

**LİNEER KOMPLEKS DİFERANSİYEL
DENKLEMLERİN LEGENDRE POLİNOMLARI
İLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ**

Faruk DÜŞÜNCELİ

Doktora Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Uygulamalı Matematik Bilim Dalı

Doç. Dr. Ercan ÇELİK

2015

Her hakkı saklıdır

**ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

**LİNEER KOMPLEKS DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
LEGENDRE POLİNOMLARI İLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ**

Faruk DÜŞÜNCELİ

**MATEMATİK ANABİLİM DALI
Uygulamalı Matematik Bilim Dalı**

**ERZURUM
2015**

Her hakkı saklıdır



TEZ ONAY FORMU

LİNEER KOMPLEKS DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN LEGENDRE POLİNOMLARI İLE
NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Doç. Dr. Ercan ÇELİK danışmanlığında, Faruk DÜŞÜNCELİ tarafından hazırlanan bu çalışma, 07/08/2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik Bilim Dalı'nda doktora tezi olarak **oybirliği** ile kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Mustafa BAYRAM

İmza

Üye : Doç. Dr. Ercan ÇELİK

İmza :

Üye : Doç. Dr. Ömür DEVECİ

İmza :

Üye : Yrd. Doç. Dr. Muhammed YİĞİDER

İmza :

Üye : Yrd. Doç. Dr. Yeşim SARAÇ

İmza :

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu 03.09/2015 tarih ve 35/1222 nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Ertan YILDIRIM
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildiriş, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Doktora Tezi

LİNEER KOMPLEKS DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN LEGENDRE POLİNOMLARI İLE NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

Faruk DÜŞÜNCELİ

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ercan ÇELİK

Bu tezde lineer kompleks diferansiyel denklemlerin legendre polinomları vasıtasıyla nümerik çözümü incelenmiştir. Beş bölümden oluşan bu çalışmanın birinci bölümünde konuyla ilgili literatürden bahsedildi. İkinci bölümde bu tezde kullanılacak olan çeşitli tanım ve teoremler verildi. Üçüncü bölümde Legendre polinomları tanıtıldı ve nümerik çözüm için gerekli olan matris formlar oluşturuldu. Dördüncü bölümde ise geliştirilen yöntem beş farklı probleme uygulandı ve bulunan sonuçlar çizelge ve şekillerle karşılaştırıldı. Son bölümde ise elde edilen sonuçlar değerlendirildi.

2015, 65 sayfa

Anahtar Kelimeler: Lineer kompleks diferansiyel denklemler, Legendre polinomları, kollokasyon metod, operasyonel matris

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

THE NUMERICAL SOLUTION OF THE LINEAR COMPLEX DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH THE LEGENDRE POLYNOMIALS

Faruk DÜŞÜNCELİ

Ataturk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Discipline of Applied Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ercan ÇELİK

In this thesis, the numerical solutions of the linear complex differential equations were investigated with the Legendre polynomials. The literature of the subject was discussed in the first section of this study formed with five chapters. Several definitions and theorems will be used in this thesis were given in the second section. In the third section, The Legendre polynomials were introduced and then the matrix forms required for the numerical solutions were composed. Then, our method was applied to the five different problems and obtained results were compared in the tables and figures in the fourth section. Finally, our obtained results were evaluated in the last section.

2015, 65 pages

Keywords: linear complex differential equation, Legendre polynomial, collocation method, operational matrix

TEŞEKKÜR

Doktora tezi olarak sunduğum bu alıŐma, Atatürk Üniversitesi Fen Fakóltesi Matematik Bölümü'nde hazırlanmıŐtır.

Bu çalışmada bana her türlü kolaylığı sağlayan, bilgi ve tecrübeleriyle beni destekleyen çok değerli hocam Sayın Doç. Dr. Ercan ÇELİK'e en içten dileklerle teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Tezimin hazırlanması sürecinde, değerli bilgi ve katkılarını benden esirgemeyen Sayın Yrd. Doç. Dr. Muhammed YİĞİDER'e ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Mesut KARABACAK'a teŐekkürlerimi ve Őükranlarımı sunarım.

Bu doktora çalıŐmasını saygıdeğer anne ve babama, hiçbir zaman desteğini ve ilgisini eksik etmeyen eŐime ve ocuklarım Hatice ve Bünyamin'e ithaf ediyorum...

Faruk DÜŞÜNCELİ

Ađustos, 2015

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ.....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vi
ÇİZELGELER DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER	4
2.1. Kompleks Fonksiyonların Diferansiyellenebilmesi	8
2.2. Holomorf Fonksiyon	11
2.3. Lineer Kompleks Diferansiyel Denklemler	12
2.3.1. Birinci mertebeden lineer kompleks diferansiyel denklemler.....	14
2.3.2. İkinci mertebeden lineer kompleks diferansiyel denklemler	15
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	16
3.1. Legendre Polinomları	16
3.2. Operasyonel Matris Teşkili	21
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	28
4.1. Test Problemi 1	28
4.2. Test Problemi 2	37
4.3 Test Problemi 3	42
4.4. Test Problemi 4	48
4.5. Test Problemi 5	53
5. TARTIŞMA ve SONUÇ.....	59
KAYNAKLAR	60
EKLER.....	62
EK 1.....	62
EK 2.....	64
ÖZGEÇMİŞ	66

SİMGELER DİZİNİ

$ A $	A matrisinin determinantı
a_n	Legendre Polinomlarının Katsayıları
z_{pp}	Sıralama Noktaları
N	Kesme Sınırı
W	Arttırılmış Matris
U	Şartlar için Arttırılmış Matris
\tilde{W}	Şartlar Kullanılmış Arttırılmış Matris

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 4.1. Test Problemi 4.1 denkleminin tam ve yaklaşık çözümlerinin reel kısımlarının grafiği.....	34
Şekil 4.2. Test Problemi 4.1 denkleminin tam ve yaklaşık çözümlerinin reel kısımlarının mutlak hatasının grafiği	34
Şekil 4.3. Test Problemi 4.1 denkleminin tam ve yaklaşık çözümlerinin imajiner kısımlarının grafiği.....	36
Şekil 4.4. Test Problemi 4.1 denkleminin tam ve yaklaşık çözümlerinin imajiner kısımlarının mutlak hatasının grafiği	36
Şekil 4.5. Test Problemi 4.2 denkleminin tam ve yaklaşık çözümlerinin reel kısımlarının grafiği.....	39
Şekil 4.6. Test Problemi 4.2 denkleminin tam ve yaklaşık çözümlerinin reel kısımlarının mutlak hatasının grafiği	39
Şekil 4.7. Test Problemi 4.2 denkleminin tam ve yaklaşık çözümlerinin imajiner kısımlarının grafiği.....	41
Şekil 4.8. Test Problemi 4.2 denkleminin tam ve yaklaşık çözümlerinin imajiner kısımlarının mutlak hatasının grafiği	41
Şekil 4.9. Test Problemi 4.3 denkleminin tam ve yaklaşık çözümlerinin reel kısımlarının grafiği.....	45
Şekil 4.10. Test Problemi 4.3 denkleminin tam ve yaklaşık çözümlerinin reel kısımlarının mutlak hatasının grafiği	45
Şekil 4.11. Test Problemi 4.3 denkleminin tam ve yaklaşık çözümlerinin imajiner kısımlarının grafiği.....	47
Şekil 4.12. Test Problemi 4.3 denkleminin tam ve yaklaşık çözümlerinin imajiner kısımlarının mutlak hatasının grafiği	47
Şekil 4.13. Test Problemi 4.4 denkleminin tam ve yaklaşık çözümlerinin reel kısımlarının grafiği.....	50
Şekil 4.14. Test Problemi 4.4 denkleminin tam ve yaklaşık çözümlerinin reel kısımlarının mutlak hatasının grafiği	50

Şekil 4.15. Test Problemi 4.4 denkleminin tam ve yaklaşık çözümlerinin imajiner kısımlarının grafiği.....	52
Şekil 4.16. Test Problemi 4.4 denkleminin tam ve yaklaşık çözümlerinin imajiner kısımlarının mutlak hatasının grafiği	52
Şekil 4.17. Test Problemi 4.5 denkleminin tam ve yaklaşık çözümlerinin reel kısımlarının grafiği.....	56
Şekil 4.18. Test Problemi 4.5 denkleminin tam ve yaklaşık çözümlerinin reel kısımlarının mutlak hatasının grafiği	56
Şekil 4.19. Test Problemi 4.5 denkleminin tam ve yaklaşık çözümlerinin imajiner kısımlarının grafiği.....	58
Şekil 4.20. Test Problemi 4.5 denkleminin tam ve yaklaşık çözümlerinin imajiner kısımlarının mutlak hatasının grafiği	58

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 4.1. Test problemi 4.1 denkleminin yaklaşık ve tam çözümlerinin reel kısımlarının karşılaştırılması ve mutlak hatanın ($eN(zj)$) hesaplanması	33
Çizelge 4.2. Test problemi 4.1 denkleminin reel kısımlarının $L2$ ve $L\infty$ hataları	33
Çizelge 4.3. Test problemi 4.1 denkleminin yaklaşık ve tam çözümlerinin imajiner kısımlarının karşılaştırılması ve mutlak hatanın ($eN(zj)$) hesaplanması	35
Çizelge 4.4. Test problemi 4.1 denkleminin imajiner kısımlarının $L2$ ve $L\infty$ hataları...	35
Çizelge 4.5. Test problemi 4.2 denkleminin yaklaşık ve tam çözümlerinin reel kısımlarının karşılaştırılması ve mutlak hatanın ($eN(zj)$) hesaplanması	38
Çizelge 4.6. Test problemi 4.2 denkleminin reel kısımlarının $L2$ ve $L\infty$ hataları	38
Çizelge 4.7. Test problemi 4.2 denkleminin yaklaşık ve tam çözümlerinin imajiner kısımlarının karşılaştırılması ve mutlak hatanın ($eN(zj)$) hesaplanması	40
Çizelge 4.8. Test problemi 4.2 denkleminin imajiner kısımlarının $L2$ ve $L\infty$ hataları	40
Çizelge 4.9. Test problemi 4.3 denkleminin yaklaşık ve tam çözümlerinin reel kısımlarının karşılaştırılması	43
Çizelge 4.10. Test problemi 4.3 denkleminin yaklaşık ve tam çözümlerinin reel kısımlarının mutlak hatasının hesaplanması	44
Çizelge 4.11. Test problemi 4.3 denkleminin reel kısımlarının $L2$ ve $L\infty$ hataları	44
Çizelge 4.12. Test problemi 4.3 denkleminin yaklaşık ve tam çözümlerinin imajiner kısımlarının karşılaştırılması	46
Çizelge 4.13. Test problemi 4.3 denkleminin yaklaşık ve tam çözümlerinin imajiner kısımlarının mutlak hatasının hesaplanması	46
Çizelge 4.14. Test problemi 4.3 denkleminin imajiner kısımlarının $L2$ ve $L\infty$ hataları	47

Çizelge 4.15. Test problemi 4.4 denkleminin yaklaşık ve tam çözümlerinin reel kısımlarının karşılaştırılması	49
Çizelge 4.16. Test problemi 4.4 denkleminin yaklaşık ve tam çözümlerinin reel kısımlarının mutlak hatasının hesaplanması.....	49
Çizelge 4.17. Test problemi 4.4 denkleminin reel kısımlarının L_2 ve L_∞ hataları	50
Çizelge 4.18. Test problemi 4.4 denkleminin yaklaşık ve tam çözümlerinin imajiner kısımlarının karşılaştırılması	51
Çizelge 4.19. Test problemi 4.4 denkleminin yaklaşık ve tam çözümlerinin imajiner kısımlarının mutlak hatasının hesaplanması.....	51
Çizelge 4.20. Test problemi 4.4 denkleminin imajiner kısımlarının L_2 ve L_∞ hataları	52
Çizelge 4.21. Test problemi 4.5 denkleminin yaklaşık ve tam çözümlerinin reel kısımlarının karşılaştırılması	54
Çizelge 4.22. Test problemi 4.5 denkleminin yaklaşık ve tam çözümlerinin reel kısımlarının mutlak hatasının hesaplanması.....	55
Çizelge 4.23. Test problemi 4.5 denkleminin reel kısımlarının L_2 ve L_∞ hataları	55
Çizelge 4.24. Test problemi 4.5 denkleminin yaklaşık ve tam çözümlerinin imajiner kısımlarının karşılaştırılması	57
Çizelge 4.25. Test problemi 4.5 denkleminin yaklaşık ve tam çözümlerinin imajiner kısımlarının mutlak hatasının hesaplanması.....	57
Çizelge 4.26. Test problemi 4.5 denkleminin imajiner kısımlarının L_2 ve L_∞ hataları	58

1. GİRİŞ

Kompleks sayıların tarihsel gelişimi, insanların bilimsel olaylara yaklaşımının zamanla nasıl değiştiğini gösteren en güzel örneklerden biridir. Sayı kavramının geçmişi on binlerce yıl öncesine dayanıyor olmasına rağmen negatif sayıların varlığı Avrupa’da 16. yüzyılda kabul gördü. Negatif sayıların bile bu kadar geç kabul edildiği dikkate alındığında karesi negatif olan sayıların kabulü daha zor olacaktı.

İtalyan matematikçi Girolami Cardano(1501-1576) 1545 yılında yayınladığı “Ars Magna” adlı eserinde ilk kez üçüncü dereceden denklemlerin çözümünde $\sqrt{-1}$ ifadesini kullanmıştır, ancak detaylandırmamıştır. Cardano’dan sonra 1572 yılında Rafael Bombelli(1572-1572) Cebir adlı çalışmasında $\sqrt{-1}$ ’i detaylı ele almıştır. 1637 yılında Fransız filozof René Descartes(1596-1650) ilk kez bu sayılar için “imaginary” ifadesini kullanmış, yani negatif bir sayının karekökünü ‘sanal’ olarak nitelemiştir. 1777 yılında Leonhard Euler(1707-1783) ‘Algebra’ isimli çalışmasında sanal sayıları göstermek için ‘i’ harfini kullanmıştır. Karmaşık(Complex) sözcüğünü ilk defa Carl Friedrich Gauss(1777-1855) kullanmıştır. Gauss, karmaşık sayıları bir düzlem üzerinde noktalar şeklinde düşünerek ‘kompleks analiz’ dalının temellerini atmıştır. Bu yüzden karmaşık düzleme Gauss düzlemi de denir.

Diferansiyel denklemlerin gelişimi de karmaşık sayıların geliştiği döneme denk gelmektedir. Her iki alana katkı yapmış bilim adamları vardır. Diferansiyel denklemler konusunda yapılan ilk çalışmalar, 17. yüzyılın ikinci yarısında İngiliz matematikçi Newton (1642-1727) ve Alman matematikçi Leibnitz (1641-1716) ile başlar. İsviçreli matematikçilerden Bernouilli kardeşler, 18. yüzyılda Euler(1707-1783), Clairaut(1713-1765), Lagrange(1736-1813), D Alembert(1717-1783), Monge(1746-1818), Laplace(1749-1827) ile 19. yüzyılda Cauchy(1789-1857), Jacobi(1804-1851), Ampere(1775-1836), Darboux(1842-1917) ve F.G. Frobenius(1849-1917), diferansiyel denklemler teorisini, bugünkü ileri seviyeye getiren matematikçilerdir.

Belli tip diferansiyel denklemlerin belli şartlar altında bir çözümlerinin mevcut olmasının ispatı, diferansiyel denklemler teorisinde varlık teoremi konusunu teşkil etmekte olup, ilk olarak 1820 ile 1830 yılları arasında Fransız matematikçi A.L. Cauchy tarafından tesis edilmiş ve daha sonra gelenler tarafından geliştirilmiştir.

Ortogonal polinomlar adi ve kısmi diferansiyel denklemler, integro-diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılmıştır. Bilhassa S. E. El-Gendi (El-Gendi 1969) ve Mehmet Sezer (Sezer 1985; Sezer 1989), (Sezer and Dogan 1996) adi diferansiyel, integral ve integro-diferansiyel denklemlerin Taylor, Chebyshev ve Legendre polinomları cinsinden çözümü için matris yöntemleri vermiştir.

Son zamanlarda yapılan çalışmalarda farklı tip diferansiyel denklemler farklı metodlarla çözülmüştür. Bu metodlar; Tau Method (Hosseini and Shahmorad 2003; Shahmorad and Hosseini 2003; Shahmorad 2005; Mahmoud *et al.* 2005), Chebyshev Matrix Method (Keşan 2003; Akyüz-Daşcıoğlu 2007; Gülsu *et al.* 2010, 2011; Öztürk and Gülsu 2012, 2015), Taylor Matrix Method (Gülsu *et al.* 2006; Bülbül and Sezer 2010), Bessel Matrix Method (Sezer and Yüzbaşı 2010; Yüzbaşı 2011, 2012; Yüzbaşı *et al.* 2011; Yüzbaşı and Sezer 2012), Legendre Multiwavelet Galerkin Method (Yousefi 2008), Hermite Matrix Method (Yüzbaşı *et al.* 2011), Laguerre Matrix Method (Gülsu *et al.* 2011), Legendre Matrix Method (Tohidi 2012; Düşünceli and Çelik 2015), Bernoulli Matrix Method (Bhrawy *et al.* 2012; Tohidi 2012; Tohidi *et al.* 2013), Exponential Matrix Method (Yüzbaşı and Sezer; 2013).

Bu tezde;

$$\sum_{n=0}^m P_n(z) f^{(n)}(z) = g(z)$$

$$f^{(t)}(\alpha) = \vartheta_t \quad t = 0, 1, \dots, m - 1$$

Başlangıç koşulları ile verilen lineer kompleks diferansiyel denklemlerin,

$$f(z) = \sum_{n=0}^N a_n L_n(z), z \in D$$

Legendre polinom serileri ile

$$z_{pp} = z_0 + \frac{r}{N} p e^{\frac{i\theta}{N} p}, 0 < \theta \leq 2\pi, r \in R^+, p \in 0, 1, \dots, N$$

Kollokasyon noktaları kullanılarak nümerik çözüm elde edilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde tezde sık kullanılan bazı temel tanım ve kavramsal bilgiler verilecektir.

