \overline{Edg}(X) \cup \underline{Edg}(X)$$

olur. $A = (U, R)$ yaklaşım uzayı için tek bir $\big(U, com(A)\big)$ topolojik uzayı tanımlandığından ve $com(A)$, τ_R deki tüm açık kümelerin ailesi ve U/R ,τ_R için bir taban olduğundan, τ_R, U üzerinde bir quasi-diskret topolojidir ve $com(A)$ da τ_R deki hem açık hem de kapalı kümelerdir. Böylece $\underline{R}(X)$ ve $\overline{R}(X)$, τ_R topolojisinde X kümesinin sırasıyla içi ve kapanışı olarak yorumlanır.



Şekil 2.1. Alt ve üst yaklaşım kümeleri

Tanım 2.2.6: X bir $A = (U, R)$ yaklaşım uzayının bir altkümesi olsun. Bu durumda,

$$POS(X) = \underline{R}(X)$$

$$NEG(X) = U - \overline{R}(X)$$

kümelerine sırasıyla X in pozitif ve negatif bölgeleri denir (Lashin *et al.* 2005).

Tanım 2.2.7: (U, R) bir yaklaşım uzayı olsun. R_x, $x \in U$ yu içeren denklik sınıflarını göstermek üzere,

$$\mu_X^R(x) = \frac{|R_x \cap X|}{|R_x|}\,, \qquad x \in U$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona üyelik fonksiyonu denir (Lashin *et al.* 2005).

Üyelik fonksiyonu, şartlı olasılığın bir türüdür ve değeri x in X e ait olma kesinliğinin bir derecesi olarak yorumlanır. Üyelik fonksiyonu aracılığıyla sınır, pozitif ve negatif bölgeler aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

Önerme 2.2.8: $X,\ A = (U, R)$ yaklaşım uzayının bir altkümesi olmak üzere,

$$BND(X) = \{x \in U: 0 < \mu_X^R(x) < 1\}$$

$$POS(X) = \{x \in U: \mu_X^R(x) = 1\} = \underline{R}(X)$$

$$NEG(X) = \{x \in U: \mu_X^R(x) = 0\}$$

$$\overline{R}(X) = \{x \in U: \mu_X^R(x) > 0\}$$

$$NEG(X) = U - \overline{R}(X)$$

olur (Lashin *et al.* 2005).

Tanım 2.2.9: $A = (U, R)$ bir yaklaşım uzayı ve $X,\ U$ nun bir altkümesi olsun. X kümesinin A da rough olarak adlandırılması için gerek ve yeter şart $\overline{R}(X) \neq \underline{R}(X)$ olmasıdır. Aksi takdirde X e A da bir tam küme denir (Pawlak 1982).

Üyelik fonksiyonu aracılığıyla rough küme aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.2.10: (U, R) bir yaklaşım uzayı X, U nun bir altkümesi olsun. $0 < \mu_X^R(x) < 1$ olacak şekilde $\exists x \in X$ varsa, X e A da rough küme denir (Pawlak 1982).

Örnek 2.2.11: $U = \{1,2,3,4,5,6\}$ kümesi,

$R =$
$\{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3), (4,4), (4,5), (5,4), (5,5), (6,6)\}$
denklik bağıntısı ile verilsin. Bu durumda $A = (U, R)$ bir yaklaşım uzayıdır. A nın atomlarının kümesi $U/R = \{\{1,2,3\}, \{4,5\}, \{6\}\}$ dir. $X = \{1,2,3,4\}$ için $\underline{R}(X) = \{1,2,3\}$ ve $\overline{R}(X) = \{1,2,3,4,5\}$ dir. Yani A da $\overline{R}(X) \neq \underline{R}(X)$ olur. O halde X , $A = (U, R)$ de bir rough kümedir. $Y = \{1,2,3\}$ için, $\overline{R}(Y) = \underline{R}(Y) = \{1,2,3\}$ olduğundan Y, A da bir tam kümedir.

Önerme 2.2.12: $A = (U, R)$ bir yaklaşım uzayı, X ve Y, U nun altkümeleri olsun. Bu durumda,

i) $\underline{R}(X) \subset X \subset \overline{R}(X)$
ii) $\underline{R}(U) = \overline{R}(U) = U$, $\underline{R}(\emptyset) = \overline{R}(\emptyset) = \emptyset$
iii) $\overline{R}\left(\overline{R}(X)\right) = \underline{R}\left(\overline{R}(X)\right) = \overline{R}(X)$
iv) $\underline{R}\left(\underline{R}(X)\right) = \overline{R}\left(\underline{R}(X)\right) = \underline{R}(X)$
v) $\overline{R}(X \cup Y) = \overline{R}(X) \cup \overline{R}(Y)$
vi) $\underline{R}(X \cap Y) = \underline{R}(X) \cap \underline{R}(Y)$
vii) $\overline{R}(X \cap Y) \subset \overline{R}(X) \cap \overline{R}(Y)$
viii) $\underline{R}(X \cup Y) \supset \underline{R}(X) \cup \underline{R}(Y)$
ix) $\overline{R}(X - Y) \supset \overline{R}(X) - \overline{R}(Y)$
x) $\underline{R}(X - Y) \subset \underline{R}(X) - \underline{R}(Y)$
xi) $\underline{R}(-X) = -\overline{R}(X)$
xii) $\overline{R}(-X) = -\underline{R}(X)$

xiii) $X \subseteq Y \Rightarrow \underline{R}(X) \subseteq \underline{R}(Y)$

xiv) $X \subseteq Y \Rightarrow \overline{R}(X) \subseteq \overline{R}(Y)$

xv) $\underline{R}\left(-\underline{R}(X)\right) = -\underline{R}(X)$

xvi) $\overline{R}\left(-\overline{R}(X)\right) = -\overline{R}(X)$

xvii) $\forall K \in U/R\,,\ \underline{R}(K) = K$

xvii) $\forall K \in U/R\,,\ \overline{R}(K) = K$

özellikleri sağlanır (Pawlak 1982).

2.3. Denklik Bağıntılarıyla Oluşturulan Topolojik Rough Kümeler

Bu kısımda, topolojik rough küme kavramı tanıtılacak ve bu kümenin Pawlak rough kümesiyle ilgisi araştırılacaktır.

Tanım 2.3.1: (U,τ) bir topolojik uzay olsun. τ topolojisi ile, P(U) kuvvet kümesi üzerinde,

$$(X,Y) \in R_\tau \Leftrightarrow X^o = Y^o \text{ ve } \overline{X} = \overline{Y}$$

olacak şekilde R_τ denklik bağıntısı tanımlanır (Salama 2011).

Tanım 2.3.2: (U,τ) bir topolojik uzay olsun. Unun X ve Y altkümeleri verilsin. Eğer$\forall\, X,Y \subset RO(U)$ için $X^o = Y^o$ ve $\overline{X} = \overline{Y}$oluyorsa U nun $RO(U)$ sınıfına bir topolojik rough sınıfı denir (Salama 2011).

Örnek 2.3.3: $U = \{1,2,3\}$, $\tau = \{U, \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$ topolojisiyle verilsin. Bu durumda, R_τ denklik bağıntısının denklik sınıfları,

$$P(U)\ /\ R_\tau = \{\{\{1\},\{1,3\}\},\{\{2\},\{2,3\}\},\{3\},\{1,2\}\}$$

şeklindedir. Burada, $P(U)/R_\tau$ nun her elemanı bir topolojik rough sınıfıdır.

Örnek 2.3.4: R, bir U kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı ve τ da $x \in X$ ve $(x,y) \in R \Rightarrow y \in X$ olacak şekildeki U nun bütün X altkümelerinin kümesi olsun. Bu durumda τ bir quasi-diskret topolojidir ve (U,τ) topolojik uzayındaki topolojik rough kümeleri, $A = (U,R)$ yaklaşım uzayındaki Pawlak rough kümeleriyle aynıdır (Salama 2011).

Örnek 2.3.5: $U = \{3,4,5,6,7\}$, $R = \{(x,y){:}\, x$ ile y nin 3 ile bölümünden kalanlar eşittir. $\}$ denklik bağıntısıyla verilsin. Bu durumda R nin denklik sınıfları, $U/R = \{\{3,6\},\{4,7\},\{5,8\}\}$ olur. O halde, R denklik bağıntısıyla oluşturulan quasi-diskret topoloji,

$$\tau_R = \{U,\emptyset,\{3,6\},\{4,7\},\{5,8\},\{3,4,6,7\},\{3,5,6,8\},\{4,5,7,8\}\}$$

şeklindedir.

Pawlak'ın genişletme terminolojisi ve Örnek 2.3.5'e göre,

(i) $X \notin \tau_R$ olan U nun herhangi bir X altkümesi bir rough kümesidir. Örneğin, $X = \{3,5,6\}$ altkümesi için $X^\circ = \{3,6\}$ ve $\overline{X} = \{3,5,6,8\}$ olduğundan X bir rough kümedir.
(ii) $X = \{3,5,6\}$ rough kümesindeki "3" ve "6" elemanları, $3 \in X^o$ve $6 \in X^o$özelliklerini sağladıkları için kesin olarak X kümesine aittir. Fakat "5" elemanı için $5 \notin X^o$ve $5 \in \overline{X}$ özellikleri sağlandığından 5 elemanı muhtemelen kümeye aittir.

Lemma 2.3.6: U kümesi üzerindeki herhangi bir τ topolojisi ve U daki her x, y için, $x \in \overline{\{y\}}$ ve $y \in \overline{\{x\}}$ ise $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$ dır (Salama 2011).

Lemma 2.3.7: τ, U kümesinde bir quasi-diskret topoloji ise, bu durumda $\forall\ x, y \in U$ için $y \in \overline{\{x\}}$ iken $x \in \overline{\{y\}}$ dir (Salama 2011).

Önerme 2.3.8: Eğer $\tau,\ U$ kümesi üzerinde bir quasi-diskret topoloji ise, $\left\{\overline{\{x\}}: x \in U\right\}$ ailesi U nun bir parçalanışıdır (Salama 2011).

İspat: Kabul edelim ki $C = \left\{\overline{\{x\}}: x \in U\right\}$ olsun. Bu durumda,

(i) $\forall x \in U$ için $x \in \overline{\{x\}}$ olduğundan $\bigcup_{x \in U} \overline{\{x\}} = U$ olur.
(ii) Herhangi $x, y \in U$ için ya $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$ veya $\overline{\{x\}} \cap \overline{\{y\}} = \emptyset$ dir.

Eğer $\overline{\{x\}} \cap \overline{\{y\}} \neq \emptyset$ ise, $z \in \overline{\{x\}}$ ve $z \in \overline{\{y\}}$ olacak şekilde bir $z \in U$ vardır. Lemma 2.3.6 ve Lemma 2.3.7 den $x \in \overline{\{z\}}$ ve $y \in \overline{\{z\}}$ olur. Buradan $\overline{\{z\}} = \overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$ yazılır. Böylece $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$ veya $\forall\ x \neq y$ için $\overline{\{x\}} \cap \overline{\{y\}} = \emptyset$ olur. O halde C , U nun bir parçalanışıdır.

Önerme 2.3.9: U üzerindeki her bir quasi-diskret τ topolojisi için, U nun bir X altkümesinin açık olması için gerek ve yeter şart "$x \in X,\ (x, y) \in R \Rightarrow y \in X$" olacak şekilde U üzerinde bir R denklik bağıntısının bulunmasıdır (Salama 2011).

İspat : $R = \left\{(x, y): x, y \in U\ ve\ x \in \overline{\{y\}}\right\}$ ile tanımlanan R bağıntısı önermenin şartını sağlayan bir denklik bağıntısıdır.

Teorem 2.3.10: Pawlak rough kümeleri bir quasi-diskret topolojideki rough kümeleri ile tamamen aynıdır (Salama 2011).

İspat: Önerme 2.3.8'den görülür.

Örnek 2.3.11: $U = \{1,2,3,4\}$, $R = \{(1,1),(1,3),(2,2),(3,1),(3,3),(4,4)\}$ denklik bağıntısıyla verilsin. Bu durumda, $A = (U,R)$ bir yaklaşım uzayıdır ve $U/R = \{\{1,3\},\{2\},\{4\}\}$ R nin A daki elementer kümelerinin sınıfıdır. $X = \{2,3\} \subset U$ için $\underline{R}(X) = \{2\}$ ve $\overline{R}(X) = \{1,2,3\}$ olur. Yani, X altkümesi $A = (U,R)$ yaklaşım uzayında bir Pawlak rough kümesidir. U/R yi taban kabul eden R tarafından üretilen U üzerindeki topoloji,

$$\tau_R = \{U,\emptyset,\{2\},\{4\},\{1,3\},\{2,4\},\{1,2,3\},\{1,3,4\}\}$$

şeklinde verilir. Bu durumda aynı $X = \{2,3\}$ altkümesi için, $X^{\circ} = \{2\}$ ve $\overline{X} = \{1,2,3\}$

olarak bulunur. Yani, X , (U,τ_R) topolojik uzayında bir rough kümedir. Böylece Pawlak rough kümeleri τ_R quasi-diskret topolojisinin rough kümeleriyle aynıdır.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Topolojik Uzaylarda Rough Kümeler

Bu kısımda topolojik kavramlar üzerinden rough küme özellikleri ifade edilecek. Ayrıca orijinal rough üyelik fonksiyonu topolojik uzaylara genişletilerek bir kümenin rough küme olup olmadığı araştırılacaktır.

