

**(2,n)-TOR DÜĞÜMLERİNİN TUTTE
POLİNOMLARI**

Abdulgani ŞAHİN

**Doktora Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Topoloji Bilim Dalı
Prof. Dr. Abdullah KOPUZLU
2015**

Her hakkı saklıdır

**ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

(2,n)-TOR DÜĞÜMLERİNİN TUTTE POLİNOMLARI

Abdulgani ŞAHİN

**MATEMATİK ANABİLİM DALI
Topoloji Bilim Dalı**

ERZURUM

2015

Her hakkı saklıdır



T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



TEZ ONAY FORMU

(2,n)-TOR DÜĞÜMLERİNİN TUTTE POLİNOMLARI

Prof. Dr. Abdullah KOPUZLU danışmanlığında, Abdulgani ŞAHİN tarafından hazırlanan bu çalışma 15/06/2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı – Topoloji Bilim Dalı'nda Doktora Tezi olarak **oybirliği/oy çokluğu** ile kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Uğur Selamet KIRMACI

İmza :

Üye : Prof. Dr. Abdullah KOPUZLU

İmza :

Üye : Doç. Dr. Tamer UĞUR

İmza :

Üye : Doç. Dr. İsmet ALTINTAŞ

İmza :

Üye : Doç. Dr. Ceren Sultan ELMALI

İmza :

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu 02/07/2015 tarih ve 26 / . 872. nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Ertan YILDIRIM
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Doktora Tezi

(2, n)-TOR DÜĞÜMLERİNİN TUTTE POLİNOMLARI

Abdulgani ŞAHİN

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Topoloji Bilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Abdullah KOPUZLU

Bu tezde, $(2, n)$ -tor düğümlerinin Tutte polinomları hesaplandı ve bu hesaplamalar için bazı genel formüller verildi. İlk olarak $(2, n)$ -tor düğümlerinin regüler diyagramlarından yararlanılarak izomorfik ve dual grafları elde edildi. Daha sonra bu grafların Tutte polinomları, silme-büzülme işlemleri vasıtasıyla tanımlanabilen indirgeme formülleriyle diyagramsal olarak hesaplandı. Sonuç olarak, $(2, n)$ -tor düğümlerinin izomorfik ve dual graflarının Tutte polinomları için elde edilen genel formüllerin birbirine eşit oldukları sonucuna ulaşıldı. Ayrıca, $(2, n)$ -tor düğümlerinin her bir kenarı $\{+ \text{ veya } -\}$ ile işaretlendirilmiş grafları elde edilerek bu grafların Tutte polinomları hesaplandı. Bu işaretlendirilmiş grafların Tutte polinomları için iki genelleştirme elde edildi.

2015, 107 sayfa

Anahtar Kelimeler: Düğüm, halka, tor düğümleri, düğüm sabiti, graf, graf sabiti, düğüm grafi, Tutte Polinomu, medial graf, dual graf.

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

THE TUTTE POLYNOMIALS OF $(2, n)$ -TORUS KNOTS

Abdulgani ŞAHİN

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Abdullah KOPUZLU

In this thesis, the Tutte polynomials of $(2, n)$ -torus knots have been computed and some general formulas for this process have been introduced. Firstly, the isomorphic graphs and dual graphs of $(2, n)$ -torus knots have been obtained from their regular diagrams. Then, the Tutte polynomials of these graphs have been computed as a diagrammatic by recursive formulas that can be defined by deletion-contraction operations. Finally, it has been obtained that the Tutte polynomials of the isomorphic graphs and dual graphs of $(2, n)$ -torus knots are equivalent to each other. Moreover the Tutte polynomials for signed graphs, which their edges are each labelled with a sign $\{+ \text{ or } -\}$, of $(2, n)$ -torus knots have been computed. Two generalizations have been obtained for these graphs.

2015, 107 pages

Keywords: Knot, link, torus knots, knot invariant, graph, graph invariant, knot graph, Tutte Polynomial, medial graph, dual graph.

TEŞEKKÜR

Doktora tezi olarak sunduğum bu alışma Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda hazırlanmıştır.

Doktora çalışmalarım için bana ortam hazırlayan, bu tez konusunu çalışmamı sağlayan, çalışmalarımda her türlü desteği sunan ve her adımda bilgilerini esirgemeyen çok değerli hocam Sayın Prof. Dr. Abdullah KOPUZLU'ya en içten saygı, şükran ve teşekkürlerimi sunarım.

Atatürk Üniversitesi Fen Fakóltesi Matematik Bölümündeki çalışmalarımda ve tezin hazırlanışında gerekli yardımı, bilgiyi ve yakın ilgilerini esirgemeyen hocam Sayın Prof. Dr. Ahmet KÜÇÜK'e, hocam Sayın Doç. Dr. Tamer UĞUR'a saygı ve şükranlarımı sunarım. Yine aynı bölümde görev yapan, bilgi ve yardımlarını esirgemeyen Sayın Doç. Dr. Nurullah ANKARALIOĐLU hocama saygılarımı sunarım. Tez izleme komitesinde yer alan, bilgi ve yardımlarını esirgemeyen Sayın Prof. Dr. Ramazan DİKİCİ ve Sayın Prof. Dr. Uğur Selamet KIRMACI hocalarıma saygılarımı sunarım. Ayrıca çalışmalarım boyunca kendilerinden görmüş olduğum destek ve teşviklerden dolayı Atatürk Üniversitesi Fen Fakóltesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi değerli dostum Sayın Doç. Dr. Murat İşCAN'a ve K.K.E.F Cođrafya Eđitimi Anabilim Dalı Öğretim Üyesi değerli dostum Sayın Doç. Dr. Ođün COřKUN'a teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Çalışmalarım esnasında göstermiş oldukları sabır ve anlayıştan dolayı eşime, aileme ve arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Abdulgani şAHİN

Mayıs, 2015

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ.....	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	x
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	7
2.1. Düğüm.....	7
2.2. Basit Düğüm Hareketleri.....	12
2.3. Dğümlerin Denkliği.....	14
2.4. Halkalar.....	19
2.5. Dğümlerin Aritmetiği.....	22
2.6. Regüler Diyagramlar.....	26
2.7. Klasik Dğüm Sabitleri.....	29
2.8. Dğüm Polinomları.....	35
2.8.1. Alexander – Conway polinomu.....	35
2.8.2. Jones polinomu.....	38
2.8.3. Skein invaryantları.....	40
2.8.4. Kauffman polinomu.....	43
2.9. Graflar.....	52
2.10. Graf Çeşitleri.....	54
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	57
3.1. Tor Dğümleri.....	57
3.2. Dğümler ve Graflar.....	62
3.3. Tutte Polinomu.....	70
3.4. Tutte Polinomunun Kullanım Alanları.....	72
3.4.1. Özellikler.....	78
3.4.2. Kromatik polinom.....	78
3.4.3. Jones polinomu.....	79

3.4.4. Özel noktalar	79
3.4.5. Potts ve Ising modelleri	79
3.4.6. Flow polinomu	80
3.4.7. Reliability polinomu	81
3.4.8. Dikromatik polinom	81
3.4.9. Gauss eliminasyonu	82
3.5. İşaretlendirilmiş Graflar İçin Tutte Polinomu	82
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	86
4.1. Düğümlerin Tutte Polinomu	86
4.2. $(2, n)$ -Tor Düğümlerinin Tutte Polinomu	87
4.3. $(2, n)$ -Tor Düğümlerinin İşaretlendirilmiş Graflarının Tutte Polinomu	96
5. TARTIŞMA ve SONUÇ	101
KAYNAKLAR	106
ÖZGEÇMİŞ	108

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$br(K)$	K düğümünün tüm regüler diyagramlarından elde edilen köprü sayısının minimum değeri
B^n	n -boyutlu top
c	Bir düğümün geçiti
$c(K)$	K düğümünün tüm regüler diyagramlarından elde edilen geçitlerin minimum sayısı
C	Herhangi bir merkezi yay
$C_G(k)$	Flow polinomu
C_n	n -köşeli çevre graf
D	K düğümünün standart regüler diyagramı
e	Bir G grafının herhangi bir kenarı
E	Herhangi bir düzlem
$E(\vec{\sigma})$	$\vec{\sigma}$ konfigürasyonu içindeki sistemin toplam enerjisi
f	Herhangi bir fonksiyon
f_0, f_1	Herhangi iki gömülme
f^{-1}	f fonksiyonunun tersi
F	Seviyeyi koruyan izotopi
$F_K(a, x)$	K düğümünün 2-değişkenli Kauffman polinomu
G	Herhangi bir graf
G^*	G grafının dual grafi
$G(U)$	Bir düzlemsel graf
$G = (V, E)$	Kenarlarının kümesi E ve köşe noktalarının kümesi V olan graf
$G - e$	G grafından e kenarının silinmesiyle elde edilen graf
G/e	G grafında e kenarının bir köşe noktasına büzülmesiyle elde edilen graf
G_1	$K_{2,3}$ ve $K_{2,3}^*$ tor düğümlerinin izomorfik grafi
G_2	$K_{2,5}$ ve $K_{2,5}^*$ tor düğümlerinin izomorfik grafi
G_3	$K_{2,7}$ ve $K_{2,7}^*$ tor düğümlerinin izomorfik grafi

G'_1	$K_{2,3}$ ve $K_{2,3}^*$ tor düğümünün dual grafi
G'_2	$K_{2,5}$ ve $K_{2,5}^*$ tor düğümünün dual grafi
G'_3	$K_{2,7}$ ve $K_{2,7}^*$ tor düğümünün dual grafi
G_4	$K_{2,3}$ tor düğümünün işaretlendirilmiş grafi
G_5	$K_{2,5}$ tor düğümünün işaretlendirilmiş grafi
G_6	$K_{2,7}$ tor düğümünün işaretlendirilmiş grafi
G_4^*	$K_{2,3}^*$ tor düğümünün işaretlendirilmiş grafi
G_5^*	$K_{2,5}^*$ tor düğümünün işaretlendirilmiş grafi
G_6^*	$K_{2,7}^*$ tor düğümünün işaretlendirilmiş grafi
$G * H$	G ve H graflarının birleşimi
H	Kuşatan izotopi
H_q	Her pozitif q tamsayısı için $(x - 1)(y - 1) = q$ denklemiyle tanımlanan hiperbol
$i_+ = i_+(G)$	G grafindaki pozitif kıstakların sayısı
$i_- = i_-(G)$	G grafindaki negatif kıstakların sayısı
$k(G)$	G grafinın bağlantılı bileşenlerinin sayısı
k_B	Boltzmann sabiti
K	Herhangi bir düğüm
$-K$	K düğümünün yönlendirmesinin tersine çevrilmesi
K^*	K düğümünün ayna görüntüsü
$K_{p,q}$	p, q -tipli tor düğümü
$K(p, q)$	p, q -tipli yönlendirilmiş tor düğümü
$K_{m,n}$	İki kümeli graf
K_n	n -köşeli tam graf
$K_{1,n}$	Yıldız graf
$\langle K(G) \rangle$	Kauffman parantez polinomu
$lk(L)$	L halkasının halkalanma sayısı
$l_+ = l_+(G)$	G grafindaki pozitif ilmeklerin sayısı
$l_- = l_-(G)$	G grafindaki negatif kıstakların sayısı
L	Herhangi bir halka

$M(G)$	Medial graf
$n(A)$	A grafının boşluğu
$p(K)$	Bir düğümün sabiti
$P(\vec{\sigma})$	$\vec{\sigma}$ konfigürasyonunun olasılığı
$P(G, \lambda)$	Kromatik polinom
$P_K(a)$	K düğümünün Kauffman parantez polinomu
$\hat{P}_K(a)$	K düğümünün Kauffman polinomu
$P_K(v, z)$	K düğümünün 2-değişkenli skein polinomu (Homfly polinomu)
P_n	n -köşeli yol graf
$Q[G]$	İşaretilendirilmiş graflar için Tutte polinomu
$Q(G; x, y)$	Tutte'nin dikromatik polinomu
$r(A)$	(V, A) grafının mertebesi
$R(G, p)$	Reliability polinomu
$R(G; x, y)$	Whitney'in sıralı üretici fonksiyonu
\mathbb{R}^2	2-boyutlu Öklid uzayı
\mathbb{R}^3	3-boyutlu Öklid uzayı
$sign(c)$	Bir geçitin işareti
S^1	1-boyutlu küre
S^2	$\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ şeklinde oluşturulan uzay
S^3	$\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ şeklinde oluşturulan uzay
$S^3 - K$	K düğümünün tümleyen uzayı
$S_K(x, y, w)$	K düğümünün 3-değişkenli skein polinomu
T	Aşık tor
$T(D)$	D diyagramının kıvrılma sayısı
$T(G)$	G grafının Tutte polinomu
$T(G; x, y)$	G grafının Tutte polinomu
$u(K)$	K düğümünün düğümlenmeme sayısı
U	Düğüm evreni
$V_K(t)$	K düğümünün Jones polinomu
$w(D)$	Tait sayısı
$W_{1,n}$	n -köşeli tekerlek graf

X	Herhangi bir Hausdorff uzayı
Y	Herhangi bir Hausdorff uzayı
z	Bölüm fonksiyonu
$Z(q, v)$	İstatistiksel mekanikten gelen rastgele küme modeli
$Z[G](q, v)$	İşaretilendirilmemiş G grafi altında yatan dikromatik polinom
$\varepsilon(p)$	p geçitinin işareti
α, β, γ	Herhangi üç eğri
φ	Herhangi bir fonksiyon
Σ	Herhangi bir 2-boyutlu küre
$\vec{\sigma}$	$\{\pm 1\}$ değerine sahip dönmelerin konfigürasyonu
$\Gamma(U)$	Bir düzlemsel graf
$\tau(G)$	G grafının tamlığı
$\chi(G)$	G grafının kromatik sayısı
$\chi(G, \lambda)$	G grafının kromatik polinomu
$\#$	Bağlantılı toplam operatörü
Ω_i	$i=1,2,3$ için Reidemeister hareketleri
\approx	Denklik operatörü
\cong	Yönlendirmeye denklik operatörü
$\Delta_K(t)$	K düğümünün Alexander polinomu
$\nabla_K(z)$	K düğümünün Conway polinomu

Kısaltmalar

FKT	Fisher, Kasteleyn ve Temperley algoritması
-----	--

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Basit bir düğüm tipi ve sol-el trefoil düğüm.....	7
Şekil 2.2. Sağ-el trefoil düğüm	7
Şekil 2.3. Düğümlenmelerine göre farklı olmalarına rağmen izotop olan düğümler dizisi	9
Şekil 2.4. Bir vahşi düğüm örneği	10
Şekil 2.5. Ochiai düğümü	11
Şekil 2.6. Aşıkâr düğüm	11
Şekil 2.7. 3-boyutlu uzayda poligonal bir düğüm örneği ve poligonal bir vahşi düğüm örneği.....	12
Şekil 2.8. Temel basit düğüm hareketleri	13
Şekil 2.9. Temel basit düğüm hareketleri	13
Şekil 2.10. Yönlendirilmiş düğüm örnekleri.....	14
Şekil 2.11. Yönlendirmeyi koruyan otohomeomorfizm örnekleri.....	17
Şekil 2.12. R^3 de x, y, z-eksenlerine göre sağ-el ve sol-el kuralları	17
Şekil 2.13. P noktasının xy-düzlemine göre ayna görüntüsü.....	18
Şekil 2.14. Yönlendirmeyi koruyan bir otohomeomorfizm örneği	19
Şekil 2.15. Bir halkadaki yönlendirilmiş geçitlere ± 1 işareti verilmesi kuralı	19
Şekil 2.16. Denk halkalara bir örnek	21
Şekil 2.17. Denk olmayan yönlendirilmiş halkalara bir örnek	21
Şekil 2.18. n-bileşenli aşıkâr halka	21
Şekil 2.19. (1,1)-dolaşık örnekleri	22
Şekil 2.20. Bir düğümün iki düğüme ayrışımı.....	23
Şekil 2.21. Bir düğümün aşıkâr ayrışımı	24
Şekil 2.22. İki farklı düğümün bağlantılı toplamı.....	25
Şekil 2.23. Bir regüler izdüşüm örneği	276
Şekil 2.24. Bir izdüşüm üzerinde oluşan katlı noktalar	27
Şekil 2.25. Regüler diyagram örnekleri	28
Şekil 2.26. Kaldırılabilir geçit örneği	298
Şekil 2.27. Reidemeister hareketleri	29