Tanım 2.1: Bir bağımsız değişken ile bir bağımlı değişken ve bağımlı değişkenin bağımsız değişkene göre türevlerini ihtiva eden denkleme diferansiyel denklem denir. Genel olarak;

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (2.1)$$

şeklinde gösterilir. Burada $y^{(n)}$, y 'nin x 'e göre n 'inci türevidir. (2.1) denklemini $y^{(n)}$ ye göre çözülebilirse;

$$y^{(n)} = g(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2.2)$$

formu elde edilir. Bu ise (2.1) ifadesinin açık formda yazılmış şeklidir.

Tanım 2.2: x bir reel değişken olmak üzere

$$p_n y^{(n)} + p_{(n-1)}(x) y^{(n-1)} + \dots + p_1(x) y' + p_0(x) y = r(x)$$

şeklindeki denklemlere lineer diferansiyel denklem denir. Burada, eşitliğin sağ tarafındaki r ve sol tarafta ki $p_0 p_1 p_2 \dots p_{(n-1)} p_n$ katsayıları x değişkenine bağlıdır.

Tanım 2.3: m . dereceden bir

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m$$

polinomunu göz önüne alalım. Bu polinomun sıfıra eşitlenmesiyle elde edilen,

$$f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_{m-1}x + a_m = 0$$

şeklindeki denkleme cebirsel denklem denir. Pozitif m tamsayısına $f(x) = 0$ denkleminin derecesi denir. $f(x)$ polinomunda $f(x_i) = 0$ denklemini sağlayan x_i ye denklemin kökü denir.

Tanım 2.4: $z = a + bi$ şeklinde yazılan ve genelde z harfiyle gösterilen sayılara karmaşık sayı denir. Burada a, b sayıları reel sayılardır, i sanal birimi ise $i^2 = -1$ şeklindedir. Kimi zaman i yerine, j kullanılır. Matematikte bu sayıların uzayı \mathbb{C} olarak gösterilir. Reel sayılar, sanal kısımları sıfıra eşit olan birer karmaşık sayı olarak düşünülebilir. Diğer bir deyişle reel sayılar, karmaşık sayı düzleminde reel sayılar eksenini üzerinde bulunurlar. Bir z karmaşık sayısının reel ve sanal parçaları sırasıyla $Re(z)$ ve $Im(z)$ fonksiyonlarıyla gösterilir.

Tanım 2.5: A , $n \times n$ tipinde bir matris olsun. Eğer $|A| \neq 0$ ise A matrisine (tersi mevcut ise) non-singüler (regüler) matris, $|A| = 0$ ise A matrisine (tersi mevcut olmayan) singüler (regüler olmayan) matris denir.

Tanım 2.6: A , n . mertebeden bir regüler matris ($|A| \neq 0$) ise $Ax = B$ lineer denklem sisteminin tek çözümü vardır ve bu çözüm

$$x = A^{-1}B$$

eşitliği ile verilir.

Burada anlatılmak istenen

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}$$

lineer denklem sisteminin çözümü; Δ , A matrisinin determinanı olmak üzere,

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, \Delta x_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

determinantları hesaplanır

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta x_n}{\Delta}$$

tek çözümü bulunur. $Ax = B$ lineer denklemini çözmek için uygulanan bu kurala Cramer Kuralı denir (Çelik 2002).

Tanım 2.7: x bir değişken ve c bir sabit olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n = a_0 + a_1(x - c) + a_2(x - c)^2 + \dots + a_n(x - c)^n + \dots$$

serisine c merkezli kuvvet serisi denir.

Tanım 2.8: Eğer $f(x)$ fonksiyonunun $x = c$ de her mertebeden türevi varsa

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n + \dots$$

serisine $f(x)$ fonksiyonunun $x_0 = c$ 'deki Taylor serisi denir. Eğer $c = 0$ alınırsa bu seriye $f(x)$ fonksiyonunun Maclaurin serisi adı verilir.

Tanım 2.9: (Euler Formülü): x bir reel sayı olmak üzere,

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

olarak tanımlanır.

$x = \pi$ alınırsa; $e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1$ elde edilir. Buna **Euler özdeşliği** denir.

Tanım 2.10: Euler formülü kullanılarak, $e^z = e^{x+iy}$ kompleks üstel fonksiyonu aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$$

Tanım 2.11: $x \in R$ olmak üzere, reel hiperbolik fonksiyonlardan $\sinh(x)$ ve $\cosh(x)$ tanımını şu şekildedir.

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Tanım 2.12: $z = x + iy$ olmak üzere $\sin(z)$ ve $\cos(z)$ kompleks trigonometrik fonksiyonların eşitleri aşağıdaki şekildedir.

$$\sin(z) = \sin(x) \cosh(y) + i\sinh(y) \cdot \cos(x)$$

$$\cos(z) = \cos(x) \cosh(y) - i\sinh(y) \cdot \sin(x)$$

Tanım 2.13: Reel hiperbolik fonksiyonlarda x yerine z yazılırsa, kompleks hiperbolik fonksiyonlar elde edilir.

$$\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

Tanım 2.14: $f: \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \log(z)$ fonksiyonuna kompleks logaritma fonksiyonu denir ve şu şekilde tanımlanabilir.

$$\log(z) = \ln|z| + i \arg(z)$$

2.1. Kompleks Fonksiyonların Diferansiyellenebilmesi

$A \subset \mathbb{C}$, $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve z_0 , A nın bir iç noktası olmak üzere,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti varsa $f(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında diferansiyelenebilirdir denir. Bu limitin değeri $f'(z_0)$ ile temsil edilir ve buna $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktasındaki türevi denir.

Yani,

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

olarak yazılır. Burada $h = z - z_0$ alınır;

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

olur.

Şayet, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$ limiti yoksa $f(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında diferansiyellenemez denir.

Bu tanıma göre; $f: A \rightarrow C$ fonksiyonunun tanım kümesindeki noktalar, fonksiyonun diferansiyellenebildiği ve diferansiyellenemediği noktalar diye iki kümeye ayrılabilir. Bu kümeler sırasıyla A_1 ve A_2 diye belirtilsin. $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ ve $A_1 \cup A_2 = A$ olur. Eğer $A_1 = \emptyset$ ise f fonksiyonu hiçbir noktada diferansiyellenemez, $A_2 = \emptyset$ ise f fonksiyonu her noktada diferansiyellenebilir. Hem $A_1 \neq \emptyset$ hem de $A_2 \neq \emptyset$ olması mümkündür.

Reel değişkenlerle verilen $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ kompleks fonksiyonunun $z_0 = x_0 + iy_0$ noktasında diferansiyellenebilmesi ile bu fonksiyonun reel ve imajiner kısımları olan $u(x, y), v(x, y)$ iki değişkenli fonksiyonları arasındaki ilişki aşağıdaki teoremden verilmiştir.

Teorem 2.1.1: $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ fonksiyonu $z_0 = x_0 + iy_0$ noktasında diferansiyellenebilir ise aşağıda verilen Cauchy-Riemann denklemleri sağlanır.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} &= \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} &= -\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x} \end{aligned}$$

Bir fonksiyonun bir noktada Cauchy-Riemann denklemlerini sağlaması fonksiyonunun o noktada diferansiyellenebildiği anlamına gelmez. Bunun için ekstra şartlara ihtiyaç vardır. Bu sonraki teoremden verilecektir. Ancak bir fonksiyon bir noktada Cauchy-

Riemann denklemlerini sağlamıyorsa o noktada diferansiyellenemez. Bunu aşağıdaki örnekle açıklayabiliriz.

Örnek 2.1: $f(z) = \bar{z}$ fonksiyonu hiçbir noktada Cauchy-Riemann denklemlerini sağlamadığından hiçbir noktada diferansiyellenemez.

$z = x + iy$ için $f(x, y) = x - iy$ olarak yazılır. Bu durumda

$$\begin{aligned} u(x, y) &= x \\ v(x, y) &= -y \end{aligned}$$

olur.

$$u_x(x, y) = 1 \quad u_y(x, y) = 0 \quad v_x(x, y) = 0 \quad v_y(x, y) = -1$$

eşitliklerinden görüldüğü üzere hiçbir noktada Cauchy-Riemann denklemleri sağlanmadığından bu fonksiyon hiçbir noktada diferansiyellenemez.

Teorem 2.1.2: $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ fonksiyonu verilsin. Şayet;

i) $z_0 = x_0 + iy_0$ noktası fonksiyonun bir iç noktası

ii) $f(z)$, z_0 noktasında sürekli

iii) z_0 noktasının bir komşuluğunda u_x, u_y, v_x, v_y kısmi türevleri var ve sürekli

iv) z_0 noktasında Cauchy-Riemann denklemleri sağlanıyor ise $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında diferansiyellenebilirdir.

2.2. Holomorf Fonksiyon

Holomorf fonksiyonlar karmaşık analizin temel çalışma araçlarından biridir. Bu fonksiyonlar karmaşık düzlemin yani C 'nin açık bir altkümesinde tanımlı, bu altkümedeki her noktada karmaşık anlamda türevli ve aldığı değerler yine C içinde olan fonksiyonlardır. Daha derin anlamda, holomorf fonksiyon sonsuz defa türevlenebilir ve Taylor serisi ile tanımlanabilir. Karmaşık düzlemin tümünde holomorf olan fonksiyona tam fonksiyon adı verilir. Analitik fonksiyonlar sınıfının karmaşık analizde holomorf fonksiyonlar sınıfı ile aynı olması karmaşık analizde önemli bir teoremdir.

Tanım 2.2.1: $f(z)$ fonksiyonu bir z_0 noktasında ve bu noktanın uygun bir komşuluğunda diferansiyellenebiliyorsa $f(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında analitiktir denir.

Tanım 2.2.2: A ve B kompleks sayılar kümesinde boş olmayan iki açık küme ve $B \subset A$ olsun. $f: A \rightarrow C$ fonksiyonu B kümesinin her noktasında analitik ise $f(z)$ fonksiyonuna B kümesinde analitik fonksiyondur denir. $f(z)$ fonksiyonu A kümesinde analitik ise $f(z)$ fonksiyonuna analitik fonksiyon adı verilir.

Teorem 2.2.1: $f(z)$ ve $g(z)$, bir z_0 noktasında analitik olan iki fonksiyon olsun.

i) $f(z) + g(z)$ fonksiyonu,

ii) $f(z)g(z)$ fonksiyonu,

iii) $g(z_0) \neq 0$ olmak üzere, $\frac{f(z)}{g(z)}$ fonksiyonu,

z_0 noktasında analitiktir.

Teorem 2.2.2: $f: A \rightarrow C$ ve $g: B \rightarrow C$ iki fonksiyon, $f(A) \subset B$ olsun. $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında ve $g(z)$ fonksiyonu $w_0 = f(z_0)$ noktasında analitik ise $(g \circ f)(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında analitiktir.

2.3. Lineer Kompleks Diferansiyel Denklemler

n . mertebeden lineer homojen kompleks diferansiyel denklem $P_k(z)w^{(n-k)}(z)$ formundaki terimlerin toplamının sıfıra eşitlenmesiyle elde edilir. Yani;

$$\sum_{k=0}^n P_k(z)w^{(n-k)}(z) = P_0(z)w^{(n)}(z) + P_1(z)w^{(n-1)}(z) + \dots + P_n(z)w(z) = 0 \quad (2.3)$$

şeklindedir. (2.3) denkleminin genel çözümü n tane keyfi sabit içerir.

$$w(z_0) = w_0, w'(z_0) = w_1, \dots, w^{(n-1)}(z_0) = w_{n-1} \quad (2.4)$$

(2.3), (2.4) başlangıç değer problemi $z = z_0$ noktası problemin singüler noktası olmaması koşuluyla tek çözüme sahiptir.

Denklem

$$P_0(z)w^{(n)}(z) + P_1(z)w^{(n-1)}(z) + \dots + P_n(z)w(z) = Q(z) \quad (2.5)$$

şeklinde ise n . mertebeden lineer kompleks homojen olmayan diferansiyel denklem denir. Bu denklemin çözümü $m(z)$ genel çözüm ve $n(z)$ özel çözüm olmak üzere $m(z) + n(z)$ şeklindedir.

Aşağıda lineer kompleks diferansiyel denklemlere birkaç örnek verilmiştir.

Örnek 2.2:

$$w'(z) + w(z) = z, w(0) = 0$$

Başlangıç değer probleminin genel çözümü $e^{-z} - 1$, özel çözümü $z - 1$ olmak üzere $e^{-z} + z - 2$ şeklindedir.

Örnek 2.3:

$$f''(z) + zf(z) = e^z + ze^z$$

Denklemini lineer 2.mertebeden homojen olmayan diferensiyel denklem tipidir. Başlangıç değerleri $f(0) = 1, f'(0) = 1$ için denklemin tam çözümü $f(z) = e^z$ dir

Örnek 2.4:

$$f''(z) + zf'(z) + 2zf(z) = 2z\sin z + z\cos z - \sin z$$

Denklemini lineer 2.mertebeden homojen olmayan diferensiyel denklem tipidir. Başlangıç değerleri $f(0) = 1, f'(0) = 1$ için denklemin tam çözümü $f(z) = \sin z$ dir.

Örnek 2.5:

$$(1 - z^2)f''(z) - 2zf'(z) + 6f(z) = (z^2 + 5)\cos(z) + 2\sin(z)$$

Denklemini lineer 2.mertebeden homojen olmayan diferensiyel denklem tipidir. Başlangıç değerleri $f(0) = \frac{1}{2}, f'(0) = 0$ için denklemin tam çözümü $f(z) = \frac{3}{2}z^2 - \frac{1}{2} + \cos(z)$ dir

2.3.1. Birinci mertebeden lineer kompleks diferansiyel denklemler

Birinci mertebeden lineer kompleks diferansiyel denklemler

$$w'(z) = P_0(z) + P_1(z)w(z)$$

şeklindedir. Bu denklemin çözümü için $w = uv$ alınırsa;

$$\begin{aligned}(uv)' &= P_0(z) + P_1(z)uv \\ u'v + uv' &= P_0(z) + P_1(z)uv\end{aligned}$$

olur. Buradan $uv' = P_1(z)uv$ alınırsa;

$$\begin{aligned}uv' &= P_1(z)uv \\ v' &= P_1(z)v \\ \frac{v'}{v} &= P_1(z) \\ v &= e^{\int P_1(s)ds}\end{aligned}$$

ve $u'v = P_0(z)$ den;

$$\begin{aligned}u'v &= P_0(z) \\ u' &= P_0(z)e^{-\int P_1(s)ds} \\ u(z) &= c + \int P_0(t)e^{-\int P_1(s)ds} dt\end{aligned}$$

Bulduğumuz sonuçları $w = uv$ yerine yazarsak;

$$w(z) = (e^{\int P_1(s)ds})(c + \int P_0(t)e^{-\int P_1(s)ds} dt)$$

çözümü elde edilir (Hille 1976).

2.3.2. İkinci mertebeden lineer kompleks diferansiyel denklemler

Riccati ile ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklem arasında yakın bir ilişki vardır.

$$y'(z) = f_0(z) + f_1(z)y(z) + f_2(z)(y(z))^2 \quad (2.6)$$

$$w''(z) + P(z)w'(z) + Q(z)w(z) = 0 \quad (2.7)$$

(2.6) riccati denkleminde $y(z)$ yerine,

$$y(z) = -\frac{1}{f_2(z)} \frac{w'(z)}{w(z)}$$

yazıldığında

$$w''(z) - \{f_2'(z)[f_2(z)]^{-1} + f_1(z)\}w'(z) + f_1(z)f_2(z)w(z) = 0$$

elde edilir. Burada;

$$P(z) = f_2'(z)[f_2(z)]^{-1} + f_1(z)$$

$$Q(z) = f_1(z)f_2(z)$$

alındığında ikinci mertebeden lineer kompleks diferansiyel denklem (2.7) elde edilir (Hille 1976).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde tezde kullanılacak olan metod temellendirilmiş, kullanım adımları detaylandırılmıştır.

3.1. Legendre Polinomları

$$(1 - z^2)w''(z) - 2zw'(z) + a(a + 1)w(z) = 0 \quad (3.1)$$

yada

$$\frac{d}{dz} \left[(1 - z^2) \frac{dw}{dz} \right] + a(a + 1)w(z) = 0$$

diferansiyel denklemlerine Legendre denklemi denir. Burada a verilmiş bir pozitif reel sayıdır. (3.1) denkleminin bir çözümüne legendre fonksiyonu denir.

$|z| = 1$, legendre denkleminin denkleminin aykırı noktalarıdır. Bunların dışındaki tüm noktalar, özellikle $z = 0$ noktası civarındaki çözümleri önemlidir. Bu nokta civarındaki çözümler $|z| < 1$ dairesel bölgesinde yakınsak kuvvet serisi açılımına sahiptir.