Tanım 3.1.1: (U,τ) bir topolojik uzay, $X \subseteq U$ ve X^b, X in sınırı olsun. Eğer $X^b = \emptyset$ ise X e U da tam küme denir. Aksi takdirde X e rough küme denir (Lashin *et al.* 2005).

Önerme 3.1.2: (U,τ) bir topolojik uzay olsun. $X \subseteq U$ nun tam küme olması için gerek ve yeter şart $\overline{X} = X^o$ olmasıdır (Lashin *et al.* 2005).

Bir genel topolojik uzay için $X \subseteq U$ olsun. X aşağıdaki tanımlanabilirlik türlerine sahiptir.

i. Eğer $\overline{X} = X = X^o$ ise, yani X tam küme ise, X tam olarak tanımlanabilirdir.
ii. Eğer $\mathrm{X} = \mathrm{X}^{\mathrm{o}}$, $\mathrm{X} \neq \overline{\mathrm{X}}$ ise X içten tanımlanabilirdir.
iii. Eğer $X \neq X^o$, $X = \overline{X}$ ise X dıştan tanımlanabilirdir.
iv. Eğer $X \neq X^o$, $X \neq \overline{X}$ ise X tanımlanamazdır (Lashin *et al.*2005).

Önerme 3.1.3: Eğer A, (U,τ) da bir tam küme ve $\tau \subseteq \tau'$ ise, A τ' ye göre tamdır (Lashin *et al.* 2005).

Önerme 3.1.4: (U,τ) bir topolojik uzay ve $\tau \subset \tau'$ olsun. τ' deki herhangi bir tam kümenin τ da tam olması için gerek ve yeter şart $\forall G \in \tau'$ için, $\overline{G_\tau} = \overline{G_{\tau'}}$ olmasıdır (Lashin *et al.* 2005).

İspat: A, τ'-tam ise $\overline{A}_{\tau'} = A\ ve\ \overline{A}_{\tau} = A$ olup, $\overline{A}_{\tau} = \overline{A}_{\tau'}$ olur. Tersine, $\overline{A}_{\tau} = \overline{A}_{\tau'}$ ve $A\ \ \tau'$-tam olsun. Bu durumda $A\ \ \tau$-tamdır.

Orijinal rough üyelik fonksiyonu denklik sınıfları kullanılarak tanımlanır. Bu üyelik fonksiyonları topolojik uzaylara genişletilmiştir.

Tanım 3.1.5: Eğer τ tabanı β olan sonlu bir U kümesi üzerinde bir topoloji ise rough üyelik fonksiyonu,

$$\mu_X^{\tau}(x) = \frac{|\{\cap B_x\} \cap X|}{|\cap B_x|}, \quad B_x \in \beta, \qquad x \in U$$

şeklinde tanımlanır (Lashin *et al.* 2005).

Burada $B_x\ , x$ i içeren β nın keyfi bir elemanıdır. Bu sayının tabanın seçiminden bağımsız olduğu gösterilebilir. Çünkü, x i içeren topolojinin bütün elemanlarının arakesiti, x i içeren bir tabanın tüm elemanlarının arakesitine denk olur. Topoloji quasi-diskret olursa x tabanın bir tek elemanına ait olur. Ayrıca, eğer τ diskret topoloji ise yukarıdaki üyelik fonksiyonu klasik küme teorisini, τ quasi-diskret ise rough küme teorisini verir (Lashin *et al.* 2005).

Aşağıdaki örnek yukarıdaki tanımlamaları açıklar.

Örnek 3.1.6: $U = \{0,1,2,3,4,5\}$, $\beta = \big\{\{1\},\{2\},\{3,4\},\{0,2,4\},\{2,3,5\}\big\}$ ve $X = \{0,1,2\}$ olsun. Bu durumda,

$$\mu_X^{\tau}(0) = \frac{|\{0,2,4\} \cap \{0,1,2\}|}{|\{0,2,4\}|} = {}^{2}\!/_{3}\ , \qquad \mu_X^{\tau}(3) = 0,$$

$$\mu_X^{\tau}(1) = 1\ , \qquad\qquad \mu_X^{\tau}(4) = 0\ ,$$

$$\mu_X^\tau(2) = 1\,, \qquad\qquad \mu_X^\tau(5) = 1/3$$

olduğu görülür.

Uzayın sonsuz olması durumunda, bu üyelik fonksiyonu, her bir nokta için yalnız sonlu sayıda minimal komşulukları bulunan lokal sonlu komşuluk sistemlerine sahip uzaylar için kullanılabilir.

Tanım 3.1.7: (U,τ) bir topolojik uzay olsun. $M,N \subset U$ olmak üzere,

i) M bir açık kümedir. Yani $M \in \tau$ dur.
ii) N bir kapalı kümedir. Yani, $N \in \tau^c$ dir.
iii) $M \subset N$
iv) $N - \overline{M}$ kümesi $Z^\circ = \emptyset$ ve $N - \overline{M} \subset \overline{Z}$ şartlarını sağlayan bir Z altkümesi içerir.

şartlarını sağlayan (M,N) ye rough ikilisi denir (Salama 2011).

Önerme 3.1.8: Bir (U,τ) topolojik uzayının herhangi bir X altkümesi için $(X^\circ,\overline{X})$ ikilisi, (U,τ) da bir rough ikilisidir (Salama 2011).

İspat: $M = X^\circ$ ve $N = \overline{X}$ olsun. Bu durumda $M \in \tau$ ve $N \in \tau^c$ olur. $X^\circ \subset X \subset \overline{X}$ olduğundan, $M \subset N$ yazılır. $Z = X - \overline{M}$ altkümesi tanımlansın. $X \subset \overline{X} = N$ olduğundan $X - \overline{M} \subset N - \overline{M}$ olur. Yani $Z \subset N - \overline{M}$ dır. $Z^\circ = \emptyset$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $Z^\circ \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda $G \subset Z = X - \overline{M}$ olacak şekilde bir G açık kümesi vardır. Yani $G \subset X$ ve $G \not\subset \overline{M}$ dir. Buradan $G \subset X$ ve $G \not\subset X^\circ$ elde edilir ki bu bir çelişkidir. Bu durumda $Z^\circ = \emptyset$ olmalıdır. Son olarak, $N - \overline{M} \subset \overline{Z}$ gösterelim. $a \in N - \overline{M}$ olsun. Bu durumda, $a \in N$ ve $a \notin \overline{M}$ olur. Eğer $a \in X$ ise $a \in Z$ dir. Böylece $a \in \overline{Z}$ elde edilir. $a \in G$ ve $a \in \overline{X}$ olacak şekilde bir G açık küme olmak üzere, eğer $a \notin X$, $a \in N = \overline{X}$ ve $a \notin \overline{M}$ ise, bu durumda $\overline{X}$ tanımından

$G \cap X \neq \emptyset$ olur. Ayrıca, $a \in G - \overline{M} = G \cap \overline{[M]}^c$ açık kümesi vardır. Bu durumda, $G \cap \overline{[M]}^c \cap X \neq \emptyset$ olur. Böylece $G \cap \left[X - \overline{M}\right] \neq \emptyset$ elde edilir. Buradan, $G \cap Z \neq \emptyset$ ve $a \in \overline{Z}$ olur. Sonuç olarak,

$$N - \overline{M} \subset \overline{Z}$$

bulunur.

Önerme 3.1.9: (U, τ) topolojik uzayındaki keyfi (M, N) rough ikilisi için $M = X°$ ve $N = \overline{X}$ olacak şekilde U nun bir X altkümesi vardır (Salama 2011).

İspat: (M, N) bir rough ikilisi ve Z, $Z° = \emptyset$, $Z \subset N - \overline{M}$ ve $N - \overline{M} \subset \overline{Z}$ şartlarını sağlayan U nun bir altkümesi olsun. $X = M \cup Z$ ile tanımlansın. Bu durumda, $M = X°$ için $M \subset X°$ ve $X° \subset M$ olduğu gösterilmelidir. $X = M \cup Z$ olduğundan $M \subset X$ dir. Dolayısıyla $M° \subset X°$ olup, $M = M°$ olur. Böylece, $M \subset X°$ elde edilir. $X° \subset M$ olduğunu gösterelim. $a \in X°$ olsun. Bu durumda $a \in X$, yani $a \in M \cup Z$ olur. Buradan aşağıdakiüç durum elde edilir:

(1) $a \in M$
(2) $a \in Z$
(3) $a \in M \cap Z$

Şimdi $M \cap Z = \emptyset$ olduğunu göstererek bu üç durumun sadece iki durumdan ibaret olduğunu ispatlayalım. Bunun için $M \cap Z \neq \emptyset$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $x \in M$ ve $x \in Z$ olacak şekilde bir x elemanı vardır. $Z \subset N - \overline{M}$ olduğundan, $x \in N$ ve $x \notin \overline{M}$ olur. Bu durumda , $x \in M$ ve $x \notin M$ olup, bu bir çelişkidir. O halde, $M \cap Z = \emptyset$ dir. $X = M \cup Z$ olduğundan $M = X - Z$ ve $Z = X - M$ elde edilir. Eğer, (1) $a \in M$ olursa, $X° \subset M$ olur. (2) $a \in Z$ olursa, $a \in X - M$, yani $a \in X$ ve $a \notin M$ olur. Buradan, $a \notin X - Z$, yani $a \notin X$ olur. Böylece $a \notin X°$ elde edilir. Yani, $a \notin M$ ise $a \notin X°$ olup, bu da $X° \subset M$ olduğunu gösterir. $M \subset X°$ ve $X° \subset M$ olduğundan

$M = X^{\circ}$ elde edilir. $N = \overline{X}$ olduğunu gösterelim. $X = M \cup Z$ olduğundan $\overline{X} = \overline{M \cup Z}$ dir. Yani, $\overline{X} = \overline{M} \cup \overline{Z}$ olur. Fakat $M \subset N$ olduğundan $\overline{M} \subset \overline{N}$ olur. Böylece, $\overline{X} \subset \overline{N} \cup \overline{Z}$ olur. Yani, $\overline{X} \subset \overline{N \cup Z}$ dir. Ancak, $Z \subset N - \overline{M}$ olacak şekilde $Z \subset N$ dir. Bu durumda, $\overline{X} \subset \overline{N} = N$ olur.

Diğer taraftan;

$$N = \overline{N} = \overline{\left(\overline{M} \cup \left(N - \overline{M}\right)\right)}$$

$$= \overline{\left(\overline{M}\,\right)} \cup \overline{\left(N - \overline{M}\right)}$$

$$= \overline{M} \cup \overline{\left(N - \overline{M}\,\right)}$$

dir. $N - \overline{M} \subset \overline{Z}$ olduğundan $\overline{\left(N - \overline{M}\right)} \subset \overline{Z}$ olur. Sonuç olarak,

$$N \subset \overline{M} \cup \overline{Z} = \overline{M \cup Z} = \overline{X}$$

elde edilir. Yani $N \subset \overline{X}$ bulunur. Böylece $\overline{X} \subset N$ ve $N \subset \overline{X}$ olduğundan $N = \overline{X}$ olur.

Örnek 3.1.10: $U = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi, $\tau = \left\{U, \emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\right\}$ topolojisiyle verilsin. $X = \{b, c\}$ altkümesi için, $X^{\circ} = \{c\}$, $\overline{X} = \{b, c, d, e\}$ dir. O halde,

$$\left(X^{\circ}, \overline{X}\right) = (\{c\}, \{b, c, d, e\})$$

(U, τ) da bir rough ikilisidir.

Örnek 3.1.11: $U = \{1,2,3,4\}$ kümesi $\tau = \left\{U, \emptyset,\ \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{3,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}\right\}$ topolojisiyle verilsin. Bu durumda, $(\{2\}, \{2,3,4\})$ ve $(\{1\}, \{1,3,4\})$, (U, τ) da birer rough ikilisidir. Fakat, $(\{2\}, \{1,2\})$, (U, τ) da bir rough ikilisi değildir.

Teorem 3.1.12: Herhangi bir (U,τ) topolojik uzayı için, (M,N) ikilisinin bir rough ikilisi olması için gerek ve yeter şart $M = X°$ ve $N = \overline{X}$ olacak şekilde U nun bir X altkümesi olmasıdır (Salama 2011).

İspat: Önerme 3.1.8 ve Önerme 3.1.9 ten ispat görülür.

$(X°,\overline{X})$ rough ikilisine denk gelen X altkümesi aşağıdaki örnekte de gösterildiği gibi (U,τ) topolojik uzayında tek değildir.

Örnek 3.1.13: $U = \{1,2,3,4\}$ kümesi $\tau = \{U, \emptyset, \{1\},\{2\},\{1,2\},\{3,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\}\}$ topolojisiyle verilsin. $(\{2\},\{2,3,4\})$ rough ikilisi için, $X° = Y°$ ve $\overline{X} = \overline{Y}$ olacak şekilde $X = \{2,4\}$ ve $Y = \{2,3\}$ altkümeleri vardır.

Tanım 3.1.14: (U,τ) bir topolojik uzay ve $RO(U)$ sınıfı (U,τ) da topolojik rough sınıfı olsun. $P(U)/R_\tau$, (U,τ) daki topolojik rough sınıflarının kümesi ve $PA\,(U)$ da (U,τ) daki bütün rough ikililerinin kümesi olmak üzere, f fonksiyonu,

$$f: P(U)/R_\tau \to PA(U)\ , \qquad f(X,Y) = (X°,\overline{X}) \quad (X,Y \in RO(U))$$

şeklinde tanımlanır (Salama 2011).

$f(X,Y)$, $RO(U)$ denklik sınıflarındaki X ve Y nin seçiminden bağımsızdır. Aşağıdaki örnekte bu gösterilebilir.

