YARI-KOTANJANT DEMET

Furkan YILDIRIM

Doktora Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalı
Prof. Dr. Arif SALİMOV
2015

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

YARI-KOTANJANT DEMET

Furkan YILDIRIM

MATEMATİK ANABİLİM DALI
Geometri Bilim Dalı

ERZURUM
2015

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAY FORMU

YARI-KOTANJANT DEMET

Prof. Dr. Arif SALİMOV danışmanlığında Furkan YILDIRIM, tarafından hazırlanan bu çalışma 12 / 01 /2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı – Geometri Bilim Dalı'nda doktora tezi olarak **oybirliği** ile kabul edilmiştir.

Başkan	: Prof. Dr. Yusuf YAYLI	*İmza*	:
Üye	: Prof. Dr. Arif SALİMOV (Danışman)	*İmza*	:
Üye	: Prof. Dr. Abdullah KAPLAN	*İmza*	:
Üye	: Doç. Dr. Nejmi CENGİZ	*İmza*	:
Üye	: Doç. Dr. Kürşat AKBULUT	*İmza*	:

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu 15 / 01 / 2015 tarih ve 02 / 16 nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. İhsan EFEOĞLU
Enstitü Müdürü

Bu çalışma TÜBİTAK'ın MFAG projeleri kapsamında desteklenmiştir.
Proje No: 112T111

ÖZET

Doktora Tezi

YARI-KOTANJANT DEMET

Furkan YILDIRIM

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Arif SALİMOV

Bu tezde ilk olarak, bir B manifoldu üzerindeki M fibre demeti kullanılarak, dejenere simplektik yapıya sahip olan, t*B yarı-kotanjant (pull-back) demetin tanımı yapıldı. Daha sonra M üzerindeki izdüşümü olan geometrik objelerin yarı-kotanjant demete olan lift problemleri incelendi. Ayrıca, liftleri alınmış objeler ile dejenere simplektik yapı arasındaki ilişki incelendi. Son olarak, TM tanjant demet izdüşümü (submersion) ile tanımlı T*M kotanjant demetinin t*M pull-back (yarı-kotanjant) demeti tanımlanıp, t*M pull-back (yarı-kotanjant) demetinde vektör ve (1,1) tipli tensör alanları olan afinorların tam ve yatay liftleri ile ilgili bazı problemler ele alınmıştır.

2015, 150 sayfa

Anahtar Kelimeler: Vektör alanları, tam lift, yatay lift, temel 1-form, pull-back demet, yarı-kotanjant demet.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

SEMI-COTANGENT BUNDLE

Furkan YILDIRIM

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Discipline of Geometry

Supervisor: Prof. Dr. Arif SALIMOV

In this thesis; firstly, using the fiber bundle M over a manifold B, the definition of semi-cotangent (pull-back) bundle t*B which has a degenerate symplectic structure was given. Secondly, lifting problems of projectable geometric objects on M to the semi-cotangent bundle were analyzed. Relations between lifted objects and a degenerate symplectic structure were also presented. Then, a pull-back (semi-cotangent) bundle t*M of cotangent bundle T*M by using projection (submersion) of the tangent bundle TM was investigated. Finally, complete and horizontal lifts of vector and affinor (tensor of type (1,1)) fields for pull-back (semi-cotangent) bundle t*M were examined.

2015, 150 pages

Keywords: Vector field, complete lift, horizontal lift, basic 1-form, pull-back bundle, semi-cotangent bundle.

TEŞEKKÜR

Doktora tezi olarak sunduğum bu çalışma Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde yapılmıştır.

Çalışmalarımda her türlü desteği sağlayan, hocam Sayın Prof. Dr. Arif SALİMOV'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarımda ve tezin hazırlanışında yakın ilgilerini gösterip, bana yol gösteren ve bilgilerine her zaman ihtiyaç duyacağım değerli hocalarım; Sayın Prof. Dr. Abdullah MAĞDEN, Sayın Doç. Dr. Kürşat AKBULUT, Sayın Doç. Dr. Necmi CENGİZ, Sayın Doç. Dr. Murat İŞCAN, Sayın Doç. Dr. Ömer TARAKÇI, Sayın Doç. Dr. Aydın GEZER'e ve arkadaşlarım Sayın Suna AY ile Sayın Selahattin GENÇ'e, çalışmalarım esnasında vermiş oldukları destek ve teşvikten dolayı aileme ayrıca burs imkanı sağlayan TÜBİTAK-BİDEP'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Furkan YILDIRIM

Ocak, 2015

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

T_{km}^{i}	Afin Deformasyon (Gerilme) Tensörü
S_{ij}^{h}	Burulma Tensörü
∇	Burulmasız Afin Konneksiyon
$t^{*}(B_m)$	B_m Üzerindeki Yarı-kotanjant Demet
Γ_{ij}^{h}	Cristoffel Sembolü
ω	Dejenere Simplektik Yapı
^{vv}	Dikey Lift
R_{ijk}^{h}	Eğrilik Tensörü
γ	Gama Operatörü
F	İzdüşümlü Afinor Alanları
X	İzdüşümlü Vektör Alanları
$T^{*}(M_n)$	M_n Üzerindeki Kotanjant Demet
$T(M_n)$	M_n Üzerindeki Tanjant Demet
g	Pseudo-Riemannian Metriği
$\overset{C}{\otimes}$	Pür Çarpım
p	$t^{*}(B_m)$ ’nin Temel 1-formu
π	Tabii İzdüşüm
^{cc}	Tam Lift
W_n	Weyl Uzayı
∇_X	X Vektör Alanına Göre Kovaryant Türev
L_X	X Vektör Alanına Göre Lie Türevi
^{HH}	Yatay Lift

1. GİRİŞ

Diferensiyel geometri geometrik problemleri, diferensiyel ve integral hesaplama tekniklerini kullanarak çözümlemeye çalışan matematiğin bir alt disiplinidir. XVII. yüzyılda ortaya çıkan ve güncelliğini koruyan Diferensiyel geometrinin esas konusu, eğrilerin ve Öklid uzayında yüzeylerin incelenmesi olmuştur.

Diferensiyel Geometri'de önemli bir yere sahip olan tensör kavramı güncel anlamda ilk olarak aslında bir fizikçi olan Woldemar Voigt tarafından 1898'de kullanıldı. Tensör hesaplamaları 1890'lı yıllarda kısaca Ricci olarak alınan Gregorio Ricci-Curbastro tarafından mutlak diferensiyel hesaplamalar başlığı altında incelendi ve bu çalışmalar 1892 yılında kendisi tarafından sunuldu. Daha sonra Ricci and Tullio Levi-Civita (1900) mutlak diferensiyel hesaplama metodları ve uygulamaları adı altında çalışmalarını yayımladılar.

Uzayda her bir noktaya sırasıyla bir skaleri veya vektörü tayin eden skaler alanın veya vektör alanın genelleşmiş hali olan tensör alanı, manifold üzerinde tanımlı olup manifoldun her bir noktasına bir tensör karşılık getiren bir dönüşümdür. Matematiksel yapılarda ise tensör alanı ifadesi yerine kısaca tensör kullanılır.

Diferensiyel Geometri'de önemli bir konu olan Riemannian manifoldda tanjant demetlerin Diferensiyel Geometri'sinin incelenmesi ilk olarak Sasaki (1958) tarafından yapılmıştır. Daha sonra Dombrowski (1962), tanjant demetteki geometrilerin gelişmesine katkıda bulunmuştur. Yano and Ledger (1965), simetrik uzaylarda tanjant demeti tanımlamışlar ve bununla ilgili çalışmalarda bulunmuşturlar.

1966 yılında tanjant demette liftler çalışılmaya başlanmıştır. İlk çalışma Kobayashi and Yano (1966)'ya ait tanjant demette tensör alanlarının ve konneksiyonların tam ve dikey liftleri olmuştur. Ama "lift" kavramı "genişleme" anlamında Yano and Kobayashi'den daha önce yapılan Sasaki (1958)'nin çalışmalarında "devam" adı altında görülmektedir.

Kandatu (1966), lineer olmayan konneksiyona sahip bir manifoldda tanjant demeti tanımlamıştır.

Yano and Ishihara (1967) tanjant demette konneksiyonların ve tensör alanlarının yatay liftleriyle ilgili çalışmalarda bulunmuşlardır. Morimoto (1970) tanjant demette tensör alanlarının ve konneksiyonların liftleri hakkında çalışmalarda bulunmuştur.

Yano and Petterson (1967) çalışmasında lift konusu, kotanjant demet için de incelenmiştir. Yano and Ishihara (1973) çalışmasında ise, hem tanjant hem de kotanjant demetlerdeki dikey, tam, yatay ve diagonal liftlerle ilgili elde edilmiş önemli sonuçlara yer verilmiştir.

Yarı-tanjant demet ise Duc (1979) tarafından tanımlanmış olup yarı-tanjant demete ait bazı özellikleri Vishnevskii (2002) tarafından incelenmiştir. Yarı-tanjant demette Lie ve kovaryant türevlerinin tam liftleri ise Salimov and Kadıoğlu (2000) tarafından çalışılmıştır.

Sunulan bu tezde ise öncelikle yarı-kotanjant demetin tanımı yapılmış daha sonra ise yarı-kotanjant demette fonksiyonun ve 1-formun dikey liftleri, vektör ve afinor alanlarının tam ve yatay liftleri ayrıntılı olarak incelenmiştir. Bu amaçla, çalışmamızın anlaşılabilmesi için ve konunun sınırlanması bakımından ikinci bölümde konumuzla ilgili bazı kavramların tanımları ve özellikleri kuramsal temeller adı altında verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise tanjant demet, kotanjant demet ve yarı-tanjant demetin tanımları ile bu demetlerdeki tensör alanlarının çeşitli liftlerine ilişkin bilgiler yer almaktadır.

Dördüncü bölümde yarı-kotanjant demetin tanımı yapılmış ve yarı-kotanjant demetin, kotanjant demetinin bir pull-back demeti olduğu gösterilmiştir. Daha sonra yarı-kotanjant demette çeşitli tensör alanlarının tam, dikey ve yatay liftleri tanımlanmış ve bunlara ilişkin çeşitli lift problemleri incelenmiştir. Son olarak tanjant demet izdüşümü ile tanımlı kotanjant demetinin pull-back demeti tanımlanmış olup ayrıca bu demette yer alan tensör alanlarının tam, dikey ve yatay liftleri ile bunlara ilişkin çeşitli lift problemleri incelenmiştir.

Tezdeki sonuçların büyük bir kısmı (Yıldırım 2013; Salimov and Yıldırım 2014; Yıldırım and Salimov 2014a, 2014b) çalışmalarında yer almaktadır.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Diferensiyellenebilir Manifoldlar

Tanım 2.1.1: X Hausdorff uzay olmak üzere herhangi bir $U \subset X$ açık kümesinden $V \subset \Re^n$ kümesine tanımlanan

$$\varphi : U \to V$$

homeomorfizmine X 'de n boyutlu koordinat sistemi veya harita, U 'ya ise φ haritasının koordinat komşuluğu veya koordinat bölgesi denir ve (U, φ) şeklinde gösterilir. Eğer $x \in U$ ise

$$\varphi(x) = \left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right) \in \mathbb{R}^n$$

olur. Burada $x^1, \ldots, x^n$ reel sayılarına φ haritasında x noktasının koordinatları denir.

Tanım 2.1.2: Eğer X Hausdorff uzayının n-boyutlu φ_α haritalarının U_α bölgeleri bu uzayı örterse, yani

$$X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \text{ , (A-indisler kümesi)}$$

ise X 'e n-boyutlu topolojik manifold veya sadece n-boyutlu manifold denir.

Tanım 2.1.3: X Hausdorff uzay ve k ise $0 \leq k$ şartını sağlayan tam sayı olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in A, U_\alpha \subset X\}$ lokal koordinatlar ailesine X üzerinde C^k sınıfından n-boyutlu atlas adı verilir:

1. Lokal haritaların U_α bölgesi X 'i örter, yani *X*, *n*-boyutlu topolojik manifolddur.

2. Keyfi $\alpha, \beta \in A$ için $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ ise

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

dönüşümü C^k sınıfındandır. Bu şarta bazen $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ve (U_β, φ_β) haritalarının C^k uzlaşması şartı da denir. $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümüne ise koordinatların dönüşümü $\left(u_\beta^i = u_\beta^i(u_\alpha^j), i, j = 1, \ldots, n\right)$ denir. Burada u_β^i, (U_β, φ_β) haritasındaki $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ noktasının koordinatları, u_α^j ise $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ haritasındaki x noktasının koordinatlarıdır.

$U_\alpha \cap U_\beta = \varnothing$ ise bu durumda $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümü tanımlanamaz. Ancak, bu durumda $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümünün C^k sınıfından olduğu kabul edilecektir. 2. şart, $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümlerinin C^k sınıfından difeomorfizmler olmasına denktir. Bu ise, $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ koordinat dönüşümünün Jakobi matrisinin determinantının sıfırdan farklı olması demektir.

Tanım 2.1.4: $\{(\mathrm{U}_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ ve $\{(\mathrm{U}_\beta, \varphi_\beta)\}$, C^k sınıfından herhangi iki atlas olsun. Bu atlasların keyfi $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ve (U_β, φ_β) haritaları C^k uzlaşmış ise yani, $\{(\mathrm{U}_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ ve $\{(\mathrm{U}_\beta, \varphi_\beta)\}$ atlaslarının birleşimi C^k sınıfından atlas ise verilen atlaslara denk atlaslar denir.

Tanım 2.1.5: *X* Hausdorff uzayı üzerinde C^k atlaslarının denklik sınıfına C^k-yapı denir. C^k-yapısının tüm C^k atlaslarının birleşiminin oluşturduğu C^k atlasına maksimal C^k atlas adı verilir.

X üzerindeki C^k atlaslarının her bir denklik sınıfı, kendisinin bir elemanı ile ifade edilir. Yani, C^k-yapısı, onun keyfi C^k atlası yardımıyla oluşturulabilir. Buradan da X üzerindeki her bir C^k-yapısının bu yapıdan olan bir C^k atlas ile verilebileceği sonucu çıkar.

C^0-yapıya topolojik yapı, $C^k\left(1 \leq k \leq \infty\right)$ yapıya ise düzgün (smooth) yapı denir. Bundan sonra yalnız C^∞-yapılara bakılacaktır.

Tanım 2.1.6: *M*, sayılabilir baza sahip Hausdorff uzay olsun. Eğer, *M* üzerinde *n*-boyutlu C^∞ atlaslarının C^∞ yapısı verilmişse *M* uzayına *n*-boyutlu C^∞ sınıfından diferensiyellenebilir manifold veya düzgün manifold denir ve M_n ile gösterilir.

2.2. Tensör Alanları

Tanım 2.2.1: B_n, $n-$boyutlu reel vektör uzayı, B_n^* ise onun dual uzayı olsun. $\vec{x}_j \in B_n$, $j = 1,...,q$ ve $\overset{i}{\xi} \in B_n^*$, $i = 1,..., p$ kovektör değişkenlerinin

$$\omega = t\ (\vec{x}_1, \vec{x}_2,..., \vec{x}_q, \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi},..., \overset{p}{\xi})$$

reel değerli fonksiyonunu göz önüne alalım. Eğer bu fonksiyon her bir değişkene göre lineerlik şartını sağlarsa, fonksiyona multilineer fonksiyon denir.

Mesela birinci vektör değişkenine göre lineerlik şartı $\lambda, \mu \in \Re$ olmak üzere

$$\omega = t(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}, \vec{x}_2,..., \vec{x}_q, \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi},..., \overset{p}{\xi}) = \lambda t\ (\vec{x}, \vec{x}_2,..., \vec{x}_q, \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi},..., \overset{p}{\xi}) + \mu t(\vec{y}, \vec{x}_2,..., \vec{x}_q, \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi},..., \overset{p}{\xi})$$

biçiminde gösterilebilir. Bu multilineer fonksiyona karşılık gelen

$$t : \underbrace{B_n \times B_n \times ... \times B_n}_{q} \times \overbrace{B_n^* \times ... \times B_n^*}^{p} \to \mathbb{R}$$

operatörüne B_n uzayında p dereceden kontravaryant, q dereceden kovaryant tensör adı verilir ve bu şekildeki tüm tensörlerin uzayı $\Im_q^p(B_n)$ ile gösterilir. $p \geq 0,\ q \geq 0$ olmak üzere $s = p+q$ sayısına ise tensörün valentliği, (p,q) sembolüne ise tensörün tipi denir. (p,0) tipli tensöre kontravaryant tensörler, (0,q) tipli tensörlere ise kovaryant tensörler denir.

$S_2(B_n)$, $\Im_2^0(B_n)$ uzayının bütün simetrik tensörlerinin alt uzayı olmak üzere herhangi bir $g \in S_2(B_n)$ tensörünü alalım.

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = 0, \ \ \forall \vec{y} \in B_n \tag{2.1}$$

şartında $\vec{x} = 0$ olursa, bu taktirde g tensörüne regüler tensör denir.

(2.1) eşitliği koordinatlarla

$$g_{ij} x^i y^j = 0$$

biçiminde yazılır. Bu eşitlik her y^j için sağlandığından

$$g_{ij} x^i = 0\,, \ \ j = 1, ..., n$$

bulunur. Bu denklem sisteminin $x^i = 0$ çözümüne sahip olması için

$$Det(g_{ij}) \neq 0$$

olması gerekir. Burada (g_{ij}), g tensörüne karşılık gelen matristir.

$g \in S_2(B_n)$ tensörü regüler tensör ise g tensörüne B_n uzayında esas tensör adı verilir. Esas tensöre karşılık gelen (g_{ij}) matrisinin tersini $(\tilde{g}^{ij})$ ile gösterelim. Bu takdirde

$$\tilde{g}^{kj} g_{ji} = \delta_i^k \tag{2.2}$$

yazılır. B_n ve B_n^* uzayları arasında

$$\xi_i = g_{ik} x^k ,\ (\eta_i = g_{ik} y^k) \tag{2.3}$$

dönüşümü, (2.2) eşitliğine göre

$$x^k = \tilde{g}^{ki} \xi_i ,\ (y^k = \tilde{g}^{ki} \eta_i) \tag{2.4}$$

olur. $g \in S_2(B_n)$ tensörüne karşılık gelen invaryant bilineer formu

$$\omega = g(\vec{x}, \vec{y}) = g_{ij} x^i y^j$$

şeklinde yazalım. Burada (2.3) ve (2.4) eşitliklerini dikkate alırsak

$$\omega = g(\vec{x}, \vec{y}) = g_{ij} x^i y^j = x^i \eta_i = \tilde{g}^{ij} \eta_i \xi_j$$

olur. Yani, g esas tensörü verildiğinde biz kovektör değişkenlerinin $\omega = \tilde{g}^{ij} \eta_i \xi_j$ invaryant bilineer formunu buluruz. Buna göre de $\tilde{g}^{ij}$, (2,0) tipli tensörün koordinatlarıdır. Bu tensöre g tensörünün ters tensörü denir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\eta, \xi) &= \tilde{g}^{ij} \eta_i \xi_j = \eta_i x^i = g_{ik} y^k x^i , \\
\tilde{g}(\xi, \eta) &= \tilde{g}^{ji} \xi_j \eta_i = \xi_j y^j = g_{jk} x^k y^j \\
&= g_{ki} x^i y^k = g_{ki} y^k x^i = \tilde{g}(\eta, \xi)
\end{aligned}$$

olduğundan $\tilde{g}^{ij}$ tensörü simetriktir.

Böylece B_n uzayında g tensörü verildiğinde B_n ’den B_n^* ’a bir izomorfizm bulunur. Buna göre vektör ve kovektörler aynılaştırılır ve aynı $\vec{x}$ sembolü ile gösterilir. Yani

$$x_k = g_{ki}x^i, \quad x^i = \tilde{g}^{ik}x_k$$

yazılır. Bu işlemlere indisin indirilmesi $\left(x^i \to x_k\right)$ ve yükseltilmesi $\left(x_k \to x^i\right)$ işlemleri denir. Buna göre, $S(\vec{x},\vec{y})$ tensörü göz önüne alınırsa

$$S^{p}_{.\,j} = \tilde{g}^{pi}S_{ij}, \quad S_{i\,.}^{\;p} = \tilde{g}^{pj}S_{ij}, \quad S^{pq}_{..} = \tilde{g}^{pi}\tilde{g}^{pj}S_{ij}$$

ifadelerinin her biri S_{ij} tensöründen indislerin yükseltilmesi işlemi

$$S_{p}^{\cdot\, j} = g_{pi}S^{ij}, \quad S^{i\cdot}_{\;p} = g_{pj}S^{ij}, \quad S^{\cdot\,\cdot}_{pq} = g_{pi}g_{qj}S^{ij}$$

ifadelerinin her biri ise verilmiş S^{ij} tensöründen indislerin indirilmesi işlemidir.

Eğer $g(\vec{x},\vec{y})$, B_n uzayında (0,2) tipli tensör ise, her $\vec{x},\vec{y} \in B_n$ vektörlerinin skaler çarpımı denildiğinde g tensörünün $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörleri üzerindeki izi anlaşılır ve $\vec{x}\vec{y}$ veya $(\vec{x},\vec{y})$ biçiminde gösterilir. Yani

$$\vec{x}\vec{y} = g\left(\vec{x},\vec{y}\right) = g_{ij}x^i y^j = x_j y^j \tag{2.5}$$

biçiminde tanımlanır.

Eğer $Det\left(g_{ij}\right) \neq 0$ olursa bu takdirde (2.5) skaler çarpımına regüler çarpım denir.

Tanım 2.2.2: M_n, C^∞ sınıfından bir manifold ve T_p, her $p \in M_n$ noktasındaki tanjant uzayı olsun. M_n manifoldunun her $p \in M_n$ noktasına T_p uzayından bir X_p vektörü karşılık getiren X vektör değerli fonksiyonuna vektör alanı denir (Salimov ve Mağden 2008).

f, M_n manifoldunda bir dönüşüm ise Xf 'de M_n manifoldunda

$$(Xf)(p) = X_p f$$

ile tanımlanan bir dönüşümdür. $U \subset M_n$ koordinat komşuluğunu alalım. Bu komşuluktaki bir vektör alanı

$$X = \xi^i \partial_i$$

olarak yazılır. ξ^i 'ler U 'daki lokal koordinatlara bağlıdır. Yani

$$\xi^i = \xi^i\left(x^i, \dots, x^n\right), \quad i = 1, \dots, n$$

olur.

M_n, C^∞ sınıfından bir manifold olmak üzere her $m \in M_n$ noktasındaki her bir (p,q) tipli tensör için uygun bir $\Im_q^p(m)$ tensör uzayı vardır.

Tanım 2.2.3: M_n, C^∞ sınıfından bir manifold ve $\Im_q^p(m)$, her $m \in M_n$ noktasındaki (p,q) tipli tensör uzayı olsun. M_n manifoldunun her $m \in M_n$ noktasına $\Im_q^p(m)$ tensör uzayından bir $t_q^p(m)$ tensörü karşılık getiren T fonksiyonuna (p,q) tipli tensör alanı denir (Bishop and Goldberg 1968).

Eğer $p=1,\ q=0$ ise vektör alanı elde edilir. Yani, $(1,0)$ tipli tensör alanı bir vektör alanıdır.

Eğer $p=q=0$ ise her $m \in M_n$ noktasına bir skaler değer karşılık gelir. Bu yüzden $(0,0)$ tipli tensör alanı reel değerli bir fonksiyondur.

Eğer $U \subset M_n$ bölgesinde *f* fonksiyonu C^∞ sınıfından ise her $x \in U$ için $df\big|_x \in \Im_1^0(x)$ olur. Böylece *f* fonksiyonunun diferensiyeli olan df operatörü $(0,1)$ tipli bir tensör alanıdır.

Herhangi bir *m* noktasındaki T_m tensörü simetrik tensör ise *T* tensör alanına simetrik tensör alanı denir. Eğer herhangi bir *m* noktasındaki T_m tensörü antisimetrik tensör ise *T* tensör alanına antisimetrik tensör alanı denir.

T, (p,q) tipli tensör alanı olsun. $\theta_1,...,\theta_p$ $(0,1)$ tipli tensör alanları ve $X_1,...,X_q$ vektör alanları olmak üzere

$$T\left(\theta_1,...,\theta_p, X_1,...,X_q\right)(m) = T_m\left(\theta_1(m),...,\theta_p(m), X_1(m),...,X_q(m)\right)$$

ifadesi reel değerli fonksiyon tanımlar. Özelikle x^i koordinatlarına göre *T* tensör alanının bileşenleri

$$T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = T\left(dx^{i_1},...,dx^{i_q},\partial_{j_1},...,\partial_{j_p}\right)$$

biçiminde reel değerli fonksiyonlardır (Bishop and Goldberg 1968).

T tensör alanının bileşenleri C^∞ sınıfından fonksiyonlar ise *T* tensör alanına C^∞ sınıfındandır denir. C^∞ sınıfından olan $(0,1)$ tipli tensör alanına 1-form (Pfaffian form) denir.

(p,q) tipli T tensör alanının C^{∞} sınıfından olması için gerek ve yeter şart her bir $\theta_1,...,\theta_p$ 1-formları ve her bir C^{∞} sınıfından $X_1,...,X_q$ vektör alanları için $T(\theta_1,...,\theta_p, X_1,...,X_q)$ fonksiyonunun C^{∞} sınıfından olmasıdır.

Tanım 2.2.4: $\omega = (\omega_{ij})$, (0,2) tipli bir tensör olsun. $\omega = (\omega_{ij})$ tensöründe i ve j indislerine göre antisimetriklik varsa $\omega = (\omega_{ij})$ tensörüne 2-form veya dış form denir. Bir k-forma dış diferensiyel uygulanırsa sonuçta k+1-form elde edilir. Yani ω, k-form ise $d\omega \in \Im_{k+1}(M_n)$ olup k+1-form oluşur. Böyle k+1 formlara tam form denir.

$$d^2\omega = d(d\omega) = 0$$

olması tam formların en önemli özelliğidir. Yani tam formlara dış diferensiyel uygulanırsa sonuç sıfır olur.

2.3. Diferensiyellenebilir Manifold Üzerinde Afin (Levi-Civita) Konneksiyon

M_n diferensiyellenebilir manifoldunun $\gamma : u^i = u^i(t)$ eğrisi boyunca konneksiyon tanımlanması eğrinin noktalarına uygulanan vektörler arasında bağlantı oluşturma kuralıdır. Eğer γ eğrisinin herhangi bir noktasındaki v^i vektörü t parametresine bağlı olarak değiştikçe verilen konneksiyona göre başlangıçtaki ile uygun kalırsa, bu durumda bu vektör verilen konneksiyona göre γ eğrisi boyunca paralel kaydırılmış olur. Eğer konneksiyon diferensiyellenebilirse, o zaman paralel kaydırmayı ifade eden $v^i = v^i(t)$ fonksiyonları da diferensiyellenebilir fonksiyonlar olur. Eğer vektörlerin paralel kaydırılması halinde lineer bağımlılık korunursa verilen konneksiyona afin veya lineer konneksiyon adı verilir.

Afin konneksiyonun γ eğrisinin çeşitli noktalarına uygulanan vektörler arasında uygunluğu ifade eden şartı, yani vektörün eğri boyunca verilmiş afin konneksiyona göre paralel kaydırılması şartını bulalım. γ eğrisinin başlangıç noktasındaki $\underset{k}{a}^{i},\ k=1,...n$ lokal bazını alalım ve farz edelim ki $\underset{k}{a}^{i}(t)$ 'nin lineer bağımlılığı, baz vektörlerin verilen eğri boyunca paralel kaydırılma kuralını ifade etmiş olsun. Keyfi $v^{i}=\lambda^{k}\underset{k}{a}^{i}$ vektörünün verilen afin konneksiyona göre γ eğrisi boyunca paralel kaydırılması için gerek ve yeter şart λ^{k} katsayılarının sabit olmasıdır. Bu nedenden istifade edilerek

$$dv^{i}=\lambda^{k}d\underset{k}{a}^{i} \tag{2.6}$$

ifadesi yazılabilir. $v^{i}=\lambda^{k}\underset{k}{a}^{i}$ eşitliğinden

$$\lambda^{k}=\overset{k}{a}_{i}\,v^{i} \tag{2.7}$$

eşitliği yazılır. Burada $\underset{k}{a}^{i}$ baz vektörü olduğundan buna karşılık gelen kobaz vektörü $\overset{k}{a}_{i}$ ile gösterilir. Dolayısıyla $\underset{k}{a}^{i}\overset{s}{a}_{i}=\delta_{k}^{s}$ olur. (2.7) ifadesi (2.6) eşitliğinde kullanılırsa

$$dv^{i}+\omega_{k}^{i}v^{k}=0 \tag{2.8}$$

eşitliği elde edilir. (2.8) denkleminde ω_{i}^{k},

$$\omega_{i}^{k}=-\overset{s}{a}_{i}\,d\underset{s}{a}^{k} \tag{2.9}$$

biçimindedir. (2.8) şartı v^{i} vektörünün verilen afin konneksiyona göre paralel kaydırılması şartıdır. (2.9) biçiminde tanımlanan ω_{i}^{k} objelerine konneksiyon formları (bağlantı objeleri) denir.

Teorem 2.3.1: 1. Konneksiyon formları $\left\{ \underset{k}{a}^{i} \right\}$, $k=1,...,n$ bazının seçilişinden bağımsızdırlar.

2. Konneksiyon formları, eğrisel koordinatların dönüştürülmesi durumunda tensör dönüşüm kuralına göre dönüşmezler.

İspat: 1. ω_i^k ve ϖ_i^k farklı iki baza karşılık gelen konneksiyon formları olsun. Paralel kaydırılan v^i vektörü için

$$dv^i + \omega_k^i v^k = 0\,, \tag{2.10}$$

$$dv^i + \varpi_k^i v^k = 0 \tag{2.11}$$

şartlarını yazabiliriz. (2.10) ve (2.11) şartlarından ve v^i vektörünün başlangıç değerinin keyfiliği şartından $\omega_k^i = \varpi_k^i$ bulunur.

2. M_n manifoldunda u^i eğrisel koordinatların değişmesi halinde baz vektörlerinin ve kovektörlerinin dönüşüm kuralı

$$\overset{k}{a}_i = A_i^{i'} \overset{k}{a}_{i'}\,, \quad \underset{k}{a}^i = A_{i'}^i \underset{k}{a}^{i'} \tag{2.12}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $A_{i'}^i = \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}$, $A_i^{i'} = \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^i}$ biçimindedir. (2.12)'deki ikinci eşitliğin diferensiyelini alırsak

$$d\underset{k}{a}^i = dA_{i'}^i \underset{k}{a}^{i'} + A_{i'}^i d\underset{k}{a}^{i'} \tag{2.13}$$

elde edilir. (2.9) denkleminde (2.12)'nin birinci eşitliği ve (2.13) eşitliği göz önüne alınırsa

$$\omega_j^i = -\overset{k}{a}_j \, d\underset{k}{a}^i = -A_j^{j'} \overset{k}{a}_{j'} \left(dA_{i'}^i \underset{k}{a}^{i'} + A_{i'}^i d\underset{k}{a}^{i'} \right)$$

ve gerekli işlemlerden sonra

$$\omega_j^i = A_j^{j'} A_{i'}^i \omega_{j'}^{i'} - A_j^{j'} dA_{j'}^i \qquad (2.14)$$

bulunur. (2.14) eşitliği, ω_j^i konneksiyon formlarının, tensörün koordinatları olamadığını gösterir.

Şimdi ise kovektörün γ eğrisi boyunca verilen afin konneksiyona göre paralel kaydırılması şartını inceleyelim.

Tanım 2.3.1: ω_i kovektörünün γ eğrisi boyunca paralel kaydırılan keyfi v^i vektörü üzerindeki izi bu eğri boyunca sabit kalırsa, ω_i kovektörüne γ eğrisi boyunca verilen afin konneksiyonuna göre paralel kaydırılmıştır denir.

Bu tanıma göre

$$d\left(v^i \omega_i\right) = dv^i \omega_i + v^i d\omega_i = 0 \qquad (2.15)$$

eşitliği yazılabilir. v^i vektörünün paralel kaydırılması şartından

$$dv^i = -\omega_k^i v^k \qquad (2.16)$$

yazılır. (2.16) eşitliğini (2.15) ifadesinde kullanılırsa

$$\left(d\omega_i - \omega_i^k \omega_k\right) v^i = 0$$

eşitliği bulunur. v^i vektörünün keyfiliğinden dolayı ω_i kovektörün γ eğrisi boyunca verilen afin konneksiyona göre paralel kaydırılma şartı

$$d\omega_i - \omega_i^k \omega_k = 0 \tag{2.17}$$

biçiminde olur. Vektörün ve kovektörün (1-form) γ eğrisi boyunca paralel kaydırılması şartını kullanarak, eğrinin çeşitli noktalarına uygulanmış keyfi tipli tensörün de paralel kaydırılmasını verebiliriz. γ eğrisi boyunca (p,q) tipli keyfi tensörün izi

$$Z = t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \underset{1}{v}^{j_1} \dots \underset{q}{v}^{j_q} \overset{1}{\omega}_{i_1} \dots \overset{p}{\omega}_{i_p}$$

şeklinde verilmiş olsun. Z fonksiyonunun vektör ve kovektör değişkenlerinin γ eğrisi boyunca paralel kaydırılması şartları dahilinde diferensiyeli

$$\begin{aligned} dZ &= dt^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \underset{1}{v}^{j_1} \dots \underset{q}{v}^{j_q} \overset{1}{\omega}_{i_1} \dots \overset{p}{\omega}_{i_p} + t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} d\underset{1}{v}^{j_1} \dots \underset{q}{v}^{j_q} \overset{1}{\omega}_{i_1} \dots \overset{p}{\omega}_{i_p} \\ &+ \dots + t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \underset{1}{v}^{j_1} \dots \underset{q}{v}^{j_q} \overset{1}{\omega}_{i_1} \dots d\overset{p}{\omega}_{i_p} \\ &= \left(dt^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} - \omega^s_{j_1} t^{i_1 \dots i_p}_{sj_2 \dots j_q} - \dots - \omega^s_{j_q} t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots s} + \omega^{i_1}_s t^{si_2 \dots i_p}_{sj_2 \dots j_q} + \omega^{i_p}_s t^{i_1 \dots s}_{j_1 \dots j_q} \right) \underset{1}{v}^{j_1} \dots \underset{q}{v}^{j_q} \overset{1}{\omega}_{i_1} \dots \overset{p}{\omega}_{i_p} \end{aligned} \tag{2.18}$$

olarak yazılır. Bu eşitlikte

$$\delta t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = dt^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} - \omega^s_{j_1} t^{i_1 \dots i_p}_{sj_2 \dots j_q} - \dots - \omega^s_{j_q} t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots s} + \omega^{i_1}_s t^{si_2 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} + \omega^{i_p}_s t^{i_1 \dots s}_{j_1 \dots j_q} \tag{2.19}$$

olarak alınırsa

$$dZ = \delta t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \underset{1}{v}^{j_1} \dots \underset{q}{v}^{j_q} \overset{1}{\omega}_{i_1} \dots \overset{p}{\omega}_{i_p} \tag{2.20}$$

elde edilir. γ eğrisi boyunca verilen afin konneksiyona göre paralel kaydırılan vektör ve kovektör değişkenlerinin multilineer fonksiyonunun diferensiyeli de değişkenlerin multilineer fonksiyonu olur. O halde dZ multilineer fonksiyonuna belirli bir tensör karşılık gelecektir. Bu tensörün tipi $t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ tensörünün tipi ile aynı olur. Koordinatları ise (2.19) eşitliği ile verilmiştir. $\delta t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ tensörüne $t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ tensörünün mutlak diferensiyeli denir.

Tensörün mutlak diferensiyelinin tanımından çıkartılan sonuçlar şöyle ifade edilebilir:

a. Vektörün ve kovektörün paralel kaydırılması şartları

$$\delta v^i = 0 \text{ , } \delta \omega_i = 0$$

şeklinde olur. Dolayısıyla keyfi tipli bir tensörün paralel kaydırılması şartı

$$\delta t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = 0$$

olarak verilir.

b. Birim tensörün mutlak diferensiyeli sıfıra eşittir, yani

$$\delta\left(\delta_i^j\right) = 0$$

olur.

(2.19) eşitliğinden dolayı tensörlerin mutlak diferensiyelleri için aşağıdaki özellikleri yazabiliriz:

1. $\delta(t_1 \mp t_2) = \delta t_1 \mp \delta t_2$, t_1 ve t_2 aynı tipli tensörlerdir,

2. $\delta(\lambda t) = (d\lambda)t + \lambda(\delta t)$, λ -skalerdir,

3. $\delta(A \otimes B) = (\delta A) \otimes B + A \otimes (\delta B)$, A ve B keyfi tipli tensörlerdir, $\otimes$ - tensör çarpımını gösterir.

4. Tensörlerin simetrikleştirme, alterneleştirme ve kontraksiyon işlemleri mutlak diferensiyelleme işlemi ile işlem öncelik sırası değişebilir.

2.3.1. Afin konneksiyonlu uzaylar

Tanım 2.3.1.1: X_n diferensiyellenebilir manifoldunun her bir eğrisi boyunca afin konneksiyonu verilmiş olsun. Lineerlik şartını sağlayan X_n diferensiyellenebilir manifolduna *n*- boyutlu afin konneksiyonlu uzay denir.

Bu tanımdaki lineerlik şartı şu şekilde ifade edilir:
X_n manifoldunun keyfi M noktası ve bu noktanın komşuluğunda keyfi vektör alanları verilmiş olsun. Keyfi v^i vektör alanının M noktasından geçen keyfi bir eğri için hesaplanmış mutlak diferensiyeli, bu eğri boyunca elementer yer değişme du^i vektörünün lineer fonksiyonudur, yani

$$\delta v^i = v^i_k du^k \tag{2.21}$$

olarak yazılır. Burada v^i_k, v^i 'ye ve noktaya bağlı fonksiyon, du^k ise her bir vektöre teğet vektörün koordinatlarıdır. Diğer taraftan $dv^i = \partial_k v^i du^k$ olduğundan

$$\delta v^i = dv^i + \omega^i_k v^k = \partial_k v^i du^k + \omega^i_k v^k \tag{2.22}$$

olur. (2.21) ve (2.22) eşitliklerinden

$$\omega^i_k v^k = \left(v^i_s - \partial_s v^i\right) du^s \tag{2.23}$$

ifadesi bulunur. v^k, $\partial_s v^i$ 'nin ve v^i_s 'ler ise u^i 'lerin fonksiyonlarıdır. ω^i_k formları v^i vektör alanlarının seçilişine bağlı olmadığından ω^i_k formları du^k 'nın lineer fonksiyonu olur, yani

$$\omega_k^i = \Gamma_{sk}^{\ i} du^s \tag{2.24}$$

olarak yazılır. Burada $\Gamma_{sk}^{\ i}$ katsayıları afin uzayın bir noktasının fonksiyonlarıdır. Bunlara afin konneksiyonun katsayıları denir. Katsayıların verilmesi X_n 'de afin konneksiyonunu tayin eder.

Şimdi $\Gamma_{sk}^{\ i}$ afin konneksiyon katsayılarının dönüşüm kuralını verelim. (2.24) eşitliği kullanılarak

$$\omega_{j'}^{i'} = \Gamma_{k'j'}^{\ i'} du^{k'} = \Gamma_{k'j'}^{\ i'} A_k^{k'} du^k$$

eşitliği yazılabilir. Ayrıca

$$A_j^{j'} dA_{j'}^i = A_j^{j'} \left(\partial_k A_{j'}^i\right) du^k \tag{2.25}$$

olduğundan ve diğer taraftan $A_j^{j'} A_{j'}^i = \delta_j^i$ eşitliğin her iki tarafının ∂_k kısmi diferensiyeli alındığında

$$\partial_k \left(A_j^{j'} A_{j'}^i\right) = \partial_k \left(\delta_j^i\right) = 0$$
$$\left(\partial_k A_j^{j'}\right) A_{j'}^i + A_j^{j'} \left(\partial_k A_{j'}^i\right) = 0$$
$$A_j^{j'} \left(\partial_k A_{j'}^i\right) = -\left(\partial_k A_j^{j'}\right) A_{j'}^i$$

olur. Bu son eşitlik (2.25) denkleminde kullanılırsa

$$A_j^{j'} dA_{j'}^i = -A_{j'}^i \left(\partial_k A_j^{j'}\right) du^k \tag{2.26}$$

elde edilir. (2.26), (2.24) ve (2.14) eşitlikleri kullanılarak konneksiyon katsayılarının dönüşüm kuralı

$$\Gamma_{kj}^{\ i} = A_{i'}^i A_j^{j'} A_k^{k'} \Gamma_{k'j'}^{\ i'} + A_{i'}^i A_{kj}^{i'} \tag{2.27}$$

olarak verilir. Burada $A^{i'}_{kj} = \partial_k A^{i'}_j$ biçimindedir.

(2.24) denklemini kullanarak afin konneksiyonlu uzayda verilen keyfi vektör alanı için mutlak diferensiyel

$$\delta v^i = (\ \partial_k v^i + \Gamma^{\ i}_{ks} v^s\ )\ du^k \tag{2.28}$$

biçiminde olur. (2.28) denkleminin sol tarafı bir tensör ve du^k vektör olduğundan parantezin içindeki ifade bir tensörün koordinatları olur. Bu tensöre, verilen v^i tensörünün kovaryant türevi denir ve

$$\nabla_k v^i = \partial_k v^i + \Gamma^{\ i}_{ks} v^s \tag{2.29}$$

olarak gösterilir. Bu türevin sonucu (1,1) tipinde bir tensördür.

Benzer şekilde ω_j kovektör alanının kovaryant türevi

$$\nabla_k \omega_j = \partial_k \omega_j - \Gamma^{\ s}_{kj} \omega_s \tag{2.30}$$

olur ve sonuç (0,2) tipli bir tensördür.

(2.24) eşitliğinden, (p,q) tipli $t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ tensörünün mutlak diferensiyeli

$$\delta t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = (\partial_k t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} + \sum_{\lambda=1}^{\mathrm{p}} \Gamma^{\ i_\lambda}_{ks} t^{i_1 \dots s \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} - \sum_{\mu=1}^{q} \Gamma^{\ s}_{kj_\mu} t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots s \dots j_q})du^k \tag{2.31}$$

biçiminde olur. (2.31) denkleminin sol tarafı bir tensör ve du^k vektör olduğundan parantezin içindeki ifade bir tensörün koordinatlarıdır. Bu tensöre, verilen $t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ tensörünün kovaryant türevi denir ve

$$\nabla_k t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = \partial_k t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} + \sum_{\lambda=1}^{p} \Gamma^{i_\lambda}_{ks} t^{i_1 \ldots s \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} - \sum_{\mu=1}^{q} \Gamma^{s}_{kj_\mu} t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots s \ldots j_q} \qquad (2.32)$$

biçiminde gösterilir. Tensörün kovaryant türevi tanımından, (p,q) tipli tensörün kovaryant türevi (p,q+1) tipli bir tensör olduğu görülür. Yani kovaryant türev, uygulanan tensörün kovaryantlık mertebesini bir artırır.

Kovaryant türevin tanımından yararlanılarak aşağıdaki özelikleri yazabiliriz:

1. $\nabla_k (\underset{1}{t}^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \mp \underset{2}{t}^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}) = \nabla_k \underset{1}{t}^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \mp \nabla_k \underset{2}{t}^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$

2. $\nabla_k (\lambda t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}) = (\partial_k \lambda) t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \mp \lambda \nabla_k t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} , \quad \lambda \in F(M_n)$

3. $\nabla_k (t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \otimes g^{l_1 \ldots l_p}_{s_1 \ldots s_q}) = \nabla_k t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \otimes g^{l_1 \ldots l_p}_{s_1 \ldots s_q} + t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \otimes \nabla_k g^{l_1 \ldots l_p}_{s_1 \ldots s_q}$

4. Tensörlerin simetrikleştirme, alterneleştirme ve kontraksiyon işlemleri mutlak diferensiyelleme işlemi ile işlem öncelik sırası değişebilir.

Afin (lineer) konneksiyonun invaryant tanımı aşağıdaki gibi verilir:

Tanım 2.3.1.2: M_n manifoldu üzerinde $\Im^1_0(M_n)$ vektör alanlarının modülü olmak üzere

$$\nabla_X Y = \nabla(X,Y): \ \Im^1_0(M_n) \times \Im^1_0(M_n) \to \Im^1_0(M_n)$$

dönüşümü

i. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z \ ; \ f,g \in \Im^0_0(M_n), \ X,Y,Z \in \Im^1_0(M_n)$

ii. $\nabla_Z (fX + gY) = (Zf)X + f\nabla_Z X + (Zg)Y + g\nabla_Z Y$

şartlarını sağlıyorsa ∇ 'ya afin konneksiyon denir. Burada

$$\nabla_X : \Im^1_0(M_n) \to \Im^1_0(M_n)$$

dönüşümüne de X vektör alanı boyunca kovaryant diferensiyellenme denir (Bishop and Goldberg 1968).

2.3.2. Eğrilik ve burulma tensörleri

A_n afin konneksiyonlu uzayında $f = f\left(u^1,...,u^n\right)$ diferensiyellenebilir fonksiyonu verilmiş olsun. Bu fonksiyonun tam diferensiyeli, yani $df = \partial_i f du^i$ ifadesi, koordinatların dönüşümü halinde invaryant kalır ve df fonksiyonu du^i vektörünün lineer fonksiyonu olur. Bu lineer fonksiyona karşılık gelen kovektörün koordinatları

$$V_i = \partial_i f \tag{2.33}$$

ile gösterilir. Bu kovektöre f fonksiyonunun gradienti, f fonksiyonuna ise bu kovektör alanın potansiyel fonksiyonu denir. Keyfi V_i kovektörünün herhangi bir skaler alanın gradienti olması için gerek ve yeter şart

$$\partial_{[j} V_{i]} = 0 \tag{2.34}$$

olmasıdır (Yano 1968).

V_i gradient kovektörünün kovaryant türevi

$$\nabla_j V_i = \partial_j V_i - \Gamma^{\,k}_{ji} V_k \tag{2.35}$$

biçimindedir. (2.35) denkleminde j ve i indislerine göre alterneleştirme işlemi yapılır ve (2.34) eşitliği kullanılırsa

$$\nabla_{[j} V_{i]} = S^{k}_{ij} V_k \tag{2.36}$$

elde edilir. Burada

$$S_{ij}^{k} = \Gamma_{[ij]}^{k} \tag{2.37}$$

olarak verilmiştir. (2.36) denkleminin sol tarafındaki kovaryant türev (0,2) tipli tensör olduğundan S_{ij}^{k} kemiyetleri aşağı indislerine göre antisimetrik olan (1,2) tipli tensörün bileşenlerini ifade eder. Bu tensöre A_n uzayının burulma (torsion) tensörü denir. A_n manifoldundan alınmış keyfi *X*, *Y* vektör alanları için burulma tensörünün invariyant formda yazılışı ise

$$S(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \tag{2.38}$$

biçimindedir (Kobayashi and Nomizu 1963). Burada $[X,Y]$, *X* ve *Y* vektör alanlarının Lie parantezi olup

$$[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$$

şeklindedir.

Keyfi v^i vektörünün $\nabla_s v^i = \partial_s v^i + \Gamma_{sm}^{i} v^m$ kovaryant türevi (1,1) tipli tensör belirtir. Bu tensörün kovaryant türevi ise

$$\begin{aligned}
\nabla_r \nabla_s v^i &= \partial_r \nabla_s v^i + \Gamma_{rm}^{i} \nabla_s v^m - \Gamma_{rs}^{m} \nabla_m v^i \\
&= \partial_r (\partial_s v^i + \Gamma_{sk}^{i} v^k) + \Gamma_{rm}^{i} (\partial_s v^m + \Gamma_{sk}^{m} v^k) - \Gamma_{rs}^{m} \nabla_m v^i \\
&= \partial_{rs}^2 v^i + \partial_r \Gamma_{sk}^{i} v^k + \Gamma_{sk}^{i} \partial_r v^k + \Gamma_{rm}^{i} \partial_s v^m + \Gamma_{rm}^{i} \Gamma_{sk}^{m} v^k - \Gamma_{rs}^{m} \nabla_m v^i
\end{aligned}$$

biçiminde bulunur. Bu eşitlikte *r*, *s* indislerine göre alterneleştirme işlemi uygulanırsa

$$2\nabla_{[r} \nabla_{s]} v^i = R_{rsk}{}^{i} v^k - 2S_{rs}^{k} \nabla_k v^i \tag{2.39}$$

denklemi elde edilir. (2.39) denkleminde

$$R_{rsk}{}^{i} = \partial_r \Gamma^{i}_{sk} - \partial_s \Gamma^{i}_{rk} + \Gamma^{i}_{rm}\Gamma^{m}_{sk} - \Gamma^{i}_{sm}\Gamma^{m}_{rk} \tag{2.40}$$
$$= 2(\partial_{[r}\Gamma^{i}_{s]k} + \Gamma^{i}_{[r|m|}\Gamma^{m}_{s]k})$$

olarak alınmıştır. (2.39) denkleminin sol tarafındaki terim ve sağ tarafındaki ikinci terim tensör ve v^i keyfi vektör olduğundan R^{i}_{rsk} ifadesi (1,3) tipli tensördür. Bu tensöre A_n uzayının Eğrilik tensörü veya Riemannian- Christoffel tensörü denir.

(2.39) formülüne benzer olarak aşağıdaki formüller yazılabilir:

$$2\nabla_{[r}\nabla_{s]}\omega_k = -R^{m}_{rsk}\omega_m - 2S^{m}_{rs}\nabla_m\omega_k \ , \tag{2.41}$$

$$2\nabla_{[r}\nabla_{s]}\varphi^{j}_{i} = R^{j}_{rsm}\varphi^{m}_{i} - R^{m}_{rsi}\varphi^{j}_{m} - 2S^{k}_{rs}\nabla_k\varphi^{j}_{i} \ , \tag{2.42}$$

$$2\nabla_{[r}\nabla_{s]}t^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} = R^{i_1}_{rsm}t^{mi_2\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} + \ldots + R^{i_p}_{rsm}t^{i_1\ldots m}_{j_1\ldots j_q} \tag{2.43}$$
$$- R^{m}_{rsj_1}t^{i_1\ldots i_p}_{mj_2\ldots j_q} - \ldots - R^{m}_{rsj_q}t^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots m} - 2S^{k}_{rs}\nabla_k t^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} \ .$$

(2.41)’e ω_k kovektörünün (2.42) formülüne ise φ^{j}_{i} afinorunun Ricci özdeşliği denir.

Keyfi $X, Y, Z \in A_n$ vektör alanları için eğrilik tensörünün invaryant formda yazılışı ise

$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \tag{2.44}$$

biçimindedir (Kobayashi and Nomizu 1963).

2.3.3. Konneksiyonların dönüşümü

Keyfi iki afin konneksiyonlu uzayların difeomorfizmine bakalım. Bu durumda, bu uzayların karşılıklı noktalarının koordinatları aynı olacak şekilde uygun eğrisel koordinat sistemi verilebilir. Bu tür karşılık getirme, aynı bir X_n differensiyellenebilir manifoldunda iki keyfi afin konneksiyonun verilmesiyle de oluşturulabilir. Bu duruma, konneksiyonların birinden diğerine geçmeye, konneksiyonların dönüştürülmesi veya paralel kaydırma kuralının dönüştürülmesi olarak bakılabilir. Aynı manifold üzerinde çeşitli konneksiyonlar dahil etmek mümkündür. M_n manifoldu üzerinde Γ_{ij}^{k} ve $\overline{\Gamma}_{ij}^{k}$ konneksiyon katsayılarına sahip ∇ ve $\overline{\nabla}$ konneksiyonları verilmiş olsun. Keyfi v^i vektör alanının bu konneksiyonlara göre kovaryant türevleri

$$\nabla_k v^i = \partial_k v^i + \Gamma_{km}^{i} v^m, \quad \overline{\nabla}_k v^i = \partial_k v^i + \overline{\Gamma}_{km}^{i} v^m$$

biçiminde olur. Bu iki eşitliği taraf tarafa çıkarırsak

$$\overline{\nabla}_k v^i - \nabla_k v^i = T_{km}^{i} v^m \tag{2.45}$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$T_{km}^{i} = \overline{\Gamma}_{km}^{i} - \Gamma_{km}^{i} \tag{2.46}$$

biçimindedir. (2.45) eşitliği ile verilen T_{km}^{i}, (1,2) tipli tensör meydana getirir. Bu tensöre afin deformasyon (gerilme) tensörü denir.