Bu çözümleri elde etmek için

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad (3.2)$$

ve bunun türevlerini (3.1) de yerlerine yazılır. Gerekli işlemlerden sonra

$$2c_2 + a(a+1)c_0 + [6c_3 + (a-1)(a+2)c_1]z + \sum_{n=2}^{\infty} [(n+1)(n+2)c_{n+2} + (a-n)(a+n+1)c_n]z^n = 0$$

Özdeşlik teoremi gereği,

$$\begin{aligned} 2c_2 + a(a+1)c_0 &= 0 \\ 6c_3 + (a-1)(a+2)c_1 &= 0 \\ (n+1)(n+2)c_{n+2} + (a-n)(a+n+1)c_n &= 0 \quad (n = 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{-a(a+1)}{2} c_0 \\ c_3 &= \frac{-(a-1)(a+2)}{6} c_1 \\ &\vdots \\ c_{n+2} &= \frac{-(a-n)(a+n+1)}{(n+1)(n+2)} c_n \quad (n = 2, 3, \dots) \end{aligned} \tag{3.3}$$

elde edilir. (3.3) genel indirgeme formülüdür. Bu formülden ardışık olarak

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{-a(a+1)}{2} c_0 & c_3 &= \frac{-(a-1)(a+2)}{6} c_1 \\ c_4 &= \frac{-(a-2)(a+3)}{4 \cdot 3} c_2 & c_5 &= \frac{-(a-3)(a+4)}{5 \cdot 4} c_3 \\ &= \frac{(a-2)a(a+1)(a+3)}{4!} c_0 & &= \frac{(a-3)(a-1)(a+2)(a+4)}{5!} c_1 \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned}$$

elde edilir. Bu katsayılar (3.2) de yerlerine yazılırsa,

$$w = c_0 w_1(z) + c_1 w_2(z) \tag{3.4}$$

bulunur. Burada

$$w_1(z) = 1 - \frac{a(a+1)}{2!}z^2 + \frac{(a-2)a(a+1)(a+3)}{4!}z^4 - \dots \quad (3.5)$$

$$w_2(z) = z - \frac{(a-1)(a+2)}{3!}z^3 + \frac{(a-3)(a-1)(a+2)(a+4)}{5!}z^5 - \dots \quad (3.6)$$

dir. Her iki seri $|z| < 1$ bölgesinde yakınsaktır.(3.4) serisi yalnız z nin çift kuvvetlerini, (3.5) serisi ise yalnız z nin tek kuvvetlerini ihtiva eder. w_1 ve w_2 lineer bağımsız olduğundan (3.4) denklemi, $|z| < 1$ bölgesinde legendre denkleminin genel çözümüdür.

Bu polinomlar tek formülle ifade edilebilir. Bunun için (3.3) genel indirgeme formülünü c_n ye göre çözüldüğünde,

$$c_n = \frac{(n+1)(n+2)}{-(a-n)(a+n+1)} c_{n+2}$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned} c_{a-2} &= \frac{-(a-1)a}{2(2a-1)} c_a \\ c_{a-4} &= \frac{-(a-2)(a-3)}{4(2a-3)} c_{a-2} \\ &= \frac{a(a-1)(a-2)(a-3)}{2.4.(2a-1)(2a-3)} c_a \end{aligned}$$

ve genel olarak

$$c_{a-2r} = (-1)^r \frac{a(a-1)(a-2) \dots (a-2r+1)}{2.4.(2r)(2a-1)(2a-3) \dots (2a-2r+1)} c_a$$

yazılabilir. Böylece a çift ise $w_1(z)$ ve a tek ise $w_2(z)$ polinomu,

$$\begin{aligned} w(z) &= c_a x^a + c_{a-2} z^{a-2} + c_{a-4} z^{a-4} + \dots \\ &= \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{1}{2}a \rfloor} c_{a-2r} z^{a-2r} \\ &= c_a \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{1}{2}a \rfloor} (-1)^r \frac{a(a-1)(a-2)\dots(a-2r+1)}{2 \cdot 4 \cdot (2r)(2a-1)(2a-3)\dots(2a-2r+1)} z^{a-2r} \end{aligned} \quad (3.7)$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada $\lfloor \frac{1}{2}a \rfloor$ tamdeğer fonksiyonudur. Yani,

$$\lfloor \frac{1}{2}a \rfloor = \begin{cases} \frac{a}{2} & a \text{ çift} \\ \frac{a-1}{2} & a \text{ tek} \end{cases}$$

dir. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned} a(a-1)(a-2)\dots(a-2r+1) &= \frac{a!}{(a-2r)!} \\ 2 \cdot 4 \dots (2r) &= 2^r r! \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (2a-1)(2a-3)\dots(2a-2r+1) &= \frac{2a(2a-1)(2a-2)(2a-3)\dots(2a-2r+1)}{2a(2a-2)(2a-4)\dots(2a-2r+2)} \cdot \frac{(2a-2r)!}{(2a-2r)!} \\ &= \frac{(2a)!}{2^r a(a-1)\dots(a-r+1)(2a-2r)!} \\ &= \frac{(2a)!(a-r)!}{2^r a!(2a-2r)!} \end{aligned}$$

olduğu göz önünde bulundurulursa, (3.7) den

$$w(z) = c_a \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{1}{2}a \rfloor} (-1)^r \frac{(a!)^2 (2a-2r)!}{r! (a-2r)! (a-r)! (2a)!} z^{a-2r}$$

elde edilir. Bu, c_a nın her değeri için Legendre denkleminin bir çözümüdür. c_a ,

$$c_a = \frac{(2a)!}{2^a (a!)^2}$$

olarak seçilirse, a . dereceden Legendre polinomu denilen ve $P_a(z)$ ile gösterilen

$$P_a(z) = \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{1}{2}a \rfloor} (-1)^r \frac{(2a-2r)!}{2^a r! (a-2r)! (a-r)!} z^{a-2r}$$

polinomu elde edilir.

Özel olarak;

$$\begin{aligned} P_0(z) &= 1 \\ P_1(z) &= z \\ P_2(z) &= \frac{1}{2}(3z^2 - 1) \\ P_3(z) &= \frac{1}{2}(5z^3 - 3z) \\ P_4(z) &= \frac{1}{8}(35z^4 - 30z^2 + 3) \\ P_5(z) &= \frac{1}{8}(63z^5 - 70z^3 + 15z) \end{aligned}$$

olur.

Legendre polinomunun önemli özelliği $|z| < 1$ bölgesinde ortogonal (dik) olmasıdır.

Yani, $l \neq m$ için,

$$\int_{|z|=1} P_l(z) P_m(z) dz = 0$$

olmasıdır.

3.2. Operasyonel Matris Teşkili

Bu kısımda lineer kompleks diferansiyel denklemlerin legendre polinomları ile nümerik çözümünde kullanılacak matris formlar oluşturulacaktır. Lineer kompleks diferansiyel denklem başlangıç koşullarıyla aşağıdaki şekilde ifade edilebileceği belirtilmiştir.

$$\sum_{n=0}^m P_n(z) f^{(n)}(z) = g(z) \quad (3.8)$$

$$f^{(t)}(\alpha) = \vartheta_t \quad t = 0, 1, \dots, m - 1 \quad (3.9)$$

Burada $f(z)$ bilinmeyen fonksiyon, $P_n(z)$ ve $g(z)$, $D = \{z = x + iy, z \in \mathbb{C}, |z - z_0| \leq r, r \in \mathbb{R}^+\}$ dairesel bölgesinde analitik fonksiyonlardır. $\alpha, z_0 \in D$ ve ϑ_t uygun reel veya kompleks sabitlerdir.

(3.8) denkleminin (3.9) başlangıç koşulları altındaki yaklaşık çözümü aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$f(z) = \sum_{n=0}^N a_n L_n(z), \quad z \in D \quad (3.10)$$

$f(z)$ fonksiyonunun legendre serileri çözümünde a_n bulunması gereken legendre katsayılarıdır. Kollokasyon noktaları aşağıdaki bağıntıyla elde edilebilir.

$$z_{pp} = z_0 + \frac{r}{N} p e^{\frac{i\theta}{N} p}, \quad 0 < \theta \leq 2\pi, r \in \mathbb{R}^+, p \in 0, 1, \dots, N \quad (3.11)$$

Legendre polinomlarının matris formu,

$$L(z) = [L_0(z - z_0) \quad L_1(z - z_0) \quad \dots \quad L_N(z - z_0)]$$

Burada,

$$\begin{aligned} L_0(z) &= 1 \\ L_1(z) &= z \\ L_2(z) &= \frac{1}{2}(3z^2 - 1) \\ &\vdots \end{aligned}$$

(3.10) denkleminin istenen çözümü,

$$f(z) = L(z)A; A = [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_N]^T \quad (3.12)$$

şeklinde yazılabilir.

Diğer taraftan,

N tek ise,

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 7 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 3 & 0 & 7 & \dots & 2N-3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & \dots & 0 & 2N-1 & 0 \end{bmatrix}_{N+1 \times N+1}$$

N çift ise,

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 7 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 5 & 0 & \dots & 2N-3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 7 & \dots & 0 & 2N-1 & 0 \end{bmatrix}_{N+1 \times N+1}$$

$L(z)$ matrisi ile onun türevleri olan $L'(z), L''(z), \dots, L^{(n)}(z)$ matrisleri arasındaki ilişki

$$\begin{aligned} L'(z) &= L(z)M^T A \\ L''(z) &= L(z)(M^T)^2 A \\ &\vdots \\ L^{(n)}(z) &= L(z)(M^T)^n A \end{aligned} \quad (3.13)$$

şeklindedir.

(3.12) ve (3.13) bağıntıları kullanılarak aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$f^{(n)}(z) = L^{(n)}(z)M^T A = L(z)(M^T)^n A \quad (3.14)$$

Kollokasyon noktaları (3.14) denkleminde $z = z_{pp}$ yerine yazılarak aşağıdaki matris denklemini elde edilir.

$$f^{(n)}(z_{pp}) = L(z_{pp})(M^T)^n A, p \in 0, 1, \dots, N \quad (3.15)$$

$p = 0, 1, \dots, N$ değerleri (3.15) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} f^{(n)}(z_{00}) &= L(z_{00})(M^T)^n A \\ f^{(n)}(z_{11}) &= L(z_{11})(M^T)^n A \\ &\vdots \\ f^{(n)}(z_{NN}) &= L(z_{NN})(M^T)^n A \end{aligned}$$

olur.

Burada,

$$L = \begin{bmatrix} L_{00} \\ L_{11} \\ \vdots \\ L_{NN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_0(z_{00}) & L_1(z_{00}) & L_2(z_{00}) & \cdots & L_N(z_{00}) \\ L_0(z_{11}) & L_1(z_{11}) & L_2(z_{11}) & \cdots & L_N(z_{11}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ L_0(z_{NN}) & L_1(z_{NN}) & L_2(z_{NN}) & \cdots & L_N(z_{NN}) \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Kollokasyon noktalarını (3.11), (3.8) denkleminde yazarsak,

$$\sum_{n=0}^m P_n(z_{pp}) f^{(n)}(z_{pp}) = g(z_{pp}) \quad (3.16)$$

(3.14)–(3.16) bağıntıları kullanılarak temel matris bağıntıları elde edilmiş olur.

$$\sum_{n=0}^m \sum_{p=0}^N P_n L(z_{pp}) (M^T)^n A = \sum_{p=0}^N G_p \quad (3.17)$$

Burada,

$$P_n = \begin{bmatrix} P_n(z_{00}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_n(z_{11}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P_n(z_{NN}) \end{bmatrix}$$

ve

$$G_p = \begin{bmatrix} g(z_{00}) \\ g(z_{11}) \\ \vdots \\ g(z_{NN}) \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Bilinmeyen A matrisini bulmak için oluşturulan (3.17) matris denklemi,

$$W.A = G$$

veya

$$[W; G] = [w_{pp}; g_p] \quad p = 0, 1, \dots, N \quad (3.18)$$

şeklinde yeniden yazılabilir.

Burada,

$$W = \sum_{n=0}^m \sum_{p=0}^N P_n L(z_{pp}) (M^T)^n$$

ve

$$A = [a_0 \quad a_1 \quad \dots \quad a_N]^T$$

şeklindedir.

Ayrıca (3.9) başlangıç koşullarına uygun matris formu (3.14) denklemi yardımıyla oluşturulabilir.

$$f^{(t)}(\alpha) = L(\alpha)(M^T)^t A = \vartheta_t \quad t = 0, 1, \dots, m - 1$$

Başka bir ifadeyle başlangıç koşulları matris formu aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$U_t A = \vartheta_t \quad t = 0, 1, \dots, m-1$$

Burada,

$$U_t = L(\alpha)(M^T)^t \quad t = 0, 1, \dots, m-1$$

Bu denklemin arttırılmış matrisi,

$$[U_t; \vartheta_t] = [u_{t0}, u_{t1}, \dots, u_{tN}; \vartheta_t] \quad t = 0, 1, \dots, m-1 \quad (3.19)$$

Son olarak; (3.9) başlangıç koşulları altında (3.8) denkleminin nümerik çözümüyle ilgili bilinmeyen legendre katsayılarını $a_n, n = 0, 1, \dots, N$, bulmak için, (3.18) arttırılmış matrisinin son m satırı yerine (3.19) başlangıç koşullarını ifade eden m satırlı arttırılmış matris yazılır. Böylece yeni arttırılmış matris elde edilir.

$$[\tilde{W}; \tilde{G}] = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & \cdots & w_{0N} & ; & g_0 \\ w_{10} & w_{11} & \cdots & w_{1N} & ; & g_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{N-m,0} & w_{N-m,1} & \cdots & w_{N-m,N} & ; & g_N \\ u_{00} & u_{01} & \cdots & u_{0N} & ; & \vartheta_0 \\ u_{10} & u_{11} & \cdots & u_{1N} & ; & \vartheta_1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{m-1,0} & u_{m-1,1} & \cdots & u_{m-1,N} & ; & \vartheta_{m-1} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

veya

$$\tilde{W}A = \tilde{G}$$

Şayet $\det(\tilde{W}) \neq 0$ ise (3.20) denklemi $A = \tilde{W}^{-1}\tilde{G}$ formunda yazılabilir ve katsayılar matrisi olan A matrisi bulunabilir. Yani m . mertebeden lineer kompleks diferansiyel denklemin (3.8) verilen başlangıç koşulları (3.9) altındaki nümerik çözümü bulunabilir. Bu çözüm Legendre serileri (3.10) aracılığıyla bulunmuştur. Aynı zamanda bulunan çözümün doğruluğu kolaylıkla kontrol edilebilir. (3.8) denkleminin legendre serileri ile

bunulan çözümleri $f(z)$ ve onun türevleri yerine yazılır ve denklemleri yaklaşık olarak sağladığı görülür. Yani, $z = z_j \in D, j = 0, 1, 2, \dots$ için

$$E(z_j) = \left| \sum_{n=0}^m P_n(z_j) f^{(n)}(z_j) - g(z_j) \right| \cong 0$$

ya da

$$E(z_j) \leq 10^{-k_j} \text{ (} k_j \text{ herhangi bir pozitif tamsayı olmak üzere).}$$

olmalıdır. N kesme sınırı artırılarak tam çözüme daha yakın nümerik çözümler elde edilebilir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde, sabit veya değişken katsayılı lineer kompleks diferensiyel denklemler için sunulan metod beş problem üzerinde test edilmiş ve elde edilen yaklaşık çözümler ile analitik (tam) çözümlerin sayısal verileri tablolarda ve grafiklerde karşılaştırılmıştır.

Bir sayısal metodun doğruluğunun ve etkinliğinin belirlenebilmesi için hata ölçümü oldukça önemlidir. Bunun için bir önceki bölümde verilen mutlak hata fonksiyonu ile hata analizi yapılmış ve tablolarda ilgili alana işlenmiştir. Ayrıca aşağıda tanımlanmış olan L_2 ve L_∞ hata normları da kullanılarak hata ölçümü yapılmış ve sonuç tablolarla gösterilmiştir.

L_2 ve L_∞ normları; $U(z)$ tam çözüm, $U_N(z)$ nümerik çözüm olarak üzere,

$$L_2 = \|U - U_N\|_2 = \left(\sum_{j=0}^N (U_j - U_{Nj})^2 \right)^{1/2}$$

ve

$$L_\infty = \|U - U_N\|_\infty = \max |U_j - U_{Nj}|$$

şeklinde tanımlanır.

4.1. Test Problemi 1

Aşağıdaki 2. mertebeden sabit katsayılı lineer kompleks diferansiyel denklemi alalım.

$$y''(z) + y(z) = 2 \cdot e^z$$

Başlangıç şartları $y(0) = 1, y'(0) = 1$ olsun. Bu denklemin bilinen tam çözümü e^z dir.

Bu denklemin

$$y(z) = \sum_{n=0}^3 a_n L_n(z)$$

Şeklinde Legendre polinomu cinsinden ($N=3$) çözümünü bulalım.

Burada;

$$P_2(z) = 1, P_1(z) = 0, P_0(z) = 1 \text{ ve } g(z) = 2 \cdot e^z$$

dir. Burada $N = 3, z_0 = 0, r = 1, \theta = \pi$ için sıralama noktaları

$$z_{pp} = z_0 + \frac{r}{N} p e^{i\theta/N^p}, p \in 0, 1, \dots, N$$

bağıntısından aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+i\sqrt{3}}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1+i\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Legendre polinomunun matris formu aşağıdaki şekildedir.

$$\sum_{n=0}^2 \sum_{p=0}^3 P_n L_p(z_{pp}) (M^T)^n A = G$$

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0,1667 + 2,887i & -0,333 + 0,5774i & -1 \\ -0,5 & 0,5833 + 0,1443i & -0,8333 - 0,5774i & 1 \\ 0 & -0,3426 - 0,4430i & 1,2407 - 0,8660i & -1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(M^T)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(M^T)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Burada

$$(M^T)^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak alınmalıdır.

$$A = [a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3]^T$$

$W = \sum_{n=0}^2 \sum_{p=0}^3 P_n L(z_{pp})(M^T)^n$ alınırsa $W.A = G$ olur. Buradan $\tilde{W}.A = \tilde{G}$, $A = \tilde{W}^{-1}.\tilde{G}$ olur. $W, \tilde{W}, \tilde{W}^{-1}, G$ ve \tilde{G} matrisleri aşağıdaki şekilde bulunur.