Şekil 2.28. Farklı sayıda geçitlere sahip aşıkâr düğümüne ait iki farklı regüler diyagram örneği.....	30
Şekil 2.29. Bir düğümün regüler diyagramı üzerindeki köprü örnekleri.....	31
Şekil 2.30. Düğümlememe operasyonuna bir örnek.....	32
Şekil 2.31. Bir düğümün yönlendirilmiş regüler diyagramı üzerindeki geçitlerin işaretlendirilmesi kuralları.....	33
Şekil 2.32. Bir düğümün halkalanma sayısı ile ilgili bir örnek	34
Şekil 2.33. Conway polinomu hesaplamaları için skein diyagramları.....	36
Şekil 2.34. Sağ-el trefoil düğümünün Jones polinomu için skein ağaç diyagramı	40
Şekil 2.35. Kauffman parantez polinomunun tanımı için bir regüler diyagram üzerindeki ayırma yöntemi.....	44
Şekil 2.36. Kauffman parantez polinomunun tanımında regüler diyagram üzerindeki ayırma yönteminde yönlendirmenin etkisi.....	44
Şekil 2.37. Kauffman parantez polinomunu tanımında kullanılan skein diyagramları ..	45
Şekil 2.38. Kauffman polinomu hesaplamaları için skein diyagramları.....	47
Şekil 2.39. 2-değişkenli Kauffman polinomunu için regüler diyagramlar	47
Şekil 2.40. Bir alt graf elde edilmesi işlemi.....	53
Şekil 2.41. Yol graf örnekleri	54
Şekil 2.42. Çevre graf örnekleri.....	54
Şekil 2.43. Tam graf örnekleri	55
Şekil 2.44. Tekerlek graf örnekleri	55
Şekil 2.45. Yıldız graf örnekleri	55
Şekil 2.46. İki kümeli graf örnekleri.....	56
Şekil 2.47. İki kümeli tam graf örnekleri.....	56
Şekil 2.48. Ağaç graf örnekleri	56
Şekil 3.1. R^2 de $(2,0)$ merkezli ve 1 br yarıçaplı çember.....	57
Şekil 3.2. Aşıkâr tor ve aşıkâr olmayan tor.....	58
Şekil 3.3. Tor düğümünün elde edilmesi	58
Şekil 3.4. $K_{2,3}$ tor düğümünün orijinal şekli.....	59
Şekil 3.5. $K_{1,0}$ ve $K_{0,0}$ tor düğümleri	59
Şekil 3.6. $K(3,2)$ ve $K(-3, -2)$ tor düğümleri	60

Şekil 3.7. $K(q, r)$ tor düğümünün regüler diyagramı	60
Şekil 3.8. Tor halkasının elde edilmesi.....	61
Şekil 3.9. Bir tor halkası örneği	61
Şekil 3.10. Dama desenli biçimde renklendirilmiş graflar	62
Şekil 3.11. İki düzlem graf örneği	63
Şekil 3.12. Bir düğümün regüler izdüşümüne karşılık gelen düzlem grafın kenarlarının ya bir alt geçit ya da bir üst geçit için işaretlendirilmesi kuralı.....	63
Şekil 3.13. İşaretlendirilmiş düzlem graf örnekleri	64
Şekil 3.14. İşaretlendirilmiş bir düzlemsel grafa karşılık gelen düğümün regüler diyagramının elde edilmesi	65
Şekil 3.15. Bazı bağlantılı düzlem graflar ile onlara karşılık gelen düğümlerin (halkaların) regüler izdüşüm örnekleri	66
Şekil 3.16. Bir grafa karşılık gelen medial grafın elde edilmesi.....	67
Şekil 3.17. Medial yapısı verilen bir grafın elde edilmesi	67
Şekil 3.18. Düğüm evrenleri ile düzlemsel grafların birebir karşılık geldiklerine ilişkin bir örnek	68
Şekil 3.19. 8_{17} düğümünün izomorfik ve dual graflarının elde edilmesi	69
Şekil 3.20. Bir alterne halkanın taranmış diyagramında her bir geçitin durumu.....	69
Şekil 3.21. İşaretlendirilmiş grafların nasıl elde edilebileceğinin kuralı	70
Şekil 3.22. Reidemeister hareketlerinin bir graf versiyonu	70
Şekil 3.23. İlmek ve köprü (kıstak) şekilleri.....	71
Şekil 3.24. Silme (deletion) ve büzülme (contraction) işlemleri	71
Şekil 4.1. $(2, n)$ -tor düğümü örnekleri.....	87

1. GİRİŞ

19. yüzyıldan beri çok hızlı bir gelişim gösteren düğüm teorisi özellikle 20. yüzyılın başından beri diğer bilim dallarına uygulamaları itibariyle de daha bir önem kazanmıştır. Düğüm teorisi büyüyüp geliştiği için onun sınırları da devamlı olarak değişmektedir. Matematiksel biyoloji, mekanik ve kimyanın belli alanlarında da gelişmeler göstermiştir. Düğüm teorisinin ilk yıllarında 3-boyutlu Öklid uzayında graf, düğümleri çalışmak için kullanılan temel araçlardan birisi idi. 1920'lerin ilk yıllarından beri gelişim gösteren cebirsel topoloji, düşük boyutlu manifold topolojinin düğüm teorisinde onun ana branşlarından birisi olarak kurulmasına yardımcı oldu. Son yıllarda düğüm teorisi biyoloji, kimya ve fizik gibi alanlarda birçok uygulama sahası bulmuştur. Uygulamaların birçoğu yalnızca topoloji ile ilgili olmayıp düğümlerin ve halkaların geometrisi ile de ilgilidir. Örneğin, biyolojide DNA moleküllerinin belli tiplerinin, bazı düğüm tiplerinin şeklini aldığı görülmüştür (Murasugi 1996).

19. yüzyılda fizikçiler, atomların temel ilkeleri altında yatanlar hakkında tahminler yürütüyorlardı. 1867 yılında Lord Kelvin, kimyasal elementlerin gerekli niteliklerinin pek çoğunu açıklayacak gibi görülen deneyimsel mantık yürütme vasıtasıyla atomların kapsamlı bir teorisini öne sürdü. Kelvin'in teorisi atomların düğümlenmiş eter tüpleri şeklinde olduğunu tahmin ediyordu (düğüm, 3-boyutlu Öklid uzayında kendi arakesit noktaları olmaksızın herhangi bir kapalı ilmeğe ve halka, kesişmeyen kapalı ilmeklerin herhangi bir birleşimidir.) Düğümlerin topolojik durağanlık ve değişkenliğinin, kimyasal elementlerin değişimini ve olayın sabitliğini yansıttığı düşünülüyordu. Kelvin'in burgaç atomlar teorisi yaklaşık yirmi yıllık bir süre için ciddi bir şekilde çalışıldı. Bu teori, ünlü İskoç fizikçi Peter Tait'i kapsamlı bir çalışma ve iki düğümün ne zaman farklı olduklarını anlamak için düğümlerin tablosunu oluşturma teşebbüsü içine girme işini üstlenmesi için teşvik etti. Tait'in sezgisel "farklı" ve "aynı" kavramları halen kullanışlı bir fikirdir. Eğer bir düğüm 3-uzayda (kendini kesmeyecek şekilde) sürekli bir şekilde başka bir düğüme benzeyene kadar dönüştürülebiliyorsa bu iki düğüm izotoptur. Ortaya çıkan diyagram, Tait'in çalışmasının bir kısmını gösterir.

Bu çalışma düzlemsel izdüşümün geçit sayılarına dayanan düğümlerin ve halkaların bir listesidir.

O zaman ve şimdi fizikçilerin vazgeçtiği, matematikçilerin merakını uyandıran şey ve esas soru halen daha aynıdır: İki düğümün ne zaman izotop olarak aynı olduklarını nasıl söyleriz? İzdüşüm fonksiyonlarının bu anlayışı, düğüm izdüşümleri için tahminlerin bir kümesinde (meşhur Tait Tahminleri) özetlendi.

Topolojiciler, Tait tahminlerini ve düğümlerin temel benzerlik sorusunu çözmek için çeşitli düğüm sabitleri geliştirdiler ve geniş bir şekilde çalıştılar. Düğüm teorisinde hesaplanması zor bazı önemli sabitler vardır. Bunlar sayısal, grupsal ve polinom sabitleri olarak sınıflandırılır. Bir düğümün veya halkanın bileşen sayısı, geçitlerin minimum sayısı, köprü sayısı, düğümlenmeme sayısı, halkalanma sayısı, renklenme sayısı gibi sayısal sabitleri, düğümün homotopi grubu, homoloji grubu, esas grubu gibi grupsal sabitleri ve Alexander polinomu, Conway polinomu, Jones polinomu, Kauffman polinomu ve Homfly polinomu gibi polinom sabitleri vardır.

Kullanışlı bir düğüm sabitinin ilk örneği 1927'de J. W. Alexander tarafından bulunan Alexander polinomudur. Alexander polinomunun, düğümün topolojik özellikleriyle yakından bağlantılı olduğu bulundu. Bu düğümlerin teorisi üzerinde çok büyük bir etki oluşturdu. Alexander polinomunun hesaplanabildiği çeşitli metotların varlığı çok önemlidir. Bu metotlardan biri Seifert matrisidir. Seifert matrisi kavramı, düğüm teorisinin gelişimi için ilginç bir kavramdır ve düğüm teorisinin köşe taşlarından biridir. 3_1 olarak etiketlenmiş düğüm (trefoil) için Alexander polinomu $-t^2 + t - 1$ dir ve 4_1 (sekiz-şekilli) için polinom $-t^2 + 3t - 1$ dir. Bu polinomlar farklı oldukları için onlara karşılık gelen düğümlerin de farklı olduğu bilinmektedir. Ancak Alexander polinomları eşit olmasına rağmen diğer sabitlerin kullanılmasıyla izotop olarak farklı oldukları gösterilebilen birçok düğüm vardır. Sonuç olarak araştırma, iki düğümün ne zaman farklı olduklarını ortaya çıkaran daha duyarlı düğüm sabitleri için geçerliydi. Bu benzerlik fikri, alternatif anlayışların olabileceğini gösterdi. Özellikle bir topolojici için

4_1 ve 5_1 olarak temsil edilen ilmekler arasında fark yoktur. Farklı olan düğümün tümleyeni olarak adlandırılan bu ilmeklerin dışındaki uzaydır. Eğer bir topolojik uzaydan başka bir topolojik uzaya bire-bir, tersi sürekli olan bir sürekli fonksiyon varsa bu iki topolojik uzay homeomorftur. Böylelikle farklı bir benzerlik notasyonu ifade edilebilir. Eğer iki düğüm (veya halka) homeomorf tümleyenlere sahipse o zaman onlar homeomorf düğümlerdir (veya halkalardır). Burada homeomorf benzerliğin izotop benzerlikten daha zayıf olduğu görülmektedir. Aslında tümleyenleri homeomorf olduğu halde izotop olmayan halka örnekleri vardır (Rolfsen 1976). Ancak düğümler için Cameron Gordon ve John Luecke'nin gösterdiği "iki düğümün homeomorf olmaları için gerek ve yeter şart izotop olmalarıdır" düşüncesi sonraki gelişmelere ufuk açan bir sonuç oldu (Gordon and Luecke 1989).

1987'de Vaughan Jones, operatör cebirlerin teorisini kullanan Alexander'inkinden tamamen farklı olan bir polinom sabiti buldu. Bu buluş düğüm teorisinde yeni bir çağ açtı. Bu sabit beklenmedik bir biçimde operatör cebirler vasıtasıyla tanımlandı fakat onun graf teorisinden düğüm teorisine doğru gösterilen kombinatorik tanımı bu yeni sabitten daha fazla yarar sağladı. Cebirsel yönden Jones, kendi polinomu ile statik mekaniğin Potts modeli arasında yakın bir ilişki olduğunu gösterdi: Potts modelinin bölüm fonksiyonunu çalışmak için fizikçiler tarafından kullanılan bu cebir, Jones polinomunun tanımı için bir çatı teşkil etmektedir. Kısa bir zaman dilimi içinde Jones polinomundan genelleştirilen beşten daha fazla yeni polinom sabitleri bulundu.

William Tutte, graf teorisindeki polinom sabitleri için yaptığı çalışmalarda " Bir graf kaç tane köprü oluşturmuş ağaca (spanning trees) sahiptir? " sorusuna cevap aramıştır. Genellikle graflar arasındaki bağlantısız zannedilen birçok nicel soru sıkı bir şekilde bağlantılı olacaklardır. Yaygın bir biçimde onların kesin bir 2-değişkenli polinomun terimleriyle tamamen ifade edilebilecekleri görülecektir. Ayrıca bu polinom matematiğin ve fiziğin hiç umulmadık branşlarında kullanım alanı bulacaktır. Tutte polinomu olarak adlandırılan bu 2-değişkenli polinom, polinom sabitlerinin bir büyük sınıfının kabul edilir temsilcisidir. Whitney yıllar önce bu polinomun katsayılarını çalışmış olmasına rağmen bu polinom ilk kez Tutte tarafından düşünülmüştür. W. T.

Tutte'nin silme-büzülme (deletion-contraction) formülü ilgisi onun Cambridge Trinity College'deki lisans öğrenciliği yıllarında başladı ve aslında onu bu hususta harekete geçiren, mükemmel dikdörtgenler ve köprü oluşturmuş ağaçlardır. O, araştırmalarında sık sık bu formüle başvurdu ve benzer indirgeme formülleri ile izomorfizm altında değişmeyen grafların, diğer ilginç fonksiyonlarının varlığını gördükçe hayrete düştü. R. M. Foster kromatik polinomun böyle bir fonksiyon olduğunu zaten incelemişti ve Tutte daha fazlasını bulmak için çalışmaya başladı. Silme-büzülme indirgemelerini sağlayan graf sabitleri için onun kendi terminolojisi W-fonksiyon (eğer üzerindeki bileşen çarpımsal ise V-fonksiyon) şeklindedir. Tutte, “ Benim W-fonksiyonlarımla oynayarak ve işaretler ayarlayarak sıfıra eşit değişkenlerden birinin düzenlenmesiyle elde edilebilen kromatik polinomdan ya da akış (flow) polinomundan 2-değişkenli bir polinom elde ettim” diye yazar. Tutte bu fonksiyonu iki renkli (dicromate) olarak adlandırdı. Çünkü Tutte, onu kromatik polinomun 2-değişkenliye bir genelleştirilmiş olarak gördü fakat genellikle bu polinomdan Tutte polinomu olarak bahsedilir. Tutte bu konudaki düşüncesini “ Böyle bir adlandırma, benzer katsayıları bilen ve kullanan fakat bu katsayıları iki değişkene tutturma zahmetine girmeyen Hassler Whitney'e haksızlık oluşturabilir” şeklinde ifade etmiştir.

Kromatik polinom ya da Tutte-Whitney polinomu olarak da adlandırılan Tutte polinomu, teorik bilgisayar biliminin ve matematiğin bir dalı olan graf teoride önemli bir rol oynayan 2-değişkenli bir polinomdur. O her yönlendirilmemiş graf için tanımlanabilir ve grafın nasıl bağlantılı yapılabileceği hakkında bilgi verir. Bir G grafının Tutte polinomunun önemi, onun G grafi hakkındaki içerdiği bilgiden gelmektedir. Aslında Tutte polinomu cebirsel graf teorisinde ve hiçbir yerde sıfır akış (nonwhere-zero flow) ile ilgili problemlerin sayımının bir genelleştirilmiş olarak çalışılmasına rağmen o diğer bilim dallarında daha ünlü uygulama alanları bulmuştur. Örneğin; düğüm teorisinde Jones polinomu gibi, statik fizikte Potts modellerinin bölüm fonksiyonu gibi. Ayrıca Tutte polinomu teorik bilgisayar biliminde çeşitli merkezi bilgisayar problemlerinin kaynağıdır.