Teorem 2.3.3.1: T_{km}^{i}, (1,2) tipli tensör ve Γ_{km}^{i} ise ∇ afin konneksiyonunun katsayıları olmak üzere (2.46) eşitliği ile verilen $\overline{\Gamma}_{km}^{i}$ katsayıları da diğer bir afin konneksiyonun katsayıları olur.

İspat: (2.46) eşitliğinden

$$\Gamma_{ij}^{k} = \overline{\Gamma}_{ij}^{k} - T_{ij}^{k}$$

yazılır. Γ_{ij}^{k} için konneksiyon katsayılarının dönüştürülmesi halinde

$$\overline{\Gamma}_{ij}^{k} - T_{ij}^{k} = A_{k'}^{k} A_{i}^{i'} A_{j}^{j'} \left(\overline{\Gamma}_{i'j'}^{k'} - T_{i'j'}^{k'} \right) + A_{k'}^{k} A_{ij}^{k'} \tag{2.47}$$

olur. Burada T_{ij}^{k} tensör olduğundan

$$T_{ij}^{k} = A_{k'}^{k} A_{i}^{i'} A_{j}^{j'} T_{i'j'}^{k'} \tag{2.48}$$

eşitliğini yazabiliriz. (2.48) eşitliği (2.47) eşitliğinde kullanılırsa

$$\overline{\Gamma}_{ij}^{k} = A_{k'}^{k} A_{i}^{i'} A_{j}^{j'} \overline{\Gamma}_{i'j'}^{k'} + A_{k'}^{k} A_{ij}^{k'}$$

olduğu bulunur. Bu ise, $\overline{\Gamma}_{ij}^{k}$ katsayılarının, konneksiyonların dönüştürülmesi kuralına göre dönüştüğünü ifade eder. Dolayısıyla bir afin konneksiyondur.

Bu teoremin bazı sonuçlarını ifade edelim:

Sonuç 1. $\overset{1}{\Gamma}{}_{ij}^{k}$ ve $\overset{2}{\Gamma}{}_{ij}^{k}$ afin konneksiyon katsayıları olmak üzere her λ skaleri için

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{\overset{1}{\Gamma}{}_{ij}^{k} + \lambda \overset{2}{\Gamma}{}_{ij}^{k}}{1+\lambda} \tag{2.49}$$

değeri de bir afin konneksiyonun katsayılarıdır.

İspat: (2.49) eşitliği

$$\Gamma_{ij}^{k} = \overset{1}{\Gamma}{}_{ij}^{k} + \frac{\lambda}{1+\lambda} (\overset{2}{\Gamma}{}_{ij}^{k} - \overset{1}{\Gamma}{}_{ij}^{k}) \tag{2.50}$$

biçiminde yazılabilir. (2.50) eşitliğinin sağ tarafındaki ikinci terim tensör olduğundan Teorem 2.3.2'e göre Γ_{ij}^{k} afin konneksiyon olur. Yani iki farklı konneksiyon kullanılarak yeni bir konneksiyon oluşturulmuş olur.

Özel halde $\lambda = 1$ alırsak

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^{k}_{ij} = \frac{\overset{1}{\Gamma}{}^{k}_{ij} + \overset{2}{\Gamma}{}^{k}_{ij}}{2} \tag{2.51}$$

bulunur. $\overset{\circ}{\Gamma}{}^{k}_{ij}$ konneksiyonuna $\overset{1}{\Gamma}{}^{k}_{ij}$ ve $\overset{2}{\Gamma}{}^{k}_{ij}$ konneksiyonlarına göre orta konneksiyon denir.

Sonuç 2. Γ^k_{ij} afin konneksiyonu verilmiş olsun. Bu taktirde, $\tilde{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij}$ katsayıları da afin konneksiyon tayin eder.

İspat: Burulma tensörünün ifadesi

$$S^k_{ij} = \Gamma^k_{[ij]} = \frac{1}{2}\left(\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}\right)$$

olduğundan

$$\tilde{\Gamma}^k_{ji} = \Gamma^k_{ji} + 2S^k_{ij}\,,\ \tilde{\Gamma}^k_{ji} = \Gamma^k_{ji} \tag{2.52}$$

yazılır. Teorem 2.3.2’den dolayı $\tilde{\Gamma}^k_{ji}$ katsayıları bir afin konneksiyon belirtir. $\tilde{\Gamma}^k_{ji}$ ve Γ^k_{ji} konneksiyonlarına karşılıklı konneksiyon denir.

2.3.4. Burulması sıfır olan uzaylar

Burulmasız afin konneksiyonlu uzayların burulma tensörü sıfıra eşit olduğundan bu uzayların konneksiyon katsayıları alt indislerine göre simetriktir, yani

$$\Gamma^k_{ji} = \Gamma^k_{ij} = \tilde{\Gamma}^k_{ij}$$

olur. Burulmasız afin konneksiyonlu uzayın herhangi eğrisel koordinat sistemine göre koordinatları $\overset{\circ}{u}{}^1,...,\overset{\circ}{u}{}^n$ olan $O(\overset{\circ}{u}{}^i)$ noktasını alalım ve konneksiyon katsayılarının verilmiş olduğu koordinat sistemine göre bu noktadaki değerlerinin $\overset{\circ}{\Gamma}{}^k_{ij}$ katsayıları ile verildiğini kabul edelim. $\delta^{i'}_k$ Kronecker sembolü olmak üzere

$$u^{i'} = \delta^{i'}_k \{(u^k - \overset{\circ}{u}{}^k) + \frac{1}{2}\overset{\circ}{\Gamma}{}^k_{pq}(u^p - \overset{\circ}{u}{}^p)(u^q - \overset{\circ}{u}{}^q)\} \tag{2.53}$$

biçiminde yeni koordinatları tanımlayalım. Bu ifade u^i ’den $u^{i'}$ ’ne bir dönüşümdür. (2.53) dönüşümü difereniyellenebilirdir ve $u^{i'}$ koordinatlarının u^i koordinatlarına göre kısmi türevleri

$$A^{i'}_i = \delta^{i'}_i + \delta^{i'}_k \overset{\circ}{\Gamma}{}^k_{ip}(u^p - \overset{\circ}{u}{}^p)\,,\; A^{i'}_{ij} = \delta^{i'}_k \overset{\circ}{\Gamma}{}^k_{ij} \tag{2.54}$$

biçiminde yazılır. (2.54) eşitliği O noktasında ve civarında $\det\left(A^{i'}_i\right) \neq 0$ şartını sağlar. Yani, (2.53) dönüşümü diferensiyellenebilir manifoldun tanımındaki mümkün olan dönüşümler sınıfındandır. (2.54) türev fonksiyonları O noktasında yazılırsa

$$A^{i'}_i = \delta^{i'}_i\,,\; A^{i'}_{ij} = \delta^{i'}_k \overset{\circ}{\Gamma}{}^k_{ij} \tag{2.55}$$

olur.

Şimdi ise konneksiyon katsayılarının yeni koordinat sistemine göre O noktasındaki değerlerini hesaplayalım. Bunun için (2.55) ve (2.27) eşitlikleri kullanılarak

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^i_{jk} = \delta^{j'}_j \delta^{k'}_k \delta^i_{i'} \overset{\circ}{\Gamma}{}^{i'}_{j'k'} + \delta^i_{i'} \delta^{i'}_l \overset{\circ}{\Gamma}{}^l_{kj}$$

veya

$$\overset{\circ}{\Gamma}{}^{i'}_{j'k'} = 0$$

bulunur. Böylece burulmasız afin uzayın her bir noktasında öyle bir koordinat sistemi verilebilir ki, konneksiyon katsayıları bu sisteme göre bu noktadaki bütün değerleri sıfır olur. (2.53) ile verilen koordinatlara normal koordinat sistemi denir.

Burulmasız afin konneksiyonlu uzaylarda

1. $R_{(rs)k}{}^{i} = 0,$

2. $R_{[rsk]}{}^{i} = 0,$

3. $\nabla_{[t} R_{rs]k}{}^{i} = 0$ (Bianchi-Padov eşitliği), (Bianchi'nin 2. özdeşliği)

eşitlikleri geçerlidir.

Bu eşitliklerin her üçünün de invaryant (tensör) karakter taşıdığını dikkate alırsak, bunların ispatını normal koordinat sisteminde incelemek yeterli ve daha kolaydır.

Burulmasız afin konneksiyonlu uzayda simetrik ve regüler a_{ij} tensörü verilmiş olsun. Bu tensörün tersi $\tilde{a}^{ij}$ olmak üzere, a_{ij} tensörünün kovaryant türevi

$$\nabla_k a_{ij} = a_{kij} \tag{2.56}$$

şeklinde olsun. (2.56) eşitliğinde indislerin yeri dairesel olarak değiştirilerek

$$\partial_k a_{ij} - \Gamma^m_{ki} a_{mj} - \Gamma^m_{kj} a_{mi} = \nabla_k a_{ij},$$
$$\partial_i a_{jk} - \Gamma^m_{ij} a_{mk} - \Gamma^m_{ik} a_{jm} = \nabla_i a_{jk},$$
$$\partial_j a_{ki} - \Gamma^m_{jk} a_{mi} - \Gamma^m_{ji} a_{km} = \nabla_j a_{ki}.$$

eşitlikleri yazılır.

Sonuncu iki eşitlikten birinci eşitlik çıkartılırsa

$$2\Gamma_{ij}^{m} a_{mk} = \partial_i a_{jk} + \partial_j a_{ik} - \partial_k a_{ij} - \left(a_{ijk} + a_{jik} - a_{kij}\right) \tag{2.57}$$

eşitliği bulunur. (2.57) eşitliğinin her iki tarafı $\tilde{a}^{rk}$ tensörü ile çarpılırsa

$$\Gamma_{ij}^{r} = \left\{ {r \atop ij} \right\} - \frac{1}{2} \tilde{a}^{rk} \left(a_{ijk} + a_{jik} - a_{kij}\right) \tag{2.58}$$

olur. Burada

$$\left\{ {r \atop ij} \right\} = \frac{1}{2} \tilde{a}^{rk} \left(\partial_i a_{jk} + \partial_j a_{ik} - \partial_k a_{ij}\right) \tag{2.59}$$

şeklindedir. (2.59) ifadesine a_{ij} tensörünün Riemannian konneksiyon katsayıları, Levi-Civita konneksiyonu veya Christoffel sembolü denir. Burulmasız afin konneksiyonlu uzayın konneksiyon katsayıları regüler ve simetrik a_{ij} tensörünün Christoffel sembolü ve kovaryant türevleri yardımıyla ifade edilir.

Tanım 2.3.4.1: Burulmasız afin konneksiyonlu A_n uzayında $e_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \begin{cases} \mp e & e_s \neq e_n \\ 0 & e_s = e_n \end{cases}$, n-vektörü olmak üzere $\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \ldots, \underset{n}{v}$ lineer bağımsız vektörleri üzerine kurulan paralelyüzün hacmi

$$V = e_{i_1 i_2 \ldots i_n} \underset{1}{v}^{i_1} \underset{2}{v}^{i_2} \ldots \underset{n}{v}^{i_n} \tag{2.60}$$

olsun. $\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \ldots, \underset{n}{v}$ vektörlerinin paralel taşınması sonucunda V hacmi korunursa, burulmasız A_n uzayına eş afin (denk afin) uzay denir.

(2.60) denkleminden

$$\delta e_{i_1 \ldots i_n} = 0 \text{ veya } \nabla_k e_{i_1 \ldots i_n} = 0 \tag{2.61}$$

olur. Eş afin uzayın konneksiyonu (2.61) denklemiyle belirlenir. (2.61) şartı

$$\partial_k e_{i_1 \ldots i_n} - \Gamma^s_{ki_1} e_{si_2 \ldots i_n} - \ldots - \Gamma^s_{ki_n} e_{i_1 \ldots s} = 0 \tag{2.62}$$

biçiminde yazılabilir. *n*-vektörün antisimetrikliğine göre (2.62) sisteminin bütün denklemleri

$$\partial_k e_{12\ldots n} - \Gamma^s_{k1} e_{s2\ldots n} - \ldots - \Gamma^s_{kn} e_{12\ldots s} = 0 \tag{2.63}$$

denklemine denk olur. $e_{12\ldots n} = e$ olarak yazılırsa bu durumda (2.63) eşitliğinden

$$\Gamma^s_{ks} = \partial_k \ln e \tag{2.64}$$

yazılır. Eş afin uzay bu şart ile de karakterize edilebilir. (2.64) eşitliğindeki eş afin konneksiyonun katsayıları ile belirlenen Γ^s_{ks} toplamı gradiyentdir. Bu gradiyentin potansiyel fonksiyonu ise $\ln e$ olur.

$$R_{ij} = R_{kij}{}^{k} = \partial_k \Gamma^k_{ij} - \partial_i \Gamma^k_{kj} + \Gamma^k_{kl} \Gamma^l_{ij} - \Gamma^l_{ki} \Gamma^k_{lj} \tag{2.65}$$

tensörüne Ricci tensörü denir. Eş afin konneksiyonu

$$R_{ij} = R_{ji} \tag{2.66}$$

şartı ile de karakterize edilebilir.

Burulmasız afin konneksiyonlu uzaylarda eğrilik tensörünün $R_{[rsk]}{}^{i}=0$ ve $R_{(rs)k}{}^{i}=0$ şartlarını sağladığını göz önüne alırsak

$$R_{rsk}{}^{k}=R_{rs}-R_{sr} \tag{2.67}$$

eşitliğini yazabiliriz. (2.66) ve (2.67) eşitlikleri eş afin konneksiyonunun

$$R_{rsk}{}^{k}=0$$

şartı ile de karakterize edilebileceğini gösterir.

Tanım 2.3.4.2: Burulmasız afin konneksiyonlu uzayın her bir noktasındaki tanjant uzayında verilen simetrik, (0,2) tipli g tensörü, tanjant uzayın paralel kaydırılması durumunda korunuyorsa böyle uzaya metrik uzay denir. Burada simetrik, (0,2) tipli g_{ij} tensörüne metrik tensör denir.

Tanım 2.3.4.3: Metrik uzayın g metrik tensörü regüler ise yani $\det(g_{ij})\neq 0$ ise uzaya Weyl uzayı denir ve W_n ile gösterilir.

Tanım 2.3.4.4: Eğer Weyl uzayı eş-afin uzay olursa, bu uzaya Riemannian uzayı denir ve V_n ile gösterilir.

Riemannian uzayı burulmasız konneksiyona sahip olan uzaydır ve bu uzayın Riemannian konneksiyonu

$$\nabla_k g_{ij}=0 \tag{2.68}$$

şartı ile karekterize edilir. V_n Riemannian uzayının konneksiyon katsayıları

$$\Gamma_{ij}^{k} = \left\{ {k \atop ij} \right\} = \frac{1}{2} g^{kr} \left(\partial_i g_{rj} + \partial_j g_{ir} - \partial_r g_{ij} \right) \tag{2.69}$$

biçiminde verilir. Yani, V_n uzayının konneksiyon katsayıları g tensörünün Christoffel sembolleriyle çakışır. (2.69) katsayılarıyla verilen konneksiyona Riemannian konneksiyonu veya Levi-Civita konneksiyonu denir. Diğer taraftan Riemannian manifoldu üzerinde $\nabla g = 0$ şartını sağlayan ama burulması olan konneksiyonlar da vardır. Bu tür konneksiyonlara ise metrik konneksiyon denir.

Riemannian uzayında $R_{jkl}{}^{s} g_{si} = R_{ijkl}$ olmak üzere

1. $R_{(ij)kl} = 0$

2. $R_{[ijk]l} = 0$

3. $\nabla_{[s} R_{ij]kl} = 0$

4. $R_{ij(kl)} = 0$

5. $R_{ijkl} = R_{klij}$

eşitlikleri geçerlidir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Tanjant Demet

M_n, C^{∞} sınıfından n- boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold ve M_n manifoldunun P noktasındaki tanjant uzay $T_P(M_n)$ olmak üzere

$$T(M_n) = \bigcup_{P \in M_n} T_P(M_n) \tag{3.1}$$

ile tanımlanan $T(M_n)$ kümesine tanjant demet denir (Yano and Ishihara 1973).

$T(M_n)$ 'nin herhangi bir $P \in T_P(M_n)$ noktası için M_n manifoldu üzerindeki $T(M_n)$ tabii demet yapısını doğuran $\pi : T(M_n) \rightarrow M_n$, $\pi(P) = P$ doğal demet izdüşümünü tanımlar. $\pi^{-1}(P) = P \in T_P(M_n)$ kümesine M_n baz uzayının P noktasındaki fibresi denir.

$f : M_n \rightarrow T(M_n)$ diferensiyellenebilir dönüşümü ile tanımlanan f kesitine bakalım: $\pi \circ f = id\big|_{M_n}$. M_n manifoldunun keyfi P noktasındaki $f(P)$ görüntüsünü, $T_P(M_n)$ 'nin sıfır vektörüne götüren f kesitine sıfır kesit denir. $f(M_n)$ sıfır kesiti M_n baz uzayı ile aynıdır ve bu nedenle M_n manifoldunun kendisi $T(M_n)$ 'de diferensiyellenebilir imbedding olmuş (içine daldırılmış) altmanifolddur (Yano and Ishihara 1973).

(x^h), U koordinat komşuluğunda lokal koordinatlar olmak üzere M_n baz uzayı $\{U; x^h\}$ koordinat komşuluk sistemiyle örtülmüş olsun. R^n ise, R üzerindeki n-boyutlu vektör uzayı olsun.

$P \in T_P(M_n)$ $(P \in U)$ noktası (P, X) sıralı çifti ile gösterildiğinden ve $X \in R^n$ vektörünün bileşenleri $T_P(M_n)$ tanjant uzayında $\{\partial_h\}\left(\partial_h = \dfrac{\partial}{\partial x^h}\right)$ doğal bazına göre P 'nin $y^h = x^{\bar{h}}$ $\left(\bar{h} = n+1, ..., 2n\right)$ kartezyen koordinatları olduğu için $\pi^{-1}(U) \subset T(M_n)$ açık kümesi $U \times R^n$ direkt çarpımına difeomorfizm olacaktır. U komşuluğunda $P = \pi(P)$ 'nin koordinatları x^h ($h = 1, ..., n)$ ile gösterilirse ve $\left(x^h, x^{\bar{h}}\right) \leftrightarrow P \in \pi^{-1}(U)$ olduğu dikkate alınırsa, $\pi^{-1}(U) \subset T(M_n)$ açık kümesinde $\left(x^h, x^{\bar{h}}\right)$ lokal koordinatlar sistemi elde edilir ve $\left(x^h, x^{\bar{h}}\right)$ 'ye, $\left(x^h\right)$ 'dan indirgenmiş (elde edilmiş) $\pi^{-1}(U)$ 'daki koordinatlar denir (Yano and Ishihara 1973).

M_n manifoldunun $P = \pi(P)$ noktasını ihtiva eden diğer bir koordinat komşuluğu $\{U', x^{h'}\}$ olmak üzere, $\pi^{-1}(U')$ koordinat komşuluğuda P noktasını ihtiva eder.

$\pi^{-1}(U')$ koordinat komşuluğuna göre P noktasının indirgenmiş koordinatları $(x^{h'}, y^{h'})$ ile gösterilir. Buradaki dönüşüm kuralı

$$\begin{cases} x^{h'} = x^{h'}\left(x^h\right), \\ x^{\bar{h}'} = \dfrac{\partial x^{h'}}{\partial x^h} y^h \end{cases} \tag{3.2}$$

şeklindedir (Yano and Ishihara 1973). Burada, $x^{h'}\left(x^h\right)$; $x^1, x^2, ..., x^n$ değişkenlerinin $C^\infty -$sınıfından olan diferensiyellenebilir fonksiyonlarıdır. $x^{\bar{h}} = y^h$, $x^{\bar{h}'} = y^{h'}$ ile gösterilirse (3.2) dönüşümü

$$x^{H'} = x^{H'}\left(x^H\right), \; H = 1, ..., n, n+1, ..., 2n \tag{3.3}$$

olarak yazılır. (3.2) dönüşümünün Jakobi matrisi

$$\left(\frac{\partial x^{H'}}{\partial x^{H}}\right)=\begin{pmatrix} A_h^{h'} & 0 \\ A_{h\varepsilon}^{h'} y^{\varepsilon} & A_h^{h'} \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

ile tanımlıdır. Burada

$$A_h^{h'}=\frac{\partial x^{h'}}{\partial x^{h}}\ ,\ A_{h\varepsilon}^{h'}=\frac{\partial^2 x^{h'}}{\partial x^{h}\partial x^{\varepsilon}}$$

eşitlikleri geçerlidir. (3.2) dönüşümünün tersi ise

$$\begin{cases} x^{h}=x^{h}\left(x^{h'}\right), \\ x^{\bar{h}}=\dfrac{\partial x^{h}}{\partial x^{h'}}y^{h'} \end{cases} \tag{3.5}$$

veya

$$x^{H}=x^{H}\left(x^{H'}\right) \tag{3.6}$$

olarak yazılır. (3.5) dönüşümünün Jakobi matrisi

$$\left(\frac{\partial x^{H}}{\partial x^{H'}}\right)=\begin{pmatrix} A_{h'}^{h} & 0 \\ A_{h'\varepsilon'}^{h} y^{\varepsilon'} & A_{h'}^{h} \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

ile verilir. (3.4) ve (3.7) matrisleri $T\left(M_n\right)$ tanjant demetin daima yönlendirilebilir olduğunu gösterir (Yano and Ishihara 1973).

M_n manifoldu üzerindeki C^{∞} -sınıfından $\left(r,s\right)$ tipli tüm tensör alanlarının kümesi $\Im_s^r\left(M_n\right)$ ve bunların direkt toplamı ise

$$\Im(M_n) = \sum_{r,\, s=0}^{\infty} \Im_s^r(M_n)$$

ile gösterilir. Benzer olarak $T(M_n)$ tanjant demetindeki uygun kümeler sırasıyla $\Im_s^r(T(M_n))$ ve $\Im(T(M_n))$ ile gösterilir.

3.1.1. Fonksiyonun dikey lifti

f, M_n 'de bir fonksiyon olsun. $T(M_n)$ tanjant demette ${}^v f$ fonksiyonuna bakalım: $f : M_n \to R$ ve $\pi : T(M_n) \to M_n$ olmak üzere ${}^v f = f \circ \pi$ olsun. ${}^v f : T(M_n) \to R$ fonksiyonuna f fonksiyonunun dikey lifti denir. Burada

$${}^v f(P) = {}^v f(x, y) = f \circ \pi(P) = f(P) = f(x) \quad \left(P, \in \pi^{-1}(U),\, P = (x^i, y^i)\right)$$

olup ${}^v f(P)$ değeri fibre boyunca sabittir ve $P = \pi^{-1}(P) \in M_n$ noktasındaki $f(P)$ değerine eşittir (Yano and Ishihara 1973).

3.1.2. Vektör alanının dikey lifti

M_n manifoldu üzerinde herhangi bir $X \in \Im_0^1(M_n)$ vektör alanı verilmiş olsun. $T(M_n)$ tanjant demetinde

$${}^v X(\iota\omega) = {}^v(\omega(X)) \tag{3.8}$$

ile tanımlanan ${}^v X$ vektör alanına X vektör alanının dikey lifti denir (Yano and Ishihara 1973).

Burada ω kovektörü M_n ’nin U komşuluğunda $\omega = \omega_i dx^i$ şeklindeki koordinatlara sahip olup $\iota\omega$ ise $\pi^{-1}(U)$ ’da $\iota\omega = \omega_i y^i$ indirgenmiş koordinatlarına sahiptir.

(3.8) eşitliğinden X vektör alanının ${}^{v}X$ dikey liftinin, $T(M_n)$ tanjant demette indirgenmiş koordinatlara göre bileşenleri

$$ {}^{v}X = \begin{pmatrix} 0 \\ X^h \end{pmatrix} \tag{3.9} $$

şeklindedir (Yano and Ishihara 1973).

3.1.3. 1-formun dikey lifti

M_n manifoldu üzerinde $\omega \in \Im_1^0(M_n)$ 1-formu verilsin. $T(M_n)$ tanjant demetinde ω ’nın dikey lifti olan ${}^{v}\omega \in \Im_1^0(T(M_n))$ 1-formu indirgenmiş koordinatlara göre

$$ {}^{v}\omega = (\omega_h,\, 0) \tag{3.10} $$

bileşenlerine sahiptir (Yano and Ishihara 1973).

(3.10) eşitliğinden her bir $\pi^{-1}(U)$ açık kümesinde

$$ {}^{v}\left(dx^h\right) = dx^h \tag{3.11} $$

olarak yazılır (Yano and Ishihara 1973).

3.1.4. Vektör alanının tam lifti

M_n manifoldu üzerinde $X \in \Im_0^1(M_n)$ vektör alanı verilmiş olsun. $T(M_n)$ tanjant demetinde X vektör alanının tam lifti olan ${}^cX \in \Im_0^1(T(M_n))$ vektör alanı indirgenmiş koordinatlara göre

$$ {}^cX = \begin{pmatrix} X^h \\ y^s \partial_s X^h \end{pmatrix} \tag{3.12} $$

bileşenlerine sahiptir (Yano and Ishihara 1973).

(3.12) eşitliğinden her bir $\pi^{-1}(U)$ açık kümesinde

$$ {}^c(\partial_h) = \partial_h \tag{3.13} $$

olarak bulunur (Yano and Ishihara 1973).

3.1.5. Afinor alanının tam lifti

M_n manifoldu üzerinde $F \in \Im_1^1(M_n)$ afinor alanı verilmiş olsun. $T(M_n)$ tanjant demetinde F afinor alanının tam lifti olan ${}^cF \in \Im_1^1(T(M_n))$ afinor alanı indirgenmiş koordinatlara göre

$$ {}^cF = \begin{pmatrix} F_i^h & 0 \\ y^s \partial_s F_i^h & F_i^h \end{pmatrix} $$

bileşenlerine sahiptir (Yano and Ishihara 1973).

3.1.6. $\gamma -$ operatörü

F, M_n üzerinde tanımlı bir afinor alanı olmak üzere $T(M_n)$ tanjant demetinde $\gamma F \in \Im_0^1(T(M_n))$ vektör alanı indirgenmiş koordinatlara göre

$$\gamma F = \begin{pmatrix} 0 \\ y^s F_s^h \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

bileşenlerine sahiptir (Yano and Ishihara 1973).

$T \in \Im_2^1(T(M_n))$ olmak üzere, $T(M_n)$ tanjant demetinde $\gamma T \in \Im_1^1(T(M_n))$ afinor alanı indirgenmiş koordinatlara göre

$$\gamma T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y^s T_{s\ h}^{h} \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

bileşenlerine sahiptir (Yano and Ishihara 1973).

3.1.7. Yatay lift

M_n, diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde ∇ afin konneksiyonu verilmiş olsun. Keyfi $X \in \Im_0^1(M_n)$ için

$$^H X = {}^C X - (\nabla_\gamma X) \tag{3.16}$$

ile tanımlanan $^H X \in \Im_0^1(T(M_n))$ vektör alanına, X vektör alanının yatay lifti denir ve burada

$$(\nabla_\gamma X) = \gamma(\nabla X)$$

şeklindedir (Yano and Ishihara 1973).

X 'in ${}^H X$ yatay lifti, $T(M_n)$ tanjant demeti üzerindeki indirgenmiş koordinatlara göre

$${}^H X = \begin{pmatrix} X^h \\ -\Gamma_i^h X^i \end{pmatrix} \tag{3.17}$$

bileşenlerine sahiptir. Burada

$$\Gamma_i^h = y^s \Gamma_{s\ i}^{\ h} \tag{3.18}$$

şeklindedir.

$F \in \Im_1^1(M_n)$ 'in $T(M_n)$ tanjant demeti üzerindeki ${}^H F$ yatay lifti

$${}^H F = {}^C F - (\nabla_\gamma F) \tag{3.19}$$

ile tanımlıdır (Yano and Ishihara 1973).

Burada $\nabla_\gamma F$

$$(\nabla_\gamma F) = y^s \nabla_s F_i^{\ h} \partial_{\bar{i}} \otimes dx^h \tag{3.20}$$

şeklinde tanımlıdır. F 'in ${}^H F$ yatay lifti, $T(M_n)$ tanjant demeti üzerindeki indirgenmiş koordinatlara göre

$$ {}^{H}F = \begin{pmatrix} F_i^h & 0 \\ -\Gamma_s^h F_i^s + \Gamma_i^s F_s^h & F_i^h \end{pmatrix} \tag{3.21} $$

bileşenlerine sahiptir (Yano and Ishihara 1973).

3.2. Kotanjant Demet

M_n, C^∞ -sınıfından n- boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold ve M_n manifoldunun P noktasındaki kotanjant uzayı $T_P^*(M_n)$ olmak üzere

$$ T^*(M_n) = \bigcup_{P \in M_n} T_P^*(M_n) \tag{3.22} $$

ile tanımlanan $T^*(M_n)$ kümesine kotanjant demet denir (Yano and Ishihara 1973).

$T^*(M_n)$ ’nin herhangi bir $P \in T_P^*(M_n)$ noktası için M_n manifoldu üzerindeki $T^*(M_n)$ tabii demet yapısını doğuran $\pi : T^*(M_n) \to M_n$, $\pi(P) = P$ doğal demet izdüşümünü tanımlar. $\pi^{-1}(P) = P \in T_P^*(M_n)$ kümesine M_n baz uzayının P noktasındaki fibresi denir (Yano and Ishihara 1973).

$f : M_n \to T^*(M_n)$ diferensiyellenebilir dönüşümü ile tanımlanan f kesitine bakalım: $\pi \circ f = id\big|_{M_n}$. M_n manifoldunun keyfi P noktasındaki $f(P)$ görüntüsünü, $T_P^*(M_n)$ ’nin sıfır vektörüne götüren f kesitine sıfır kesit denir. $f(M_n)$ sıfır kesiti M_n baz uzayı ile aynıdır ve bu nedenle M_n manifoldunun kendisi $T^*(M_n)$ ’de diferensiyellenebilir imbedding olmuş (içine daldırılmış) altmanifolddur (Yano and Ishihara 1973).

(x^h), U koordinat komşuluğunda lokal koordinatlar olmak üzere M_n baz uzayı $\{U; x^h\}$ koordinat komşuluk sistemiyle örtülmüş olsun. R^n ise, R üzerindeki n-boyutlu vektör uzayı olsun. $P \in T_P^*(M_n)$ $(P \in U)$ noktası (P, p) sıralı çifti ile gösterildiğinden ve $p \in R^n$ kovektörünün bileşenleri $T_P^*(M_n)$ kotanjant uzayında dx^h doğal kobazına göre P 'nin $p_i = x^{\bar{h}}$ $(\bar{h} = n+1, ..., 2n)$ kartezyen koordinatları olduğu için $\pi^{-1}(U) \subset T^*(M_n)$ açık kümesi $U \times R^n$ direkt çarpımına difeomorfizm olacaktır (Yano and Ishihara 1973).

U komşuluğunda $P = \pi(P)$ 'nin koordinatları x^h $(h = 1, ..., n)$ ile gösterilirse ve $(x^h, p_i) \leftrightarrow P \in \pi^{-1}(U)$ olduğu dikkate alınırsa, $\pi^{-1}(U) \subset T(M_n)$ açık kümesinde (x^h, p_i) lokal koordinatlar sistemi elde edilir ve (x^h, p_i) 'ye, (x^h) 'dan indirgenmiş (elde edilmiş) $\pi^{-1}(U)$ 'daki koordinatlar denir (Yano and Ishihara 1973).

M_n manifoldunun $P = \pi(P)$ noktasını ihtiva eden diğer bir koordinat komşuluğu $\{U', x^{h'}\}$ olmak üzere, $\pi^{-1}(U')$ koordinat komşuluğuda P noktasını ihtiva eder.

$\pi^{-1}(U')$ koordinat komşuluğuna göre P noktasının indirgenmiş koordinatları (x^h, p_i) ile gösterilir (Yano and Ishihara 1973). Buradaki dönüşüm kuralı

$$\begin{cases} x^{h'} = x^{h'}(x), \\ p_{i'} = \dfrac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} p_i \end{cases} \tag{3.23}$$

şeklindedir. Burada, $x^{h'}(x)$; $x^1, x^2, ..., x^n$ değişkenlerinin C^∞ -sınıfından olan diferensiyellenebilir fonksiyonlarıdır. $x^{\bar{h}} = p_h$, $x^{\bar{h}'} = p_{h'}$ ile gösterilirse (3.23) dönüşümü

$$x^{H'} = x^{H'}\left(x^{H}\right),\ H = 1,...,n,n+1,...,2n \tag{3.24}$$

olarak yazılır. (3.23) dönüşümünün Jakobi matrisi

$$\left(\frac{\partial x^{H'}}{\partial x^{H}}\right) = \begin{pmatrix} A_i^{h'} & 0 \\ A_i^{i'} A_{i'h'}^{h} p_h & A_{h'}^{i} \end{pmatrix}$$

(3.25)

ile tanımlıdır. Burada

$$A_i^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}},\ A_{i'h'}^{h} = \frac{\partial^2 x^{h}}{\partial x^{i'} \partial x^{h'}},\ A_i^{h'} = \frac{\partial x^{h'}}{\partial x^{i}}$$

eşitlikleri geçerlidir. (3.23) dönüşümünün tersi ise

$$\begin{cases} x^{h} = x^{h}\left(x^{'}\right), \\ p_h = \dfrac{\partial x^{h'}}{\partial x^{h}} p_{h'} \end{cases} \tag{3.26}$$

veya

$$x^{H} = x^{H}\left(x^{H'}\right) \tag{3.27}$$

olarak yazılır. (3.26) dönüşümünün Jakobi matrisi

$$\left(\frac{\partial x^{H}}{\partial x^{H'}}\right) = \begin{pmatrix} A_{h'}^{i} & 0 \\ A_{i'}^{i} A_{ih}^{h'} p_{h'} & A_i^{h'} \end{pmatrix} \tag{3.28}$$

ile verilir. (3.25) ve (3.28) matrisleri $T^*\left(M_n\right)$ kotanjant demetinin daima yönlendirilebilir olduğunu gösterir (Yano and Ishihara 1973).

M_n manifoldu üzerindeki C^{∞} -sınıfından (r,s) tipli tüm tensör alanlarının kümesi $\Im_s^r(M_n)$ ve bunların direkt toplamı ise

$$\Im(M_n) = \sum_{r,s=0}^{\infty} \Im_s^r(M_n)$$

ile gösterilir. Benzer olarak $T^*(M_n)$ kotanjant demetindeki uygun kümeler sırasıyla $\Im_s^r\left(T^*(M_n)\right)$ ve $\Im\left(T^*(M_n)\right)$ ile gösterilir.

$p = p_i dx^i$ 1-formuna, $T^*(M_n)$ kotanjant demetindeki temel 1-form denir. $\pi^{-1}(U)$ komşuluğunda dp dış diferensiyeli $dp = dp_i \wedge dx^i$ şeklindeki 2-formu belirtir. Bu nedenle

$$dp = \xi = \frac{1}{2}\xi_{CB} dx^C \wedge dx^B$$

yazılırsa

$$\xi = (\xi_{CB}) = \begin{pmatrix} 0 & \delta_i^j \\ -\delta_j^i & 0 \end{pmatrix}$$

(3.29)

elde edilir. (3.29) matrisi regüler olduğundan $\xi^{BA}\xi_{CB} = \delta_C^A$ olacak şekilde ξ^{BA} ters matrisi vardır. ξ^{BA} matrisi

$$(\xi^{BA}) = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_i^h \\ \delta_h^i & 0 \end{pmatrix} \tag{3.30}$$

şeklindedir (Yano and Ishihara 1973).

3.2.1. Fonksiyonun dikey lifti

M_n manifoldu üzerinde $f : M_n \to R$ fonksiyonu verilmiş olsun. $\pi : T^*\left(M_n\right) \to M_n$ izdüşüm dönüşümü olmak üzere

$$ {}^{v}f = f \circ \pi \tag{3.31} $$

fonksiyonuna f fonksiyonunun $T^*\left(M_n\right)$ kotanjant demete dikey lifti denir. $P \in T_P^*\left(M_n\right)$ olmak üzere

$$ {}^{v}f\left(P\right) = f\left(P\right) $$

elde edilir (Yano and Ishihara 1973).

3.2.2. Kovektör alanının dikey lifti

$\omega \in \Im_1^0(M_n)$ üzerindeki $\omega^A = \omega_B \xi^{BA}$ lokal bileşenlerine sahip ve koordinatlarla ifadesi $\omega = \omega_i dx^i$ şeklindeki 1-form olmak üzere ω 1-formunun dikey lifti olan ${}^{v}\omega$ vektör alanı $T^*\left(M_n\right)$ kotanjant demetinde indirgenmiş koordinatlara göre

$$ {}^{v}\omega = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_i \end{pmatrix} \tag{3.32} $$

bileşenlerine sahiptir (Yano and Ishihara 1973).

3.2.3. Vektör alanının tam lifti

M_n manifoldu üzerinde $X \in \Im_0^1(M_n)$ vektör alanı verilmiş olsun. $T^*(M_n)$ kotanjant demetinde X vektör alanının tam lifti olan ${}^cX \in \Im_0^1(T^*(M_n))$ vektör alanı indirgenmiş koordinatlara göre

$$ {}^cX = \begin{pmatrix} X^h \\ -p_i\left(\partial_h X^i\right) \end{pmatrix} \tag{3.33} $$

bileşenlerine sahiptir (Yano and Ishihara 1973).

3.2.4. Afinor alanının tam lifti

M_n manifoldu üzerinde $F \in \Im_1^1(M_n)$ afinor alanı verilmiş olsun. $T^*(M_n)$ kotanjant demetinde F afinor alanının tam lifti olan ${}^cF \in \Im_1^1(T^*(M_n))$ afinor alanı indirgenmiş koordinatlara göre

$$ {}^cF = \begin{pmatrix} F_i^h & 0 \\ p_s(\partial_i F_h^s - \partial_h F_i^s) & F_h^i \end{pmatrix} \tag{3.34} $$

bileşenlerine sahiptir (Yano and Ishihara 1973).

3.2.5. $\gamma -$ operatörü

X , M_n üzerinde tanımlı bir vektör alanı olmak üzere $T^*(M_n)$ kotanjant demeti üzerindeki γX fonksiyonu

$$\gamma X = p_s X^s \tag{3.35}$$

ile tanımlanır.

F , M_n üzerinde tanımlı bir afinor alanı olmak üzere $T^*(M_n)$ kotanjant demetinde $\gamma F \in \Im_0^1(T^*(M_n))$ vektör alanı indirgenmiş koordinatlara göre

$$\gamma F = \begin{pmatrix} 0 \\ p_s F_i^s \end{pmatrix} \tag{3.36}$$

bileşenlerine sahiptir (Yano and Ishihara 1973).

$T \in \Im_2^1(M_n)$ olmak üzere, $T^*(M_n)$ kotanjant demetinde $\gamma T \in \Im_1^1(T^*(M_n))$ afinor alanı indirgenmiş koordinatlara göre

$$\gamma T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p_s T_{j\,i}^s & 0 \end{pmatrix} \tag{3.37}$$

bileşenlerine sahiptir (Yano and Ishihara 1973).

3.2.6. Vektör alanının yatay lifti

M_n diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde ∇ simetrik afin konneksiyonu verilmiş olsun. Keyfi $X \in \Im_0^1(M_n)$ için

$$ {}^{H}X = {}^{C}X + \gamma(\nabla X) \tag{3.38} $$

ile tanımlanan ${}^{H}X \in \Im_0^1\left(T^*\left(M_n\right)\right)$ vektör alanına, X vektör alanının yatay lifti denir ve burada X^s ’in $\nabla_i X^s$ kovaryant türevi

$$ (\nabla_i X^s) = \partial_i X^s + X^j \Gamma_{j\ i}^{\ s} $$

şeklindedir (Yano and Ishihara 1973).

X ’in ${}^{H}X$ yatay lifti, $T^*\left(M_n\right)$ kotanjant demeti üzerindeki indirgenmiş koordinatlara göre

$$ {}^{H}X = \begin{pmatrix} X^i \\ X^j \Gamma_{ji} \end{pmatrix} \tag{3.39} $$

bileşenlerine sahiptir. Burada

$$ \Gamma_{ji} = p_s \Gamma_{j\ i}^{\ s} \tag{3.40} $$

şeklindedir.

3.2.7. Afinor alanının yatay lifti

$F \in \Im_1^1(M_n)$ ’in $T^*\left(M_n\right)$ kotanjant demeti üzerindeki ${}^{H}F$ yatay lifti

$$ {}^{H}F = {}^{C}F + \gamma[\nabla F] \tag{3.41} $$

ile tanımlıdır. Burada $[\nabla F]$, keyfi $X, Y \in \Im_0^1(M_n)$ vektör alanları için

$$[\nabla F](X,Y) = -\nabla_X (FY) + \nabla_Y (FX) \tag{3.42}$$

ile tanımlı (1,2) tipli bir tensör alanıdır. F 'in ${}^H F$ yatay lifti, $T^*(M_n)$ kotanjant demeti üzerindeki indirgenmiş koordinatlara göre

$$ {}^H F = \begin{pmatrix} F_i^h & 0 \\ -\Gamma_{is} F_h^s + \Gamma_{hs} F_i^s & F_h^i \end{pmatrix} \tag{3.43}$$

bileşenlerine sahiptir (Yano and Ishihara 1973).

3.3. Yarı-Tanjant Demet

M_n ile B_m sırasıyla C^∞ sınıfından n ve m-boyutlu diferensiyellenebilir manifoldlar ve $\pi_1 : M_n \to B_m$ submersionu tarafından tanımlanan diferensiyellenebilir bir demet olsun. Bu demette $a,b,... = 1,...,n-m \,; \alpha,\beta,... = n-m+1,...,n \,; i, j,... = 1,2,...,n$ olmak üzere, $(x^a, x^\alpha) = (x^i)$ lokal koordinat sistemine bakalım, burada x^α 'lar B_m 'nin lokal koordinatları, x^a 'lar ise, $\pi_1 : M_n \to B_m$ demetinin fibre koordinatlarıdır (Vishnevskii *et al*. 1985). $(x^{a'}, x^{\alpha'})$ demetteki bir diğer yerel koordinatlar olmak üzere

$$\begin{cases} x^{a'} = x^{a'}\left(x^b, x^\beta\right), \\ x^{\alpha'} = x^{\alpha'}\left(x^\beta\right) \end{cases} \tag{3.44}$$

dönüşümü yazılır. (3.44)'de belirtilen dönüşümün Jakobi matrisi

$$\left(A_j^{i'}\right) = \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}\right) = \begin{pmatrix} A_b^{a'} & A_\beta^{a'} \\ 0 & A_\beta^{\alpha'} \end{pmatrix}$$

biçimindedir.

$T_x(B_m)$, B_m 'in $(x=\pi_1(x), x=\left(x^a, x^\alpha\right)\in M_n)$ x noktasındaki tanjant uzayı olsun. $T_x(B_m)$ uzayındaki $\{\partial_\alpha\}$ doğal çatısına göre X 'in bileşenleri $X^\alpha = dx^\alpha\left(X\right)$ olmak üzere, M_n manifoldu üzerinde lokal koordinatları $(x^I)=(x^a, x^\alpha, x^{\bar{\alpha}})$, $(x^{\bar{\alpha}}=y^\alpha$, $\bar{\alpha}=\alpha+m,\ I=1,...,n+m)$ olan $t(B_m)$ yarı-tanjant demeti elde edilir (Duc 1979; Vishnevskii *et al*. 1985).

$t(B_m)$ yarı-tanjant demeti, B_m üzerinde doğal demet yapısına ve $\pi:(x^a, x^\alpha, x^{\bar{\alpha}})\rightarrow(x^\alpha)$ şeklinde tanımlı $\pi: t(B_m)\rightarrow B_m$ izdüşümüne sahiptir. Eğer, $\pi_2:(x^a, x^\alpha, x^{\bar{\alpha}})\rightarrow(x^a, x^\alpha)$ ile, $\pi_2: t(B_m)\rightarrow M_n$ dönüşümü tanımlanacak olursa; $t(B_m)$, M_n üzerinde de bir demet yapısına sahip olur. Buradaki izdüşümü dönüşümleri arasında $\pi=\pi_1\circ\pi_2$ eşitliği yazılabilir (Salimov and Kadıoğlu 2000).

M_n 'nin lokal koordinatlarının (3.44)'e göre, $t(B_m)$ üzerinde belirttiği koordinat dönüşümü

$$\begin{cases} x^{a'} = x^{a'}\left(x^b, x^\beta\right), \\ x^{\alpha'} = x^{\alpha'}\left(x^\beta\right), \\ x^{\bar{\alpha}'} = \dfrac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\beta} x^{\bar{\beta}} \end{cases} \tag{3.45}$$

şeklindedir. (3.45) dönüşümünün Jakobi matrisi

$$\bar{A} = A_J^{I'} = \begin{pmatrix} A_b^{a'} & A_\beta^{a'} & 0 \\ 0 & A_\beta^{\alpha'} & 0 \\ 0 & A_{\beta\alpha}^{\alpha'} y^\alpha & A_\beta^{\alpha'} \end{pmatrix} \tag{3.46}$$

biçimindedir. Burada

$$A_{\beta\alpha}^{\alpha'} = \frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\alpha}}$$

şeklindedir. (3.46)'da belirtilen matris için

$$Det(A_b^{a'}) \neq 0\,,\; Det(A_\beta^{\alpha'}) \neq 0$$

olduğundan $Det\bar{A} \neq 0$ 'dır. Yarı-tanjant demetin boyutu $\dim t(B_m) = n + m$ olur (Duc 1979; Vishnevskii *et al*. 1985). Özel olarak $n=m$ olması durumunda $t(B_m)$ yarı-tanjant demeti, $T(M_n)$ tanjant demetine dönüşür (Salimov and Kadıoğlu 2000).

$F\left(B_m\right)$, B_m üzerindeki C^{∞} sınıfından reel değerli fonksiyonların belirttiği halka olmak üzere, B_m 'deki $\left(p,q\right)$ tipli tüm tensör alanlarının $F\left(B_m\right)$ üzerindeki modülü $\Im_q^p\left(B_m\right)$ ile gösterilir.

3.3.1. Fonksiyonun dikey lifti

f , B_m üzerinde tanımlı bir fonksiyon olmak üzere, $t(B_m)$ yarı-tanjant demeti üzerinde, $\pi : t(B_m) \to B_m$ ve ${}^{v}f = f \circ \pi_1$ dönüşümleri vasıtasıyla tanımlanan f fonksiyonunun dikey lifti

$${}^{vv}f = {}^{v}f \circ \pi_2 = f \circ \pi_1 \circ \pi_2 = f \circ \pi \tag{3.47}$$

şeklindedir (Ay 2013).

Buradan

$${}^{vv}f(x^a, x^{\alpha}, x^{\bar{\alpha}}) = f(x^{\alpha})$$

elde edilir. Böylece ${}^{vv}f$ değeri $\pi : t(B_m) \to B_m$ 'deki her bir fibre boyunca sabittir (Ay 2013).

3.3.2. Vektör alanının dikey lifti

$X \in \Im_0^1(M_n)$, $X = X^\alpha(x^\alpha)\partial_\alpha$ olmak üzere $X = X^a(x^a, x^\alpha)\partial_a + X^\alpha(x^\alpha)\partial_\alpha$ şeklindeki bir izdüşümü olan vektör alanının $t(B_m)$ yarı-tanjant demetine dikey lifti indirgenmiş koordinatlara göre (Vishnevskii 2002)

$$ {}^{vv}X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ X^\alpha \end{pmatrix} $$

bileşenlerine sahiptir. Buradan ve (3.46) eşitliğinden $({}^{vv}X') = \bar{A}({}^{vv}X)$ elde edilir (Ay 2013).

3.3.3. Kovektör alanının dikey lifti

ω, B_m üzerindeki ω_α lokal bileşenlerine sahip ve koordinatlarla ifadesi $\omega = \omega_\alpha dx^\alpha$ şeklinde olan 1-form olmak üzere ω 1-formunun $t(B_m)$ yarı-tanjant demetine dikey lifti indirgenmiş koordinatlara göre

$$ {}^{vv}\omega = (0,\ \omega_\alpha,\ 0) \tag{3.48} $$

bileşenlerine sahiptir. Buradan ve (3.46) eşitliğinden $({}^{vv}\omega) = \bar{A}({}^{vv}\omega')$ elde edilir (Ay 2013).

3.3.4. Fonksiyonun tam lifti

Eğer $f = f(x^a, x^\alpha)$, B_m üzerinde bir fonksiyon ise f fonksiyonunun $t(B_m)$ yarı-tanjant demetine tam lifti

$$^{cc}f = \left(\iota\left(df\right)\right) = x^{\bar{\beta}}\partial_\beta f = y^\beta \partial_\beta f$$

ile tanımlanır (Salimov and Kadıoğlu 2000).

3.3.5. Vektör alanının tam lifti

$X \in \Im_0^1\left(M_n\right)$, $X = X^\alpha(x^\alpha)\partial_\alpha$ olmak üzere $X = X^a(x^a, x^\alpha)\partial_a + X^\alpha(x^\alpha)\partial_\alpha$ şeklindeki bir izdüşümü olan vektör alanının $t(B_m)$ yarı-tanjant demetine tam lifti indirgenmiş koordinatlara göre (Vishnevskii 2002)

$$^{cc}X = \begin{pmatrix} X^a \\ X^\alpha \\ y^\sigma \partial_\sigma X^\alpha \end{pmatrix} \tag{3.49}$$

bileşenlerine sahiptir. Buradan ve (3.46) eşitliğinden $(^{cc}X') = \bar{A}(^{cc}X)$ elde edilir (Vishnevskii *et al*. 1985).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

4.1. Yarı-Kotanjant Demet

M_n ile B_m sırasıyla C^∞ sınıfından n ve m-boyutlu diferensiyellenebilir manifoldlar ve $\pi_1 : M_n \to B_m$ submersionu tarafından tanımlanan diferensiyellenebilir bir demet olsun. Bu demette $a,b,... = 1,...,n-m\ ;\alpha,\beta,... = n-m+1,...,n\ ;i,j,... = 1,2,...,n$ olmak üzere, $(x^a, x^\alpha) = (x^i)$ lokal koordinat sistemine bakalım, burada x^α 'lar B_m 'in lokal koordinatları, x^a 'lar ise, $\pi_1 : M_n \to B_m$ demetinin fibre koordinatlarıdır. $(x^{a'}, x^{\alpha'})$ demetteki bir diğer yerel koordinatlar olmak üzere

$$\begin{cases} x^{a'} = x^{a'}\left(x^b, x^\beta\right), \\ x^{\alpha'} = x^{\alpha'}\left(x^\beta\right) \end{cases} \tag{4.1}$$

dönüşümü yazılır. (4.1) 'de belirtilen dönüşümün Jakobi matrisi

$$\left(A_j^{i'}\right) = \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}\right) = \begin{pmatrix} A_b^{a'} & A_\beta^{a'} \\ 0 & A_\beta^{\alpha'} \end{pmatrix}$$

biçimindedir.

$T_x^*(B_m)$, B_m 'in $(x = \pi_1(x), x = \left(x^a, x^\alpha\right) \in M_n)$ x noktasındaki kotanjant uzayı olsun. p_α 'lar ($p = p_i dx^i$), $p \in T_x^*(B_m)$ 'in $\{dx^\alpha\}$ doğal koçatısına göre bileşenleri olmak üzere, M_n manifoldu üzerinde lokal koordinatları $(x^I) = (x^a, x^\alpha, x^{\bar{\alpha}})$, ($x^{\bar{\alpha}} = p_\alpha$, $\bar{\alpha} =$

$\alpha + m,\ I = 1,...,n+m)$ olan $t^*(B_m)$ yarı-kotanjant demeti elde edilir (Yıldırım and Salimov 2014b).