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2,5 & 0 \\ 1 & 0,1667 + 0,2887i & 2,4167 + 0,1443i & 2,1574 + 3,8971i \\ 1 & -0,3333 + 0,5774i & 2,1667 - 0,5774i & -3,7593 + 7,7542i \\ 1 & -1 & 4 & -16 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2,5 & 0 \\ 1 & 0,1667 + 0,2887i & 2,4167 + 0,1443i & 2,1574 + 3,8971i \\ 1 & 0 & -0,5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1,5 \end{bmatrix}$$

\tilde{W}^{-1}

$$= \begin{bmatrix} 0,1667 & 0 & 0,8333 & 0 \\ -1,558 + 0,2502i & 0,1471 - 0,2646i & 0,0086 + 0,0144i & 0,8991 + 0,0016i \\ 0,3333 & 0 & -0,3333 & 0 \\ -0,1038 + 0,1668i & 0,0981 - 0,1746i & 0,0058 + 0,0096i & -0,0673 + 0,0011i \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 2 \\ 2,2650 + 0,6726i \\ 1,2008 + 0,7822i \\ 0,7358 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{G} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2,2650 + 0,6726i \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$A = \tilde{W}^{-1} \cdot \tilde{G}$ eşitliği kullanılarak katsayılar bulunabilir.

$$A = \begin{bmatrix} 0,1667 \\ 0,1074 + 0,0160i \\ 0,3333 \\ 0,0716 + 0,0107i \end{bmatrix}$$

Katsayılar $y(z) = \sum_{n=0}^3 a_n L_n(z)$ ifadesinde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} f(x, y) = & x^3(0,02675i + 0,17903) + x^2y(0,53708i - 0,08024) + 0,5x^2 \\ & + xy^2(-0,08024i - 0,53708) + xyi + x \\ & + y^3(0,02675 - 0,17903i) - 0,5y^2 + yi + 1 \end{aligned}$$

elde edilir.

N=8 için aynı işlemler yapılırsa;

$$\begin{aligned} f(x, y) = & x(1 + 3,305 \cdot 10^{-16}i) + y(i - 3,305 \cdot 10^{-16}) \\ & + (x + yi)^2(0,5 + 6,919 \cdot 10^{-15}i) + (x + yi)^3(0,167 - 6,798 \cdot 10^{-8}i) \\ & + (x + yi)^4(0,042 + 6,694 \cdot 10^{-7}i) \\ & + (x + yi)^5(0,083 - 3,8405 \cdot 10^{-7}i) \\ & + (x + yi)^6(0,0014 + 0,000006i) + (x + yi)^7(0,0002 + 0,000003i) \\ & + (x + yi)^8(0,00002 + 0,000007i) + 1 - 3,61 \cdot 10^{-16}i \end{aligned}$$

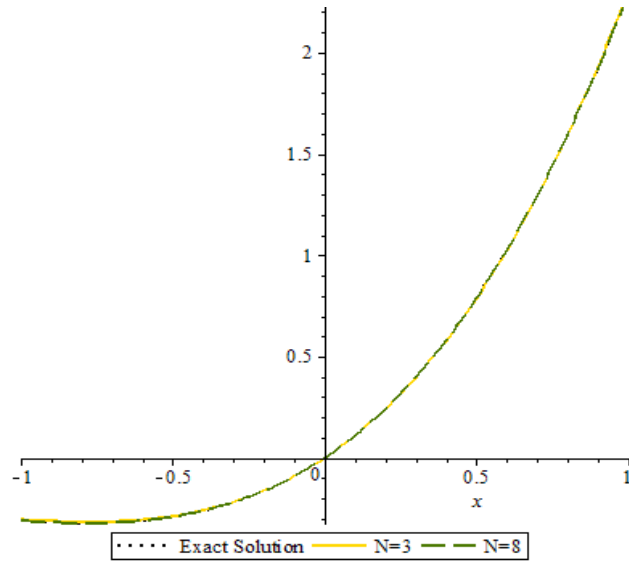
fonksiyonu elde edilir.

Çizelge 4.1. Test problemi 4.1 denkleminin yaklaşık ve tam çözümlerinin reel kısımlarının karşılaştırılması ve mutlak hatanın ($e_N(z_j)$) hesaplanması

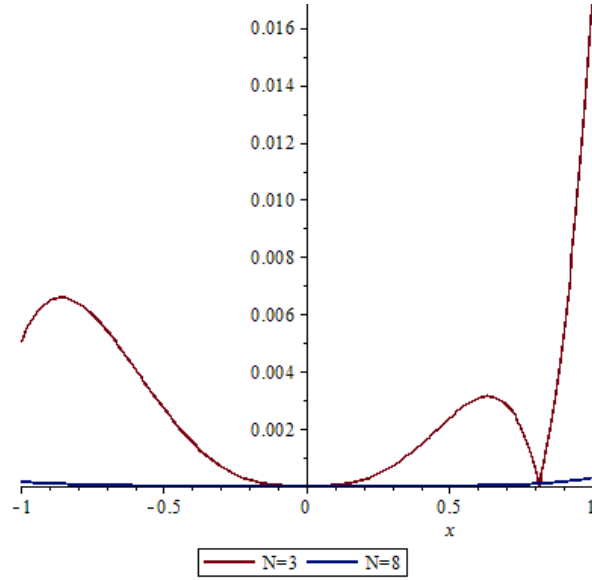
z_j	$\text{Re}(\exp(z))$	N=3	$e_3(z_j)$	N=8	$e_8(z_j)$
-0.9(1+i)	0.252727753	0.400016341	1.472×10^{-1}	0.252696036	3.171×10^{-5}
-0.8(1+i)	0.313050504	0.410711065	9.766×10^{-2}	0.313036619	1.388×10^{-5}
-0.7(1+i)	0.379809389	0.441159952	6.135×10^{-2}	0.379804022	5.367×10^{-6}
-0.6(1+i)	0.452953789	0.488893730	3.953×10^{-2}	0.452952006	1.782×10^{-6}
-0.5(1+i)	0.532280730	0.551443131	1.916×10^{-2}	0.532280239	4.905×10^{-7}
-0.4(1+i)	0.617405647	0.626338883	8.933×10^{-3}	0.617405537	1.103×10^{-7}
-0.3(1+i)	0.707730678	0.711111716	3.381×10^{-3}	0.707730658	1.94×10^{-8}
-0.2(1+i)	0.802410647	0.803292360	8.817×10^{-4}	0.802410643	3.9×10^{-9}
-0.1(1+i)	0.900316999	0.900411545	9.454×10^{-5}	0.900316999	1×10^{-10}
0+0i	1	1	0	1	0
0.1+0.1i	1.099649667	1.099588455	6.121×10^{-5}	1.099649667	1.045×10^{-10}
0.2+0.2i	1.197056021	1.196707640	3.483×10^{-4}	1.197056027	6.033×10^{-9}
0.3+0.3i	1.289569374	1.288888284	6.811×10^{-4}	1.289569442	6.747×10^{-8}
0.4+0.4i	1.374061539	1.373661117	4.004×10^{-4}	1.374061917	3.783×10^{-7}
0.5+0.5i	1.446889037	1.448556869	1.668×10^{-3}	1.446890472	1.435×10^{-6}
0.6+0.6i	1.503859540	1.511106269	7.247×10^{-3}	1.503863741	4.201×10^{-6}
0.7+0.7i	1.540203025	1.558840048	1.863×10^{-2}	1.540213183	1.016×10^{-5}
0.8+0.8i	1.550549296	1.589288935	3.874×10^{-2}	1.550570346	2.105×10^{-5}
0.9+0.9i	1.528913812	1.599983659	7.107×10^{-2}	1.528951851	3.804×10^{-5}

Çizelge 4.2. Test problemi 4.1 denkleminin reel kısımlarının L_2 ve L_∞ hataları

N	3	8
L_2	2.09×10^{-1}	5.695×10^{-5}
L_∞	1.472×10^{-1}	3.804×10^{-5}



Şekil 4.1. Test Problemi 4.1 denkleminin tam ve yaklaşık çözümlerinin reel kısımlarının grafiği



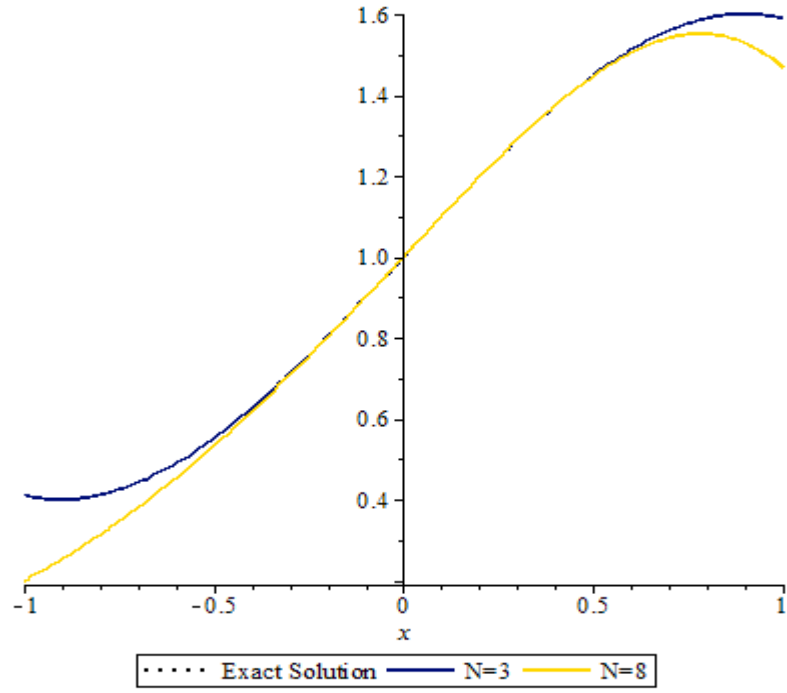
Şekil 4.2. Test Problemi 4.1 denkleminin tam ve yaklaşık çözümlerinin reel kısımlarının mutlak hatasının grafiği

Çizelge 4.3. Test problemi 4.1 denkleminin yaklaşık ve tam çözümlerinin imajiner kısımlarının karşılaştırılması ve mutlak hatanın ($e_N(z_j)$) hesaplanması

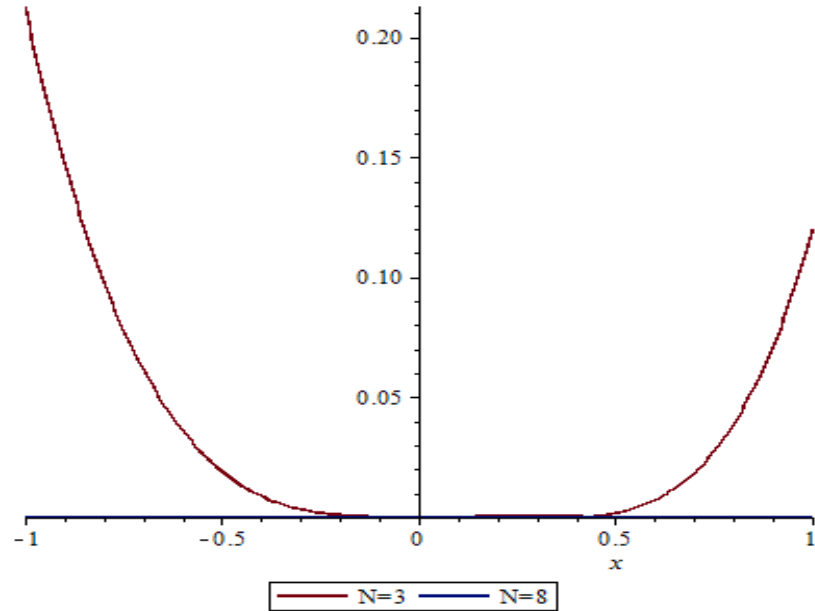
z_j	$\text{Im}(\exp(z))$	N=3	$e_3(z_j)$	N=8	$e_8(z_j)$
-0.9(1+i)	-0.318476955	-0.312021234	6.455×10^{-3}	-0.318571466	9.541×10^{-5}
-0.8(1+i)	-0.322328869	-0.315932609	6.396×10^{-3}	-0.322384143	5.527×10^{-5}
-0.7(1+i)	-0.319909035	-0.314462666	5.446×10^{-3}	-0.319937403	2.836×10^{-5}
-0.6(1+i)	-0.309882359	-0.305784069	4.098×10^{-3}	-0.309894928	1.256×10^{-5}
-0.5(1+i)	-0.290786288	-0.288069484	2.716×10^{-3}	-0.290790930	4.642×10^{-6}
-0.4(1+i)	-0.261034921	-0.259491576	1.543×10^{-3}	-0.261036262	1.34×10^{-6}
-0.3(1+i)	-0.218926753	-0.218223008	7.037×10^{-4}	-0.218927022	2.69×10^{-7}
-0.2(1+i)	-0.162656690	-0.162436447	2.202×10^{-4}	-0.162656720	2.94×10^{-8}
-0.1(1+i)	-0.090333010	-0.090304555	2.845×10^{-5}	-0.090333011	9.4×10^{-10}
0+0i	0	0	0	0	0
0.1+0.1i	0.110332989	0.110304556	2.843×10^{-5}	0.110332989	2.145×10^{-10}
0.2+0.2i	0.242655269	0.242436447	2.188×10^{-4}	0.242655250	1.855×10^{-8}
0.3+0.3i	0.398910554	0.398223009	6.875×10^{-4}	0.398910340	2.143×10^{-7}
0.4+0.4i	0.580943901	0.579491576	1.452×10^{-3}	0.580942695	1.206×10^{-6}
0.5+0.5i	0.790439083	0.788069485	2.730×10^{-3}	0.790434501	4.582×10^{-6}
0.6+0.6i	1.028845666	1.025784070	3.062×10^{-3}	1.028832078	1.359×10^{-5}
0.7+0.7i	1.297295111	1.294462666	2.832×10^{-3}	1.297261144	3.397×10^{-5}
0.8+0.8i	1.596505340	1.595932609	0.573×10^{-3}	1.596430316	7.502×10^{-5}
0.9+0.9i	1.926673304	1.932021235	5.348×10^{-3}	1.926522298	1.510×10^{-4}

Çizelge 4.4. Test problemi 4.1 denkleminin imajiner kısımlarının L_2 ve L_∞ hataları

N	3	8
L_2	1.392×10^{-2}	2.068×10^{-4}
L_∞	6.455×10^{-3}	1.510×10^{-4}



Şekil 4.3. Test Problemi 4.1 denkleminin tam ve yaklaşık çözümlerinin imajiner kısımlarının grafiği



Şekil 4.4. Test Problemi 4.1 denkleminin tam ve yaklaşık çözümlerinin imajiner kısımlarının mutlak hatasının grafiği

4.2. Test Problemi 2

2. mertebeden sabit katsayılı lineer kompleks diferansiyel denklemi

$$f''(z) + f'(z) - f(z) = \cos(z) - 2\sin(z)$$

ve başlangıç koşulları $f(0) = 0, f'(0) = 1$ olsun. Bu denklemin tam çözümü $f(z) = \sin(z)$ dir.

Legendre polinomları kullanılarak $N = 4$ ve $N=8$ için aşağıdaki yaklaşık çözümler elde edilmiştir.

$N=4$ için;

$$\begin{aligned} f(x, y) = & x(1 - 6,55 \cdot 10^{-17}i) + y(6,55 \cdot 10^{-17} + i) \\ & + (iy + x)^2(3,12 \cdot 10^{-17} + 5,72 \cdot 10^{-17}i) \\ & + (iy + x)^3(-0,16 - 0,0025i) + (iy + x)^4(0,00278 + 0,0095i) \\ & + 8,153 \cdot 10^{-17} - 9,541 \cdot 10^{-18}i \end{aligned}$$

$N=8$ için;

$$\begin{aligned} f(x, y) = & x(1 - 1,82 \cdot 10^{-15}i) + y(1,82 \cdot 10^{-15} + i) \\ & + (iy + x)^2(5,05 \cdot 10^{-16} + 9,71 \cdot 10^{-15}i) \\ & + (iy + x)^3(-0,17 - 8,87 \cdot 10^{-8}i) \\ & + (iy + x)^4(4,05 \cdot 10^{-7} + 6,56 \cdot 10^{-7}i) \\ & + (iy + x)^5(0,008 + 3,803 \cdot 10^{-7}i) \\ & + (iy + x)^6(-0,000001 + 6,58 \cdot 10^{-6}i) \\ & + (iy + x)^7(-0,0002 + 1,93 \cdot 10^{-6}i) \\ & + (iy + x)^8(1,23 \cdot 10^{-6} + 8,11 \cdot 10^{-6}i) + 4,60 \cdot 10^{-16} - 1,44 \cdot 10^{-15}i \end{aligned}$$

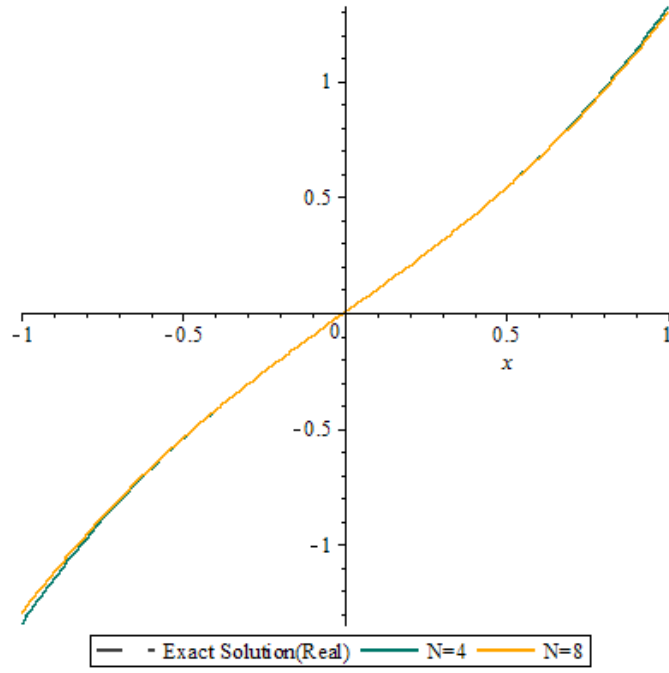
$N = 4$ ve $N=8$ alınarak bulunan çözüm ile tam çözümün bazı değerler için mutlak hatası ve grafikleri Çizelge 4.5,4.6,4.7,4.8 ve Şekil 4.5, 4.6 da verilmiştir.