Örnek 3.1.15: $U = \{1,2,3\}$, $\tau = \{U,\emptyset,\{1\},\{1,3\}\}$ topolojisiyle verilsin. Bu durumda,

$$P(U)/R_\tau = \{\{\{1\},\{1,2\}\},\{\{3\},\{2,3\}\},\{2\},\{1,3\}\}$$

$$f(\{\{3\},\{2,3\}\}) = \left(\{3\}^{\circ},\overline{\{3\}}\right) = \left(\{2,3\}^{\circ},\overline{\{2,3\}}\right) = (\emptyset,\{2,3\})$$

olur.

Teorem 3.1.16: Herhangi bir (U,τ) topolojik uzayı için, $X,Y \in RO(U)$olmak üzere, $f((X,Y)) = (X^{\circ},\overline{X})$ fonksiyonu, (U,τ) daki bütün topolojik rough sınıflarının kümesinden, (U,τ) daki bütün rough çiftlerinin kümesine tanımlı 1-1, örten bir fonksiyondur (Salama 2011).

İspat: f nin bire bir olduğunu göstermek için, (X_1,Y_1) ve (X_2,Y_2) , (U,τ) da iki topolojik rough sınıfı ve $f((X_1,Y_1)) = f((X_2,Y_2))$ olsun. Bu durumda, $(X_1{}^{\circ},\overline{Y_1}) = (X_2{}^{\circ},\overline{Y_2})$ olur. Buradan, $X_1{}^{\circ} = X_2{}^{\circ}$ ve $\overline{Y_1} = \overline{Y_2}$ elde edilir. Bu durumda $(X_1,X_2) \in R_{\tau}$ dir ve böylece X_1,X_2 , $P(U)/R_{\tau}$ nun aynı elemanına aittir. Buradan,

$$(X_1,Y_1) = (X_2,Y_2)$$

elde edilir. f nin örten olduğu Önerme 3.1.8'den görülür. Böylece ispat tamamlanır.

3.2. Rölatif Topolojik Rough Sınıfları

Tanım 3.2.1: (U,τ) bir topolojik uzay ve $X \subset U$ için, (X,τ_X) , (U,τ) nun bir altuzayı olsun. X üzerindeki τ_X topolojisi, kuvvet kümesi üzerinde

$$(X_1,X_2) \in R_{\tau_X} \Leftrightarrow X_1{}^{o}{}_{\tau_X} = X_1{}^{o}{}_{\tau_X} \quad \text{ve} \quad \overline{X_1}_{\tau_X} = \overline{X_2}_{\tau_X}, \quad X_1,X_2 \subset P(X)$$

şeklinde tanımlanan R_{τ_X} bağıntısını tanımlar (Salama 2011).

Tanım 3.2.2: Bir (U,τ) topolojik uzay ve $X \subset U$ olmak üzere, (X,τ_X), (U,τ) nun bir altuzayı olsun. $P(X)/R_{\tau_X}$ koleksiyonu, $P(X)$ in bir parçalanışıdır ve herhangi bir $\Gamma \in P(X)/R_{\tau_X}$ sınıfı bir rölatif topolojik rough sınıfı olarak adlandırılır (Salama 2011).

Tanım 3.2.3: (U,τ) bir quasi-diskret topolojik uzay ve $X \subset U$, (U,τ) da bir açık küme olmak üzere, (X,τ_X) , (U,τ) nun bir altuzayı olsun. Eğer $P(U)/R_\tau$, (U,τ) daki tüm topolojik rough sınıflarının koleksiyonu ise, bu durumda,

$$[P(U)/R_\tau]_X = \{X \cap [W]: [W] \in P(U)/R_\tau\}$$

koleksiyonuna (U,τ) daki alttopolojik rough sınıfları denir (Salama 2011).

Önerme 3.2.4: (U,τ) bir quasi-diskret uzay, $(X,\tau_X), (U,\tau)$ nun bir altuzayı ve $X, (U,\tau)$ da bir açık küme olsun. Bu durumda, $P(X)/R_{\tau_X} = [P(U)/R_\tau]_X$ olur (Salama 2011).

İspat: Yukarıdaki eşitlik,

$$[P(U)/R_\tau]_X = \{X \cap [W]: [W] \in P(U)/R_\tau\}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. $[A] \in P(X)/R_{\tau_X}$ olsun. Bu durumda, $A_1{}^\circ{}_{\tau_X} = A_2{}^\circ{}_{\tau_X} = \cdots = A_n{}^\circ{}_{\tau_X}$ ve $\overline{A_1}_{\tau_X} = \overline{A_2}_{\tau_X} = \cdots = \overline{A_n}_{\tau_X}$ olacak şekilde X in, $A_1, A_2, \dots, A_n$ altkümeleri vardır. Aynı zamanda, (U,τ) bir quasi-diskret uzay olduğundan, her bir τ_X -açık ve aynı zamanda τ_X -kapalıdır. X , (U,τ) da hem açık hem kapalı olduğundan, $A_1{}^\circ \cap X = A_2{}^\circ \cap X = \cdots = A_n{}^\circ \cap X$ ve $\overline{A_1} \cap X = \overline{A_2} \cap X = \cdots = \overline{A_n} \cap X$ olur. Yani, $X \cap [W] \in [P(U)/R_\tau]_X$ ve $A = [W] \cap X$ olacak şekilde $[W] \in P(U)/R_\tau$ vardır.

Aşağıdaki örnek, önermedeki topolojinin bir quasi-diskret topoloji olmadığı durumda, U nun X altkümesinin açık ve açık olmadığı durumları ele alır.

Örnek 3.2.5: $U=\{a,b,c,d\}$, $\tau=\{U,\emptyset,\{c\},\{a,b\},\{a,b,c\}\}$ ile verilen bir topolojik uzay ve $X=\{b,c,d\}\subset U$ olsun. Bu durumda, $\tau_X=\{X,\emptyset,\{c\},\{b\},\{b,c\}\}$ ve (X,τ_X), (U,τ) nun bir altuzayı olur. O halde (U,τ) daki rölatif topolojik rough sınıfları,

$$P(X)/R_{\tau_X}=\Big\{\{\{b\},\{b,d\}\},\{\{c\},\{c,d\}\},\{\{d\}\},\{\{b,c\}\}\Big\}$$

ve topolojik rough sınıfları da,

$$P(U)/R_\tau=\Big\{\{\{a\},\{b\},\{a,d\},\{b,d\}\},\{\{c\},\{c,d\}\},\{\{d\}\},\{\{a,b\},\{a,b,d\}\},$$
$$\{\{a,b,c\}\},\{\{a,c\},\{b,c\},\{b,c,d\}\},\{\{a,c,d\}\}\Big\}$$

olur. Bu durumda, (U,τ) daki alt topolojik rough sınıfları da

$$[P(U)/R_\tau]_X=\Big\{\{\{b\},\{d\},\{b,d\}\},\{\{c\},\{c,d\}\},\{\{d\}\},\{\{b\},\{b,d\}\},$$
$$\{\{b,c\}\},\{\{c\},\{b,c\},\{b,c,d\}\},\{\{c,d\}\}\Big\}$$

şeklindedir. $P(X)/R_{\tau_X}\subset[P(U)/R_\tau]_X$ olduğu görüldü. Burada, τ bir quasi-diskret topoloji değildir ve $X\notin\tau$ dir. Aynı zamanda, $\big[P(U)\big)/(R_\tau\big]_X$ in X in bir parçalanışı olmadığı da görülür. $Y=\{a,b,c\}\in\tau$ olsun. O halde (Y,τ_Y), (U,τ) nun bir altuzayıdır. Bu durumda, rölatif topolojik rough sınıfları,

$$P(Y)/R_{\tau_Y}=\Big\{\{\{a\},\{b\}\},\{\{c\}\},\{\{a,b\}\},\{\{a,c\},\{b,c\}\}\Big\}$$

şeklindedir. Alttopolojik rough sınıfları ise,

$$[P(U)/R_\tau]_Y=\Big\{\{\{a\},\{b\}\},\{\{c\}\},\{\{a,b\}\},\{\{a,c\}\},\{\{a,c\},\{b,c\}\}\Big\}$$

olur. Buradan $P(Y)/R_{\tau_Y} \subset [P(U)/R_\tau]_Y$ olduğu görülür (Salama 2011).

Aşağıdaki örnek τ nun bir quasi-diskret topoloji olduğunda X altkümesinin açık ve açık olmadığı durumları ele alır.

Örnek 3.2.6: (U,τ) bir quasi-diskret uzay olsun. Burada,

$$U = \{a,b,c,d\} \; ve \;\; \tau = \big\{U, \emptyset, \{a\}, \{d\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,c,d\}, \{a,b,c\}\big\}$$

dir. Bu durumda, (U,τ) daki topolojik rough sınıfları,

$$P(U)/R_\tau = \Big\{\big\{\{a\}\big\}, \big\{\{b\},\{c\}\big\}, \big\{\{d\}\big\}, \big\{\{a,b\},\{a,c\}\big\}, \big\{\{a,d\}\big\}, \big\{\{b,c\}\big\}, \big\{\{b,d\},\{c,d\}\big\},$$
$$\big\{\{a,b,c\}\big\}, \big\{\{b,c,d\}\big\}, \big\{\{a,b,d\},\{a,c,d\}\big\}\Big\}$$

şeklindedir.

$X = \{a,b,c\} \subset U$ olsun. Bu durumda, $\tau_X = \big\{X, \emptyset, \{a\}, \{b,c\}\big\}$ ve alttopolojik rough sınıfları,

$$[P(U)/R_\tau]_X = \Big\{\big\{\{a\}\big\}, \big\{\{b,c\}\big\}, \big\{\{b\},\{c\}\big\}, \big\{\{a,b\},\{a,c\}\big\}\Big\}$$

olur. Rölatif topolojik rough sınıfları ise,

$$P(X)/R_{\tau_X} = \Big\{\big\{\{a\}\big\}, \big\{\{b\},\{c\}\big\}, \big\{\{a,b\},\{a,c\}\big\}, \big\{\{b,c\}\big\}\Big\}$$

şeklinde olduğundan, $X \in \tau$ için $P(X)/R_{\tau_X} = [P(U)/R_\tau]_X$ elde edilir. Eğer$X^* = \{a,c,d\}$ ve $X^* \notin \tau$ ise, bu durumda $\tau^* = \big\{X^*, \emptyset, \{a\}, \{d\}, \{c\}, \{a,d\}, \{a,c\}, \{c,d\}\big\}$ olacak şekilde, (X^*,τ^*), (U,τ) nun bir altuzayı olur.

Böylece, alttopolojik rough sınıfları,

$$[P(U)/R_\tau]_{X^*} = \Big\{\{\{a\}\}, \{\{c\}\}, \{\{d\}\}, \{\{a\}, \{a,c\}\}, \{\{a,d\}\}, \{\{d\}, \{c,d\}\},$$
$$\{\{a,c\}\}, \{\{c,d\}\}, \{\{a,d\}, \{a,c,d\}\}\Big\}$$

şeklindedir. Rölatif topolojik rough sınıfları ise,

$$P(X^*)/R_{\tau^*} = \Big\{\{\{a\}\}, \{\{c\}\}, \{\{d\}\}, \{\{a,d\}\}, \{\{a,c\}\}, \{\{c,d\}\}\Big\}$$

olur. Buradan,

$$P(X^*)/R_{\tau^*} \subset [P(U)/R_\tau]_{X^*}$$

elde edilir.

Eğer τ bir quasi-diskret uzay ve $X \notin \tau$ ise, $P(X)/R_{\tau_X} \subset [P(U)/R_\tau]_X$ olur. $[P(U)/R_\tau]_X$, genellikle X in bir parçalanışı değildir (Salama 2011).

3.3. Sağ Komşuluklarla Oluşturulan Rough Kümeler

Bu bölümde Yao'nun sağ komşuluklar üzerine kurduğu yeni bir tip rough küme ve bir bağıntının geçişme ifadesi fikrinin sonucu olan geçişmeli sağ komşuluk kavramı tanıtılacaktır. Ayrıca ikili bağıntılar üzerine kurulan genelleştirilmiş rough kümelerin bazı özellikleri verilecektir.

Tanım 3.3.1: U bir küme ve $R \subseteq U \times U$ bir ikili bağıntı olsun. $x, y \in U$elemanları için eğer xRy ise y, x e R-bağlıdır denir. Bu durumda $r_R(x) = \{y \in U: xRy\}$ kümesi $x \in U$ nun sağ komşuluğu olarak adlandırılır. Keyfi bir $X \subseteq U$ için X in alt ve üst yaklaşımları sırasıyla,

$$\underline{X} = \cup_{r_R(x)\subseteq X} r_R(x) \text{ ve } \overline{X} = (\underline{X^c})^c$$

şeklindedir. Eğer $\underline{X} = \overline{X}$ ise X e tam küme denir. Aksi takdirde X in bir rough küme olduğu söylenir (Mahanta and Das 2011).

Tanım 3.3.2: R, U üzerinde bir ikili bağıntı olsun. Bu durumda,

i) R hem yansımalı hem de geçişmeli ise R ye U üzerinde bir benzerlik bağıntısı denir.
ii) R hem yansımalı hem de simetrik ise R ye U üzerinde bir tolerans bağıntısı denir. (Slowinski and Vanderpooten 1995; Skowron and Stepaniuk 1996).