$t^*(B_m)$ yarı-kotanjant demeti, B_m üzerinde doğal demet yapısına ve $\pi:(x^a, x^\alpha, x^{\bar{\alpha}}) \to (x^\alpha)$ şeklinde tanımlı $\pi: t^*(B_m) \to B_m$ izdüşümüne sahiptir. Eğer, $\pi_2:(x^a, x^\alpha, x^{\bar{\alpha}}) \to (x^a, x^\alpha)$ ile, $\pi_2: t^*(B_m) \to M_n$ dönüşümü tanımlanacak olursa; $t^*(B_m)$, M_n üzerinde de bir demet yapısına sahip olur. Buradaki izdüşümü dönüşümleri arasında $\pi = \pi_1 \circ \pi_2$ eşitliği yazılabilir (Yıldırım and Salimov 2014b).

$\pi{:}E \to B$ fibre demeti ve $f{:}B' \to B$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. İndirgenmiş demet veya Whitney çarpımı olarakta bilinen pull-back demeti

$$f^*E = \left\{(b', e) \in B' \times E \,\middle|\, f(b') = \pi(e)\right\} \subset B' \times E$$

total uzayı ile tanımlanır (Steenrod 1951; Lawson and Michelsohn 1989; Husemoller 1994). Bu demetin $\pi': f^*E \to B'$ izdüşümü ilk değişken üzerine izdüşümü şeklindedir, yani $\pi'(b', e) = b'$. Pull-back demetinin yüksek mertebeden durumlara genellemeleri Pontryagin demetleri olarak bilinir (Pontryagin 1962). $(t^*(B_m), \pi_2)$ yarı-kotanjant demetin yukarıda yer alan tanımından görülür ki yarı-kotanjant demet, B_m üzerinde tanımlı kotanjant demetin π_1 dönüşümü yardımıyla bir pull-back demetidir (Yıldırım and Salimov 2014b).

M_n 'nin lokal koordinatlarının (4.1)'e göre, $t^*(B_m)$ üzerinde belirttiği koordinat dönüşümü

$$\begin{cases} x^{a'} = x^{a'}\left(x^{b}, x^{\beta}\right), \\ x^{\alpha'} = x^{\alpha'}\left(x^{\beta}\right), \\ x^{\overline{\alpha}'} = \dfrac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\alpha'}} x^{\overline{\beta}} \end{cases} \tag{4.2}$$

şeklindedir. (4.2) dönüşümünün Jakobi matrisi

$$\overline{A} = A_{J}^{I'} = \begin{pmatrix} A_{b}^{a'} & A_{\beta}^{a'} & 0 \\ 0 & A_{\beta}^{\alpha'} & 0 \\ 0 & p_{\sigma} A_{\beta}^{\beta'} A_{\beta'\alpha'}^{\sigma} & A_{\alpha'}^{\beta} \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

biçimindedir. Burada

$$A_{\beta'\alpha'}^{\sigma} = \frac{\partial^{2} x^{\sigma}}{\partial x^{\beta'} \partial x^{\alpha'}}$$

şeklindedir. (4.3) ’de belirtilen matris için

$$Det(A_{b}^{a'}) \neq 0\,,\;\; Det(A_{\beta}^{\alpha'}) \neq 0\,,\;\; Det(A_{\alpha'}^{\beta}) \neq 0$$

olduğundan $Det\overline{A} \neq 0$ ’dır. Yarı-kotanjant demetin boyutu $\dim t^{*}(B_{m}) = n + m$ olup özel olarak $n = m$ olması durumunda $t^{*}(B_{m})$ yarı-kotanjant demeti $T^{*}(M_{n})$ kotanjant demetine dönüşür (Yıldırım and Salimov 2014b).

Yarı-tanjant demet ve bazı özellikleri (Duc 1979; Salimov and Kadıoğlu 2000; Vishnevskii 2002) çalışmalarında incelenmiş olup bu tezde ise yarı-kotanjant demet ve yarı-kotanjant demetteki bazı lift problemleri ele alınacaktır.

$F\left(B_m\right)$, B_m üzerindeki C^{∞} sınıfından reel değerli fonksiyonların belirttiği halka olmak üzere, B_m ’deki $\left(p,q\right)$ tipli tüm tensör alanlarının $F\left(B_m\right)$ üzerindeki modülü $\Im_q^p\left(B_m\right)$ ile gösterilir.

4.1.1. Yarı-kotanjant demette temel 1-form

$\pi^{-1}(U)\in t^*(B_m),\ U\subset B_m$ koordinat komşuluğunda bileşenleri $(0,p_\alpha,0)$ şeklinde olan, p 1-formuna $t^*(B_m)$ ’nin temel 1-formu denir. (4.3) ’deki dönüşüm matrisi kullanılarak, $p=\bar{A}p'$ olduğu gösterilebilir.

Burada

$$p=(0,p_\alpha,0)\,,\ \ p'=(0,p_{\alpha'},0)$$

şeklindedir. p temel 1-formunun dp dış diferensiyeli $dp=dp_\alpha\wedge dx^\alpha$ şeklindeki 2-formu belirtir. $A=(a,\alpha,\bar{\alpha})$, $B=(b,\beta,\bar{\beta})$ olmak üzere, $dp=\omega=\frac{1}{2}\omega_{AB}dx^A\wedge dx^B$ eşitliği kullanılırsa ω ’nın

$$\omega=(\omega_{AB})=dp=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-\delta_\beta^\alpha\\0&\delta_\alpha^\beta&0\end{pmatrix}\tag{4.4}$$

bileşenlerine sahip olduğu görülür. Burada $d\omega=d^2p=0$ olduğundan, aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 4.1.1.1: $t^*(B_m)$ yarı-kotanjant demeti dejenere ω simplektik yapısına sahiptir (Yıldırım and Salimov 2014b).

4.1.2. 1-formun dikey lifti

B_m üzerinde tanımlı bir f fonksiyonunun $t^*(B_m)$ demetindeki dikey lifti

$$^{vv}f = {}^{v}f \circ \pi_2 = f \circ \pi_1 \circ \pi_2 = f \circ \pi \tag{4.5}$$

şeklinde tanımlanır.

Buradan

$$^{vv}f(x^a, x^\alpha, x^{\bar{\alpha}}) = f(x^\alpha)$$

elde edilir (Yıldırım and Salimov 2014b).

X, $t^*(B_m)$ üzerinde bir dikey vektör alanı olmak üzere, X 'in $(x^a, x^\alpha, x^{\bar{\alpha}})$ indirgenmiş koordinatlara göre bileşenleri $\begin{pmatrix} X^a \\ X^\alpha \\ X^{\bar{\alpha}} \end{pmatrix}$ ise, bu durumda

$$X^a \partial_a {}^{vv}f + X^\alpha \partial_\alpha {}^{vv}f + X^{\bar{\alpha}} \partial_{\bar{\alpha}} {}^{vv}f = 0$$

$$X^\alpha \partial_\alpha {}^{vv}f = 0$$

$$X^\alpha = 0$$

elde edilir. Buradan, $(x^a, x^\alpha, x^{\bar{\alpha}})$ koordinatlarına göre $t^*(B_m)$ üzerindeki bir X dikey vektör alanının koordinatlarının

$$X = (X^A) = \begin{pmatrix} X^a \\ 0 \\ X^{\bar{\alpha}} \end{pmatrix}$$

şeklinde olduğu görülür.

ω, B_m üzerindeki ω_α lokal bileşenlerine sahip ve koordinatlarla ifadesi $\omega = \omega_\alpha dx^\alpha$ şeklinde olan 1-form olmak üzere, ω 1-formunun $t^*(B_m)$ yarı-kotanjant demetine dikey lifti indirgenmiş koordinatlara göre

$$^{vv}\omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_\alpha \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

bileşenlerine sahiptir. Buradan ve (4.3) eşitliğinden $(^{vv}\omega') = \bar{A}(^{vv}\omega)$ elde edilir.

Keyfi $f \in \Im_0^0(B_m)$ için

$$^{vv}\omega(^{vv} f) = 0$$

olduğundan $^{vv}\omega$ bir dikey vektör alanı belirtir. Eğer $\omega = p$ alınırsa ^{vv}p 'ye, $t^*(B_m)$ üzerinde tanımlı bir Liouville kovektör alanı denir (Yıldırım and Salimov 2014b).

(4.6) 'daki eşitlik kullanılarak, aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 4.1.2.1: Keyfi $\omega, \theta \in \Im_1^0(B_m)$ ve $f \in \Im_0^0(B_m)$ için

(i) $\quad ^{vv}(\omega + \theta) = {}^{vv}\omega + {}^{vv}\theta,$

(ii) $\quad ^{vv}(f\omega) = {}^{vv}f\, {}^{vv}\omega$

eşitlikleri geçerlidir (Yıldırım and Salimov 2014b).

Her U açık komşuluğundaki dx^α doğal koçatısı için $\pi^{-1}(U)$ açık komşuluğunda (4.6) eşitliği kullanılarak, $(x^a, x^\alpha, x^{\bar{\alpha}})$ koordinatlarına göre

$$^{vv}(dx^{\alpha}) = \frac{\partial}{\partial p_{\alpha}}$$

elde edilir.

Tanım 4.1.2.1: $t^{*}(B_m)$ yarı-kotanjant demeti üzerinde, X vektör alanı C^{∞} – sınıfından H fonksiyonu ve dejenere simplektik $\omega = dp$ yapısı için $\iota_X \omega = dH$ şartını sağlıyor ise (yani, $\iota_X \omega$ dahili çarpımı exact (tam form) ise), bu durumda X vektör alanına Hamiltonian vektör alanı denir. Eğer $L_X \omega = 0$ ise, X vektör alanına simplektik vektör alanı denir. $\omega = dp$ yapısı için simplektik vektör alanları lokal olarak Hamiltonian vektör alanıdır. Bunu kolayca $L_X = d \circ \iota_X + \iota_X \circ d$ (Cartan'nın sihirli formülü) formülünden görmek mümkündür (Yıldırım and Salimov 2014b).

$\theta \in \Im_1^0(B_m)$ kovektör alanının $^{vv}\theta$ dikey lifti bir vektör alanı belirtip $^{vv}\theta$ için $L_X = d \circ \iota_X + \iota_X \circ d$ (Cartan'nın sihirli formülü) kullanıldığında

$$L_{^{vv}\theta} dp = \left(d \circ \iota_{^{vv}\theta}\right) dp + \left(\iota_{^{vv}\theta} \circ d\right) dp = d_{^{vv}\theta}\left(\iota\left(dp\right)\right) + \iota_{^{vv}\theta} d^2 p = d\left(\iota_{^{vv}\theta}\left(dp\right)\right)$$

elde edilir. Buradan $L_{^{vv}\theta} dp = 0$ şartı dahilinde $^{vv}\theta$ vektör alanı lokal olarak Hamiltonian vektör alanı olduğu elde edilir ve

$$^{vv}\theta^A \partial_A \omega_{KL} + \left(\partial_K {}^{vv}\theta^A\right) \omega_{AL} + \left(\partial_L {}^{vv}\theta^A\right) \omega_{KA} = 0$$

şartı sağlanır. (4.6) ve $\omega = dp$ dejenere simplektik yapısının bileşenleri son eşitlikte kullanılarak $0 = 0$ eşitliği elde edilir.

İspat: Yukarıda yer alan $^{vv}\theta^A \partial_A \omega_{KL} + \left(\partial_K {}^{vv}\theta^A\right) \omega_{AL} + \left(\partial_L {}^{vv}\theta^A\right) \omega_{KA} = 0$ eşitliğinden

$$0=\left(\partial_K{}^{vv}\theta^a\right)\omega_{aL}+\left(\partial_K{}^{vv}\theta^\alpha\right)\omega_{\alpha L}+\left(\partial_K{}^{vv}\theta^{\bar\alpha}\right)\omega_{\bar\alpha L}+\left(\partial_L{}^{vv}\theta^a\right)\omega_{Ka}+\left(\partial_L{}^{vv}\theta^\alpha\right)\omega_{K\alpha}+\left(\partial_L{}^{vv}\theta^{\bar\alpha}\right)\omega_{K\bar\alpha}$$

$$0=\left(\partial_K{}^{vv}\theta^{\bar\alpha}\right)\omega_{\bar\alpha L}+\left(\partial_L{}^{vv}\theta^{\bar\alpha}\right)\omega_{K\bar\alpha}$$

$$0=\left(\partial_K\theta_\alpha\right)\omega_{\bar\alpha L}+\left(\partial_L\theta_\alpha\right)\omega_{K\bar\alpha}$$

elde edilir. K ’nın indisleri $K=\left(c,\gamma,\bar\gamma\right)$ ve L ’nin indisleri $L=\left(d,\sigma,\bar\sigma\right)$ olmak üzere

(i) Buradan $K=c$ ve $L=d$ için

$$\left(\partial_c\theta_\alpha\right)\underbrace{\omega_{\bar\alpha d}}_{0}+\left(\partial_d\theta_\alpha\right)\underbrace{\omega_{c\bar\alpha}}_{0}=0$$

$$0=0,$$

(ii) $K=c$ ve $L=\sigma$ için

$$\left(\partial_c\theta_\alpha\right)\underbrace{\omega_{\bar\alpha\sigma}}_{\delta_\alpha^\sigma}+\left(\partial_\sigma\theta_\alpha\right)\underbrace{\omega_{c\bar\alpha}}_{0}=0$$

$$\underbrace{\left(\partial_c\theta_\alpha\right)}_{0}\delta_\alpha^\sigma=0$$

$$0=0,$$

(iii) $K=c$ ve $L=\bar\sigma$ için

$$\left(\partial_c\theta_\alpha\right)\underbrace{\omega_{\bar\alpha\bar\sigma}}_{0}+\left(\partial_{\bar\sigma}\theta_\alpha\right)\underbrace{\omega_{c\bar\alpha}}_{0}=0$$

$$0=0,$$

(iv) $K=\gamma$ ve $L=d$ için

$$\left(\partial_\gamma\theta_\alpha\right)\underbrace{\omega_{\bar\alpha d}}_{0}+\left(\partial_d\theta_\alpha\right)\underbrace{\omega_{\gamma\bar\alpha}}_{-\delta_\alpha^\gamma}=0$$

$$-\bigg(\underbrace{\partial_d \theta_\alpha}_{0}\bigg)\delta_\alpha^\gamma = 0$$

$$0 = 0\,,$$

(v) $K = \gamma$ ve $L = \sigma$ için

$$\left(\partial_\gamma \theta_\alpha\right)\underbrace{\omega_{\bar{\alpha}\sigma}}_{\delta_\alpha^\sigma} + \left(\partial_\sigma \theta_\alpha\right)\underbrace{\omega_{\gamma\bar{\alpha}}}_{-\delta_\alpha^\gamma} = 0$$

$$\left(\partial_\gamma \theta_\alpha\right)\delta_\alpha^\sigma - \left(\partial_\sigma \theta_\alpha\right)\delta_\alpha^\gamma = 0$$

$$\underbrace{\left(\partial_\gamma \theta_\sigma\right) - \left(\partial_\sigma \theta_\gamma\right)}_{0} = 0$$

$$0 = 0\,,$$

(vi) $K = \gamma$ ve $L = \bar{\sigma}$ için

$$\left(\partial_\gamma \theta_\alpha\right)\underbrace{\omega_{\bar{\alpha}\bar{\sigma}}}_{0} + \left(\partial_{\bar{\sigma}} \theta_\alpha\right)\underbrace{\omega_{\gamma\bar{\alpha}}}_{-\delta_\alpha^\gamma} = 0$$

$$-\bigg(\underbrace{\partial_{\bar{\sigma}} \theta_\alpha}_{0}\bigg)\delta_\alpha^\gamma = 0$$

$$0 = 0\,,$$

(vii) $K = \bar{\gamma}$ ve $L = d$ için

$$\left(\partial_{\bar{\gamma}} \theta_\alpha\right)\underbrace{\omega_{\bar{\alpha}d}}_{0} + \left(\partial_d \theta_\alpha\right)\underbrace{\omega_{d\bar{\alpha}}}_{0} = 0$$

$$0 = 0\,,$$

(viii) $K = \bar{\gamma}$ ve $L = \sigma$ için

$$\left(\partial_{\bar{\gamma}} \theta_\alpha\right)\underbrace{\omega_{\bar{\alpha}\sigma}}_{\delta_\alpha^\sigma} + \left(\partial_\sigma \theta_\alpha\right)\underbrace{\omega_{\bar{\gamma}\bar{\alpha}}}_{0} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \partial_{\bar{\gamma}}\theta_\alpha \\ 0 \end{pmatrix}\delta_\alpha^\sigma = 0$$

$$0 = 0,$$

(ix) $K = \bar{\gamma}$ ve $L = \bar{\sigma}$ için

$$\underset{0}{\left(\partial_{\bar{\gamma}}\theta_\alpha\right)\omega_{\bar{\alpha}\bar{\sigma}}} + \underset{0}{\left(\partial_{\bar{\sigma}}\theta_\alpha\right)\omega_{\bar{\gamma}\bar{\alpha}}} = 0$$

$$0 = 0.$$

Buradan aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 4.1.2.2: $\omega = dp$ dejenere simplektik yapısıyla birlikte, $\theta \in \Im_1^0(B_m)$ kovektör alanının yarı-kotanjant demete ${}^{vv}\theta$ dikey lifti Hamiltoniandır.

4.1.3. $\gamma-$operatörü

X , B_m üzerinde tanımlı bir vektör alanı olmak üzere $t^*(B_m)$ üzerindeki γX fonksiyonu

$$\gamma X = p_\beta X^\beta \tag{4.7}$$

ile tanımlanır.

Keyfi $F \in \Im_1^1\left(B_m\right)$ için (4.3) matrisi kullanılarak $(\gamma F)' = \bar{A}(\gamma F)$ olduğu gösterilebilir. Burada γF $(x^a, x^\alpha, x^{\bar{\alpha}})$ koordinat sisteminde

$$(\gamma F) = (\gamma F^{A}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_{\beta} F_{\alpha}^{\beta} \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

şeklindeki bileşenlere sahiptir.

Keyfi $f \in T_0^0(B_m)$ için

$$(\gamma F)^{vv}(f) = 0$$

olduğu açıktır ve γF , $t^*(B_m)$ üzerinde tanımlı bir dikey vektör alanı belirtir.

Keyfi $T \in \Im_2^1(B_m)$ için

$$(\gamma T) = (\gamma T_B^A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{\varepsilon} T_{\beta\,\alpha}^{\varepsilon} & 0 \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

ile verilir. (4.3) matrisi yardımıyla $\gamma T_{B'}^{A'} = A_A^{A'} A_{B'}^{B} \gamma T_B^A$ olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

Burada $(\bar{A})^{-1} = (A_{B'}^{B})$ matrisiyle $\bar{A}$ 'nın tersi gösterilmiştir. Ayrıca, $\omega \in \Im_1^0(B_m)$ ve $T \in \Im_2^1(B_m)$ olmak üzere

$$(\gamma T)({}^{vv}\omega) = 0$$

eşitliği elde edilir (Yıldırım and Salimov 2014b).

$R_{\alpha\beta\sigma}{}^{\theta}$ bileşenleriyle tanımlı keyfi $R \in \Im_3^1(B_m)$ için (4.3) matrisi yardımıyla $\gamma R_{I'J'}^{K'} = A_K^{K'} A_{I'}^{I} A_{J'}^{J} \gamma R_{IJ}^{K}$ olduğu kolaylıkla gösterilebilir. $t^*(B_m)$ üzerindeki indirgenmiş koordinatlara göre, γR tensörü $\overline{R}_{IJ}^{K}$ ile ifade edilmek üzere $\overline{R}_{\alpha\beta}{}^{\bar{\theta}}$ bileşeni

$$\overline{R}_{\alpha\beta}{}^{\bar{\theta}} = p_\varepsilon R_{\alpha\beta\theta}{}^{\varepsilon} \tag{4.10}$$

olup diğer tüm bileşenler sıfıra eşittir. Burada $I = (a, \alpha, \bar{\alpha})$, $J = (b, \beta, \bar{\beta})$, $K = (c, \theta, \bar{\theta})$ şeklindedir.

4.1.4. Vektör alanlarının tam lifti

$X \in \Im_0^1(M_n)$, $X = X^{\alpha}(x^{\alpha})\partial_\alpha$ olmak üzere $X = X^{a}(x^{a}, x^{\alpha})\partial_a + X^{\alpha}(x^{\alpha})\partial_\alpha$ şeklindeki bir izdüşümü olan vektör alanının $t^*(B_m)$ yarı-kotanjant demetine tam lifti indirgenmiş koordinatlara göre (Vishnevskii 2002)

$$^{cc}X = \begin{pmatrix} X^{a} \\ X^{\alpha} \\ -p_\varepsilon(\partial_\alpha X^{\varepsilon}) \end{pmatrix} \tag{4.11}$$

bileşenlerine sahiptir. Buradan ve (4.3) eşitliğinden $({}^{cc}X)' = \bar{A}({}^{cc}X)$ elde edilir (Yıldırım and Salimov 2014b). Tanım 4.1.2.1 'den; $L_X = d \circ \iota_X + \iota_X \circ d$ (Cartan'nın sihirli formülü) ${}^{cc}X$ tam lifti için kullanıldığında

$$L_{{}^{cc}X}\, dp = \left(d \circ \iota_{{}^{cc}X}\right) dp + \left(\iota_{{}^{cc}X} \circ d\right) dp = d_{{}^{cc}X}\left(\iota(dp)\right) + \iota_{{}^{cc}X}\, d^2 p = d\left(\iota_{{}^{cc}X}(dp)\right)$$

elde edilir. Buradan $L_{{}^{cc}X}\, dp = 0$ şartı dahilinde ${}^{cc}X$ vektör alanı lokal olarak Hamiltonian vektör alanı olduğu elde edilir ve

$$ {}^{cc}X^{A}\partial_{A}\omega_{KL}+\left(\partial_{K}{}^{cc}X^{A}\right)\omega_{AL}+\left(\partial_{L}{}^{cc}X^{A}\right)\omega_{KA}=0 $$

şartı sağlanır. (4.11) ve $\omega = dp$ dejenere simplektik yapısının bileşenleri son eşitlikte kullanılarak $0=0$ eşitliği elde edilir.

İspat: Yukarıda yer alan ${}^{cc}X^{A}\partial_{A}\omega_{KL}+\left(\partial_{K}{}^{cc}X^{A}\right)\omega_{AL}+\left(\partial_{L}{}^{cc}X^{A}\right)\omega_{KA}=0$ eşitliğinden

$$ \left(\partial_{K}{}^{cc}X^{a}\right)\omega_{aL}+\left(\partial_{K}{}^{cc}X^{\alpha}\right)\omega_{\alpha L}+\left(\partial_{K}{}^{cc}X^{\bar{\alpha}}\right)\omega_{\bar{\alpha}L}+\left(\partial_{L}{}^{cc}X^{a}\right)\omega_{Ka}+\left(\partial_{L}{}^{cc}X^{\alpha}\right)\omega_{K\alpha}+\left(\partial_{L}{}^{cc}X^{\bar{\alpha}}\right)\omega_{K\bar{\alpha}}=0 $$

$$ \left(\partial_{K}X^{a}\right)\omega_{aL}+\left(\partial_{K}X^{\alpha}\right)\omega_{\alpha L}-\left(\partial_{K}\left(p_{\varepsilon}\partial_{\alpha}X^{\varepsilon}\right)\right)\omega_{\bar{\alpha}L}+\left(\partial_{L}X^{a}\right)\omega_{Ka}+\left(\partial_{L}X^{\alpha}\right)\omega_{K\alpha}-\left(\partial_{L}\left(p_{\varepsilon}\partial_{\alpha}X^{\varepsilon}\right)\right)\omega_{K\bar{\alpha}}=0 $$

elde edilir. K ’nın indisleri $K=\left(c,\gamma,\bar{\gamma}\right)$ ve L ’nin indisleri $L=\left(d,\sigma,\bar{\sigma}\right)$ olmak üzere

(i) Buradan $K=c$ ve $L=d$ için

$$ 0=\left(\partial_{c}X^{a}\right)\underset{0}{\omega_{ad}}+\left(\partial_{c}X^{\alpha}\right)\underset{0}{\omega_{\alpha d}}-\left(\partial_{c}\left(p_{\varepsilon}\partial_{\alpha}X^{\varepsilon}\right)\right)\underset{0}{\omega_{\bar{\alpha}d}}+\left(\partial_{d}X^{a}\right)\underset{0}{\omega_{ca}}+\left(\partial_{d}X^{\alpha}\right)\underset{0}{\omega_{c\alpha}}-\left(\partial_{d}\left(p_{\varepsilon}\partial_{\alpha}X^{\varepsilon}\right)\right)\underset{0}{\omega_{c\bar{\alpha}}} $$

$$ 0=0, $$

(ii) $K=c$ ve $L=\sigma$ için

$$ 0=\left(\partial_{c}X^{a}\right)\underset{0}{\omega_{a\sigma}}+\left(\partial_{c}X^{\alpha}\right)\underset{0}{\omega_{\alpha\sigma}}-\left(\partial_{c}\left(p_{\varepsilon}\partial_{\alpha}X^{\varepsilon}\right)\right)\omega_{\bar{\alpha}\sigma}+\left(\partial_{\sigma}X^{a}\right)\underset{0}{\omega_{ca}}+\left(\partial_{\sigma}X^{\alpha}\right)\underset{0}{\omega_{c\alpha}}-\left(\partial_{\sigma}\left(p_{\varepsilon}\partial_{\alpha}X^{\varepsilon}\right)\right)\underset{0}{\omega_{c\bar{\alpha}}} $$

$$ 0=-\left(\partial_{c}\left(p_{\varepsilon}\partial_{\alpha}X^{\varepsilon}\right)\right)\omega_{\bar{\alpha}\sigma} $$

$$ 0=-\left(\underbrace{\partial_{c}\left(p_{\varepsilon}\partial_{\alpha}X^{\varepsilon}\right)}_{0}\right)\delta_{\alpha}^{\sigma} $$

$$ 0=0, $$

(iii) $K=c$ ve $L=\bar{\sigma}$ için

$$0=\left(\partial_c X^a\right)\underbrace{\omega_{a\bar{\sigma}}}_{0}+\left(\partial_c X^\alpha\right)\underbrace{\omega_{\alpha\bar{\sigma}}}_{-\delta_\sigma^\alpha}-\left(\partial_c\left(p_\varepsilon\partial_\alpha X^\varepsilon\right)\right)\underbrace{\omega_{\bar{\alpha}\bar{\sigma}}}_{0}+\left(\partial_{\bar{\sigma}} X^a\right)\underbrace{\omega_{ca}}_{0}+\left(\partial_{\bar{\sigma}} X^\alpha\right)\underbrace{\omega_{c\alpha}}_{0}-\left(\partial_{\bar{\sigma}}\left(p_\varepsilon\partial_\alpha X^\varepsilon\right)\right)\underbrace{\omega_{c\bar{\alpha}}}_{0}$$

$$0=-\left(\underbrace{\partial_c X^\alpha}_{0}\right)\delta_\sigma^\alpha$$

$$0=0,$$

(iv) $K=\gamma$ ve $L=d$ için

$$0=\left(\partial_\gamma X^a\right)\underbrace{\omega_{ad}}_{0}+\left(\partial_\gamma X^\alpha\right)\underbrace{\omega_{\alpha d}}_{0}-\left(\partial_\gamma\left(p_\varepsilon\partial_\alpha X^\varepsilon\right)\right)\underbrace{\omega_{\bar{\alpha}d}}_{0}+\left(\partial_d X^a\right)\underbrace{\omega_{\gamma a}}_{0}+\left(\partial_d X^\alpha\right)\underbrace{\omega_{\gamma\alpha}}_{0}-\left(\partial_d\left(p_\varepsilon\partial_\alpha X^\varepsilon\right)\right)\underbrace{\omega_{\gamma\bar{\alpha}}}_{-\delta_\alpha^\gamma}$$

$$0=\left(\underbrace{\partial_d\left(p_\varepsilon\partial_\alpha X^\varepsilon\right)}_{0}\right)\delta_\alpha^\gamma$$

$$0=0,$$

(v) $K=\gamma$ ve $L=\sigma$ için

$$0=\left(\partial_\gamma X^a\right)\underbrace{\omega_{a\sigma}}_{0}+\left(\partial_\gamma X^\alpha\right)\underbrace{\omega_{\alpha\sigma}}_{0}-\left(\partial_\gamma\left(p_\varepsilon\partial_\alpha X^\varepsilon\right)\right)\underbrace{\omega_{\bar{\alpha}\sigma}}_{\delta_\alpha^\sigma}+\left(\partial_\sigma X^a\right)\underbrace{\omega_{\gamma a}}_{0}+\left(\partial_\sigma X^\alpha\right)\underbrace{\omega_{\gamma\alpha}}_{0}-\left(\partial_\sigma\left(p_\varepsilon\partial_\alpha X^\varepsilon\right)\right)\underbrace{\omega_{\gamma\bar{\alpha}}}_{-\delta_\alpha^\gamma}$$

$$0=-\left(\partial_\gamma\left(p_\varepsilon\partial_\alpha X^\varepsilon\right)\right)\delta_\alpha^\sigma+\left(\partial_\sigma\left(p_\varepsilon\partial_\alpha X^\varepsilon\right)\right)\delta_\alpha^\gamma$$

$$0=-\left(\partial_\gamma\left(p_\varepsilon\partial_\sigma X^\varepsilon\right)\right)+\left(\partial_\sigma\left(p_\varepsilon\partial_\gamma X^\varepsilon\right)\right)$$

$$0=p_\varepsilon\left(\underbrace{\partial_{\gamma\sigma}^2 X^\varepsilon-\partial_{\sigma\gamma}^2 X^\varepsilon}_{0}\right)$$

$$0=0,$$

(vi) $K=\gamma$ ve $L=\bar{\sigma}$ için

$$0=\left(\partial_\gamma X^a\right)\underbrace{\omega_{a\bar{\sigma}}}_{0}+\left(\partial_\gamma X^\alpha\right)\underbrace{\omega_{\alpha\bar{\sigma}}}_{-\delta_\sigma^\alpha}-\left(\partial_\gamma\left(p_\varepsilon\partial_\alpha X^\varepsilon\right)\right)\underbrace{\omega_{\bar{\alpha}\bar{\sigma}}}_{0}+\left(\partial_{\bar{\sigma}} X^a\right)\underbrace{\omega_{\gamma a}}_{0}+\left(\partial_{\bar{\sigma}} X^\alpha\right)\underbrace{\omega_{\gamma\alpha}}_{0}-\left(\partial_{\bar{\sigma}}\left(p_\varepsilon\partial_\alpha X^\varepsilon\right)\right)\underbrace{\omega_{\gamma\bar{\alpha}}}_{-\delta_\alpha^\gamma}$$

$$0=-\left(\partial_\gamma X^\alpha\right)\delta_\sigma^\alpha+\left(\partial_{\bar{\sigma}}\left(p_\varepsilon\partial_\alpha X^\varepsilon\right)\right)\delta_\alpha^\gamma$$

$$0=-\left(\partial_{\gamma}X^{\sigma}\right)+\left(\partial_{\gamma}X^{\sigma}\right)$$

$$0=0\,,$$

(vii) $K=\bar{\gamma}$ ve $L=d$ için

$$0=\left(\partial_{\bar{\gamma}}X^{a}\right)\underset{0}{\omega_{ad}}+\left(\partial_{\bar{\gamma}}X^{\alpha}\right)\underset{0}{\omega_{\alpha d}}-\left(\partial_{\bar{\gamma}}\left(p_{\varepsilon}\partial_{\alpha}X^{\varepsilon}\right)\right)\underset{0}{\omega_{\bar{\alpha}d}}+\left(\partial_{d}X^{a}\right)\underset{0}{\omega_{\bar{\gamma}a}}+\left(\partial_{d}X^{\alpha}\right)\underset{\delta_{\gamma}^{\alpha}}{\omega_{\bar{\gamma}\alpha}}-\left(\partial_{d}\left(p_{\varepsilon}\partial_{\alpha}X^{\varepsilon}\right)\right)\underset{0}{\omega_{\bar{\gamma}\bar{\alpha}}}$$

$$0=\left(\partial_{d}X^{\alpha}\right)\delta_{\gamma}^{\alpha}$$

$$0=\left(\partial_{d}X^{\gamma}\right)$$

$$0=0\,,$$

(viii) $K=\bar{\gamma}$ ve $L=\sigma$ için

$$0=\left(\partial_{\bar{\gamma}}X^{a}\right)\underset{0}{\omega_{a\sigma}}+\left(\partial_{\bar{\gamma}}X^{\alpha}\right)\underset{0}{\omega_{\alpha\sigma}}-\left(\partial_{\bar{\gamma}}\left(p_{\varepsilon}\partial_{\alpha}X^{\varepsilon}\right)\right)\underset{\delta_{\alpha}^{\sigma}}{\omega_{\bar{\alpha}\sigma}}+\left(\partial_{\sigma}X^{a}\right)\underset{0}{\omega_{\bar{\gamma}a}}+\left(\partial_{\sigma}X^{\alpha}\right)\underset{\delta_{\gamma}^{\alpha}}{\omega_{\bar{\gamma}\alpha}}-\left(\partial_{\sigma}\left(p_{\varepsilon}\partial_{\alpha}X^{\varepsilon}\right)\right)\underset{0}{\omega_{\bar{\gamma}\bar{\alpha}}}$$

$$0=-\left(\partial_{\bar{\gamma}}\left(p_{\varepsilon}\partial_{\alpha}X^{\varepsilon}\right)\right)\delta_{\alpha}^{\sigma}+\left(\partial_{\sigma}X^{\alpha}\right)\delta_{\gamma}^{\alpha}$$

$$0=-\left(\partial_{\alpha}X^{\gamma}\right)\delta_{\alpha}^{\sigma}+\left(\partial_{\sigma}X^{\gamma}\right)$$

$$0=-\left(\partial_{\sigma}X^{\gamma}\right)+\left(\partial_{\sigma}X^{\gamma}\right)$$

$$0=0\,,$$

(ix) $K=\bar{\gamma}$ ve $L=\bar{\sigma}$ için

$$0=\left(\partial_{\bar{\gamma}}X^{a}\right)\underset{0}{\omega_{a\bar{\sigma}}}+\left(\partial_{\bar{\gamma}}X^{\alpha}\right)\underset{-\delta_{\sigma}^{\alpha}}{\omega_{\alpha\bar{\sigma}}}-\left(\partial_{\bar{\gamma}}\left(p_{\varepsilon}\partial_{\alpha}X^{\varepsilon}\right)\right)\underset{0}{\omega_{\bar{\alpha}\bar{\sigma}}}+\left(\partial_{\bar{\sigma}}X^{a}\right)\underset{0}{\omega_{\bar{\gamma}a}}+\left(\partial_{\bar{\sigma}}X^{\alpha}\right)\underset{\delta_{\gamma}^{\alpha}}{\omega_{\bar{\gamma}\alpha}}-\left(\partial_{\bar{\sigma}}\left(p_{\varepsilon}\partial_{\alpha}X^{\varepsilon}\right)\right)\underset{0}{\omega_{\bar{\gamma}\bar{\alpha}}}$$

$$0=-\left(\partial_{\bar{\gamma}}X^{\alpha}\right)\delta_{\sigma}^{\alpha}+\left(\partial_{\bar{\sigma}}X^{\alpha}\right)\delta_{\gamma}^{\alpha}$$

$$0=-\left(\underset{0}{\partial_{\bar{\gamma}}X^{\sigma}}\right)+\left(\underset{0}{\partial_{\bar{\sigma}}X^{\gamma}}\right)$$

$0=0$.

Buradan aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 4.1.4.1: $\omega = dp$ dejenere simplektik yapısıyla birlikte, X izdüşümü olan vektör alanının yarı-kotanjant demete ${}^{cc}X$ tam lifti Hamiltoniandır (Yıldırım and Salimov 2014b).

Keyfi $X, Y \in \Im_0^1(M_n)$ ve $f \in \Im_0^0(B_m)$ için (4.6) ve (4.11) kullanılarak

(i) ${}^{cc}X({}^{vv}f) = {}^{vv}(Xf)$,

(ii) ${}^{cc}(X+Y) = {}^{cc}X + {}^{cc}Y$,

(iii) ${}^{cc}(fX) = {}^{vv}f({}^{cc}X) - (\gamma X)^{vv}(df)$

eşitlikleri elde edilir.

Teorem 4.1.4.2: B_m üzerindeki X ve Z izdüşümleri ile $X, Z \in \Im_0^1(M_n)$ izdüşümü olan vektör alanları olsun. Keyfi $f \in \Im_0^0(B_m)$, $\omega \in \Im_1^0(B_m)$ ve $F \in \Im_1^1(B_m)$ için

(i) ${}^{vv}\omega^{vv}f = 0$,

(ii) ${}^{vv}\omega(\gamma Z) = {}^{vv}(\omega(Z))$,

(iii) $(\gamma F)({}^{vv}f) = 0$,

(iv) $(\gamma F)\gamma Z = \gamma(FZ)$,

(v) ${}^{cc}X(\gamma Z) = \gamma[X, Z]$,

(vi) ${}^{cc}X\,{}^{vv}f = {}^{vv}(Xf)$

eşitlikleri elde edilir (Yıldırım and Salimov 2014b).

İspat: (i) Keyfi $\omega \in \Im_1^0(B_m)$ olmak üzere, (4.5) ve (4.6) 'dan

$${}^{vv}\omega^{vv}f = {}^{vv}\omega^I \partial_I {}^{vv}f$$

$$= \underset{0}{{}^{vv}\omega^{a}}\, \underset{0}{\partial_{a}\, {}^{vv} f} + \underset{0}{{}^{vv}\omega^{\alpha}}\, \partial_{\alpha}\, {}^{vv} f + {}^{vv}\omega^{\bar{\alpha}}\, \underset{0}{\partial_{\bar{\alpha}}\, {}^{vv} f}$$

$$= 0$$

elde edilir.

(ii) M_n üzerinde Z izdüşümü olan vektör alanı ve keyfi $\omega \in \Im_1^0(B_m)$ için (4.6) ve (4.7) ’den

$$\begin{aligned}
{}^{vv}\omega(\gamma Z) &= {}^{vv}\omega^{I}\partial_{I}(\gamma Z) \\
&= \underset{0}{{}^{vv}\omega^{a}}\, \partial_{a}(p_{\beta}Z^{\beta}) + \underset{0}{{}^{vv}\omega^{\alpha}}\, \partial_{\alpha}(p_{\beta}Z^{\beta}) + {}^{vv}\omega^{\bar{\alpha}}\, \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}}(p_{\beta}}_{\delta_{\beta}^{\alpha}} Z^{\beta}) \\
&= \omega_{\alpha} Z^{\alpha} \\
&= {}^{vv}(\omega(Z))
\end{aligned}$$

elde edilir.

(iii) Her $F \in \Im_1^1(B_m)$ için (4.5) ve (4.8) ’den

$$\begin{aligned}
(\gamma F)({}^{vv} f) &= (\gamma F)^{I}\partial_{I}({}^{vv} f) \\
&= \underset{0}{(\gamma F)^{a}}\, \partial_{a}({}^{vv} f) + \underbrace{(\gamma F)^{\alpha}}_{0}\, \partial_{\alpha}({}^{vv} f) + (\gamma F)^{\bar{\alpha}}\, \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}}({}^{vv} f)}_{0} \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir.

(iv) M_n üzerinde Z izdüşümü olan vektör alanı ve keyfi $F \in \Im_1^1(B_m)$ için (4.7) ve (4.8) kullanılarak

$$(\gamma F)\gamma Z = (\gamma F)^{I}\partial_{I}(\gamma Z)$$

$$
\begin{aligned}
&= \underset{0}{(\gamma F)^{a}}\, \partial_{a}(p_{\beta}Z^{\beta}) + \underbrace{(\gamma F)^{\alpha}}_{0}\, \partial_{\alpha}(p_{\beta}Z^{\beta}) + (\gamma F)^{\bar{\alpha}}\, \partial_{\bar{\alpha}}(p_{\beta}Z^{\beta}) \\
&= p_{\beta}F_{\alpha}^{\beta}\, \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}}(p_{\beta}}_{\delta_{\beta}^{\alpha}}\, Z^{\beta}) \\
&= p_{\beta}F_{\alpha}^{\beta}Z^{\alpha} = p_{\beta}(FZ)^{\beta} \\
&= \gamma(FZ)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

(v) M_n üzerinde X ve Z izdüşümü olan vektör alanları için (4.7) ve (4.11) kullanılarak

$$
\begin{aligned}
{}^{cc}X(\gamma Z) &= {}^{cc}X^{I}\partial_{I}(\gamma Z) \\
&= \underset{0}{{}^{cc}X^{a}}\, \partial_{a}(p_{\beta}Z^{\beta}) + {}^{cc}X^{\alpha}\partial_{\alpha}(p_{\beta}Z^{\beta}) + {}^{cc}X^{\bar{\alpha}}\, \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}}(p_{\beta}}_{\delta_{\beta}^{\alpha}}\, Z^{\beta}) \\
&= X^{\alpha}\partial_{\alpha}(p_{\beta}Z^{\beta}) - p_{\beta}(\partial_{\alpha}X^{\beta})Z^{\alpha} \\
&= p_{\beta}(X^{\alpha}\partial_{\alpha}Z^{\beta} - Z^{\alpha}\partial_{\alpha}X^{\beta}) \\
&= p_{\beta}[X,Z]^{\beta} \\
&= \gamma[X,Z]
\end{aligned}
$$

elde edilir.

(vi) X , M_n üzerinde verilmiş izdüşümü olan vektör alanı olmak üzere, keyfi $f \in \Im_0^0(B_m)$ için (4.5) ve (4.11) kullanılarak

$$
\begin{aligned}
{}^{cc}X\, {}^{vv}f &= {}^{cc}X^{I}\partial_{I}\, {}^{vv}f \\
&= \underset{0}{{}^{cc}X^{a}}\, \partial_{a}\, {}^{vv}f + {}^{cc}X^{\alpha}\partial_{\alpha}\, {}^{vv}f + {}^{cc}X^{\bar{\alpha}}\, \underset{0}{\partial_{\bar{\alpha}}\, {}^{vv}f}
\end{aligned}
$$

$$= X^{\alpha}\partial_{\alpha}{}^{vv}f$$

$$={}^{vv}(Xf)$$

elde edilir.

Teorem 4.1.4.3: $X \in \Im_0^1(B_m)$ ve $Y \in \Im_0^1(B_m)$ izdüşümler olmak üzere $X, Y \in \Im_0^1(M_n)$ izdüşümü olan vektör alanları olsun. Keyfi $\omega, \theta \in \Im_1^0(B_m)$ ve $F, G \in \Im_1^1(B_m)$ için Lie parantezi kullanılarak

(i) $[{}^{vv}\omega, {}^{vv}\theta] = 0,$

(ii) $[{}^{vv}\omega, \gamma F] = {}^{vv}(\omega \circ F),$

(iii) $[\gamma F, \gamma G] = \gamma[F, G],$

(iv) $[{}^{cc}X, {}^{vv}\omega] = {}^{vv}(L_X\omega),$

(v) $[{}^{cc}X, \gamma F] = \gamma(L_X F),$

(vi) $[{}^{cc}X, {}^{cc}Y] = {}^{cc}[X, Y]$

eşitlikleri elde edilir. Burada yer alan $\omega \circ F$ 1-formu keyfi $Z \in \Im_0^1(B_m)$ için $(\omega \circ F)(Z) = \omega(FZ)$ ile tanımlanmıştır, X 'e göre Lie türevi L_X ile gösterilmiştir (Yıldırım and Salimov 2014b).

İspat: (i) Keyfi $\omega, \theta \in \Im_1^0(B_m)$ için $t^*(B_m)$ üzerinde $(x^b, x^{\beta}, x^{\bar{\beta}})$ koordinatlarına göre $[{}^{vv}\omega, {}^{vv}\theta]$ 'nın bileşenleri $\begin{pmatrix} [{}^{vv}\omega, {}^{vv}\theta]^b \\ [{}^{vv}\omega, {}^{vv}\theta]^{\beta} \\ [{}^{vv}\omega, {}^{vv}\theta]^{\bar{\beta}} \end{pmatrix}$ olmak üzere (4.6) kullanılarak

$$\begin{aligned}
[{}^{vv}\omega, {}^{vv}\theta]^J &= {}^{vv}\omega^I\partial_I{}^{vv}\theta^J - {}^{vv}\theta^I\partial_I{}^{vv}\omega^J \\
&= \underset{0}{{}^{vv}\omega^a}\,\partial_a{}^{vv}\theta^J + \underset{0}{{}^{vv}\omega^{\alpha}}\,\partial_{\alpha}{}^{vv}\theta^J + {}^{vv}\omega^{\bar{\alpha}}\partial_{\bar{\alpha}}{}^{vv}\theta^J \\
&\quad - \underset{0}{{}^{vv}\theta^a}\,\partial_a{}^{vv}\omega^J - \underset{0}{{}^{vv}\theta^{\alpha}}\,\partial_{\alpha}{}^{vv}\omega^J - {}^{vv}\theta^{\bar{\alpha}}\partial_{\bar{\alpha}}{}^{vv}\omega^J
\end{aligned}$$

$$=\omega_\alpha \partial_{\bar{\alpha}}{}^{vv}\theta^J - \theta_\alpha \partial_{\bar{\alpha}}{}^{vv}\omega^J$$

yazılır. Burada (4.6) kullanılarak, $J=b$ için

$$\begin{aligned}[{}^{vv}\omega,{}^{vv}\theta]^b &= \omega_\alpha \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}}\, {}^{vv}\theta^b}_{0} - \theta_\alpha \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}}\, {}^{vv}\omega^b}_{0} \\ &= 0\,,\end{aligned}$$

$J=\beta$ için

$$\begin{aligned}[{}^{vv}\omega,{}^{vv}\theta]^\beta &= \omega_\alpha \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}}\, {}^{vv}\theta^\beta}_{0} - \theta_\alpha \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}}\, {}^{vv}\omega^\beta}_{0} \\ &= 0\,,\end{aligned}$$

son olarak $J=\bar{\beta}$ için

$$\begin{aligned}[{}^{vv}\omega,{}^{vv}\theta]^{\bar{\beta}} &= \omega_\alpha \partial_{\bar{\alpha}}\, \underbrace{{}^{vv}\theta^{\bar{\beta}}}_{\theta_\beta} - \theta_\alpha \partial_{\bar{\alpha}}\, \underbrace{{}^{vv}\omega^{\bar{\beta}}}_{\omega_\beta} \\ &= \omega_\alpha \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}}\theta_\beta}_{0} - \theta_\alpha \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}}\omega_\beta}_{0} \\ &= 0\end{aligned}$$

elde edilip, $[{}^{vv}\omega,{}^{vv}\theta]=0$ eşitliği gösterilmiş olur.

(ii) Keyfi $\omega \in \Im_1^0(B_m)$ ve $F \in \Im_1^1(B_m)$ için $(x^b, x^\beta, x^{\bar{\beta}})$ koordinatlarına göre $t^*(B_m)$ üzerinde tanımlı $[{}^{vv}\omega, \gamma F]$ 'nın bileşenleri $\begin{pmatrix}[{}^{vv}\omega,\gamma F]^b \\ [{}^{vv}\omega,\gamma F]^\beta \\ [{}^{vv}\omega,\gamma F]^{\bar{\beta}}\end{pmatrix}$ olmak üzere (4.6) ve (4.8)'den

$$\begin{aligned}[{}^{vv}\omega,\gamma F]^J &= {}^{vv}\omega^I \partial_I (\gamma F)^J - (\gamma F)^I \partial_I ({}^{vv}\omega)^J \\ &= \underbrace{{}^{vv}\omega^a}_{0} \partial_a (\gamma F)^J + \underbrace{{}^{vv}\omega^\alpha}_{0} \partial_\alpha (\gamma F)^J + {}^{vv}\omega^{\bar{\alpha}} \partial_{\bar{\alpha}} (\gamma F)^J\end{aligned}$$

$$-\underset{0}{(\gamma F)^{a}}\,\partial_{a}{}^{vv}\omega^{J}-\underbrace{(\gamma F)^{\alpha}}_{0}\partial_{\alpha}{}^{vv}\omega^{J}-(\gamma F)^{\bar{\alpha}}\partial_{\bar{\alpha}}{}^{vv}\omega^{J}$$

$$={}^{vv}\omega^{\bar{\alpha}}\partial_{\bar{\alpha}}(\gamma F)^{J}-(\gamma F)^{\bar{\alpha}}\partial_{\bar{\alpha}}{}^{vv}\omega^{J}$$

$$=\omega_{\alpha}\partial_{\bar{\alpha}}(\gamma F)^{J}-p_{\varepsilon}F^{\varepsilon}_{\beta}\partial_{\bar{\alpha}}{}^{vv}\omega^{J}$$

elde edilir. Burada (4.6) ve (4.8) kullanılarak, $J=b$ için

$$[{}^{vv}\omega,\gamma F]^{b}=\omega_{\alpha}\partial_{\bar{\alpha}}\underset{0}{(\gamma F)^{b}}-p_{\varepsilon}F^{\varepsilon}_{\beta}\partial_{\bar{\alpha}}\underset{0}{{}^{vv}\omega^{b}}$$

$$=0\,,$$

$J=\beta$ için

$$[{}^{vv}\omega,\gamma F]^{\beta}=\omega_{\alpha}\partial_{\bar{\alpha}}\underbrace{(\gamma F)^{\beta}}_{0}-p_{\varepsilon}F^{\varepsilon}_{\beta}\partial_{\bar{\alpha}}\underset{0}{{}^{vv}\omega^{\beta}}$$

$$=0\,,$$

son olarak $J=\bar{\beta}$ için

$$[{}^{vv}\omega,\gamma F]^{\bar{\beta}}=\omega_{\alpha}\partial_{\bar{\alpha}}\underbrace{(\gamma F)^{\bar{\beta}}}_{p_{\varepsilon}F^{\varepsilon}_{\beta}}-p_{\varepsilon}F^{\varepsilon}_{\beta}\underbrace{\partial_{\bar{\alpha}}{}^{vv}\omega^{\bar{\beta}}}_{0}$$

$$=\omega_{\alpha}\underset{\delta^{\alpha}_{\varepsilon}}{\partial_{\bar{\alpha}}p_{\varepsilon}}F^{\varepsilon}_{\beta}-p_{\varepsilon}F^{\varepsilon}_{\beta}\underset{0}{\partial_{\bar{\alpha}}\omega_{\beta}}$$

$$=\omega_{\alpha}F^{\alpha}_{\beta}$$

$$=(\omega\circ F)_{\beta}$$

elde edilir. $(x^{b},x^{\beta},x^{\bar{\beta}})$ koordinatlarına göre $t^{*}(B_{m})$ üzerindeki $(\omega\circ F)$ 'in dikey lifti

$${}^{vv}(\omega\circ F)=\begin{pmatrix}0\\0\\(\omega\circ F)_{\beta}\end{pmatrix}$$

şeklindeki bileşenlere sahip olup $[{}^{vv}\omega, \gamma F] = {}^{vv}(\omega \circ F)$ eşitliği gösterilmiş olur.