Çizelge 4.5. Test problemi 4.2 denkleminin yaklaşık ve tam çözümlerinin reel kısımlarının karşılaştırılması ve mutlak hatanın ($e_N(z_j)$) hesaplanması

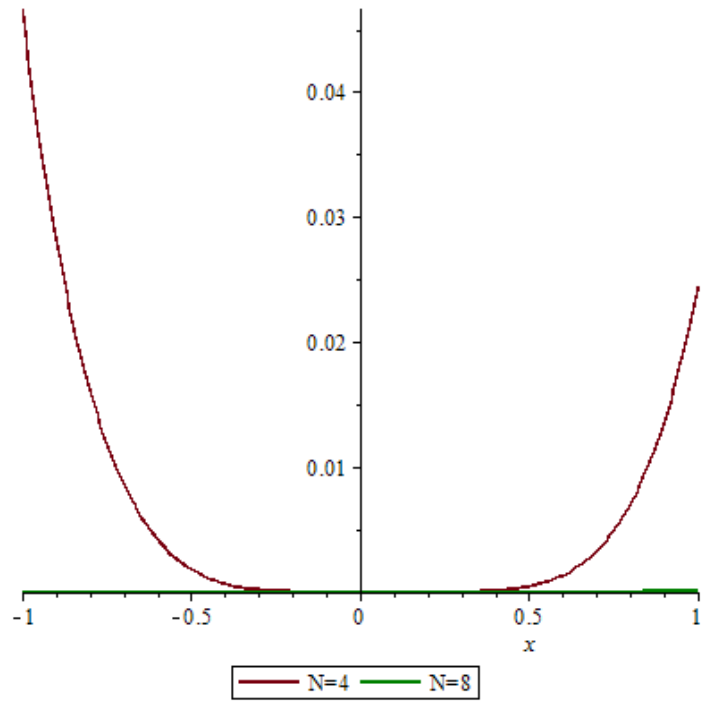
z_j	Tam Çözüm (Reel)	N=4	$e_4(z_j)$	N=8	$e_8(z_j)$
-0.9(1+i)	-1.122575129	-1.15076978	2.819×10^{-2}	-1.12259230	1.717×10^{-5}
-0.8(1+i)	-0.959417104	-0.97555428	1.613×10^{-2}	-0.95942545	8.347×10^{-6}
-0.7(1+i)	-0.808602073	-0.81722624	8.624×10^{-3}	-0.80860564	3.574×10^{-6}
-0.6(1+i)	-0.669364012	-0.67358157	4.217×10^{-3}	-0.66936535	1.339×10^{-6}
-0.5(1+i)	-0.540612685	-0.54244293	1.830×10^{-3}	-0.54061312	4.385×10^{-7}
-0.4(1+i)	-0.420989410	-0.42165961	6.702×10^{-4}	-0.42098953	1.264×10^{-7}
-0.3(1+i)	-0.308918653	-0.30910762	1.889×10^{-4}	-0.30891868	3.16×10^{-8}
-0.2(1+i)	-0.202655979	-0.20268965	3.367×10^{-5}	-0.20265598	5.6×10^{-9}
-0.1(1+i)	-0.100332999	-0.10033509	2.095×10^{-6}	-0.10033300	4×10^{-10}
0+0i	0	0	0	0	0
0.1+0.1i	0.100332999	0.100332871	1.284×10^{-7}	0.100332999	1.489×10^{-10}
0.2+0.2i	0.202655979	0.202654075	1.904×10^{-6}	0.202655986	7.174×10^{-9}
0.3+0.3i	0.308918653	0.308927480	8.826×10^{-6}	0.308918733	7.980×10^{-8}
0.4+0.4i	0.420989410	0.421090266	1.008×10^{-4}	0.420989861	4.503×10^{-7}
0.5+0.5i	0.540612685	0.541052926	4.402×10^{-4}	0.540614416	1.731×10^{-6}
0.6+0.6i	0.669364012	0.670699264	1.335×10^{-3}	0.669369193	5.180×10^{-6}
0.7+0.7i	0.808602073	0.811886395	3.284×10^{-3}	0.808615008	1.293×10^{-5}
0.8+0.8i	0.959417104	0.966444748	7.027×10^{-3}	0.959445161	2.803×10^{-5}
0.9+0.9i	1.122575129	1.136178063	1.360×10^{-2}	1.122629264	5.413×10^{-5}

Çizelge 4.6. Test problemi 4.2 denkleminin reel kısımlarının L_2 ve L_∞ hataları

N	4	8
L_2	6.317×10^{-2}	1.103×10^{-4}
L_∞	2.819×10^{-2}	5.413×10^{-5}



Şekil 4.5. Test Problemi 4.2 denkleminin tam ve yaklaşık çözümlerinin reel kısımlarının grafiği



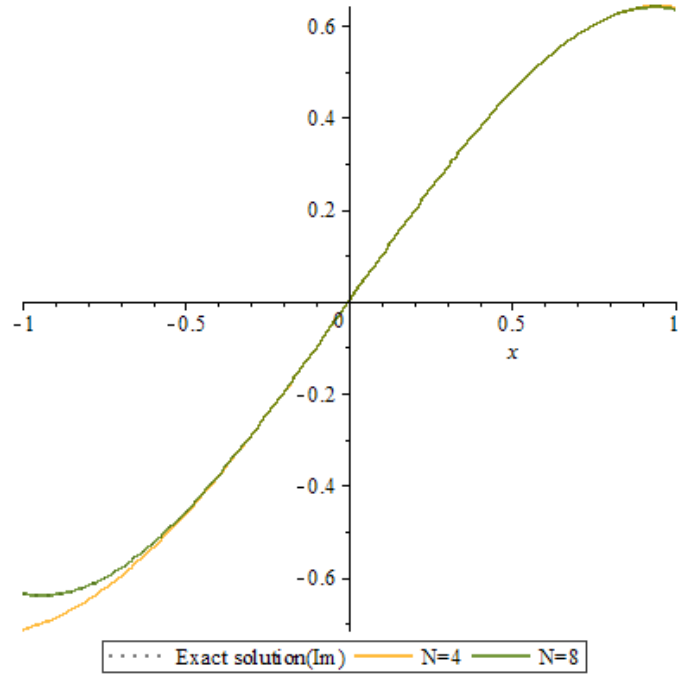
Şekil 4.6. Test Problemi 4.2 denkleminin tam ve yaklaşık çözümlerinin reel kısımlarının mutlak hatasının grafiği

Çizelge 4.7. Test problemi 4.2 denkleminin yaklaşık ve tam çözümlerinin imajiner kısımlarının karşılaştırılması ve mutlak hatanın ($e_N(z_j)$) hesaplanması

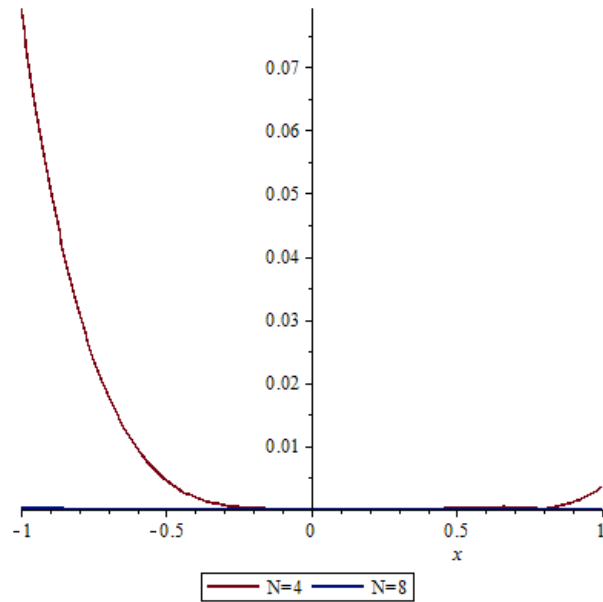
z_j	Tam Çözüm (Im)	N=4	$e_4(z_j)$	N=8	$e_8(z_j)$
-0.9(1+i)	-0.638093029	-0.68894439	5.085×10^{-2}	-0.63799290	1.717×10^{-5}
-0.8(1+i)	-0.618749396	-0.64982935	3.107×10^{-2}	-0.61871053	8.347×10^{-6}
-0.7(1+i)	-0.580196817	-0.59809805	1.790×10^{-2}	-0.58018366	3.574×10^{-6}
-0.6(1+i)	-0.525452875	-0.53501026	9.557×10^{-3}	-0.52544922	1.339×10^{-6}
-0.5(1+i)	-0.457304153	-0.46191667	4.612×10^{-3}	-0.45730343	4.385×10^{-7}
-0.4(1+i)	-0.378327945	-0.38025889	1.930×10^{-3}	-0.37832789	1.264×10^{-7}
-0.3(1+i)	-0.290919348	-0.29156944	6.501×10^{-4}	-0.29091937	3.16×10^{-8}
-0.2(1+i)	-0.197322687	-0.19747175	1.490×10^{-4}	-0.19732269	5.6×10^{-9}
-0.1(1+i)	-0.099666330	-0.09968018	1.384×10^{-5}	-0.09966633	4×10^{-10}
0+0i	0	0	0	0	0
0.1+0.1i	0.099666333	0.099672604	6.271×10^{-6}	0.099666333	1.3×10^{-10}
0.2+0.2i	0.197322687	0.197350529	2.784×10^{-5}	0.197322688	1.281×10^{-9}
0.3+0.3i	0.290919348	0.290955756	3.641×10^{-5}	0.290919360	1.231×10^{-8}
0.4+0.4i	0.378327945	0.378319350	8.595×10^{-5}	0.378328014	6.892×10^{-8}
0.5+0.5i	0.457304153	0.457181458	1.226×10^{-4}	0.457304439	2.863×10^{-7}
0.6+0.6i	0.525452875	0.525191314	2.615×10^{-4}	0.525453865	9.895×10^{-7}
0.7+0.7i	0.580196817	0.579907233	2.895×10^{-4}	0.580199790	2.973×10^{-6}
0.8+0.8i	0.618749396	0.618796616	4.721×10^{-5}	0.618757328	7.932×10^{-6}
0.9+0.9i	0.638093029	0.639235945	1.142×10^{-3}	0.638112121	1.909×10^{-5}

Çizelge 4.8. Test problemi 4.2 denkleminin imajiner kısımlarının L_2 ve L_∞ hataları

N	4	8
L_2	3.799×10^{-2}	6.553×10^{-5}
L_∞	5.085×10^{-2}	1.909×10^{-5}



Şekil 4.7. Test Problemi 4.2 denkleminin tam ve yaklaşık çözümlerinin imajiner kısımlarının grafiği



Şekil 4.8. Test Problemi 4.2 denkleminin tam ve yaklaşık çözümlerinin imajiner kısımlarının mutlak hatasının grafiği

4.3 Test Problemi 3

2. mertebeden sabit katsayılı lineer kompleks diferansiyel denklemi

$$f''(z) - 2f'(z) + 3f(z) = (2e^z + 3z - 2)$$

ve başlangıç koşulları $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$ olsun. Tam çözümü $f(z) = z + e^z$ olan denklemin $N = 5, N=7$ ve $N=9$ için yaklaşık çözümlerini bulalım.

$N=5$ için;

$$\begin{aligned} f(x, y) = & x(2 + 1,48 \cdot 10^{-16}i) + y(-1,48 \cdot 10^{-16} + 2i) \\ & + (iy + x)^2(0,5 - 5,75 \cdot 10^{-16}i) + (iy + x)^3(0,17 - 0,0003i) \\ & + (iy + x)^4(0,043 - 0,0002i) + (iy + x)^5(0,008 + 0,002i) + 1 \\ & + 2,25 \cdot 10^{-16}i \end{aligned}$$

$N=7$ için;

$$\begin{aligned} f(x, y) = & x(2 - 1,08 \cdot 10^{-15}i) + y(1,08 \cdot 10^{-15} + 2i) + (iy + x)^2(0,5 + 2,73 \cdot 10^{-15}i) \\ & + (iy + x)^3(0,17 + 1,13 \cdot 10^{-6}i) + (iy + x)^4(0,042 + 2,18 \cdot 10^{-6}i) \\ & + (iy + x)^5(0,008 - 3,25 \cdot 10^{-5}i) + (iy + x)^6(0,0014 + 1,56 \cdot 10^{-5}i) \\ & + (iy + x)^7(0,0002i - 5,62 \cdot 10^{-5}) + 1 - 5,91 \cdot 10^{-16}i \end{aligned}$$

$N=9$ için;

$$\begin{aligned}
f(x, y) = & x(2 - 2,11 \cdot 10^{-15}i) + y(2,11 \cdot 10^{-15} + 2i) + (iy + x)^2(0,5 + 1,54 \cdot 10^{-16}i) \\
& + (iy + x)^3(0,17 - 2,74 \cdot 10^{-9}i) + (iy + x)^4(0,042 - 5,65 \cdot 10^{-9}i) \\
& + (iy + x)^5(0,008 + 1,63 \cdot 10^{-7}i) + (iy + x)^6(0,0014 + 1,4 \cdot 10^{-6}i) \\
& + (iy + x)^7(0,0002 - 7,79 \cdot 10^{-7}i) \\
& + (iy + x)^8(2,4 \cdot 10^{-5} + 9,73 \cdot 10^{-7}i) \\
& + (iy + x)^9(2,21 \cdot 10^{-6} + 8,23 \cdot 10^{-7}i) + 1 + 1,96 \cdot 10^{-16}i
\end{aligned}$$

Tam çözüm ile yaklaşık çözümlerin bazı değerleri ve mutlak hataları çizelge 4.9, 4.10, 4.11, 4.12, 4.13 ve 4.14, grafikleri de Şekil 4.9 ve 4.10 da karşılaştırıldı.

Çizelge 4.9. Test problemi 4.3 denkleminin yaklaşık ve tam çözümlerinin reel kısımlarının karşılaştırılması

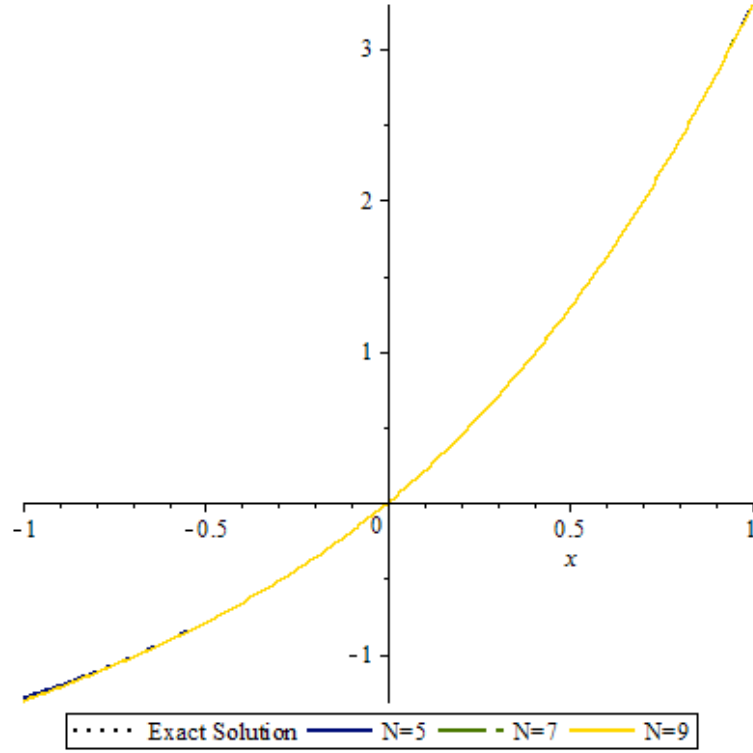
z_j	Tam çözüm (Reel)	N=5	N=7	N=9
-0.9(1+i)	-0.6472722467	-0.6562388631	-0.6474053866	-0.6472581975
-0.8(1+i)	-0.0486949496	-0.4923283211	-0.4869816791	-0.4869438098
-0.7(1+i)	-0.3201906101	-0.3232122602	-0.3201891249	-0.3201885097
-0.6(1+i)	-0.1470462109	-0.1486076936	-0.1470385444	-0.1470455213
-0.5(1+i)	0.0322807302	0.0315581749	0.0322862057	0.0322809221
-0.4(1+i)	0.2174056479	0.2171190482	0.2174081654	0.2174056890
-0.3(1+i)	0.4077306780	0.4076406362	0.4077314709	0.4077306835
-0.2(1+i)	0.6024106473	0.6023917567	0.6024107968	0.6024106475
-0.1(1+i)	0.8003169998	0.8003154343	0.8003170099	0.8003169998
0+0i	1	1	1	1
0.1+0.1i	1.199649666829	1.199650191175	1.199649665017	1.199649666845
0.2+0.2i	1.397056021355	1.397058251382	1.397056013953	1.397056022159
0.3+0.3i	1.589569374044	1.589575029969	1.589569360205	1.589569382421
0.4+0.4i	1.774061538887	1.774081081844	1.774061574450	1.774061580549
0.5+0.5i	1.946889036584	1.946957767208	1.946889366877	1.946889167461
0.6+0.6i	2.103859540558	2.104058351290	2.103860568538	2.103859818866
0.7+0.7i	2.240203025431	2.240679104082	2.240204381601	2.240203356374
0.8+0.8i	2.350549296807	2.351530400071	2.350546568254	2.350548983837
0.9+0.9i	2.428913811884	2.430707817977	2.428890548044	2.428910539623

Çizelge 4.10. Test problemi 4.3 denkleminin yaklaşık ve tam çözümlerinin reel kısımlarının mutlak hatasının hesaplanması