Aslında Tutte polinomu, verilen bir büyüklüğün ve bağlantılı parçaların kenar kümelerinin sayısı için üretilmiş bir fonksiyondur. Ayrıca Tutte polinomu genel olarak bir silme-büzülme indirgemesi ile tanımlanabilen bir graf sabitidir. Tutte 1948 ile 1954 yılları arasında yaptığı çalışmalarında, bir grafın kenarlarını belirli bir şekilde etiketleyerek sayım uygulamaları terimleriyle kendi polinomunu tanımladı. Bir klasik Tutte polinomunun sahip olduğu en önemli özellik, onun bir grafın kenarlarının silinmesi ve büzülmesi yöntemiyle hesaplanabilmesidir. Bu yöntemde alınan kenarların sırası önemsizdir. Güçlü bir sezgiyle Tutte polinomunun silme ve büzülme işlemleri yardımıyla hesaplanılabilen her graf sabitini içerdiği söylenebilir. Tutte'nin çalışmalarının ana sonucu kendi tanıttığı polinomun, köprü oluşturmuş ağaçlara ve kenarların verilen bir etiketlendirmesine uygun biçimde, kenarların uygulamalarını sayarak bir ağaç vasıtasıyla hesaplanabileceğini göstermesidir. Tutte polinomu köprü oluşturmuş ağaçların sayısı, ormanların sayısı, bağlantılı köprü oluşturmuş alt grafların sayısı, bisiklet uzayının boyutu ve daha birçoğu da dahil sayısal graf sabitlerini elde etmek için belirli (v, w) noktalarında değerlendirilebilir. Ayrıca Tutte polinomu kromatik polinom, flow polinom ve reliability polinom da dahil bağımsız kombinatorik merakının tek değişkenli graf polinomlarının bir çeşitliliğine de genişletilir.

Graf teorisindeki bu çalışmalar doğal olarak düğüm teorisine de yansdı. Düğüm teorisindeki yeni polinom sabitleri, düzlemsel grafların Tutte polinomları ile belirgin bir benzerlik gösterdikleri için onlar, düzlemsel grafların tekrarlı hesaplamalarına izin veren yerel indirgeme özelliklerine benzerlik gösterirler. 1987 yılında Thistlethwaite, aynı yıl çalışmalarını yayınlayan Kauffman'ın çalışmalarının sonuçlarını kullanarak aslında Tutte tarafından elde edilenle aynı olan Jones polinomu için bir köprü oluşturmuş ağaç genişlemesi buldu. Yönlendirilmiş bir alterne halkanın Jones polinomunun, bağlantılı bir düzlemsel grafın bir Tutte polinomu olarak hesaplanabilmesi ilginç bir sonuçtur. Bu çalışma, özel durumlar olan Tutte polinomunun ve Jones polinomunun her ikisinde bir parantez polinomunu tanımlayan Kauffman tarafından genişletildi. 1988 yılında François Jaeger düzlemsel bir grafın Tutte polinomunun, birleşik bir halkanın bir homfly polinomu olarak hesaplanabileceğini gösterdi. 1989 yılında Kunio Murasugi,

her bir halka diyagramı ile bağlantılı olan grafların iki tipini göz önüne alarak onların birkaç sabitini tanımladı.

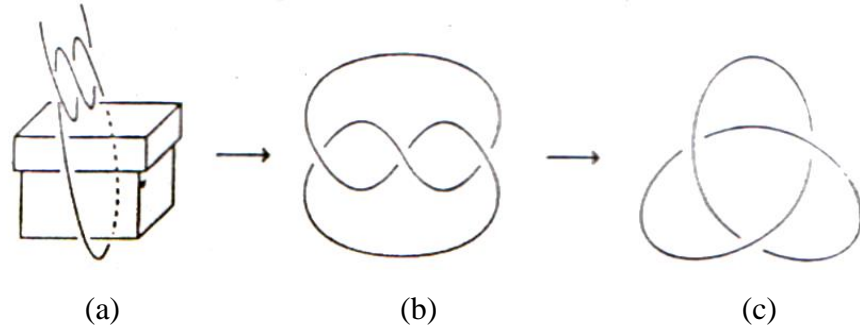
Sunulan bu tezin giriş bölümünde düğüm teorisi ile graf teorisi arasındaki ilişkiye yer verildi ve bu konuda yapılmış olan çalışmalar anlatıldı. İkinci bölümde düğüm teorisinin ve graf teorisinin temel kavramları verildi. Düğüm teorisinin sayısal ve polinom sabitleri anlatıldı. Üçüncü bölümde çalışmalarımıza temel teşkil eden tor düğümleri incelendi. Düğümler ve graflar arasındaki ilişki anlatıldı. Böylece düğüm teorisinden graf teorisine ve graf teorisinden düğüm teorisine geçiş yapıldı. Tutte polinomunun tanımı ve işaretlendirilmiş graflar için yapılmış Tutte polinomunun tanımı anlatıldı. Yine bu bölümde Tutte polinomunun uygulama alanları anlatıldı. Dördüncü bölümde genel olarak düğümlerin özel olarak $(2, n)$ -tor düğümlerinin Tutte polinomlarının nasıl hesaplanacağı anlatıldı. $(2, n)$ -tor düğümlerinin işaretlendirilmiş graflarının Tutte polinomlarının da hesaplama yöntemleri anlatıldı. Bazı örnekler verildi. Son bölümde yapılan araştırmaların sonuçları verilerek bu bulgular üzerinde tartışıldı.

Çalışmalarımızda düğümün Tutte polinomu ifadesi, düğümün grafının Tutte polinomu olarak göz önüne alınmıştır.

2. KURAMSAL TEMELLER

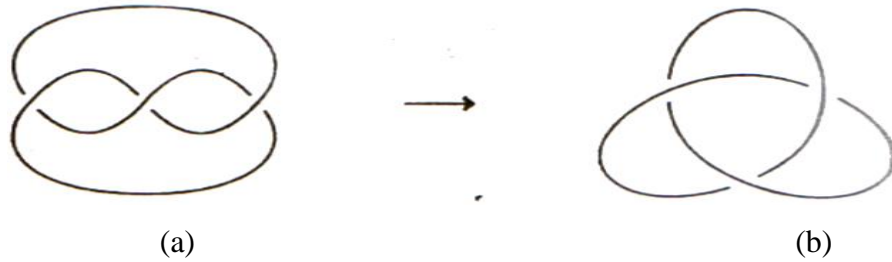
2.1. Düğüm

Bir parça ip veya sicim Şekil 2.1.(a)'da gösterildiği gibi bir kutuya gevşek bir şekilde bağlansın. Elde edilen, düğümün basit bir tipidir. Şimdi bu ipin iki ucu, ip kutuyla temas etmeyecek şekilde yapıştırılsın. Kutu sadece destek amacıyla kullanılmıştır. İşlem tamamlandığında özellikle görülmesi gereken şey, Şekil 2.1.(b)'deki verilen bir iple meydana getirilen tek bir düğümlenmiş ilmeştir. Matematikte bu ilmeğe düğüm denir (Murasugi 1996).



Şekil 2.1. Basit bir düğüm tipi ve sol-el trefoil düğüm (Murasugi 1996)

Daha kesin bir ifadeyle düğüm tek bir eğri olarak düşünülebilir. O halde bir düğüm uzayda basit kapalı bir eğridir. Eğer yukarıdaki işlem sol elle yapılacak olursa Şekil 2.1'deki düğüm Şekil 2.2'deki gibi olacaktır (Murasugi 1996).



Şekil 2.2. Sağ-el trefoil düğüm (Murasugi 1996)

İlk bakışta yukarıdaki iki düğüm birbirine benzerdir. Ancak dikkatle bakıldığında bu iki şekil arasında bazı yerlerde farklılıklar olduğunu görmek mümkündür. Bu iki düğümün her birine trefoil düğüm denir. Bazen de yonca yaprağına benzediği için yonca yaprağı düğümü adını alır. Trefoil düğümünün şekli, Şekil 2.1.(c) ve 2.2.(b)'de farklı olduğundan bu düğümleri ayırt edebilmek için bazen Şekil 2.1.(c)'deki düğüme sol-el trefoil düğüm, Şekil 2.2.(b)'deki düğüme de sağ-el trefoil düğüm denir (Murasugi 1996).

Düğüm tanımını aşağıdaki gibi biraz daha kavramsal olarak ifade edilebilir:

Tanım 2.1.1: X ve Y Hausdorff uzaylar olsun. Bir $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu verilsin. Eğer $f : X \rightarrow f(X)$ bir homeomorfizm ise bu fonksiyona gömülme denir (Burde 2003).

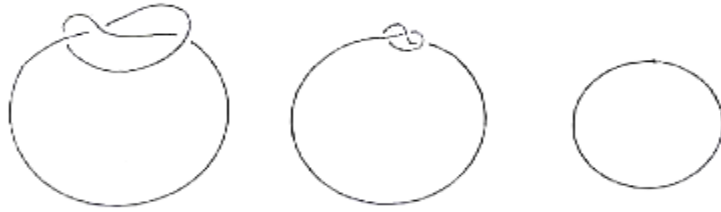
Tanım 2.1.2: Düğüm, S^1 çemberinin 3-boyutlu öklid uzayına bir gömülmesidir (Burde 2003).

Daha genel biçimde S^{n+k} içindeki S^k gömülmeleri daha yüksek boyutlu düğüm teorisinde çalışılmaktadır. Fakat bu tezdeki çalışmalar tam anlamıyla $S^1 \subset S^3$ klasik düğümleriyle ilgilidir. Şüphesiz tek başına bir $i : S^1 \rightarrow S^3$ gömülmesi fazla bir fayda sağlamaz ve verimli sorulara yol açmaz. Bir düğümlerle ilgili en önemli problem, düğümün 3-boyutlu Öklid uzayında gerçekleştirilen belirli hareketlerle zarar görmeden çözümlenip çözümlenmediğidir. Böylece topolojik nesne daha ziyade bu hareketle bağlı gömülmelerin bir sınıfı olacaktır (İzotop gömülmeler) (Burde 2003).

Tanım 2.1.3 (İzotopi): $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ gömülmeleri verilsin. Eğer $F(x, t) = (f_t(x), t)$, $x \in X$, $t \in I = [0, 1]$ ve $f(x, 0) = f_0(x)$, $f(x, 1) = f_1(x)$ olacak şekilde $F : X \times I \rightarrow Y \times I$ gömülmesi varsa f_0, f_1 gömülmeleri izotoptur denir.

F 'ye, f_0 ' ı f_1 ' e bağlayan seviyeyi koruyan izotopi denir. Genellikle sınır şartlarını koruyan $f_t(x) = f(x,t)$ notasyonu kullanılır (Burde 2003).

Yukarıda tanımlanan genel izotopi notasyonu düğümler için yeterince kullanışlı değildir. Herhangi iki $S^1 \rightarrow S^3$ gömülmeleri, düğümlenmelerine göre açıkça farklı olmalarına rağmen izotop oldukları gösterilebilir. Bu düşünce Şekil 2.3'deki resimlerin dizisi ile yeterli bir şekilde açıklanabilir. Düğümlenmenin olduğu herhangi bir bölge sürekli bir şekilde bir noktaya büzülebilir (Burde 2003).



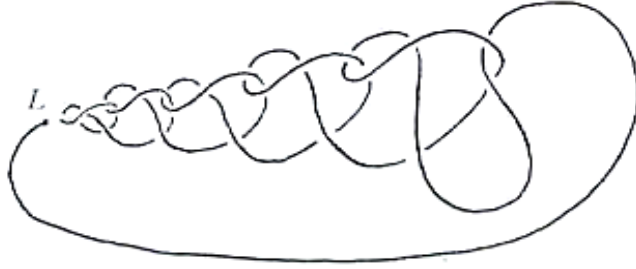
Şekil 2.3. Düğümlenmelerine göre farklı olmalarına rağmen izotop olan düğümler dizisi (Burde 2003)

Tanım 2.1.4 (Kuşatan İzotopi): $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ gömülmeleri verilsin. Eğer $f_1 = h_1 f_0$ ve $h_0 = id_Y$ ile $H(y,t) = (h_t(y), t)$ olacak şekilde bir $H : Y \times I \rightarrow Y \times I$ seviyeyi koruyan izotopisi varsa f_0 ve f_1 gömülmeleri kuşatan izotoptur denir. H fonksiyonuna da kuşatan izotopi adı verilir (Burde 2003).

Bir kuşatan izotopi, $F(x,t) = (h_t f_0(x), t)$ ile f_0 'ı f_1 'e bağlayan bir F izotopisi tanımlar. Bu iki tanım arasındaki fark şöyledir: Bir izotopi, Y 'de $f_0(X)$ kümesini sürekli bir biçimde $f_1(X)$ 'in üzerine taşır fakat $f_1(X)$ 'in dışında Y 'nin yakınındaki noktalarını dikkate almaz. Eğer $(f_t(X))$ Y 'nin içinde taşınırsa Y sıvı doldurulmuş şekilde düşünüldüğünde $f_t(X)$ ile beraber sürekli bir şekilde hareket edecek bir kuşatan izotopi, Y 'ye ihtiyaç duyar. $h_1 : Y \rightarrow Y$ homeomorfizminin $h_1| : Y - f_0(X) \rightarrow Y - f_1(X)$ kısıtlanması, eğer f_0, f_1 'e kuşatan izotop ise Y 'de $f_0(X)$ 'in tümleyenini $f_1(X)$ 'in tümleyenine taşıyan homeomorfizmdir. Bu sadece izotopi durumunda doğru değildir ve önemli bir

fark belirtir. Örneğin; yonca yaprağı düğümünün tümleyeni aşikar düğümün tümleyeni homeomorf değildir (Şekil 2.3'ün birinci resmine bakınız.) (Burde 2003).

$S^1 \rightarrow S^3$ topolojik gömümleri, Şekil 2.4'de gösterildiği gibi garip bir görünüme sahip olabilirler. Vahşi olarak adlandırılan bu düğümde, bir L limit noktasına yakınsayan benzer ağların bir sonsuz dizisi vardır. R. H. Fox (Fox 1949) tarafından bulunan bir vahşi düğümün bu örneği, gerçekten böyle bir vahşilik noktasında olağanüstü şeyler yapabileceğini gösteren dikkate değer özelliklere sahiptir. Şekil 2.4'de tanımlanan eğrinin tümleyeninin bir aşikar düğümünden farklı olduğu ispatlandı. Ancak düğüm açıkça sağdan çözülebilir. En azından sonlu bir biçimde ilmeklerin çoğu çözülebilir (Burde 2003).



Şekil 2.4. Bir vahşi düğüm örneği (Burde 2003)

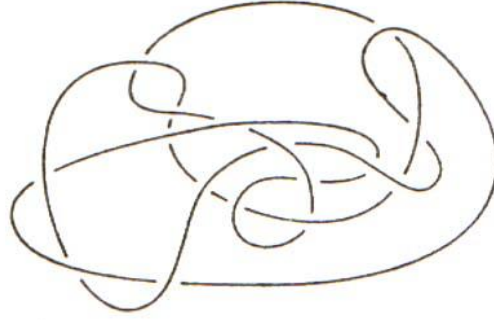
Tanım 2.1.5 (Uslu düğümler): Bir K düğümüne, 3-boyutlu Öklid uzayında bir basit kapalı poligona kuşatan izotop ise uslu düğüm denir. Bir düğüm uslu değilse vahşidir denir. Bir düğüm uslu ise onun herhangi bir bağlantılı alt parçası α , bir doğru parçasına kuşatan izotoptur ve böylece $S^3 - \alpha$ tümleyeni açıkça bağlantılıdır. Böyle bir düğüm poligonal düğüm denir. Şekil 2.4'deki L limit noktasını kapsayan düğümün herhangi bir alt yayının basit bağlantılı olmayan bir tümleyene sahip olduğu gösterilebilir (Burde 2003).