(iii) Keyfi $F, G \in \Im_1^1(B_m)$ için $(x^b, x^\beta, x^{\overline{\beta}})$ koordinatlarına göre $t^*(B_m)$ üzerinde tanımlı $[\gamma F, \gamma G]$ 'nin bileşenleri $\begin{pmatrix} [\gamma F, \gamma G]^b \\ [\gamma F, \gamma G]^\beta \\ [\gamma F, \gamma G]^{\overline{\beta}} \end{pmatrix}$ olmak üzere (4.8)'den

$$\begin{aligned}
[\gamma F, \gamma G]^J &= (\gamma F)^I \partial_I (\gamma G)^J - (\gamma G)^I \partial_I (\gamma F)^J \\
&= \underset{0}{(\gamma F)^a} \partial_a (\gamma G)^J + \underbrace{(\gamma F)^\alpha}_{0} \partial_\alpha (\gamma G)^J + (\gamma F)^{\overline{\alpha}} \partial_{\overline{\alpha}} (\gamma G)^J \\
&\quad - \underset{0}{(\gamma G)^a} \partial_a (\gamma F)^J - \underbrace{(\gamma G)^\alpha}_{0} \partial_\alpha (\gamma F)^J - (\gamma G)^{\overline{\alpha}} \partial_{\overline{\alpha}} (\gamma F)^J \\
&= \underbrace{(\gamma F)^{\overline{\alpha}}}_{p_\varepsilon F_\alpha^\varepsilon} \partial_{\overline{\alpha}} (\gamma G)^J - \underbrace{(\gamma G)^{\overline{\alpha}}}_{p_\varepsilon G_\alpha^\varepsilon} \partial_{\overline{\alpha}} (\gamma F)^J \\
&= p_\varepsilon F_\alpha^\varepsilon \partial_{\overline{\alpha}} (\gamma G)^J - p_\varepsilon G_\alpha^\varepsilon \partial_{\overline{\alpha}} (\gamma F)^J
\end{aligned}$$

eşitliği yazılır. Burada (4.8) kullanılarak, $J = b$ için

$$\begin{aligned}
[\gamma F, \gamma G]^b &= p_\varepsilon F_\alpha^\varepsilon \partial_{\overline{\alpha}} \underset{0}{(\gamma G)^b} - p_\varepsilon G_\alpha^\varepsilon \partial_{\overline{\alpha}} \underset{0}{(\gamma F)^b} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$J = \beta$ için

$$\begin{aligned}
[\gamma F, \gamma G]^\beta &= p_\varepsilon F_\alpha^\varepsilon \partial_{\overline{\alpha}} \underbrace{(\gamma G)^\beta}_{0} - p_\varepsilon G_\alpha^\varepsilon \partial_{\overline{\alpha}} \underbrace{(\gamma F)^\beta}_{0} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

son olarak $J = \overline{\beta}$ için

$$
\begin{aligned}
[\gamma F,\gamma G]^{\bar{\beta}} &= p_\varepsilon F_\alpha^\varepsilon \partial_{\bar{\alpha}} \underbrace{(\gamma G)^{\bar{\beta}}}_{p_\varepsilon G_\beta^\varepsilon} - p_\varepsilon G_\alpha^\varepsilon \partial_{\bar{\alpha}} \underbrace{(\gamma F)^{\bar{\beta}}}_{p_\varepsilon F_\beta^\varepsilon} \\
&= p_\varepsilon F_\alpha^\varepsilon \underset{\delta_\varepsilon^\alpha}{\partial_{\bar{\alpha}} p_\varepsilon} G_\beta^\varepsilon - p_\varepsilon G_\alpha^\varepsilon \underset{\delta_\varepsilon^\alpha}{\partial_{\bar{\alpha}} p_\varepsilon} F_\beta^\varepsilon \\
&= p_\varepsilon F_\alpha^\varepsilon G_\beta^\alpha - p_\varepsilon G_\alpha^\varepsilon F_\beta^\alpha \\
&= p_\varepsilon (F_\alpha^\varepsilon G_\beta^\alpha - G_\alpha^\varepsilon F_\beta^\alpha) \\
&= p_\varepsilon [F,G]_\beta^\varepsilon
\end{aligned}
$$

elde edilir. $(x^b, x^\beta, x^{\bar{\beta}})$ koordinatlarına göre $t^*(B_m)$ üzerindeki $\gamma[F,G]$ 'nin bileşenleri

$$
\gamma[F,G] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_\varepsilon [F,G]_\beta^\varepsilon \end{pmatrix}
$$

şeklinde olup $[\gamma F,\gamma G] = \gamma[F,G]$ eşitliği gösterilmiş olur.

(iv) Keyfi $X \in \Im_0^1(M_n)$ izdüşümü olan vektör alanı ve $\omega \in \Im_1^0(B_m)$ için $(x^b, x^\beta, x^{\bar{\beta}})$ koordinatlarına göre $t^*(B_m)$ üzerinde tanımlı $[{}^{cc}X, {}^{vv}\omega]$ 'nın bileşenleri $\begin{pmatrix} [{}^{cc}X, {}^{vv}\omega]^b \\ [{}^{cc}X, {}^{vv}\omega]^\beta \\ [{}^{cc}X, {}^{vv}\omega]^{\bar{\beta}} \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$
[{}^{cc}X, {}^{vv}\omega]^J = ({}^{cc}X)^I \partial_I ({}^{vv}\omega)^J - ({}^{vv}\omega)^I \partial_I ({}^{cc}X)^J
$$

eşitliği yazılır. Burada (4.6) ve (4.11) kullanılarak, $J = b$ için

$$
\begin{aligned}
[{}^{cc}X, {}^{vv}\omega]^b &= ({}^{cc}X)^I \partial_I \underset{0}{({}^{vv}\omega)^b} - ({}^{vv}\omega)^I \partial_I ({}^{cc}X)^b \\
&= -\underbrace{({}^{vv}\omega)^a}_{0} \partial_a ({}^{cc}X)^b - \underbrace{({}^{vv}\omega)^\alpha}_{0} \partial_\alpha ({}^{cc}X)^b - ({}^{vv}\omega)^{\bar{\alpha}} \partial_{\bar{\alpha}} \underbrace{({}^{cc}X)^b}_{X^b}
\end{aligned}
$$

$$= -({}^{vv}\omega)^{\overline{\alpha}}\, \underbrace{\partial_{\overline{\alpha}} X^{b}}_{0}$$

$$= 0\,,$$

$J = \beta$ için

$$[{}^{cc}X, {}^{vv}\omega]^{\beta} = ({}^{cc}X)^{I}\partial_{I}\underbrace{({}^{vv}\omega)^{\beta}}_{0} - ({}^{vv}\omega)^{I}\partial_{I}({}^{cc}X)^{\beta}$$

$$= -\underbrace{({}^{vv}\omega)^{a}}_{0}\partial_{a}({}^{cc}X)^{\beta} - \underbrace{({}^{vv}\omega)^{\alpha}}_{0}\partial_{\alpha}({}^{cc}X)^{\beta} - ({}^{vv}\omega)^{\overline{\alpha}}\partial_{\overline{\alpha}}\underbrace{({}^{cc}X)^{\beta}}_{X^{\beta}}$$

$$= -({}^{vv}\omega)^{\overline{\alpha}}\, \underbrace{\partial_{\overline{\alpha}} X^{\beta}}_{0}$$

$$= 0\,,$$

son olarak $J = \overline{\beta}$ için

$$[{}^{cc}X, {}^{vv}\omega]^{\overline{\beta}} = ({}^{cc}X)^{I}\partial_{I}({}^{vv}\omega)^{\overline{\beta}} - ({}^{vv}\omega)^{I}\partial_{I}({}^{cc}X)^{\overline{\beta}}$$

$$= \underbrace{({}^{cc}X)^{a}}_{X^{a}}\underbrace{\partial_{a}\underbrace{({}^{vv}\omega)^{\overline{\beta}}}_{\omega_{\beta}}}_{0} + \underbrace{({}^{cc}X)^{\alpha}}_{X^{\alpha}}\partial_{\alpha}\underbrace{({}^{vv}\omega)^{\overline{\beta}}}_{\omega_{\beta}} + ({}^{cc}X)^{\overline{\alpha}}\underbrace{\partial_{\overline{\alpha}}\underbrace{({}^{vv}\omega)^{\overline{\beta}}}_{\omega_{\beta}}}_{0}$$

$$-\underbrace{({}^{vv}\omega)^{a}}_{0}\partial_{a}({}^{cc}X)^{\overline{\beta}} - \underbrace{({}^{vv}\omega)^{\alpha}}_{0}\partial_{\alpha}({}^{cc}X)^{\overline{\beta}} - \underbrace{({}^{vv}\omega)^{\overline{\alpha}}}_{\omega_{\alpha}}\partial_{\overline{\alpha}}\underbrace{({}^{cc}X)^{\overline{\beta}}}_{-p_{\varepsilon}(\partial_{\beta}X^{\varepsilon})}$$

$$= \underbrace{({}^{cc}X)^{\alpha}}_{X^{\alpha}}\partial_{\alpha}\underbrace{({}^{vv}\omega)^{\overline{\beta}}}_{\omega_{\beta}} - \underbrace{({}^{vv}\omega)^{\overline{\alpha}}}_{\omega_{\alpha}}\partial_{\overline{\alpha}}\underbrace{({}^{cc}X)^{\overline{\beta}}}_{-p_{\varepsilon}(\partial_{\beta}X^{\varepsilon})}$$

$$= X^{\alpha}\partial_{\alpha}\omega_{\beta} + \omega_{\alpha}\underbrace{\partial_{\overline{\alpha}}p_{\varepsilon}}_{\delta^{\alpha}_{\varepsilon}}(\partial_{\beta}X^{\varepsilon})$$

$$= X^{\alpha}\partial_{\alpha}\omega_{\beta} + (\partial_{\beta}X^{\alpha})\omega_{\alpha}$$

$$= (L_{X}\omega)_{\beta}$$

elde edilir. $(x^{b}, x^{\beta}, x^{\overline{\beta}})$ koordinatlarına göre $t^{*}(B_{m})$ üzerindeki $(L_{X}\omega)$ 'nin dikey lifti

$$
{}^{vv}(L_X\omega)=\begin{pmatrix}0\\0\\(L_X\omega)_\beta\end{pmatrix}
$$

şeklindeki bileşenlere sahip olduğundan, $[{}^{cc}X,{}^{vv}\omega]={}^{vv}(L_X\omega)$ eşitliği elde edilir.

(v) Keyfi $X\in\Im_0^1(M_n)$ izdüşümü olan vektör alanı ve $F\in\Im_1^1(B_m)$ için $(x^b,x^\beta,x^{\bar\beta})$ koordinatlarına göre $t^*(B_m)$ üzerinde tanımlı $[{}^{cc}X,\gamma F]$ 'nın bileşenleri $\begin{pmatrix}[{}^{cc}X,\gamma F]^b\\ [{}^{cc}X,\gamma F]^\beta\\ [{}^{cc}X,\gamma F]^{\bar\beta}\end{pmatrix}$ olmak üzere

$$
[{}^{cc}X,\gamma F]^J=({}^{cc}X)^I\partial_I(\gamma F)^J-(\gamma F)^I\partial_I({}^{cc}X)^J
$$

eşitliği yazılır. Burada (4.8) ve (4.11) kullanılarak, $J=b$ için

$$
\begin{aligned}
[{}^{cc}X,\gamma F]^b&=({}^{cc}X)^I\partial_I\underset{0}{(\gamma F)^b}-(\gamma F)^I\partial_I({}^{cc}X)^b\\
&=-\underset{0}{(\gamma F)^a}\,\partial_a({}^{cc}X)^b-\underbrace{(\gamma F)^\alpha}_{0}\partial_\alpha({}^{cc}X)^b-(\gamma F)^{\bar\alpha}\underbrace{\partial_{\bar\alpha}({}^{cc}X)^b}_{0}\\
&=0\,,
\end{aligned}
$$

$J=\beta$ için

$$
\begin{aligned}
[{}^{cc}X,\gamma F]^\beta&=({}^{cc}X)^I\partial_I\underbrace{(\gamma F)^\beta}_{0}-(\gamma F)^I\partial_I\underbrace{({}^{cc}X)^\beta}_{X^\beta}\\
&=-\underset{0}{(\gamma F)^a}\,\partial_aX^\beta-\underbrace{(\gamma F)^\alpha}_{0}\partial_\alpha X^\beta-(\gamma F)^{\bar\alpha}\underset{0}{\partial_{\bar\alpha}X^\beta}\\
&=0\,,
\end{aligned}
$$

son olarak $J=\bar\beta$ için

$$
\begin{aligned}
[{}^{cc}X,\gamma F]^{\overline{\beta}} &= ({}^{cc}X)^{I}\partial_{I}(\gamma F)^{\overline{\beta}} - (\gamma F)^{I}\partial_{I}({}^{cc}X)^{\overline{\beta}} \\
&= ({}^{cc}X)^{a}\partial_{a}(\gamma F)^{\overline{\beta}} + ({}^{cc}X)^{\alpha}\partial_{\alpha}(\gamma F)^{\overline{\beta}} + ({}^{cc}X)^{\overline{\alpha}}\partial_{\overline{\alpha}}(\gamma F)^{\overline{\beta}} \\
&\quad - \underset{0}{(\gamma F)^{a}}\partial_{a}({}^{cc}X)^{\overline{\beta}} - \underbrace{(\gamma F)^{\alpha}}_{0}\partial_{\alpha}({}^{cc}X)^{\overline{\beta}} - (\gamma F)^{\overline{\alpha}}\partial_{\overline{\alpha}}({}^{cc}X)^{\overline{\beta}} \\
&= \underset{0}{X^{a}\partial_{a}p_{\varepsilon}F^{\varepsilon}_{\beta}} + X^{\alpha}\partial_{\alpha}p_{\varepsilon}F^{\varepsilon}_{\beta} - p_{\varepsilon}(\partial_{\alpha}X^{\varepsilon})\underset{\delta^{\alpha}_{\varepsilon}}{\partial_{\overline{\alpha}}p_{\varepsilon}}F^{\varepsilon}_{\beta} + p_{\varepsilon}F^{\varepsilon}_{\alpha}\underset{\delta^{\alpha}_{\varepsilon}}{\partial_{\overline{\alpha}}p_{\varepsilon}}(\partial_{\beta}X^{\varepsilon}) \\
&= X^{\alpha}\partial_{\alpha}p_{\varepsilon}F^{\varepsilon}_{\beta} - p_{\varepsilon}(\partial_{\alpha}X^{\varepsilon})F^{\alpha}_{\beta} + p_{\varepsilon}F^{\varepsilon}_{\alpha}(\partial_{\beta}X^{\alpha}) \\
&= p_{\varepsilon}(X^{\alpha}\partial_{\alpha}F^{\varepsilon}_{\beta} - \partial_{\alpha}X^{\varepsilon}F^{\alpha}_{\beta} + \partial_{\beta}X^{\alpha}F^{\varepsilon}_{\alpha}) \\
&= p_{\varepsilon}(L_{X}F)^{\varepsilon}_{\beta}
\end{aligned}
$$

elde edilir. $(x^{b},x^{\beta},x^{\overline{\beta}})$ koordinatlarına göre $t^{*}(B_{m})$ üzerindeki $\gamma(L_{X}F)$ 'in bileşenleri

$$
\gamma(L_{X}F) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_{\varepsilon}(L_{X}F)^{\varepsilon}_{\beta} \end{pmatrix}
$$

şeklinde olup $[{}^{cc}X,\gamma F] = \gamma(L_{X}F)$ eşitliği bulunur.

(vi) Keyfi $X,Y \in \Im^{1}_{0}(M_{n})$ izdüşümü olan vektör alanları için $(x^{b},x^{\beta},x^{\overline{\beta}})$ koordinatlarına göre $t^{*}(B_{m})$ üzerinde tanımlı $[{}^{cc}X,{}^{cc}Y]$ 'nin bileşenleri $\begin{pmatrix} [{}^{cc}X,{}^{cc}Y]^{b} \\ [{}^{cc}X,{}^{cc}Y]^{\beta} \\ [{}^{cc}X,{}^{cc}Y]^{\overline{\beta}} \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$
[{}^{cc}X,{}^{cc}Y]^{J} = ({}^{cc}X)^{I}\partial_{I}({}^{cc}Y)^{J} - ({}^{cc}Y)^{I}\partial_{I}({}^{cc}X)^{J}
$$

eşitliği yazılır. Burada (4.11) kullanılarak, $J = b$ için

$$[^{cc}X,^{cc}Y]^b = (^{cc}X)^I \partial_I (^{cc}Y)^b - (^{cc}Y)^I \partial_I (^{cc}X)^b$$

$$= (^{cc}X)^a \underbrace{\partial_a (^{cc}Y)^b}_{0} + (^{cc}X)^\alpha \partial_\alpha (^{cc}Y)^b + (^{cc}X)^{\bar{\alpha}} \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}} (^{cc}Y)^b}_{0}$$

$$-(^{cc}Y)^a \underbrace{\partial_a (^{cc}X)^b}_{0} - (^{cc}Y)^\alpha \partial_\alpha (^{cc}X)^b - (^{cc}Y)^{\bar{\alpha}} \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}} (^{cc}X)^b}_{0}$$

$$= (^{cc}X)^\alpha \partial_\alpha (^{cc}Y)^b - (^{cc}Y)^\alpha \partial_\alpha (^{cc}X)^b$$

$$= X^\alpha \partial_\alpha Y^b - Y^\alpha \partial_\alpha X^b$$

$$= [X,Y]^b$$

$J = \beta$ için

$$[^{cc}X,^{cc}Y]^\beta = (^{cc}X)^I \partial_I (^{cc}Y)^\beta - (^{cc}Y)^I \partial_I (^{cc}X)^\beta$$

$$= (^{cc}X)^a \underbrace{\partial_a (^{cc}Y)^\beta}_{0} + (^{cc}X)^\alpha \partial_\alpha (^{cc}Y)^\beta + (^{cc}X)^{\bar{\alpha}} \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}} (^{cc}Y)^\beta}_{0}$$

$$-(^{cc}Y)^a \underbrace{\partial_a (^{cc}X)^\beta}_{0} - (^{cc}Y)^\alpha \partial_\alpha (^{cc}X)^\beta - (^{cc}Y)^{\bar{\alpha}} \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}} (^{cc}X)^\beta}_{0}$$

$$= (^{cc}X)^\alpha \partial_\alpha (^{cc}Y)^\beta - (^{cc}Y)^\alpha \partial_\alpha (^{cc}X)^\beta$$

$$= X^\alpha \partial_\alpha Y^\beta - Y^\alpha \partial_\alpha X^\beta$$

$$= [X,Y]^\beta$$

son olarak $J = \overline{\beta}$ için

$$[^{cc}X,^{cc}Y]^{\bar{\beta}} = (^{cc}X)^I \partial_I (^{cc}Y)^{\bar{\beta}} - (^{cc}Y)^I \partial_I (^{cc}X)^{\bar{\beta}}$$

$$= (^{cc}X)^a \partial_a (^{cc}Y)^{\bar{\beta}} + (^{cc}X)^\alpha \partial_\alpha (^{cc}Y)^{\bar{\beta}} + (^{cc}X)^{\bar{\alpha}} \partial_{\bar{\alpha}} (^{cc}Y)^{\bar{\beta}}$$

$$-(^{cc}Y)^a \partial_a (^{cc}X)^{\bar{\beta}} - (^{cc}Y)^\alpha \partial_\alpha (^{cc}X)^{\bar{\beta}} - (^{cc}Y)^{\bar{\alpha}} \partial_{\bar{\alpha}} (^{cc}X)^{\bar{\beta}}$$

$$= -(^{cc}X)^a \underbrace{\partial_a p_\varepsilon}_{0} (\partial_\beta Y^\varepsilon) - (^{cc}X)^\alpha \partial_\alpha p_\varepsilon (\partial_\beta Y^\varepsilon) - (^{cc}X)^{\bar{\alpha}} \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}} p_\varepsilon}_{\delta_\varepsilon^\alpha} (\partial_\beta Y^\varepsilon)$$

$$+(^{cc}Y)^a \underbrace{\partial_a p_\varepsilon}_{0} (\partial_\beta X^\varepsilon) + (^{cc}Y)^\alpha \partial_\alpha p_\varepsilon (\partial_\beta X^\varepsilon) + (^{cc}Y)^{\bar{\alpha}} \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}} p_\varepsilon}_{\delta_\varepsilon^\alpha} (\partial_\beta X^\varepsilon)$$

$$=-({}^{cc}X)^{\alpha}\partial_{\alpha}p_{\varepsilon}(\partial_{\beta}Y^{\varepsilon})-({}^{cc}X)^{\bar{\alpha}}(\partial_{\beta}Y^{\alpha})+({}^{cc}Y)^{\alpha}\partial_{\alpha}p_{\varepsilon}(\partial_{\beta}X^{\varepsilon})+({}^{cc}Y)^{\bar{\alpha}}(\partial_{\beta}X^{\alpha})$$

$$=-X^{\alpha}\partial_{\alpha}p_{\varepsilon}(\partial_{\beta}Y^{\varepsilon})+p_{\varepsilon}\partial_{\alpha}X^{\varepsilon}(\partial_{\beta}Y^{\alpha})+Y^{\alpha}\partial_{\alpha}p_{\varepsilon}(\partial_{\beta}X^{\varepsilon})-p_{\varepsilon}\partial_{\alpha}Y^{\varepsilon}(\partial_{\beta}X^{\alpha})$$

$$=p_{\varepsilon}(-X^{\alpha}\partial_{\alpha}\partial_{\beta}Y^{\varepsilon}+\partial_{\beta}Y^{\alpha}\partial_{\alpha}X^{\varepsilon}+Y^{\alpha}\partial_{\alpha}\partial_{\beta}X^{\varepsilon}-\partial_{\beta}X^{\alpha}\partial_{\alpha}Y^{\varepsilon})$$

$$=-p_{\varepsilon}(\partial_{\beta}\underbrace{(X^{\alpha}\partial_{\alpha}Y^{\varepsilon}-Y^{\alpha}\partial_{\alpha}X^{\varepsilon})}_{[X,Y]^{\varepsilon}})$$

$$=-p_{\varepsilon}(\partial_{\beta}[X,Y]^{\varepsilon})$$

elde edilir. $(x^{b},x^{\beta},x^{\bar{\beta}})$ koordinatlarına göre $t^{*}(B_m)$ üzerindeki ${}^{cc}[X,Y]$ ’nin bileşenleri

$${}^{cc}[X,Y]^{J}=\begin{pmatrix}[X,Y]^{b}\\ [X,Y]^{\beta}\\ -p_{\varepsilon}(\partial_{\beta}[X,Y]^{\varepsilon})\end{pmatrix}$$

şeklinde olup $[{}^{cc}X,{}^{cc}Y]={}^{cc}[X,Y]$ eşitliği gösterilmiş olur.

Teorem 4.1.4.4: X , M_n üzerinde izdüşümü olan vektör alanı olsun. S_X , B_m ’de keyfi $Z\in\Im_0^1(B_m)$ için $S_X(Z)=S(X,Z)$ eşitliğini sağlayan (1,1) tipli bir tensör alanı olmak üzere eğer $\omega\in\Im_1^0(B_m)$, $F\in\Im_1^1(B_m)$ ve $S,T\in\Im_2^1(B_m)$ ise

(i) $(\gamma S)^{cc}X=\gamma(S_X)$,

(ii) $(\gamma S)({}^{vv}\omega)=0$,

(iii) $(\gamma S)(\gamma F)=0$,

(iv) $(\gamma S)(\gamma T)=0$

eşitlikleri elde edilir (Yıldırım and Salimov 2014b).

İspat: (i) Burada (4.9) ve (4.11) kullanılarak

$$(\gamma S)^{cc}X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_\sigma S^{\sigma}_{\beta\alpha} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^{a} \\ X^{\alpha} \\ -p_\varepsilon(\partial_\alpha X^{\varepsilon}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_\sigma S^{\sigma}_{\beta\alpha} X^{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_\sigma (S_X)^{\sigma}_{\beta} \end{pmatrix}$$

$$= \gamma(S_X)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$(\gamma S)({}^{vv}\omega) = 0\,,\ (\gamma S)(\gamma F) = 0\,,\ (\gamma S)(\gamma T) = 0$$

eşitlikleri bulunur.

Teorem 4.1.4.5: $X \in \Im^1_0(B_m)$ ve $Y \in \Im^1_0(B_m)$ izdüşümler olmak üzere $X, Y \in \Im^1_0(M_n)$ izdüşümü olan vektör alanları olsun. Keyfi $\omega, \theta \in \Im^0_1(B_m)$; $F, G \in \Im^1_1(B_m)$ ve $R \in \Im^1_3(B_m)$ için

(i) $(\gamma R)({}^{cc}X, {}^{cc}Y) = \gamma(R(X,Y)),$

(ii) $(\gamma R)({}^{vv}\omega, {}^{vv}\theta) = 0,$

(iii) $(\gamma R)({}^{vv}\omega, {}^{cc}Y) = 0,$

(iv) $(\gamma R)({}^{vv}\omega, \gamma G) = 0,$

(v) $(\gamma R)({}^{cc}X, \gamma G) = 0,$

(vi) $(\gamma R)(\gamma F, \gamma G) = 0$

eşitlikleri elde edilir (Yıldırım and Salimov 2014b).

İspat: (i) Keyfi $X,Y \in \Im_0^1(M_n)$ izdüşümü olan vektör alanları ve $R \in \Im_3^1(B_m)$ için $(x^c, x^\theta, x^{\overline{\theta}})$ koordinatlarına göre $t^*(B_m)$ üzerinde tanımlı $[(\gamma R)({}^{cc}X, {}^{cc}Y)]$ 'nin bileşenleri $\begin{pmatrix} [(\gamma R)({}^{cc}X, {}^{cc}Y)]^c \\ [(\gamma R)({}^{cc}X, {}^{cc}Y)]^\theta \\ [(\gamma R)({}^{cc}X, {}^{cc}Y)]^{\overline{\theta}} \end{pmatrix}$ olmak üzere, (4.10) ve (4.11) kullanılarak $H = c$ için

$$\begin{aligned}[(\gamma R)({}^{cc}X, {}^{cc}Y)]^c &= \underbrace{(\overline{R}_{\alpha\beta}{}^{c})}_{0}\,{}^{cc}X^{\alpha}\,{}^{cc}Y^{\beta} \\ &= 0\,,\end{aligned}$$

$H = \theta$ için

$$\begin{aligned}[(\gamma R)({}^{cc}X, {}^{cc}Y)]^\theta &= \underbrace{(\overline{R}_{\alpha\beta}{}^{\theta})}_{0}\,{}^{cc}X^{\alpha}\,{}^{cc}Y^{\beta} \\ &= 0\,,\end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak $H = \overline{\theta}$ için

$$\begin{aligned}[(\gamma R)({}^{cc}X, {}^{cc}Y)]^{\overline{\theta}} &= (\overline{R}_{\alpha\beta}{}^{\overline{\theta}})\,\underbrace{{}^{cc}X^{\alpha}}_{X^\alpha}\,\underbrace{{}^{cc}Y^{\beta}}_{Y^\beta} \\ &= p_\varepsilon R_{\alpha\beta\theta}{}^{\varepsilon} X^\alpha Y^\beta \\ &= p_\varepsilon (R(X,Y))_\theta^\varepsilon\end{aligned}$$

bulunur. $(x^c, x^\theta, x^{\overline{\theta}})$ koordinatlarına göre $t^*(B_m)$ üzerindeki $\gamma(R(X,Y))$ 'nin bileşenleri

$$\gamma(R(X,Y)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_\varepsilon (R(X,Y))_\theta^\varepsilon \end{pmatrix}$$

şeklinde olup $(\gamma R)({}^{cc}X, {}^{cc}Y) = \gamma(R(X,Y))$ elde edilir. Benzer şekilde Teorem 4.1.4.5' deki diğer eşitlikler kolaylıkla bulunabilir.

4.1.5. Afinor alanlarının tam lifti

$F \in \Im_1^1(M_n)$, $F = F_\beta^\alpha(x^\alpha)\partial_\alpha \otimes dx^\beta$ izdüşümü ile verilen afinor alanı olsun. Yani, (x^a, x^α) koordinatlarına göre F 'in bileşenleri

$$F = (F_j^i) = \begin{pmatrix} F_b^a(x^a, x^\alpha) & F_\beta^a(x^a, x^\alpha) \\ 0 & F_\beta^\alpha(x^\alpha) \end{pmatrix}$$

şeklindedir (Vishnevskii 2002). F izdüşümü olan afinor alanının $t^*(B_m)$ yarı-kotanjant demetine tam lifti indirgenmiş koordinatlara göre

$$ {}^{cc}F = ({}^{cc}F_J^I) = \begin{pmatrix} F_b^a & F_\beta^a & 0 \\ 0 & F_\beta^\alpha & 0 \\ 0 & p_\sigma(\partial_\beta F_\alpha^\sigma - \partial_\alpha F_\beta^\sigma) & F_\alpha^\beta \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

bileşenlerine sahiptir. Burada (4.3)'den ${}^{cc}F$ matrisinin bileşenlerini ${}^{cc}F_{J'}^{I'} = A_I^{I'} A_{J'}^J \, {}^{cc}F_J^I$ eşitliğinde yerine koyarak bu eşitliğin sağlandığını görürüz (Yıldırım and Salimov 2014b).

İspat: Gerçekten de ${}^{cc}F_{\beta'}^{\bar{\alpha}'}$ bileşeni

$$\begin{aligned} {}^{cc}F_{\beta'}^{\bar{\alpha}'} &= A_\alpha^{\bar{\alpha}'} A_{\beta'}^\beta \, {}^{cc}F_\beta^\alpha + A_{\bar{\alpha}}^{\bar{\alpha}'} A_{\beta'}^\beta \, {}^{cc}F_\beta^{\bar{\alpha}} + A_{\bar{\alpha}}^{\bar{\alpha}'} A_{\beta'}^{\bar{\beta}} \, {}^{cc}F_{\bar{\beta}}^{\bar{\alpha}} \\ &= p_\varepsilon A_\alpha^\gamma A_{\gamma\alpha'}^\varepsilon A_{\beta'}^\beta F_\beta^\alpha + A_{\alpha'}^\alpha A_{\beta'}^\beta p_\sigma(\partial_\beta F_\alpha^\sigma - \partial_\alpha F_\beta^\sigma) + A_{\alpha'}^\alpha (p_{\varepsilon'} A_{\beta'}^\theta A_{\theta\ \beta}^{\varepsilon'}) F_\alpha^\beta \\ &= -p_\varepsilon(\partial_\gamma A_\alpha^\gamma) A_{\alpha'}^\varepsilon A_{\beta'}^\beta F_\beta^\alpha + p_\sigma A_{\alpha'}^\alpha A_{\beta'}^\beta (\partial_\beta F_\alpha^\sigma) - p_\sigma A_{\alpha'}^\alpha A_{\beta'}^\beta \partial_\alpha F_\beta^\sigma + p_{\varepsilon'} A_{\beta'}^\theta A_{\theta\ \beta}^{\varepsilon'} F_{\alpha'}^\beta \end{aligned}$$

$$=-p_{\varepsilon}(\partial_{\gamma}A_{\alpha}^{\gamma})A_{\alpha'}^{\varepsilon}F_{\beta'}^{\alpha}+p_{\sigma}A_{\alpha'}^{\alpha}\partial_{\beta'}F_{\alpha}^{\sigma}-p_{\sigma}A_{\beta'}^{\beta}A_{\alpha'}^{\alpha}\partial_{\alpha}F_{\beta}^{\sigma}-p_{\varepsilon'}(\partial_{\beta}A_{\beta'}^{\theta})A_{\theta}^{\varepsilon'}F_{\alpha'}^{\beta}$$

$$=-p_{\alpha'}(\partial_{\gamma}A_{\alpha}^{\gamma})F_{\beta'}^{\alpha}+p_{\sigma}\partial_{\beta'}F_{\alpha'}^{\sigma}-p_{\sigma}A_{\beta'}^{\beta}\partial_{\alpha'}F_{\beta}^{\sigma}-p_{\theta}(\partial_{\beta}A_{\beta'}^{\theta})F_{\alpha'}^{\beta}$$

$$=-p_{\alpha'}\partial_{\alpha}F_{\beta'}^{\alpha}+p_{\sigma}\partial_{\beta'}F_{\alpha'}^{\sigma}-p_{\sigma}\partial_{\alpha'}F_{\beta'}^{\sigma}-p_{\alpha'}A_{\theta}^{\alpha'}A_{\beta}^{\alpha}A_{\beta'}^{\alpha'}A_{\alpha}^{\beta}A_{\alpha'}^{\beta'}(\partial_{\beta}A_{\beta'}^{\theta})F_{\alpha'}^{\beta}$$

$$=-p_{\alpha'}\partial_{\alpha}F_{\beta'}^{\alpha}+p_{\sigma}(\partial_{\beta'}F_{\alpha'}^{\sigma}-\partial_{\alpha'}F_{\beta'}^{\sigma})-p_{\alpha'}A_{\theta}^{\alpha'}A_{\alpha}^{\beta}A_{\alpha'}^{\beta'}(\partial_{\beta}A_{\beta'}^{\theta})F_{\beta'}^{\alpha}$$

$$=-p_{\alpha'}\partial_{\alpha}F_{\beta'}^{\alpha}+p_{\sigma'}(\partial_{\beta'}F_{\alpha'}^{\sigma'}-\partial_{\alpha'}F_{\beta'}^{\sigma'})+p_{\alpha'}A_{\theta}^{\alpha'}A_{\beta'}^{\theta}A_{\alpha'}^{\beta'}(\partial_{\beta}A_{\alpha}^{\beta})F_{\beta'}^{\alpha}$$

$$=-p_{\alpha'}\partial_{\alpha}F_{\beta'}^{\alpha}+p_{\sigma'}(\partial_{\beta'}F_{\alpha'}^{\sigma'}-\partial_{\alpha'}F_{\beta'}^{\sigma'})+p_{\alpha'}A_{\theta}^{\alpha'}A_{\beta'}^{\theta}A_{\alpha'}^{\beta'}\partial_{\alpha}F_{\beta'}^{\alpha}$$

$$=-p_{\alpha'}\partial_{\alpha}F_{\beta'}^{\alpha}+p_{\sigma'}(\partial_{\beta'}F_{\alpha'}^{\sigma'}-\partial_{\alpha'}F_{\beta'}^{\sigma'})+p_{\alpha'}\partial_{\alpha}F_{\beta'}^{\alpha}$$

$$=p_{\sigma'}(\partial_{\beta'}F_{\alpha'}^{\sigma'}-\partial_{\alpha'}F_{\beta'}^{\sigma'})$$

şeklindedir. Böylece ${}^{cc}F_{\beta'}^{\overline{\alpha}'}=p_{\sigma'}(\partial_{\beta'}F_{\alpha'}^{\sigma'}-\partial_{\alpha'}F_{\beta'}^{\sigma'})$ elde edilir. ${}^{cc}F_{J'}^{I'}$ ’nin diğer bileşenleri de benzer yolla bulunabilir.

Teorem 4.1.5.1: $F,G\in\Im_1^1(B_m)$ ve $X\in\Im_0^1(B_m)$ sırasıyla $F,G\in\Im_1^1(M_n)$ ve $X\in\Im_0^1(M_n)$ afinor ve vektör alanlarının izdüşümleri olsun. Keyfi $\omega\in\Im_1^0(B_m)$ için

(i) ${}^{cc}F(\gamma G)=\gamma(G\circ F),$

(ii) ${}^{cc}F\ {}^{cc}X={}^{cc}(FX)+\gamma(L_X F)\,,$

(iii) ${}^{cc}F\ {}^{vv}\omega={}^{vv}(\omega\circ F)$

eşitlikleri elde edilir (Yıldırım and Salimov 2014b).

İspat: (i) $F,G\in\Im_1^1(M_n)$ izdüşümü olan afinor alanları olmak üzere (4.8) ve (4.12) kullanılarak

$${}^{cc}F(\gamma G)=\begin{pmatrix} F_b^a & F_\beta^a & 0\\ 0 & F_\beta^\alpha & 0\\ 0 & p_\sigma(\partial_\beta F_\alpha^\sigma-\partial_\alpha F_\beta^\sigma) & F_\alpha^\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\p_\varepsilon G_\beta^\varepsilon\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_\varepsilon G^\varepsilon_\beta F^\beta_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_\varepsilon (GF)^\varepsilon_\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \gamma(G \circ F)$$

elde edilir.

(ii) F ve X, sırasıyla M_n üzerinde izdüşümü olan afinor ve vektör alanları olsun. (4.11) ve (4.12) kullanılarak

$$^{cc}F \, ^{cc}X = \begin{pmatrix} F^a_b & F^a_\beta & 0 \\ 0 & F^\alpha_\beta & 0 \\ 0 & p_\sigma(\partial_\beta F^\sigma_\alpha - \partial_\alpha F^\sigma_\beta) & F^\beta_\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^b \\ X^\beta \\ -p_\varepsilon(\partial_\beta X^\varepsilon) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} F^a_b X^b + F^a_\beta X^\beta \\ F^\alpha_\beta X^\beta \\ p_\sigma(\partial_\beta F^\sigma_\alpha - \partial_\alpha F^\sigma_\beta) X^\beta - p_\varepsilon(\partial_\beta X^\varepsilon) F^\beta_\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} (FX)^a \\ (FX)^\alpha \\ -p_\sigma \partial_\alpha (FX)^\sigma \end{pmatrix}}_{^{cc}(FX)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \underbrace{p_\sigma(X^\beta \partial_\beta F^\sigma_\alpha + (\partial_\alpha X^\beta) F^\sigma_\beta - (\partial_\beta X^\sigma) F^\beta_\alpha)}_{p_\sigma (L_X F)^\sigma_\alpha} \end{pmatrix}}_{\gamma(L_X F)}$$

$$= {}^{cc}(FX) + \gamma(L_X F)$$

elde edilir.

(iii) $\omega \in \Im^0_1(B_m)$ ve F, M_n üzerinde izdüşümü olan afinor alanı olmak üzere (4.6) ve (4.12) kullanılarak

$$
{}^{cc}F^{\,vv}\omega = \begin{pmatrix} F_b^a & F_\beta^a & 0 \\ 0 & F_\beta^\alpha & 0 \\ 0 & p_\sigma(\partial_\beta F_\alpha^\sigma - \partial_\alpha F_\beta^\sigma) & F_\alpha^\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_\beta \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_\beta F_\alpha^\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (\omega \circ F)_\alpha \end{pmatrix}
$$

$$
= {}^{vv}(\omega \circ F)
$$

elde edilir.

4.1.6. Vektör alanlarının yatay lifti

$X \in \Im_0^1(M_n)$, $X = X^\alpha(x^\alpha)\partial_\alpha$ olmak üzere $X = X^a(x^a, x^\alpha)\partial_a + X^\alpha(x^\alpha)\partial_\alpha$ şeklindeki bir izdüşümü olan vektör alanının (Vishnevskii 2002) $t^*(B_m)$ üzerindeki ${}^{HH}X$ yatay lifti

$$
{}^{HH}X = {}^{cc}X + \gamma(\nabla X) \tag{4.13}
$$

ile tanımlıdır. Burada ∇, diferensiyellenebilir B_m manifoldundaki simetrik afin konneksiyonudur. ${}^{cc}X$ ve $\gamma(\nabla X)$ 'in $t^*(B_m)$ üzerindeki $(x^a, x^\alpha, x^{\overline{\alpha}})$ koordinatlarına göre bileşenleri

$$
{}^{cc}X = \begin{pmatrix} X^a \\ X^\alpha \\ -p_\varepsilon(\partial_\alpha X^\varepsilon) \end{pmatrix}, \quad \gamma(\nabla X) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_\varepsilon(\nabla_\alpha X^\varepsilon) \end{pmatrix}
$$

şeklindedir (Yıldırım 2013). X^ε 'nın $\nabla_\alpha X^\varepsilon$ kovaryant türevi

$$(\nabla_\alpha X^\varepsilon) = \partial_\alpha X^\varepsilon + X^\beta \Gamma_{\beta\ \alpha}^{\ \varepsilon}$$

ile tanımlıdır. X ’nın ${}^{HH}X$ yatay lifti, $t^*(B_m)$ üzerindeki $(x^a, x^\alpha, x^{\overline{\alpha}})$ koordinatlarına göre

$$ {}^{HH}X = \begin{pmatrix} X^a \\ X^\alpha \\ X^\beta \Gamma_{\beta\alpha} \end{pmatrix} \tag{4.14}$$

bileşenlerine sahiptir. Burada

$$\Gamma_{\beta\alpha} = p_\varepsilon \Gamma_{\beta\ \alpha}^{\ \varepsilon} \tag{4.15}$$

şeklindedir (Yıldırım 2013).

Tanım 4.1.2.1’den; $L_X = d \circ \iota_X + \iota_X \circ d$ (Cartan’nın sihirli formülü) ${}^{HH}X$ yatay lifti için kullanıldığında

$$L_{{}^{HH}X} dp = \left(d \circ \iota_{{}^{HH}X}\right) dp + \left(\iota_{{}^{HH}X} \circ d\right) dp = d_{{}^{HH}X}\left(\iota(dp)\right) + \iota_{{}^{HH}X} d^2 p = d\left(\iota_{{}^{HH}X}(dp)\right)$$

elde edilir. Buradan alırız ki, $L_{{}^{HH}X} dp = 0$ şartı dahilinde ${}^{HH}X$ vektör alanı lokal olarak Hamiltonian vektör alanı olduğu elde edilir ve

$${}^{HH}X^A \partial_A \omega_{KL} + \left(\partial_K\, {}^{HH}X^A\right)\omega_{AL} + \left(\partial_L\, {}^{HH}X^A\right)\omega_{KA} = 0$$

şartı sağlanır. (4.14) ve $\omega = dp$ dejenere simplektik yapısının bileşenleri son eşitlikte kullanılarak $\nabla X = 0$ şartı dahilinde $0 = 0$ eşitliği elde edilir.

İspat: Yukarıda yer alan ${}^{HH}X^{A}\partial_{A}\omega_{KL}+\left(\partial_{K}{}^{HH}X^{A}\right)\omega_{AL}+\left(\partial_{L}{}^{HH}X^{A}\right)\omega_{KA}=0$ eşitliğinden

$$\left(\partial_{K}{}^{HH}X^{a}\right)\omega_{aL}+\left(\partial_{K}{}^{HH}X^{\alpha}\right)\omega_{\alpha L}+\left(\partial_{K}{}^{HH}X^{\bar{\alpha}}\right)\omega_{\bar{\alpha}L}+\left(\partial_{L}{}^{HH}X^{a}\right)\omega_{Ka}+\left(\partial_{L}{}^{HH}X^{\alpha}\right)\omega_{K\alpha}+\left(\partial_{L}{}^{HH}X^{\bar{\alpha}}\right)\omega_{K\bar{\alpha}}=0$$

$$\left(\partial_{K}X^{a}\right)\omega_{aL}+\left(\partial_{K}X^{\alpha}\right)\omega_{\alpha L}+\left(\partial_{K}\left(p_{\varepsilon}X^{\beta}\Gamma_{\beta}{}^{\varepsilon}{}_{\alpha}\right)\right)\omega_{\bar{\alpha}L}+\left(\partial_{L}X^{a}\right)\omega_{Ka}+\left(\partial_{L}X^{\alpha}\right)\omega_{K\alpha}+\left(\partial_{L}\left(p_{\varepsilon}X^{\beta}\Gamma_{\beta}{}^{\varepsilon}{}_{\alpha}\right)\right)\omega_{K\bar{\alpha}}=0$$

elde edilir. K 'nın indisleri $K=\left(c,\gamma,\bar{\gamma}\right)$ ve L 'nin indisleri $L=\left(d,\sigma,\bar{\sigma}\right)$ olmak üzere

(i) Buradan $K=c$ ve $L=d$ için

$$0=\left(\partial_{c}X^{a}\right)\underset{0}{\omega_{ad}}+\left(\partial_{c}X^{\alpha}\right)\underset{0}{\omega_{\alpha d}}+\left(\partial_{c}\left(p_{\varepsilon}X^{\beta}\Gamma_{\beta}{}^{\varepsilon}{}_{\alpha}\right)\right)\underset{0}{\omega_{\bar{\alpha}d}}+\left(\partial_{d}X^{a}\right)\underset{0}{\omega_{ca}}+\left(\partial_{d}X^{\alpha}\right)\underset{0}{\omega_{c\alpha}}+\left(\partial_{d}\left(p_{\varepsilon}X^{\beta}\Gamma_{\beta}{}^{\varepsilon}{}_{\alpha}\right)\right)\underset{0}{\omega_{c\bar{\alpha}}}$$

$$0=0,$$

(ii) $K=c$ ve $L=\sigma$ için

$$0=\left(\partial_{c}X^{a}\right)\underset{0}{\omega_{a\sigma}}+\left(\partial_{c}X^{\alpha}\right)\underset{0}{\omega_{\alpha\sigma}}+\left(\partial_{c}\left(p_{\varepsilon}X^{\beta}\Gamma_{\beta}{}^{\varepsilon}{}_{\alpha}\right)\right)\omega_{\bar{\alpha}\sigma}+\left(\partial_{\sigma}X^{a}\right)\underset{0}{\omega_{ca}}+\left(\partial_{\sigma}X^{\alpha}\right)\underset{0}{\omega_{c\alpha}}+\left(\partial_{\sigma}\left(p_{\varepsilon}X^{\beta}\Gamma_{\beta}{}^{\varepsilon}{}_{\alpha}\right)\right)\underset{0}{\omega_{c\bar{\alpha}}}$$

$$0=\left(\underset{0}{\partial_{c}p_{\varepsilon}X^{\beta}\Gamma_{\beta}{}^{\varepsilon}{}_{\alpha}}\right)\delta_{\alpha}^{\sigma}$$

$$0=0,$$

(iii) $K=c$ ve $L=\bar{\sigma}$ için

$$0=\left(\partial_{c}X^{a}\right)\underset{0}{\omega_{a\bar{\sigma}}}+\left(\partial_{c}X^{\alpha}\right)\underset{-\delta_{\sigma}^{\alpha}}{\omega_{\alpha\bar{\sigma}}}+\left(\partial_{c}\left(p_{\varepsilon}X^{\beta}\Gamma_{\beta}{}^{\varepsilon}{}_{\alpha}\right)\right)\underset{0}{\omega_{\bar{\alpha}\bar{\sigma}}}+\left(\partial_{\bar{\sigma}}X^{a}\right)\underset{0}{\omega_{ca}}+\left(\partial_{\bar{\sigma}}X^{\alpha}\right)\underset{0}{\omega_{c\alpha}}+\left(\partial_{\bar{\sigma}}\left(p_{\varepsilon}X^{\beta}\Gamma_{\beta}{}^{\varepsilon}{}_{\alpha}\right)\right)\underset{0}{\omega_{c\bar{\alpha}}}$$

$$0=-\left(\underset{0}{\partial_{c}X^{\alpha}}\right)\delta_{\sigma}^{\alpha}$$

$$0=0,$$

(iv) $K=\gamma$ ve $L=d$ için

$$0=\left(\partial_\gamma X^a\right)\underset{0}{\omega_{ad}}+\left(\partial_\gamma X^\alpha\right)\underset{0}{\omega_{\alpha d}}+\left(\partial_\gamma\left(p_\varepsilon X^\beta\Gamma_{\beta}{}^{\varepsilon}{}_{\alpha}\right)\right)\underset{0}{\omega_{\bar{\alpha}d}}+\left(\partial_d X^a\right)\underset{0}{\omega_{\gamma a}}+\left(\partial_d X^\alpha\right)\underset{0}{\omega_{\gamma\alpha}}+\left(\partial_d\left(p_\varepsilon X^\beta\Gamma_{\beta}{}^{\varepsilon}{}_{\alpha}\right)\right)\underset{-\delta_\alpha^\gamma}{\omega_{\gamma\bar{\alpha}}}$$

$$0=-\left(\underset{0}{\partial_d p_\varepsilon}\, X^\beta\Gamma_{\beta}{}^{\varepsilon}{}_{\alpha}\right)\delta_\alpha^\gamma$$

$$0=0,$$

(v) $K=\gamma$ ve $L=\sigma$ için

$$0=\left(\partial_\gamma X^a\right)\underset{0}{\omega_{a\sigma}}+\left(\partial_\gamma X^\alpha\right)\underset{0}{\omega_{\alpha\sigma}}+\left(\partial_\gamma\left(p_\varepsilon X^\beta\Gamma_{\beta}{}^{\varepsilon}{}_{\alpha}\right)\right)\underset{\delta_\alpha^\sigma}{\omega_{\bar{\alpha}\sigma}}+\left(\partial_\sigma X^a\right)\underset{0}{\omega_{\gamma a}}+\left(\partial_\sigma X^\alpha\right)\underset{0}{\omega_{\gamma\alpha}}+\left(\partial_\sigma\left(p_\varepsilon X^\beta\Gamma_{\beta}{}^{\varepsilon}{}_{\alpha}\right)\right)\underset{-\delta_\alpha^\gamma}{\omega_{\gamma\bar{\alpha}}}$$

$$0=\left(\partial_\gamma\left(p_\varepsilon X^\beta\Gamma_{\beta}{}^{\varepsilon}{}_{\alpha}\right)\right)\delta_\alpha^\sigma-\left(\partial_\sigma\left(p_\varepsilon X^\beta\Gamma_{\beta}{}^{\varepsilon}{}_{\alpha}\right)\right)\delta_\alpha^\gamma$$

$$0=\left(p_\varepsilon\left(\partial_\gamma X^\beta\right)\Gamma_{\beta}{}^{\varepsilon}{}_{\alpha}\right)\delta_\alpha^\sigma+\left(p_\varepsilon X^\theta\partial_\gamma\Gamma_{\theta}{}^{\varepsilon}{}_{\alpha}\right)\delta_\alpha^\sigma-\left(p_\varepsilon\left(\partial_\sigma X^\beta\right)\Gamma_{\beta}{}^{\varepsilon}{}_{\alpha}\right)\delta_\alpha^\gamma-\left(p_\varepsilon\left(X^\theta\partial_\sigma\Gamma_{\theta}{}^{\varepsilon}{}_{\alpha}\right)\right)\delta_\alpha^\gamma$$

$$0=p_\varepsilon\left(\partial_\gamma X^\beta\right)\Gamma_{\beta}{}^{\varepsilon}{}_{\sigma}+p_\varepsilon X^\theta\partial_\gamma\Gamma_{\theta}{}^{\varepsilon}{}_{\sigma}-p_\varepsilon\left(\partial_\sigma X^\beta\right)\Gamma_{\beta}{}^{\varepsilon}{}_{\gamma}-p_\varepsilon X^\theta\partial_\sigma\Gamma_{\theta}{}^{\varepsilon}{}_{\gamma}$$

$$0=p_\varepsilon\left(\partial_\gamma X^\beta\right)\Gamma_{\beta}{}^{\varepsilon}{}_{\sigma}\delta_\gamma^\sigma\delta_\sigma^\gamma+p_\varepsilon X^\theta\partial_\gamma\Gamma_{\theta}{}^{\varepsilon}{}_{\sigma}\delta_\sigma^\gamma\delta_\gamma^\sigma-p_\varepsilon\left(\partial_\sigma X^\beta\right)\Gamma_{\beta}{}^{\varepsilon}{}_{\gamma}-p_\varepsilon X^\theta\partial_\sigma\Gamma_{\theta}{}^{\varepsilon}{}_{\gamma}$$

$$0=p_\varepsilon\left(\partial_\sigma X^\beta\right)\Gamma_{\beta}{}^{\varepsilon}{}_{\gamma}+p_\varepsilon X^\theta\partial_\sigma\Gamma_{\theta}{}^{\varepsilon}{}_{\gamma}-p_\varepsilon\left(\partial_\sigma X^\beta\right)\Gamma_{\beta}{}^{\varepsilon}{}_{\gamma}-p_\varepsilon X^\theta\partial_\sigma\Gamma_{\theta}{}^{\varepsilon}{}_{\gamma}$$

$$0=0,$$

(vi) $K=\gamma$ ve $L=\bar{\sigma}$ için

$$0=\left(\partial_\gamma X^a\right)\underset{0}{\omega_{a\bar{\sigma}}}+\left(\partial_\gamma X^\alpha\right)\underset{-\delta_\sigma^\alpha}{\omega_{\alpha\bar{\sigma}}}+\left(\partial_\gamma\left(p_\varepsilon X^\beta\Gamma_{\beta}{}^{\varepsilon}{}_{\alpha}\right)\right)\underset{0}{\omega_{\bar{\alpha}\bar{\sigma}}}+\left(\partial_{\bar{\sigma}} X^a\right)\underset{0}{\omega_{\gamma a}}+\left(\partial_{\bar{\sigma}} X^\alpha\right)\underset{0}{\omega_{\gamma\alpha}}+\left(\partial_{\bar{\sigma}}\left(p_\varepsilon X^\beta\Gamma_{\beta}{}^{\varepsilon}{}_{\alpha}\right)\right)\underset{-\delta_\alpha^\gamma}{\omega_{\gamma\bar{\alpha}}}$$

$$0=-\left(\partial_\gamma X^\alpha\right)\delta_\sigma^\alpha-\left(\underset{\delta_\varepsilon^\sigma}{\partial_{\bar{\sigma}} p_\varepsilon}\, X^\beta\Gamma_{\beta}{}^{\varepsilon}{}_{\alpha}\right)\delta_\alpha^\gamma$$

$$0=-\left(\partial_\gamma X^\sigma\right)-\left(\delta_\varepsilon^\sigma X^\beta\Gamma_{\beta}{}^{\varepsilon}{}_{\alpha}\right)\delta_\alpha^\gamma$$

$$0=-\left(\partial_\gamma X^\sigma\right)-\left(X^\beta\Gamma_{\beta}{}^{\sigma}{}_{\alpha}\right)\delta_\alpha^\gamma$$

$$0=-\left(\partial_\gamma X^\sigma\right)-\left(X^\beta\Gamma_{\beta}{}^{\sigma}{}_{\gamma}\right)$$

$$0=-\nabla_\gamma X^\sigma$$

$$0=\nabla X\ ,$$

(vii) $K=\bar{\gamma}$ ve $L=d$ için

$$0=\left(\partial_{\bar{\gamma}}X^{a}\right)\underset{0}{\omega_{ad}}+\left(\partial_{\bar{\gamma}}X^{\alpha}\right)\underset{0}{\omega_{\alpha d}}+\left(\partial_{\bar{\gamma}}\left(p_{\varepsilon}X^{\beta}\Gamma_{\beta\ \alpha}^{\ \varepsilon}\right)\right)\underset{0}{\omega_{\bar{\alpha}d}}+\left(\partial_{d}X^{a}\right)\underset{0}{\omega_{\bar{\gamma}a}}+\left(\partial_{d}X^{\alpha}\right)\underset{\delta_{\gamma}^{\alpha}}{\omega_{\bar{\gamma}\alpha}}+\left(\partial_{d}\left(p_{\varepsilon}X^{\beta}\Gamma_{\beta\ \alpha}^{\ \varepsilon}\right)\right)\underset{0}{\omega_{\bar{\gamma}\bar{\alpha}}}$$

$$0=\left(\underset{0}{\partial_{d}X^{\alpha}}\right)\delta_{\gamma}^{\alpha}$$

$$0=0\,,$$

(viii) $K=\bar{\gamma}$ ve $L=\sigma$ için

$$0=\left(\partial_{\bar{\gamma}}X^{a}\right)\underset{0}{\omega_{a\sigma}}+\left(\partial_{\bar{\gamma}}X^{\alpha}\right)\underset{0}{\omega_{\alpha\sigma}}+\left(\partial_{\bar{\gamma}}\left(p_{\varepsilon}X^{\beta}\Gamma_{\beta\ \alpha}^{\ \varepsilon}\right)\right)\underset{\delta_{\alpha}^{\sigma}}{\omega_{\bar{\alpha}\sigma}}+\left(\partial_{\sigma}X^{a}\right)\underset{0}{\omega_{\bar{\gamma}a}}+\left(\partial_{\sigma}X^{\alpha}\right)\underset{\delta_{\gamma}^{\alpha}}{\omega_{\bar{\gamma}\alpha}}+\left(\partial_{\sigma}\left(p_{\varepsilon}X^{\beta}\Gamma_{\beta\ \alpha}^{\ \varepsilon}\right)\right)\underset{0}{\omega_{\bar{\gamma}\bar{\alpha}}}$$

$$0=\left(\underset{\delta_{\varepsilon}^{\gamma}}{\partial_{\bar{\gamma}}p_{\varepsilon}}X^{\beta}\Gamma_{\beta\ \alpha}^{\ \varepsilon}\right)\delta_{\alpha}^{\sigma}+\left(\partial_{\sigma}X^{\alpha}\right)\delta_{\gamma}^{\alpha}$$

$$0=\left(\delta_{\varepsilon}^{\gamma}X^{\beta}\Gamma_{\beta\ \alpha}^{\ \varepsilon}\right)\delta_{\alpha}^{\sigma}+\partial_{\sigma}X^{\gamma}$$

$$0=\left(X^{\beta}\Gamma_{\beta\ \alpha}^{\ \gamma}\right)\delta_{\alpha}^{\sigma}+\partial_{\sigma}X^{\gamma}$$

$$0=X^{\beta}\Gamma_{\beta\ \sigma}^{\ \gamma}+\partial_{\sigma}X^{\gamma}$$

$$0=\nabla_{\sigma}X^{\gamma}$$

$$0=\nabla X\,,$$

(ix) $K=\bar{\gamma}$ ve $L=\bar{\sigma}$ için

$$0=\left(\partial_{\bar{\gamma}}X^{a}\right)\underset{0}{\omega_{a\bar{\sigma}}}+\left(\partial_{\bar{\gamma}}X^{\alpha}\right)\underset{-\delta_{\sigma}^{\alpha}}{\omega_{\alpha\bar{\sigma}}}+\left(\partial_{\bar{\gamma}}\left(p_{\varepsilon}X^{\beta}\Gamma_{\beta\ \alpha}^{\ \varepsilon}\right)\right)\underset{0}{\omega_{\bar{\alpha}\bar{\sigma}}}+\left(\partial_{\bar{\sigma}}X^{a}\right)\underset{0}{\omega_{\bar{\gamma}a}}+\left(\partial_{\bar{\sigma}}X^{\alpha}\right)\underset{\delta_{\gamma}^{\alpha}}{\omega_{\bar{\gamma}\alpha}}+\left(\partial_{\bar{\sigma}}\left(p_{\varepsilon}X^{\beta}\Gamma_{\beta\ \alpha}^{\ \varepsilon}\right)\right)\underset{0}{\omega_{\bar{\gamma}\bar{\alpha}}}$$

$$0=-\left(\partial_{\bar{\gamma}}X^{\alpha}\right)\delta_{\sigma}^{\alpha}+\left(\partial_{\bar{\sigma}}X^{\alpha}\right)\delta_{\gamma}^{\alpha}$$

$$0=-\left(\underset{0}{\partial_{\bar{\gamma}}X^{\sigma}}\right)+\left(\underset{0}{\partial_{\bar{\sigma}}X^{\gamma}}\right)$$

$$0 = 0.$$

Buradan aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 4.1.6.1: $\omega = dp$ dejenere simplektik yapısıyla birlikte, X izdüşümü olan vektör alanının yarı-kotanjant demete ${}^{HH}X$ yatay lifti $\nabla X = 0$ şartı dahilinde Hamiltoniandır. Burada yer alan ∇X; (1,1) tipli bir tensör alanı olup $\left(\nabla X\right)^i_j = \left(\nabla_j X\right)^i = \left(\nabla_j X^i\right)$ şeklindedir (Yıldırım 2013).