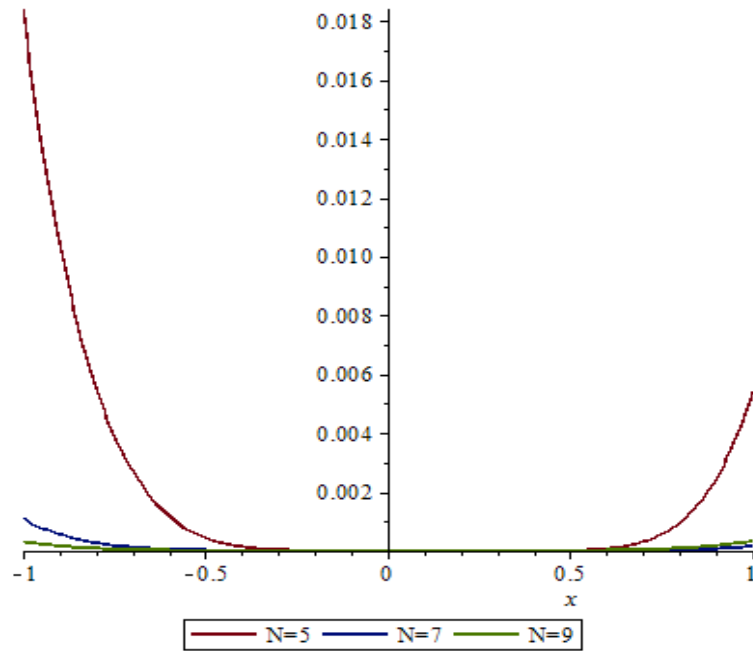
z_j	Tam Çözüm(Reel)	N=5	N=7	N=9
-0.9(1+i)	-0.6472722467	8.97×10^{-3}	1.33×10^{-4}	1.40×10^{-5}
-0.8(1+i)	-0.0486949496	5.38×10^{-3}	3.21×10^{-5}	5.68×10^{-6}
-0.7(1+i)	-0.3201906101	3.02×10^{-3}	1.48×10^{-6}	2.10×10^{-6}
-0.6(1+i)	-0.1470462109	1.56×10^{-3}	7.66×10^{-6}	6.89×10^{-7}
-0.5(1+i)	0.0322807302	7.22×10^{-4}	5.47×10^{-6}	1.92×10^{-7}
-0.4(1+i)	0.2174056479	2.86×10^{-4}	2.51×10^{-6}	4.11×10^{-8}
-0.3(1+i)	0.4077306780	9.00×10^{-5}	7.93×10^{-7}	5.5×10^{-8}
-0.2(1+i)	0.6024106473	1.89×10^{-5}	1.49×10^{-7}	2×10^{-10}
-0.1(1+i)	0.8003169998	1.57×10^{-6}	1.01×10^{-8}	1×10^{-10}
0+0i	1	0	0	0
0.1+0.1i	1.199649666829	5.24×10^{-7}	2×10^{-9}	1.61×10^{-11}
0.2+0.2i	1.397056021355	2.23×10^{-6}	7×10^{-9}	1×10^{-9}
0.3+0.3i	1.589569374044	5.66×10^{-6}	1.4×10^{-8}	8×10^{-9}
0.4+0.4i	1.774061538887	1.95×10^{-5}	3.6×10^{-8}	4.1×10^{-8}
0.5+0.5i	1.946889036584	6.87×10^{-5}	3.29×10^{-7}	1.31×10^{-7}
0.6+0.6i	2.103859540558	1.99×10^{-4}	1.03×10^{-6}	2.75×10^{-7}
0.7+0.7i	2.240203025431	4.76×10^{-4}	1.35×10^{-6}	3.29×10^{-7}
0.8+0.8i	2.350549296807	9.81×10^{-4}	2.73×10^{-6}	3.13×10^{-7}
0.9+0.9i	2.428913811884	1.79×10^{-3}	2.33×10^{-5}	3.27×10^{-6}

Çizelge 4.11. Test problemi 4.3 denkleminin reel kısımlarının L_2 ve L_∞ hataları

N	5	7	9
L_2	1.12×10^{-2}	1.39×10^{-4}	1.56×10^{-5}
L_∞	8.97×10^{-3}	1.33×10^{-4}	1.40×10^{-5}



Şekil 4.9. Test Problemi 4.3 denkleminin tam ve yaklaşık çözümlerinin reel kısımlarının grafiği



Şekil 4.10. Test Problemi 4.3 denkleminin tam ve yaklaşık çözümlerinin reel kısımlarının mutlak hatasının grafiği

Çizelge 4.12. Test problemi 4.3 denkleminin yaklaşık ve tam çözümlerinin imajiner kısımlarının karşılaştırılması

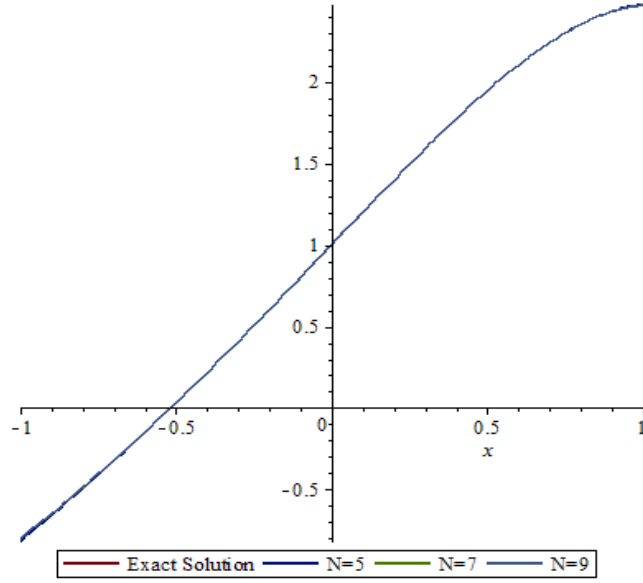
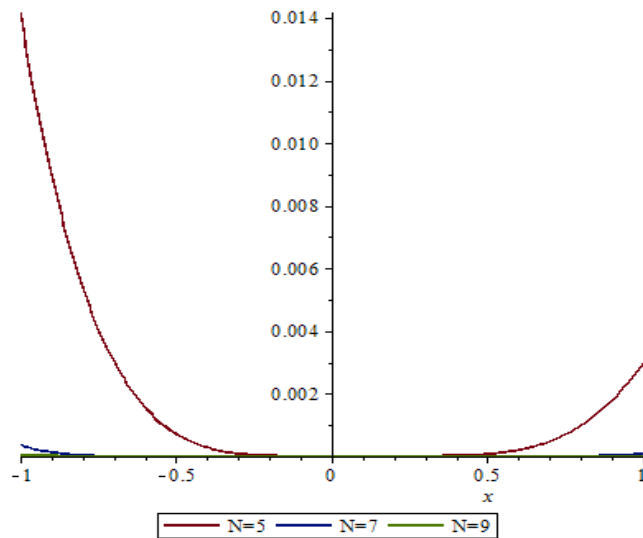
z_j	Tam çözüm(Im)	N=5	N=7	N=9
-0.9(1+i)	-1.218476955	-1.208056569	-1.219046479	-1.218644242
-0.8(1+i)	-1.122328869	-1.116804433	-1.122601980	-1.122411569
-0.7(1+i)	-1.019909036	-1.017211276	-1.020028607	-1.019946289
-0.6(1+i)	-0.9098823596	-0.9086986636	-0.9099289454	-0.9098972022
-0.5(1+i)	-0.7907862882	-0.7903373498	-0.7908018276	-0.7907912843
-0.4(1+i)	-0.6610349211	-0.6608971272	-0.6610390883	-0.6610362372
-0.3(1+i)	-0.5189267537	-0.5188966574	-0.5189275556	-0.5189269890
-0.2(1+i)	-0.3626566908	-0.3626533071	-0.3626567776	-0.3626567116
-0.1(1+i)	-0.1903330110	-0.1903329904	-0.1903330134	-0.1903330112
0+0i	0	0	0	0
0.1+0.1i	0.210332988730	0.210333152464	0.210332988582	0.210332988397
0.2+0.2i	0.442655268594	0.442655900693	0.442655269141	0.442655247334
0.3+0.3i	0.698910553778	0.698909786522	0.698910550862	0.698910311799
0.4+0.4i	0.980943900770	0.980938623006	0.980943891834	0.980942542552
0.5+0.5i	1.290439083213	1.290438657482	1.290439294073	1.290433909367
0.6+0.6i	1.628845666272	1.628908734626	1.628847420070	1.628830243860
0.7+0.7i	1.997295111807	1.997600459515	1.997302913934	1.997256291609
0.8+0.8i	2.396505340600	2.397468360687	2.396530810205	2.396418969943
0.9+0.9i	2.826673303972	2.829120053197	2.826741513395	2.826498332146

Çizelge 4.13. Test problemi 4.3 denkleminin yaklaşık ve tam çözümlerinin imajiner kısımlarının mutlak hatasının hesaplanması

z_j	Tam Çözüm (Im)	N=5	N=7	N=9
-0.9(1+i)	-1.218476955	1.04×10^{-2}	5.69×10^{-4}	1.67×10^{-4}
-0.8(1+i)	-1.122328869	5.52×10^{-3}	2.73×10^{-4}	8.27×10^{-5}
-0.7(1+i)	-1.019909036	2.69×10^{-3}	1.19×10^{-4}	3.73×10^{-5}
-0.6(1+i)	-0.9098823596	1.18×10^{-3}	4.65×10^{-5}	1.48×10^{-5}
-0.5(1+i)	-0.7907862882	4.48×10^{-4}	1.55×10^{-5}	4.99×10^{-6}
-0.4(1+i)	-0.6610349211	1.37×10^{-4}	4.17×10^{-6}	1.32×10^{-6}
-0.3(1+i)	-0.5189267537	3.01×10^{-5}	8.02×10^{-7}	2.35×10^{-7}
-0.2(1+i)	-0.3626566908	3.38×10^{-6}	8.68×10^{-8}	2.08×10^{-8}
-0.1(1+i)	-0.1903330110	2.05×10^{-8}	2.45×10^{-9}	2.5×10^{-10}
0+0i	0	0	0	0
0.1+0.1i	0.210332988730	1.64×10^{-7}	1×10^{-10}	3×10^{-10}
0.2+0.2i	0.442655268594	6.32×10^{-7}	6×10^{-10}	2.13×10^{-8}
0.3+0.3i	0.698910553778	7.67×10^{-7}	3.1×10^{-9}	2.42×10^{-7}
0.4+0.4i	0.980943900770	5.28×10^{-6}	9×10^{-9}	1.36×10^{-6}
0.5+0.5i	1.290439083213	4.25×10^{-7}	2.11×10^{-7}	5.17×10^{-6}
0.6+0.6i	1.628845666272	6.3×10^{-5}	1.75×10^{-6}	1.54×10^{-5}
0.7+0.7i	1.997295111875	3.05×10^{-4}	7.8×10^{-6}	3.88×10^{-5}
0.8+0.8i	2.396505340600	9.63×10^{-4}	2.55×10^{-5}	8.64×10^{-5}
0.9+0.9i	2.826673303972	2.45×10^{-3}	6.82×10^{-5}	1.75×10^{-4}

Çizelge 4.14. Test problemi 4.3 denkleminin imajiner kısımlarının L_2 ve L_∞ hataları

N	5	7	9
L_2	1.24×10^{-2}	6.48×10^{-4}	2.76×10^{-4}
L_∞	1.04×10^{-2}	5.69×10^{-4}	1.75×10^{-4}

**Şekil 4.11.** Test Problemi 4.3 denkleminin tam ve yaklaşık çözümlerinin imajiner kısımlarının grafiği**Şekil 4.12.** Test Problemi 4.3 denkleminin tam ve yaklaşık çözümlerinin imajiner kısımlarının mutlak hatasının grafiği

4.4. Test Problemi 4

3. mertebeden sabit katsayılı lineer kompleks diferansiyel denklemi

$$y'''(z) + iy''(z) + 2y'(z) - iy(z) = 3e^z - 2isinz + cosz$$

göz önüne alalım. Başlangıç koşulları da $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ ve $y''(0) = 1$ olsun. Bu denklemin tam çözümü $e^z + sinz$ dir. Burada $z_0 = 0$ $r = 1$ $\alpha = 2\pi$ dir. Metodumuzu uygulayarak $N=3$, $N=5$ ve $N=10$ değerleri için yaklaşık çözümler bulalım.

$N=3$ için,

$$f(x, y) = 2x + 2yi - \frac{1}{2}y^2 + ixy + \frac{1}{2}x^2 + 1$$

$N=5$ için,

$$\begin{aligned} f(x, y) = & x(2 - 1,01 \cdot 10^{-16}i) + y(1,01 \cdot 10^{-16} + 2i) + (iy + x)^2(0,47 + 0,00007i) \\ & + (iy + x)^3(0,00002 + 0,006i) + (iy + x)^4(0,047 - 0,0002i) \\ & + (iy + x)^5(0,0168 - 0,001i) + 1 + 8,78 \cdot 10^{-18}i \end{aligned}$$

$N=10$ için,

$$\begin{aligned} f(x, y) = & x(2 - 1,91 \cdot 10^{-15}i) + y(1,91 \cdot 10^{-15} + 2i) + (iy + x)^2(0,48 + 0,000001i) \\ & + (iy + x)^3(4,7 \cdot 10^{-7} + 0,007i) + (iy + x)^4(0,047 - 3,6 \cdot 10^{-7}i) \\ & + (iy + x)^5(0,0167 - 0,002i) + (iy + x)^6(0,0006 - 3,6 \cdot 10^{-8}i) \\ & + (iy + x)^7(0,0002i - 1,3 \cdot 10^{-7}) + (iy + x)^8(0,00009 - 8,5 \cdot 10^{-7}i) \\ & + (iy + x)^9(0,6 \cdot 10^{-5} - 10^{-15}i) + (iy + x)^{10}(-2,4 \cdot 10^{-6} - 10^{-6}i) + 1 \\ & - 1,6 \cdot 10^{-15}i \end{aligned}$$

elde edilir.

$N=3$, $N=5$ ve $N=10$ değerleri için tam çözüm ve yaklaşık çözümlerin reel ve sanal kısımları aşağıdaki tablolarda ve grafiklerde karşılaştırılmıştır.

Çizelge 4.15. Test problemi 4.4 denkleminin yaklaşık ve tam çözümlerinin reel kısımlarının karşılaştırılması

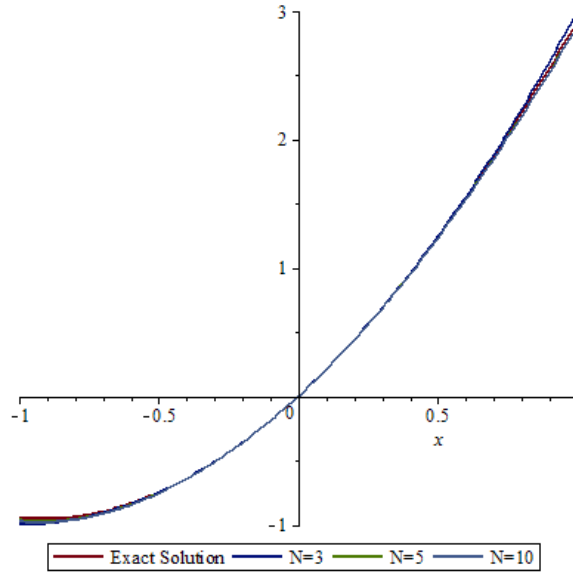
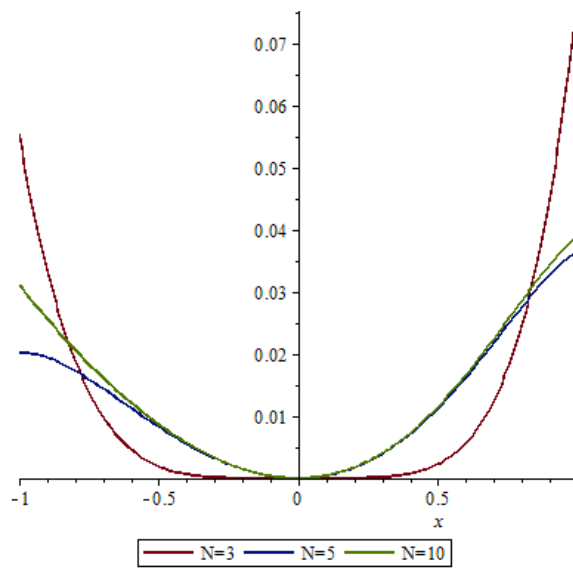
z_j	Tam Çözüm(Reel)	N=3	N=5	N=10
-0.9(1+i)	-0.86984737625164	-0.8	-0.87001495655592	-0.86903141472801
-0.8(1+i)	-0.64636660090917	-0.6	-0.64595932568534	-0.64532959434286
-0.7(1+i)	-0.42879268397484	-0.4	-0.42813644766237	-0.42775371484814
-0.6(1+i)	-0.21641022380684	-0.2	-0.21573426666362	-0.21551585591946
-0.5(1+i)	-0.00833195549748	0	-0.0077620553870	-0.00766063363396
-0.4(1+i)	0.196416236944634	0.2	0.196791143752209	0.196846922780293
-0.3(1+i)	0.398812024299932	0.4	0.399010329700850	0.399034153023685
-0.2(1+i)	0.599754667637389	0.6	0.599825350813272	0.599833635215244
-0.1(1+i)	0.799984000003880	0.8	0.799993965172306	0.799995661886700
0(1+i)	1	1	1	1
0.1+0.1i	1.199982666670723	1.2	1.199965661220063	1.199966851676187
0.2+0.2i	1.399712001061022	1.4	1.399563843020308	1.399567265058867
0.3+0.3i	1.598488027771354	1.6	1.597930437415091	1.597933683863766
0.4+0.4i	1.795050949844534	1.8	1.793576643807761	1.793571882512721
0.5+0.5i	1.987501722297323	2.0	1.984301278553095	1.984276224141634
0.6+0.6i	2.173223553510885	2.2	2.167103084519746	2.167051014033081
0.7+0.7i	2.348805099331778	2.4	2.338093040652686	2.338041713981181
0.8+0.8i	2.509966401721079	2.6	2.492406671535644	2.492480946574653
0.9+0.9i	2.651488941427508	2.8	2.624116356953553	2.624655565209463