Tanım 3.3.3: R ve R_s, U üzerinde iki ikili bağıntı ve $A \subseteq U$ olsun. $\forall x, y \in U$ için, xR_sy olması için gerek ve yeter şart xRy veya $xRv_1, v_1Rv_2, \dots\dots\dots., v_nRy$ olacak şekilde $\exists \{v_1, v_2, \dots\dots, v_n\} \subset A$ olmasıdır. Bu durumda R_s, R nin A üzerindeki geçişme ifadesi olarak adlandırılır. Eğer R_s, U üzerinde R nin geçişme ifadesi ise R_s ye R nin geçişme ifadesi denir (Li 2010).

Önerme 3.3.4: R, U üzerinde bir yansımalı bağıntı ve R_s, R nin bir geçişme ifadesi olsun. Bu durumda, $\forall x, y \in U$ için xR_sy olması için gerek ve yeter şart $xRv_1, v_1Rv_2, \dots\dots, v_nRy$ olacak şekilde $\exists\{v_1, v_2, \dots.., v_n\} \subset U$ olmasıdır (Li 2010).

İspat: Yeterlilik açıktır. $(\Leftarrow)$

$(\Rightarrow)$ gerekliliği gösterelim. $\forall x, y \in U$ için, xR_sy ise, xRy veya $xRw_1, w_1Rw_2, \dots., w_mRy$ olacak şekilde $\{w_1, w_2, \dots., w_m\}$ vardır. xRy ise, R yansımalı olduğundan, xRx, xRy dir. Burada $\{v_1, v_2, \dots., v_n\} = \{x\}$ olduğundan sonuç doğru olur. Eğer, $xRw_1, w_1Rw_2, \dots., w_nRy$ ise, $\{v_1, v_2, \dots.., v_n\} = \{w_1, w_2, \dots.., w_n\}$ olacağından sonuç yine doğru olur.

Hatırlatma 3.3.5: Önerme 3.3.4 den, her benzerlik bağıntısı bir yansımalı bağıntıyla tek bir şekilde üretilebilir (Li 2010).

Önerme 3.3.6: $R,\ U$ üzerinde bir ikili bağıntı ve $R_s,\ R$ nın geçişme ifadesi olsun. Bu durumda $R_s,\ U$ üzerinde bir geçişmeli bağıntıdır. Ayrıca,

i) R yansımalı ise R_s de yansımalıdır.
ii) R geçişmeli ise $R_s = R$.
iii) R simetrik ise R_s de simetriktir (Li 2010).

İspat: $\forall x, y, z \in U$ için, xR_sy, yR_sz ise bu durumda, xRy veya $xRu_1,\ u_1Ru_2, \ldots\ldots, u_tRy$ olacak şekilde $\{u_1, u_2, \ldots\ldots, u_t\} \subset U$ ve yRz veya $yRw_1, w_1Rw_2, \ldots\ldots, w_rRz$ olacak şekilde $\{w_1, w_2, \ldots\ldots, w_r\} \subset U$ vardır. Eğer xRy, yRz ise $\{v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n\} = \{y\}$, $xRy,\ yRw_1,\ w_1Rw_2, \ldots\ldots, w_rRz$ ise, $\{v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n\} = \{y, w_1, w_2, \ldots\ldots, w_r\}$, $xRu_1,\ u_1Ru_2, \ldots\ldots, u_tRy\ , yRz$ ise, $\{v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n\} = \{u_1, u_2, \ldots\ldots, u_t, y\}$, ve $xRu_1, u_1Ru_2, u_tRy, yRw_1, Rw_2, \ldots\ldots, w_rRz$ ise, $\{v_1, v_2, \ldots., v_n\} = \{u_1, u_2, \ldots, u_t, y,\ w_1, w_2, \ldots., w_r\}$ olur. R_s nin tanımından xR_sz olur. Böylece R_s geçişmelidir.

i) Her bir $x \in U$ için, R yansımalı olduğundan xRx olur. R_s nin tanımından xR_sx olur. Böylece R_s yansımalıdır.
ii) $\forall x, y \in U$ için, xRy ise, R geçişmeli olduğundan, xR_sy olur. Böylece, $R \subset R_s$ elde edilir. xR_sy ise, xRy veya $xRu_1,\ u_1Ru_2, \ldots\ldots, u_tRy$ olacak şekilde $\{u_1, u_2, \ldots\ldots, u_t\} \subset U$ vardır. R geçişmeli olduğundan xRy olur. Böylece $R_s \subset R$ elde edilir. O halde $R_s = R$ olur.
iii) $\forall x, y \in U$ için, xR_sy ise, xRy dir veya $xRv_1, v_1Rv_2, \ldots, v_nRy$ olacak şekilde $\{v_1, v_2, \ldots., v_n\} \subset U$ vardır. R simetrik olduğundan yRx veya $yRv_n,\ v_nRv_{n-1}, \ldots., v_1Rx$ dir. R_s nin tanımından, yR_sx olur. O halde R_s simetriktir.

U bir evrensel küme, R , $A \subseteq U$ üzerinde bir yansımalı ikili bağıntı ve $\tau_R = \{X \subseteq U\colon \underline{X} = X\}$ U nun altkümelerinin bir sınıfı olsun. Bu durumda (U, τ_R) bir topolojik uzaydır (Mahanta and Das 2011).

Önerme 3.3.7: R, U üzerinde bir yansımalı bağıntı ise, bu durumda her $A \subseteq U$ için, $\underline{A} = A$ olması için gerek ve yeter şart $\underline{A^c} = A^c$ olmasıdır (Mahanta and Das 2011).

İspat: $\underline{A} = A$ olsun. $A^c \subseteq \underline{A^c}$ olduğunu göstermek yeterlidir. $y \in A^c$ olsun. Bu durumda,

$$
\begin{aligned}
y \in A^c \;&\Rightarrow y \notin A \\
&\Rightarrow y \notin \cup_{r_R(x) \subseteq A} r_R(x) \\
&\Rightarrow y \in r_R(x)\ ve\ r_R(x) \nsubseteq A \text{ olacak şekilde } \exists\, x \text{ vardır.} \\
&\Rightarrow y \in r_R(x) \subseteq A^c \\
&\Rightarrow y \in \cup_{r_R(x) \subseteq A^c} r_R(x) \\
&\Rightarrow y \in \underline{A^c} \Rightarrow A^c \subset \underline{A^c}
\end{aligned}
$$

bulunur.

Önerme 3.3.8: R, U üzerinde yansımalı bir bağıntı olsun. Bu durumda, (U, τ_R) topolojik uzayı, "$A \subseteq U$ açık olması için gerek ve yeter şart A nın kapalı olmasıdır." özelliğine sahiptir (Mahanta and Das 2011).

İspat: $A \subseteq U$ bir açık kümedir

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow A = \underline{A} \\
&\Leftrightarrow A^c = \underline{A^c} \\
&\Leftrightarrow A^c \text{ açık bir küme} \\
&\Leftrightarrow A \text{ kapalı küme}
\end{aligned}
$$

Tanım 3.3.9: R_s , U üzerindeki yansımalı R bağıntısının geçişme ifadesi olsun. Bu durumda $x \in U$ nun geçişmeli sağ komşuluğu $r_{R_s}(x) = \{y \in U\colon xR_s y\}$ ile tanımlanır (Mahanta and Das 2011).

Lemma 3.3.10: R, U üzerinde bir yansımalı bağıntı ve her bir $x \in U$ için, $L_x = \{y \in U: y \in r_{R_s}(x)\}$ olsun. Bu durumda,

i) $x \in L_x$
ii) $L_x \in \tau_R$
iii) $\{L_x\}$, x in bir açık komşuluk tabanıdır.
iv) L_x , x i içeren tek τ_R-açık kümedir.
v) L_x , (U, τ_R) nin kompakt altkümesidir.
vi) $\mathcal{B}_R = \{L_x : x \in U\}$, (U, τ_R) nin bir tabanıdır (Mahanta and Das 2011).

İspat:
i) R bir yansımalı ikili bağıntı olduğundan $x \in L_x$ olur.
ii) $L_x \subseteq \underline{L_x}$ olduğunu göstermek yeterlidir. $y \in L_x$ olsun. Bu durumda $xRv_1, v_1Rv_2, \dots \dots, v_nRy$ olacak şekilde $\exists \{v_1, v_2, \dots \dots, v_n\} \subset U$ vardır. Buradan, $y \in r_R(v_n)$ olur. $z \in U$ için $z \in r_R(v_n) \Rightarrow v_nRz$ dir. Böylece,

$$
\begin{aligned}
xRv_1, v_1Rv_2, \dots \dots, v_nRz &\Rightarrow xR_sz \\
&\Rightarrow z \in r_{R_s}(x) \\
&\Rightarrow z \in L_x \\
&\Rightarrow r_R(v_n) \subseteq L_x \\
&\Rightarrow y \in \textstyle\bigcup_{r_R(v_n) \subseteq L_x} r_R(v_n) \\
&\Rightarrow y \in \underline{L_x} \Rightarrow L_x \subseteq \underline{L_x}
\end{aligned}
$$

elde edilir.
iii) Her bir $B \in \tau_R$ ve $x \in B$ için $L_x \subseteq B$ olduğunu gösterelim. $y \in L_x$ olsun. Bu durumda, $y \in L_x \Rightarrow y \in r_{R_s}(x) \Rightarrow y \in r_R(x)$ veya $v_1 \in r_R(x), v_2 \in r_R(v_1), \dots., y \in r_R(v_n)$ olacak şekilde $\exists \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ vardır. $\exists\, t \in U$ için, $x \in B = \underline{B} = \bigcup_{r_R(t) \subseteq B} r_R(t)$ dir. Eğer $y \in r_R(x)$ ise iddia ediyoruz ki $y \in B$ dir. Aksini kabul edelim; $\exists m \in U$ için, $y \in B^c \Rightarrow y \in \underline{B^c} \Rightarrow y \in \bigcup_{r_R(m) \subseteq B^c} r_R(m) \Rightarrow y$, m nin bir sağ komşuluğundaysa, bu sağ komşuluk B^c tarafından içerilir. Yani, $y \in$

$r_R(x) \Rightarrow r_R(x) \subseteq B^c$ olur. Ancak $xRx \Rightarrow x \in r_R(x)$ ve $r_R(x) \subseteq B^c \Rightarrow x \in B^c$ olur ki bu bir çelişkidir. Böylece $y \in B$ dir. Eğer $v_1 \in r_R(x), v_2 \in r_R(v_1), \dots\dots, y \in r_R(v_n)$ olacak şekilde $\exists \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ varsa bu durumda yukarıdaki argümandan $v_1 \in r_R(x) \Rightarrow v_1 \in B;\ v_2 \in r_R(v_1) \Rightarrow v_2 \in B; \dots\dots; y \in r_R(v_n) \Rightarrow y \in B$ elde edilir.

iv) B, x i içeren bir τ_R -açık küme olsun. iii)'den $L_x \subseteq B$ olur. $y \in B$ olsun. Bu durumda, $y \in B \Rightarrow y \in \bigcup_{r_R(x) \subseteq B} r_R(x) \Rightarrow xRy \Rightarrow y \in r_{R_s}(x) \Rightarrow y \in L_x \Rightarrow B \subseteq L_x \Rightarrow B = L_x$ elde edilir.

v) $\{G_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, L_x in bir açık örtüsü olsun. Bu durumda, bir $\lambda_i \in \Lambda$ için $x \in G_{\lambda_i}$ olur. Böylece iii) den $L_x \subseteq G_{\lambda_i}$ olur. Dolayısıyla L_x, (U, τ_R) nin bir kompakt altkümesidir.

vi) iii) nin ispatına benzer yapılır.

Hatırlatma 3.3.11:

1) R, U üzerinde bir ikili bağıntı olsun. Eğer $\forall x, y \in U$ için xRy ve yRx ise, bu durumda $L_x = L_y$ dir.

2) Her bir $B \in \mathcal{B}_R$ için, B, $\mathcal{B}_R \setminus \{B\}$ nin bazı elemanlarının birleşimi olarak ifade edilemez. Aksini kabul edersek, $B = \bigcup \mathcal{O}_R$ olacak şekilde $\mathcal{O}_R \subset \mathcal{B}_R \setminus \{B\}$ vardır. $B \in \mathcal{B}_R$ olduğundan $B = L_x$ olacak şekilde $x \in U$ vardır. $x \in B$ olduğu için, $x \in A \subset B$ olacak şekilde $A \in \mathcal{O}_R$ vardır. Lemma 3.3.10 dan, $L_x \subset A$ olup, bu da $B = A$ olduğunu gösterir. Bu bir çelişkidir. O halde $B, \mathcal{B}_R \setminus \{B\}$ nin bazı elemanlarının birleşimi olarak ifade edilemez.

3) $\mathcal{P}_R, (U, \tau_R)$ nin bir tabanı olsun. Bu durumda $\mathcal{B}_R \subset \mathcal{P}_R$ olur. $B \in \mathcal{B}_R, B \notin \mathcal{P}_R$ olduğunu kabul edelim. $B \in \mathcal{B}_R$ olduğundan $B = L_x$ olacak şekilde $x \in B$ vardır. $\mathcal{P}_R$, (U, τ_R) nın bir tabanı olduğundan $B = \bigcup \mathcal{P}'_R$ olacak şekilde $\mathcal{P}'_R \subset \mathcal{P}_R$ vardır. Böylece, bazı $P \in \mathcal{P}'_R$ ler için $x \in P \subset B$ vardır. Lemma 3.3.10 dan $B \subset P$ olup, bu da $B = P \in \mathcal{P}_R$ olduğunu gösterir. Bu bir çelişkidir. O halde $\mathcal{B}_R \subset \mathcal{P}_R$ olur (Li 2010).