Teorem 4.1.6.2: B_m üzerindeki X ve Z izdüşümleri ile $X, Z \in \Im^1_0\left(M_n\right)$ izdüşümü olan vektör alanları olsun. Keyfi $f \in \Im^0_0\left(B_m\right)$ için

(i) ${}^{HH}X({}^{vv}f) = {}^{vv}(Xf),$

(ii) ${}^{HH}X(\gamma Z) = \gamma(\nabla_X Z)$

eşitlikleri geçerlidir (Yıldırım 2013).

İspat: (i) Keyfi $X \in \Im^1_0\left(M_n\right)$ izdüşümü olan vektör alanı ve $f \in \Im^0_0\left(B_m\right)$ için (4.5) ve (4.14)'den

$$\begin{aligned}
{}^{HH}X({}^{vv}f) &= {}^{HH}X^{I}\partial_I({}^{vv}f) \\
&= {}^{HH}X^{a}\underset{0}{\partial_a f} + {}^{HH}X^{\alpha}\partial_\alpha f + {}^{HH}X^{\bar{\alpha}}\underset{0}{\partial_{\bar{\alpha}} f} \\
&= X^{\alpha}\partial_\alpha f \\
&= {}^{vv}(Xf)
\end{aligned}$$

elde edilir.

(ii) M_n üzerinde X ve Z izdüşümü olan vektör alanları için (4.7) ve (4.14) kullanılarak

$$\begin{aligned}
{}^{HH}X(\gamma Z) &= {}^{HH}X^{I}\partial_I(\gamma Z) \\
&= \underbrace{{}^{HH}X^{a}}_{0}\partial_a(p_\varepsilon Z^\varepsilon) + {}^{HH}X^{\alpha}\partial_\alpha(p_\varepsilon Z^\varepsilon) + {}^{HH}X^{\bar{\alpha}}\underbrace{\partial_{\bar{\alpha}}(p_\varepsilon Z^\varepsilon)}_{\delta^\alpha_\varepsilon} \\
&= X^\alpha\partial_\alpha(p_\varepsilon Z^\varepsilon) + p_\varepsilon(X^\beta\Gamma_{\beta}{}^{\varepsilon}{}_{\alpha})Z^\alpha \\
&= p_\varepsilon \underbrace{X^\alpha(\partial_\alpha Z^\varepsilon + \Gamma_{\alpha}{}^{\varepsilon}{}_{\beta}Z^\beta)}_{(\nabla_X Z)^\varepsilon} \\
&= p_\varepsilon(\nabla_X Z)^\varepsilon \\
&= \gamma(\nabla_X Z)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.1.6.3: $X \in \Im^1_0(B_m)$ ve $Y \in \Im^1_0(B_m)$ izdüşümler olmak üzere $X, Y \in \Im^1_0(M_n)$ izdüşümü olan vektör alanları olsun. Keyfi $\omega \in \Im^0_1(B_m)$ ve $F \in \Im^1_1(B_m)$ için

(i) $[{}^{HH}X, {}^{vv}\omega] = {}^{vv}(\nabla_X\omega)$,

(ii) $[{}^{HH}X, \gamma F] = \gamma(\nabla_X F)$,

(iii) $[{}^{HH}X, {}^{HH}Y] = {}^{HH}[X,Y] + \gamma R(X,Y)$,

(iv) $[{}^{cc}X, {}^{HH}Y] = {}^{HH}[X,Y] + \gamma(L_X\nabla)_Y$

eşitlikleri elde edilir. Burada R, ∇ 'nın eğrilik tensörü olup ∇ konneksiyonu üzerindeki Lie türevi $(L_X\nabla)_Y = \nabla_Y\nabla X + R(X,Y)$ ile tanımlıdır (Yıldırım 2013).

İspat: (i) Keyfi $X \in \Im_0^1(M_n)$ izdüşümü olan vektör alanı ve $\omega \in \Im_1^0(B_m)$ için $(x^b, x^\beta, x^{\bar\beta})$ koordinatlarına göre $t^*(B_m)$ üzerinde tanımlı $[{}^{HH}X, {}^{vv}\omega]$ ’nın bileşenleri $\begin{pmatrix} [{}^{HH}X, {}^{vv}\omega]^b \\ [{}^{HH}X, {}^{vv}\omega]^\beta \\ [{}^{HH}X, {}^{vv}\omega]^{\bar\beta} \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
[{}^{HH}X, {}^{vv}\omega]^J &= {}^{HH}X^I \partial_I {}^{vv}\omega^J - {}^{vv}\omega^I \partial_I {}^{HH}X^J \\
&= {}^{HH}X^a \partial_a {}^{vv}\omega^J + {}^{HH}X^\alpha \partial_\alpha {}^{vv}\omega^J + {}^{HH}X^{\bar\alpha} \partial_{\bar\alpha} {}^{vv}\omega^J \\
&\quad - {}^{vv}\underset{0}{\omega^a \partial_a} {}^{HH}X^J - {}^{vv}\underset{0}{\omega^\alpha \partial_\alpha} {}^{HH}X^J - {}^{vv}\omega^{\bar\alpha} \partial_{\bar\alpha} {}^{HH}X^J \\
&= X^a \partial_a {}^{vv}\omega^J + X^\alpha \partial_\alpha {}^{vv}\omega^J + p_\varepsilon X^\beta \Gamma_\beta{}^\varepsilon{}_\alpha \partial_{\bar\alpha} {}^{vv}\omega^J - \omega_\alpha \partial_{\bar\alpha} {}^{HH}X^J
\end{aligned}
$$

eşitliği yazılır. Burada (4.6) ve (4.14) kullanılarak, $J = b$ için

$$
\begin{aligned}
[{}^{HH}X, {}^{vv}\omega]^b &= {}^{HH}X^I \partial_I {}^{vv}\omega^b - {}^{vv}\omega^I \partial_I {}^{HH}X^b \\
&= X^a \underset{0}{\partial_a {}^{vv}\omega^b} + X^\alpha \underset{0}{\partial_\alpha {}^{vv}\omega^b} + p_\varepsilon X^\beta \Gamma_\beta{}^\varepsilon{}_\alpha \underset{0}{\partial_{\bar\alpha} {}^{vv}\omega^b} - \omega_\alpha \partial_{\bar\alpha} {}^{HH}X^b \\
&= -\omega_\alpha \underset{0}{\partial_{\bar\alpha} X^b} \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

$J = \beta$ için

$$
\begin{aligned}
[{}^{HH}X, {}^{vv}\omega]^\beta &= {}^{HH}X^I \partial_I {}^{vv}\omega^\beta - {}^{vv}\omega^I \partial_I {}^{HH}X^\beta \\
&= X^a \underset{0}{\partial_a {}^{vv}\omega^\beta} + X^\alpha \underset{0}{\partial_\alpha {}^{vv}\omega^\beta} + p_\varepsilon X^\beta \Gamma_\beta{}^\varepsilon{}_\alpha \underset{0}{\partial_{\bar\alpha} {}^{vv}\omega^\beta} - \omega_\alpha \partial_{\bar\alpha} {}^{HH}X^\beta \\
&= -\omega_\alpha \underset{0}{\partial_{\bar\alpha} X^\beta} \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

son olarak $J=\overline{\beta}$ için

$$
\begin{aligned}
[{}^{HH}X, {}^{vv}\omega]^{\overline{\beta}} &= {}^{HH}X^{I}\partial_{I}{}^{vv}\omega^{\overline{\beta}} - {}^{vv}\omega^{I}\partial_{I}{}^{HH}X^{\overline{\beta}} \\
&= X^{a}\partial_{a}{}^{vv}\omega^{\overline{\beta}} + X^{\alpha}\partial_{\alpha}{}^{vv}\omega^{\overline{\beta}} + p_{\varepsilon}X^{\beta}\Gamma_{\beta}{}^{\varepsilon}{}_{\alpha}\partial_{\overline{\alpha}}{}^{vv}\omega^{\overline{\beta}} - \omega_{\alpha}\partial_{\overline{\alpha}}{}^{HH}X^{\overline{\beta}} \\
&= X^{a}\underbrace{\partial_{a}\omega_{\beta}}_{0} + X^{\alpha}\partial_{\alpha}\omega_{\beta} + p_{\varepsilon}X^{\beta}\Gamma_{\beta}{}^{\varepsilon}{}_{\alpha}\underbrace{\partial_{\overline{\alpha}}\omega_{\beta}}_{0} - \omega_{\alpha}\underbrace{\partial_{\overline{\alpha}}p_{\varepsilon}}_{\delta_{\varepsilon}^{\alpha}}X^{\alpha}\Gamma_{\alpha}{}^{\varepsilon}{}_{\beta} \\
&= X^{\alpha}\partial_{\alpha}\omega_{\beta} - \omega_{\varepsilon}X^{\alpha}\Gamma_{\alpha}{}^{\varepsilon}{}_{\beta} \\
&= X^{\alpha}(\partial_{\alpha}\omega_{\beta} - \Gamma_{\alpha}{}^{\varepsilon}{}_{\beta}\omega_{\varepsilon}) \\
&= (\nabla_{X}\omega)_{\beta}
\end{aligned}
$$

elde edilir. $(x^{b}, x^{\beta}, x^{\overline{\beta}})$ koordinatlarına göre $t^{*}(B_{m})$ üzerindeki $(\nabla_{X}\omega)$ 'nin dikey lifti

$$
{}^{vv}(\nabla_{X}\omega) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (\nabla_{X}\omega)_{\beta} \end{pmatrix}
$$

şeklindeki bileşenlere sahip olduğundan, $[{}^{HH}X, {}^{vv}\omega] = {}^{vv}(\nabla_{X}\omega)$ eşitliği elde edilir.

(ii) Keyfi $X \in \Im_{0}^{1}(M_{n})$ izdüşümü olan vektör alanı ve $F \in \Im_{1}^{1}(B_{m})$ için $(x^{b}, x^{\beta}, x^{\overline{\beta}})$ koordinatlarına göre $t^{*}(B_{m})$ üzerinde tanımlı $[{}^{HH}X, \gamma F]$ 'nın bileşenleri $\begin{pmatrix} [{}^{HH}X, \gamma F]^{b} \\ [{}^{HH}X, \gamma F]^{\beta} \\ [{}^{HH}X, \gamma F]^{\overline{\beta}} \end{pmatrix}$

olmak üzere

$$
\begin{aligned}
[{}^{HH}X, \gamma F]^{J} &= {}^{HH}X^{I}\partial_{I}(\gamma F)^{J} - (\gamma F)^{I}\partial_{I}{}^{HH}X^{J} \\
&= {}^{HH}X^{a}\partial_{a}(\gamma F)^{J} + {}^{HH}X^{\alpha}\partial_{\alpha}(\gamma F)^{J} + {}^{HH}X^{\overline{\alpha}}\partial_{\overline{\alpha}}(\gamma F)^{J}
\end{aligned}
$$

$$-\underset{0}{(\gamma F)^{a}}\,\partial_a\,{}^{HH}X^{J}-\underbrace{(\gamma F)^{\alpha}}_{0}\partial_\alpha\,{}^{HH}X^{J}-(\gamma F)^{\bar\alpha}\partial_{\bar\alpha}\,{}^{HH}X^{J}$$

$$=X^{a}\partial_a(\gamma F)^{J}+X^{\alpha}\partial_\alpha(\gamma F)^{J}+p_\varepsilon X^{\beta}\Gamma_{\beta}{}^{\varepsilon}{}_{\alpha}\partial_{\bar\alpha}(\gamma F)^{J}-p_\varepsilon F_\alpha^\varepsilon\partial_{\bar\alpha}\,{}^{HH}X^{J}$$

eşitliği yazılır. Burada (4.8) ve (4.14) kullanılarak, $J=b$ için

$$[{}^{HH}X,\gamma F]^{b}={}^{HH}X^{I}\partial_I(\gamma F)^{b}-(\gamma F)^{I}\partial_I\,{}^{HH}X^{b}$$

$$=X^{a}\partial_a\underset{0}{(\gamma F)^{b}}+X^{\alpha}\partial_\alpha\underset{0}{(\gamma F)^{b}}+p_\varepsilon X^{\beta}\Gamma_{\beta}{}^{\varepsilon}{}_{\alpha}\partial_{\bar\alpha}\underset{0}{(\gamma F)^{b}}-p_\varepsilon F_\alpha^\varepsilon\underset{0}{\partial_{\bar\alpha}X^{b}}$$

$$=0\,,$$

$J=\beta$ için

$$[{}^{HH}X,\gamma F]^{\beta}={}^{HH}X^{I}\partial_I(\gamma F)^{\beta}-(\gamma F)^{I}\partial_I\,{}^{HH}X^{\beta}$$

$$=X^{a}\partial_a\underbrace{(\gamma F)^{\beta}}_{0}+X^{\alpha}\partial_\alpha\underbrace{(\gamma F)^{\beta}}_{0}+p_\varepsilon X^{\beta}\Gamma_{\beta}{}^{\varepsilon}{}_{\alpha}\partial_{\bar\alpha}\underbrace{(\gamma F)^{\beta}}_{0}-p_\varepsilon F_\alpha^\varepsilon\underset{0}{\partial_{\bar\alpha}X^{\beta}}$$

$$=0\,,$$

son olarak $J=\bar\beta$ için

$$[{}^{HH}X,\gamma F]^{\bar\beta}={}^{HH}X^{I}\partial_I(\gamma F)^{\bar\beta}-(\gamma F)^{I}\partial_I\,{}^{HH}X^{\bar\beta}$$

$$=X^{a}\partial_a(\gamma F)^{\bar\beta}+X^{\alpha}\partial_\alpha(\gamma F)^{\bar\beta}+p_\varepsilon X^{\beta}\Gamma_{\beta}{}^{\varepsilon}{}_{\alpha}\partial_{\bar\alpha}(\gamma F)^{\bar\beta}-p_\varepsilon F_\alpha^\varepsilon\partial_{\bar\alpha}\,{}^{HH}X^{\bar\beta}$$

$$=X^{a}\underset{0}{\partial_a p_\varepsilon}F_\beta^\varepsilon+X^{\alpha}\partial_\alpha p_\varepsilon F_\beta^\varepsilon+p_\varepsilon X^{\beta}\Gamma_{\beta}{}^{\varepsilon}{}_{\alpha}\partial_{\bar\alpha}p_\varepsilon F_\beta^\varepsilon-p_\sigma F_\alpha^\sigma\underset{\delta_\varepsilon^\alpha}{\partial_{\bar\alpha}p_\varepsilon}X^{\theta}\Gamma_{\theta}{}^{\varepsilon}{}_{\beta}$$

$$=X^{\alpha}\partial_\alpha p_\varepsilon F_\beta^\varepsilon+p_\varepsilon X^{\beta}\Gamma_{\beta}{}^{\varepsilon}{}_{\alpha}F_\beta^\alpha-p_\varepsilon F_\alpha^\varepsilon X^{\theta}\Gamma_{\theta}{}^{\alpha}{}_{\beta}$$

$$=p_\varepsilon(X^{\alpha}\partial_\alpha F_\beta^\varepsilon+X^{\alpha}\Gamma_{\alpha}{}^{\varepsilon}{}_{\theta}F_\beta^\theta-F_\theta^\varepsilon X^{\alpha}\Gamma_{\alpha}{}^{\theta}{}_{\beta})$$

$$=p_\varepsilon[X^{\alpha}(\partial_\alpha F_\beta^\varepsilon+\Gamma_{\alpha}{}^{\varepsilon}{}_{\theta}F_\beta^\theta-\Gamma_{\alpha}{}^{\theta}{}_{\beta}F_\theta^\varepsilon)]$$

$$=p_\varepsilon(\nabla_X F)_\beta^\varepsilon$$

elde edilir. $(x^b, x^\beta, x^{\bar\beta})$ koordinatlarına göre $t^*(B_m)$ üzerindeki $\gamma(\nabla_X F)$ 'in bileşenleri

$$\gamma(\nabla_X F) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_\varepsilon (\nabla_X F)^\varepsilon_\beta \end{pmatrix}$$

şeklinde olup $[{}^{HH}X, \gamma F] = \gamma(\nabla_X F)$ eşitliği bulunur.

(iii) Keyfi $X, Y \in \Im^1_0(M_n)$ izdüşümü olan vektör alanları için $(x^b, x^\beta, x^{\bar\beta})$ koordinatlarına göre $t^*(B_m)$ üzerinde tanımlı $[{}^{HH}X, {}^{HH}Y]$ 'nin bileşenleri $\begin{pmatrix} [{}^{HH}X, {}^{HH}Y]^b \\ [{}^{HH}X, {}^{HH}Y]^\beta \\ [{}^{HH}X, {}^{HH}Y]^{\bar\beta} \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
[{}^{HH}X, {}^{HH}Y]^J &= {}^{HH}X^I \partial_I ({}^{HH}Y)^J - {}^{HH}Y^I \partial_I ({}^{HH}X)^J \\
&= {}^{HH}X^a \partial_a {}^{HH}Y^J + {}^{HH}X^\alpha \partial_\alpha {}^{HH}Y^J + {}^{HH}X^{\bar\alpha} \partial_{\bar\alpha} {}^{HH}Y^J \\
&\quad - {}^{HH}Y^a \partial_a {}^{HH}X^J - {}^{HH}Y^\alpha \partial_\alpha {}^{HH}X^J - {}^{HH}Y^{\bar\alpha} \partial_{\bar\alpha} {}^{HH}X^J \\
&= X^a \partial_a {}^{HH}Y^J + X^\alpha \partial_\alpha {}^{HH}Y^J + p_\varepsilon X^\beta \Gamma^\varepsilon_{\beta\alpha} \partial_{\bar\alpha} {}^{HH}Y^J \\
&\quad - Y^a \partial_a {}^{HH}X^J - Y^\alpha \partial_\alpha {}^{HH}X^J - p_\varepsilon Y^\beta \Gamma^\varepsilon_{\beta\alpha} \partial_{\bar\alpha} {}^{HH}X^J
\end{aligned}$$

eşitliği yazılır. Burada (4.14) kullanılarak, $J = b$ için

$$\begin{aligned}
[{}^{HH}X, {}^{HH}Y]^b &= {}^{HH}X^I \partial_I ({}^{HH}Y)^b - {}^{HH}Y^I \partial_I ({}^{HH}X)^b \\
&= X^a \partial_a Y^b + \underset{0}{X^\alpha \partial_\alpha Y^b} + p_\varepsilon X^\beta \Gamma^\varepsilon_{\beta\alpha} \underset{0}{\partial_{\bar\alpha} Y^b} \\
&\quad - Y^a \partial_a X^b - \underset{0}{Y^\alpha \partial_\alpha X^b} - p_\varepsilon Y^\beta \Gamma^\varepsilon_{\beta\alpha} \underset{0}{\partial_{\bar\alpha} X^b}
\end{aligned}$$

$$= X^{\alpha}\partial_{\alpha}Y^{b} - Y^{\alpha}\partial_{\alpha}X^{b}$$
$$= [X,Y]^{b}$$

$J=\beta$ için

$$[{}^{HH}X, {}^{HH}Y]^{\beta} = {}^{HH}X^{I}\partial_{I}({}^{HH}Y)^{\beta} - {}^{HH}Y^{I}\partial_{I}({}^{HH}X)^{\beta}$$
$$= \underset{0}{X^{a}\partial_{a}Y^{\beta}} + X^{\alpha}\partial_{\alpha}Y^{\beta} + p_{\varepsilon}X^{\beta}\Gamma_{\beta\ \alpha}^{\ \varepsilon}\underset{0}{\partial_{\bar{\alpha}}Y^{\beta}}$$
$$-\underset{0}{Y^{a}\partial_{a}X^{\beta}} - Y^{\alpha}\partial_{\alpha}X^{\beta} - p_{\varepsilon}Y^{\beta}\Gamma_{\beta\ \alpha}^{\ \varepsilon}\underset{0}{\partial_{\bar{\alpha}}X^{\beta}}$$
$$= X^{\alpha}\partial_{\alpha}Y^{\beta} - Y^{\alpha}\partial_{\alpha}X^{\beta}$$
$$= [X,Y]^{\beta}$$

son olarak $J=\bar{\beta}$ için

$$[{}^{HH}X, {}^{HH}Y]^{\bar{\beta}} = {}^{HH}X^{I}\partial_{I}({}^{HH}Y)^{\bar{\beta}} - {}^{HH}Y^{I}\partial_{I}({}^{HH}X)^{\bar{\beta}}$$
$$= \underset{0}{X^{a}\partial_{a}p_{\varepsilon}}Y^{\alpha}\Gamma_{\alpha\ \beta}^{\ \varepsilon} + X^{\alpha}\partial_{\alpha}(p_{\varepsilon}Y^{\alpha}\Gamma_{\alpha\ \beta}^{\ \varepsilon}) + p_{\varepsilon}X^{\beta}\Gamma_{\beta\ \alpha}^{\ \varepsilon}\underset{\delta_{\varepsilon}^{\alpha}}{\partial_{\bar{\alpha}}p_{\varepsilon}}Y^{\alpha}\Gamma_{\alpha\ \beta}^{\ \varepsilon}$$
$$-\underset{0}{Y^{a}\partial_{a}p_{\varepsilon}}X^{\alpha}\Gamma_{\alpha\ \beta}^{\ \varepsilon} - Y^{\alpha}\partial_{\alpha}(p_{\varepsilon}X^{\alpha}\Gamma_{\alpha\ \beta}^{\ \varepsilon}) - p_{\varepsilon}Y^{\beta}\Gamma_{\beta\ \alpha}^{\ \varepsilon}\underset{\delta_{\varepsilon}^{\alpha}}{\partial_{\bar{\alpha}}p_{\varepsilon}}X^{\alpha}\Gamma_{\alpha\ \beta}^{\ \varepsilon}$$
$$= X^{\alpha}\partial_{\alpha}(p_{\varepsilon}Y^{\alpha}\Gamma_{\alpha\ \beta}^{\ \varepsilon}) + p_{\varepsilon}X^{\beta}\Gamma_{\beta\ \alpha}^{\ \varepsilon}Y^{\theta}\Gamma_{\theta\ \beta}^{\ \alpha}$$
$$-Y^{\alpha}\partial_{\alpha}(p_{\varepsilon}X^{\alpha}\Gamma_{\alpha\ \beta}^{\ \varepsilon}) - p_{\varepsilon}Y^{\beta}\Gamma_{\beta\ \alpha}^{\ \varepsilon}X^{\theta}\Gamma_{\theta\ \beta}^{\ \alpha}$$
$$= p_{\varepsilon}X^{\alpha}(\partial_{\alpha}Y^{\alpha})\Gamma_{\alpha\ \beta}^{\ \varepsilon} + p_{\varepsilon}X^{\alpha}Y^{\theta}\partial_{\alpha}\Gamma_{\theta\ \beta}^{\ \varepsilon} + p_{\varepsilon}X^{\alpha}Y^{\theta}\Gamma_{\alpha\ \sigma}^{\ \varepsilon}\Gamma_{\theta\ \beta}^{\ \sigma}$$
$$-p_{\varepsilon}Y^{\alpha}(\partial_{\alpha}X^{\alpha})\Gamma_{\alpha\ \beta}^{\ \varepsilon} - p_{\varepsilon}Y^{\alpha}X^{\theta}\partial_{\alpha}\Gamma_{\theta\ \beta}^{\ \varepsilon} - p_{\varepsilon}X^{\alpha}Y^{\theta}\Gamma_{\theta\ \sigma}^{\ \varepsilon}\Gamma_{\alpha\ \beta}^{\ \sigma}$$
$$= [p_{\varepsilon}\underbrace{(X^{\alpha}(\partial_{\alpha}Y^{\alpha}) - Y^{\alpha}(\partial_{\alpha}X^{\alpha}))}_{[X,Y]^{\alpha}}\Gamma_{\alpha\ \beta}^{\ \varepsilon}]$$
$$+p_{\varepsilon}[\underbrace{X^{\alpha}Y^{\theta}(\partial_{\alpha}\Gamma_{\theta\ \beta}^{\ \varepsilon} - \partial_{\theta}\Gamma_{\alpha\ \beta}^{\ \varepsilon} + \Gamma_{\alpha\ \sigma}^{\ \varepsilon}\Gamma_{\theta\ \beta}^{\ \sigma} - \Gamma_{\theta\ \sigma}^{\ \varepsilon}\Gamma_{\alpha\ \beta}^{\ \sigma})}_{(R(X,Y))_{\beta}^{\varepsilon}}]$$
$$= p_{\varepsilon}[X,Y]^{\alpha}\Gamma_{\alpha\ \beta}^{\ \varepsilon} + p_{\varepsilon}(R(X,Y))_{\beta}^{\varepsilon}$$

elde edilir. $(x^b, x^\beta, x^{\bar{\beta}})$ koordinatlarına göre $t^*(B_m)$ üzerindeki ${}^{HH}[X,Y]+\gamma R(X,Y)$ ’nin bileşenleri

$$ {}^{HH}[X,Y]+\gamma R(X,Y)=\begin{pmatrix} [X,Y]^b \\ [X,Y]^\beta \\ p_\varepsilon [X,Y]^\alpha \Gamma_{\alpha}{}^{\varepsilon}{}_{\beta} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_\varepsilon (R(X,Y))^\varepsilon_\beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} [X,Y]^b \\ [X,Y]^\beta \\ p_\varepsilon [X,Y]^\alpha \Gamma_{\alpha}{}^{\varepsilon}{}_{\beta}+p_\varepsilon (R(X,Y))^\varepsilon_\beta \end{pmatrix} $$

şeklinde olup $[{}^{HH}X, {}^{HH}Y]={}^{HH}[X,Y]+\gamma R(X,Y)$ eşitliği gösterilmiş olur.

(iv) B_m üzerindeki X ve Y izdüşümleri ile $X,Y\in\Im_0^1(M_n)$ izdüşümü olan vektör alanları olmak üzere, Teorem 4.1.6.3’ün (ii) ve (iii)’ü ile (4.13) eşitliği kullanılarak

$$ \begin{aligned} [{}^{cc}X, {}^{HH}Y] &= [{}^{HH}X-\gamma(\nabla X), {}^{HH}Y] \\ &= [{}^{HH}X, {}^{HH}Y]+[{}^{HH}Y, \gamma(\nabla X)] \\ &= {}^{HH}[X,Y]+\gamma(R(X,Y)+\nabla_Y\nabla X) \\ &= {}^{HH}[X,Y]+\gamma(L_X\nabla)_Y \end{aligned} $$

bulunup, $[{}^{cc}X, {}^{HH}Y]={}^{HH}[X,Y]+\gamma(L_X\nabla)_Y$ eşitliği elde edilir.

Teorem 4.1.6.4: Sırasıyla $F\in\Im_1^1(B_m)$ ve $X\in\Im_0^1(B_m)$ izdüşümleri ile birlikte tanımlı, $F\in\Im_1^1(M_n)$ ve $X\in\Im_0^1(M_n)$ izdüşümü olan afinor ve vektör alanları olmak üzere

$$ {}^{cc}F({}^{HH}X)={}^{HH}(FX)+\gamma([\nabla F]_X) $$

elde edilir. Burada $[\nabla F]_X\in\Im_1^1(B_m)$, keyfi $Y\in\Im_0^1(B_m)$ için

$$ [\nabla F]_X Y=(\nabla_X F)Y-(\nabla_Y F)X $$

ile tanımlıdır (Yıldırım 2013).

İspat: Teorem 4.1.5.1'in (i) ile (ii) eşitliklerinden (4.13)'e göre

$$\begin{aligned}
{}^{cc}F({}^{HH}X) &= {}^{cc}F({}^{cc}X + \gamma(\nabla X)) \\
&= {}^{cc}(FX) + \gamma(L_X F) + \gamma((\nabla X)F) \\
&= {}^{HH}(FX) - \gamma(\nabla(FX)) + \gamma(L_X F) + \gamma((\nabla X)F) \\
&= {}^{HH}(FX) - \gamma(\nabla(FX)) + \gamma(\nabla_X F - (\nabla X)F + F(\nabla X) + \gamma((\nabla X)F) \\
&= {}^{HH}(FX) + \gamma(\nabla_X F + \underbrace{F(\nabla X) - \nabla(FX)}_{[\nabla F]_X})
\end{aligned}$$

elde edilir. $Y \in \Im_0^1(B_m)$ için

$$\begin{aligned}
(\nabla_X F + F(\nabla X) - \nabla(FX))Y &= (\nabla_X F)Y + F\nabla_Y X - \nabla_Y(FX) \\
&= (\nabla_X F)Y - (\nabla_Y F)X
\end{aligned}$$

olduğundan Teorem 4.1.6.4 ispatlanmış olur.

Teorem 4.1.6.5: $X \in \Im_0^1(M_n)$ izdüşümü olan vektör alanı ve keyfi $S \in \Im_2^1(B_m)$ için

$$(\gamma S)({}^{HH}X) = \gamma S_X$$

eşitliği elde edilir (Yıldırım 2013).

İspat: (4.9) ve (4.14) kullanılarak

$$(\gamma S)({}^{HH}X) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_\varepsilon S_{\beta\alpha}^{\varepsilon} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_\varepsilon X^\alpha \Gamma_{\alpha\ \beta}^{\ \varepsilon} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_\varepsilon S^\varepsilon_{\beta\alpha} X^\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_\varepsilon (S_X)^\varepsilon_\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \gamma(S_X)$$

elde edilir.

4.1.7. (1,1) tipli tensör alanlarının yatay lifti

$F \in \Im^1_1(M_n)$, $F = F^\alpha_\beta(x^\alpha)\partial_\alpha \otimes dx^\beta$ izdüşümü ile verilen afinor alanı olmak üzere (Vishnevskii 2002), F izdüşümü olan afinor alanının $t^*(B_m)$ üzerindeki ${}^{HH}F$ yatay lifti

$$ {}^{HH}F = {}^{cc}F + \gamma[\nabla F] \tag{4.16}$$

ile tanımlıdır (Yıldırım 2013). Burada $[\nabla F]$, keyfi $X, Y \in \Im^1_0(B_m)$ vektör alanları için

$$[\nabla F](X,Y) = -\nabla_X(FY) + \nabla_Y(FX) \tag{4.17}$$

ile tanımlı (1,2) tipli bir tensör alanıdır. (4.12), (4.16) ve (4.17)'den $t^*(B_m)$ üzerindeki $(x^a, x^\alpha, x^{\overline{\alpha}})$ koordinatlarına göre F 'in, ${}^{HH}F$ yatay lifti

$${}^{HH}F = ({}^{HH}F^I_J) = \begin{pmatrix} F^a_b & F^a_\beta & 0 \\ 0 & F^\alpha_\beta & 0 \\ 0 & -\Gamma_{\beta\varepsilon}F^\varepsilon_\alpha + \Gamma_{\alpha\varepsilon}F^\varepsilon_\beta & F^\beta_\alpha \end{pmatrix} \tag{4.18}$$

bileşenlerine sahiptir. Burada F^α_β 'lar F 'in lokal bileşenleri, $\Gamma_\beta{}^\varepsilon{}_\alpha$ 'ler ise $t^*(B_m)$ üzerindeki ∇ 'nın bileşenleri olup $\Gamma_{\beta\alpha}$, (4.15) ile tanımlıdır (Yıldırım 2013).

İspat: (4.12), (4.16) ve (4.17)'den

$$
{}^{HH}F = {}^{cc}F + \gamma[\nabla F] = \begin{pmatrix} F_b^a & F_\beta^a & 0 \\ 0 & F_\beta^\alpha & 0 \\ 0 & p_\varepsilon(\partial_\beta F_\alpha^\varepsilon - \partial_\alpha F_\beta^\varepsilon) & F_\alpha^\beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_\sigma \underbrace{(\underbrace{\partial_\alpha F_\beta^\sigma + \Gamma_\alpha{}^\sigma{}_\varepsilon F_\beta^\varepsilon}_{\nabla_Y(FX)} - \underbrace{\partial_\beta F_\alpha^\sigma - \Gamma_\beta{}^\sigma{}_\varepsilon F_\alpha^\varepsilon}_{\nabla_X(FY)})}_{([\nabla F](X,Y))_{\beta\alpha}^\sigma} & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
{}^{HH}F = ({}^{HH}F_J^I) = \begin{pmatrix} F_b^a & F_\beta^a & 0 \\ 0 & F_\beta^\alpha & 0 \\ 0 & -\Gamma_{\beta\varepsilon}F_\alpha^\varepsilon + \Gamma_{\alpha\varepsilon}F_\beta^\varepsilon & F_\alpha^\beta \end{pmatrix}
$$

elde edilir.

Teorem 4.1.7.1: Sırasıyla $F \in \Im_1^1(B_m)$ ve $X \in \Im_0^1(B_m)$ izdüşümleri ile tanımlı, $F \in \Im_1^1(M_n)$ ve $X \in \Im_0^1(M_n)$ izdüşümü olan afinor ve vektör alanları olmak üzere, keyfi $\omega \in \Im_1^0(B_m)$ için

(i) $\quad {}^{HH}F({}^{vv}\omega) = {}^{vv}(\omega \circ F),$

(ii) $\quad {}^{HH}F({}^{HH}X) = {}^{HH}(FX)$

eşitlikleri elde edilir (Yıldırım 2013).

İspat: (i) $\omega \in \Im_1^0(B_m)$ ve F , M_n üzerinde izdüşümü olan afinor alanı olmak üzere (4.6) ve (4.18) kullanılarak

$$
{}^{HH}F({}^{vv}\omega) = \begin{pmatrix} F_b^a & F_\beta^a & 0 \\ 0 & F_\beta^\alpha & 0 \\ 0 & -\Gamma_{\beta\varepsilon}F_\alpha^\varepsilon + \Gamma_{\alpha\varepsilon}F_\beta^\varepsilon & F_\alpha^\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_\beta \end{pmatrix}
$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_\beta F_\alpha^\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (\omega \circ F)_\alpha \end{pmatrix}$$

$$= {}^{vv}(\omega \circ F)$$

elde edilir.

(ii) F ve X, sırasıyla M_n üzerinde izdüşümü olan afinor ve vektör alanları olsun. (4.14) ve (4.18) kullanılarak

$$^{HH}F(^{HH}X) = \begin{pmatrix} F_b^a & F_\beta^a & 0 \\ 0 & F_\beta^\alpha & 0 \\ 0 & -\Gamma_{\beta\varepsilon}F_\alpha^\varepsilon + \Gamma_{\alpha\varepsilon}F_\beta^\varepsilon & F_\alpha^\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^b \\ X^\beta \\ p_\varepsilon X^\alpha \Gamma_\alpha{}^\varepsilon{}_\beta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} F_b^a X^b + F_\beta^a X^\beta \\ F_\beta^\alpha X^\beta \\ -p_\theta \Gamma_\beta{}^\theta{}_\varepsilon F_\alpha^\varepsilon X^\beta + \underbrace{p_\theta \Gamma_\alpha{}^\theta{}_\varepsilon F_\beta^\varepsilon X^\beta}_{p_\theta (FX)^\varepsilon \Gamma_\alpha{}^\theta{}_\varepsilon} + p_\varepsilon X^\alpha \Gamma_\alpha{}^\varepsilon{}_\beta F_\alpha^\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (FX)^a \\ (FX)^\alpha \\ p_\varepsilon (FX)^\beta \Gamma_\beta{}^\varepsilon{}_\alpha \end{pmatrix}$$

$$= {}^{HH}(FX)$$

elde edilir.

Teorem 4.1.7.2: $F, G \in \Im_1^1(M_n)$ izdüşümü olan afinor alanları olmak üzere, keyfi $S \in \Im_2^1(B_m)$ için

(i) $\quad {}^{HH}F(\gamma G) = \gamma(G \circ F),$

(ii) $\quad {}^{HH}F(\gamma S) = \gamma(SF)$

eşitlikleri elde edilir. Burada SF, keyfi $X, Y \in \Im_0^1(B_m)$ için $(SF)(X,Y) = S(X, FY)$ ile tanımlıdır (Yıldırım 2013).

İspat: (i) $F,G \in \Im_1^1(M_n)$ izdüşümü olan afinor alanları olmak üzere (4.8) ve (4.18) kullanılarak

$$
{}^{HH}F(\gamma G)=\begin{pmatrix} F_b^a & F_\beta^a & 0 \\ 0 & F_\beta^\alpha & 0 \\ 0 & -\Gamma_{\beta\varepsilon}F_\alpha^\varepsilon+\Gamma_{\alpha\varepsilon}F_\beta^\varepsilon & F_\alpha^\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_\varepsilon G_\beta^\varepsilon \end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_\varepsilon G_\beta^\varepsilon F_\alpha^\beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_\varepsilon (G\circ F)_\alpha^\varepsilon \end{pmatrix}
$$

$$
=\gamma(G\circ F)
$$

elde edilir.

(ii) $S \in \Im_2^1(B_m)$ ve M_n üzerinde F izdüşümü olan afinor alanı için (4.9) ve (4.18) kullanılarak

$$
{}^{HH}F(\gamma S)=\begin{pmatrix} F_b^a & F_\beta^a & 0 \\ 0 & F_\beta^\alpha & 0 \\ 0 & -\Gamma_{\beta\varepsilon}F_\alpha^\varepsilon+\Gamma_{\alpha\varepsilon}F_\beta^\varepsilon & F_\alpha^\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_\varepsilon S_{\theta\beta}^\varepsilon & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_\varepsilon S_{\theta\beta}^\varepsilon F_\alpha^\beta & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_\varepsilon (SF)_{\theta\alpha}^\varepsilon & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
=\gamma(SF)
$$

elde edilir.

4.2. Tanjant Demet İzdüşümü ile Tanımlı Kotanjant Demetinin Pull-Back Demeti

M_n, C^∞ sınıfından n-boyutlu diferensiyellenebilir manifold ve $T(M_n)$, $\pi_1 : T(M_n) \to M_n$ doğal izdüşümü (submersion) ile tanımlanan tanjant demet olsun. Bu demette $\alpha, \beta, ... = 1, ..., n;\ \overline{\alpha}, \overline{\beta}, ... = n+1, ..., 2n;\ i, j, ... = 1, ..., 2n$ olmak üzere, $(x^{\overline{\alpha}}, x^\alpha) = (x^i)$ lokal koordinat sistemine bakalım, burada x^α ’lar M_n ’nin lokal koordinatları, $x^{\overline{\alpha}} = y^\alpha$ ’lar ise, $T(M_n)$ tanjant demetinin fibre koordinatlarıdır. $(x^{\overline{\alpha}'}, x^{\alpha'})$, $T(M_n)$ tanjant demetindeki bir diğer yerel koordinatlar olmak üzere

$$\begin{cases} x^{\overline{\alpha}'} = \dfrac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\beta} y^\beta, \\ x^{\alpha'} = x^{\alpha'}\left(x^\beta\right) \end{cases} \tag{4.19}$$

dönüşümü yazılır. (4.19)’de belirtilen dönüşümün Jakobi matrisi

$$\left(A_j^{i'}\right) = \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}\right) = \begin{pmatrix} A_\beta^{\alpha'} & A_{\beta\varepsilon}^{\alpha'} y^\varepsilon \\ 0 & A_\beta^{\alpha'} \end{pmatrix}$$

biçimindedir. Burada

$$A_\beta^{\alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\beta},\ A_{\beta\varepsilon}^{\alpha'} = \frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^\beta \partial x^\varepsilon}$$

eşitlikleri geçerlidir (Salimov and Yıldırım 2014).

$T_x^*(M_n)$, M_n ’in $(x = \pi_1(x),\ x = (x^{\overline{\alpha}}, x^\alpha) \in T(M_n))$ x noktasındaki kotanjant uzayı olsun. p_α ’lar ($p = p_i dx^i$), $p \in T_x^*(M_n)$ ’in $\{dx^\alpha\}$ doğal koçatısına göre bileşenleri olmak üzere, M_n manifoldu üzerinde lokal koordinatları $(x^I) = (x^{\overline{\alpha}}, x^\alpha, x^{\overline{\overline{\alpha}}})$, ($x^{\overline{\overline{\alpha}}} = p_\alpha$; $I, J, ... = 1, ..., 3n$) olan tanjant demet izdüşümü ile tanımlı kotanjant demetinin, $t^*(M_n)$

pull-back demeti elde edilir. $t^*(M_n)$ pull-back demetinin boyutu $\dim t^*(B_m)=3n$ olmaktadır (Salimov and Yıldırım 2014).

$t^*(M_n)$ pull-back demeti, M_n üzerinde doğal demet yapısına ve $\pi:(x^{\bar{\alpha}},x^{\alpha},x^{\bar{\bar{\alpha}}})\to(x^{\alpha})$ şeklinde tanımlı $\pi:t^*(M_n)\to M_n$ izdüşümüne sahiptir. Eğer, $\pi_2:(x^{\bar{\alpha}},x^{\alpha},x^{\bar{\bar{\alpha}}})\to(x^{\bar{\alpha}},x^{\alpha})$ ile, $\pi_2:t^*(M_n)\to T(M_n)$ dönüşümü ve $\pi_1:T\left(M_n\right)\to M_n$ izdüşümüyle kotanjant demetinin pull-back demeti tanımlanacak olursa, $t^*(M_n)$; M_n üzerinde de bir demet yapısına sahip olur (Steenrod 1951; Pontryagin 1962; Lawson and Michelsohn 1989; Salimov and Yıldırım 2014). Buradaki izdüşümü dönüşümleri arasında $\pi=\pi_1\circ\pi_2$ eşitliği yazılabilir (Yıldırım and Salimov 2014b). Böylece $\left(t^*(M_n),\pi_1\circ\pi_2\right)$ kompozit demeti veya step-like demeti tanımlar (Ostianu 1974; Poor 1981). Burada keyfi $\pi_1:M_n\to B_m$ fibre demeti yerine $\pi_1:T\left(M_n\right)\to M_n$ tanjant demet alınarak yarı-kotanjant demetin özel bir sınıfı tanımlanmıştır (Salimov and Yıldırım 2014).

$T(M_n)$ 'nin lokal koordinatlarının (4.19)'e göre, $t^*(M_n)$ üzerinde belirttiği koordinat dönüşümü

$$\begin{cases} x^{\bar{\alpha}'}=\dfrac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}}y^{\beta}, \\ x^{\alpha'}=x^{\alpha'}\left(x^{\beta}\right), \\ x^{\bar{\bar{\alpha}}'}=\dfrac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\alpha'}}p_{\beta} \end{cases} \tag{4.20}$$

şeklindedir. (4.20) dönüşümünün Jakobi matrisi

$$\bar{A}=\left(A_J^{I'}\right)=\begin{pmatrix} A_{\beta}^{\alpha'} & A_{\beta\varepsilon}^{\alpha'}y^{\varepsilon} & 0 \\ 0 & A_{\beta}^{\alpha'} & 0 \\ 0 & p_{\alpha}A_{\beta}^{\beta'}A_{\beta'\alpha'}^{\alpha} & A_{\alpha'}^{\beta} \end{pmatrix} \tag{4.21}$$

biçimindedir. Burada

$$A_{\beta}^{\alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}},\ A_{\alpha'}^{\beta} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\alpha'}},\ A_{\beta\varepsilon}^{\alpha'} = \frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\varepsilon}},\ A_{\beta'\alpha'}^{\alpha} = \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x^{\beta'} \partial x^{\alpha'}}$$

şeklindedir. (4.21)'de belirtilen matris için

$$Det(A_{\beta}^{\alpha'}) \neq 0$$

olduğundan $Det\bar{A} \neq 0$ 'dır. $F(M_n)$, M_n üzerindeki C^{∞} sınıfından reel değerli fonksiyonların belirttiği halka olmak üzere, M_n 'deki (p,q) tipli tüm tensör alanlarının $F(M_n)$ üzerindeki modülü $\Im_q^p(M_n)$ ile gösterilir (Salimov and Yıldırım 2014).

4.2.1. Vektör alanlarının tam lifti

$X \in \Im_0^1(T(M_n))$, $X = X^{\alpha}\partial_{\alpha}$ şeklinde tanımlı bir vektör alanı olmak üzere, X 'in tanjant demete olan ${}^cX$ tam lifti

$${}^cX = X^{\alpha}\partial_{\alpha} + \left(y^{\beta}\partial_{\beta}X^{\alpha}\right)\partial_{\bar{\alpha}}$$

ile tanımlanır (Yano and Ishihara 1973).

${}^cX \in \Im_0^1(T(M_n))$ vektör alanının $t^*(M_n)$ pull-back demetine olan ${}^{cc}X$ tam lifti indirgenmiş koordinatlara göre

$${}^{cc}X = \left({}^{cc}X^{\alpha}\right) = \begin{pmatrix} y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}X^{\alpha} \\ X^{\alpha} \\ -p_{\varepsilon}(\partial_{\alpha}X^{\varepsilon}) \end{pmatrix} \tag{4.22}$$

bileşenlerine sahip olup (4.21) dönüşümü yardımıyla ${}^{cc}X' = \bar{A}({}^{cc}X)$ eşitliği kolaylıkla gösterilebilir (Salimov and Yıldırım 2014).