Çok iyi bir matematiksel model Smooth düğüm kavramıdır. Smooth düğüm, S^1 çemberinin, çemberin hiçbir nokta çifti aynı noktaya düşmeyecek şekilde 3-boyutlu

Öklid uzayına sürekli bir şekilde gömülmesidir. Smooth düğüm, \mathbb{R}^3 de S^1 çemberinin, diferensiyeli sıfır olmayan her mertebeden türevlenebilir bir gömülme altındaki görüntüsü olarak tanımlanır (Prasolov and Sossinsky 1996):

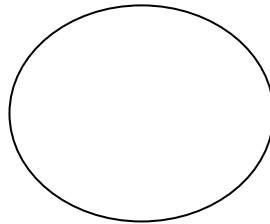
$$f(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \neq (0,0,0)$$

Bir düğümü tanımlamak için bir parça ipi bir kutuya veya benzer bir şeye bağlayarak elde edilen objenin düğüm olduğunu söylemek yeterli değildir. Bağlama şekillerine göre birbirinden bağımsız çeşitli düğüm tipleri elde edilebilir. Çok uzun bir ip kullanarak ve bu ipi çok karmaşık bir tarzda düğümleyerek oldukça karmaşık düğümler meydana getirilebilir. Örneğin; Şekil 2.5'deki Ochiai düğümü gibi bir örnek düşünülebilir (Murasugi 1996).



Şekil 2.5. Ochiai düğümü (Murasugi 1996)

Tersine Şekil 2.6'da gösterildiği gibi kısa bir ipin uçları birleştirilsin. Bu düğüm, düğümlenme yapılmadan oluşturulmuştur ve bu düğüme aşık düğüm veya düğümlenmemiş düğüm denir (Murasugi 1996).

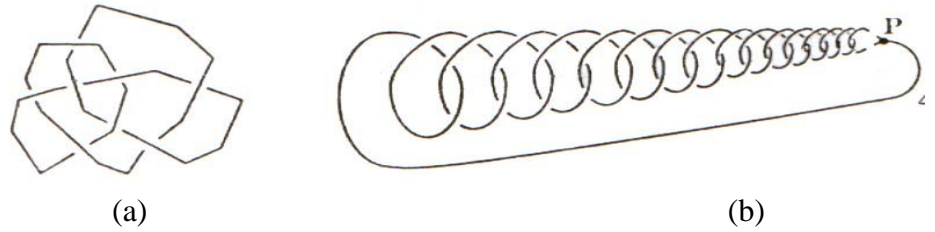


Şekil 2.6. Aşık düğüm (Murasugi 1996)

Şimdi rastgele oluşturulmuş çeşitli düğüm biçimlerinden ikisi ele alınsın ve A ve B olarak adlandırılınsın. A düğümü, B düğümüne dönüştürebilir mi? sorusu doğal bir sorudur. Eğer A 'nın şekli birazcık değiştirilerek B 'ye dönüştürebiliyorsa bu durumda bu iki düğümün denk veya eşit olduğu söylenebilir. Bu nedenle düğümlerin uzunluğundan ve kalınlığından ziyade şekli ile ilgilenilecektir. Düğüm teorisinin temel problemi budur (Murasugi 1996).

2.2. Basit Düğüm Hareketleri

Bir düğüm Şekil 2.7.(a)'da görüldüğü gibi 3-boyutlu uzayda bükülmüş veya dolaştırılmış bir poligon olarak düşünülebilir. Bunun sebebi kombinatorik topoloji vasıtasıyla vahşi düğümlerin hariç tutulmasına izin verilmesinden dolayıdır. Vahşi düğümlere bir örnek Şekil 2.7.(b)'de görülebilir. Bir P noktası seçilir bu nokta bir anlamda "limit" noktasıdır ve düğüm akordiyonik bir tavırla demetler halinde başlayarak bu noktaya doğru gider. Böyle bir noktanın komşuluğunda düğüm kendi doğal durumunu gösterir. Böyle düğümlerle karşılaşıldığında uslu düğümlere müracaat edilir (Murasugi 1996).



Şekil 2.7. 3-boyutlu uzayda poligonal bir düğüm örneği ve poligonal bir vahşi düğüm örneği (Murasugi 1996)

Poligonal biçimde olan bir düğüm düşünülürse; bir düğüm sonlu sayıda kenarların bir birleşimi olduğu için bir düğüm poligonal yaylardan ziyade daha yumuşak, daha düz bir şekilde resmedilir. Fakat bir düğüm, matematiksel anlamda poligonal doğruların bir koleksiyonudur. Bu yüzden bir düğümün şeklinde değişiklik yapılabileceği kolayca görülür. Örneğin; bir K düğümü üzerindeki AB kenarını AC ve CB kenarlarıyla

değiştirmek mümkündür. Bu değişikliğin tersi de yapılabilir. Böyle yer değiştirmelere basit düğüm hareketleri denir.

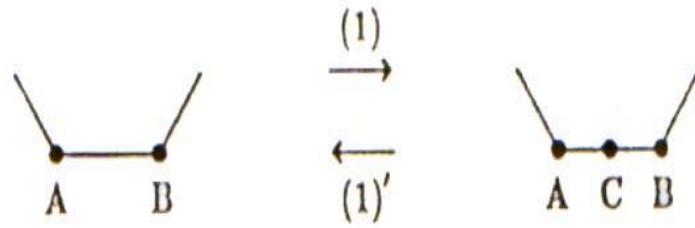
Tanım 2.2.1: Verilen bir K düğümü üzerinde aşağıdaki basit düğüm hareketleri olarak adlandırılan dört işlem uygulanır (Murasugi 1996):

(1) Şekil 2.8'de görüldüğü gibi bir K düğümü üzerindeki AB kenarı, bir C noktası referans alınarak AC ve CB şeklinde iki kenara bölünebilir.

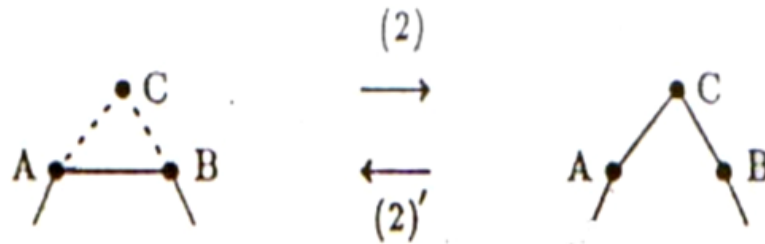
(1)' ((1) in tersi) Şekil 2.8'de görüldüğü gibi bir K düğümü üzerinde bitişik AC ve CB kenarlarından oluşan bir doğru parçası varsa bu C noktası kaldırılarak bir AB kenarı elde edilebilir.

(2) K düğümü üzerinde bulunmayan bir C noktası düşünölsün. AB ve C ile biçimlendirilen ABC üçgeni AB kenarı hariç K düğümünü kesmezse bu durumda AB kenarı ortadan kaldırılabilir ve AC ve CB kenarları eklenebilir (Şekil 2.9).

(2)' ((2)'nin tersi) K düğümü üzerinde K 'nın AC ve CB bitişik iki kenarını ihtiva eden bir ABC üçgeni mevcutsa ve bu üçgen AC ve CB kenarları hariç K düğümünü kesmezse Şekil 2.9'da görüldüğü gibi AC ve CB kenarları kaldırılabilir ve AB kenarı eklenebilir.



Şekil 2.8. Temel basit düğüm hareketleri (Murasugi 1996)



Şekil 2.9. Temel basit düğüm hareketleri (Murasugi 1996)

2.3. Dügümlerin Denkliği

Eğer bir düğüme tek bir temel düğüm hareketi uygulanırsa o düğüm değişmez. Ancak farklı yerlerde bu işlem birkaç kez tekrarlanırsa meydana gelen düğümün tamamen farklı bir düğüm olduğu görülür.

Tanım 2.3.1: Temel düğüm hareketleri sonlu sayıda uygulanarak K düğümünden K' düğümü elde edilebiliyorsa bu K düğümü K' düğümüne denktir denir. (Murasugi 1996).

Eğer K düğümü K' düğümüne denkse K' düğümü de K 'ya denk olacağı için K ve K' düğümlerine denktir (eşittir) denir. Bu denklik $K \approx K'$ ile gösterilir. Düğüm teorisinde denk düğümlerin birbirinden farklarının olmadığı kabul edildiği için onlar aynı düğümler olarak düşünülür (Murasugi 1996).

(2) numaralı temel düğüm hareketi bir AB kenarını AC ve CB kenarlarıyla değiştirmeye izin verir. ABC üçgeninin içindeki noktalar, düğümün kendisiyle kesişmediği için Tanım 2.3.1 sezgisel olarak şu şekilde ifade edilebilir: Uzayda bir düğüm sürekli bir fonksiyon altında başka bir düğüme dönüştürülebiliyorsa bu iki düğüm denktir denir (Murasugi 1996).

Bir düğüm başlangıç ve bitiş noktasına sahip olmayan basit kapalı bir eğridir. Bu yüzden eğriye bir yönlendirme verilebilir. Alışılmış olarak bir düğümün yönlendirmesi bir ok vasıtasıyla gösterilir. Herhangi bir düğümün yönlendirilmesi Şekil 2.10'da görüldüğü gibi iki türdür.



Şekil 2.10. Yönlendirilmiş düğüm örnekleri (Murasugi 1996)

Eğer yönlendirilmiş K ve K' düğümleri, yönlendirilmiş temel düğüm hareketleri vasıtasıyla birbirlerine dönüştürülebiliyorsa K ve K' düğümlerinin, yönlendirmeleri korunarak denk oldukları söylenir ve $K \cong K'$ şeklinde yazılır (Murasugi 1996).

Tanım 2.3.2: Eğer iki (p. L.)-düğümleri kuşatan izotop (Tanım 2.3.3'e bakınız) iseler bu düğümler denktir. Bir K düğümü, denk düğümlerin bir sınıfının temsilcisi olabilir. K ve K' düğümleri denkse onların aynı oldukları söylenir ve $K = K'$ eşitliği kullanılır. K , bir basit kapalı sınırlı poligonal eğri olabilir veya böyle eğrilerin bir sınıfını belirtebilir (Burde 2003).

Klasik düğüm teorisinin ana konusu, denklik hususunda düğümlerin sınıflandırılmasıdır (Burde 2003).

Şüphesiz düşünülen "p. L." (p.L.=parçalı lineer), bir genişleten alan ve daha genel bir sınıflandırma problemi tanımlar. Düğümlerin bu sınıfı için bir topolojik denklik sağlamak amacıyla uslu düğümlerin tanımı, topolojik kuşatan izotopinin tanımını kullanmayı önerir. İlk görüşte p. L.-kategoriye kısıtlanışın farklı bir türün denklik sınıflarını verebileceği düşünülebilir. Bu doğru değildir. Aslında iki uslu düğümün topolojik olarak denk olması için gerek ve yeter şart onların topolojik sınıflarının p. L.-temsellerinin p. L. – denk olmasıdır (Burde 2003).

Şimdiye kadar ya S^1 üzerinden ya da S^3 üzerindeki atanmış yönlendirmeler olmadan düğümleri tanımladık. Eğer S^1 yönlendirilmiş düğüm ise denklik yeniden düzenlenmelidir: İki yönlendirilmiş düğüm arasında düğümlerin yönlendirmesini dikkate alan onlara bağlı bir kuşatan izotopi varsa denktirler denir (Burde 2003).

Tanım 2.3.3 (p. L.-İzotopi ve p. L.-Kuşatan İzotopi): X, Y polihedra ve $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ p. L.-gömülmeler olsunlar. Eğer

$$F: X \times I \rightarrow Y \times I, F(x, t) = (f_t(x), t), 0 \leq t \leq 1$$

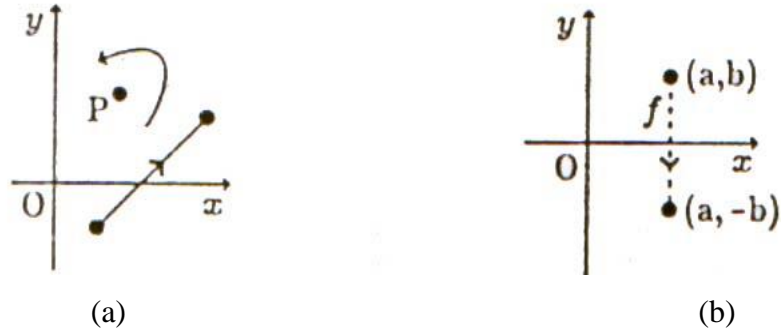
olacak şekilde bir seviyeyi koruyan p. L.-gömülme varsa f_0 ve f_1 , p. L.-izotoptur denir.

Eğer $f_1 = h_1 f_0$ ve $h_0 = id_Y$ ile tanımlı $H: Y \times I \rightarrow Y \times I$, $H(y, t) = (h_t(y), t)$ olacak şekilde bir seviyeyi koruyan p. L.-izotopi varsa f_0 ve f_1 , p. L.-kuşatan izotopturlar denir (Burde 2003).

f bir X topolojik uzayından Y topolojik uzayına bir fonksiyon olsun. X ve Y uzayları 3-boyutlu Öklid uzayının alt uzaylarıdır. f bire-bir ve örten bir fonksiyon ise $f^{-1}: Y \rightarrow X$ ters fonksiyonu tanımlanabilir. Ayrıca hem f hem de f^{-1} sürekli fonksiyonlar ise bu durumda X 'den Y 'ye f fonksiyonuna homeomorfizm denir ve X ve Y uzaylarının homeomorf uzaylar olduğu söylenir. Cebirsel topoloji açısından bakıldığında X ve Y uzaylarının tamamen aynı uzaylar oldukları söylenebilir. X ve Y bir yönlendirmeye sahip olduğunda, eğer Y 'nin orijinal yönlendirmesi Y 'ye verilen yönlendirmeye uyuyorsa yani f 'nin etkisiyle X 'in yönlendirmesi de aynı şekilde uyuyorsa f 'nin yönlendirmeyi koruyan bir homeomorfizm olduğu söylenir. X 'den kendi üzerine bir homeomorfizme, otohomeomorfizm denir (Murasugi 1996).

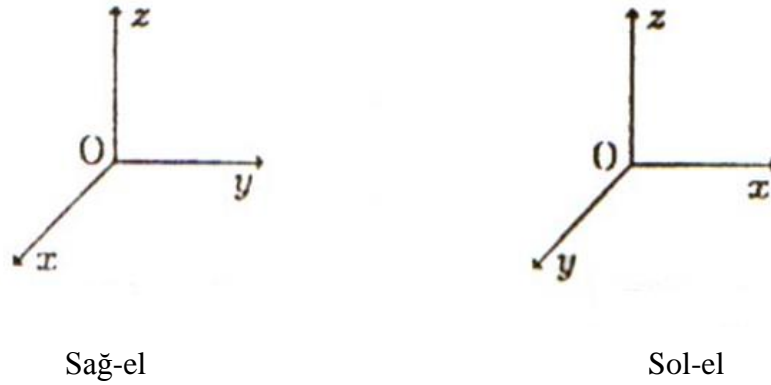
K_1 ve K_2 iki düğüm olmak üzere, K_1 'i K_2 'ye dönüştüren S^3 ün yönlendirmeyi koruyan bir homeomorfizmi varsa K_1 ve K_2 'nin denk olduğu ya da K_1 'in K_2 'ye denk olduğunu söylenir.

Örnek 2.1: X ve Y 'nin 2-boyutlu Öklid uzayı olduğu kabul edilsin. Bu durumda $(x, y) = (x + a, y + b)$ ile verilen bir doğru boyunca bir paralel öteleme ve bir sabit nokta etrafında (örneğin orijin etrafında) yapılan bir dönme, yönlendirmeyi koruyan otohomeomorfizm örnekleridir (Şekil 2.11.(a)) (Murasugi 1996).



Şekil 2.11. Yönlendirmeyi koruyan otohomeomorfizm örnekleri (Murasugi 1996)

Bununla birlikte $f(x, y) = (x, -y)$ homeomorfizmi ile verilen x -eksenine göre ayna görüntü, yönlendirmeyi koruyan bir otohomeomorfizm değildir. Çünkü burada yönlendirme Şekil 2.11.(b)'de görüldüğü gibi ters çevrilir (Bu şekilde y -ekseni üzerindeki f fonksiyonunun etkisi, y -ekseninin orijinal yönlendirmesini ters çevirecektir.) (Murasugi 1996).