Çizelge 4.16. Test problemi 4.4 denkleminin yaklaşık ve tam çözümlerinin reel kısımlarının mutlak hatasının hesaplanması

z_j	Tam Çözüm(Reel)	N=3	N=5	N=10
-0.9(1+i)	-0.86984737625164	6.98×10^{-2}	1.68×10^{-4}	8.16×10^{-4}
-0.8(1+i)	-0.64636660090917	4.64×10^{-2}	4.07×10^{-4}	1.04×10^{-4}
-0.7(1+i)	-0.42879268397484	2.87×10^{-2}	6.56×10^{-4}	1.04×10^{-3}
-0.6(1+i)	-0.21641022380684	1.64×10^{-2}	6.76×10^{-4}	8.94×10^{-4}
-0.5(1+i)	-0.00833195549748	8.33×10^{-3}	5.56×10^{-4}	6.71×10^{-4}
-0.4(1+i)	0.196416236944634	3.58×10^{-3}	3.75×10^{-4}	4.3×10^{-4}
-0.3(1+i)	0.398812024299932	1.19×10^{-4}	1.98×10^{-4}	2.22×10^{-4}
-0.2(1+i)	0.599754667637389	2.45×10^{-4}	7.07×10^{-5}	7.9×10^{-5}
-0.1(1+i)	0.799984000003880	1.6×10^{-5}	9.97×10^{-6}	1.17×10^{-5}
0(1+i)	1	0	0	0
0.1+0.1i	1.199982666670723	1.73×10^{-5}	1.7×10^{-5}	1.58×10^{-5}
0.2+0.2i	1.399712001061022	2.88×10^{-4}	1.48×10^{-4}	1.45×10^{-4}
0.3+0.3i	1.598488027771354	1.51×10^{-3}	5.58×10^{-4}	5.54×10^{-4}
0.4+0.4i	1.795050949844534	4.95×10^{-3}	1.47×10^{-3}	1.47×10^{-3}
0.5+0.5i	1.987501722297323	1.25×10^{-2}	3.2×10^{-3}	3.2×10^{-3}
0.6+0.6i	2.173223553510885	2.68×10^{-2}	6.12×10^{-3}	6.17×10^{-3}
0.7+0.7i	2.348805099331778	5.12×10^{-2}	1.07×10^{-2}	1.07×10^{-2}
0.8+0.8i	2.509966401721079	9×10^{-2}	1.76×10^{-2}	1.75×10^{-2}
0.9+0.9i	2.651488941427508	1.49×10^{-1}	2.73×10^{-2}	2.68×10^{-2}

Çizelge 4.17. Test problemi 4.4 denkleminin reel kısımlarının L_2 ve L_∞ hataları

N	3	5	10
L_2	1.84×10^{-1}	3.49×10^{-2}	3.45×10^{-2}
L_∞	1.49×10^{-1}	2.73×10^{-2}	2.68×10^{-2}

**Şekil 4.13.** Test Problemi 4.4 denkleminin tam ve yaklaşık çözümlerinin reel kısımlarının grafiği**Şekil 4.14.** Test Problemi 4.4 denkleminin tam ve yaklaşık çözümlerinin reel kısımlarının mutlak hatasının grafiği

Çizelge 4.18. Test problemi 4.4 denkleminin yaklaşık ve tam çözümlerinin imajiner kısımlarının karşılaştırılması

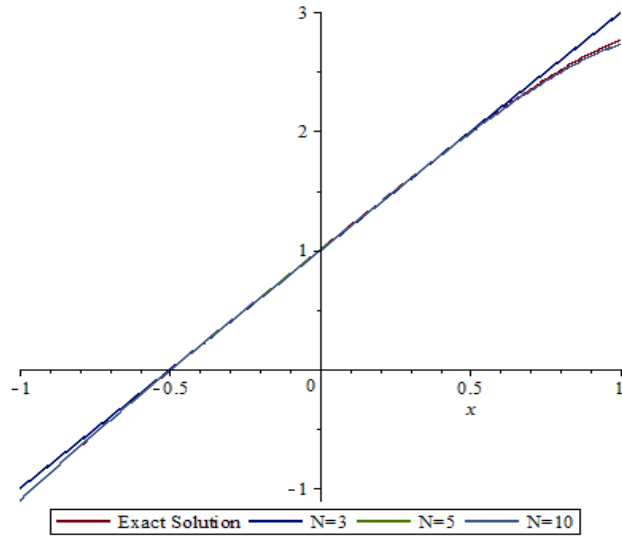
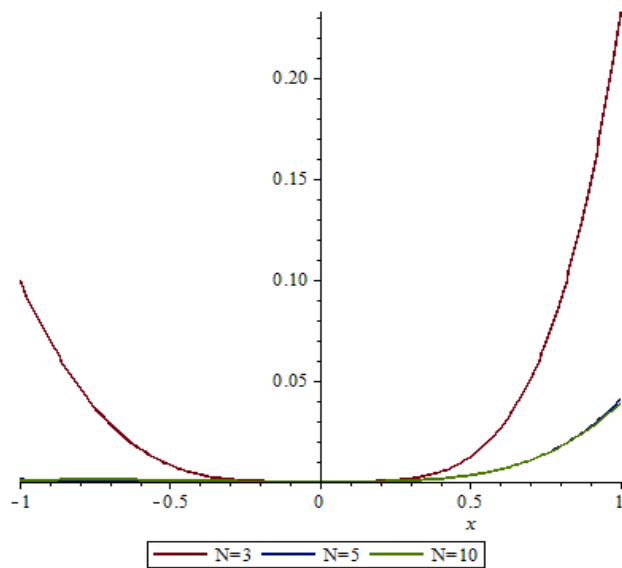
z_j	Tam Çözüm(Im)	N=3	N=5	N=10
-0.9(1+i)	- 0.9565699844096	-0.99	- 0.9760466397587	- 0.9823026744764
-0.8(1+i)	-0.9410782656285	-0.96	- 0.9584366624928	- 0.9617991531315
-0.7(1+i)	- 0.9001058536780	-0.91	- 0.9145950124561	- 0.9163198511279
-0.6(1+i)	- 0.8353352353388	- 0.84	- 0.8466971570602	- 0.8475440448514
-0.5(1+i)	- 0.7480904413969	-0.75	- 0.7564007272066	- 0.7568027662399
-0.4(1+i)	- 0.6393628666363	-0.64	- 0.6449192594541	- 0.6451062811025
-0.3(1+i)	- 0.5098461016836	-0.51	- 0.5130959381860	- 0.5131804549904
-0.2(1+i)	- 0.3599793778220	-0.36	- 0.3614773377772	- 0.3615110941386
-0.1(1+i)	-0.1899993444445	-0.19	- 0.1903871647618	- 0.1903954383529
0(1+i)	0	0	0	0
0.1+0.1i	0.209999322222311	0.21	0.209584959154601	0.209576082927174
0.2+0.2i	0.439977955601608	0.44	0.438270156687509	0.438233052738002
0.3+0.3i	0.689829901787782	0.69	0.685885935756301	0.685798797332193
0.4+0.4i	0.959271846263505	0.96	0.952116796523321	0.951954260145957
0.5+0.5i	1.247743236397864	1.25	1.236427653988426	1.236156794025123
0.6+0.6i	1.554298541978860	1.56	1.537990095821737	1.537562072687752
0.7+0.7i	1.877491929628582	1.89	1.855608640196387	1.854944859649572
0.8+0.8i	2.215254737001722	2.24	2.187646993621276	2.186618463904756
0.9+0.9i	2.564766333269482	2.61	2.531954308773813	2.530352055673663

Çizelge 4.19. Test problemi 4.4 denkleminin yaklaşık ve tam çözümlerinin imajiner kısımlarının mutlak hatasının hesaplanması

z_j	Tam Çözüm(Reel)	N=3	N=5	N=10
-0.9(1+i)	- 0.9565699844096	3.34×10^{-2}	1.95×10^{-2}	2.57×10^{-2}
-0.8(1+i)	-0.9410782656285	1.89×10^{-2}	1.74×10^{-2}	2.07×10^{-2}
-0.7(1+i)	- 0.9001058536780	9.89×10^{-3}	1.45×10^{-2}	1.62×10^{-2}
-0.6(1+i)	- 0.8353352353388	4.66×10^{-3}	1.14×10^{-2}	1.22×10^{-2}
-0.5(1+i)	- 0.7480904413969	1.91×10^{-3}	8.31×10^{-3}	8.71×10^{-3}
-0.4(1+i)	- 0.6393628666363	6.37×10^{-4}	5.56×10^{-3}	5.74×10^{-3}
-0.3(1+i)	- 0.5098461016836	1.54×10^{-4}	3.25×10^{-3}	3.03×10^{-3}
-0.2(1+i)	- 0.3599793778220	2.06×10^{-5}	1.5×10^{-3}	4.53×10^{-3}
-0.1(1+i)	-0.1899993444445	6.55×10^{-7}	3.88×10^{-4}	3.96×10^{-4}
0(1+i)	0	0	0	0
0.1+0.1i	0.209999322222311	6.78×10^{-7}	4.14×10^{-4}	4.23×10^{-4}
0.2+0.2i	0.439977955601608	2.2×10^{-5}	1.71×10^{-3}	1.74×10^{-3}
0.3+0.3i	0.689829901787782	1.7×10^{-4}	3.94×10^{-3}	4.03×10^{-3}
0.4+0.4i	0.959271846263505	7.28×10^{-4}	7.15×10^{-3}	7.32×10^{-3}
0.5+0.5i	1.247743236397864	2.26×10^{-3}	1.13×10^{-2}	1.16×10^{-2}
0.6+0.6i	1.554298541978860	5.7×10^{-3}	1.63×10^{-2}	1.67×10^{-2}
0.7+0.7i	1.877491929628582	1.25×10^{-2}	2.18×10^{-2}	2.25×10^{-2}
0.8+0.8i	2.215254737001722	2.47×10^{-2}	2.76×10^{-2}	2.86×10^{-2}
0.9+0.9i	2.564766333269482	4.52×10^{-2}	3.28×10^{-2}	3.44×10^{-2}

Çizelge 4.20. Test problemi 4.4 denkleminin imajiner kısımlarının L_2 ve L_∞ hataları

N	3	5	10
L_2	6.67×10^{-2}	6.26×10^{-2}	6.81×10^{-2}
L_∞	4.52×10^{-2}	3.28×10^{-2}	3.44×10^{-2}

**Şekil 4.15.** Test Problemi 4.4 denkleminin tam ve yaklaşık çözümlerinin imajiner kısımlarının grafiği**Şekil 4.16.** Test Problemi 4.4 denkleminin tam ve yaklaşık çözümlerinin imajiner kısımlarının mutlak hatasının grafiği

4.5. Test Problemi 5

2. mertebeden değişken katsayılı lineer kompleks diferansiyel denklemi

$$y''(z) + zy'(z) + z^2y(z) = e^z(2 + 2z + z^2 + z^3)$$

göz önüne alalım. Başlangıç koşulları da $y(0) = 0$ ve $y'(0) = 1$ olsun. Bu denklemin tam çözümü ze^z dir. Burada $z_0 = 0$ $r = 1$ $\alpha = 2\pi$ dir. Metodumuzu uygulayarak $N=3, N=5$ ve $N=10$ değerleri için yaklaşık çözümler bulalım.

$N=3$ için,

$$f(x, y) = x(5,55 \cdot 10^{-17}i + 1) + y(i - 5,55 \cdot 10^{-17}) + (iy + x)^2(4,31 \cdot 10^{-17}i + 1) + (iy + x)^3(0,0826i + 0,4364)$$

$N=5$ için,

$$f(x, y) = x(1 + 1,34 \cdot 10^{-16}i) + y(-1,34 \cdot 10^{-16} + i) + (iy + x)^2(1 + 1,25 \cdot 10^{-16}i) + (iy + x)^3(0,4862 + 0,0084i) + (iy + x)^4(0,0804 - 0,4008i) + (iy + x)^5(0,264 - 0,135i) + 1,64 \cdot 10^{-17} - 6,93 \cdot 10^{-18}i$$

$N=10$ için,

$$f(x, y) = x(1 - 1,45 \cdot 10^{-14}i) + y(1,45 \cdot 10^{-14} + i) + (iy + x)^2(1 + 2,27 \cdot 10^{-14}i) + (iy + x)^3(0,5 + 8,88 \cdot 10^{-10}i) + (iy + x)^4(0,167 + 7,78 \cdot 10^{-9}i) + (iy + x)^5(0,042 - 9,184 \cdot 10^{-9}i) + (iy + x)^6(0,0083 - 8,03 \cdot 10^{-8}i) + (iy + x)^7(0,0013 - 1,99 \cdot 10^{-7}i) + (iy + x)^8(0,0002 - 3,54 \cdot 10^{-7}i) + (iy + x)^9(0,00002 - 4,47 \cdot 10^{-7}i) + (iy + x)^{10}(-2,3 \cdot 10^{-6} - 2,95 \cdot 10^{-7}i) - 2,6 \cdot 10^{-15} - 1,122 \cdot 10^{-15}i$$

elde edilir.

$N=3, N=5$ ve $N=10$ değerleri için tam çözüm ve yaklaşık çözümlerin reel ve sanal kısımları aşağıdaki tablolarda verilmiştir.

Çizelge 4.21. Test problemi 4.5 denkleminin yaklaşık ve tam çözümlerinin reel kısımlarının karşılaştırılması

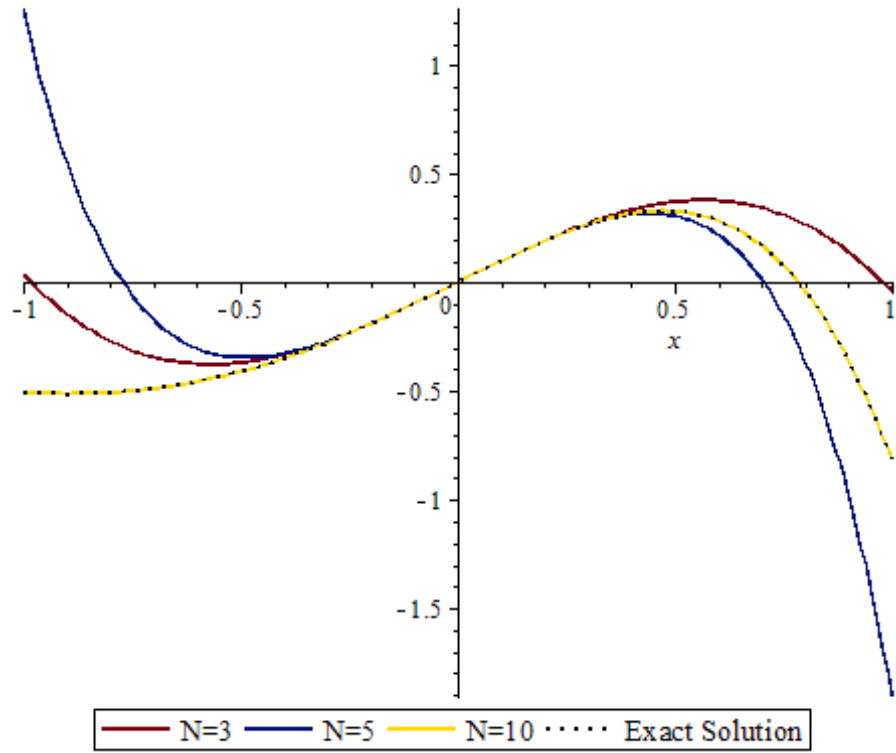
z_j	Tam Çözüm(Reel)	N=3	N=5	N=10
-0.9(1+i)	-0.51408423756	-0.14327003706	-0.87001495655	-0.51408466285
-0.8(1+i)	-0.50830349858	-0.26852436073	-0.64595932568	-0.50830361887
-0.7(1+i)	-0.48980289809	-0.34395284322	-0.42813644766	-0.48980293373
-0.6(1+i)	-0.45770168926	-0.37578371468	-0.30392129894	-0.45770170123
-0.5(1+i)	-0.41153350921	-0.37024520525	-0.34658461862	-0.41153351339
-0.4(1+i)	-0.35137622761	-0.33356554509	-0.32858653459	-0.35137622881
-0.3(1+i)	-0.27799722951	-0.27197296433	-0.27202066234	-0.27799722970
-0.2(1+i)	-0.19301346763	-0.19169569313	-0.19209094275	-0.19301346761
-0.1(1+i)	-0.09906500107	-0.09896196164	-0.09902708343	-0.09906500107
0(1+i)	0	0	0	0
0.1+0.1i	0.09893166780	0.09896196164	0.09896274254	0.098931667808
0.2+0.2i	0.19088015055	0.19169569313	0.19106148849	0.190880150547
0.3+0.3i	0.26719764607	0.27197296433	0.26680905015	0.267197645706
0.4+0.4i	0.31724705524	0.33356554509	0.31211526644	0.317247052454
0.5+0.5i	0.32822497668	0.37024520525	0.30637156161	0.328224969972
0.6+0.6i	0.28500832457	0.37578371468	0.22053550392	0.285008346128
0.7+0.7i	0.17003553948	0.34395284322	0.01521536427	0.170035812074
0.8+0.8i	-0.03676483503	0.26852436073	-0.3612453250	-0.036763373360
0.9+0.9i	-0.35798354287	0.14327003706	-0.9746832118	-0.357977796749

Çizelge 4.22. Test problemi 4.5 denkleminin yaklaşık ve tam çözümlerinin reel kısımlarının mutlak hatasının hesaplanması