Tanım 4.2.1.1: $t^*(M_n)$ pull-back demeti üzerinde, X vektör alanı C^∞ − sınıfından H fonksiyonu ve dejenere simplektik $\omega = dp$ yapısı için $\iota_X \omega = dH$ şartını sağlıyor ise (yani, $\iota_X \omega$ dahili çarpımı exact (tam form) ise), bu durumda X vektör alanına Hamiltonian vektör alanı denir. Eğer $L_X \omega = 0$ ise, X vektör alanına simplektik vektör alanı denir. $\omega = dp$ yapısı için simplektik vektör alanları lokal olarak Hamiltonian vektör alanıdır. Bunu kolayca $L_X = d \circ \iota_X + \iota_X \circ d$ (Cartan'nın sihirli formülü) formülünden görmek mümkündür. Tanım 4.2.1.1'den; $L_X = d \circ \iota_X + \iota_X \circ d$ (Cartan'nın sihirli formülü) ${}^{cc}X$ tam lifti için kullanıldığında

$$L_{{}^{cc}X} dp = \left(d \circ \iota_{{}^{cc}X}\right) dp + \left(\iota_{{}^{cc}X} \circ d\right) dp = d_{{}^{cc}X}\left(\iota\left(dp\right)\right) + \iota_{{}^{cc}X} d^2 p = d\left(\iota_{{}^{cc}X}\left(dp\right)\right)$$

elde edilir. Buradan $L_{{}^{cc}X} dp = 0$ şartı dahilinde ${}^{cc}X$ vektör alanı lokal olarak Hamiltonian vektör alanı olduğu elde edilir ve

$${}^{cc}X^A \partial_A \omega_{CB} + \left(\partial_C {}^{cc}X^A\right)\omega_{AB} + \left(\partial_B {}^{cc}X^A\right)\omega_{CA} = 0$$

şartı sağlanır. (4.4) ve (4.22) yukarıdaki ifadede kullanılarak $0 = 0$ eşitliği elde edilir.

İspat: Yukarıda yer alan ${}^{cc}X^A \underbrace{\partial_A \omega_{CB}}_{0} + \left(\partial_C {}^{cc}X^A\right)\omega_{AB} + \left(\partial_B {}^{cc}X^A\right)\omega_{CA} = 0$ eşitliğinden

$$\left(\partial_C {}^{cc}X^{\bar{\alpha}}\right)\omega_{\bar{\alpha}\beta} + \left(\partial_C {}^{cc}X^{\alpha}\right)\omega_{\alpha\beta} + \left(\partial_C {}^{cc}X^{\bar{\bar{\alpha}}}\right)\omega_{\bar{\bar{\alpha}}\beta} + \left(\partial_\beta {}^{cc}X^{\bar{\alpha}}\right)\omega_{C\bar{\alpha}} + \left(\partial_\beta {}^{cc}X^{\alpha}\right)\omega_{C\alpha} + \left(\partial_\beta {}^{cc}X^{\bar{\bar{\alpha}}}\right)\omega_{C\bar{\bar{\alpha}}} = 0$$

elde edilir. B 'nin indisleri $B = \left(\bar{\beta}, \beta, \bar{\bar{\beta}}\right)$ ve C 'nin indisleri $C = \left(\bar{\theta}, \theta, \bar{\bar{\theta}}\right)$ olmak üzere

(i) Buradan, $B=\overline{\beta}$ ve $C=\overline{\theta}$ için

$$0=\left(\partial_{\overline{\theta}}y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}X^{\alpha}\right)\underset{0}{\omega_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}}+\left(\partial_{\overline{\theta}}{}^{cc}X^{\alpha}\right)\underset{0}{\omega_{\alpha\overline{\beta}}}+\left(\partial_{\overline{\theta}}{}^{cc}X^{\overline{\overline{\alpha}}}\right)\underset{0}{\omega_{\overline{\overline{\alpha}}\overline{\beta}}}+\left(\partial_{\overline{\beta}}{}^{cc}X^{\overline{\alpha}}\right)\underset{0}{\omega_{\overline{\theta}\overline{\alpha}}}+\left(\partial_{\overline{\beta}}{}^{cc}X^{\alpha}\right)\underset{0}{\omega_{\overline{\theta}\alpha}}+\left(\partial_{\overline{\beta}}{}^{cc}X^{\overline{\overline{\alpha}}}\right)\underset{0}{\omega_{\overline{\theta}\overline{\overline{\alpha}}}}$$

$$0=0,$$

(ii) $B=\overline{\beta}$ ve $C=\theta$ için

$$0=\left(\partial_{\theta}y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}X^{\alpha}\right)\underset{0}{\omega_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}}+\left(\partial_{\theta}{}^{cc}X^{\alpha}\right)\underset{0}{\omega_{\alpha\overline{\beta}}}+\left(\partial_{\theta}{}^{cc}X^{\overline{\overline{\alpha}}}\right)\underset{0}{\omega_{\overline{\overline{\alpha}}\overline{\beta}}}+\left(\partial_{\overline{\beta}}{}^{cc}X^{\overline{\alpha}}\right)\underset{0}{\omega_{\theta\overline{\alpha}}}+\left(\partial_{\overline{\beta}}{}^{cc}X^{\alpha}\right)\underset{0}{\omega_{\theta\alpha}}+\underbrace{\left(\partial_{\overline{\beta}}{}^{cc}X^{\overline{\overline{\alpha}}}\right)}_{0}\omega_{\theta\overline{\overline{\alpha}}}$$

$$0=0,$$

(iii) $B=\overline{\beta}$ ve $C=\overline{\overline{\theta}}$ için

$$0=\left(\partial_{\overline{\overline{\theta}}}y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}X^{\alpha}\right)\underset{0}{\omega_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}}+\left(\partial_{\overline{\overline{\theta}}}{}^{cc}X^{\alpha}\right)\underset{0}{\omega_{\alpha\overline{\beta}}}+\left(\partial_{\overline{\overline{\theta}}}{}^{cc}X^{\overline{\overline{\alpha}}}\right)\underset{0}{\omega_{\overline{\overline{\alpha}}\overline{\beta}}}+\left(\partial_{\overline{\beta}}{}^{cc}X^{\overline{\alpha}}\right)\underset{0}{\omega_{\overline{\overline{\theta}}\overline{\alpha}}}+\underbrace{\left(\partial_{\overline{\beta}}{}^{cc}X^{\alpha}\right)}_{0}\omega_{\overline{\overline{\theta}}\alpha}+\underbrace{\left(\partial_{\overline{\beta}}{}^{cc}X^{\overline{\overline{\alpha}}}\right)}_{0}\omega_{\overline{\overline{\theta}}\overline{\overline{\alpha}}}$$

$$0=0,$$

(iv) $B=\beta$ ve $C=\overline{\theta}$ için

$$0=\left(\partial_{\overline{\theta}}y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}X^{\alpha}\right)\underset{0}{\omega_{\overline{\alpha}\beta}}+\left(\partial_{\overline{\theta}}{}^{cc}X^{\alpha}\right)\underset{0}{\omega_{\alpha\beta}}+\underbrace{\left(\partial_{\overline{\theta}}{}^{cc}X^{\overline{\overline{\alpha}}}\right)}_{0}\omega_{\overline{\overline{\alpha}}\beta}+\left(\partial_{\beta}{}^{cc}X^{\overline{\alpha}}\right)\underset{0}{\omega_{\overline{\theta}\overline{\alpha}}}+\left(\partial_{\beta}{}^{cc}X^{\alpha}\right)\underset{0}{\omega_{\overline{\theta}\alpha}}+\left(\partial_{\beta}{}^{cc}X^{\overline{\overline{\alpha}}}\right)\underset{0}{\omega_{\overline{\theta}\overline{\overline{\alpha}}}}$$

$$0=0,$$

(v) $B=\beta$ ve $C=\theta$ için

$$0=\left(\partial_{\theta}y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}X^{\alpha}\right)\underset{0}{\omega_{\overline{\alpha}\beta}}+\left(\partial_{\theta}{}^{cc}X^{\alpha}\right)\underset{0}{\omega_{\alpha\beta}}+\left(\partial_{\theta}{}^{cc}X^{\overline{\overline{\alpha}}}\right)\omega_{\overline{\overline{\alpha}}\beta}+\left(\partial_{\beta}{}^{cc}X^{\overline{\alpha}}\right)\underset{0}{\omega_{\theta\overline{\alpha}}}+\left(\partial_{\beta}{}^{cc}X^{\alpha}\right)\underset{0}{\omega_{\theta\alpha}}+\left(\partial_{\beta}{}^{cc}X^{\overline{\overline{\alpha}}}\right)\omega_{\theta\overline{\overline{\alpha}}}$$

$$0=-\left(\partial_{\theta}\left(p_{\sigma}\partial_{\alpha}X^{\sigma}\right)\right)\delta_{\alpha}^{\beta}+\left(\partial_{\beta}\left(p_{\sigma}\partial_{\alpha}X^{\sigma}\right)\right)\delta_{\alpha}^{\theta}$$

$$0=-\left(\partial_{\theta}\left(p_{\sigma}\partial_{\beta}X^{\sigma}\right)\right)+\left(\partial_{\beta}\left(p_{\sigma}\partial_{\theta}X^{\sigma}\right)\right)$$

$$0 = p_\sigma \underbrace{\left(\partial^2_{\beta\theta} X^\sigma - \partial^2_{\theta\beta} X^\sigma\right)}_{0}$$

$$0 = 0\,,$$

(vi) $B = \beta$ ve $C = \bar{\bar{\theta}}$ için

$$0 = \left(\partial_{\bar{\bar{\theta}}} y^\varepsilon \partial_\varepsilon X^\alpha\right) \underset{0}{\omega_{\bar{\alpha}\beta}} + \left(\partial_{\bar{\bar{\theta}}}{}^{cc} X^\alpha\right) \underset{0}{\omega_{\alpha\beta}} + \left(\partial_{\bar{\bar{\theta}}}{}^{cc} X^{\bar{\bar{\alpha}}}\right) \omega_{\bar{\bar{\alpha}}\beta} + \left(\partial_\beta{}^{cc} X^{\bar{\alpha}}\right) \underset{0}{\omega_{\bar{\bar{\theta}}\bar{\alpha}}} + \left(\partial_\beta{}^{cc} X^\alpha\right) \omega_{\bar{\bar{\theta}}\alpha} + \left(\partial_\beta{}^{cc} X^{\bar{\bar{\alpha}}}\right) \underset{0}{\omega_{\bar{\bar{\theta}}\bar{\bar{\alpha}}}}$$

$$0 = -\left(\underset{\delta^\theta_\sigma}{\partial_{\bar{\bar{\theta}}} p_\sigma} \left(\partial_\alpha X^\sigma\right)\right) \delta^\beta_\alpha + \left(\partial_\beta X^\alpha\right) \delta^\alpha_\theta$$

$$0 = -\left(\partial_\beta X^\theta\right) + \left(\partial_\beta X^\theta\right)$$

$$0 = 0\,,$$

(vii) $B = \bar{\bar{\beta}}$ ve $C = \bar{\theta}$ için

$$0 = \left(\partial_{\bar{\theta}} y^\varepsilon \partial_\varepsilon X^\alpha\right) \underset{0}{\omega_{\bar{\alpha}\bar{\bar{\beta}}}} + \underbrace{\left(\partial_{\bar{\theta}}{}^{cc} X^\alpha\right)}_{0} \omega_{\alpha\bar{\bar{\beta}}} + \left(\partial_{\bar{\theta}}{}^{cc} X^{\bar{\bar{\alpha}}}\right) \underset{0}{\omega_{\bar{\bar{\alpha}}\bar{\bar{\beta}}}} + \left(\partial_{\bar{\bar{\beta}}}{}^{cc} X^{\bar{\alpha}}\right) \underset{0}{\omega_{\bar{\theta}\bar{\alpha}}} + \left(\partial_{\bar{\bar{\beta}}}{}^{cc} X^\alpha\right) \underset{0}{\omega_{\bar{\theta}\alpha}} + \left(\partial_{\bar{\bar{\beta}}}{}^{cc} X^{\bar{\bar{\alpha}}}\right) \underset{0}{\omega_{\bar{\theta}\bar{\bar{\alpha}}}}$$

$$0 = 0\,,$$

(viii) $B = \bar{\bar{\beta}}$ ve $C = \theta$ için

$$0 = \left(\partial_\theta y^\varepsilon \partial_\varepsilon X^\alpha\right) \underset{0}{\omega_{\bar{\alpha}\bar{\bar{\beta}}}} + \left(\partial_\theta{}^{cc} X^\alpha\right) \underset{-\delta^\alpha_\beta}{\omega_{\alpha\bar{\bar{\beta}}}} + \left(\partial_\theta{}^{cc} X^{\bar{\bar{\alpha}}}\right) \underset{0}{\omega_{\bar{\bar{\alpha}}\bar{\bar{\beta}}}} + \left(\partial_{\bar{\bar{\beta}}}{}^{cc} X^{\bar{\alpha}}\right) \underset{0}{\omega_{\theta\bar{\alpha}}} + \left(\partial_{\bar{\bar{\beta}}}{}^{cc} X^\alpha\right) \underset{0}{\omega_{\theta\alpha}} + \left(\partial_{\bar{\bar{\beta}}}{}^{cc} X^{\bar{\bar{\alpha}}}\right) \underset{-\delta^\theta_\alpha}{\omega_{\theta\bar{\bar{\alpha}}}}$$

$$0 = -\left(\partial_\theta X^\alpha\right) \delta^\alpha_\beta + \left(\underset{\delta^\beta_\sigma}{\partial_{\bar{\bar{\beta}}} p_\sigma} \left(\partial_\alpha X^\sigma\right)\right) \delta^\theta_\alpha$$

$$0 = -\left(\partial_\theta X^\beta\right) + \left(\partial_\alpha X^\beta\right) \delta^\theta_\alpha$$

$$0 = -\left(\partial_\theta X^\beta\right) + \left(\partial_\theta X^\beta\right)$$

$$0 = 0\,,$$

(ix) $B=\bar{\bar{\beta}}$ ve $C=\bar{\bar{\theta}}$ için

$$0=\left(\partial_{\bar{\bar{\theta}}}y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}X^{\alpha}\right)\underset{0}{\omega_{\bar{\alpha}\bar{\bar{\beta}}}}+\underbrace{\left(\partial_{\bar{\bar{\theta}}}{}^{cc}X^{\alpha}\right)}_{0}\omega_{\alpha\bar{\bar{\beta}}}+\left(\partial_{\bar{\bar{\theta}}}{}^{cc}X^{\bar{\bar{\alpha}}}\right)\underset{0}{\omega_{\bar{\bar{\alpha}}\bar{\bar{\beta}}}}+\left(\partial_{\bar{\bar{\beta}}}{}^{cc}X^{\bar{\alpha}}\right)\underset{0}{\omega_{\bar{\bar{\theta}}\bar{\alpha}}}+\underbrace{\left(\partial_{\bar{\bar{\beta}}}{}^{cc}X^{\alpha}\right)}_{0}\omega_{\bar{\bar{\theta}}\alpha}+\left(\partial_{\bar{\bar{\beta}}}{}^{cc}X^{\bar{\bar{\alpha}}}\right)\underset{0}{\omega_{\bar{\bar{\theta}}\bar{\bar{\alpha}}}}$$

$0=0$.

Buradan aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 4.2.1.1: $\omega=dp$ dejenere simplektik yapısıyla birlikte, X vektör alanının $t^{*}(M_n)$ pull-back demetine ${}^{cc}X$ tam lifti Hamiltoniandır**.**

Teorem 4.2.1.2: $T\left(M_n\right)$ üzerindeki keyfi X,Y vektör alanları ve M_n üzerindeki keyfi f fonksiyonu için

(i) ${}^{cc}(X+Y)={}^{cc}X+{}^{cc}Y$,

(ii) ${}^{cc}X\,{}^{vv}f={}^{vv}(Xf)$

eşitlikleri geçerlidir (Salimov and Yıldırım 2014).

İspat: (i) Bu eşitlik (4.22) yardımıyla kolaylıkla gösterilebilir.

(ii) $X\in\Im_0^1(T\left(M_n\right))$ olmak üzere, (4.5) ve (4.22)'den

$$\begin{aligned}{}^{cc}X\,{}^{vv}f &= {}^{cc}X^{I}\partial_{I}{}^{vv}f\\ &= {}^{cc}X^{\bar{\alpha}}\underset{0}{\partial_{\bar{\alpha}}{}^{vv}f}+{}^{cc}X^{\alpha}\partial_{\alpha}{}^{vv}f+{}^{cc}X^{\bar{\bar{\alpha}}}\underset{0}{\partial_{\bar{\bar{\alpha}}}{}^{vv}f}\\ &= X^{\alpha}\partial_{\alpha}{}^{vv}f\\ &= {}^{vv}(Xf)\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 4.2.1.3: Keyfi $X, Y \in \Im_0^1(T(M_n))$; $\omega \in \Im_1^0(M_n)$ ve $F \in \Im_1^1(T(M_n))$ için Lie parantezi kullanılarak

(i) $[{}^{cc}X, {}^{cc}Y] = {}^{cc}[X, Y]$ $(L_{{}^{cc}X}{}^{cc}Y = {}^{cc}(L_X Y))$,

(ii) $[{}^{cc}X, {}^{vv}\omega] = {}^{vv}(L_X \omega)$,

(iii) $[{}^{cc}X, \gamma F] = \gamma(L_X F)$

eşitliği elde edilir. Burada L_X ile X 'e göre Lie türevi gösterilmiştir (Salimov and Yıldırım 2014).

İspat: (i) Keyfi $X, Y \in \Im_0^1(T(M_n))$ için $(x^{\overline{\beta}}, x^{\beta}, x^{\overline{\overline{\beta}}})$ koordinatlarına göre $t^*(M_n)$ üzerinde tanımlı $[{}^{cc}X, {}^{cc}Y]$ 'nin bileşenleri $\begin{pmatrix} [{}^{cc}X, {}^{cc}Y]^{\overline{\beta}} \\ [{}^{cc}X, {}^{cc}Y]^{\beta} \\ [{}^{cc}X, {}^{cc}Y]^{\overline{\overline{\beta}}} \end{pmatrix}$ olmak üzere (4.22)'den

$$[{}^{cc}X, {}^{cc}Y]^J = ({}^{cc}X)^I \partial_I ({}^{cc}Y)^J - ({}^{cc}Y)^I \partial_I ({}^{cc}X)^J$$

yazılır. Burada (4.22) kullanılarak, $J = \overline{\beta}$ için

$$\begin{aligned}
[{}^{cc}X, {}^{cc}Y]^{\overline{\beta}} &= ({}^{cc}X)^I \partial_I ({}^{cc}Y)^{\overline{\beta}} - ({}^{cc}Y)^I \partial_I ({}^{cc}X)^{\overline{\beta}} \\
&= ({}^{cc}X)^{\overline{\alpha}} \partial_{\overline{\alpha}} ({}^{cc}Y)^{\overline{\beta}} + ({}^{cc}X)^{\alpha} \partial_{\alpha} ({}^{cc}Y)^{\overline{\beta}} + ({}^{cc}X)^{\overline{\overline{\alpha}}} \underbrace{\partial_{\overline{\overline{\alpha}}} ({}^{cc}Y)^{\overline{\beta}}}_{0} \\
&\quad - ({}^{cc}Y)^{\overline{\alpha}} \partial_{\overline{\alpha}} ({}^{cc}X)^{\overline{\beta}} - ({}^{cc}Y)^{\alpha} \partial_{\alpha} ({}^{cc}X)^{\overline{\beta}} - ({}^{cc}Y)^{\overline{\overline{\alpha}}} \underbrace{\partial_{\overline{\overline{\alpha}}} ({}^{cc}X)^{\overline{\beta}}}_{0} \\
&= y^{\varepsilon} \partial_{\varepsilon} X^{\alpha} \underbrace{\partial_{\overline{\alpha}} y^{\sigma}}_{\delta_{\alpha}^{\sigma}} \partial_{\sigma} Y^{\beta} + X^{\alpha} \partial_{\alpha} (y^{\varepsilon} \partial_{\varepsilon} Y^{\beta}) \\
&\quad - y^{\varepsilon} \partial_{\varepsilon} Y^{\alpha} \underbrace{\partial_{\overline{\alpha}} y^{\sigma}}_{\delta_{\alpha}^{\sigma}} \partial_{\sigma} X^{\beta} - Y^{\alpha} \partial_{\alpha} (y^{\varepsilon} \partial_{\varepsilon} X^{\beta}) \\
&= y^{\varepsilon} \left(\partial_{\varepsilon} X^{\sigma}\right)\left(\partial_{\sigma} Y^{\beta}\right) + y^{\varepsilon} X^{\alpha} \partial_{\alpha} \partial_{\varepsilon} Y^{\beta}
\end{aligned}$$

$$-y^{\varepsilon}\left(\partial_{\varepsilon}Y^{\sigma}\right)\left(\partial_{\sigma}X^{\beta}\right)-y^{\varepsilon}Y^{\alpha}\partial_{\alpha}\partial_{\varepsilon}X^{\beta}$$
$$=y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}[X,Y]^{\beta}$$

elde edilir. $J=\beta$ için

$$\begin{aligned}
[{}^{cc}X,{}^{cc}Y]^{\beta} &= ({}^{cc}X)^{I}\partial_{I}({}^{cc}Y)^{\beta}-({}^{cc}Y)^{I}\partial_{I}({}^{cc}X)^{\beta}\\
&= ({}^{cc}X)^{\bar{\alpha}}\underbrace{\partial_{\bar{\alpha}}({}^{cc}Y)^{\beta}}_{0}+({}^{cc}X)^{\alpha}\partial_{\alpha}({}^{cc}Y)^{\beta}+({}^{cc}X)^{\bar{\bar{\alpha}}}\underbrace{\partial_{\bar{\bar{\alpha}}}({}^{cc}Y)^{\beta}}_{0}\\
&\quad -({}^{cc}Y)^{\bar{\alpha}}\underbrace{\partial_{\bar{\alpha}}({}^{cc}X)^{\beta}}_{0}-({}^{cc}Y)^{\alpha}\partial_{\alpha}({}^{cc}X)^{\beta}-({}^{cc}Y)^{\bar{\bar{\alpha}}}\underbrace{\partial_{\bar{\bar{\alpha}}}({}^{cc}X)^{\beta}}_{0}\\
&= ({}^{cc}X)^{\alpha}\partial_{\alpha}({}^{cc}Y)^{\beta}-({}^{cc}Y)^{\alpha}\partial_{\alpha}({}^{cc}X)^{\beta}\\
&= X^{\alpha}\partial_{\alpha}Y^{\beta}-Y^{\alpha}\partial_{\alpha}X^{\beta}\\
&= [X,Y]^{\beta}
\end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak $J=\bar{\bar{\beta}}$ için

$$\begin{aligned}
[{}^{cc}X,{}^{cc}Y]^{\bar{\bar{\beta}}} &= ({}^{cc}X)^{I}\partial_{I}({}^{cc}Y)^{\bar{\bar{\beta}}}-({}^{cc}Y)^{I}\partial_{I}({}^{cc}X)^{\bar{\bar{\beta}}}\\
&= ({}^{cc}X)^{\bar{\alpha}}\underbrace{\partial_{\bar{\alpha}}({}^{cc}Y)^{\bar{\bar{\beta}}}}_{0}+({}^{cc}X)^{\alpha}\partial_{\alpha}({}^{cc}Y)^{\bar{\bar{\beta}}}+({}^{cc}X)^{\bar{\bar{\alpha}}}\partial_{\bar{\bar{\alpha}}}({}^{cc}Y)^{\bar{\bar{\beta}}}\\
&\quad -({}^{cc}Y)^{\bar{\alpha}}\underbrace{\partial_{\bar{\alpha}}({}^{cc}X)^{\bar{\bar{\beta}}}}_{0}-({}^{cc}Y)^{\alpha}\partial_{\alpha}({}^{cc}X)^{\bar{\bar{\beta}}}-({}^{cc}Y)^{\bar{\bar{\alpha}}}\partial_{\bar{\bar{\alpha}}}({}^{cc}X)^{\bar{\bar{\beta}}}\\
&= -X^{\alpha}\partial_{\alpha}p_{\varepsilon}(\partial_{\beta}Y^{\varepsilon})+p_{\varepsilon}\partial_{\alpha}X^{\varepsilon}(\partial_{\beta}Y^{\alpha})+Y^{\alpha}\partial_{\alpha}p_{\varepsilon}(\partial_{\beta}X^{\varepsilon})-p_{\varepsilon}\partial_{\alpha}Y^{\varepsilon}(\partial_{\beta}X^{\alpha})\\
&= p_{\varepsilon}(-X^{\alpha}\partial_{\alpha}\partial_{\beta}Y^{\varepsilon}+\partial_{\beta}Y^{\alpha}\partial_{\alpha}X^{\varepsilon}+Y^{\alpha}\partial_{\alpha}\partial_{\beta}X^{\varepsilon}-\partial_{\beta}X^{\alpha}\partial_{\alpha}Y^{\varepsilon})\\
&= -p_{\varepsilon}(\partial_{\beta}\underbrace{(X^{\alpha}\partial_{\alpha}Y^{\varepsilon}-Y^{\alpha}\partial_{\alpha}X^{\varepsilon})}_{[X,Y]^{\varepsilon}})\\
&= -p_{\varepsilon}(\partial_{\beta}[X,Y]^{\varepsilon})
\end{aligned}$$

elde edilir. $(x^{\bar{\beta}},x^{\beta},x^{\bar{\bar{\beta}}})$ koordinatlarına göre $t^{*}(M_{n})$ üzerindeki ${}^{cc}[X,Y]$ tam lifti

$$ {}^{cc}[X,Y]=\begin{pmatrix} y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}[X,Y]^{\beta} \\ [X,Y]^{\beta} \\ -p_{\varepsilon}(\partial_{\beta}[X,Y]^{\varepsilon}) \end{pmatrix} $$

şeklindeki bileşenlere sahip olup $[{}^{cc}X,{}^{cc}Y]={}^{cc}[X,Y]$ eşitliği gösterilmiş olur.

(ii) Keyfi $\omega\in\Im_1^0(M_n)$ ve $X\in\Im_0^1(T(M_n))$ için $(x^{\overline{\beta}},x^{\beta},x^{\overline{\overline{\beta}}})$ koordinatlarına göre $t^*(M_n)$ üzerinde tanımlı $[{}^{cc}X,{}^{vv}\omega]$ 'nın bileşenleri $\begin{pmatrix} [{}^{cc}X,{}^{vv}\omega]^{\overline{\beta}} \\ [{}^{cc}X,{}^{vv}\omega]^{\beta} \\ [{}^{cc}X,{}^{vv}\omega]^{\overline{\overline{\beta}}} \end{pmatrix}$ olmak üzere (4.6) ve (4.22)'den

$$ [{}^{cc}X,{}^{vv}\omega]^{J}=({}^{cc}X)^{I}\partial_{I}({}^{vv}\omega)^{J}-({}^{vv}\omega)^{I}\partial_{I}({}^{cc}X)^{J} $$

yazılır. Burada (4.6) ve (4.22) kullanılarak, $J=\overline{\beta}$ için

$$ \begin{aligned} [{}^{cc}X,{}^{vv}\omega]^{\overline{\beta}} &= ({}^{cc}X)^{I}\partial_{I}\underbrace{({}^{vv}\omega)^{\overline{\beta}}}_{0}-({}^{vv}\omega)^{I}\partial_{I}({}^{cc}X)^{\overline{\beta}} \\ &= -\underbrace{({}^{vv}\omega)^{\overline{\alpha}}}_{0}\partial_{\overline{\alpha}}({}^{cc}X)^{\overline{\beta}}-\underbrace{({}^{vv}\omega)^{\alpha}}_{0}\partial_{\alpha}({}^{cc}X)^{\overline{\beta}}-({}^{vv}\omega)^{\overline{\overline{\alpha}}}\partial_{\overline{\overline{\alpha}}}\underbrace{({}^{cc}X)^{\overline{\beta}}}_{y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}X^{\beta}} \\ &= -({}^{vv}\omega)^{\overline{\overline{\alpha}}}\underbrace{\partial_{\overline{\overline{\alpha}}}y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}X^{\beta}}_{0} \\ &= 0 \end{aligned} $$

elde edilir. $J=\beta$ için

$$ \begin{aligned} [{}^{cc}X,{}^{vv}\omega]^{\beta} &= ({}^{cc}X)^{I}\partial_{I}\underbrace{({}^{vv}\omega)^{\beta}}_{0}-({}^{vv}\omega)^{I}\partial_{I}({}^{cc}X)^{\beta} \\ &= -\underbrace{({}^{vv}\omega)^{\overline{\alpha}}}_{0}\partial_{\overline{\alpha}}({}^{cc}X)^{\beta}-\underbrace{({}^{vv}\omega)^{\alpha}}_{0}\partial_{\alpha}({}^{cc}X)^{\beta}-({}^{vv}\omega)^{\overline{\overline{\alpha}}}\partial_{\overline{\overline{\alpha}}}\underbrace{({}^{cc}X)^{\beta}}_{X^{\beta}} \end{aligned} $$

$$= -({}^{vv}\omega)^{\bar{\bar{\alpha}}}\,\underbrace{\partial_{\bar{\bar{\alpha}}} X^{\beta}}_{0}$$

$$= 0$$

elde edilir. Son olarak $J = \bar{\bar{\beta}}$ için

$$[{}^{cc}X, {}^{vv}\omega]^{\bar{\bar{\beta}}} = ({}^{cc}X)^{I}\,\partial_{I}\,({}^{vv}\omega)^{\bar{\bar{\beta}}} - ({}^{vv}\omega)^{I}\,\partial_{I}\,({}^{cc}X)^{\bar{\bar{\beta}}}$$

$$= \underbrace{({}^{cc}X)^{\bar{\alpha}}}_{y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}X^{\alpha}}\,\underbrace{\partial_{\bar{\alpha}}\,\underbrace{({}^{vv}\omega)^{\bar{\bar{\beta}}}}_{\omega_{\beta}}}_{0} + \underbrace{({}^{cc}X)^{\alpha}}_{X^{\alpha}}\,\partial_{\alpha}\,\underbrace{({}^{vv}\omega)^{\bar{\bar{\beta}}}}_{\omega_{\beta}} + ({}^{cc}X)^{\bar{\bar{\alpha}}}\,\underbrace{\partial_{\bar{\bar{\alpha}}}\,\underbrace{({}^{vv}\omega)^{\bar{\bar{\beta}}}}_{\omega_{\beta}}}_{0}$$

$$-\underbrace{({}^{vv}\omega)^{\bar{\alpha}}}_{0}\,\partial_{\bar{\alpha}}({}^{cc}X)^{\bar{\bar{\beta}}} - \underbrace{({}^{vv}\omega)^{\alpha}}_{0}\,\partial_{\alpha}({}^{cc}X)^{\bar{\bar{\beta}}} - \underbrace{({}^{vv}\omega)^{\bar{\bar{\alpha}}}}_{\omega_{\alpha}}\,\partial_{\bar{\bar{\alpha}}}\,\underbrace{({}^{cc}X)^{\bar{\bar{\beta}}}}_{-p_{\varepsilon}(\partial_{\beta}X^{\varepsilon})}$$

$$= \underbrace{({}^{cc}X)^{\alpha}}_{X^{\alpha}}\,\partial_{\alpha}\,\underbrace{({}^{vv}\omega)^{\bar{\bar{\beta}}}}_{\omega_{\beta}} - \underbrace{({}^{vv}\omega)^{\bar{\bar{\alpha}}}}_{\omega_{\alpha}}\,\partial_{\bar{\bar{\alpha}}}\,\underbrace{({}^{cc}X)^{\bar{\bar{\beta}}}}_{-p_{\varepsilon}(\partial_{\beta}X^{\varepsilon})}$$

$$= X^{\alpha}\partial_{\alpha}\omega_{\beta} + \omega_{\alpha}\,\underbrace{\partial_{\bar{\bar{\alpha}}}\,p_{\varepsilon}}_{\delta^{\alpha}_{\varepsilon}}\,(\partial_{\beta}X^{\varepsilon})$$

$$= X^{\alpha}\partial_{\alpha}\omega_{\beta} + (\partial_{\beta}X^{\alpha})\omega_{\alpha}$$

$$= (L_{X}\omega)_{\beta}$$

elde edilir. $(x^{\bar{\beta}}, x^{\beta}, x^{\bar{\bar{\beta}}})$ koordinatlarına göre $t^{*}(M_{n})$ üzerindeki $(L_{X}\omega)$ 'nın ${}^{vv}(L_{X}\omega)$ dikey lifti

$${}^{vv}(L_{X}\omega) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (L_{X}\omega)_{\beta} \end{pmatrix}$$

şeklindeki bileşenlere sahip olup $[{}^{cc}X, {}^{vv}\omega] = {}^{vv}(L_{X}\omega)$ eşitliği gösterilmiş olur.

(iii) Keyfi $F \in \Im_1^1(T(M_n))$ ve $X \in \Im_0^1(T(M_n))$ için $(x^{\overline{\beta}}, x^{\beta}, x^{\overline{\overline{\beta}}})$ koordinatlarına göre $t^*(M_n)$ üzerinde tanımlı $[{}^{cc}X, \gamma F]$ 'in bileşenleri $\begin{pmatrix} [{}^{cc}X,\gamma F]^{\overline{\beta}} \\ [{}^{cc}X,\gamma F]^{\beta} \\ [{}^{cc}X,\gamma F]^{\overline{\overline{\beta}}} \end{pmatrix}$ olmak üzere (4.8) ve (4.22)'den

$$[{}^{cc}X, \gamma F]^J = ({}^{cc}X)^I \partial_I (\gamma F)^J - (\gamma F)^I \partial_I ({}^{cc}X)^J$$

yazılır. Burada (4.8) ve (4.22) kullanılarak, $J = \overline{\beta}$ için

$$\begin{aligned} [{}^{cc}X, \gamma F]^{\overline{\beta}} &= ({}^{cc}X)^I \partial_I \underbrace{(\gamma F)^{\overline{\beta}}}_{0} - (\gamma F)^I \partial_I ({}^{cc}X)^{\overline{\beta}} \\ &= -\underbrace{(\gamma F)^{\overline{\alpha}}}_{0} \partial_{\overline{\alpha}} ({}^{cc}X)^{\overline{\beta}} - \underbrace{(\gamma F)^{\alpha}}_{0} \partial_{\alpha} ({}^{cc}X)^{\overline{\beta}} - (\gamma F)^{\overline{\overline{\alpha}}} \underbrace{\partial_{\overline{\overline{\alpha}}} ({}^{cc}X)^{\overline{\beta}}}_{0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. $J = \beta$ için

$$\begin{aligned} [{}^{cc}X, \gamma F]^{\beta} &= ({}^{cc}X)^I \partial_I \underbrace{(\gamma F)^{\beta}}_{0} - (\gamma F)^I \partial_I \underbrace{({}^{cc}X)^{\beta}}_{X^{\beta}} \\ &= -\underbrace{(\gamma F)^{\overline{\alpha}}}_{0} \partial_{\overline{\alpha}} X^{\beta} - \underbrace{(\gamma F)^{\alpha}}_{0} \partial_{\alpha} X^{\beta} - (\gamma F)^{\overline{\overline{\alpha}}} \underset{0}{\partial_{\overline{\overline{\alpha}}} X^{\beta}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

Son olarak $J = \overline{\overline{\beta}}$ için

$$\begin{aligned} [{}^{cc}X, \gamma F]^{\overline{\overline{\beta}}} &= ({}^{cc}X)^I \partial_I (\gamma F)^{\overline{\overline{\beta}}} - (\gamma F)^I \partial_I ({}^{cc}X)^{\overline{\overline{\beta}}} \\ &= ({}^{cc}X)^{\overline{\alpha}} \partial_{\overline{\alpha}} (\gamma F)^{\overline{\overline{\beta}}} + ({}^{cc}X)^{\alpha} \partial_{\alpha} (\gamma F)^{\overline{\overline{\beta}}} + ({}^{cc}X)^{\overline{\overline{\alpha}}} \partial_{\overline{\overline{\alpha}}} (\gamma F)^{\overline{\overline{\beta}}} \end{aligned}$$

$$-\underbrace{(\gamma F)^{\bar{\alpha}}}_{0}\,\partial_{\bar{\alpha}}({}^{cc}X)^{\bar{\bar{\beta}}}-\underbrace{(\gamma F)^{\alpha}}_{0}\,\partial_{\alpha}({}^{cc}X)^{\bar{\bar{\beta}}}-(\gamma F)^{\bar{\bar{\alpha}}}\,\partial_{\bar{\bar{\alpha}}}({}^{cc}X)^{\bar{\bar{\beta}}}$$

$$= y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}X^{\alpha}\,\underset{0}{\partial_{\bar{\alpha}}}p_{\varepsilon}\,F^{\varepsilon}_{\beta}+X^{\alpha}\partial_{\alpha}p_{\varepsilon}F^{\varepsilon}_{\beta}$$

$$-p_{\varepsilon}(\partial_{\alpha}X^{\varepsilon})\,\underset{\delta^{\alpha}_{\varepsilon}}{\partial_{\bar{\bar{\alpha}}}p_{\varepsilon}}\,F^{\varepsilon}_{\beta}+p_{\varepsilon}F^{\varepsilon}_{\alpha}\,\underset{\delta^{\alpha}_{\varepsilon}}{\partial_{\bar{\bar{\alpha}}}p_{\varepsilon}}\,(\partial_{\beta}X^{\varepsilon})$$

$$= X^{\alpha}\partial_{\alpha}p_{\varepsilon}F^{\varepsilon}_{\beta}-p_{\varepsilon}(\partial_{\alpha}X^{\varepsilon})F^{\alpha}_{\beta}+p_{\varepsilon}F^{\varepsilon}_{\alpha}(\partial_{\beta}X^{\alpha})$$

$$= p_{\varepsilon}(X^{\alpha}\partial_{\alpha}F^{\varepsilon}_{\beta}-\partial_{\alpha}X^{\varepsilon}F^{\alpha}_{\beta}+\partial_{\beta}X^{\alpha}F^{\varepsilon}_{\alpha})$$

$$= p_{\varepsilon}(L_X F)^{\varepsilon}_{\beta}$$

elde edilir. $(x^{\bar{\beta}}, x^{\beta}, x^{\bar{\bar{\beta}}})$ koordinatlarına göre $t^*(M_n)$ üzerinde tanımlı $\gamma(L_X F)$

$$\gamma(L_X F)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_{\varepsilon}(L_X F)^{\varepsilon}_{\beta} \end{pmatrix}$$

şeklindeki bileşenlere sahip olup $[{}^{cc}X, \gamma F]=\gamma(L_X F)$ eşitliği gösterilmiş olur.

4.2.2. (0,2) tipli tensör alanlarının dikey lifti

$G_{\alpha\beta}$ lokal bileşenlerine sahip olan keyfi $G\in\Im^0_2(M_n)$ 'nin $t^*(M_n)$ pull-back demetine ${}^{vv}G$ dikey lifti, $(x^{\bar{\alpha}}, x^{\alpha}, x^{\bar{\bar{\alpha}}})$ koordinatlarına göre

$$^{vv}G=\left({}^{vv}G_{IJ}\right)=\begin{pmatrix} G_{\alpha\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G^{\alpha\beta} \end{pmatrix} \tag{4.23}$$

bileşenlerine sahiptir. (4.21) yardımıyla ${}^{vv}G_{I'J'} = A_{I'}^{I} A_{J'}^{J}\,{}^{vv}G_{IJ}$ olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Burada $(A_{J'}^{J}) = \overline{(A)}^{-1}$ şeklinde tanımlıdır.

Teorem 4.2.2.1: Keyfi $X, Y \in \Im_0^1(T(M_n))$; $G \in \Im_2^0(M_n)$ için

$$ {}^{vv}G\left({}^{cc}X, {}^{cc}Y\right) = {}^{vv}\left(G\left(X, Y\right)\right) $$

eşitliği geçerlidir.

İspat: Keyfi $X, Y \in \Im_0^1(T(M_n))$; $G \in \Im_2^0(M_n)$ için, (4.22) ve (4.23) kullanılarak

$$ \begin{aligned} {}^{vv}G\left({}^{cc}X, {}^{cc}Y\right) &= {}^{vv}G_{IJ}\left({}^{cc}X^{I}, {}^{cc}Y^{J}\right) = {}^{vv}G_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}\left({}^{cc}X^{\bar{\alpha}}\right)\left({}^{cc}Y^{\bar{\beta}}\right) + \underbrace{{}^{vv}G_{\bar{\alpha}\beta}\left({}^{cc}X^{\bar{\alpha}}\right)\left({}^{cc}Y^{\beta}\right)}_{0} + \underbrace{{}^{vv}G_{\bar{\alpha}\bar{\bar{\beta}}}\left({}^{cc}X^{\bar{\alpha}}\right)\left({}^{cc}Y^{\bar{\bar{\beta}}}\right)}_{0} \\ &= \underbrace{{}^{vv}G_{\alpha\bar{\beta}}\left({}^{cc}X^{\alpha}\right)\left({}^{cc}Y^{\bar{\beta}}\right)}_{0} + \underbrace{{}^{vv}G_{\alpha\beta}\left({}^{cc}X^{\alpha}\right)\left({}^{cc}Y^{\beta}\right)}_{0} + \underbrace{{}^{vv}G_{\alpha\bar{\bar{\beta}}}\left({}^{cc}X^{\alpha}\right)\left({}^{cc}Y^{\bar{\bar{\beta}}}\right)}_{0} \\ &= \underbrace{{}^{vv}G_{\bar{\bar{\alpha}}\bar{\beta}}\left({}^{cc}X^{\bar{\bar{\alpha}}}\right)\left({}^{cc}Y^{\bar{\beta}}\right)}_{0} + \underbrace{{}^{vv}G_{\bar{\bar{\alpha}}\beta}\left({}^{cc}X^{\bar{\bar{\alpha}}}\right)\left({}^{cc}Y^{\beta}\right)}_{0} + {}^{vv}G_{\bar{\bar{\alpha}}\bar{\bar{\beta}}}\left({}^{cc}X^{\bar{\bar{\alpha}}}\right)\left({}^{cc}Y^{\bar{\bar{\beta}}}\right) \\ &= G_{\alpha\beta}\, y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}X^{\alpha}\, y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}X^{\beta} + G^{\alpha\beta} p_{\varepsilon}(\partial_{\alpha}X^{\varepsilon})\, p_{\varepsilon}(\partial_{\beta}X^{\varepsilon}) \\ &= {}^{vv}\left(G\left(X, Y\right)\right) \end{aligned} $$

bulunur.

4.2.3. (1,1) tipli tensör alanlarının tam lifti

M_n ’in U komşuluğundaki F_{β}^{α} bileşenleri ile verilen $F = F_{\beta}^{\alpha}\partial_{\alpha} \otimes dx^{\beta}$ şeklindeki $F \in \Im_1^1(T(M_n))$ afinor alanının $t^{*}(M_n)$ pull-back demetine tam lifti indirgenmiş koordinatlara göre

$$ {}^{cc}F = ({}^{cc}F_J^I) = \begin{pmatrix} F_\beta^\alpha & y^\varepsilon \partial_\varepsilon F_\beta^\alpha & 0 \\ 0 & F_\beta^\alpha & 0 \\ 0 & p_\sigma(\partial_\beta F_\alpha^\sigma - \partial_\alpha F_\beta^\sigma) & F_\alpha^\beta \end{pmatrix} \tag{4.24} $$

bileşenlerine sahiptir. Burada (4.21)'den ${}^{cc}F$ matrisinin bileşenleri ${}^{cc}F_{J'}^{I'} = A_I^{I'} A_{J'}^J \, {}^{cc}F_J^I$ eşitliğinde yerine koyarak bu eşitliğin sağlandığını görürüz (Salimov and Yıldırım 2014).

İspat: Gerçekten de (4.21) ve (4.24) eşitliği dikkate alınarak ${}^{cc}F_{\beta'}^{\bar{\alpha}'}$ bileşeni

$$ \begin{aligned} {}^{cc}F_{\beta'}^{\bar{\alpha}'} &= A_{\bar{\alpha}}^{\bar{\alpha}'} A_{\beta'}^{\bar{\beta}} \, {}^{cc}F_{\bar{\beta}}^{\bar{\alpha}} + A_{\alpha}^{\bar{\alpha}'} A_{\beta'}^{\beta} \, {}^{cc}F_{\beta}^{\bar{\alpha}} + A_{\alpha}^{\bar{\alpha}'} A_{\beta'}^{\beta} \, {}^{cc}F_{\beta}^{\alpha} \\ &= A_\alpha^{\alpha'} A_{\beta'\sigma'}^\beta y^{\sigma'} F_\beta^\alpha + A_\alpha^{\alpha'} A_{\beta'}^\beta y^{\sigma'} \partial_{\sigma'} F_\beta^\alpha + A_{\alpha\ \sigma'}^{\alpha'} y^{\sigma'} A_{\beta'}^\beta F_\beta^\alpha \\ &= -y^{\sigma'} \left(\partial_{\sigma'} A_\alpha^{\alpha'}\right) A_{\beta'}^\beta F_\beta^\alpha + A_\alpha^{\alpha'} A_{\beta'}^\beta y^{\sigma'} \left(\partial_{\sigma'} F_\beta^\alpha\right) + y^{\sigma'} \left(\partial_{\sigma'} A_\alpha^{\alpha'}\right) A_{\beta'}^\beta F_\beta^\alpha \\ &= y^{\sigma'} A_\alpha^{\alpha'} \left(\partial_{\sigma'} A_{\beta'}^\beta\right) F_\beta^\alpha + y^{\sigma'} A_\alpha^{\alpha'} A_{\beta'}^\beta \left(\partial_{\sigma'} F_\beta^\alpha\right) + y^{\sigma'} \left(\partial_{\sigma'} A_\alpha^{\alpha'}\right) A_{\beta'}^\beta F_\beta^\alpha \\ &= y^{\sigma'} \partial_{\sigma'} \left(A_\alpha^{\alpha'} A_{\beta'}^\beta F_\beta^\alpha\right) \\ &= y^{\varepsilon'} \partial_{\varepsilon'} F_{\beta'}^{\alpha'} \end{aligned} $$

şeklindedir. Böylece ${}^{cc}F_{\beta'}^{\bar{\alpha}'} = y^{\varepsilon'} \partial_{\varepsilon'} F_{\beta'}^{\alpha'}$ elde edilir. ${}^{cc}F_J^I$ 'nin diğer bileşenleride benzer yolla bulunabilir.

Teorem 4.2.3.1: Keyfi $X \in \Im_0^1(T(M_n))$, $\omega \in \Im_1^0(M_n)$ ve $F \in \Im_1^1(T(M_n))$ için

(i) ${}^{cc}F \, {}^{cc}X = {}^{cc}(FX) + \gamma(L_X F)$,

(ii) ${}^{cc}F \, {}^{vv}\omega = {}^{vv}(\omega \circ F)$

eşitlikleri elde edilir. Burada L_X ile X 'e göre Lie türevi gösterilmiştir (Salimov and Yıldırım 2014).

İspat: (i) $X \in \Im_0^1(T(M_n))$ ve $F \in \Im_1^1(T(M_n))$ olmak üzere (4.8), (4.22) ve (4.24)'den

$$
\begin{aligned}
{}^{cc}F\,{}^{cc}X &= \begin{pmatrix} F_\beta^\alpha & y^\varepsilon \partial_\varepsilon F_\beta^\alpha & 0 \\ 0 & F_\beta^\alpha & 0 \\ 0 & p_\sigma(\partial_\beta F_\alpha^\sigma - \partial_\alpha F_\beta^\sigma) & F_\alpha^\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^\varepsilon \partial_\varepsilon X^\beta \\ X^\beta \\ -P_\varepsilon(\partial_\beta X^\varepsilon) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} F_\beta^\alpha y^\varepsilon \partial_\varepsilon X^\beta + y^\varepsilon \partial_\varepsilon F_\beta^\alpha X^\beta \\ F_\beta^\alpha X^\beta \\ p_\sigma(\partial_\beta F_\alpha^\sigma - \partial_\alpha F_\beta^\sigma) X^\beta - p_\varepsilon(\partial_\beta X^\varepsilon) F_\alpha^\beta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} y^\varepsilon \partial_\varepsilon F_\beta^\alpha X^\beta + F_\beta^\alpha y^\varepsilon \partial_\varepsilon X^\beta \\ (FX)^\alpha \\ p_\sigma(\partial_\beta F_\alpha^\sigma - \partial_\alpha F_\beta^\sigma) X^\beta - p_\varepsilon(\partial_\beta X^\varepsilon) F_\alpha^\beta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} y^\varepsilon \partial_\varepsilon (FX)^\alpha \\ (FX)^\alpha \\ -p_\sigma \partial_\alpha (FX)^\sigma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \underbrace{p_\sigma(X^\beta \partial_\beta F_\alpha^\sigma - (\partial_\alpha X^\beta) F_\beta^\sigma - (\partial_\beta X^\sigma) F_\alpha^\beta)}_{p_\sigma (L_X F)_\alpha^\sigma} \end{pmatrix} \\
&= \underbrace{\begin{pmatrix} y^\varepsilon \partial_\varepsilon (FX)^\alpha \\ (FX)^\alpha \\ -p_\sigma \partial_\alpha (FX)^\sigma \end{pmatrix}}_{{}^{cc}(FX)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_\sigma (L_X F)_\alpha^\sigma \end{pmatrix}}_{\gamma(L_X F)} \\
&= {}^{cc}(FX) + \gamma(L_X F)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece ${}^{cc}F\,{}^{cc}X = {}^{cc}(FX) + \gamma(L_X F)$ eşitliği gösterilmiş olur.

(ii) Keyfi $\omega \in \Im_1^0(M_n)$ ve $F \in \Im_1^1(T(M_n))$ için (4.6) ve (4.24)'den

$$
{}^{cc}F\,{}^{vv}\omega = \begin{pmatrix} F_\beta^\alpha & y^\varepsilon \partial_\varepsilon F_\beta^\alpha & 0 \\ 0 & F_\beta^\alpha & 0 \\ 0 & p_\sigma(\partial_\beta F_\alpha^\sigma - \partial_\alpha F_\beta^\sigma) & F_\alpha^\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_\beta \end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_\beta F_\alpha^\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (\omega \circ F)_\alpha \end{pmatrix}
$$

$$
={}^{vv}(\omega \circ F)
$$

elde edilir. Böylece ${}^{cc}F\,{}^{vv}\omega = {}^{vv}(\omega \circ F)$ eşitliği gösterilmiş olur.

Teorem 4.2.3.2: Keyfi $F \in \Im_1^1(T(M_n))$ için $F^2 = -I$ olmak üzere

$$
\left({}^{cc}F\right)^2 = -I - \gamma(N_F)
$$

eşitliği geçerlidir (Salimov and Yıldırım 2014).

İspat: Keyfi $F \in \Im_1^1(T(M_n))$ için (4.9) ve (4.24)'den

$$
\left({}^{cc}F\right)^2 = \begin{pmatrix} F_\beta^\alpha & y^\varepsilon\left(\partial_\varepsilon F_\beta^\alpha\right) & 0 \\ 0 & F_\beta^\alpha & 0 \\ 0 & p_\sigma(\partial_\beta F_\alpha^\sigma - \partial_\alpha F_\beta^\sigma) & F_\alpha^\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_\theta^\beta & y^\varepsilon\left(\partial_\varepsilon F_\theta^\beta\right) & 0 \\ 0 & F_\theta^\beta & 0 \\ 0 & p_\sigma(\partial_\theta F_\beta^\sigma - \partial_\beta F_\theta^\sigma) & F_\beta^\theta \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} -\delta_\theta^\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\delta_\theta^\alpha & 0 \\ 0 & -p_\sigma (N_F)_{\theta\alpha}^\sigma & -\delta_\alpha^\theta \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\delta_\theta^\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\delta_\theta^\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\delta_\alpha^\theta \end{pmatrix}}_{-I} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p_\sigma (N_F)_{\theta\alpha}^\sigma & 0 \end{pmatrix}}_{-\gamma(N_F)}
$$

$$
= -I - \gamma(N_F)
$$

bulunur. Burada $N_F \in \Im_2^1(M_n)$, $F \in \Im_1^1(T(M_n))$ afinor alanının Nijenhuis tensörüdür.

Teorem 4.2.3.3: N_F ve $N_{{}^{cc}F}$ sırasıyla $F \in \Im_1^1(T(M_n))$ ve ${}^{cc}F$ tam liftlerinin Nijenhuis tensörleri olsun. $N_{{}^{cc}F} = 0$ olması için gerek ve yeter şart $N_F = 0$ olmasıdır (Salimov and Yıldırım 2014).