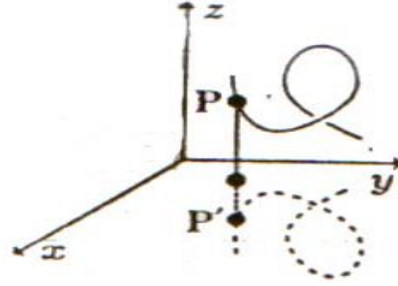
Şekil 2.12. \mathbb{R}^3 de x, y, z -eksenlerine göre sağ-el ve sol-el kuralları (Murasugi 1996)

Şekil 2.12'de görüldüğü gibi 3-boyutlu Öklid uzayında x, y, z -eksenlerine göre sağ-el kuralı vasıtasıyla yapılan bir yönlendirmenin tayininin doğal bir yolu daha vardır.

Örnek 2.1'deki Öklid uzaylar 2-boyutludur. Ancak bu uzaylar bir üst boyutta düşünülürse bu durumda sabit bir nokta (veya sabit bir eksen) etrafındaki bir dönme ve

paralel ötelemenin, 3-boyutlu Öklid uzayının yönlendirmesini koruyan otohomeomorfizm örnekleri olduğunu görmek zor değildir. Ancak xy -düzlemine göre $\varphi(x, y, z) = (x, y, -z)$ fonksiyonu ile verilen ayna görüntü göz önüne alınırsa bu durumda bu fonksiyon yönlendirmeyi ters çevirir. xy -düzleminin bir ayna olduğu kabul edildiği için φ fonksiyonu, Şekil 2.13’de görüldüğü gibi P noktasının aynada P' noktasına yansması olarak düşünülebilir. Aynı şekilde sağ-el kuralına göre üç eksen, sol-el kuralına göre oluşan üç eksene yansır (dönüşür). Bu yüzden φ yönlendirmeyi korumaz (Murasugi 1996).

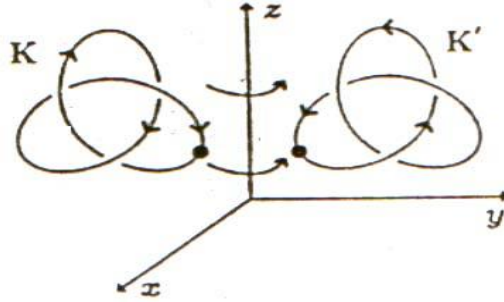
3-boyutlu Öklid uzayındaki bir keyfi nokta, E düzlemine göre bu noktanın yansıması olan noktaya dönüştürülebiliyorsa bu φ fonksiyonunun E düzlemine göre bir ayna görüntü (veya bir simetri) olduğu söylenebilir. K düğümü üzerinde φ ayna görüntüsünün etkisiyle elde edilen $\varphi(K)$ görüntüsüne, K' ’nin ayna görüntüsü denir. Eğer K tayin edilmiş bir yönlendirmeye sahipse açıkça K' ’nin yönlendirmesinden K' ’nin ayna görüntüsü için de bir yönlendirme tayin edilebilir (Murasugi 1996).



Şekil 2.13. P noktasının xy düzlemine göre ayna görüntüsü (Murasugi 1996)

Yönlendirilmiş K_1 ve K_2 düğümleri verilsin. K_1 ve K_2 ’nin yönlendirmesini değiştirmeyen, 3-boyutlu Öklid uzayının yönlendirmeyi koruyan bir otohomeomorfizmi vasıtasıyla K_1, K_2 ’ye dönüştürülebilirse K_1 ve K_2 düğümlerinin yönlendirmeyle denk olduğu söylenir (Murasugi 1996).

Örnek 2.2: Bir z -ekseni etrafında bir 180° dönme olan $\varphi(x, y, z) = (-x, -y, -z)$ fonksiyonu göz önüne alınsın. Bu fonksiyon yönlendirmeyi koruyan bir otohomeomorfizmdir (Şekil 2.14). φ fonksiyonu, yönlendirilmiş sol-el trefoil K düğümünü K' ne dönüştürdüğünden bu iki düğüm yönlendirmeyle denktir. K' , K 'ya zıt yönlü bir düğümdür (Murasugi 1996).

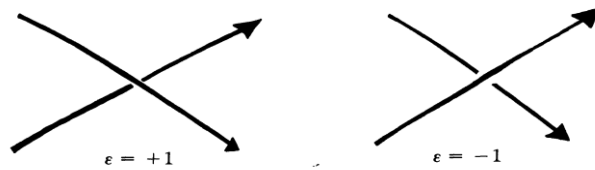


Şekil 2.14. Yönlendirmeyi koruyan bir otohomeomorfizm örneği (Murasugi 1996)

2.4. Halkalar

Tanım 2.4.1: Halka, $L = K_1 \cup \dots \cup K_n$ şeklinde sonlu sayıda K_i düğümlerinin ayrık bir birleşimidir. Her bir K_i ilmeğine halkanın bir bileşeni denir (Cromwell 2004). Bir düğüm bir bileşenli bir halkadır.

Tanım 2.4.2: Eğer bir halkanın her bir bileşeni üzerine bir ok işareti konularak yön verilmişse bu halkaya yönlendirilmiştir denir. Yönlendirilmiş geçitlere Şekil 2.15'de gösterildiği gibi ± 1 işaretleri verilir (Kauffman 1988).



Şekil 2.15. Bir halkadaki yönlendirilmiş geçitlere ± 1 işareti verilmesi kuralı (Kauffman 1988)

Tanım 2.4.3: Eğer aşağıdaki iki şart sağlanırsa $L = \{K_1, K_2, \dots, K_m\}$ ve $L' = \{K'_1, K'_2, \dots, K'_n\}$ halkaları denktirler (Murasugi 1996).

- (1) $m = n$ yani L ve L' aynı sayıda bileşene sahiptir.
- (2) Sonlu sayıda basit düğüm hareketi uygulanarak L, L' ne dönüştürülebilir.

Yukarıda verilen (2) şartı yerine (2)' şartı yazılabilir:

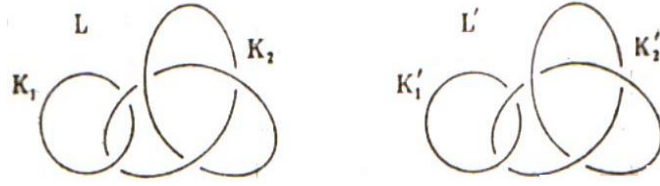
(2)' $\varphi(K_1) = K'_1, \varphi(K_2) = K'_2, \dots, \varphi(K_m) = K'_n$ olan ve \mathbb{R}^3 ün yönlendirmesini koruyan bir φ otohomeomorfizmi vardır.

Daha açık bir ifadeyle, halkaların bileşenlerini sıralamadan bağımsız olduğundan genelde böyle bir şartı koymak gereksizdir. Bu yüzden (2)' şartı aşağıdaki (2A) şartı ile değişmiştir:

(2A) $K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_m$ ailesini $K'_1 \cup K'_2 \cup \dots \cup K'_n$ ne dönüştüren ve \mathbb{R}^3 ün yönlendirmeyi koruyan bir otohomeomorfizmi vardır.

Eğer halkanın her bir bileşeni yönlendirilmiş ise bu durumda denklik tanımları, tamamen yönlendirilmiş düğümlerin denkliği tanımının bir genişlemesi olacaktır (Murasugi 1996).

Örnek 2.3: Şekil 2.16'daki L ve L' halkaları tamamen aynı olduğundan bu halkalar denktir. Bununla beraber eğer L' 'nin bileşenlerinin sırası değiştirilirse bu durumda Tanım 2.4.3'ün (2) şartı sağlanmaz ve halkalar denk olmaz. Fakat (2A) şartı sağlanmıştır. Böylece onlar denk olarak düşünülür (Murasugi 1996).



Şekil 2.16. Denk halkalara bir örnek (Murasugi 1996)

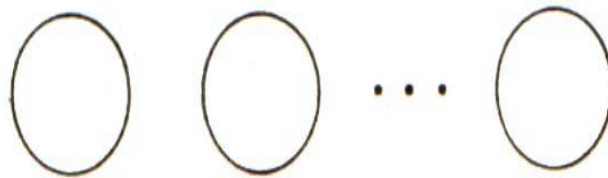
Şekil 2.17'de L ve L' ne bir yönlendirme verilsin. İki halkaya bir yön verilmesi (2) şartının sağlanmamasına sebep olur. Böylece bu yönlendirilmiş halkalar denk olmaz.



Şekil 2.17. Denk olmayan yönlendirilmiş halkalara bir örnek (Murasugi 1996)

Bu sebepten düğümlerin denkliği probleminde daha çok karışık olan halkaların denkliği problemi incelenirken daha dikkatli olunmalıdır.

Tahmin edileceği gibi aşık düğüm kavramı halkalara genişletilebilir. Örneğin, n - bileşenli aşık halka gibi. Bu halka n -ayrık aşık düğümden meydana gelir (Şekil 2.18).



Şekil 2.18. n -bileşenli aşık halka (Murasugi 1996)

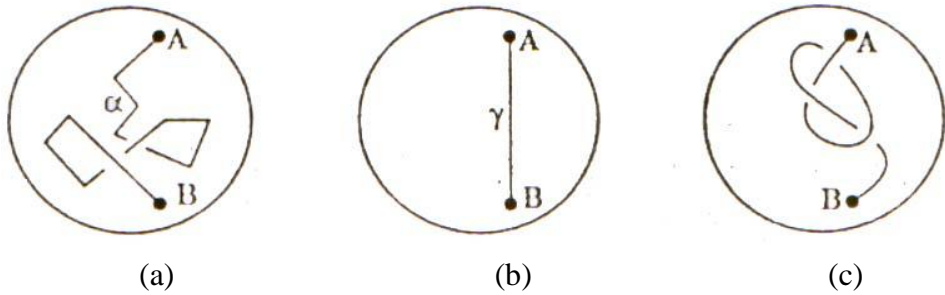
Her bir n için sadece bir aşık n -bileşenli halka vardır (aşık halkayı yönlendirme fazla bir işe yaramaz) (Murasugi 1996).

2.5. Düğümlerin Aritmetiği

Bütün düğümleri ihtiva eden küme üzerinde bir toplama işlemi tanımlanabilir. Böyle bir işlemle bu küme bir grup oluşturabilir mi sorusu sorulabilir. Bu nedenle iki düğümün toplamı (bağlantılı toplamı) olarak adlandırılan, iki düğümden tek bir düğümün nasıl elde edilebildiğine bakmak gerekir. Bu yaklaşımdan bir sonuç çıkarmak için ters işlem üzerine yoğunlaşılmalıdır. Örneğin, bir düğüm (veya halka) daha basit iki düğüme ayrıştırılacaktır (Murasugi 1996).

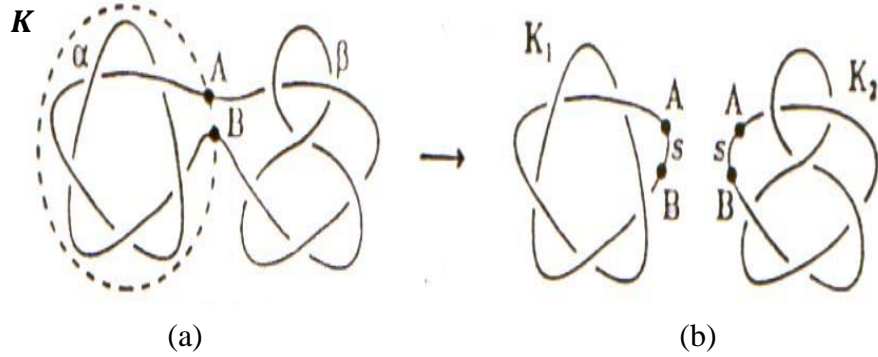
S^3 de (veya \mathbb{R}^3) bir S küresi ve S ile sınırlanmış örneğin, sınırı S olan 3-boyutlu B^3 topu göz önüne alınsın. B^3 ün içinde A , B uç noktaları ile S yüzeyinde bulunan bir basit bükülmüş α doğrusu (aslında poligonal bir doğru) verilsin. Eğer bu α eğrisi S 'yi sadece A ve B noktalarında kesiyorsa Şekil 2.19'da da görüleceği gibi bu eğriye (1,1)-dolaşık denir. Bir (1,1)-dolaşık'ın basit kapalı eğrilere bölünmüş olabileceğine dikkat edilmesi gerekir.

B^3 ün içinde bulunan α düğümlenmiş (1,1)-dolaşık'ın parçalarına basit düğüm hareketleri uygulanabilir. Bunu yaparak da sabitlenmiş A ve B noktalarına sahip α eğrisinin, Şekil 2.19.(b)'de görüldüğü gibi (1,1)-dolaşık'a dönüştürüldüğü düşünülebilir. Böyle bir α eğrisine bir aşık (1,1)-dolaşık denir. Burada Şekil 2.19.(c) aşık olmayan (1,1)-dolaşık'a örnek teşkil ederken, Şekil 2.19.(a) ve Şekil 2.19.(b) aşık (1,1)-dolaşık örnekleridir (Murasugi 1996).



Şekil 2.19. (1,1)-dolaşık örnekleri (Murasugi 1996)

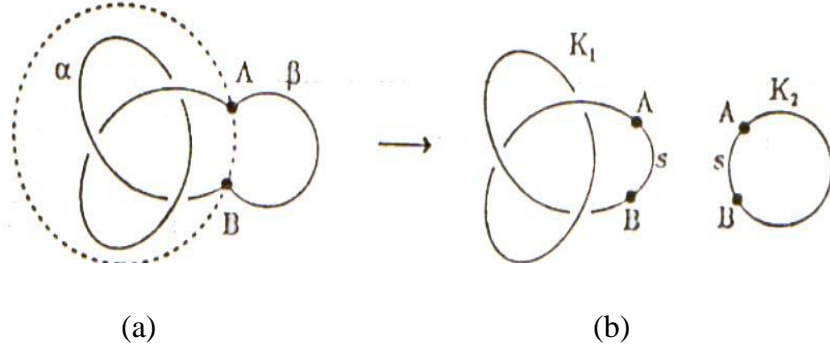
K , S^3 de bir düğüm (veya halka) olsun. Üstelik K 'yı tam olarak A ve B şeklinde iki noktada kesen (dik açıda) bir 2-boyutlu Σ küresi mevcut olsun. Σ 'nın, yukarıda tanımlanan S 'nin rolünü üstlendiği görülebilir. Ancak K , S^3 de bulunduğu için K , Σ vasıtasıyla Şekil 2.20.(a) ve Şekil 2.21.(a)'da görüldüğü gibi biri Σ 'nın içinde diğeri Σ 'nın dışında bulunan α ve β şeklinde iki (1,1)-dolaşık'a bölünür. Σ , biri Σ 'dan ve onun içinden diğeri Σ 'dan ve onun dışından oluşmuş iki 3-boyutlu topun sınırı olduğu için iki (1,1)-dolaşık meydana gelir. S^3 ün, sınırlarına 2-boyutlu küre denen sınırları boyunca birbirlerine yapıştırılmış iki (3-boyutlu) toptan oluşturulduğu düşünülebilir. Boyut bir aşağı düşürülürse yapıştırma işlemi daha kolay tahayyül edilir. Eğer iki disk alınır ve onlar, sınırları boyunca yapıştırılırsa ki; burada sınırlar çemberlerdir bu durumda iki boyutlu küre elde edilir. Σ 'da bulunan bir s basit poligonal doğrusu vasıtasıyla A ile B bağlansın. Böylece s , α 'ya ve s , β 'ya birleştirilirse sırasıyla K_1 ve K_2 düğümleri elde edilir (Murasugi 1996).