Teorem 3.3.12: $(U, \tau_R) = \left(U, \tau_{R_s}\right)$ dir (Mahanta and Das 2011).

İspat: Lemma 3.3.10 dan $B_R = \{L_x : x \in U\}$ nin (U, τ_R) nin bir tabanı olduğu görülür. $\mathcal{B}_R = \{L_x : x \in U\}$ nin aynı zamanda $\left(U, \tau_{R_s}\right)$ nin de bir tabanı olduğunu göstermeliyiz.

Bunun için, **i)** $L_x \in \tau_{R_s}$ ve **ii)** Keyfi $x \in G \in \tau_{R_s}$ için $x \in L_x \subset G$ olduğunu göstermeliyiz.

i) $\bigcup_{r_{R_s}(x) \subseteq L_x} r_{R_s}(x) \subseteq L_x$ olduğunu biliyoruz. $y \in L_x$ olsun. Bu durumda, $y \in L_x \Rightarrow y \in r_{R_s}(x)$ olur. Herhangi bir $z \in U$ için, $z \in r_{R_s}(x)$ olsun. Bu durumda, $z \in r_{R_s}(x) \Rightarrow z \in L_x \Rightarrow y \in \bigcup_{r_{R_s}(x) \subseteq L_x} r_{R_s}(x) \Rightarrow L_x \subseteq \bigcup_{r_{R_s}(x) \subseteq L_x} r_{R_s}(x)$ olur.

ii) Kabul edelim ki $x \in G \in \tau_{R_s}$ olsun. Her bir $y \in L_x$ için $y \in r_{R_s}(x)$ dir. $x \in G = \bigcup_{r_{R_s}(x) \subseteq G} r_{R_s}(x)$ olduğundan lemma 3.3.10 (iii) den $y \in G$, yani $x \in L_x \subset G$ olur.

Teorem 3.3.13: Eğer (U, τ_R) bir R yansımalı bağıntısıyla oluşturulan topolojik uzay ise, bu durumda,

i) (U, τ_R) birinci sayılabilir uzaydır.

ii) (U, τ_R) bir lokal kompakt uzaydır (Mahanta and Das 2011).

İspat: Sırasıyla**,** Lemma 3.3.10 (iii) ve (v) den görülür.

Teorem 3.3.14: (U, τ_R), U üzerinde bir yansımalı R bağıntısıyla oluşturulan topolojik uzay olsun. Eğer U sayılabilir ise, (U, τ_R) ikinci sayılabilir uzaydır (Li 2010).

İspat: U sayılabilir olsun. Lemma 3.3.10 dan $|\mathcal{B}_R| = |\{L_x : x \in U\}| \leq |U|$ olup, buradan $\mathcal{B}_R$ sayılabilirdir. Böylece (U, τ_R) bir ikinci sayılabilir uzaydır.

Teorem 3.3.15: Eğer (U, τ_R) bir R tolerans bağıntısıyla oluşturulan topolojik uzay ve R_s, R nin geçişme ifadesi ise, bu durumda,

i) $\overline{\{x\}} = L_x$ dir. Burada $\overline{\{x\}}$, x in kapanışıdır.

ii) L_x, x i içeren bir bağlantılı daldır.

iii) L_x, (U, τ_R) nin ayrılabilir bir altkümesidir (Mahanta and Das 2011).

İspat: R bir tolerans bağıntısı ise, bu durumda R_s bir denklik bağıntısıdır. O halde her bir $x \in U$ için $L_x = \{y \in U : y \in r_{R_s}(x)\}$ bir denklik sınıfıdır. Yani $L_x = [x]_{R_s}$ dir.

i) $y \notin L_x$ olacak şekilde $y \in \overline{\{x\}}$ in var olduğunu kabul edelim. Bu durumda $[x]_{R_s} \cap [y]_{R_s} = \emptyset$ olur. y nin bir açık L_y komşuluğu için, eğer $\{x\} \cap L_y = \emptyset$ ise $y \notin \overline{\{x\}}$ olur ki bu da kabulümüzle çelişir. Böylece, $y \in \overline{\{x\}}$ ise $y \in L_x$ dir Dolayısıyla $\overline{\{x\}} \subseteq L_x$ olmalıdır. Diğer taraftan $y \in L_x$ ise $y \in [x]_{R_s}$ dir. $L_x = L_y$ olur. Kabul edelim ki G, y nin bir komşuluğu olsun. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} L_y \subseteq G &\Rightarrow L_y \cap G \neq \emptyset \\ &\Rightarrow L_x \cap G \neq \emptyset \\ &\Rightarrow \{x\} \cap G \neq \emptyset \\ &\Rightarrow y \in \overline{\{x\}} \\ &\Rightarrow L_x \subseteq \overline{\{x\}} \end{aligned}$$

olur.

ii) İlk olarak $L_x = \{y \in U : y \in r_{R_s}(x)\}$ in bir bağlantılı küme olduğunu gösterelim. A, L_x in boş olmayan bir açık ve kapalı altkümesi olsun. Bu durumda $y \in A \subseteq L_x = [x]_{R_s}$ vardır. Bu durumda, $y \in L_y$ ise $L_y = A$ dır. Buradan $[y]_{R_s} = [x]_{R_s}$ olur. Bu da $L_y = L_x = A$ olduğunu gösterir. Böylece L_x bir bağlantılı kümedir. C_x, x i içeren herhangi bir bağlantılı dal olsun. $L_x = C_x$ olduğunu gösterelim. Eğer $L_x \neq C_x$ ise, L_x, C_x in uygun açık ve kapalı altkümesi olur ki bu da C_x in bağlantılı bir küme olmasıyla çelişir. O halde,

$$L_x = C_x$$

olur.

iii) (i) den $\{x\}$ in, L_x in sayılabilir yoğun bir altkümesi olduğu görülür. Böylece L_x, (U, τ_R) nin ayrılabilir altuzayıdır.

Teorem 3.3.16: R bir tolerans bağıntı ise, bu durumda,

i) (U, τ_R) bir regüler uzaydır.
ii) (U, τ_R) bir normal uzaydır.
iii) (U, τ_R) bir lokal bağlantılı uzaydır.
iv) (U, τ_R) bir lokal ayrılabilir uzaydır (Mahanta and Das 2011).

İspat: **i)** A, U nun kapalı bir altkümesi ve $x \in A^c$ olsun. Bu durumda A ve A^c, U nun $A \subseteq A$ ve $x \in A^c$ olacak şekilde iki açık altkümesidir.
ii) Eğer A ve B, U nun iki ayrık kapalı altkümesi ise, bu durumda bu kümeler U nun iki ayrık açık altkümesidir. Böylece (U, τ_R) normal uzaydır.
iii) Lemma 3.3.10 (iii) den x in her açık komşuluğu, bağlantılı olan x in L_x açık komşuluğunu içerir.
iv) Teorem 3.3.15 den görülür.

Teorem 3.3.17: (U, τ_R), U üzerinde yansımalı ve simetrik(yani tolerans) R bağıntısıyla oluşturulan topolojik uzay olsun. Bu durumda (U, τ_R) bir pseudo-metriklenebilir uzaydır (Li 2010).

İspat: $d: U \times U \to [0, +\infty]$ dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & L_x = L_y ise, \\ 1, & L_x \neq L_y \ ise, \end{cases}$$

İlk olarak d nin U üzerinde bir pseudo-metrik dönüşüm olduğunu gösterelim.

a) $d(x, x) = 0$ olduğu açıktır.

b) Aynı zamanda $d(x, y) = d(y, x)$ olduğu da açıktır.

c) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ ye bakalım. Eğer $L_x = L_z$ ise, c doğrudur. Eğer $L_x \neq L_z$ ise, bu durumda $L_x \neq L_y$ veya $L_z \neq L_y$ dir. Böylece c doğrudur.

İkinci olarak, $\{B(x, r): x \in U, r > 0\}$ nin (U, τ_R) nın bir tabanını oluşturduğunu gösterelim. $B(x, 1) = \{y \in U: d(y, x) < 1\} = \{y \in U: d(y, x) = 0\} = [x]_{R_s} = L_x$ olduğundan, Lemma 3.3.10 dan $\{B(x, 1): x \in U\} = \{L_x: x \in U\}$, (U, τ_R) nin bir tabanıdır. O halde, (U, τ_R) bir pseudo-metriklenebilir uzaydır.

Örnek 3.3.18: $U = \{a, b, c, d\}$ ve $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (c, d)\}$ olsun. R, U üzerinde yansımalı bir bağıntıdır. (U, τ_R), U üzerinde R ile oluşturulan topolojik uzay olsun. Bu durumda,

$$\tau_R = \{U, \emptyset, \{b\}, \{d\}, \{a, b\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}\}$$

olur. $b \in U$ ve $\{a\}$ kapalı altkümesi için, $b \notin \{a\}$ ve bu kümeler U da ayrık açık komşuluğa sahip değildirler. O halde (U, τ_R) regüler uzay değildir. Ayrıca U daki her iki ayrık kapalı altküme U da ayrık iki açık komşuluğa sahiptir. O halde (U, τ_R) bir normal uzaydır (Li 2010).

Teorem 3.3.19: R, U üzerinde yalnızca yansımalı bir bağıntı ve R_s, R nin geçişme ifadesi olsun. İddia ediyoruz ki; (U, τ_R), T_0-, T_1-, T_2-, T_3- ve T_4-uzaydır (Mahanta and Das 2011) .

İspat: R, U üzerinde sadece yansımalı bir bağıntı olduğundan R_s de yalnızca yansımalı bir bağıntıdır. Böylece $L_x = \{y \in U: y \in r_{R_s}(x)\} = [x]_{R_s} = \{x\}$ dir. $x \neq y$ olacak şekilde $x, y \in U$ olsun. Bu durumda L_x, y yi içermeyen x in bir komşuluğudur ve böylece (U, τ_R) bir T_0-uzaydır.

L_x ve L_y , $x \in L_x, y \notin L_x$ ve $y \in L_y, x \notin L_y$ olacak şekilde iki τ_R-açık kümedir. O halde (U, τ_R) bir T_1-uzaydır.

L_x ve L_y , $x \in L_x, y \in L_y$ ve $L_x \cap L_y = \{x\} \cap \{y\} = \emptyset$ olacak şekilde iki τ_R -açık kümedir. Bu yüzden (U, τ_R) bir T_2-uzaydır.

(U, τ_R) nin bir regüler ve T_1-uzay olduğunu biliyoruz. O halde (U, τ_R) bir T_3-uzaydır. Yine, (U, τ_R) nin bir normal ve T_1-uzay olduğunu biliyoruz. O halde (U, τ_R) bir T_4-uzaydır.

Tanım 3.3.20: U boştan farklı bir küme, $R,$ U üzerinde bir ikili bağıntı ve $P(U),$ U nun kuvvet kümesi olsun. Keyfi $X \subset U$ için $P(U)$ dan kendi üzerine

$$\underline{R}(X) = \{x \in U : r_R(x) \subseteq X\}$$
$$\overline{R}(X) = \{x \in U : r_R(x) \cap X \neq \emptyset\}$$

şeklinde tanımlansın.

$\underline{R}(X), X$ in bir alt yaklaşımı, $\overline{R}(X), X$ in bir üst yaklaşımı olarak adlandırılır. (U, R) ikilisi genelleştirilmiş rough küme veya genelleştirilmiş yaklaşım uzayı olarak adlandırılır. Eğer $\underline{R}(X) = \overline{R}(X)$ ise, X e tanımlanabilir küme veya genelleştirilmiş tam küme denir. $\underline{R}(X) \neq \overline{R}(X)$ ise, X e tanımlanamaz küme denir (Li 2010).

$R,$ U üzerinde bir denklik bağıntısı ise, bir genelleştirilmiş (U, R) rough kümesi Pawlak rough kümesidir.

Tanım 3.3.21: U boştan farklı bir küme ve $R,$ U üzerinde bir yansımalı bağıntı olsun. Herhangi bir $X \subset U$ için,

$$\tau_R = \{X \subset U : \underline{R}(X) = X\}$$

kümesi tanımlansın. Bu durumda, τ_R U üzerinde bir topolojidir ve bu topolojiye U üzerinde R ile oluşturulan topoloji, (U, τ_R) ye de U üzerinde R ile oluşturulmuş topolojik uzay denir (Kondo 2006).

Tanım 3.3.22: (U, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer keyfi sayıda açık kümenin arakesiti açıksa, yani $\forall G \in \tau$ için $\bigcap G \in \tau$ ise τ ya Alexandrov topolojisi denir (Birkhoff 1937; Lai and Zhang 2006).

Lemma 3.3.23: (U, τ_R), U üzerinde bir benzerlik bağıntısıyla oluşturulan topolojik uzay olsun. Bu durumda, τ bir Alexandrov topolojisidir (Qin *et al.* 2008).

Lemma 3.3.24: (U, τ_R), U üzerinde bir R tolerans bağıntısıyla oluşturulan topolojik uzay olsun. Bu durumda ∀A ⊂ U için, A nın açık olması için gerek ve yeter şart A nın kapalı olmasıdır (Kondo 2006).

Önerme 3.3.25: R, U üzerinde keyfi ikili bağıntı olmak üzere, $S_R = \{r_R(x) : x \in U\}$ ailesi bir τ topolojik uzayı için bir alttabandır. $S_x = \{G \in S_R : x \in G\}$ olsun. Bir alttabanın tüm sonlu arakesitlerinin elemanları bir taban oluşturduğundan topolojik rough üyelik fonksiyonları alttabanla ifade edilebilir.

$$\mu_X^\tau(x) = \frac{|\{\bigcap S_x\} \cap X|}{|\bigcap S_x|}, \quad x \in S_x, \qquad S_x \in S$$

(Lashin *et al.* 2005).