İspat: Burada (4.24) eşitliği dikkate alınarak $\left(N_{{}^{cc}F}\right)_{\bar{\beta}\theta}^{\bar{\alpha}}$ bileşeni

$$
\begin{aligned}
\left(N_{{}^{cc}F}\right)_{\bar{\beta}\theta}^{\bar{\alpha}} &= {}^{cc}F_{\bar{\beta}}^{\bar{\gamma}}\partial_{\bar{\gamma}}\, {}^{cc}F_{\theta}^{\bar{\alpha}} - {}^{cc}F_{\theta}^{\gamma}\partial_{\gamma}\, {}^{cc}F_{\bar{\beta}}^{\bar{\alpha}} - {}^{cc}F_{\bar{\gamma}}^{\bar{\alpha}}\partial_{\bar{\beta}}\, {}^{cc}F_{\theta}^{\bar{\gamma}} + {}^{cc}F_{\bar{\gamma}}^{\bar{\alpha}}\partial_{\theta}\, {}^{cc}F_{\bar{\beta}}^{\bar{\gamma}} \\
&= F_{\beta}^{\gamma}\, \underbrace{\partial_{\bar{\gamma}} y^{\varepsilon}}_{\delta_{\gamma}^{\varepsilon}}\, \partial_{\varepsilon} F_{\beta}^{\alpha} - F_{\theta}^{\gamma}\partial_{\gamma} F_{\beta}^{\alpha} - F_{\gamma}^{\alpha}\, \underbrace{\partial_{\bar{\beta}} y^{\varepsilon}}_{\delta_{\beta}^{\varepsilon}}\, \partial_{\varepsilon} F_{\theta}^{\gamma} + F_{\gamma}^{\alpha}\partial_{\theta} F_{\beta}^{\gamma} \\
&= F_{\beta}^{\gamma}\partial_{\gamma} F_{\theta}^{\alpha} - F_{\theta}^{\gamma}\partial_{\gamma} F_{\beta}^{\alpha} - F_{\gamma}^{\alpha}\partial_{\beta} F_{\theta}^{\gamma} + F_{\gamma}^{\alpha}\partial_{\theta} F_{\beta}^{\gamma} \\
&= F_{\beta}^{\gamma}\partial_{\gamma} F_{\theta}^{\alpha} - F_{\theta}^{\gamma}\partial_{\gamma} F_{\beta}^{\alpha} - F_{\gamma}^{\alpha}\left(\partial_{\beta} F_{\theta}^{\gamma} + \partial_{\theta} F_{\beta}^{\gamma}\right) \\
&= \left(N_F\right)_{\beta\theta}^{\alpha} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

olduğundan $\left(N_F\right)_{\beta\theta}^{\alpha} = 0$ elde edilir. $N_{{}^{cc}F} : \left(N_{{}^{cc}F}\right)_{BC}^{A}$ 'nin benzer şekilde diğer bileşenlerinin de sıfıra eşit olduğu bulunabilir. Burada $A = \left(\bar{\alpha}, \alpha, \bar{\bar{\alpha}}\right)$, $B = \left(\bar{\beta}, \beta, \bar{\bar{\beta}}\right)$, $C = \left(\bar{\theta}, \theta, \bar{\bar{\theta}}\right)$.

Teorem 4.2.3.4: Keyfi $X \in \Im_0^1(T(M_n))$ ve $F \in \Im_1^1(T(M_n))$ için $L_{{}^{cc}X}\, {}^{cc}F = 0$ olması $L_X F = 0$ ile mümkündür (Salimov and Yıldırım 2014).

İspat: Eğer $X, Y, Z \in \Im_0^1(T(M_n))$ ve $F \in \Im_1^1(T(M_n))$ ise, Teorem 4.2.1.3 ve Teorem 4.2.3.1 kullanılarak

$$
\begin{aligned}
\left(L_{{}^{cc}X}{}^{cc}F\right){}^{cc}Y &= L_{{}^{cc}X}{}^{cc}F\,{}^{cc}Y - {}^{cc}F\left(L_{{}^{cc}X}{}^{cc}Y\right) \\
&= L_{{}^{cc}X}\left({}^{cc}\left(FY\right)+\gamma\left(L_Y F\right)\right) - {}^{cc}F\,{}^{cc}\left(L_X Y\right) \\
&= {}^{cc}L_X\,{}^{cc}\left(FY\right) + L_{{}^{cc}X}\gamma\left(L_Y F\right) - {}^{cc}\left(F\left(L_X Y\right)\right) - \gamma_{[X,Y]}F \\
&= \underbrace{{}^{cc}\left(L_X\left(FY\right)\right) - {}^{cc}\left(F\left(L_X Y\right)\right)}_{{}^{cc}\left(\left(L_X F\right)Y\right)} + L_{{}^{cc}X}\gamma\left(L_Y F\right) - \gamma_{[X,Y]}F \\
&= {}^{cc}\left(\left(L_X F\right)Y\right) + L_{{}^{cc}X}[{}^{cc}Y,\gamma F] - \gamma_{[X,Y]}F
\end{aligned} \tag{4.25}
$$

bulunur. Jakobi özdeşliği $\left([X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0\right)$ yardımıyla, Teorem 4.2.1.3'ün (i) ve (iii)'ü kullanılarak

$$
\begin{aligned}
&[{}^{cc}X,[{}^{cc}Y,\gamma F]]+[{}^{cc}Y,[\gamma F,{}^{cc}X]]+[\gamma F,[{}^{cc}X,{}^{cc}Y]]=0, \\
&[{}^{cc}X,[{}^{cc}Y,\gamma F]]+[{}^{cc}Y,[\gamma F,{}^{cc}X]]-[[{}^{cc}X,{}^{cc}Y],\gamma F]=0, \\
&[{}^{cc}X,[{}^{cc}Y,\gamma F]]+[{}^{cc}Y,[\gamma F,{}^{cc}X]]-[{}^{cc}[X,Y],\gamma F]=0, \\
&L_{{}^{cc}X}[{}^{cc}Y,\gamma F]+[{}^{cc}Y,[\gamma F,{}^{cc}X]]-\gamma_{[X,Y]}F=0, \\
&L_{{}^{cc}X}[{}^{cc}Y,\gamma F]-\gamma_{[X,Y]}F=-[{}^{cc}Y,[\gamma F,{}^{cc}X]]
\end{aligned} \tag{4.26}
$$

elde edilir.

(4.26) eşitliği (4.25)'de yerine yazılarak, Teorem 4.2.1.3'den

$$
\begin{aligned}
&= {}^{cc}\left(\left(L_X F\right)Y\right) - [{}^{cc}Y,[\gamma F,{}^{cc}X]] \\
&= {}^{cc}\left(\left(L_X F\right)Y\right) + [{}^{cc}Y,[{}^{cc}X,\gamma F]] \\
&= {}^{cc}\left(\left(L_X F\right)Y\right) + [{}^{cc}Y,\gamma\left(L_X F\right)] \\
&= {}^{cc}\left(\left(L_X F\right)Y\right) + \gamma\left(L_Y L_X F\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. $L_X F = 0$ olması durumunda, son eşitlikten $L_{{}^{cc}X} {}^{cc}F = 0$ olur.

$(T(M_n), F)$, $n = 2k$; $N_F = 0$ şartı dahilinde kompleks manifold olmak üzere, $(T(M_n), F)$ kompleks manifoldu üzerinde $L_X F = 0$ olması koşuluyla X vektör alanı bir holomorfik vektör alanını tanımlar (Salimov and Yıldırım 2014).

Buradan; Teorem 4.2.3.2, Teorem 4.2.3.3 ve Teorem 4.2.3.4 yardımıyla aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 4.2.3.5: X vektör alanı F 'e göre holomorfik ise ${}^{cc}X$ tam lifti, ${}^{cc}F$ kompleks yapısına göre holomorfiktir (Salimov and Yıldırım 2014).

4.2.4. $\gamma-$operatörü

Bu bölümde, $t^*(M_n)$ üzerinde yeni $\gamma-$operatörleri tanımlanacaktır. X, $T(M_n)$ üzerinde tanımlı bir vektör alanı olmak üzere $t^*(M_n)$ üzerindeki γX fonksiyonu

$$\gamma X = p_\beta X^\beta \tag{4.27}$$

ile tanımlıdır (Salimov and Yıldırım 2014).

Keyfi $F \in \Im_1^1(T(M_n))$ için (4.21) matrisi kullanılarak $(\gamma F)' = \bar{A}(\gamma F)$ olduğu gösterilebilir. Burada γF $(x^{\bar{\alpha}}, x^\alpha, x^{\bar{\bar{\alpha}}})$ koordinat sistemine göre

$$\gamma F = (\gamma F^A) = \begin{pmatrix} y^\varepsilon F_\varepsilon^\alpha \\ 0 \\ -p_\sigma F_\alpha^\sigma \end{pmatrix} \tag{4.28}$$

şeklindeki bileşenlere sahiptir (Salimov and Yıldırım 2014).

Keyfi $T \in \Im_2^1(M_n)$ için

$$\gamma T = (\gamma T_B^A) = \begin{pmatrix} 0 & y^\varepsilon T_{\varepsilon\ \beta}^{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p_\sigma T_{\beta\ \alpha}^{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \tag{4.29}$$

ile verilir. (4.21) matrisi yardımıyla $\gamma T_{B'}^{A'} = A_A^{A'} A_{B'}^{B} \gamma T_B^A$ olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Burada $(\bar{A})^{-1} = (A_{B'}^{B})$ matrisiyle $\bar{A}$ 'nın tersi gösterilmiştir (Salimov and Yıldırım 2014).

Teorem 4.2.4.1: Keyfi $X, Z \in \Im_0^1(T(M_n))$, $f \in \Im_0^0(M_n)$, $\omega \in \Im_1^0(M_n)$ ve $F \in \Im_1^1(T(M_n))$ için

(i) ${}^{vv}\omega(\gamma Z) = {}^{vv}(\omega(Z))$,

(ii) $(\gamma F)({}^{vv}f) = 0$,

(iii) $(\gamma F)\gamma Z = -\gamma(FZ)$,

(iv) ${}^{cc}X(\gamma Z) = \gamma[X, Z]$

eşitlikleri elde edilir (Salimov and Yıldırım 2014).

İspat: (i) Keyfi $\omega \in \Im_1^0(M_n)$ ve $Z \in \Im_0^1(T(M_n))$ için (4.6) ve (4.27)'den

$$\begin{aligned} {}^{vv}\omega(\gamma Z) &= {}^{vv}\omega^I \partial_I(\gamma Z) \\ &= {}^{vv}\omega^{\bar{\alpha}} \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}}(p_\beta Z^\beta)}_{0} + \underbrace{{}^{vv}\omega^{\alpha}}_{0} \partial_\alpha(p_\beta Z^\beta) + {}^{vv}\omega^{\bar{\bar{\alpha}}} \underbrace{\partial_{\bar{\bar{\alpha}}}(p_\beta Z^\beta)}_{\delta_\beta^\alpha} \\ &= \omega_\alpha Z^\alpha \\ &= {}^{vv}(\omega(Z)) \end{aligned}$$

elde edilir.

(ii) Keyfi $F \in \Im_1^1(T(M_n))$ için (4.5) ve (4.28) kullanılarak

$$
\begin{aligned}
(\gamma F)({}^{vv} f) &= (\gamma F)^I \partial_I ({}^{vv} f) \\
&= (\gamma F)^{\bar{\alpha}} \partial_{\bar{\alpha}} ({}^{vv} f) + \underset{0}{(\gamma F)^{\alpha}} \partial_{\alpha} ({}^{vv} f) + (\gamma F)^{\bar{\bar{\alpha}}} \partial_{\bar{\bar{\alpha}}} ({}^{vv} f) \\
&= y^{\varepsilon} F_{\varepsilon}^{\alpha} \underset{0}{\partial_{\bar{\alpha}} f} - p_{\sigma} F_{\alpha}^{\sigma} \underset{0}{\partial_{\bar{\bar{\alpha}}} f} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

elde edilir. Ayrıca $(\gamma F)({}^{vv} f) = 0$ eşitliğinden γF 'in $t^*(M_n)$ üzerinde dikey vektör alanı olduğu görülmektedir.

(iii) Keyfi $F \in \Im_1^1(T(M_n))$ ve $Z \in \Im_0^1(T(M_n))$ için (4.27) ve (4.28)'den

$$
\begin{aligned}
(\gamma F)\gamma Z &= (\gamma F)^I \partial_I (\gamma Z) \\
&= (\gamma F)^{\bar{\alpha}} \partial_{\bar{\alpha}} (p_{\beta} Z^{\beta}) + \underset{0}{(\gamma F)^{\alpha}} \partial_{\alpha} (p_{\beta} Z^{\beta}) + (\gamma F)^{\bar{\bar{\alpha}}} \partial_{\bar{\bar{\alpha}}} (p_{\beta} Z^{\beta}) \\
&= y^{\varepsilon} F_{\varepsilon}^{\alpha} \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}} (p_{\beta}}_{0} Z^{\beta}) - p_{\sigma} F_{\alpha}^{\sigma} \underbrace{\partial_{\bar{\bar{\alpha}}} (p_{\beta}}_{\delta_{\beta}^{\alpha}} Z^{\beta}) \\
&= -p_{\sigma} F_{\alpha}^{\sigma} Z^{\alpha} = -p_{\sigma} (FZ)^{\sigma} \\
&= -\gamma(FZ)
\end{aligned}
$$

bulunur.

(iv) Keyfi $X, Z \in \Im_0^1(T(M_n))$ için (4.22) ve (4.27) kullanılarak

$$
\begin{aligned}
{}^{cc} X \gamma(Z) &= {}^{cc} X^I \partial_I (\gamma Z) \\
&= {}^{cc} X^{\bar{\alpha}} \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}} (p_{\beta}}_{0} Z^{\beta}) + {}^{cc} X^{\alpha} \partial_{\alpha} (p_{\beta} Z^{\beta}) + {}^{cc} X^{\bar{\bar{\alpha}}} \underbrace{\partial_{\bar{\bar{\alpha}}} (p_{\beta}}_{\delta_{\beta}^{\alpha}} Z^{\beta})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= X^{\alpha}\partial_{\alpha}(p_{\beta}Z^{\beta}) - p_{\beta}(\partial_{\alpha}X^{\beta})Z^{\alpha} \\
&= p_{\beta}(X^{\alpha}\partial_{\alpha}Z^{\beta} - Z^{\alpha}\partial_{\alpha}X^{\beta}) \\
&= p_{\beta}[X,Z]^{\beta} \\
&= \gamma[X,Z]
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Teorem 4.2.4.2: Keyfi $X \in \Im_0^1(T(M_n))$ ve $F,G \in \Im_1^1(T(M_n))$ için Lie parantezi kullanılarak

(i) $[\gamma F, \gamma G] = \gamma[F,G] + 2\gamma[F,G]$,

(ii) $[{}^{cc}X, \gamma F] = \gamma(L_X F)$

eşitlikleri elde edilir. Burada X 'e göre Lie türevi L_X ile gösterilmiştir (Salimov and Yıldırım 2014).

İspat: (i) Keyfi $F,G \in \Im_1^1(T(M_n))$ için $t^*(M_n)$ üzerinde $(x^{\bar\beta}, x^{\beta}, x^{\bar{\bar\beta}})$ koordinatlarına göre $[\gamma F, \gamma G]$ 'nin bileşenleri $\begin{pmatrix} [\gamma F,\gamma G]^{\bar\beta} \\ [\gamma F,\gamma G]^{\beta} \\ [\gamma F,\gamma G]^{\bar{\bar\beta}} \end{pmatrix}$ olmak üzere (4.28) kullanılarak

$$
\begin{aligned}
[\gamma F,\gamma G]^J &= (\gamma F)^I \partial_I (\gamma G)^J - (\gamma G)^I \partial_I (\gamma F)^J \\
&= (\gamma F)^{\bar\alpha}\partial_{\bar\alpha}(\gamma G)^J + \underbrace{(\gamma F)^{\alpha}\partial_{\alpha}(\gamma G)^J}_{0} + (\gamma F)^{\bar{\bar\alpha}}\partial_{\bar{\bar\alpha}}(\gamma G)^J \\
&\quad - (\gamma G)^{\bar\alpha}\partial_{\bar\alpha}(\gamma F)^J - \underbrace{(\gamma G)^{\alpha}\partial_{\alpha}(\gamma F)^J}_{0} - (\gamma G)^{\bar{\bar\alpha}}\partial_{\bar{\bar\alpha}}(\gamma F)^J \\
&= (\gamma F)^{\bar\alpha}\partial_{\bar\alpha}(\gamma G)^J + (\gamma F)^{\bar{\bar\alpha}}\partial_{\bar{\bar\alpha}}(\gamma G)^J \\
&\quad - (\gamma G)^{\bar\alpha}\partial_{\bar\alpha}(\gamma F)^J - (\gamma G)^{\bar{\bar\alpha}}\partial_{\bar{\bar\alpha}}(\gamma F)^J
\end{aligned}
$$

yazılır. Burada (4.28) kullanılarak, $J=\bar{\beta}$ için

$$
\begin{aligned}
[\gamma F,\gamma G]^{\bar\beta} &= (\gamma F)^{\bar\alpha}\partial_{\bar\alpha}(\gamma G)^{\bar\beta} + (\gamma F)^{\bar{\bar\alpha}}\partial_{\bar{\bar\alpha}}(\gamma G)^{\bar\beta} - (\gamma G)^{\bar\alpha}\partial_{\bar\alpha}(\gamma F)^{\bar\beta} - (\gamma G)^{\bar{\bar\alpha}}\partial_{\bar{\bar\alpha}}(\gamma F)^{\bar\beta} \\
&= \left(y^{\varepsilon}F^{\alpha}_{\varepsilon}\right)\underset{\delta^{\varepsilon}_{\alpha}}{\partial_{\bar\alpha}y^{\varepsilon}}\, G^{\beta}_{\varepsilon} - p_{\sigma}F^{\sigma}_{\alpha}\,\underset{0}{\partial_{\bar{\bar\alpha}}y^{\varepsilon}}\, G^{\beta}_{\varepsilon} - y^{\varepsilon}G^{\alpha}_{\varepsilon}\,\underset{\delta^{\varepsilon}_{\alpha}}{\partial_{\bar\alpha}y^{\varepsilon}}\, F^{\beta}_{\varepsilon} + p_{\sigma}G^{\sigma}_{\alpha}\,\underset{0}{\partial_{\bar{\bar\alpha}}y^{\varepsilon}}\, F^{\beta}_{\varepsilon} \\
&= y^{\varepsilon}F^{\alpha}_{\varepsilon}G^{\beta}_{\alpha} - y^{\varepsilon}G^{\alpha}_{\varepsilon}F^{\beta}_{\alpha} \\
&= y^{\varepsilon}\left(F\circ G - G\circ F\right)^{\beta}_{\varepsilon} \\
&= y^{\varepsilon}\left[F,G\right]^{\beta}_{\varepsilon}
\end{aligned}
$$

$J=\beta$ için

$$
\begin{aligned}
[\gamma F,\gamma G]^{\beta} &= (\gamma F)^{\bar\alpha}\underset{0}{\partial_{\bar\alpha}(\gamma G)^{\beta}} + (\gamma F)^{\bar{\bar\alpha}}\underset{0}{\partial_{\bar{\bar\alpha}}(\gamma G)^{\beta}} - (\gamma G)^{\bar\alpha}\partial_{\bar\alpha}\underbrace{(\gamma F)^{\beta}}_{0} - (\gamma G)^{\bar{\bar\alpha}}\partial_{\bar{\bar\alpha}}\underbrace{(\gamma F)^{\beta}}_{0} \\
&= 0\,,
\end{aligned}
$$

son olarak $J=\bar{\bar\beta}$ için

$$
\begin{aligned}
[\gamma F,\gamma G]^{\bar{\bar\beta}} &= (\gamma F)^{\bar\alpha}\partial_{\bar\alpha}(\gamma G)^{\bar{\bar\beta}} + (\gamma F)^{\bar{\bar\alpha}}\partial_{\bar{\bar\alpha}}(\gamma G)^{\bar{\bar\beta}} - (\gamma G)^{\bar\alpha}\partial_{\bar\alpha}(\gamma F)^{\bar{\bar\beta}} - (\gamma G)^{\bar{\bar\alpha}}\partial_{\bar{\bar\alpha}}(\gamma F)^{\bar{\bar\beta}} \\
&= -y^{\varepsilon}F^{\alpha}_{\varepsilon}\,\underset{0}{\partial_{\bar\alpha}p_{\sigma}}\, G^{\sigma}_{\beta} + p_{\sigma}F^{\sigma}_{\alpha}\,\underset{\delta^{\alpha}_{\sigma}}{\partial_{\bar{\bar\alpha}}p_{\sigma}}\, G^{\sigma}_{\beta} + y^{\varepsilon}G^{\alpha}_{\varepsilon}\,\underset{0}{\partial_{\bar\alpha}p_{\sigma}}\, F^{\sigma}_{\beta} - p_{\sigma}G^{\sigma}_{\alpha}\,\underset{\delta^{\alpha}_{\sigma}}{\partial_{\bar{\bar\alpha}}p_{\sigma}}\, F^{\sigma}_{\beta} \\
&= p_{\varepsilon}F^{\sigma}_{\alpha}G^{\alpha}_{\beta} - p_{\varepsilon}G^{\sigma}_{\alpha}F^{\alpha}_{\beta} \\
&= p_{\sigma}(F^{\sigma}_{\alpha}G^{\alpha}_{\beta} - G^{\sigma}_{\alpha}F^{\alpha}_{\beta}) \\
&= p_{\sigma}[F,G]^{\sigma}_{\beta}
\end{aligned}
$$

elde edilir. $(x^{\bar\beta}, x^{\beta}, x^{\bar{\bar\beta}})$ koordinatlarına göre $t^{*}(M_n)$ üzerindeki $\gamma[F,G]$ ve $\gamma[F,G]$ ’nin bileşenleri, (4.8) ve (4.28)’den sırasıyla

$$\gamma[F,G]=\begin{pmatrix} y^{\varepsilon}\left[F,G\right]_{\varepsilon}^{\beta} \\ 0 \\ -p_{\sigma}[F,G]_{\beta}^{\sigma} \end{pmatrix},\ \gamma[F,G]=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_{\sigma}[F,G]_{\beta}^{\sigma} \end{pmatrix}$$

şeklinde olup buradan

$$[\gamma F,\gamma G]=\begin{pmatrix} y^{\varepsilon}\left[F,G\right]_{\varepsilon}^{\beta} \\ 0 \\ p_{\sigma}[F,G]_{\beta}^{\sigma} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y^{\varepsilon}\left[F,G\right]_{\varepsilon}^{\beta} \\ 0 \\ -p_{\sigma}[F,G]_{\beta}^{\sigma} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2p_{\sigma}[F,G]_{\beta}^{\sigma} \end{pmatrix}=\gamma[F,G]+2\gamma[F,G]$$

eşitliği elde edilir.

(ii) Keyfi $F\in\Im_{1}^{1}(T(M_n))$, $X\in\Im_{0}^{1}(T(M_n))$ için $(x^{\bar{\beta}},x^{\beta},x^{\bar{\bar{\beta}}})$ koordinatlarına göre $t^{*}(M_n)$ üzerinde tanımlı $[{}^{cc}X,\gamma F]$ 'in bileşenleri $\begin{pmatrix} [{}^{cc}X,\gamma F]^{\bar{\beta}} \\ [{}^{cc}X,\gamma F]^{\beta} \\ [{}^{cc}X,\gamma F]^{\bar{\bar{\beta}}} \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$[{}^{cc}X,\gamma F]^{J}=({}^{cc}X)^{I}\partial_{I}(\gamma F)^{J}-(\gamma F)^{I}\partial_{I}({}^{cc}X)^{J}$$

eşitliği yazılır. Burada (4.22) ve (4.28) kullanılarak, $J=\bar{\beta}$ için

$$\begin{aligned}
[{}^{cc}X,\gamma F]^{\bar{\beta}} &= ({}^{cc}X)^{I}\partial_{I}(\gamma F)^{\bar{\beta}}-(\gamma F)^{I}\partial_{I}({}^{cc}X)^{\bar{\beta}} \\
&= ({}^{cc}X)^{\bar{\alpha}}\partial_{\bar{\alpha}}(\gamma F)^{\bar{\beta}}+({}^{cc}X)^{\alpha}\partial_{\alpha}(\gamma F)^{\bar{\beta}}+({}^{cc}X)^{\bar{\bar{\alpha}}}\underbrace{\partial_{\bar{\bar{\alpha}}}(\gamma F)^{\bar{\beta}}}_{0} \\
&\quad -(\gamma F)^{\bar{\alpha}}\partial_{\bar{\alpha}}({}^{cc}X)^{\bar{\beta}}-\underset{0}{(\gamma F)^{\alpha}}\,\partial_{\alpha}({}^{cc}X)^{\bar{\beta}}-(\gamma F)^{\bar{\bar{\alpha}}}\underbrace{\partial_{\bar{\bar{\alpha}}}({}^{cc}X)^{\bar{\beta}}}_{0} \\
&= y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}X^{\alpha}\,\underset{\delta_{\alpha}^{\varepsilon}}{\partial_{\bar{\alpha}}y^{\varepsilon}}\,F_{\varepsilon}^{\beta}+X^{\alpha}\partial_{\alpha}y^{\varepsilon}F_{\varepsilon}^{\beta}-y^{\varepsilon}F_{\varepsilon}^{\alpha}\,\underset{\delta_{\alpha}^{\varepsilon}}{\partial_{\bar{\alpha}}y^{\varepsilon}}\,\partial_{\varepsilon}X^{\beta} \\
&= y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}X^{\alpha}F_{\alpha}^{\beta}+y^{\varepsilon}X^{\alpha}\partial_{\alpha}F_{\varepsilon}^{\beta}-y^{\varepsilon}F_{\varepsilon}^{\alpha}\partial_{\alpha}X^{\beta}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= y^{\varepsilon}\left(\partial_{\varepsilon} X^{\alpha} F_{\alpha}^{\beta} + X^{\alpha}\partial_{\alpha} F_{\varepsilon}^{\beta} - F_{\varepsilon}^{\alpha}\partial_{\alpha} X^{\beta}\right) \\
&= y^{\varepsilon}\left(L_X F\right)_{\varepsilon}^{\beta}
\end{aligned}
$$

$J=\beta$ için

$$
\begin{aligned}
[{}^{cc}X,\gamma F]^{\beta} &= ({}^{cc}X)^{I}\partial_{I}(\gamma F)^{\beta} - (\gamma F)^{I}\partial_{I}({}^{cc}X)^{\beta} \\
&= ({}^{cc}X)^{\bar{\alpha}}\partial_{\bar{\alpha}}\underbrace{(\gamma F)^{\beta}}_{0} + ({}^{cc}X)^{\alpha}\partial_{\alpha}\underbrace{(\gamma F)^{\beta}}_{0} + ({}^{cc}X)^{\bar{\bar{\alpha}}}\partial_{\bar{\bar{\alpha}}}\underbrace{(\gamma F)^{\beta}}_{0} \\
&\quad -(\gamma F)^{\bar{\alpha}}\underbrace{\partial_{\bar{\alpha}}({}^{cc}X)^{\beta}}_{0} - \underset{0}{(\gamma F)^{\alpha}\partial_{\alpha}({}^{cc}X)^{\beta}} - (\gamma F)^{\bar{\bar{\alpha}}}\underbrace{\partial_{\bar{\bar{\alpha}}}({}^{cc}X)^{\beta}}_{0} \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

son olarak $J=\bar{\bar{\beta}}$ için

$$
\begin{aligned}
[{}^{cc}X,\gamma F]^{\bar{\bar{\beta}}} &= ({}^{cc}X)^{I}\partial_{I}(\gamma F)^{\bar{\bar{\beta}}} - (\gamma F)^{I}\partial_{I}({}^{cc}X)^{\bar{\bar{\beta}}} \\
&= ({}^{cc}X)^{\bar{\alpha}}\underbrace{\partial_{\bar{\alpha}}(\gamma F)^{\bar{\bar{\beta}}}}_{0} + ({}^{cc}X)^{\alpha}\partial_{\alpha}(\gamma F)^{\bar{\bar{\beta}}} + ({}^{cc}X)^{\bar{\bar{\alpha}}}\partial_{\bar{\bar{\alpha}}}(\gamma F)^{\bar{\bar{\beta}}} \\
&\quad -(\gamma F)^{\bar{\alpha}}\underbrace{\partial_{\bar{\alpha}}({}^{cc}X)^{\bar{\bar{\beta}}}}_{0} - \underset{0}{(\gamma F)^{\alpha}\partial_{\alpha}({}^{cc}X)^{\bar{\bar{\beta}}}} - (\gamma F)^{\bar{\bar{\alpha}}}\partial_{\bar{\bar{\alpha}}}({}^{cc}X)^{\bar{\bar{\beta}}} \\
&= ({}^{cc}X)^{\alpha}\partial_{\alpha}(\gamma F)^{\bar{\bar{\beta}}} + ({}^{cc}X)^{\bar{\bar{\alpha}}}\partial_{\bar{\bar{\alpha}}}(\gamma F)^{\bar{\bar{\beta}}} - (\gamma F)^{\bar{\bar{\alpha}}}\partial_{\bar{\bar{\alpha}}}({}^{cc}X)^{\bar{\bar{\beta}}} \\
&= -X^{\alpha}\partial_{\alpha}p_{\sigma}F_{\beta}^{\sigma} + p_{\sigma}(\partial_{\alpha}X^{\sigma})\underset{\delta_{\sigma}^{\alpha}}{\partial_{\bar{\bar{\alpha}}}p_{\sigma}}F_{\beta}^{\sigma} - p_{\sigma}F_{\alpha}^{\sigma}\underset{\delta_{\sigma}^{\alpha}}{\partial_{\bar{\bar{\alpha}}}p_{\sigma}}(\partial_{\beta}X^{\sigma}) \\
&= -X^{\alpha}\partial_{\alpha}p_{\sigma}F_{\beta}^{\sigma} + p_{\sigma}(\partial_{\alpha}X^{\sigma})F_{\beta}^{\alpha} - p_{\sigma}F_{\alpha}^{\sigma}(\partial_{\beta}X^{\alpha}) \\
&= -p_{\sigma}(X^{\alpha}\partial_{\alpha}F_{\beta}^{\sigma} - \partial_{\alpha}X^{\sigma}F_{\beta}^{\alpha} + \partial_{\beta}X^{\alpha}F_{\alpha}^{\sigma}) \\
&= -p_{\sigma}(L_X F)_{\beta}^{\sigma}
\end{aligned}
$$

elde edilir. $(x^{\bar{\beta}},x^{\beta},x^{\bar{\bar{\beta}}})$ koordinatlarına göre $t^{*}(M_n)$ üzerindeki $\gamma(L_X F)$ ’in bileşenleri

$$\gamma(L_X F) = \begin{pmatrix} y^{\varepsilon}\left(L_X F\right)_{\varepsilon}^{\beta} \\ 0 \\ -p_{\sigma}(L_X F)_{\beta}^{\sigma} \end{pmatrix}$$

şeklinde olup $[{}^{cc}X, \gamma F] = \gamma(L_X F)$ eşitliği gösterilmiş olur.

Teorem 4.2.4.3: $X \in \Im_0^1(T(M_n))$ olmak üzere S_X, M_n 'de keyfi $Z \in \Im_0^1(T(M_n))$ için $S_X(Z) = S(X,Z)$ eşitliğini sağlayan (1,1) tipli bir tensör alanı ayrıca $\omega \in \Im_1^0(M_n)$, $F \in \Im_1^1(T(M_n))$ ve $S,T \in \Im_2^1(M_n)$ ise

(i) $(\gamma S)^{cc}X = \gamma(S_X)$,

(ii) $(\gamma S)({}^{vv}\omega) = 0$,

(iii) $(\gamma S)(\gamma F) = 0$,

(iv) $(\gamma S)(\gamma T) = 0$

eşitlikleri elde edilir (Salimov and Yıldırım 2014).

İspat: (i) Burada (4.22) ve (4.29) kullanılarak

$$(\gamma S)^{cc}X = \begin{pmatrix} 0 & y^{\varepsilon}S_{\varepsilon\beta}^{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p_{\sigma}S_{\beta\alpha}^{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}X^{\beta} \\ X^{\alpha} \\ -p_{\sigma}(\partial_{\beta}X^{\sigma}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^{\varepsilon}S_{\varepsilon\beta}^{\alpha}X^{\beta} \\ 0 \\ -p_{\sigma}S_{\beta\alpha}^{\sigma}X^{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^{\varepsilon}(S_X)_{\varepsilon}^{\alpha} \\ 0 \\ -p_{\sigma}(S_X)_{\beta}^{\sigma} \end{pmatrix} = \gamma(S_X)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$(\gamma S)({}^{vv}\omega) = 0\,,\ (\gamma S)(\gamma F) = 0\,,\ (\gamma S)(\gamma T) = 0$$

eşitlikleri bulunur.

Teorem 4.2.4.4: $T(M_n)$ üzerindeki keyfi F,G afinor alanları için

$$ {}^{cc}F(\gamma G) = \gamma(G \circ F) $$

eşitliği geçerlidir (Salimov and Yıldırım 2014).

İspat: F ve G, $T(M_n)$ üzerinde birer afinor alanları olmak üzere, (4.24) ve (4.28)'den

$$ {}^{cc}F(\gamma G) = \begin{pmatrix} F_\beta^\alpha & y^\varepsilon \partial_\varepsilon F_\beta^\alpha & 0 \\ 0 & F_\beta^\alpha & 0 \\ 0 & p_\sigma(\partial_\beta F_\alpha^\sigma - \partial_\alpha F_\beta^\sigma) & F_\alpha^\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^\varepsilon G_\varepsilon^\beta \\ 0 \\ -p_\sigma G_\beta^\sigma \end{pmatrix} $$

$$ = \begin{pmatrix} y^\varepsilon G_\varepsilon^\beta F_\beta^\alpha \\ 0 \\ -p_\sigma G_\beta^\sigma F_\alpha^\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^\varepsilon (G \circ F)_\varepsilon^\alpha \\ 0 \\ -p_\sigma (G \circ F)_\alpha^\sigma \end{pmatrix} $$

$$ = \gamma(G \circ F) $$

bulunur. Böylece ${}^{cc}F(\gamma G) = \gamma(G \circ F)$ eşitliği gösterilmiş olur.

4.2.5. Vektör alanlarının yatay liftleri

$T(M_n)$ üzerinde $X = X^\alpha \partial_\alpha$ olmak üzere X 'in $t^*(M_n)$ üzerindeki ${}^{HH}X$ yatay lifti

$$ {}^{HH}X = {}^{cc}X - \gamma(\nabla X) $$

ile tanımlıdır. Burada ∇, diferensiyellenebilir M_n manifoldundaki simetrik afin konneksiyonudur (Yıldırım and Salimov 2014a).

${}^{cc}X$ ve $\gamma(\nabla X)$ 'in sırasıyla $t^*(M_n)$ üzerindeki $(x^{\bar{\alpha}}, x^\alpha, x^{\bar{\bar{\alpha}}})$ koordinatlarına göre bileşenleri

$$ {}^{cc}X = \left({}^{cc}X^{A} \right) = \begin{pmatrix} y^{\varepsilon}\partial_{\varepsilon}X^{\alpha} \\ X^{\alpha} \\ -p_{\varepsilon}(\partial_{\alpha}X^{\varepsilon}) \end{pmatrix}, \; \gamma(\nabla X) = \left(\gamma(\nabla X)^{A} \right) = \begin{pmatrix} y^{\varepsilon}\nabla_{\varepsilon}X^{\alpha} \\ 0 \\ -p_{\varepsilon}(\nabla_{\alpha}X^{\varepsilon}) \end{pmatrix} $$

ile tanımlıdır. X^{ε} ’nun $\nabla_{\alpha}X^{\varepsilon}$ kovaryant türevi

$$ (\nabla_{\alpha}X^{\varepsilon}) = \partial_{\alpha}X^{\varepsilon} + X^{\beta}\Gamma_{\beta\ \alpha}^{\ \varepsilon} $$

ile tanımlıdır. X ’in ${}^{HH}X$ yatay lifti, $t^{*}(M_{n})$ üzerindeki $(x^{\overline{\alpha}}, x^{\alpha}, x^{\overline{\overline{\alpha}}})$ koordinatlarına göre

$$ {}^{HH}X = \left({}^{HH}X^{A} \right) = \begin{pmatrix} -\Gamma_{\beta}^{\alpha}X^{\beta} \\ X^{\alpha} \\ X^{\beta}\Gamma_{\beta\alpha} \end{pmatrix} \tag{4.30} $$

bileşenlerine sahiptir. Burada

$$ \Gamma_{\beta}^{\alpha} = y^{\varepsilon}\Gamma_{\varepsilon\ \beta}^{\ \alpha}, \; \Gamma_{\beta\alpha} = p_{\varepsilon}\Gamma_{\beta\ \alpha}^{\ \varepsilon} \tag{4.31} $$

şeklindedir (Yıldırım and Salimov 2014a).

Tanım 4.2.1.1’den; $L_{X} = d \circ \iota_{X} + \iota_{X} \circ d$ (Cartan’nın sihirli formülü) ${}^{HH}X$ yatay lifti için kullanıldığında

$$ L_{{}^{HH}X}dp = \left(d \circ \iota_{{}^{HH}X} \right)dp + \left(\iota_{{}^{HH}X} \circ d \right)dp = d_{{}^{HH}X}\left(\iota(dp) \right) + \iota_{{}^{HH}X}d^{2}p = d\left(\iota_{{}^{HH}X}(dp) \right) $$

elde edilir. Buradan $L_{{}^{cc}X}dp = 0$ şartı dahilinde ${}^{HH}X$ vektör alanı lokal olarak Hamiltonian vektör alanı olduğu elde edilir ve

$$ {}^{HH}X^{A}\partial_{A}\omega_{BC}+\left(\partial_{B}{}^{HH}X^{A}\right)\omega_{AC}+\left(\partial_{C}{}^{HH}X^{A}\right)\omega_{BA}=0 $$

şartı sağlanır. (4.30) ve $\omega = dp$ dejenere simplektik yapısının bileşenleri son eşitlikte kullanılarak $\nabla X = 0$ şartı dahilinde $0 = 0$ eşitliği elde edilir (Yıldırım and Salimov 2014a).

İspat: Yukarıda yer alan ${}^{HH}X^{A}\partial_{A}\omega_{BC}+\left(\partial_{B}{}^{HH}X^{A}\right)\omega_{AC}+\left(\partial_{C}{}^{HH}X^{A}\right)\omega_{BA}=0$ eşitliğinden

$$ \left(\partial_{B}{}^{HH}X^{\bar{\alpha}}\right)\omega_{\bar{\alpha}C}+\left(\partial_{B}{}^{HH}X^{\alpha}\right)\omega_{\alpha C}+\left(\partial_{B}{}^{HH}X^{\bar{\bar{\alpha}}}\right)\omega_{\bar{\bar{\alpha}}C}+\left(\partial_{C}{}^{HH}X^{\bar{\alpha}}\right)\omega_{B\bar{\alpha}}+\left(\partial_{C}{}^{HH}X^{\alpha}\right)\omega_{B\alpha}+\left(\partial_{C}{}^{HH}X^{\bar{\bar{\alpha}}}\right)\omega_{B\bar{\bar{\alpha}}}=0 $$

$$ -\left(\partial_{B}y^{\varepsilon}\Gamma_{\varepsilon}{}^{\alpha}{}_{\beta}X^{\beta}\right)\omega_{\bar{\alpha}C}+\left(\partial_{B}X^{\alpha}\right)\omega_{\alpha C}+\left(\partial_{B}\left(p_{\sigma}X^{\beta}\Gamma_{\beta}{}^{\sigma}{}_{\alpha}\right)\right)\omega_{\bar{\bar{\alpha}}C}-\left(\partial_{C}y^{\varepsilon}\Gamma_{\varepsilon}{}^{\alpha}{}_{\beta}X^{\beta}\right)\omega_{B\bar{\alpha}}+\left(\partial_{C}X^{\alpha}\right)\omega_{B\alpha}+\left(\partial_{C}\left(p_{\sigma}X^{\beta}\Gamma_{\beta}{}^{\sigma}{}_{\alpha}\right)\right)\omega_{B\bar{\bar{\alpha}}}=0 $$

elde edilir. B ’nin indisleri $B=\left(\bar{\beta},\beta,\bar{\bar{\beta}}\right)$ ve C ’nin indisleri $C=\left(\bar{\theta},\theta,\bar{\bar{\theta}}\right)$ olmak üzere

(i) Buradan $B=\bar{\beta}$ ve $C=\bar{\theta}$ için

$$ 0=-\left(\partial_{\bar{\beta}}y^{\varepsilon}\Gamma_{\varepsilon}{}^{\alpha}{}_{\beta}X^{\beta}\right)\underset{0}{\omega_{\bar{\alpha}\bar{\theta}}}+\left(\partial_{\bar{\beta}}X^{\alpha}\right)\underset{0}{\omega_{\alpha\bar{\theta}}}+\left(\partial_{\bar{\beta}}\left(p_{\sigma}X^{\beta}\Gamma_{\beta}{}^{\sigma}{}_{\alpha}\right)\right)\underset{0}{\omega_{\bar{\bar{\alpha}}\bar{\theta}}}-\left(\partial_{\bar{\theta}}y^{\varepsilon}\Gamma_{\varepsilon}{}^{\alpha}{}_{\beta}X^{\beta}\right)\underset{0}{\omega_{\bar{\beta}\bar{\alpha}}}+\left(\partial_{\bar{\theta}}X^{\alpha}\right)\underset{0}{\omega_{\bar{\beta}\alpha}}+\left(\partial_{\bar{\theta}}\left(p_{\sigma}X^{\beta}\Gamma_{\beta}{}^{\sigma}{}_{\alpha}\right)\right)\underset{0}{\omega_{\bar{\beta}\bar{\bar{\alpha}}}} $$

$0=0$,

(ii) $B=\bar{\beta}$ ve $C=\theta$ için

$$ 0=-\left(\partial_{\bar{\beta}}y^{\varepsilon}\Gamma_{\varepsilon}{}^{\alpha}{}_{\beta}X^{\beta}\right)\underset{0}{\omega_{\bar{\alpha}\theta}}+\left(\partial_{\bar{\beta}}X^{\alpha}\right)\underset{0}{\omega_{\alpha\theta}}+\left(\underset{0}{\partial_{\bar{\beta}}p_{\sigma}}\left(X^{\beta}\Gamma_{\beta}{}^{\sigma}{}_{\alpha}\right)\right)\omega_{\bar{\bar{\alpha}}\theta}-\left(\partial_{\theta}y^{\varepsilon}\Gamma_{\varepsilon}{}^{\alpha}{}_{\beta}X^{\beta}\right)\underset{0}{\omega_{\bar{\beta}\bar{\alpha}}}+\left(\partial_{\theta}X^{\alpha}\right)\underset{0}{\omega_{\bar{\beta}\alpha}}+\left(\partial_{\theta}\left(p_{\sigma}X^{\beta}\Gamma_{\beta}{}^{\sigma}{}_{\alpha}\right)\right)\underset{0}{\omega_{\bar{\beta}\bar{\bar{\alpha}}}} $$

$0=0$,

(iii) $B=\bar{\beta}$ ve $C=\bar{\bar{\theta}}$ için

$$0=-\left(\partial_{\bar{\beta}}y^{\varepsilon}\Gamma_{\varepsilon}{}^{\alpha}{}_{\beta}X^{\beta}\right)\underset{0}{\omega_{\bar{\alpha}\bar{\bar{\theta}}}}+\left(\underset{0}{\partial_{\bar{\beta}}X^{\alpha}}\right)\omega_{\alpha\bar{\bar{\theta}}}+\left(\partial_{\bar{\beta}}\left(p_{\sigma}X^{\beta}\Gamma_{\beta}{}^{\sigma}{}_{\alpha}\right)\right)\underset{0}{\omega_{\bar{\bar{\alpha}}\bar{\bar{\theta}}}}-\left(\partial_{\bar{\bar{\theta}}}y^{\varepsilon}\Gamma_{\varepsilon}{}^{\alpha}{}_{\beta}X^{\beta}\right)\underset{0}{\omega_{\bar{\beta}\bar{\alpha}}}+\left(\partial_{\bar{\bar{\theta}}}X^{\alpha}\right)\underset{0}{\omega_{\bar{\beta}\alpha}}+\left(\partial_{\bar{\bar{\theta}}}\left(p_{\sigma}X^{\beta}\Gamma_{\beta}{}^{\sigma}{}_{\alpha}\right)\right)\underset{0}{\omega_{\bar{\beta}\bar{\bar{\alpha}}}}$$

$$0=0,$$

(iv) $B=\beta$ ve $C=\bar{\theta}$ için

$$0=-\left(\partial_{\beta}y^{\varepsilon}\Gamma_{\varepsilon}{}^{\alpha}{}_{\beta}X^{\beta}\right)\underset{0}{\omega_{\bar{\alpha}\bar{\theta}}}+\left(\partial_{\beta}X^{\alpha}\right)\underset{0}{\omega_{\alpha\bar{\theta}}}+\left(\partial_{\beta}\left(p_{\sigma}X^{\beta}\Gamma_{\beta}{}^{\sigma}{}_{\alpha}\right)\right)\underset{0}{\omega_{\bar{\bar{\alpha}}\bar{\theta}}}-\left(\partial_{\bar{\theta}}y^{\varepsilon}\Gamma_{\varepsilon}{}^{\alpha}{}_{\beta}X^{\beta}\right)\underset{0}{\omega_{\beta\bar{\alpha}}}+\left(\partial_{\bar{\theta}}X^{\alpha}\right)\underset{0}{\omega_{\beta\alpha}}+\left(\underset{0}{\partial_{\bar{\theta}}p_{\sigma}}\left(X^{\beta}\Gamma_{\beta}{}^{\sigma}{}_{\alpha}\right)\right)\omega_{\beta\bar{\bar{\alpha}}}$$

$$0=0,$$

(v) $B=\beta$ ve $C=\theta$ için

$$0=-\left(\partial_{\beta}y^{\varepsilon}\Gamma_{\varepsilon}{}^{\alpha}{}_{\beta}X^{\beta}\right)\underset{0}{\omega_{\bar{\alpha}\theta}}+\left(\partial_{\beta}X^{\alpha}\right)\underset{0}{\omega_{\alpha\theta}}+\left(\partial_{\beta}\left(p_{\sigma}X^{\beta}\Gamma_{\beta}{}^{\sigma}{}_{\alpha}\right)\right)\underset{\delta_{\alpha}^{\theta}}{\omega_{\bar{\bar{\alpha}}\theta}}-\left(\partial_{\theta}y^{\varepsilon}\Gamma_{\varepsilon}{}^{\alpha}{}_{\beta}X^{\beta}\right)\underset{0}{\omega_{\beta\bar{\alpha}}}+\left(\partial_{\theta}X^{\alpha}\right)\underset{0}{\omega_{\beta\alpha}}+\left(\partial_{\theta}p_{\sigma}\left(X^{\beta}\Gamma_{\beta}{}^{\sigma}{}_{\alpha}\right)\right)\underset{-\delta_{\alpha}^{\beta}}{\omega_{\beta\bar{\bar{\alpha}}}}$$

$$0=\left(\partial_{\beta}\left(p_{\sigma}X^{\beta}\Gamma_{\beta}{}^{\sigma}{}_{\alpha}\right)\right)\delta_{\alpha}^{\theta}-\left(\partial_{\theta}p_{\sigma}\left(X^{\beta}\Gamma_{\beta}{}^{\sigma}{}_{\alpha}\right)\right)\delta_{\alpha}^{\beta}$$

$$0=\left(p_{\sigma}\left(\partial_{\beta}X^{\gamma}\right)\Gamma_{\gamma}{}^{\sigma}{}_{\alpha}\right)\delta_{\alpha}^{\theta}+\left(p_{\sigma}X^{\theta}\partial_{\beta}\Gamma_{\theta}{}^{\sigma}{}_{\alpha}\right)\delta_{\alpha}^{\theta}-\left(p_{\sigma}\left(\partial_{\theta}X^{\beta}\right)\Gamma_{\beta}{}^{\sigma}{}_{\alpha}\right)\delta_{\alpha}^{\beta}-\left(p_{\sigma}\left(X^{\theta}\partial_{\theta}\Gamma_{\theta}{}^{\sigma}{}_{\alpha}\right)\right)\delta_{\alpha}^{\beta}$$

$$0=p_{\sigma}\left(\partial_{\beta}X^{\gamma}\right)\Gamma_{\gamma}{}^{\sigma}{}_{\theta}+p_{\sigma}X^{\gamma}\partial_{\beta}\Gamma_{\gamma}{}^{\sigma}{}_{\theta}-p_{\sigma}\left(\partial_{\theta}X^{\gamma}\right)\Gamma_{\gamma}{}^{\sigma}{}_{\beta}-p_{\sigma}X^{\gamma}\partial_{\theta}\Gamma_{\gamma}{}^{\sigma}{}_{\beta}$$

$$0=p_{\sigma}\left(\partial_{\beta}X^{\gamma}\right)\Gamma_{\gamma}{}^{\sigma}{}_{\theta}\delta_{\beta}^{\theta}\delta_{\theta}^{\beta}+p_{\sigma}X^{\gamma}\partial_{\beta}\Gamma_{\gamma}{}^{\sigma}{}_{\theta}\delta_{\theta}^{\beta}\delta_{\beta}^{\theta}-p_{\sigma}\left(\partial_{\theta}X^{\gamma}\right)\Gamma_{\gamma}{}^{\sigma}{}_{\beta}-p_{\sigma}X^{\gamma}\partial_{\theta}\Gamma_{\gamma}{}^{\sigma}{}_{\beta}$$

$$0=p_{\sigma}\left(\partial_{\theta}X^{\gamma}\right)\Gamma_{\gamma}{}^{\sigma}{}_{\beta}+p_{\sigma}X^{\gamma}\partial_{\theta}\Gamma_{\gamma}{}^{\sigma}{}_{\beta}-p_{\sigma}\left(\partial_{\theta}X^{\gamma}\right)\Gamma_{\gamma}{}^{\sigma}{}_{\beta}-p_{\sigma}X^{\gamma}\partial_{\theta}\Gamma_{\gamma}{}^{\sigma}{}_{\beta}$$

$$0=0,$$

(vi) $B=\beta$ ve $C=\bar{\bar{\theta}}$ için

$$0=-\left(\partial_{\beta}y^{\varepsilon}\Gamma_{\varepsilon}{}^{\alpha}{}_{\beta}X^{\beta}\right)\underset{0}{\omega_{\bar{\alpha}\bar{\bar{\theta}}}}+\left(\partial_{\beta}X^{\alpha}\right)\underset{-\delta_{\theta}^{\alpha}}{\omega_{\alpha\bar{\bar{\theta}}}}+\left(\partial_{\beta}\left(p_{\sigma}X^{\beta}\Gamma_{\beta}{}^{\sigma}{}_{\alpha}\right)\right)\underset{0}{\omega_{\bar{\bar{\alpha}}\bar{\bar{\theta}}}}-\left(\partial_{\bar{\bar{\theta}}}y^{\varepsilon}\Gamma_{\varepsilon}{}^{\alpha}{}_{\beta}X^{\beta}\right)\underset{0}{\omega_{\beta\bar{\alpha}}}+\left(\partial_{\bar{\bar{\theta}}}X^{\alpha}\right)\underset{0}{\omega_{\beta\alpha}}+\left(\partial_{\bar{\bar{\theta}}}p_{\sigma}\left(X^{\gamma}\Gamma_{\gamma}{}^{\sigma}{}_{\alpha}\right)\right)\underset{-\delta_{\alpha}^{\beta}}{\omega_{\beta\bar{\bar{\alpha}}}}$$

$$0=-\left(\partial_{\beta}X^{\alpha}\right)\delta_{\theta}^{\alpha}-\left(\underset{\delta_{\sigma}^{\theta}}{\partial_{\bar{\bar{\theta}}}p_{\sigma}}\,X^{\gamma}\Gamma_{\gamma}{}^{\sigma}{}_{\alpha}\right)\delta_{\alpha}^{\beta}$$

$$0=-\left(\partial_{\beta}X^{\theta}\right)-\left(\delta_{\sigma}^{\theta}X^{\gamma}\Gamma_{\gamma\ \alpha}^{\ \sigma}\right)\delta_{\alpha}^{\beta}$$

$$0=-\left(\partial_{\beta}X^{\theta}\right)-\left(X^{\gamma}\Gamma_{\gamma\ \alpha}^{\ \theta}\right)\delta_{\alpha}^{\beta}$$

$$0=-\left(\partial_{\beta}X^{\theta}\right)-\left(X^{\gamma}\Gamma_{\gamma\ \beta}^{\ \theta}\right)$$

$$0=-\nabla_{\beta}X^{\theta}$$

$$0=\nabla X\ ,$$

(vii) $B=\bar{\bar{\beta}}$ ve $C=\bar{\theta}$ için

$$0=-\underbrace{\left(\partial_{\bar{\bar{\beta}}}y^{\varepsilon}\Gamma_{\varepsilon\ \beta}^{\ \alpha}X^{\beta}\right)\omega_{\bar{\alpha}\bar{\theta}}}_{0}+\underbrace{\left(\partial_{\bar{\bar{\beta}}}X^{\alpha}\right)\omega_{\alpha\bar{\theta}}}_{0}+\underbrace{\left(\partial_{\bar{\bar{\beta}}}\left(p_{\sigma}X^{\beta}\Gamma_{\beta\ \alpha}^{\ \sigma}\right)\right)\omega_{\bar{\bar{\alpha}}\bar{\theta}}}_{0}-\underbrace{\left(\partial_{\bar{\theta}}y^{\varepsilon}\Gamma_{\varepsilon\ \beta}^{\ \alpha}X^{\beta}\right)\omega_{\bar{\bar{\beta}}\bar{\alpha}}}_{0}+\underbrace{\left(\partial_{\bar{\theta}}X^{\alpha}\right)\omega_{\bar{\bar{\beta}}\alpha}}_{0}+\underbrace{\left(\partial_{\bar{\theta}}\left(p_{\sigma}X^{\beta}\Gamma_{\beta\ \alpha}^{\ \sigma}\right)\right)\omega_{\bar{\bar{\beta}}\bar{\bar{\alpha}}}}_{0}$$

$$0=\left(\underbrace{\partial_{d}X^{\alpha}}_{0}\right)\delta_{\gamma}^{\alpha}$$

$$0=0\ ,$$

(viii) $B=\bar{\bar{\beta}}$ ve $C=\theta$ için

$$0=-\underbrace{\left(\partial_{\bar{\bar{\beta}}}y^{\varepsilon}\Gamma_{\varepsilon\ \beta}^{\ \alpha}X^{\beta}\right)\omega_{\bar{\alpha}\theta}}_{0}+\underbrace{\left(\partial_{\bar{\bar{\beta}}}X^{\alpha}\right)\omega_{\alpha\theta}}_{0}+\left(\partial_{\bar{\bar{\beta}}}\left(p_{\sigma}X^{\gamma}\Gamma_{\gamma\ \alpha}^{\ \sigma}\right)\right)\underbrace{\omega_{\bar{\bar{\alpha}}\theta}}_{\delta_{\alpha}^{\theta}}-\underbrace{\left(\partial_{\theta}y^{\varepsilon}\Gamma_{\varepsilon\ \beta}^{\ \alpha}X^{\beta}\right)\omega_{\bar{\bar{\beta}}\bar{\alpha}}}_{0}+\left(\partial_{\theta}X^{\alpha}\right)\underbrace{\omega_{\bar{\bar{\beta}}\alpha}}_{\delta_{\beta}^{\alpha}}+\underbrace{\left(\partial_{\theta}\left(p_{\sigma}X^{\beta}\Gamma_{\beta\ \alpha}^{\ \sigma}\right)\right)\omega_{\bar{\bar{\beta}}\bar{\bar{\alpha}}}}_{0}$$

$$0=\left(\underbrace{\partial_{\bar{\bar{\beta}}}p_{\sigma}}_{\delta_{\sigma}^{\beta}}\left(X^{\gamma}\Gamma_{\gamma\ \alpha}^{\ \sigma}\right)\right)\delta_{\alpha}^{\theta}+\left(\partial_{\theta}X^{\alpha}\right)\delta_{\beta}^{\alpha}$$

$$0=\left(\delta_{\sigma}^{\beta}\left(X^{\gamma}\Gamma_{\gamma\ \alpha}^{\ \sigma}\right)\right)\delta_{\alpha}^{\theta}+\left(\partial_{\theta}X^{\alpha}\right)\delta_{\beta}^{\alpha}$$

$$0=\left(X^{\gamma}\Gamma_{\gamma\ \alpha}^{\ \beta}\right)\delta_{\alpha}^{\theta}+\left(\partial_{\theta}X^{\beta}\right)$$

$$0=\left(X^{\gamma}\Gamma_{\gamma\ \theta}^{\ \beta}\right)+\left(\partial_{\theta}X^{\beta}\right)$$

$$0=\nabla_{\theta}X^{\beta}$$

$$0=\nabla X\ ,$$

(ix) $B=\bar{\bar{\beta}}$ ve $C=\bar{\bar{\theta}}$ için

$$0=-\left(\partial_{\bar{\bar{\beta}}}y^{\varepsilon}\Gamma_{\varepsilon}{}^{\alpha}{}_{\beta}X^{\beta}\right)\underset{0}{\omega_{\bar{\alpha}\bar{\bar{\theta}}}}+\left(\underset{0}{\partial_{\bar{\bar{\beta}}}X^{\alpha}}\right)\underset{-\delta_{\theta}^{\alpha}}{\omega_{\alpha\bar{\bar{\theta}}}}+\left(\partial_{\bar{\bar{\beta}}}\left(p_{\sigma}X^{\beta}\Gamma_{\beta}{}^{\sigma}{}_{\alpha}\right)\right)\underset{0}{\omega_{\bar{\bar{\alpha}}\bar{\bar{\theta}}}}-\left(\partial_{\bar{\bar{\theta}}}y^{\varepsilon}\Gamma_{\varepsilon}{}^{\alpha}{}_{\beta}X^{\beta}\right)\underset{0}{\omega_{\bar{\bar{\beta}}\bar{\alpha}}}+\left(\underset{0}{\partial_{\bar{\bar{\theta}}}X^{\alpha}}\right)\underset{\delta_{\beta}^{\alpha}}{\omega_{\bar{\bar{\beta}}\alpha}}+\left(\partial_{\bar{\bar{\theta}}}\left(p_{\sigma}X^{\beta}\Gamma_{\beta}{}^{\sigma}{}_{\alpha}\right)\right)\underset{0}{\omega_{\bar{\bar{\beta}}\bar{\bar{\alpha}}}}$$

$$0=0.$$

Teorem 4.2.5.1: $\omega=dp$ dejenere simplektik yapısıyla birlikte, X vektör alanının $t^{*}(M_n)$ pull-back (yarı-kotanjant) demete ${}^{HH}X$ yatay lifti $\nabla X=0$ şartı dahilinde Hamiltoniandır. Burada yer alan ∇X; (1,1) tipli bir tensör alanı olup $\left(\nabla X\right)_j^i=\left(\nabla_j X\right)^i=\left(\nabla_j X^i\right)$ şeklindedir (Yıldırım and Salimov 2014a).