Şekil 2.20. Bir düğümün iki düğüme ayrışımı (Murasugi 1996)

Gösterilen şey bir K düğümünün Şekil 2.20'deki gibi K_1 ve K_2 şeklinde iki düğüme ayrışabilmesidir. s 'nin seçimi keyfidir. Çünkü Σ üzerinde bulunan s' gibi bir başka basit poligonal doğru vasıtasıyla A , B 'ye bağlanabiliyorsa K düğümü bir kez daha K'_1 ve K'_2 denen iki düğüme ayrıştırılabilir. K_1 ile K'_1 ve K_2 ile K'_2 nün denk düğümler olduğunu görmek oldukça kolaydır. α veya β 'nın biri aşikar bir (1,1)-dolaşık ise K'_2

aşık bir düğümdür. Böyle durumlarda K_1 ve K_2 , tam anlamıyla söylenirse, K 'nın “gerçek” bir ayrışımı değildir (Şekil 2.21) (Murasugi 1996).



Şekil 2.21. Bir düğümün aşık ayrışımı (Murasugi 1996)

Aslında K ve K_1 denktir, bu yüzden K 'nın daha basit düğümlere ayrışabildiği düşünülmemelidir. Bu özelliği sağlayan K düğümüne asal düğüm denir.

Yukarıda anlatılanlardan anlaşılacağı gibi bir K düğümü ya asal bir düğümdür ya da aşık olmayan en az iki düğüme ayrışabilir. Bu aşık olmayan düğümler, ya kendileri asaldırlar ya da onlar da aşık olmayan düğümlere ayrışabilirler. Bu işlem bir sonraki asal olmayan düğümler için sürdürülecektir (Murasugi 1996).

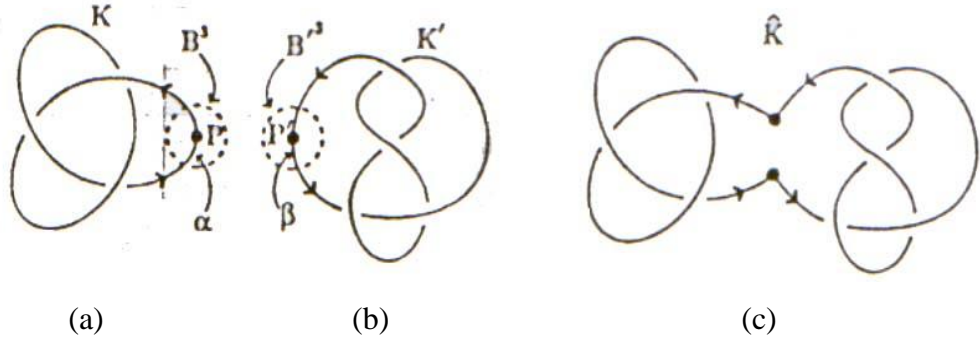
Teorem 2.1 (Düğümün ayrışımının varlığı ve tekliği):

- (1) Herhangi bir düğüm sonlu sayıda asal düğüme ayrışabilir.
- (2) Bu ayrışım sıradan bağımsız olarak tektir. Yani K_1, K_2, \dots, K_m ve K'_1, K'_2, \dots, K'_n olarak K iki şekilde ayrıştırılabilir. Böylece $n = m$ ve üstelik K_1, K_2, \dots, K_m nin indis sayısı uygun bir şekilde seçilirse $K_1 \approx K'_1, K_2 \approx K'_2, \dots, K_m \approx K'_m$ olur (Murasugi 1996).

Yukarıdaki ayrışımın tersine sebep olan birleşme düşünölsün. Esasen aranan şey iki düğümün bağlantılı toplamıdır. P, S^3 de bir K düğümü üzerinde bir nokta olsun.

Burada P , Şekil 2.22.(a) ve (b)'de de görüldüğü gibi aşağıdaki özelliklere sahip çok küçük yarıçaplı B^3 topunun merkezi olarak düşünülebilir:

- (1) K tam olarak (dik açıda) B^3 sınırlı topunun yüzeyindeki iki noktayı keser.
- (2) B^3 ün içinde K 'dan elde edilen α (1,1)-dolaşık, aşikar bir dolaşık'tır.



Şekil 2.22. İki farklı düğümün bağlantılı toplamı (Murasugi 1996)

Benzer olarak diğer bir 3-boyutlu S^3 küresinden bir başka K' düğümü için bir P' noktası seçilebilir. Yukarıdaki gibi B'^3 küresi Şekil 2.22.(b)'de görüldüğü gibi bir β aşikar (1,1)-dolaşık da K' den elde edilir. Doğal bir şekilde K ve K' den elde edilen sırasıyla α ve β (1,1)-dolaşık'ları için bir yönlendirme tayin edilebilir. \tilde{B}^3 , B^3 ün iç noktalarının S^3 den çıkarılması ile elde edilen bir toptur. Benzer olarak \tilde{B}'^3 , B'^3 ün iç noktalarının S^3 den çıkarılmasıyla elde edilen top olsun. Bu topların her birinin yüzeyi bir (2-boyutlu) küredir. Eğer bu toplardan birinin küresinin yönlendirmesini baştan başa ters çeviren bir homeomorfizm uygulanarak bu küre boyunca iki top yapıştırılırsa 3-boyutlu S^3 küresi elde edilmiş olur. Bu yapıştırma işlemi α ve β 'nin uç noktalarını birleştirir. Böylece bu yeni, tek yönlendirilmiş \hat{K} düğümü bu 3-boyutlu S^3 küresinde biçimlenir (Şekil 2.22.(c)). Bu inşa nedeniyle \hat{K} düğümünün yönlendirmesi, K ya da K' düğümünün orijinal yönlendirmesiyle çelişki teşkil etmemektedir.

Yukarıdaki işlemle meydana gelen \hat{K} düğümüne, K ve K' düğümlerinin bağlantılı toplamı denir ve $K \# K'$ ile gösterilir. Üstelik bu $K \# K'$ toplamı orijinal olarak seçilen

P ve P' noktalarından bağımsızdır. Böylece $K \# K'$ toplamının K ve K' ile tek bir şekilde tayin edildiği söylenebilir (Murasugi 1996).

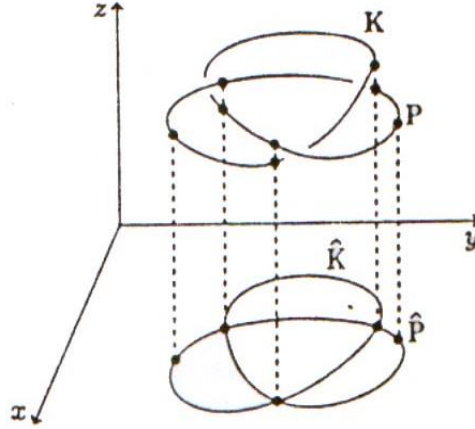
Önerme 2.1: İki düğümün bağlantılı toplama işlemi değişme özelliğine sahiptir. Yani $K_1 \# K_2 \cong K_2 \# K_1$ dir. Daha açık olarak, $K_1 \# K_2$ ve $K_2 \# K_1$ yönlendirmeye denktir. Ayrıca birleşme kanunları da sağlanır $K_1 \# (K_2 \# K_3) \cong (K_1 \# K_2) \# K_3$ (Murasugi 1996).

Yukarıdaki düğümlerin bağlantılı toplamı tanımı tüm düğümlerin kümesi \mathcal{A} için tanımlanır. Ancak bu tanım \mathcal{A} 'yı bir grup yapmaz. Çünkü aşık düğümün \mathcal{A} 'nın birim elemanı olmasına rağmen \mathcal{A} 'nın ters elemanı bulunmaz (Murasugi 1996).

2.6. Regüler Diyagramlar

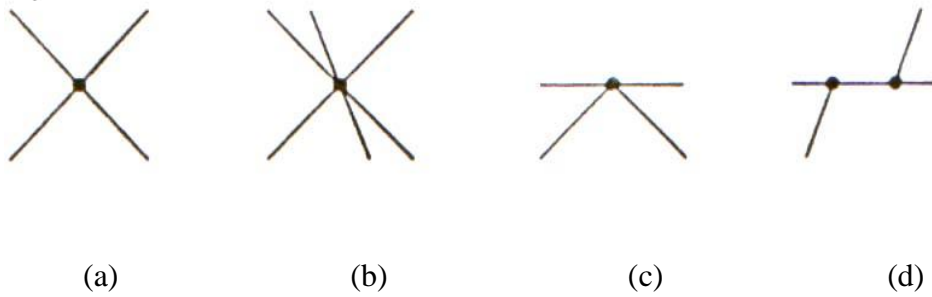
Tanım 2.6.1: \mathbb{R}^3 deki $P(x, y, z)$ noktasını xy -düzlemindeki $\hat{P}(x, y, 0)$ noktasına izdüşüren fonksiyon ρ olsun (Şekil 2.23).

Eğer K bir düğüm (veya halka) ise $\rho(K) = \hat{K}$ 'ya K 'nın izdüşümü denir. K yönlendirilmiş ise o zaman \hat{K} da K 'nın yönüne bağlı olarak bir yön kazanır. Bununla beraber \hat{K} birkaç arakesit noktasına sahip olduğundan düzlemde basit kapalı bir eğri değildir. K düğümü üzerinde birkaç basit düğüm hareketi yapmak suretiyle aşağıdaki şartlar verilebilir:



Şekil 2.23. Bir regüler izdüşüm örneği (Murasugi 1996)

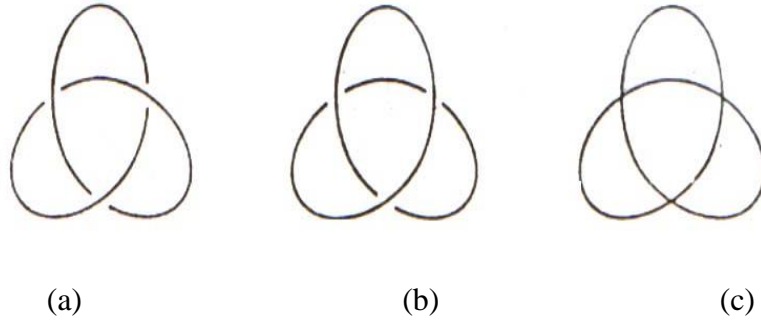
1. \hat{K} sonlu sayıda arakesit noktasına sahiptir.
2. Eğer Q , \hat{K} 'nin bir arakesit noktası ise Q 'nun $\rho^{-1}(Q) \cap K$ ters görüntüsü K 'da iki noktaya sahiptir. Yani Q , \hat{K} 'nin bir katlı noktasıdır (Şekil 2.24.(a)). Şekil 2.24.(b)'de gösterildiği gibi ikiden fazla noktaya müsaade edilmez.
3. K 'nın bir köşesi (düğüm bir poligonal olarak düşünüldüğünde) \hat{K} 'nin bir katlı noktasına dönüşmez. Şekil 2.24.(c) ve (d)'deki örneklerin ikisinde de bir poligonal doğru \hat{K} 'nin bir köşesine izdüşmüştür. Bu durumların ikisine de müsaade edilmez.



Şekil 2.24. Bir izdüşüm üzerinde oluşan katlı noktalar (Murasugi 1996)

Yukarıdaki şartları sağlayan \hat{K} izdüşümüne, bir regüler izdüşüm denir (Murasugi 1996).

Tez boyunca işlemleri kolaylaştırmak için regüler izdüşümler göz önüne alınacaktır. Ancak izdüşümlerle kısıtlanmış olursa bile katlı noktada bazı önemli belirsizlikler vardır. İzdüşümün bu katlı noktasında düğümün kendi kendisinin altından mı üstünden mi geçtiği belli değildir. Bu belirsizliği ortadan kaldırmak için düğümün kesim noktası çizilerek katlı nokta civarında düğüm bir miktar değiştirilebilir. Böylece düğümün geçitinin alttan mı üstten mi olduğu konusunda orijinaline uymasa da gerçek görüntüsü çizilebilir. Böyle değiştirilmiş izdüşümlere bir regüler diyagram denir (Şekil 2.25.(a), (b)) (Murasugi 1996).

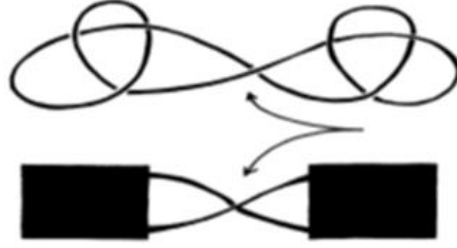


Şekil 2.25. Regüler diyagram örnekleri (Murasugi 1996)

Bir regüler diyagram aslında düğümün üç boyutlu uzayda nasıl bulunduğunu verir. Yani düzlemde uzaysal bir çizim verilmesine imkan tanır. Ayrıca izdüşümde kaybolan bilgiyi elde etmek için regüler diyagram kullanılır. Örneğin, Şekil 2.25.(c), Şekil 2.25.(a) ve (b) deki (farklı) iki düğümün izdüşümüdür (Murasugi 1996).

Tanım 2.6.2: Bir diyagramın geçitleri, üst geçit-alt geçit-üst geçit-alt geçit ... şeklinde birbirini takip ediyorsa bu diyagrama bir alterne diyagram denir. Eğer bir halka bir alterne diyagrama sahipse o zaman o halkaya alterne halka denir (Kauffman 1988).

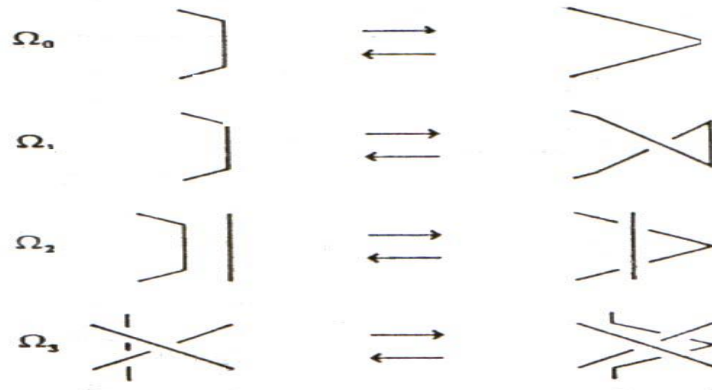
Tanım 2.6.3: Eğer bir diyagram kaldırılabilir bir geçite sahip değilse o diyagram indirgenmiştir. Eğer bir geçitte dört yerel bölgeden herhangi ikisi bütün diyagramda aynı bölgenin parçaları ise bu geçite kaldırılabilir denir (Şekil 2.26) (Kauffman 1988).



Şekil 2.26. Kaldırılabilir geçit örneği (Kauffman 1988)

2.7. Klasik Düğüm Sabitleri

1. **(Reidemeister hareketleri):** Aşağıdaki Şekil 2.27’de bulunan üç hareket (Ω_0 hariç) $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ ve onların terslerine Reidemeister hareketleri denir (Murasugi 1996).



Şekil 2.27. Reidemeister hareketleri (Murasugi 1996)

K ve K' düğümlerinin regüler diyagramları sırasıyla D ve D' olsun. Eğer D regüler diyagramı $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ ve / veya onların tersleri sonlu kez uygulanarak diğer D' diyagramına dönüştürülebilirse bu taktirde D ve D' diyagramları denktir denir ve bu denklik $D \approx D'$ ile gösterilir. Bu söylenenler ışığında aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 2.2: D ve D' , K ve K' düğümlerinin regüler diyagramları olsunlar. Bu taktirde

$$K \approx K' \Leftrightarrow D \approx D'$$

olur (Murasugi 1996).

Yukarıdaki teoremden, düğümlerin denkliği probleminin aslında bu düğümlerin regüler diyagramlarının bir denkliği problemi olduğu sonucu çıkabilir. Böylece bir düğüm sabiti, bir regüler diyagrama herhangi bir Reidemeister hareketi uygulandığı zaman değişmeden kalan bir özelliktir (Murasugi 1996).

Ω_2 ve Ω_3 Reidemeister hareketleri ile üretilen denklik bağıntısına regüler izotopi denir. Ω_1 , Ω_2 ve Ω_3 Reidemeister hareketlerinin üçü ile üretilen diyagramlar üzerindeki denklik bağıntısına kuşatan izotopi denir. Böylece Ω_2 ve Ω_3 hareketleri regüler izotopi sabiti, Ω_1 , Ω_2 ve Ω_3 Reidemeister hareketleri ise kuşatan izotopi sabitidir (Kauffman 1988).