Örnek 3.3.26: $U = \{0,1,2,3,4,5\}$, $r_R(0) = r_R(1) = \{0,1,2\}$, $r_R(2) = r_R(3) = \{2,3\}$, $r_R(4) = \{3,4\}$, $r_R(5) = \{5\}$ olsun. Bu durumda,

$$S = \big\{\{0,1,2\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{5\}\big\} \Rightarrow \beta = \big\{\{0,1,2\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{5\}, \{2\}, \{3\}\big\}$$

$$\Rightarrow \tau = \begin{Bmatrix} U, \emptyset, \{0,1,2\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{5\}, \{2\}, \{3\}, \{0,1,2,3\}, \{0,1,2,3,4\}, \\ \{0,1,2,5\}, \{2,3,4\}, \{2,3,5\}, \{3,4,5\}, \{2,5\}, \{3,5\}, \{2,3,4,5\} \end{Bmatrix}$$

olur. $X = \{0,1,2,3\}$ olsun.

$$\mu_X^\tau(0) = \frac{|\{0,1,2\} \cap \{0,1,2,3\}|}{|\{0,1,2\}|} = 1, \qquad \mu_X^\tau(3) = 1,$$
$$\mu_X^\tau(1) = 1, \qquad \mu_X^\tau(4) = 1/2,$$
$$\mu_X^\tau(2) = 1, \qquad \mu_X^\tau(5) = 0.$$

Rough üyelik fonksiyonundan,

$$\underline{R}X = X^o = \{0,1,2,3\}, \quad \overline{R}X = \overline{X} = \{0,1,2,3,4\},$$
$$NEG(X) = \{5\}, \qquad BND(X) = \{4\}$$

elde edilir.

Aşağıdaki gibi üyelik fonksiyonunu kullanmadan τ -iç ve τ -kapanış tanımlarını kullanarak da X in kapanışı ve içi bulunabilir. Burada F tüm τ-kapalı kümelerin ailesidir.

$$F = \begin{Bmatrix} \emptyset, U, \{3,4,5\}, \{0,1,4,5\}, \{0,1,2,5\}, \{0,1,2,3,4\}, \{0,1,3,4,5\}, \{0,1,2,4,5\}, \\ \{4,5\}, \{5\}, \{3,4\}, \{0,1,5\}, \{0,1,4\}, \{0,1,2\}, \{0,1,3,4\}, \{0,1,2,4\}, \{0,1\} \end{Bmatrix}$$

Buradan,

$$X^o = \{0,1,2\} \cup \{2,3\} \cup \{2\} \cup \{3\} = \{0,1,2,3\},$$
$$\overline{X} = U \cap \{0,1,2,3,4\} = \{0,1,2,3,4\}.$$

elde edilir(Lashin *et al.* 2005).

İki ayrı R ve R' ikili bağıntısı aşağıdaki örnekte de gösterildiği gibi aynı topolojiyi oluşturabilir.

Örnek 3.3.27: $U = \{0,1,2,3,4,5\}$ olsun.

$R = \{(0,0),(0,1),(0,2),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3),(4,3),(4,4),(5,5)\}$

$R' = \{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4),(5,5)\}$

iki ayrı bağıntı olup bu iki bağıntının sağ komşuluk sistemleri: (alttabanlar olarak)

$r_R(0) = \{0,1,2\}, \quad r_R(1) = r_R(2) = r_R(3) = \{2,3\}, \quad r_R(4) = \{3,4\}, \quad r_R(5) = \{5\},$

$r_{R'}(0) = r_{R'}(1) = \{0,1,2\}, r_{R'}(2) = \{2,3\},\ r_{R'}(3) = r_{R'}(4) = \{3,4\}, r_{R'}(5) =$
$\{5\}$ şeklindedir. Bu iki alttaban aynı $S_R = \big\{\{0,1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{5\}\big\} = S_{R'}$ tabanını, dolayısıyla aynı $\tau_R = \tau_{R'}$ topolojisini üretirler (Lashin *et al.* 2005).

3.4. Örtülerle Oluşturulan Rough Kümeler

Bu kısımda, topolojik nokta açısından yeni bir tip örtü tabanlı rough küme tanıtılacaktır. İkili bağıntı tabanlı rough kümeler örtü tabanlı rough kümelerden farklı olduğundan, örtü tabanlı rough kümeler içinde komşuluk kavramı verilecektir.

Tanım 3.4.1: U bir küme ve C , U nun bir örtüsü olsun. $\forall x \in U$ için, x in komşuluğu,

$$N(x) = \bigcap \{K \in C : x \in K\}$$

şeklinde tanımlanır (Zhu 2007).

Tanım 3.4.2: $\forall X \subseteq U$için,

$$X_+ = \bigcup\{K: K \in C \text{ ve } K \subseteq X\} \text{ ve } X^+ = X_+ \cup \{N(x): x \in X - X_+\}$$

kümelerine sırasıyla X in U daki alt yaklaşım kümesi ve üst yaklaşım kümesi denir. Aşağıdaki gibi tanımlanan $P(U)$ üzerindeki IL_C ve IH_C işlemlerine C örtüsüyle birlikte sırasıyla alt yaklaşım işlemi ve üst yaklaşım işlemi denir (Zhu 2007).

$$IL_C(X) = X_+, \quad IH_C(X) = X^+$$

Önerme 3.4.3: C, U nun bir parçalanışı ise, X_+ ve X^+ Pawlak'ın orijinal tanımlarında belirttiği gibi sırasıyla alt ve üst yaklaşım işlemleridir (Zhu 2007).

Önerme 3.4.4: $X_+ = X$ olması için gerek ve yeter şart X in C deki elemanların bir birleşimi olmasıdır.

Klasik rough kümelerden farklı olarak IL ve IH aşağıdaki örnekte de görüldüğü gibi genelde dual değildir (Zhu 2007).

Örnek 3.4.5: $U = \{a, b, c, d\}$, $K_1 = \{a, b, c\}$, $K_2 = \{a, c, d\}$, $K_3 = \{c, d\}$ ve olsun. C, U nun bir örtüsüdür. $X = \{a, b, c\}$ olsun. $IL(X) = \{a, b, c\}$, $IH(-X) = IH(\{d\}) = \{c, d\} \neq -\{a, b, c\} = -IL(X)$ olur (Zhu 2007).

Aşağıda üst yaklaşımın bir diğer temsili elde edilir. Bu temsilden, komşuluk kavramının önemi daha açık görülür.

Teorem 3.4.6: $\forall X \subseteq U,\ X^+ = \bigcup\{N(x): x \in X\}$ olur (Zhu 2007).

İspat: $\bigcup\{N(x): x \in X\} = (\bigcup\{N(x): x \in X_+\}) \cup (\bigcup\{N(x): x \in X - X_+\})$ olduğu kolayca görülür. $\forall x \in X_+$ için, $K \subseteq X$ olacak şekilde bir $K \in C$ vardır, böylece $N(x) \subseteq$

$K \subseteq X$ olur. $X \subseteq X^+$ olduğu kolayca görülür. Buradan $\forall x \in X_+$ için, $N(x) \subseteq X^+$ olur. Böylece $\bigcup\{N(x): x \in X\} \subseteq X^+$ elde edilir. Diğer taraftan, $\forall x \in U$ için, $x \in N(x)$ elde edilir. Sonuç olarak $X_+ \subseteq \bigcup\{N(x): x \in X_+\}$ olur. Böylece,

$$X^+ = X_+ \cup \{N(x): x \in X - X_+\} \subseteq (\bigcup\{N(x): x \in X_+\}) \cup (\{N(x): x \in X - X_+\}) = \bigcup\{N(x): x \in X\}$$

bulunur. Buradan,

$$X^+ = \bigcup\{N(x): x \in X\}$$

olur.

Önerme 3.4.7: Bu tip örtü alt ve üst yaklaşımları aşağıdaki özellikleri sağlar (Zhu 2007):

(1H) $U^+ = U$ (Ko-normalite)
(2L) $\emptyset_+ = \emptyset$ (Normalite)
(2H) $\emptyset^+ = \emptyset$ (Normalite)
(3L) $X_+ \subseteq X$ (Daralma)
(3H) $X \subseteq X^+$ (Genişleme)
(4H) $(X \cup Y)^+ = X^+ \cup Y^+$ (Toplama)
(5L) $(X_+)_+ = X_+$ (Eşkuvvet)
(5H) $(X^+)^+ = X^+$ (Eşkuvvet)
(7L) $X \subseteq Y \Rightarrow X_+ \subseteq Y_+$ (Monotonluk)
(7H) $X \subseteq Y \Rightarrow X^+ \subseteq Y^+$ (Monotonluk)
(9L) $\forall K \in C, K_+ = K$ (Taneciklilik)
(9H) $\forall K \in C, K^+ = K$ (Taneciklilik)

İspat: Sadece (4H), (5H) ve (7H)'ın ispatı verildi.

(7H) $X \subseteq Y$ olsun. $X = \emptyset$ ise, $X^+ = \emptyset \subseteq Y^+$ olur. Aksine, $X \neq \emptyset$ ve $Y \neq \emptyset$ ise Teorem 3.4.6 dan $X^+ \subseteq Y^+$ olur.

(4H) Teorem 3.4.6 dan

$$\begin{aligned}(X \cup Y)^+ &= \cup\{N(x): x \in (X \cup Y)\} = (\cup\{N(x): x \in X) \cup (\cup\{N(x): x \in Y\}) \\ &= X^+ \cup Y^+\end{aligned}$$

elde edilir.

(5H) (5H)'ı ispat etmek için ilk olarak aşağıdaki lemmayı ispat edelim.

Lemma 3.4.8: $\forall y \in N(x)$ için, $N(y) \subseteq N(x)$ (Zhu 2007).

İspat: $y \in N(x)$ olduğundan, $\forall K \in C$ ve $x \in K, y \in K$dır. Böylece,

$$N(y) \subseteq N(x)$$

elde edilir.

Şimdi (5H)'ı ispata başlayalım. Teorem 3.4.6 dan,

$$(X^+)^+ = \cup\{N(y): y \in X^+\} = \cup\{N(y): y \in N(x) \text{ ve } x \in X\} \subseteq \cup\{N(x): x \in X\} = X^+$$

olur. Diğer taraftan, (3H)'dan $X^+ \subseteq (X^+)^+$ olup, böylece $(X^+)^+ = X^+$ olduğunu gösterilmiş olur. Aşağıdaki örneklerden aşağıdaki Önerme 3.4.9 elde edilir.

Önerme 3.4.9: Aşağıdaki özellikler genelde sağlanmaz (Zhu 2007).

(4L) $(X \cap Y)_+ = X_+ \cap Y_+$ (Çarpma)

(6L) $(-X)_+ = -(X^+)$ (Dualite)

(6H) $(-X)^+ = -(X_+)$ (Dualite)

(8L) $(-(X_+))_+ = -(X_+)$ (Alt-tümleyen ilişkisi)

(8H) $(-(X^+))^+ = -(X^+)$ (Üst-tümleyen ilişkisi)

Örnek 3.4.10: $U = \{a,b,c,d\}$, $K_1 = \{a,b\}$, $K_2 = \{a,b,c\}$, $K_3 = \{c,d\}$ ve $C = \{K_1, K_2, K_3\}$ olsun. C , U nun bir örtüsüdür.

(4L) $X = \{a,b,c\}$ ve $Y = \{c,d\}$ olsun. $X \cap Y = \{c\}$ olur. Böylece $(X \cap Y)_+ = \emptyset$ elde edilir. Fakat $X_+ = X$ ve $Y_+ = Y$, buradan $X_+ \cap Y_+ = \{c\} \neq \emptyset$ dir.

(6L) ve (6H) $X = \{a,b,c\}$ olsun. $X_+ = \{a,b,c\}$ olur. Fakat $(-X)^+ = \{d\}^+ = \{c,d\}$olur. Böylece $(-X)^+ \neq -(X_+)$ olur. Diğer taraftan $(-X)_+ = \{d\}_+ = \emptyset$ ve $X^+ = \{a,b,c\}$ olur. Böylece $(-X)_+ \neq -(X^+)$ dir.

(8L) $X = \{a,b,c\}$ için, $X_+ = \{a,b,c\}, (-X_+)_+ = \{d\}_+ = \emptyset$ dir. Buradan, $(-(X_+))_+ \neq -(X_+)$ olur.

(8H) $X = \{a,b,c\}$ için, $X^+ = \{a,b,c\}, -X^+ = \{d\}$, $(-X^+)^+ = \{d\}^+ = \{c,d\}$ dir. Böylece , $(-(X^+))^+ \neq -(X^+)$ olur (Zhu 2007).

Önerme 3.4.11: Alt yaklaşım için, aşağıdaki eşitsizlik sağlanır (Zhu 2007):

(4L*) $(X \cap Y)_+ \subseteq X_+ \cap Y_+$

İspat: (7L) özelliğinden kolayca görülür.

Önerme 3.4.12: $\forall X, Y \subseteq U, X_+ \cap Y_+ = (X \cap Y)_+$ ise, bu durumda $\forall K, K' \in C$ için, $K \cap K' = \emptyset$ veya $K \cap K'$, C nin elemanlarının bir birleşimidir ve tersi de doğrudur (Zhu 2007).

Teorem 3.4.13: IH bir kapanış operatörüdür (Zhu 2007).

İspat: Kapanış operatörlerinin tanımından ve üst yaklaşım işlemlerinin (4H), (2H), (3H) ve (5H) özelliklerinden görülür.