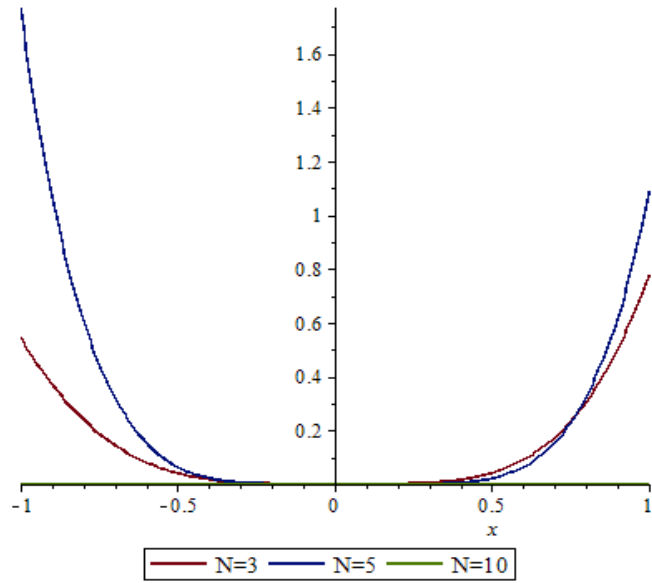
z_j	Tam Çözüm(Reel)	N=3	N=5	N=10
-0.9(1+i)	-0.5140842375636	3.71×10^{-1}	1.06663	4.26×10^{-7}
-0.8(1+i)	-0.5083034985852	2.40×10^{-1}	6.06×10^{-1}	1.20×10^{-7}
-0.7(1+i)	-0.4898028980949	1.46×10^{-1}	3.20×10^{-1}	3.58×10^{-8}
-0.6(1+i)	-0.4577016892664	8.19×10^{-2}	1.54×10^{-1}	1.18×10^{-9}
-0.5(1+i)	-0.4115335092141	4.13×10^{-2}	6.49×10^{-2}	4.20×10^{-9}
-0.4(1+i)	-0.3513762276180	1.78×10^{-2}	2.28×10^{-2}	1.40×10^{-9}
-0.3(1+i)	-0.2779972295102	6.02×10^{-3}	5.98×10^{-3}	3×10^{-10}
-0.2(1+i)	-0.1930134676315	1.32×10^{-3}	9.23×10^{-4}	1×10^{-10}
-0.1(1+i)	-0.0990650010797	1.03×10^{-4}	3.79×10^{-5}	6×10^{-11}
0(1+i)	0	0	0	0
0.1+0.1i	0.0989316678099	3.03×10^{-5}	3.11×10^{-5}	4×10^{-11}
0.2+0.2i	0.1908801505521	8.15×10^{-4}	1.81×10^{-4}	1×10^{-10}
0.3+0.3i	0.2671976460799	4.78×10^{-3}	3.89×10^{-4}	5×10^{-10}
0.4+0.4i	0.3172470552467	1.63×10^{-2}	5.13×10^{-3}	2.6×10^{-9}
0.5+0.5i	0.3282249766852	4.20×10^{-2}	2.19×10^{-2}	7.2×10^{-9}
0.6+0.6i	0.2850083245720	9.08×10^{-2}	6.45×10^{-2}	2.11×10^{-8}
0.7+0.7i	0.1700355394895	1.74×10^{-1}	1.55×10^{-1}	2.72×10^{-7}
0.8+0.8i	-0.0367648350342	3.05×10^{-1}	3.24×10^{-1}	1.46×10^{-6}
0.9+0.9i	-0.3579835428792	5.01×10^{-1}	6.17×10^{-1}	5.75×10^{-6}

Çizelge 4.23. Test problemi 4.5 denkleminin reel kısımlarının L_2 ve L_∞ hataları

N	3	5	10
L_2	7.81×10^{-1}	1.46×10^{-2}	$5,95 \times 10^{-6}$
L_∞	5.01×10^{-1}	10.6×10^{-1}	5.75×10^{-6}



Şekil 4.17. Test Problemi 4.5 denkleminin tam ve yaklaşık çözümlerinin reel kısımlarının grafiği



Şekil 4.18. Test Problemi 4.5 denkleminin tam ve yaklaşık çözümlerinin reel kısımlarının mutlak hatasının grafiği

Çizelge 4.24. Test problemi 4.5 denkleminin yaklaşık ve tam çözümlerinin imajiner kısımlarının karşılaştırılması

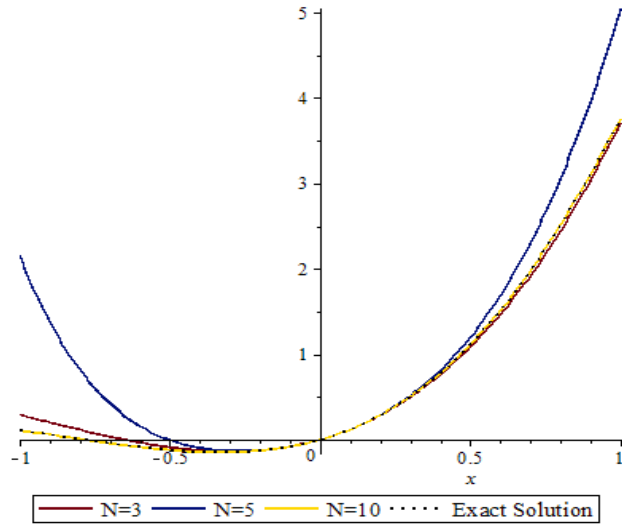
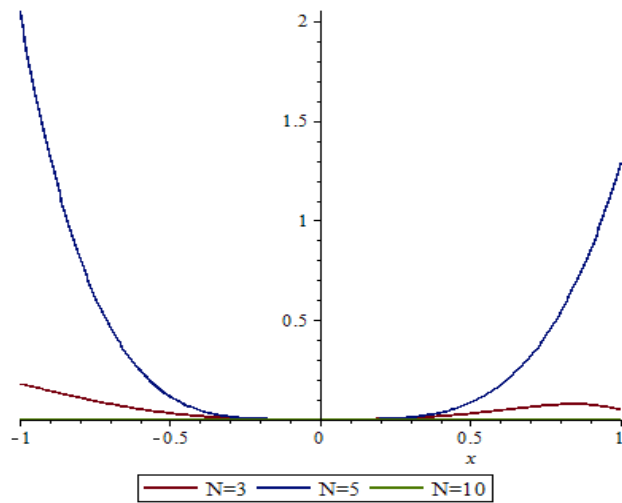
z_j	Tam Çözüm(Im)	N=3	N=5	N=10
-0.9(1+i)	0.059174281639	0.20423098689	- 0.97604663975	0.059174894946
-0.8(1+i)	0.007422692178	0.11775893729	- 0.95843666249	0.007422821158
-0.7(1+i)	-0.041930247800	0.03732678807	- 0.91459501245	- 0.041930233806
-0.6(1+i)	- 0.085842857707	- 0.03282044832	- 0.84669715706	- 0.085842862155
-0.5(1+i)	- 0.120747221001	- 0.08843775944	- 0.00311359084	- 0.120747224907
-0.4(1+i)	- 0.142548290703	- 0.12528013283	- 0.09482900065	- 0.142548292486
-0.3(1+i)	- 0.146641177305	- 0.13910255604	- 0.13156067134	- 0.146641177879
-0.2(1+i)	- 0.127950791305	- 0.12566001660	- 0.12491454687	- 0.127950791415
-0.1(1+i)	- 0.080998398889	- 0.08070750207	- 0.08079013917	- 0.080998398895
0(1+i)	0	0	0	0
0.1+0.1i	0.120998265555	0.12070750207	0.121110807212	0.120998265556
0.2+0.2i	0.287942257990	0.28566001660	0.290045235475	0.287942258020
0.3+0.3i	0.506543978347	0.49910255604	0.517534782390	0.506543978106
0.4+0.4i	0.782002175863	0.76528013283	0.816920018286	0.782002169177
0.5+0.5i	1.118664059898	1.08843775944	1.203531114354	1.118664002570
0.6+0.6i	1.519623124098	1.47282044832	1.694068370784	1.519622808634
0.7+0.7i	1.986248696114	1.92267321192	2.305982744907	1.986247365088
0.8+0.8i	2.517643709926	2.44224106270	3.056856379328	2.517639038521
0.9+0.9i	3.110028404271	3.03576901310	3.963783130063	3.110014121512

Çizelge 4.25. Test problemi 4.5 denkleminin yaklaşık ve tam çözümlerinin imajiner kısımlarının mutlak hatasının hesaplanması

z_j	Tam Çözüm(Im)	N=3	N=5	N=10
-0.9(1+i)	0.0591742816395	1.45×10^{-1}	1.32094	6.14×10^{-7}
-0.8(1+i)	0.0074226921780	1.10×10^{-1}	8.09×10^{-1}	1.29×10^{-7}
-0.7(1+i)	- 0.0419302478002	7.9×10^{-2}	4.66×10^{-1}	1.39×10^{-8}
-0.6(1+i)	- 0.0858428577078	5.3×10^{-2}	2.47×10^{-1}	4.30×10^{-9}
-0.5(1+i)	- 0.1207472210014	3.23×10^{-2}	1.18×10^{-1}	3.9×10^{-9}
-0.4(1+i)	- 0.1425482907032	1.73×10^{-2}	4.77×10^{-2}	1.7×10^{-9}
-0.3(1+i)	- 0.1466411773056	7.54×10^{-3}	1.51×10^{-2}	7×10^{-10}
-0.2(1+i)	- 0.1279507913054	2.29×10^{-3}	3.04×10^{-3}	1×10^{-10}
-0.1(1+i)	- 0.0809983988892	2.91×10^{-4}	2.08×10^{-4}	0
0(1+i)	0	0	0	0
0.1+0.1i	0.1209982655559	2.91×10^{-4}	1.12×10^{-4}	0
0.2+0.2i	0.2879422579901	2.28×10^{-3}	2.10×10^{-3}	0
0.3+0.3i	0.5065439783470	7.44×10^{-3}	1.10×10^{-2}	4×10^{-10}
0.4+0.4i	0.7820021758632	1.67×10^{-2}	3.49×10^{-2}	6.9×10^{-9}
0.5+0.5i	1.1186640598988	3.02×10^{-2}	8.49×10^{-2}	5.7×10^{-8}
0.6+0.6i	1.5196231240985	4.68×10^{-2}	1.74×10^{-1}	3.16×10^{-7}
0.7+0.7i	1.9862486961149	6.36×10^{-2}	3.20×10^{-1}	1.33×10^{-6}
0.8+0.8i	2.5176437099261	7.54×10^{-2}	5.39×10^{-1}	4.67×10^{-6}
0.9+0.9i	3.1100284042716	7.42×10^{-2}	8.54×10^{-1}	1.43×10^{-5}

Çizelge 4.26. Test problemi 4.5 denkleminin imajiner kısımlarının L_2 ve L_∞ hataları

N	3	5	10
L_2	2.49×10^{-1}	1.46×10^{-2}	1.51×10^{-5}
L_∞	1.45×10^{-1}	19.5×10^{-1}	1.43×10^{-5}

**Şekil 4.19.** Test Problemi 4.5 denkleminin tam ve yaklaşık çözümlerinin imajiner kısımlarının grafiği**Şekil 4.20.** Test Problemi 4.5 denkleminin tam ve yaklaşık çözümlerinin imajiner kısımlarının mutlak hatasının grafiği

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu çalışmada sunulan Legendre polinomları matris metodu, Lineer kompleks diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri için etkili bir metottur. Tam çözümlerle, uygulanan metodla elde edilen yaklaşık çözümler çizelgeler ve grafikler üzerinde karşılaştırıldı. Bu karşılaştırma sonucunda tam çözümlerle nümerik çözümlerin uyumlu olduğu görüldü. Bununla beraber görülmüştür ki; uynulanan metotta N kesme sınırının değeri arttırıldıkça analitik (tam) çözümle birebir uyuşma eğilimindedir. N nin çok büyük değerleri için yazılım kolaylığı sağlanabilirse çok daha güzel sonuçların elde edileceği düşünülmektedir. Bu durum bundan sonraki çalışmalarda araştırılmaya değerdir.

KAYNAKLAR

- Akyüz-Daşcıoğlu, A., 2007. Chebyshev Polynomial Approximation for High-Order Partial Differential Equations with Complicated Conditions. *Num Meth for Part Diff Equat*, 25(3), 610–621.
- Bhrawy, A. H., Tohidi, E. and Soleymani F., 2012. A new Bernoulli matrix method for solving high-order linear and nonlinear Fredholm integro-differential equations with piecewise intervals. *Applied Mathematics and Computation*, 219, 482–497.
- Bülbül, B. and Sezer M., 2011. Taylor polynomial solution of hyperbolic type partial differential equations with constant coefficients. *International Journal of Computer Mathematics*, 88(3), 533-544.
- Çelik, E., 2002. Diferensiyel-Cebirsel Denklemlerin Nümerik Çözümü. Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.
- Düşünceli F. and Çelik E., 2015. An Effective Tool: Numerical Solutions by Legendre Polynomials for High-order Linear Complex Differential Equations. *British Journal of Applied Science & Technology*, 8(4), 348-355.
- El-gendi, S.E., 1969. Chebyshev Solution of Differential Integral and Integro-Differential Equations. *Comp J*, 12, 282-287.
- Gülsu, M., Gürbüz B., Öztürk Y. and Sezer M., 2011. Laguerre polynomial approach for solving linear delay difference equations. *Applied Mathematics and Computation*, 217, 6765–6776.
- Gülsu, M., Öztürk Y. and Sezer M., 2011. On the solution of the Abel equation of the second kind by the shifted Chebyshev polynomials. *Applied Mathematics and Computation*, 217, 4827-4833.
- Gülsu, M., Öztürk Y. and Sezer M., 2010. A new collocation method for solution of mixed linear integro-differential-difference equations. *Applied Mathematics and Computation*, 216, 2183–2198.
- Gülsu, M., Sezer M. and Tanay, B., 2006. A matrix method for solving high-order linear difference equations with mixed argument using hybrid Legendre and Taylor polynomials. *Journal of the Franklin Institute*, 136, 559–570.
- Hille, E., 1976. *Ordinary Differential Equations in the Complex Domain*. A Wiley interscience publication, 484 p, USA.
- Hosseini, S.M. and Shahmorad, S., M., 2003. Numerical solution of a class of Integro-Differential equations by the Tau Method with an error estimation. *Applied Mathematics and Computation*, 136, 559–570.
- Hosseini, S.M. and Shahmorad, S., M., 2003. Tau numerical solution of Fredholm integro-differential equations with arbitrary polynomial bases. *Applied Mathematics and Computation*, 27, 145–154.
- Keşan C., 2003. Chebyshev Polynomial Solutions of Second-Order Linear Partial Differential Equations. *Appl Math and Comput*, 134, 109-124.
- Öztürk Y. and Gülsu M., 2012. Approximate solution of linear generalized pantograph equations with variable coefficients on Chebyshev-Gauss grid. *Journal of Advanced Research in Scientific Computing*, 4, 36–51.
- Öztürk, Y. and Gülsu, M., 2015. Numerical solution of a modified epidemiological model for computer viruses. *Applied Mathematical Modelling*, In press.

- Pour-Mahmoud, J., Rahimi-Ardabili, M.Y. and Shahmorad S., 2005. Numerical solution of the system of Fredholm integro-differential equations by the Tau method. *Applied Mathematics and Computation*, 168, 465–468.
- Sezer M. and Yüzbaşı Ş., 2010. A collocation method to solve higher order linear complex differential equations in rectangular domains. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 26, 596–611.
- Sezer, M. ve Doğan, S., 1996. Chebyshev series solutions of Fredholm integral equations. *Int J Math Educ Sci Technol*, 27(5), 649-657.
- Sezer, M., 1985. In the Solution Methods of Cauchy Problem Associated with Parabolic Partial Differential Equations. *J of Sci Faculty of Ege Uni Series A*, 8(1), 59-69.
- Sezer, M., 1989. A Chebyshev Polynomial Approximation for Dirichlet Problem. *J of Sci Faculty of Ege Uni Series A*, 12(2), 69-77.
- Shahmorad, S., 2005. Numerical solution of the general form linear Fredholm–Volterra integrodifferential equations by the Tau method with an error estimation. *Applied Mathematics and Computation*, 167, 1418–1429.
- Tohidi E., 2012. Bernoulli matrix approach for solving two dimensional linear hyperbolic partial differential equations with constant coefficients. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2, 136–139.
- Tohidi, E., 2012. Legendre approximation for solving linear HPDEs and comparison with Taylor and Bernoulli matrix methods. *Applied Mathematics*, 3, 410–416.
- Tohidi, E., Bhrawy, A. H. and Erfani, K., 2013. A collocation method based on Bernoulli operational matrix for numerical solution of generalized pantograph equation. *Applied Mathematical Modelling*. 37, 4283–4294.
- Yousefi, S. A., 2008. Legendre Multiwavelet Galerkin Method for Solving the Hyperbolic Telegraph Equation. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 26, 535-543.
- Yüzbaşı Ş., Şahin, N. and Gülsu, M., 2011. A collocation approach for solving a class of complex differential equations in elliptic domains. *Journal of Numerical Mathematics*, 19, 225–246.
- Yüzbaşı, Ş. and Sezer M., 2013. An improved Bessel collocation method with a residual error function to solve a class of Lane–Emden differential equations. *Mathematical and Computer Modelling*, 57, 1298–1311.
- Yüzbaşı, Ş. and Sezer M., 2013. Exponential Collocation Method for Solutions of Singularly Perturbed Delay Differential Equations. *Abstract and Applied Analysis*, 2013, 493204-9 pages.
- Yüzbaşı, Ş., 2012. An efficient algorithm for solving multi-pantograph equation systems. *Computers and Mathematics with Applications*, 64, 589-603.
- Yüzbaşı, Ş., 2012. Bessel collocation approach for solving continuous population models for single and interacting species. *Applied Mathematical Modelling*, 36, 3787–3802.
- Yüzbaşı, Ş., Aynigül, M. and Sezer M., 2011. A collocation method using Hermite polynomials for approximate solution of pantograph equations. *Journal of the Franklin Institute*, 348, 1128–1139.

ÖZGEÇMİŞ

1979 yılında Diyarbakır'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini burada tamamladı. 1997 yılında Dicle Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde lisans öğrenimine başlayarak 2001 yılında mezun oldu. 2009 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik bilim dalında yüksek lisans eğitimine başladı. 2011 yılında aynı bölümde doktora eğitimine devam etti. Halen Erzurum İbrahim Hakkı Fen Lisesi'nde Matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır. Evli ve 2 çocuk babasıdır.