2. (Geçitlerin minimum sayısı): Bir K düğümünün bir D regüler diyagramındaki geçitlerinin sayısı $c(D)$, bir düğüm sabiti değildir. Örneğin, aşikar düğümün Şekil 2.28'deki gibi iki regüler diyagramı D ve D' verilsin. Birincisinde $c(D) = 0$ olmasına rağmen ikincisinde $c(D') = 1$ dir (Murasugi 1996).



Şekil 2.28. Farklı sayıda geçitlere sahip aşikar düğüme ait iki farklı regüler diyagram örneği (Murasugi 1996)

K düğümünün tüm regüler diyagramlarından elde edilen $c(D)$ 'lerin minimum sayısına, K 'nın geçitlerinin minimum sayısı denir ve $c(K) = \min_D c(D)$ ile gösterilir. Bu bir

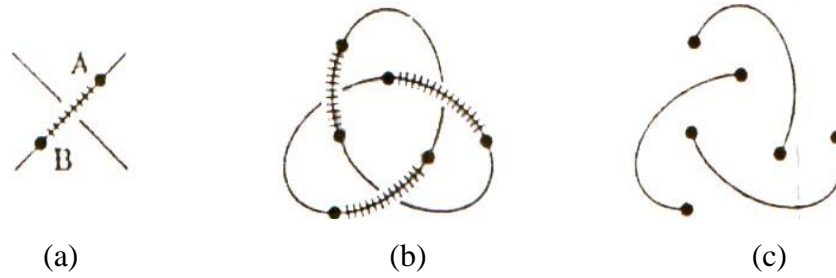
düğüm sabitidir. Bu sabite K 'nın geçitlerinin minimum sayısı denir. $c(K)$ geçitine sahip K 'nın regüler diyagramına, K 'nın minimum regüler diyagramı denir. Örneğin, K aşıkâr düğüm ise $c(K) = 0$ dır (Murasugi 1996)

Tahmin 2.1: K_1 ve K_2 iki farklı düğüm ise

$$c(K_1 \# K_2) = c(K_1) + c(K_2)$$

dir (Murasugi 1996).

3. (Köprü sayısı): Bir düğümün regüler diyagramında geçit bölgesinin üstünden geçen parçaya köprü denir (Şekil 2.29) (Murasugi 1996).



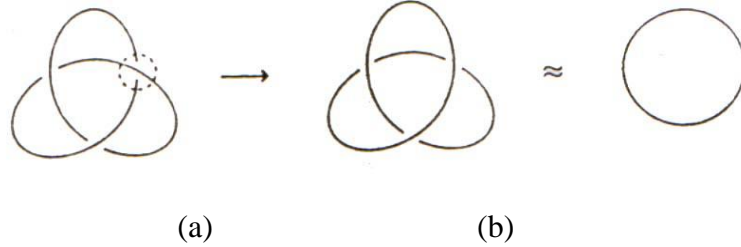
Şekil 2.29. Bir düğümün regüler diyagramı üzerindeki köprü örnekleri (Murasugi 1996)

Bir K düğümünün D diyagramındaki köprü sayısı $br(D)$ ile gösterilir. Bu, K için bir sabit değildir. Ancak verilen bir K düğümü için bütün regüler diyagramları göz önüne alındığında bu düzenli diyagramların minimum köprü sayısı K için bir sabittir. Yani bir K düğümü (veya halka) için $br(K) = \min_D br(D)$ bir sabittir. K aşıkâr düğüm ise $br(K) = 1$ dir (Murasugi 1996).

Tahmin 2.2: K bir düğüm ise $c(K) \geq 3(br(K) - 1)$ dir. Eşitlik K 'nın aşıkâr düğüm, trefoil düğüm ya da trefoil düğümlerin bağlantılı toplamı olduğu zaman sağlanır (Murasugi 1996).

4. (Düğümlememe sayısı): Bir K düğümünün (veya halkasının) regüler D diyagramındaki bir geçit değiştiğinde (lokal olarak) üst ve alt geçit kısımları değişir. Bu tip bir değişim basit düğüm hareketi olmadığından genel olarak başka bir düğümün bir regüler diyagramı elde edilir (Murasugi 1996).

Örnek 2.4: Şekil 2.30.(a)'da eğer küçük bir çember içindeki alt ve üst geçit kısımları değiştirilirse aşikar düğümün regüler diyagramının elde edildiği kolayca görülebilir. Şekil 2.30.(b) (Murasugi 1996).



Şekil 2.30. Düğümlememe operasyonuna bir örnek (Murasugi 1996)

Önerme 2.2: Herhangi bir düğümün (veya halkanın) D regüler diyagramından, D 'nin birkaç geçitinde (bunun için Reidemeister hareketlerinin kullanımı da gerekli olabilir) alt geçit bileşenleri ile üst geçit bileşenlerini değiştirerek aşikar düğümün regüler diyagramı elde edilebilir (Murasugi 1996).

Önerme 2.2'ye göre, bir geçitteki alt geçit ile üst geçit bileşenlerinin değişim operasyonuna düğümlememe operasyonu denir. D regüler diyagramının düğümlememe sayısı, D 'yi aşikar düğümün (halkanın) regüler diyagramına dönüştürmek için gerekli olan düğümlememe operasyonlarının minimum sayısı olarak tanımlanır. D 'nin düğümlememe sayısı $u(D)$ ile gösterilecektir. Beklenildiği gibi $u(D)$, bir K düğümü için sabit değildir. K 'nın tüm regüler diyagramları göz önüne alındığında bu regüler diyagramlardaki düğümlememe operasyonunun minimum sayısı bir düğüm sabiti olur. Yani K bir düğüm (veya halka) ise $u(K) = \min_D u(D)$, K 'nın bir

sabitidir. Burada D , K 'nin tüm regüler diyagramlarının kümesidir. O halde $u(D)$, K 'nin düğümlenme sayısıdır (Murasugi 1996).

5. (Halkalanma sayısı): Buraya kadar tartışılan düğüm sabitleri, düğümün yönlendirilmesinden bağımsız olmuştur. Şimdi yönlendirilmiş halkalar için önemli bir sabit olan halkalanma sayısı tanımlanacaktır. İlk olarak yönlendirilmiş bir düğüm ya da halkanın bir regüler diyagramının her bir geçiti ya +1 ya da -1 ile işaretlenir.

Şekil 2.31'de görüldüğü gibi yönlendirilmiş bir regüler diyagramın bir c geçitine iki sınıflandırma verilebilir. (b) durumunda geçit $sign(c) = -1$ ile işaretlenirken, (a) durumunda $sign(c) = +1$ ile işaretlenir. (b)'deki geçite negatif, (a)'daki geçite pozitif denir (Murasugi 1996).



Şekil 2.31. Bir düğümün yönlendirilmiş regüler diyagramı üzerindeki geçitlerin işaretlenmesi kuralları (Murasugi 1996)

D , iki bileşenli $L = \{K_1, K_2\}$ halkasının yönlendirilmiş bir regüler diyagramı olsun. Ayrıca K_1 ve K_2 'nin izdüşümlerinin arakesit olduğu ve D 'nin geçitlerinin c_1, c_2, \dots, c_m olduğu kabul edilsin. Bu taktirde

$$\frac{1}{2} \{sign(c_1) + sign(c_2) + \dots + sign(c_m)\}$$

ifadesine K_1 ve K_2 'nin halkalanma sayısı denir ve $lk(K_1, K_2)$ olarak gösterilir (Murasugi 1996).

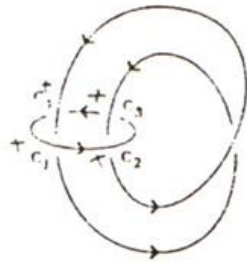
Teorem 2.3: $lk(K_1, K_2)$ halkalanma sayısı L 'nin bir sabitidir.

Anlatılmak istenen, L 'nin bir diğer yönlendirilmiş D' regüler diyagramı göz önüne alındığında onun halkalanma sayısı değerinin de D 'ninki ile aynı olacaktır. Bu yüzden bu değer L 'nin halkalanma sayısıdır ve $lk(L)$ ile gösterilir. Üstelik halkalanma sayısı K_1 ve K_2 'nin sıralanmasından bağımsızdır. Yani $lk(K_1, K_2) = lk(K_2, K_1)$ (Murasugi 1996).

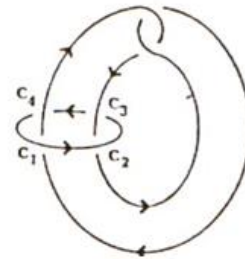
Örnek 2.5: Şekil 2.32.(a) ve (b)'deki L ve L' halkalarının halkalanma sayısı hesaplınsın (Murasugi 1996).

a-) c_1, c_2, c_3, c_4 geçitlerindeki işaretleri belirlemek gerekir. Her bir geçitteki işaret -1 olduğundan $lk(K_1, K_2) = -2$ elde edilir.

b-) Benzer olarak $sign(c_2) = sign(c_3) = -1$ iken $sign(c_1) = sign(c_4) = +1$ olduğunu göstermek kolaydır. Böylece $lk(K_1', K_2') = 0$ dır. Böylece L 'nin halkalanma sayısı verilen yönlendirmeye bağlı olan bir sabittir.



(a)



(b)

Şekil 2.32. Bir düğümün halkalanma sayısı ile ilgili bir örnek (Murasugi 1996)

L, K_1, K_2, \dots, K_n şeklinde n -bileşenli bir halka olsun. $i < j$ için K_i ve K_j iki bileşeni için $lk(K_i, K_j)$ halkalanma sayısı yukarıdakilerin bir genişlemesi olarak tanımlanabilir ($1 \leq i < j \leq n$). (Bu halkalanma sayısını hesaplamak için K_i ve K_j hariç L 'nin bütün bileşenleri ihmal edilir). Bu yaklaşım $\frac{n(n-1)}{2}$ halkalanma sayısını verir ve bunların toplamı olan

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} lk(K_i, K_j) = lk(L)$$

eşitliğine, L 'nin toplam halkalanma sayısı denir (Murasugi 1996).

2.8. Düğüm Polinomları

Düğüm teorisinin önemli sorularından biri, iki düğüm diyagramı verildiğinde aynı düğümü temsil edip etmedikleri sorusudur. Bu sorunun cevabını bulabilmek için düğüm sabitlerini kullanmak oldukça etkili bir yöntemdir. Burada şimdiye kadar bulunmuş ve etkileri tartışılmayacak olan bazı düğüm sabitleri incelenecektir.

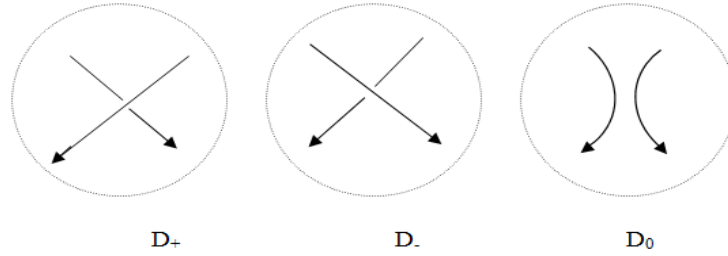
2.8.1. Alexander – Conway polinomu

Alexander polinomunun hesaplanabildiği metodlardan biri Seifert matrisidir. Fakat bu yöntemin ilerleyen zamanlarda oldukça kullanışsız olduğu görüldü. Buna karşılık düğüm teorisindeki değişimin sabit durumu ve onun diğer bilim dallarıyla olan etkileşiminden dolayı bu problem ortadan kaldırıldı. Bu durum 1960'ların sonunda J. H. Conway tarafından sağlandı. O, Alexander polinomunu hesaplamak için oldukça etkili bir mekanik yöntem tasarlayarak bunu sağladı (Murasugi 1996).

Tanım 2.8.1.1: Yönlendirilmiş bir düğüm verilsin. O halde aşağıdaki iki aksiyom vasıtasıyla ona sabitleştirilmiş bir z değişkeni ile bir $\nabla_K(z)$ Laurent polinomu atanabilir (Murasugi 1996).

Aksiyom 1: Eğer K aşıkâr düğüm ise $\nabla_K(z) = 1$ dir.

Aksiyom 2: D_+ , D_- , D_0 regüler diyagramları sırasıyla üç K_+ , K_- , K_0 düğümlerinin diyagramları olsunlar. Bu regüler diyagramlar bir geçitin komşuluğunda hariç tam olarak aynıdırlar. Bu komşulukta regüler diyagramlar Şekil 2.33’de gösterildiği biçimde farklılaşırlar. (Not: D_+ (D_-) durumunda bu komşuluk içinde sadece bir pozitif (negatif) geçit vardır.)



Şekil 2.33. Conway polinomu hesaplamaları için skein diyagramları (Murasugi 1996)

O halde üç düğümün Laurent polinomları aşağıdaki gibi ilişkilidir:

$$\nabla_{K_+}(z) - \nabla_{K_-}(z) = z\nabla_{K_0}(z) \quad (1)$$

Yukarıdaki gibi biçimlendirilmiş üç D_+ , D_- , D_0 regüler diyagramlarına skein diyagramları denir ve (1)’deki K_+ , K_- , K_0 ’ın Laurent polinomları arasındaki bağıntıya skein bağıntısı denir. Yine diğer ikisi tarafından D_+ , D_- , D_0 ’ın birine yapılan bir operasyona skein operasyonu denir.

Yukarıdaki şekilde tanımlanan $\nabla_K(z)$ polinomuna Conway polinomu denir. Aksiyom (1) ve (2) den elde edilen $\nabla_K(z)$ Laurent polinomunu iyi tanımlı ve tektir. $\nabla_K(z)$ Conway polinomu ile $\Delta_K(t)$ şeklinde gösterilen Alexander polinomunun aslında aynı olduğu gösterilebilir (Murasugi 1996).

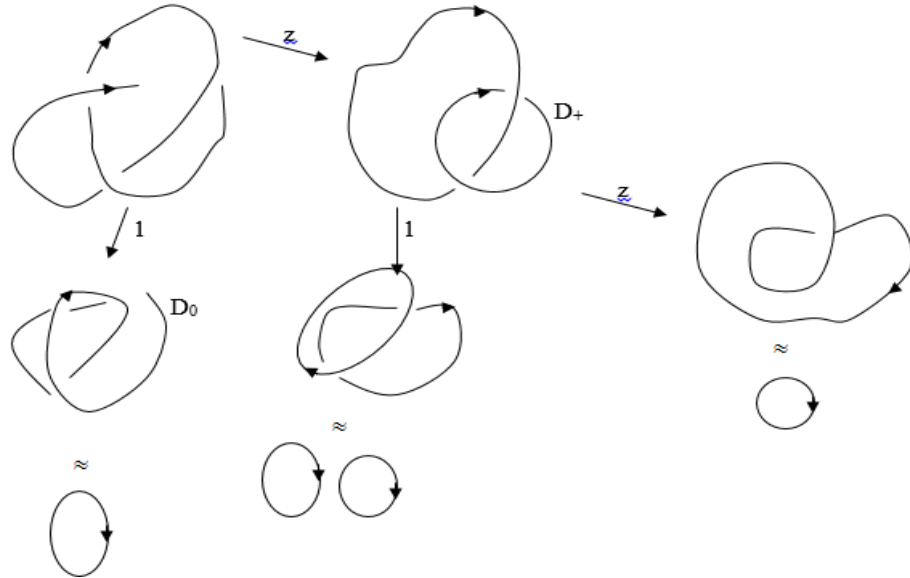
Teorem 2.4: $\Delta_K(t) = \nabla_K(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}})$ dir (Murasugi 1996).

Diğer bir ifadeyle, eğer Conway polinomunda z yerine $\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}$ yazılırsa Alexander polinomunu elde edilir. Bu ilişkiden dolayı $\nabla_K(z)$ polinomuna sık sık Alexander-Conway polinomu denir (Murasugi 1996). Genellikle Conway polinomunu hesaplamak için en etkili yol, skein ağaç diyagramını kullanmaktır.