Teorem 4.2.5.2: $T\left(M_n\right)$ üzerinde tanımlı keyfi X,Z vektör alanları ve M_n üzerinde tanımlı keyfi f fonksiyonu için

(i) ${}^{HH}X({}^{vv}f)={}^{vv}(Xf),$

(ii) ${}^{HH}X(\gamma Z)=\gamma(\nabla_X Z)$

elde edilir (Yıldırım and Salimov 2014a).

İspat: (i) Keyfi $X\in\Im_0^1(T\left(M_n\right))$ vektör alanı için (4.5) ve (4.30)'dan

$$\begin{aligned}
{}^{HH}X({}^{vv}f) &= {}^{HH}X^{I}\partial_I({}^{vv}f)\\
&= {}^{HH}X^{\bar{\alpha}}\underset{0}{\partial_{\bar{\alpha}}f}+{}^{HH}X^{\alpha}\partial_{\alpha}f+{}^{HH}X^{\bar{\bar{\alpha}}}\underset{0}{\partial_{\bar{\bar{\alpha}}}f}\\
&= X^{\alpha}\partial_{\alpha}f\\
&={}^{vv}(Xf)
\end{aligned}$$

elde edilir.

(ii) Keyfi $X\in\Im_0^1(T\left(M_n\right))$ için (4.27) ve (4.30) kullanılarak

$$
\begin{aligned}
{}^{HH}X(\gamma Z) &= {}^{HH}X^{I}\partial_{I}(\gamma Z) \\
&= \underbrace{{}^{HH}X^{\bar{\alpha}}}_{0}\partial_{\bar{\alpha}}(p_{\varepsilon}Z^{\varepsilon}) + {}^{HH}X^{\alpha}\partial_{\alpha}(p_{\varepsilon}Z^{\varepsilon}) + {}^{HH}X^{\bar{\bar{\alpha}}}\underbrace{\partial_{\bar{\bar{\alpha}}}(p_{\varepsilon}Z^{\varepsilon})}_{\delta^{\alpha}_{\varepsilon}} \\
&= X^{\alpha}\partial_{\alpha}(p_{\varepsilon}Z^{\varepsilon}) + p_{\varepsilon}(X^{\beta}\Gamma_{\beta}{}^{\varepsilon}{}_{\alpha})Z^{\alpha} \\
&= p_{\varepsilon}\underbrace{X^{\alpha}(\partial_{\alpha}Z^{\varepsilon} + \Gamma_{\alpha}{}^{\varepsilon}{}_{\beta}Z^{\beta})}_{(\nabla_{X}Z)^{\varepsilon}} \\
&= p_{\varepsilon}(\nabla_{X}Z)^{\varepsilon} \\
&= \gamma(\nabla_{X}Z)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Teorem 4.2.5.3: Keyfi $X, Y \in \Im^{1}_{0}(T(M_{n}))$ ve $\omega \in \Im^{0}_{1}(M_{n})$ için

(i) $[{}^{HH}X, {}^{vv}\omega] = {}^{vv}(\nabla_{X}\omega)$,

(ii) $[{}^{HH}X, {}^{HH}Y] = {}^{HH}[X, Y] - \gamma R(X, Y)$

eşitlikleri elde edilir. Burada R, ∇ 'nın eğrilik tensörü olup ∇ afin konneksiyonu üzerindeki Lie türevi $(L_{X}\nabla)_{Y} = \nabla_{Y}\nabla X + R(X, Y)$ ile tanımlıdır (Yıldırım and Salimov 2014a).

İspat: (i) Keyfi $X \in \Im^{1}_{0}(T(M_{n}))$, $\omega \in \Im^{0}_{1}(M_{n})$ için $(x^{\bar{\beta}}, x^{\beta}, x^{\bar{\bar{\beta}}})$ koordinatlarına göre $t^{*}(M_{n})$ üzerinde tanımlı $[{}^{HH}X, {}^{vv}\omega]$ 'nın bileşenleri $\begin{pmatrix} [{}^{HH}X, {}^{vv}\omega]^{\bar{\beta}} \\ [{}^{HH}X, {}^{vv}\omega]^{\beta} \\ [{}^{HH}X, {}^{vv}\omega]^{\bar{\bar{\beta}}} \end{pmatrix}$ olmak üzere, (4.6) ve (4.30)'dan

$$
\begin{aligned}
[{}^{HH}X, {}^{vv}\omega]^{J} &= {}^{HH}X^{I}\partial_{I}{}^{vv}\omega^{J} - {}^{vv}\omega^{I}\partial_{I}{}^{HH}X^{J} \\
&= {}^{HH}X^{\bar{\alpha}}\partial_{\bar{\alpha}}{}^{vv}\omega^{J} + {}^{HH}X^{\alpha}\partial_{\alpha}{}^{vv}\omega^{J} + {}^{HH}X^{\bar{\bar{\alpha}}}\partial_{\bar{\bar{\alpha}}}{}^{vv}\omega^{J} \\
&\quad - \underbrace{{}^{vv}\omega^{\bar{\alpha}}}_{0}\partial_{\bar{\alpha}}{}^{HH}X^{J} - \underbrace{{}^{vv}\omega^{\alpha}}_{0}\partial_{\alpha}{}^{HH}X^{J} - {}^{vv}\omega^{\bar{\bar{\alpha}}}\partial_{\bar{\bar{\alpha}}}{}^{HH}X^{J}
\end{aligned}
$$

$$= -y^{\varepsilon}\Gamma_{\varepsilon\ \beta}^{\ \alpha} X^{\beta}\partial_{\overline{\alpha}}{}^{vv}\omega^{J} + X^{\alpha}\partial_{\alpha}{}^{vv}\omega^{J}$$
$$+ p_{\varepsilon} X^{\beta}\Gamma_{\beta\ \alpha}^{\ \varepsilon}\partial_{\overline{\overline{\alpha}}}{}^{vv}\omega^{J} - \omega_{\alpha}\partial_{\overline{\overline{\alpha}}}{}^{HH}X^{J}$$

eşitliği yazılır. Burada (4.6) ve (4.30) kullanılarak, $J = \overline{\beta}$ için

$$[{}^{HH}X, {}^{vv}\omega]^{\overline{\beta}} = -y^{\varepsilon}\Gamma_{\varepsilon\ \beta}^{\ \alpha} X^{\beta}\underbrace{\partial_{\overline{\alpha}}{}^{vv}\omega^{\overline{\beta}}}_{0} + X^{\alpha}\underbrace{\partial_{\alpha}{}^{vv}\omega^{\overline{\beta}}}_{0} + p_{\varepsilon}X^{\beta}\Gamma_{\beta\ \alpha}^{\ \varepsilon}\underbrace{\partial_{\overline{\overline{\alpha}}}{}^{vv}\omega^{\overline{\beta}}}_{0} - \omega_{\alpha}\partial_{\overline{\overline{\alpha}}}{}^{HH}X^{\overline{\beta}}$$
$$= -\omega_{\alpha}\underbrace{\partial_{\overline{\overline{\alpha}}} y^{\varepsilon}\Gamma_{\varepsilon\ \alpha}^{\ \beta} X^{\alpha}}_{0}$$
$$= 0,$$

$J = \beta$ için

$$[{}^{HH}X, {}^{vv}\omega]^{\beta} = -y^{\varepsilon}\Gamma_{\varepsilon\ \beta}^{\ \alpha} X^{\beta}\underbrace{\partial_{\overline{\alpha}}{}^{vv}\omega^{\beta}}_{0} + X^{\alpha}\underbrace{\partial_{\alpha}{}^{vv}\omega^{\beta}}_{0} + p_{\varepsilon}X^{\beta}\Gamma_{\beta\ \alpha}^{\ \varepsilon}\underbrace{\partial_{\overline{\overline{\alpha}}}{}^{vv}\omega^{\beta}}_{0} - \omega_{\alpha}\partial_{\overline{\overline{\alpha}}}{}^{HH}X^{\beta}$$
$$= -\omega_{\alpha}\underbrace{\partial_{\overline{\overline{\alpha}}} X^{\beta}}_{0}$$
$$= 0,$$

son olarak $J = \overline{\overline{\beta}}$ için

$$[{}^{HH}X, {}^{vv}\omega]^{\overline{\overline{\beta}}} = -y^{\varepsilon}\Gamma_{\varepsilon\ \beta}^{\ \alpha} X^{\beta}\underbrace{\partial_{\overline{\alpha}}{}^{vv}\omega^{\overline{\overline{\beta}}}}_{0} + X^{\alpha}\partial_{\alpha}{}^{vv}\omega^{\overline{\overline{\beta}}} + p_{\varepsilon}X^{\beta}\Gamma_{\beta\ \alpha}^{\ \varepsilon}\underbrace{\partial_{\overline{\overline{\alpha}}}{}^{vv}\omega^{\overline{\overline{\beta}}}}_{0} - \omega_{\alpha}\partial_{\overline{\overline{\alpha}}}{}^{HH}X^{\overline{\overline{\beta}}}$$
$$= X^{\alpha}\partial_{\alpha}\omega_{\beta} - \omega_{\alpha}\underbrace{\partial_{\overline{\overline{\alpha}}} p_{\varepsilon}}_{\delta_{\varepsilon}^{\alpha}} X^{\alpha}\Gamma_{\alpha\ \beta}^{\ \varepsilon}$$
$$= X^{\alpha}\partial_{\alpha}\omega_{\beta} - \omega_{\varepsilon}X^{\alpha}\Gamma_{\alpha\ \beta}^{\ \varepsilon}$$
$$= X^{\alpha}(\partial_{\alpha}\omega_{\beta} - \Gamma_{\alpha\ \beta}^{\ \varepsilon}\omega_{\varepsilon})$$
$$= (\nabla_{X}\omega)_{\beta}$$

elde edilir. $(x^{\overline{\beta}}, x^{\beta}, x^{\overline{\overline{\beta}}})$ koordinatlarına göre $t^{*}(M_n)$ üzerindeki $(\nabla_X \omega)$ 'nin dikey lifti

$$
{}^{vv}(\nabla_X \omega) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (\nabla_X \omega)_\beta \end{pmatrix}
$$

şeklindeki bileşenlere sahip olduğundan, $[{}^{HH}X, {}^{vv}\omega] = {}^{vv}(\nabla_X \omega)$ eşitliği elde edilir.

(ii) $T(M_n)$ üzerindeki keyfi X ve Y vektör alanları için $(x^{\bar{\beta}}, x^{\beta}, x^{\bar{\bar{\beta}}})$ koordinatlarına göre $t^*(M_n)$ üzerinde tanımlı $[{}^{HH}X, {}^{HH}Y]$ 'nin bileşenleri $\begin{pmatrix} [{}^{HH}X, {}^{HH}Y]^{\bar{\beta}} \\ [{}^{HH}X, {}^{HH}Y]^{\beta} \\ [{}^{HH}X, {}^{HH}Y]^{\bar{\bar{\beta}}} \end{pmatrix}$ olmak üzere, (4.30) kullanılarak

$$
\begin{aligned}
[{}^{HH}X, {}^{HH}Y]^J &= {}^{HH}X^I \partial_I ({}^{HH}Y)^J - {}^{HH}Y^I \partial_I ({}^{HH}X)^J \\
&= {}^{HH}X^{\bar{\alpha}} \partial_{\bar{\alpha}} {}^{HH}Y^J + {}^{HH}X^{\alpha} \partial_{\alpha} {}^{HH}Y^J + {}^{HH}X^{\bar{\bar{\alpha}}} \partial_{\bar{\bar{\alpha}}} {}^{HH}Y^J \\
&\quad - {}^{HH}Y^{\bar{\alpha}} \partial_{\bar{\alpha}} {}^{HH}X^J - {}^{HH}Y^{\alpha} \partial_{\alpha} {}^{HH}X^J - {}^{HH}Y^{\bar{\bar{\alpha}}} \partial_{\bar{\bar{\alpha}}} {}^{HH}X^J \\
&= -y^{\varepsilon} \Gamma_{\varepsilon}{}^{\alpha}{}_{\beta} X^{\beta} \partial_{\bar{\alpha}} {}^{HH}Y^J + X^{\alpha} \partial_{\alpha} {}^{HH}Y^J + p_{\varepsilon} X^{\beta} \Gamma_{\beta}{}^{\varepsilon}{}_{\alpha} \partial_{\bar{\bar{\alpha}}} {}^{HH}Y^J \\
&\quad + y^{\varepsilon} \Gamma_{\varepsilon}{}^{\alpha}{}_{\beta} Y^{\beta} \partial_{\bar{\alpha}} {}^{HH}X^J - Y^{\alpha} \partial_{\alpha} {}^{HH}X^J - p_{\varepsilon} Y^{\beta} \Gamma_{\beta}{}^{\varepsilon}{}_{\alpha} \partial_{\bar{\bar{\alpha}}} {}^{HH}X^J
\end{aligned}
$$

eşitliği yazılır. Burada (4.30) kullanılarak, $J = \bar{\beta}$ için

$$
\begin{aligned}
[{}^{HH}X, {}^{HH}Y]^{\bar{\beta}} &= y^{\varepsilon} \Gamma_{\varepsilon}{}^{\alpha}{}_{\beta} X^{\beta} \partial_{\bar{\alpha}} y^{\varepsilon} \Gamma_{\varepsilon}{}^{\beta}{}_{\alpha} Y^{\alpha} - X^{\alpha} \partial_{\alpha} \left(y^{\varepsilon} \Gamma_{\varepsilon}{}^{\beta}{}_{\alpha} Y^{\alpha} \right) - p_{\varepsilon} X^{\beta} \Gamma_{\beta}{}^{\varepsilon}{}_{\alpha} \underbrace{\partial_{\bar{\bar{\alpha}}} y^{\varepsilon} \Gamma_{\varepsilon}{}^{\beta}{}_{\alpha} Y^{\alpha}}_{0} \\
&\quad - y^{\varepsilon} \Gamma_{\varepsilon}{}^{\alpha}{}_{\beta} Y^{\beta} \partial_{\bar{\alpha}} y^{\varepsilon} \Gamma_{\varepsilon}{}^{\beta}{}_{\alpha} X^{\alpha} + Y^{\alpha} \partial_{\alpha} \left(y^{\varepsilon} \Gamma_{\varepsilon}{}^{\beta}{}_{\alpha} X^{\alpha} \right) + p_{\varepsilon} Y^{\beta} \Gamma_{\beta}{}^{\varepsilon}{}_{\alpha} \underbrace{\partial_{\bar{\bar{\alpha}}} y^{\varepsilon} \Gamma_{\varepsilon}{}^{\beta}{}_{\alpha} X^{\alpha}}_{0} \\
&= y^{\varepsilon} \Gamma_{\varepsilon}{}^{\alpha}{}_{\beta} X^{\beta} \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}} y^{\varepsilon}}_{\delta_{\alpha}^{\varepsilon}} \Gamma_{\varepsilon}{}^{\beta}{}_{\alpha} Y^{\alpha} - X^{\alpha} \partial_{\alpha} \left(y^{\varepsilon} \Gamma_{\varepsilon}{}^{\beta}{}_{\alpha} Y^{\alpha} \right) - y^{\varepsilon} \Gamma_{\varepsilon}{}^{\alpha}{}_{\beta} Y^{\beta} \underbrace{\partial_{\bar{\alpha}} y^{\varepsilon}}_{\delta_{\alpha}^{\varepsilon}} \Gamma_{\varepsilon}{}^{\beta}{}_{\alpha} X^{\alpha} + Y^{\alpha} \partial_{\alpha} \left(y^{\varepsilon} \Gamma_{\varepsilon}{}^{\beta}{}_{\alpha} X^{\alpha} \right) \\
&= -X^{\alpha} \partial_{\alpha} \left(y^{\varepsilon} \Gamma_{\varepsilon}{}^{\beta}{}_{\alpha} Y^{\alpha} \right) + y^{\varepsilon} X^{\beta} \Gamma_{\varepsilon}{}^{\alpha}{}_{\beta} Y^{\theta} \Gamma_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\theta} + Y^{\alpha} \partial_{\alpha} \left(y^{\varepsilon} \Gamma_{\varepsilon}{}^{\beta}{}_{\alpha} X^{\alpha} \right) - y^{\varepsilon} Y^{\beta} \Gamma_{\varepsilon}{}^{\alpha}{}_{\beta} X^{\theta} \Gamma_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\theta} \\
&= -y^{\varepsilon} \Gamma_{\varepsilon}{}^{\beta}{}_{\alpha} X^{\alpha} \left(\partial_{\alpha} Y^{\alpha} \right) - y^{\varepsilon} X^{\alpha} Y^{\theta} \partial_{\alpha} \Gamma_{\theta}{}^{\beta}{}_{\varepsilon} - y^{\varepsilon} X^{\alpha} Y^{\theta} \Gamma_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma} \Gamma_{\theta}{}^{\gamma}{}_{\varepsilon}
\end{aligned}
$$

$$+y^{\varepsilon}\Gamma_{\varepsilon}{}^{\beta}{}_{\alpha}Y^{\alpha}\left(\partial_{\alpha}X^{\alpha}\right)+y^{\varepsilon}X^{\alpha}Y^{\theta}\partial_{\theta}\Gamma_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\varepsilon}+y^{\varepsilon}X^{\alpha}Y^{\theta}\Gamma_{\theta}{}^{\beta}{}_{\gamma}\Gamma_{\alpha}{}^{\gamma}{}_{\varepsilon}$$

$$=-\left[y^{\varepsilon}\Gamma_{\varepsilon}{}^{\beta}{}_{\alpha}\underbrace{\left(X^{\alpha}\left(\partial_{\alpha}Y^{\alpha}\right)-Y^{\alpha}\left(\partial_{\alpha}X^{\alpha}\right)\right)}_{[X,Y]^{\alpha}}\right]-y^{\varepsilon}\left[\underbrace{X^{\alpha}Y^{\theta}\left(\partial_{\alpha}\Gamma_{\theta}{}^{\beta}{}_{\varepsilon}-\partial_{\theta}\Gamma_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\varepsilon}+\Gamma_{\alpha}{}^{\beta}{}_{\gamma}\Gamma_{\theta}{}^{\gamma}{}_{\varepsilon}-\Gamma_{\theta}{}^{\beta}{}_{\gamma}\Gamma_{\alpha}{}^{\gamma}{}_{\varepsilon}\right)}_{(R(X,Y))_{\varepsilon}^{\beta}}\right]$$

$$=-\left[y^{\varepsilon}\Gamma_{\varepsilon}{}^{\beta}{}_{\alpha}[X,Y]^{\alpha}\right]-y^{\varepsilon}(R(X,Y))_{\varepsilon}^{\beta}$$

$J=\beta$ için

$$[{}^{HH}X,{}^{HH}Y]^{\beta}=-y^{\varepsilon}\Gamma_{\varepsilon}{}^{\alpha}{}_{\beta}X^{\beta}\partial_{\bar{\alpha}}{}^{HH}Y^{\beta}+X^{\alpha}\partial_{\alpha}{}^{HH}Y^{\beta}+p_{\varepsilon}X^{\beta}\Gamma_{\beta}{}^{\varepsilon}{}_{\alpha}\partial_{\bar{\bar{\alpha}}}{}^{HH}Y^{\beta}$$

$$+y^{\varepsilon}\Gamma_{\varepsilon}{}^{\alpha}{}_{\beta}Y^{\beta}\partial_{\bar{\alpha}}{}^{HH}X^{\beta}-Y^{\alpha}\partial_{\alpha}{}^{HH}X^{\beta}-p_{\varepsilon}Y^{\beta}\Gamma_{\beta}{}^{\varepsilon}{}_{\alpha}\partial_{\bar{\bar{\alpha}}}{}^{HH}X^{\beta}$$

$$=-y^{\varepsilon}\Gamma_{\varepsilon}{}^{\alpha}{}_{\beta}X^{\beta}\underset{0}{\partial_{\bar{\alpha}}Y^{\beta}}+X^{\alpha}\partial_{\alpha}Y^{\beta}+p_{\varepsilon}X^{\beta}\Gamma_{\beta}{}^{\varepsilon}{}_{\alpha}\underset{0}{\partial_{\bar{\bar{\alpha}}}Y^{\beta}}$$

$$+y^{\varepsilon}\Gamma_{\varepsilon}{}^{\alpha}{}_{\beta}Y^{\beta}\underset{0}{\partial_{\bar{\alpha}}X^{\beta}}-Y^{\alpha}\partial_{\alpha}X^{\beta}-p_{\varepsilon}Y^{\beta}\Gamma_{\beta}{}^{\varepsilon}{}_{\alpha}\underset{0}{\partial_{\bar{\bar{\alpha}}}X^{\beta}}$$

$$=X^{\alpha}\partial_{\alpha}Y^{\beta}-Y^{\alpha}\partial_{\alpha}X^{\beta}$$

$$=[X,Y]^{\beta}$$

son olarak $J=\bar{\bar{\beta}}$ için

$$[{}^{HH}X,{}^{HH}Y]^{\bar{\bar{\beta}}}=-y^{\varepsilon}\Gamma_{\varepsilon}{}^{\alpha}{}_{\beta}X^{\beta}\partial_{\bar{\alpha}}{}^{HH}Y^{\bar{\bar{\beta}}}+X^{\alpha}\partial_{\alpha}{}^{HH}Y^{\bar{\bar{\beta}}}+p_{\sigma}X^{\beta}\Gamma_{\beta}{}^{\sigma}{}_{\alpha}\partial_{\bar{\bar{\alpha}}}{}^{HH}Y^{\bar{\bar{\beta}}}$$

$$+y^{\varepsilon}\Gamma_{\varepsilon}{}^{\alpha}{}_{\beta}Y^{\beta}\partial_{\bar{\alpha}}{}^{HH}X^{\bar{\bar{\beta}}}-Y^{\alpha}\partial_{\alpha}{}^{HH}X^{\bar{\bar{\beta}}}-p_{\sigma}Y^{\beta}\Gamma_{\beta}{}^{\sigma}{}_{\alpha}\partial_{\bar{\bar{\alpha}}}{}^{HH}X^{\bar{\bar{\beta}}}$$

$$=-y^{\varepsilon}\Gamma_{\varepsilon}{}^{\alpha}{}_{\beta}X^{\beta}\underset{0}{\partial_{\bar{\alpha}}p_{\sigma}}Y^{\alpha}\Gamma_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\beta}+X^{\alpha}\partial_{\alpha}\left(p_{\sigma}Y^{\alpha}\Gamma_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\beta}\right)+p_{\sigma}X^{\beta}\Gamma_{\beta}{}^{\sigma}{}_{\alpha}\underset{\delta_{\sigma}^{\alpha}}{\partial_{\bar{\bar{\alpha}}}p_{\sigma}}Y^{\alpha}\Gamma_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\beta}$$

$$+y^{\varepsilon}\Gamma_{\varepsilon}{}^{\alpha}{}_{\beta}Y^{\beta}\underset{0}{\partial_{\bar{\alpha}}p_{\sigma}}X^{\alpha}\Gamma_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\beta}-Y^{\alpha}\partial_{\alpha}\left(p_{\sigma}X^{\alpha}\Gamma_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\beta}\right)-p_{\sigma}Y^{\beta}\Gamma_{\beta}{}^{\sigma}{}_{\alpha}\underset{\delta_{\sigma}^{\alpha}}{\partial_{\bar{\bar{\alpha}}}p_{\sigma}}X^{\alpha}\Gamma_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\beta}$$

$$=X^{\alpha}\partial_{\alpha}(p_{\sigma}Y^{\alpha}\Gamma_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\beta})+p_{\sigma}X^{\beta}\Gamma_{\beta}{}^{\sigma}{}_{\alpha}Y^{\theta}\Gamma_{\theta}{}^{\alpha}{}_{\beta}$$

$$-Y^{\alpha}\partial_{\alpha}(p_{\sigma}X^{\alpha}\Gamma_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\beta})-p_{\sigma}Y^{\beta}\Gamma_{\beta}{}^{\sigma}{}_{\alpha}X^{\theta}\Gamma_{\theta}{}^{\alpha}{}_{\beta}$$

$$=p_{\sigma}X^{\alpha}(\partial_{\alpha}Y^{\alpha})\Gamma_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\beta}+p_{\sigma}X^{\alpha}Y^{\theta}\partial_{\alpha}\Gamma_{\theta}{}^{\sigma}{}_{\beta}+p_{\sigma}X^{\alpha}Y^{\theta}\Gamma_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\gamma}\Gamma_{\theta}{}^{\gamma}{}_{\beta}$$

$$-p_\sigma Y^\alpha(\partial_\alpha X^\alpha)\Gamma_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\beta} - p_\sigma Y^\alpha X^\theta \partial_\alpha \Gamma_{\theta}{}^{\sigma}{}_{\beta} - p_\sigma X^\alpha Y^\theta \Gamma_{\theta}{}^{\sigma}{}_{\gamma}\Gamma_{\alpha}{}^{\gamma}{}_{\beta}$$

$$=[p_\sigma \underbrace{(X^\alpha(\partial_\alpha Y^\alpha)-Y^\alpha(\partial_\alpha X^\alpha))}_{[X,Y]^\alpha}\Gamma_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\beta}]$$

$$+p_\sigma[\underbrace{X^\alpha Y^\theta(\partial_\alpha \Gamma_{\theta}{}^{\sigma}{}_{\beta} - \partial_\theta \Gamma_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\beta} + \Gamma_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\gamma}\Gamma_{\theta}{}^{\gamma}{}_{\beta} - \Gamma_{\theta}{}^{\sigma}{}_{\gamma}\Gamma_{\alpha}{}^{\gamma}{}_{\beta})}_{(R(X,Y))^\varepsilon_\beta}]$$

$$= p_\sigma[X,Y]^\alpha \Gamma_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\beta} + p_\sigma(R(X,Y))^\sigma_\beta$$

elde edilir. $(x^{\overline{\beta}}, x^\beta, x^{\overline{\overline{\beta}}})$ koordinatlarına göre $t^*(M_n)$ üzerindeki ${}^{HH}[X,Y]-\gamma R(X,Y)$ 'nin bileşenleri

$${}^{HH}[X,Y]-\gamma R(X,Y) = \begin{pmatrix} -y^\varepsilon \Gamma_{\varepsilon}{}^{\beta}{}_{\alpha}[X,Y]^\alpha \\ [X,Y]^\beta \\ p_\sigma[X,Y]^\alpha \Gamma_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\beta} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y^\varepsilon(R(X,Y))^\beta_\varepsilon \\ 0 \\ -p_\sigma(R(X,Y))^\sigma_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y^\varepsilon \Gamma_{\varepsilon}{}^{\beta}{}_{\alpha}[X,Y]^\alpha - y^\varepsilon(R(X,Y))^\beta_\varepsilon \\ [X,Y]^\beta \\ p_\sigma[X,Y]^\alpha \Gamma_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\beta} + p_\sigma(R(X,Y))^\sigma_\beta \end{pmatrix}$$

şeklinde olup $[{}^{HH}X, {}^{HH}Y] = {}^{HH}[X,Y]-\gamma R(X,Y)$ eşitliği gösterilmiş olur.

Teorem 4.2.5.4: Keyfi $X \in \Im^1_0(T(M_n))$ ve $S \in \Im^1_2(M_n)$ için

$$(\gamma S)({}^{HH}X) = \gamma(S_X)$$

eşitliği geçerlidir (Yıldırım and Salimov 2014a).

İspat: (4.29) ve (4.30) kullanılarak

$$(\gamma S)({}^{HH}X) = \begin{pmatrix} 0 & y^\varepsilon S^\alpha_{\varepsilon\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p_\sigma S^\sigma_{\beta\alpha} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y^\varepsilon \Gamma_{\varepsilon}{}^{\beta}{}_{\alpha} X^\alpha \\ X^\beta \\ p_\sigma X^\alpha \Gamma_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\beta} \end{pmatrix}$$

$$
=\begin{pmatrix} y^{\varepsilon}S_{\varepsilon\ \beta}^{\ \alpha}X^{\beta} \\ 0 \\ -p_{\sigma}S_{\beta\ \alpha}^{\ \sigma}X^{\beta} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y^{\varepsilon}(S_X)_{\varepsilon}^{\alpha} \\ 0 \\ -p_{\sigma}(S_X)_{\alpha}^{\sigma} \end{pmatrix}
$$

$$
=\gamma(S_X)
$$

elde edilir.

4.2.6. (1,1) tipli tensör alanlarının yatay lifti

$F=F_{\beta}^{\alpha}\partial_{\alpha}\otimes dx^{\beta}$ ile tanımlı M_n 'in bir U komşuluğunda F_{β}^{α} bileşenlerine sahip $F\in\Im_1^1(T(M_n))$ 'in $t^*(M_n)$ üzerindeki ${}^{HH}F$ yatay lifti

$$
{}^{HH}F={}^{cc}F-\gamma[\nabla F] \tag{4.32}
$$

ile tanımlıdır (Yıldırım and Salimov 2014a). Burada $[\nabla F]$, keyfi $X,Y\in\Im_0^1(T(M_n))$ vektör alanları için

$$
[\nabla F](X,Y)=-\nabla_X(FY)+\nabla_Y(FX) \tag{4.33}
$$

ile tanımlı (1,2) tipli bir tensör alanıdır. (4.24), (4.32) ve (4.33)'den, $t^*(M_n)$ üzerindeki $(x^{\bar{\alpha}},x^{\alpha},x^{\bar{\bar{\alpha}}})$ koordinatlarına göre F 'in, ${}^{HH}F$ yatay lifti

$$
{}^{HH}F=({}^{HH}F_J^I)=\begin{pmatrix} F_{\beta}^{\alpha} & -\Gamma_{\varepsilon}^{\alpha}F_{\beta}^{\varepsilon}+\Gamma_{\beta}^{\varepsilon}F_{\varepsilon}^{\alpha} & 0 \\ 0 & F_{\beta}^{\alpha} & 0 \\ 0 & -\Gamma_{\beta\sigma}F_{\alpha}^{\sigma}+\Gamma_{\alpha\sigma}F_{\beta}^{\sigma} & F_{\alpha}^{\beta} \end{pmatrix} \tag{4.34}
$$

bileşenlerine sahiptir. Burada F_β^α ’lar F ’in lokal bileşenleri, $\Gamma_{\beta}{}^{\varepsilon}{}_{\alpha}$ ’lar ise $t^*(M_n)$ üzerindeki ∇ ’nın bileşenleri olup $\Gamma_{\beta\alpha}$ ve Γ_β^α ’lar ise (4.31) ile tanımlıdır (Yıldırım and Salimov 2014a).

İspat: (4.24), (4.32) ve (4.33)’den

$$
{}^{HH}F = \begin{pmatrix} F_\beta^\alpha & -\Gamma_\varepsilon^\alpha F_\beta^\varepsilon + \Gamma_\beta^\varepsilon F_\varepsilon^\alpha & 0 \\ 0 & F_\beta^\alpha & 0 \\ 0 & -\Gamma_{\beta\sigma} F_\alpha^\sigma + \Gamma_{\alpha\sigma} F_\beta^\sigma & F_\alpha^\beta \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} F_\beta^\alpha & y^\varepsilon \partial_\varepsilon F_\beta^\alpha & 0 \\ 0 & F_\beta^\alpha & 0 \\ 0 & p_\sigma(\partial_\beta F_\alpha^\sigma - \partial_\alpha F_\beta^\sigma) & F_\alpha^\beta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & y^\varepsilon \left(\partial_\varepsilon F_\beta^\alpha + \Gamma_{\varepsilon}{}^{\alpha}{}_{\gamma} F_\beta^\gamma - \Gamma_{\varepsilon}{}^{\gamma}{}_{\beta} F_\gamma^\alpha \right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p_\sigma \underbrace{(\underbrace{\partial_\alpha F_\beta^\sigma + \Gamma_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\gamma} F_\beta^\gamma}_{\nabla_Y(FX)} - \underbrace{\partial_\beta F_\alpha^\sigma - \Gamma_{\beta}{}^{\sigma}{}_{\gamma} F_\alpha^\gamma}_{\nabla_X(FY)})}_{([\nabla F](X,Y))_{\beta\alpha}^\sigma} & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} F_\beta^\alpha & y^\varepsilon \partial_\varepsilon F_\beta^\alpha & 0 \\ 0 & F_\beta^\alpha & 0 \\ 0 & p_\sigma(\partial_\beta F_\alpha^\sigma - \partial_\alpha F_\beta^\sigma) & F_\alpha^\beta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & y^\varepsilon \left(\nabla_\varepsilon F_\beta^\alpha \right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p_\sigma([\nabla F](X,Y))_{\beta\alpha}^\sigma & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
= {}^{cc}F - \gamma[\nabla F]
$$

elde edilir.

Teorem 4.2.6.1: $T(M_n)$ üzerindeki keyfi F afinor ve X vektör alanları ile $\omega \in \Im_1^0(M_n)$ için $t^*(M_n)$ ’de

(i) ${}^{HH}F({}^{vv}\omega) = {}^{vv}(\omega \circ F)$,

(ii) ${}^{HH}F({}^{HH}X) = {}^{HH}(FX)$

eşitlikleri elde edilir (Yıldırım and Salimov 2014a).

İspat: (i) Keyfi $\omega \in \Im_1^0(M_n)$, $F \in \Im_1^1(T(M_n))$ için (4.6) ve (4.34) kullanılarak

$$
\begin{aligned}
{}^{HH}F({}^{vv}\omega) &= \begin{pmatrix} F_\beta^\alpha & -\Gamma_\varepsilon^\alpha F_\beta^\varepsilon + \Gamma_\beta^\varepsilon F_\varepsilon^\alpha & 0 \\ 0 & F_\beta^\alpha & 0 \\ 0 & -\Gamma_{\beta\sigma} F_\alpha^\sigma + \Gamma_{\alpha\sigma} F_\beta^\sigma & F_\alpha^\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_\beta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_\beta F_\alpha^\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (\omega \circ F)_\alpha \end{pmatrix} \\
&= {}^{vv}(\omega \circ F)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

(ii) $T(M_n)$ üzerindeki keyfi F afinor ve X vektör alanları için (4.30) ve (4.34)'den

$$
\begin{aligned}
{}^{HH}F({}^{HH}X) &= \begin{pmatrix} F_\beta^\alpha & -\Gamma_\varepsilon^\alpha F_\beta^\varepsilon + \Gamma_\beta^\varepsilon F_\varepsilon^\alpha & 0 \\ 0 & F_\beta^\alpha & 0 \\ 0 & -\Gamma_{\beta\sigma} F_\alpha^\sigma + \Gamma_{\alpha\sigma} F_\beta^\sigma & F_\alpha^\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y^\varepsilon \Gamma_{\varepsilon}{}^{\beta}{}_{\alpha} X^\alpha \\ X^\beta \\ p_\sigma X^\alpha \Gamma_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\beta} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -y^\varepsilon \Gamma_{\varepsilon}{}^{\beta}{}_{\theta} X^\theta F_\beta^\alpha \underbrace{- y^\gamma \Gamma_{\gamma}{}^{\alpha}{}_{\varepsilon} F_\beta^\varepsilon X^\beta}_{-y^\varepsilon \Gamma_{\varepsilon}{}^{\alpha}{}_{\beta} (FX)^\beta} + y^\gamma \Gamma_{\gamma}{}^{\varepsilon}{}_{\beta} F_\varepsilon^\alpha X^\beta \\ F_\beta^\alpha X^\beta \\ -p_\theta \Gamma_{\beta}{}^{\theta}{}_{\varepsilon} F_\alpha^\varepsilon X^\beta + \underbrace{p_\theta \Gamma_{\alpha}{}^{\theta}{}_{\varepsilon} F_\beta^\varepsilon X^\beta}_{p_\theta (FX)^\varepsilon \Gamma_{\alpha}{}^{\theta}{}_{\varepsilon}} + p_\varepsilon X^\alpha \Gamma_{\alpha}{}^{\varepsilon}{}_{\beta} F_\alpha^\beta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -y^\varepsilon \Gamma_{\varepsilon}{}^{\alpha}{}_{\beta} (FX)^\beta \\ (FX)^\alpha \\ p_\sigma (FX)^\beta \Gamma_{\beta}{}^{\sigma}{}_{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Gamma_\beta^\alpha (FX)^\beta \\ (FX)^\alpha \\ (FX)^\beta \Gamma_{\beta\alpha} \end{pmatrix} \\
&= {}^{HH}(FX)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Teorem 4.2.6.2: Keyfi $F,G\in\Im_1^1(T(M_n))$ afinor alanları ve $S\in\Im_2^1(M_n)$ için

(i) $\quad {}^{HH}F(\gamma G)=\gamma(G\circ F)$,

(ii) $\quad {}^{HH}F\gamma(S)=\gamma(SF)$

eşitlikleri elde edilir. Burada SF, keyfi $X,Y\in\Im_0^1(T(M_n))$ için $(SF)(X,Y)=S(X,FY)$ ile tanımlıdır (Yıldırım and Salimov 2014a).

İspat: (i) $F,G\in\Im_1^1(T(M_n))$ afinor alanları için (4.28) ve (4.34) kullanılarak

$$ {}^{HH}F(\gamma G)=\begin{pmatrix} F_\beta^\alpha & -\Gamma_\varepsilon^\alpha F_\beta^\varepsilon+\Gamma_\beta^\varepsilon F_\varepsilon^\alpha & 0\\ 0 & F_\beta^\alpha & 0\\ 0 & -\Gamma_{\beta\sigma}F_\alpha^\sigma+\Gamma_{\alpha\sigma}F_\beta^\sigma & F_\alpha^\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y^\varepsilon G_\varepsilon^\beta\\ 0\\ -p_\sigma G_\beta^\sigma \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} y^\varepsilon\left(G_\varepsilon^\beta F_\beta^\alpha\right)\\ 0\\ -p_\sigma\left(G_\beta^\sigma F_\alpha^\beta\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y^\varepsilon(G\circ F)_\varepsilon^\alpha\\ 0\\ -p_\sigma(G\circ F)_\alpha^\sigma\end{pmatrix}$$

$$=\gamma(G\circ F)$$

elde edilir.

(ii) $S\in\Im_2^1(M_n)$ ve F, $T(M_n)$ üzerinde afinor alanı olmak üzere (4.29) ve (4.34) kullanılarak

$$ {}^{HH}F(\gamma S)=\begin{pmatrix} F_\beta^\alpha & -\Gamma_\varepsilon^\alpha F_\beta^\varepsilon+\Gamma_\beta^\varepsilon F_\varepsilon^\alpha & 0\\ 0 & F_\beta^\alpha & 0\\ 0 & -\Gamma_{\beta\sigma}F_\alpha^\sigma+\Gamma_{\alpha\sigma}F_\beta^\sigma & F_\alpha^\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & y^\varepsilon S_{\varepsilon\ \theta}^{\ \beta} & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & -p_\sigma S_{\theta\ \beta}^{\ \sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & y^\varepsilon S_{\varepsilon\ \theta}^{\ \beta}F_\beta^\alpha & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & -p_\sigma S_{\theta\ \beta}^{\ \sigma}F_\alpha^\beta & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & y^\varepsilon(SF)_{\varepsilon\theta}^\alpha & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & -p_\varepsilon(SF)_{\theta\alpha}^\varepsilon & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\gamma(SF)$$

elde edilir.

5. SONUÇ

(1) Sunulan bu tezde ilk olarak yarı-kotanjant demetin tanımı yapıldı.

(2) Yarı-kotanjant demetin, kotanjant demetinin bir pull-back demeti olduğu gösterildi.

(3) Yarı-kotanjant demetin dejenere ω simplektik yapısına sahip olduğu ispatlandı.

(4) Vektör ve afinor alanlarının tam ve yatay liftleri tanımlanarak, bunların geometrik problemleri incelendi.

(5) Tanjant demet izdüşümüne sahip kotanjant demetinin pull-back demeti tanımlandı.

(6) Tanjant demet izdüşümüne sahip kotanjant demetinin pull-back demetinde vektör ve afinor alanlarının tam ve yatay liftleri incelendi.

KAYNAKLAR

Ay, S., 2013. Yarı Tanjant Demet. (Y. Lisans Tezi), Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi.

Bishop, R.L. and Goldberg S.I., 1968. Tensor Analysis on Manifolds. The Macmillan Company, p.19-135, New York.

Dombrowski, P., 1962. On the Geometry of the Tangent Bundle. Journal für die reine und angewandte Mathematik. 210: 73-88.

Duc, T.V., 1979. Structure presque-transverse. J. Diff . Geom., 14, No:2, 215-219.

Husemoller, D., 1994. Fibre Bundles. Springer, New York.

Kandatu, A., 1966. Tangent bundle of a manifold with a non-linear connection. Kodai Mathematical Seminar Reports. 18, no. 4, 259-270.

Kobayashi, S. and Nomizu K., 1963. Foundations of differential geometry. Vol. I, Interscience Publishers, New York-London.

Lawson, H.B. and Michelsohn M.L., 1989. Spin Geometry. Princeton University Press., Princeton.

Ledger, A.J. and Yano K., 1965. The Tangent Bundle of a Locally Symmetric Space. Jour. London Math. Soc., 40, 487-492.

Morimoto, A., 1970. Liftings of Tensor Fields and Connections to Tangent Bundles of Higher order. Nagoya Math. Jour., 40, 99-120.

Ostianu, N.M., 1974. Step-fibred spaces. Tr. Geom. Sem., 5, VINITI, 259–309, Moscow.

Pontryagin, L.S., 1962. Characteristic classes of differentiable manifolds. Transl. Amer. Math. Soc., 7, 279-331.

Poor, W.A., 1981. Differential Geometric Structures. McGraw-Hill, New York.

Ricci, G. and Levi-Civita, T., 1900. Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications. Mathematische Annalen. 54 (1–2): 125–201.

Salimov, A.A. and Kadıoğlu E., 2000. Lifts of derivations to the semitangent bundle. Turk J. Math, 24, 259-266.

Salimov, A.A. ve Mağden A., 2008. Diferensiyel Geometriye Giriş. Atatürk Üniversitesi.

Salimov, A.A. and Yıldırım F., 2014. A pull-back bundle of cotangent bundles defined by projection of the tangent bundle. XII. Geometry Semp., Bilecik.

Sasaki, S., 1958, On Differential Geometry of Tangent Bundle of Riemannian Manifolds, I, Tohoku Math, Jour., 14, 146-155.

Sasaki, S., 1962, On Differential Geometry of Tangent Bundle of Riemannian Manifolds, II, Tohoku Math, Jour., 10, 238-354.

Steenrod, N., 1951. The Topology of Fibre Bundles. Princeton University Press., Princeton.

Vishnevskii, V.V., 2002. Integrable affinor structures and their plural interpretations. Geometry, 7.J. Math. Sci., 108, no. 2, 151-187, New York.

Vishnevskii, V.V., Shirokov A.P. and Shurygin V.V., 1985. Spaces over Algebras. Kazan. Kazan Gos. Univ. Russian.

Voigt, W., 1898. The fundamental physical properties of crystals in an elementary presentation, p. 20, Leipzig, Germany.

Yano, K. and Ako M., 1968. On certain operators associated with tensor fields. Kodai Math. Sem. Rep., 20, 414-436.

Yano, K. and Ishihara S., 1967. Horizontal Lifts of Tensor Fields and Connections to Tangent Bundles. Jour. Math. and Mech., 16, 1015-1030.

Yano, K. and Ishihara S., 1973. Tangent and Cotangent Bundles. Marcel Dekker, Inc., New York.

Yano, K. and Kobayashi, S., 1966, Prolongations of Tensor Fields and Connections to Tangent Bundles, I. General Theory, Jour. Math. Soc. Japan, 18, 194-210.

Yano, K. and Ledger A.J., 1965. The Tangent Bundle of a Locally Symmetric Space. J. London Math. Soc, 40: 487-492.

Yano, K. and Patterson E.M., 1967. Vertical and complete lifts from a manifold to its cotangent bundles. Jour. of Math. Soc., Japan.

Yıldırım F. and Salimov A., 2014. Horizontal lift problems in a special class of semi-cotangent bundle. IECMSA-2014 Vienna, Austria.

Yıldırım, F. and Salimov A., 2014. Semi-cotangent bundle and problems of lifts. Turk J. Math, 38, 325-339.

Yıldırım, F., 2013. Horizontal Lift Problems in the Semi-Cotangent Bundle. IECMSA-2013 Sarajevo, Bosnia and Herzegovina.

ÖZGEÇMİŞ

Furkan YILDIRIM 1985 yılında Erzurum'da dünyaya geldi. İlk ve orta öğrenimini Erzurum'da tamamladı. Lise öğreniminide Erzurum Nevzat Karabağ Anadolu Öğretmen Lisesi'nde tamamladı. 2003 yılında girdiği Atatürk Üniversitesi K. Karabekir Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Bölümü'nden 2007 yılında mezun oldu. Aynı yıl Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde yüksek lisans öğrenimine ve Erzurum'un Horasan İlçesi Anadolu Lisesi'nde matematik öğretmeni olarak görevine başladı. Çeşitli ortaokullarda çalışıp, 2013 yılında Gazi Ahmet Muhtar Paşa Ortaokulu'na tayin oldu. Halen burada görevini sürdürmektedir.