IL bir iç operatörü değildir. Fakat bazı özel örtüler için, IL bir iç operatörüdür.

Teorem 3.4.14: IL nin bir iç operatörü olması için gerek ve yeter şart $\forall K, K' \in C$ için, $K \cap K' = \emptyset$ veya $K \cap K'$ C nin elemanlarının bir birleşimi olmasıdır. (Zhu 2007).

İspat: Önerme 3.4.12 ve iç operatörlerinin tanımından görülür.

Tanım 3.4.15: C bir U uzayının bir örtüsü ve $K \in C$ olsun. Eğer $K, C - \{K\}$ daki bazı kümelerin bir birleşimi ise, K ya C de indirgenebilirdir denir. Aksi takdirde indirgenemezdir (Zhu 2002; Zhu and Wang 2003).

Tanım 3.4.16: C, U nun bir örtüsü olsun. Eğer C deki her eleman indirgenemez ise C ye indirgenemezdir denir. Aksi takdirde C indirgenebilirdir (Zhu 2002; Zhu Wang 2003).

Önerme 3.4.17: C, bir U uzayının bir örtüsü olsun. Eğer K, C de indirgenebilir ise $C - K$ yine de U nun bir örtüsüdür (Zhu 2002; Zhu and Wang 2003).

Önerme 3.4.18: C, U nun bir örtüsü, $K \in C, K, C$ de indirgenebilir ve $K_1 \in C - \{K\}$ olsun. K_1in C de indirgenebilir olması için gerek ve yeter şart $C - \{K\}$ da indirgenebilir olmasıdır (Zhu 2002; Zhu and Wang 2003).

Önerme 3.4.17 bir örtüden bu örtünün indirgenebilir bir altkümesi çıkarıldığı zaman da yine bir örtü olduğunu garanti ederken, Önerme 3.4.18 bir örtüden indirgenebilir bir altküme çıkarmanın herhangi bir yeni indirgenebilir eleman üretmeyeceğini veya önceki diğer indirgenebilir elemanları indirgenemez yapmayacağını gösterir. Sonuç olarak, bir uzayın bir örtüsünün indirgeyeni, tüm indirgenebilir elemanların çıkarılması veya bir adımda bir indirgenebilir elemanın çıkarılmasıyla hesap edilebilir. Geriye kalanlar yine de uzayın bir örtüsünü oluşturur ve indirgenemezdir.

Tanım 3.4.19: Bir U uzayının bir C örtüsü için, indirgeme yoluyla oluşturulan yeni indirgenebilir örtüye C nin indirgeyeni denir ve $reduct(C)$ ile gösterilir (Zhu 2002; Zhu and Wang 2003).

Önerme 3.4.18 bir örtünün sadece bir indirgeyene sahip olduğunu garanti eder. Bir örtüden bir indirgenebilir eleman çıkarmanın komşulukları nasıl etkileyeceğini göz önüne alalım.

Önerme 3.4.20: C , bir U uzayının bir örtüsü olsun. Eğer $K,\ C$ de indirgenebilir ise, $\forall x \in U$ için, $C - \{K\}$ daki $N(x), C$ deki $N(x)$ ile aynıdır (Zhu 2007).

İspat: İndirgenebilir elemanlar ve komşulukların tanımlarından görmek kolaydır.

Önerme 3.4.21: C , bir U uzayının bir örtüsü olsun. $\forall x \in U$ için, $reduct(C)$ deki $N(x)$, C deki $N(x)$ ile aynıdır (Zhu 2007).

Önerme 3.4.22: C, U nun bir örtüsü, $K \in C, K\ C$ de indirgenebilir ve $K_1 \in C - \{K\}$ olsun. K_1 in C de indirgenebilir olması için gerek ve yeter şart $C - \{K\}$ da indirgenebilir olmasıdır (Zhu 2003).

İspat: $K_1,\ (C - \{K\})$ da indirgenebilir ise, $K_1,\ \big((C - \{K\}) - \{K_1\}\big) = C - \{K, K_1\}$ deki bazı kümelerin bir birleşimi olarak ifade edilebilir. O halde K_1 kesinlikle $(C -$

$\{K_1\}$) deki bazı kümelerin bir birleşimi olarak ifade edilir. Böylece K_1, C de indirgenebilirdir.

Tersine, K_1, C de indirgenebilir olsun. K_1 i, $(C - \{K_1\})$ deki bazı kümelerin bir birleşimi olarak ifade edebiliriz. Bu kümeler $T_1, T_2, \ldots, T_n$ olsun. Her i için $T_i \subseteq K_1$ olduğu kolayca görülür. $T_1, T_2, \ldots., T_n$ kümelerinin hiçbiri K ya eşit değilse, $K_1, (C - \{K, K_1\})$ de $T_1, T_2, \ldots, T_n$ kümelerinin birleşimi olarak ifade edilebilir. Böylece $K_1, (C - \{K, K_1\})$ de indirgenebilirdir. Eğer $T_1, T_2, \ldots., T_n$ kümelerinden biri K ya eşitse, $T_1 = K$ olmak üzere, K , C de indirgenebilir olduğundan $T_1 = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_m$ olacak şekilde $S_1, S_2, \ldots, S_m \in C - \{K\}$ vardır. $T_1 \subseteq K_1, S_1, S_2, \ldots, S_m$, K_1e eşit olmadığından,

$$K_1 = T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_n = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_m \cup T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_n$$

elde edilir. Burada $S_1, S_2, \ldots, S_m, T_1, T_2, \ldots, T_n$ ne K ya ne de K_1e eşittir. Bu da K_1in $(C - \{K\})$ da indirgenebilir olduğunu gösterir.

Önerme 3.4.23: U nun iki indirgenemez örtüsü aynı örtü alt yaklaşımlarını üretiyorsa, bu durumda iki örtü aynıdır (Zhu 2007).

İspat: U bir uzay, C_1, C_2 U nun iki örtüsü olsun ve bu iki örtü aynı L örtü alt yaklaşımlarını üretsin. Öncelikle C_1in herhangi bir elemanının C_2 nin de bir elemanı olduğunu gösterelim. $K \in C_1$ olsun. Bu durumda $L(K) = K$ olur. Önerme 3.4.9 dan, C_2 örtüsünde K, C_2 nin bazı elemanlarının bir birleşimidir. $K_1, K_2, \ldots, K_n$, $K = K_1 \cup K_2 \cup \ldots . \cup K_n$ şartını sağlayan C_2 nin tüm elemanları olsun. Önerme 3.4.7 (9L)'den herhangi bir K_i için, $L(K_i) \subseteq L(K)$ olur. Benzer olarak $K_i = \bigcup_{j=1}^{j(i)} T_{i,j}$ olacak şekilde C_1 in $T_{i,1}, T_{i,2}, \ldots, T_{i,j(i)}$ elemanları vardır. Böylece $K = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{j(i)} T_{i,j}$ elde edilir. C_1 indirgenemez olduğundan, $\forall\, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq j(i)$ için $T_{i,j} = K$ olur. O halde $\forall\, 1 \leq i \leq n$ için $K_i = K$, yani K C_2 nin bir elemanıdır. Benzer şekilde C_2 nin her elemanı C_1 in de bir elemanıdır, böylece C_1 ve C_2 aynı elemanlara sahiptir. Yani,

$$C_1 = C_2$$

dir.

Teorem 3.4.24: C, U nun bir örtüsü olsun. Bu durumda C ve $reduct(C)$ aynı alt yaklaşım işlemlerini üretir (Zhu 2002; Zhu and Wang 2003).

Teorem 3.4.25: C, U nun bir örtüsü olsun. Bu durumda C ve $reduct(C)$ aynı üst yaklaşım işlemlerini üretir (Zhu 2007).

İspat: $\forall X \subseteq U$ için, Teorem 3.4.24 ten $reduct(C)$ deki X_+, C dekiyle aynıdır. Önerme 3.4.21 den $reduct(C)$ deki $N(x)$, C deki ile aynıdır. X^+ nın tanımından $reduct(C)$ deki X^+ ile de C deki X^+ aynıdır.

Teorem 3.4.26: C_1, C_2 U nun iki örtüsü olsun. C_1 ve C_2 nin aynı alt yaklaşım işlemlerini üretmesi için gerek ve yeter şart $reduct(C_1) = reduct(C_2)$ olmasıdır (Zhu 2007).

Önerme 3.4.27: C_1, C_2, U nun iki örtüsü olsun. $reduct(C_1) = reduct(C_2)$ ise $\forall x \in U$ için, C_1 deki $N(x)$, C_2 dekiyle aynıdır (Zhu 2007).

İspat: Önerme 3.4.21den elde edilir.

$\forall x \in U$ için, C_1 deki $N(x)$, C_2 dekiyle aynı olduğunda $reduct(C_1) = reduct(C_2)$ olmayabilir. Aşağıda örnek bunu gösterir.

Örnek 3.4.28: $U = \{a, b, c, d\}$ $K = \{a, b\}, K_1 = \{a, c\}, K_2 = \{b, d\}, K_3 = \{a, d\}, K_4 = \{b, c\}, C_1 = \{K, K_1, K_2, K_3, K_4\}$ ve $C_2 = \{K_1, K_2, K_3, K_4\}$ olsun. $\forall x \in U$ için, her iki örtüde de $N(x) = \{x\}$ olur. Diğer taraftan $reduct(C_1) = C_1$ ve $reduct(C_2) = C_2$ dir (Zhu 2007).

Teorem 3.4.29: C_1, C_2 U nun iki örtüsü olsun. Eğer $reduct(C_1) = reduct(C_2)$ ise, C_1 ve C_2 aynı üst yaklaşımları üretir (Zhu 2007).

İspat: Teorem 3.4.25 ten çıkar.

Teorem 3.4.30: C_1, C_2 U nun iki örtüsü olsun. Eğer C_1 ve C_2 aynı alt yaklaşım işlemlerini üretiyorsa bu örtüler aynı üst yaklaşım işlemlerini de üretir (Zhu 2007).

İspat: C_1 ve C_2 aynı örtü alt yaklaşım işlemlerini üretiyorsa, Teorem 3.4.26 dan $reduct(C_1) = reduct(C_2)$ olur. Teorem 3.4.29 dan bu örtüler aynı üst yaklaşımları üretir.

Sonuç 3.4.31: C, U nun bir örtüsü olsun. C, Pawlak'ın bir alt yaklaşım işlemini veya Pawlak'ın bir üst yaklaşım işlemini üretmesi için gerek ve yeter şart $reduct(C)$ nin U nun bir parçalanışı olmasıdır (Zhu 2007).

Örnek 3.4.32: $U = \{a, b, c\}, K_1 = \{a, b\}, K_2 = \{b, c\}, K_3 = \{a, c\}, K_4 = \{a\}, K_5 = \{b\}, K_6 = \{c\}, C_1 = \{K_1, K_2, K_3\}$ ve $C_2 = \{K_4, K_5, K_6\}$ olsun. Bu durumda $\forall X \subseteq U$ için, her iki örtüde de $X^+ = X$ olur. Diğer taraftan, $reduct(C_1) = C_1$ ve $reduct(C_2) = C_2$ olur (Zhu 2007).

Teorem 3.4.30 ve Örnek 3.4.32 den, örtü tabanlı rough kümelerin bu tipi için, üst yaklaşım işleminin alt yaklaşım işlemine bağlı olduğu görülür. Ancak alt yaklaşım işlemi, üst yaklaşım işlemine bağlı değildir (Zhu 2007).

Teorem 3.4.31: U boştan farklı bir küme olsun. Eğer bir $L: P(U) \to P(U)$ işlemi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, bu durumda C ile üretilen alt yaklaşım işlemi IL, L ye eşit olacak şekilde U nun bir C örtüsü vardır. $\forall X, Y \subseteq U$ için,

(1) $L(U) = U$ (Ko-normalite)

(2) $X \subseteq Y \Rightarrow L(X) \subseteq L(Y)$ (Monotonluk)

(3) $L(X) \subseteq X$ (Daraltma)

(4) $L\big(L(X)\big) = L(X)$ (Eşkuvvet) (Zhu 2002; Zhu and Wang 2003).

Yukarıdaki bir alt yaklaşım işlemi için dört özellik birbirinden bağımsızdır.

Teorem 3.4.32: U boştan farklı bir küme olsun. Eğer bir $H: P(U) \to P(U)$ bir kapanış operatörü ise yani H aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa C ile üretilen üst yaklaşım işlemi $IH,\ H$ ya eşit olacak şekilde U nun bir C örtüsü vardır. $\forall X, Y \subseteq U$ için;

(1) $H(X \cup Y) = H(X) \cup H(Y)$ (Toplama)

(2) $X \subseteq H(X)$ (Genişleme)

(3) $H(\emptyset) = \emptyset$ (Normalite)

(4) $H\big(H(X)\big) = H(X)$ (Eşkuvvet) (Zhu 2007).

Yukarıda bir üst yaklaşım işlemi için verilen dört özellik birbirinden bağımsızdır.

İspat: İlk olarak U nun bir örtüsünü inşa edelim. $C = \{K \subseteq U: H(K) = K\}$ olsun. (2) şartından, $U \subseteq H(U)$ dir. Böylece $H(U) = U$olur. Sonuç olarak $U \in C$ bulunur. Bu da C nin U nun bir örtüsü olduğunu gösterir. Şimdi C ile üretilen IH ın H ya eşit olduğunu ispat edelim. (1)den $X \subseteq Y$ ise $H(X) \subseteq H(Y)$ dir. Şimdi, $\forall x \in U$ için, $N(x) = H(\{x\})$ olduğunu gösterelim. (2) den $\{x\} \subseteq H(\{x\})$ ve (4) ten $H(\{x\}) \in C$ olduğundan $N(x) \subseteq H(\{x\})$ olur. Diğer taraftan, $x \in K$ ve $K \in C$ ise, $H(\{x\}) \subseteq H(K) = K$ olur. Böylece, komşuluğun tanımından $H(\{x\}) \subseteq N(x)$ elde edilir. O halde, $H(\{x\}) = N(x)$ olur. $\forall X \subseteq U$ için, $X = \emptyset$ ise, $IH(X) = H(X)$ olduğu kolayca görülür. $X \neq \emptyset$ ise, Teorem 3.4.6 dan $IH(X) = \cup\{N(x): x \in X\}$ bulunur. (1) den $H(X) = \cup\{H(\{x\}): x \in X\}$ olur. O halde, $IH(X) = H(X)$ elde edilir.

Bu dört özellik bir kapanış operatörü olmanın dört şartı olduğundan, bunların birbirinden bağımsız olduğu kolayca görülür.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

4.1. Topolojik Uzaylar Üzerine Kurulu Yaklaşımlar Arasındaki İlişkiler

Bu kısımda, topolojik uzaylar üzerine kurulan rough kümeler arasındaki ilişkiler verilecektir.

Tanım 4.1.1: Eğer C, U nun bir örtüsü ise (U, C) ikilisine bir örtü yaklaşım uzayı denir (Thuan 2009).

Tanım 4.1.2: (U, C) bir örtü yaklaşım uzayı, $x \in U$ olsun. x in minimal tasviri

$$Md(x) = \{K: x \in K \in C \wedge (\forall S \in C \wedge x \in S \subseteq K \Rightarrow K = S)\}$$

şeklinde tanımlanır (Thuan 2009).

(U, C) bir örtü yaklaşım uzayı ve $N(x) = \bigcap\{K \in C: x \in K\}$, (U, τ) da R -sağ komşuluklarını kullanan bir topolojik uzay olsun. Bazı yaklaşım operatörleri aşağıdaki gibi listelenebilir.

Çizelge 4.1. Yaklaşım operatörleri (Thuan 2009)

W.Zhu(1)	
$X_+ = \bigcup\{K \in C: K \subseteq X\}$	$X^+ = X_+ \cup \{N(x): x \in X - X_+\}$
Xu, Zhang (2)	
$C_+X = \{x \in U: (\bigcap Md(x)) \subseteq X\}$	$C^+X = \{x \in U: (\bigcap Md(x)) \cap X \neq \emptyset$
Yao (3)	
$\underline{X} = \bigcup_{r_R(x) \subseteq X} r_R(x)$	$\overline{X} = \left(\left(\underline{X^c}\right)^c\right)$
Yao (4)	
$\underline{R}X = \{x \in U: r_R(x) \subseteq X\}$	$\overline{R}X = \{x \in U: r_R(x) \cap X \neq \emptyset\}$

Keyfi ikili bağıntılarla oluşturulan genelleştirilmiş rough kümelerde, aşağıdaki özellikler sağlanır.

Önerme 4.1.3: R ,R^{-1}, U üzerinde aşağıdaki gibi tanımlanan iki ikili bağıntı olsun. xRy olması için gerek ve yeter şart $y \in N(x)$ olmasıdır ve $yR^{-1}x$ olması için gerek ve yeter şart xRy olmasıdır. Bu durumda,

1) R yansımalı ve geçişmelidir.

2) $\forall X \subseteq U$ için $C^{+}X = \overline{R}X$ ve $C_{+}X = \underline{R}X$ dir.

3) Tersine, U üzerindeki her bir yansımalı ve geçişmeli ikili R bağıntısı için $\forall X \subseteq U$ için, $C^{+}X = \overline{R}X$ ve $C_{+}X = \underline{R}X$ olacak şekilde bir (U, C) örtü yaklaşım uzayı vardır.

4) $X^{+} = \overline{R^{-1}}X,\ \forall X \subseteq U$

5) $C^{+}X = \bigcup_{x \in X} l_R(x)$ ve $X^{+} = \bigcup_{x \in X} r_R(x)\ \ \forall X \subseteq U.$

6) Eğer $\forall X \subseteq U$ için $C^{+} = X^{+}$ ise, bu durumda R ,U üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Böylece, $C^{+} = X^{+}$ Pawlak rough küme üst yaklaşımlarıdır (Liu and Sai 2008).

Not: $N(x) = \bigcap_{x \in K \in C} K$ ve $l_R(x)$ x in sol komşuluğudur.

Lemma 4.1.4: C, U nun tek elemanlı bir örtüsü olsun. Bu durumda $r_R(x)$, U daki bir x elemanının R -sağ komşuluğu olmak üzere $Md(x) = \{r_R(x)\}$ olacak şekilde U üzerinde en az bir yansımalı ve geçişmeli R ikili bağıntısı vardır. Tersine, R, U üzerinde yansımalı ve geçişmeli bir ikili bağıntı ise, $C = \{r_R(x)\}$ U nun tek elemanlı örtüsüdür ve $\forall x \in U$ için $Md(x) = \{r_R(x)\}$ dir (Liu and Sai 2008).

Önerme 4.1.5: R geçişmeli olsun. $G = \{X : X \in P(U), \overline{R}X = \emptyset\}$ ve $H = \{X : X = \overline{R}Y, \exists Y \in P(U)\}$ altkümeleri verilsin. Bu durumda,

(1) $\overline{R}$ idempotenttir. Yani $\overline{R}\,\overline{R} = \overline{R}$ dir.

(2) $G \cap H = \emptyset$ dir (Thuan 2009).

İspat: (1) $\forall X \subseteq U$ için R geçişmeli ise,

$$\forall x \in \overline{R}(X) \Leftrightarrow r_R(x) \cap X \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists y \in r_R(x) \wedge y \in X \Leftrightarrow xRy \wedge y \in X$$

olur. Böylece

$\forall x \in \overline{R}\,\overline{R}(X) \Leftrightarrow r_R(x) \cap \overline{R}(X) \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists y \in \overline{R}X \wedge xRy \Leftrightarrow \exists z \in X \wedge yRz \wedge xRy \Leftrightarrow$ $\exists z \in X, xRz$ (R geçişmeli) $\Leftrightarrow x \in \overline{R}X$ olur. Diğer bir ifadeyle $\overline{R}$ idempotenttir. Yani $\overline{R}\,\overline{R} = \overline{R}$ dir.

(2) $X \in G \cap H$ olsun. Bu durumda $X = \overline{R}Y$ ve $\overline{R}X = \emptyset$ olacak şekilde en az bir $Y \in P(U)$ vardır. Böylece, $X = \overline{R}Y = \overline{R}\,\overline{R}Y = \overline{R}X = \emptyset$ olur.

Önerme 4.1.6: (U, R) yaklaşım uzayı ve R yansımalı ikili bağıntı olsun. Yao (3) yaklaşımları ve Yao (4) yaklaşımları özdeştir (Thuan 2009).

İspat: R yansımalı olduğundan $\underline{X} = \underline{R}X$ elde edilir. Buradan,

$$\underline{X^c} = \{x \in U: r_R(x) \subseteq X^c\} = \{x \in U: r_R(x) \cap X = \emptyset\}$$

yazılabilir. Böylece

$$(\underline{X^c})^c = \{x \in U: r_R(x) \cap X = \emptyset\}^c = \{x \in U: r_R(x) \cap X \neq \emptyset\} = \overline{R}X$$

olur.

Önerme 4.1.7: $C(U), U$ nun bütün örtülerinin kümesini göstersin. F dönüşümü $C(U)$ dan $C(U)$ ya aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$F: C(U) \rightarrow C(U), F(C) = C' = \{N(x): x \in U\}$$

Örtülerin bu dönüşümü X^+, C^+X üst yaklaşımlarını ve C_+X alt yaklaşımlarını sabit bırakır. Fakat, bu dönüşüm topolojik uzaylar altında korunmaz (Thuan 2009).

Aşağıdaki örnekte bu görülebilir.

Örnek 4.1.8: $U = \{a, b, c, d\}, C = \tau = \{\emptyset, U, \{a\}, \{a, b\}\}$ U üzerinde tanımlanan bir topoloji olsun.

$$F(C) = \{N(a) = \{a\}, N(b) = \{a, b\}, N(c) = U, N(d) = U\}$$

olur. $F(C)$ nin bir topoloji olmadığı açıktır.

5. SONUÇLAR

Pawlak tarafından geliştirilen orijinal rough küme teorisi sonlu bir U uzayı üzerindeki denklik bağıntısı üzerine kuruldu. Fakat bu teori gerçek yaşam durumlarının üstesinden gelmek için çok sınırlayıcıdır.

Bu çalışmada, Pawlak'ın denklik bağıntılarıyla oluşturulan rough kümeler ikili bağıntılara ve örtülere genişletildiği görüldü. İkili bağıntılar üzerine kurulu genelleştirilmiş rough kümeler ile topolojiler arasındaki ilişkileri inceleyen çalışmalar sunuldu. Ayrıca, U uzayı üzerinde bir R ikili bağıntısının geçişme ifadesi R_s kavramı tanıtıldı. Sonsuz bir X uzayı üzerinde bir yansımalı R bağıntısıyla oluşturulan (X, τ_R) topolojik uzayı üzerinde sayılabilirlik ve lokal kompaktlık tanıtıldı. $(X, \tau_R) = \left(X, \tau_{R_s}\right)$ olduğu gösterildi. Ayrıca ayırma aksiyomları, lokal kompaktlık, lokal ayrılabilirlik ve pseudo-metriklenebilirlik, sonsuz bir X üzerindeki bir R tolerans bağıntısıyla oluşturulan (X, τ_R) topolojik uzayında göz önüne alındı. Örtüler ve ikili bağıntılarla oluşturulan üst yaklaşımlar arasındaki ilişkiler sunuldu.

KAYNAKLAR

Birkhoff, G., 1937. Rings of Sets, Duke Mathematical Journal 3 443-454.

Cech, E., 1966. Topological Spaces, Wiley, London.

Engelking, R., 1977. General Topology, Polish Scientific Publishers, Warszawa.

Koçak, M., 2011. Genel Topolojiye Giriş ve Çözümlü Alıştırmalar, Kampüs Yayıncılık, Ankara.

Kondo, M., 2006. On the Structure of Generalized Rough Sets, Information Science, 176, 589-600.

Lai, H. and Zhang, D., 2006. Fuzzy Preorders and Topology, Fuzzy Sets and Systems 157 1865-1885.

Lashin, E. F., Kozae, A. M., Khadra, A.A. and Medhat, T., 2005. Rough Set Theory for Topological Spaces, International Journal of Approximate Reasoning 40 (1-2) 35-43.

Li, Z., 2010. Topological Properties of Generalized Rough Sets, Seventh International Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery, 2067-2070.

Lin, T. Y., 1988. Neighborhood Systems and Relational Database, Procceedings of 1988 ACM Sixteen Annual Computer Science Conference, February 725 23-25.

Liu, G. And Sai, Y., 2008. A Comparison of Two Types of Rough Sets Induced by Coverings, Int. J. Aprrox. Reason, 10,10-16.

Mahanta, J. and Das, P.K., 2011. Topological Properties of Yao’s Rough Set, World Academy of Science, Engineering and Technology 52.

Mucuk, O., 2009. Topoloji, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara.

Munkres, J.R., 2000. Topology, Prentice Hall, Inc. Upper Saddle River, New Jersey.

Pawlak, Z., 1982. Rough Sets, International Journal of Computer and Informational Sciences, 11(5) 341-356.

Qin, K., Yang, Z. and Pei, Z., 2008. Generalized Rough Sets Based on Reflexive and Transitive Relations, Information Sciences, 178, 4138-4141.

Salama, A.S., 2011. Some Topological Properties of Rough Sets with Tools for Data Mining, International Journal of Computer Science Issues, Vol. 8, Issue 3, No. 2 1694-0814

Skowron A. and Stepaniuk J., 1996. Tolerance Approximation Spaces, Fundamenta İnformaticae, 27,245-253.

Slowinski R. and Vandepooten D., 1995. Şimilarity Relation as a Basis for Rough Approximationş, ICS Research Report, 53, 249-250.

Thuan, N. D., 2009. Covering Rough Sets from a Topological Point of View, International Journal of Computer Theory and Engineering, 1 (5) 1793-8201.

Yao, Y. Y., 1998. Relational Interpretations of Neighborhood Operators and Rough Set Approximation Operators, Information Sciences 111 239-259.

Zhu, F., 2002. On Covering Generalized Rough Sets, Master’s Thesis, The University of Arizona, Tucson, AZ,USA.

Zhu, W. and Wang F. Y., 2003. Reduction and Axiomization of Covering Generalized Rough Sets, Information Sciences 152 217-230.

Zhu, W., 2007. Topological Approaches to Covering Rough Sets, Information Sciences 177 1499-1508.

Yüksel, Ş., 2011. Genel Topoloji, Eğitim Kitabevi, Konya.

ÖZGEÇMİŞ

1988 yılında Erzurum'da doğmuştur. Öğrenimine 1994 yılında Güzelova İlköğretim Okulu'nda başlamıştır. 2002 yılında Ortaöğrenimine Erzurum Atatürk Lisesi'nde başlamıştır. 2005 yılında ortaöğrenimini tamamlamıştır. 2007 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde lisans eğitimine başlamıştır. 2012 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Topoloji Bilim Dalı'nda yüksek lisans eğitimine başlamıştır. Halen eğitimine devam etmektedir.