Örnek 2.6: Yönlendirilmiş sağ-el trefoil düğümü için Conway polinomu ve Alexander polinomunu aşağıdaki şekilde hesaplanır. Conway polinomunu hesaplanırken

$$\nabla_0(z) = 1 \text{ ve } \nabla_{00}(z) = 0$$

olarak alınır.



$$\begin{aligned} \nabla_K(z) &= 1 \cdot \nabla_0(z) + z \cdot \nabla_{00}(z) + z^2 \cdot \nabla_0(z) \\ &= 1 + 0 + z^2 \\ &= 1 + z^2 \end{aligned}$$

Yukarıdaki sonuçtan yola çıkarak yönlendirilmiş sağ-el trefoil düğümünün Alexander polinomu için $z = \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}$ alınırsa

$$\Delta_K(t) = 1 + \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)^2 = t^{-1} - 1 + t$$

bulunur.

2.8.2. Jones polinomu

Tanım 2.8.2.1: K yönlendirilmiş bir düğüm ve D , K için (yönlendirilmiş) bir regüler diyagram olsun. O halde K 'nın Jones polinomu $V_K(t)$, aşağıdaki iki aksiyomdan (tek bir biçimde) tanımlanabilir. Onun kendi polinomu, \sqrt{t} değişkenli bir Laurent polinomudur yani polinom, negatif bir kuvvete sahip \sqrt{t} değişkenli terimlere sahip olabilir (Murasugi 1996).

Aksiyom 1: Eğer K aşıkâr düğüm ise $V_K(t) = 1$ dir.

Aksiyom 2: D_+ , D_- , D_0 (Şekil 2.33) skein diyagramları olarak kabul edilirse aşağıdaki skein bağıntısı sağlanır:

$$\frac{1}{t}V_{D_+}(t) - tV_{D_-}(t) = \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)V_{D_0}(t) \quad (2)$$

İlk bakışta Alexander polinomunu tanımlayan aksiyomlar özellikle (1) ve (2) nolu eşitlikler yanlış görünebilir. Jones polinomunun bulunmasından sadece birkaç yıl sonra 1995 yılında Melvin ve Morton tarafından sezgisel olarak Alexander polinomu ile Jones polinomunun bir kısaltılmış biçimi arasında son derece şaşırtıcı bir ilişki olduğu bulundu (Murasugi 1996). Jones polinomu ilk duyulduğu zaman aralarında sadece

matematikçilerin olmadığı pek çok kişi, Alexander polinomunun ikinci aksiyomundaki böyle uyumsuz bir değişime şaşırды.

Jones polinomunu hesaplamak için gerekli olan algoritma, tamamen Alexander polinomunu hesaplamak için gereken algoritmaya benzerdir. Yani biçimlendirmek için bir skein ağaç diyagramı gereklidir. Ayrıca iki skein diyagramlarının katsayıları farklı olduğu için Jones polinomunun hesaplanması biraz daha zordur. Jones polinomunun skein ağaç diyagramı kullanılarak n -bileşenli aşık halkanın Jones polinomlarının tamamı toplam olarak yazılırsa zorluk (ya da belki onun kuvveti) hemen görülebilir (Murasugi 1996):

$$V_K(t) = f_1(t)V_0(t) + f_2(t)V_{00}(t) + \dots + f_n(t)V_{0_n}(t).$$

Alexander polinomunun hesaplanmasında yukarıdakine benzer bir ifade lüzumsuzdur. Çünkü $\mu \geq 2$ için 0_μ 'nin (n -bileşenli aşık halkanın) Alexander polinomunun sıfır olduğu biliniyor. Jones polinomunun hesaplanmasında ve burada yatan temel fark, onların sıfırdan farklı olmalarıdır. Bundan dolayı birinci adım 0_μ 'nin Jones polinomu $V_{0_\mu}(t)$ 'yi hesaplamaktır (Murasugi 1996).

Önerme 2.3: Aşık μ - bileşenli halka 0_μ için

$$V_{0_\mu}(t) = (-1)^{\mu-1} \left(\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}} \right)^{\mu-1}$$

dir (Murasugi 1996).

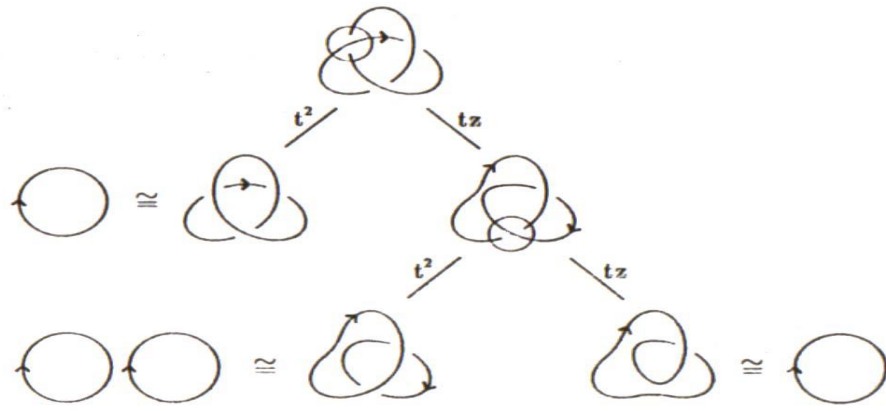
Gerekli şartlar oluşturularak Jones polinomunun hesaplanmasıyla ilgili bir örnek verilsin. Alexander polinomunda olduğu gibi aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$V_{D_+}(t) = t^2 V_{D_-}(t) + tz V_{D_0}(t)$$

$$V_{D_-}(t) = t^{-2}V_{D_+}(t) - t^{-1}zV_{D_0}(t),$$

burada netlik için $z = \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ alınmalıdır (Murasugi 1996).

Örnek 2.7: Şekil 2.34'de sağ-el trefoil düğümünün Jones polinomunun hesabı için skein ağaç diyagramı çizildi.



Şekil 2.34. Sağ-el trefoil düğümünün Jones polinomu için skein ağaç diyagramı (Murasugi 1996)

Skein ağaç diyagramından

$$\begin{aligned} V_K(t) &= t^2V_0(t) + t^3zV_{00}(t) + t^2z^2V_0(t) \\ &= t + t^3 - t^4 \end{aligned}$$

olduğu ortaya çıkar.

2.8.3. Skein invaryantları

Jones polinomunu tanımlayan (2) nolu skein bağıntısına dikkatli bir biçimde bakılırsa

ve (1) ile karşılaştırılırsa $V_{K_+}(t)$ ve $V_{K_-}(t)$ 'nin katsayılarının mutlaka $\frac{1}{t}$ ve t 'ye

sınırlandırılmasının gerekli olmadığı görülür. Genel olarak t değişkeninin rastgele bir fonksiyonunun alınabileceği ve onun değişimine izin verilebileceği görülür.

Tanım 2.8.3.1: K (yönlendirilmiş) bir düğüm ve D , K 'nın bir regüler diyagramı olsun. O halde aşağıdaki aksiyomlar vasıtasıyla negatif kuvvetlere sahip olabilen x, y, w ile K 'nın bir polinomu $S_K(x, y, w)$ tanımlanabilir.

- (1) K aşıkâr düğüm ise o zaman $S_0(x, y, w) = 1$ dir.
- (2) D_+, D_-, D_0 skein diyagramları ile ilgili olarak aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$xS_{D_+}(x, y, w) - yS_{D_-}(x, y, w) = wS_{D_0}(x, y, w).$$

$S_K(x, y, w)$ polinomu K 'nın bir sabitidir (Murasugi 1996).

Birkaç düğüm için $S_K(x, y, w)$ polinomu hesaplanmadan önce S_K 'nin hafif bir sadeleştirilmiş göz önüne alınsın. Yukarıdaki tanımdan S_K 3-değişkenli bir polinom olarak görülmesine rağmen gerçekte o sadece 2-değişkenli bir polinomdur. Bunu göstermek için (3) nolu eşitlikte tanımlanan 2-değişkenli $P_K(v, z)$ polinomu ele alınsın (Murasugi 1996).

- (1) Aşıkâr düğüm için $P_0(v, z) = 1$ dir.
- (2) D_+, D_-, D_0 skein diyagramları hususunda aşağıdaki formül sağlanır:

$$\frac{1}{v} P_{D_+}(v, z) - v P_{D_-}(v, z) = z P_{D_0}(v, z) \quad (3)$$

Burada $P_K(v, z)$ ve $S_K(x, y, w)$ polinomları doğal bir biçimde (4)'deki iki eşitlikten ortaya çıkan aynı polinomlardır (Murasugi 1996):

$$(1) S_K\left(\frac{1}{v}, v, z\right) = P_K(v, z)$$

$$(2) P_K\left(\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}, \frac{w}{\sqrt{x}\sqrt{y}}\right) = S_K(x, y, w) \quad (4)$$

Genellikle skein bağıntıları ile tanımlanan bir polinoma skein polinomu denir. $P_K(v, z)$, bir skein polinomunun en genelleştirilmiş şeklidir ve bu polinoma sıklıkla Homfly polinom denir. Bu adlandırma, bu polinomu yaklaşık olarak aynı zamanda bulan matematikçilerin soyadlarının ilk harfleri alınarak oluşturulur (Murasugi 1996).

Eğer Alexander ve Jones polinomlarının skein bağıntıları tanımları, $P_K(v, z)$ 'nin skein bağıntısı ile kıyaslanırsa o zaman aşağıdaki basit sonuç ortaya çıkar:

Önerme 2.4: K (yönlendirilmiş) bir düğüm olsun. O halde

$$(1) V_K(t) = P_K\left(t, \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

$$(2) \Delta_K(t) = P_K\left(1, \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

olur (Murasugi 1996).

Böylece $V_K(t)$ ve $\Delta_K(t)$ 'nin, $P_K(v, z)$ 'nin özel durumları olduğu söylenebilir. Bununla birlikte $\Delta_K(t)$, $V_K(t)$ 'nin özel bir hali değildir. Bunlar zorunlu bir biçimde farklı polinomlardır (Murasugi 1996).

Rastgele bir K düğümü için $S_K(x, y, w)$ ve $P_K(v, z)$ 'yi hesaplariken skein ağaç diyagramını kullanmak daha iyidir.

Örnek 2.8: Sağ- el trefoil düğümünün skein polinomu şu şekildedir:

$$P_K(v, z) = 2v^2 - v^4 + v^2 z^2.$$

2.8.4. Kauffman polinomu

Eğer Ω_1, Ω_2 ve Ω_3 Reidemeister hareketleri ya da bunların tersleri kullanılarak bir düğümün diyagramı başka bir düğümün diyagramına dönüştürülebilirse o zaman onlar denktirler. Böylece geliştirilen fonksiyonun bir düğüm sabiti olduğunu göstermek için mümkün olan bir yaklaşım onun bu Reidemeister hareketleri altında değişmeden kaldığını göstermektir. Bundan dolayı her üç Reidemeister hareketlerinin fonksiyonu ne şekilde etkilediği araştırılmalıdır. Çünkü özellikle onların karakterleri çeşitli yönleriyle tamamen farklılaşır. Örneğin, eğer Ω_3 ya da Ω_3^{-1} uygulanırsa o zaman D regüler diyagramının geçitlerinin sayısı değişmeden kalır. Daha önemli bir düşünce, D' 'ye bir yönlendirme verilse bile ya Ω_2 ya da Ω_3 veya onun tersi uygulandığında $w(D)$ Tait sayısının değişmeden kaldığıdır. Buna karşılık Tait sayısının kendisi bir düğüm sabiti değildir ayrıca Tait sayısının yalnız Ω_2 ve Ω_3 ve bunların tersleri altında iki regüler diyagramın aynı olduğunu göstermek için yeterli olmadığı görülür. Buradaki sorun, eğer olay sadece Ω_2 ya da Ω_3 veya onun tersine sınırlandırılırsa bir düğüm sabitinden ne ölçüde uzaklaşılır? sorusudur. Bu mantıkla L. Kauffman güçlü bir sezgi ile aşağıdaki önemli sonuca ulaşmıştır (Murasugi 1996):

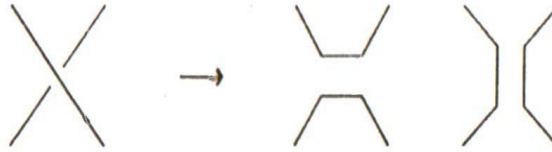
Tanım 2.8.4.1: D yönlendirilmiş bir düğümün yönlendirilmiş bir regüler diyagramı olsun. D 'nin tüm geçitlerinin işaretlerinin toplamı $w(D)$ 'ye, D 'nin Tait sayısı (veya burulma sayısı) denir (Murasugi 1996).

Tanım 2.8.4.2: Ω_2 ya da Ω_3 Reidemeister hareketleri ve onların tersleri regüler hareketler olarak adlandırılınsın. O halde eğer bazı düğümlerin bir regüler diyagramı D' 'ye bu regüler hareketler sonlu kez uygulandığında bir D' regüler diyagramı elde edilebilirse D ve D' regüler diyagramları denktir denir (Murasugi 1996).

Tanım 2.8.4.3: t değişkenli bir fonksiyon f (çok değişkenli bir fonksiyon için Tanım 2.8.4.4'e bakınız) regüler hareketler altında sabit olsun. Eğer uygun şekilde bir m seçilirse (o regüler diyagrama bağlı olacaktır) o zaman $t^m f$ düğümlerin bir sabiti olur (Murasugi 1996).

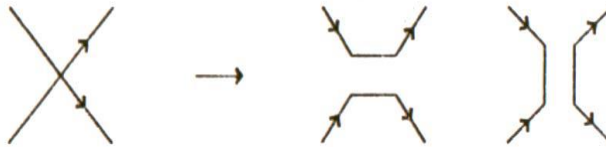
Örnek 2.9: Bir yönlendirilmiş regüler diyagramın Tait sayısı, regüler denklik altında bir sabittir (Murasugi 1996).

K yönlendirilmemiş bir düğüm ve D , K 'nın bir regüler diyagramı olsun. D 'nin her bir geçiti Şekil 2.35'de gösterilen yolla ayrılış. (Not: Bu uç uca ekleme yöntemi geçitin işaretinden bağımsızdır.)



Şekil 2.35. Kauffman parantez polinomunun tanımı için bir regüler diyagram üzerindeki ayırma yöntemi (Murasugi 1996)

Düğümün yönlendirilmemiş olmasından emin olunmak istenmesinin sebebi, eğer D 'ye bir yönlendirme verilir ve ondan sonra kesilirse yeni regüler diyagram üzerindeki yönlendirme artık uyumlu olmayacağındandır (Şekil 2.36'ya bakınız).



Şekil 2.36. Kauffman parantez polinomunun tanımında regüler diyagram üzerindeki ayırma yönteminde yönlendirmenin etkisi (Murasugi 1996)

Kauffman parantez polinomunu tanımlamak için bir geçitin yukarıdaki ayırma yöntemi kullanılacaktır (Murasugi 1996).

Teorem 2.5 [Kau 1]: D , bir K düğümünün yönlendirilmemiş bir regüler diyagramı olsun. O zaman katsayıları tamsayı olan 1-değişkenli bir Laurent polinomu $P_D(A)$ vardır. Bu polinom aşağıdaki dört şartı sağlar (Murasugi 1996).

- (1) $P_D(A)$ regüler denklik altında sabittir.
- (2) Eğer D aşıkâr düğümün minimum geçitli regüler diyagramı ise

$$P_D(A) = 1 \quad (5)$$

olur.

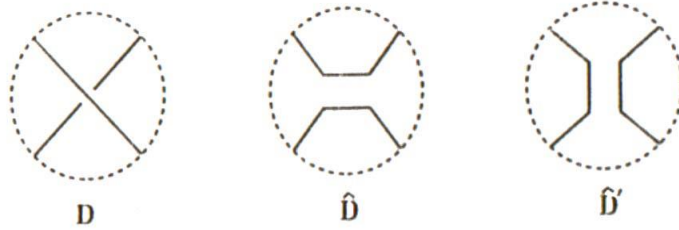
- (3) Eğer D regüler diyagramı D_1 ve D_2 diyagramlarının ayrık birleşimi ise

$$P_D(A) = -(A^2 + A^{-2})P_{D_1}(A)P_{D_2}(A)$$

olur.

- (4) D , \hat{D} , \hat{D}' , Şekil 2.37'de verilen skein diyagramları olsunlar. O halde aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$P_D(A) = AP_{\hat{D}}(A) + A^{-1}P_{\hat{D}'}(A) \quad (6)$$



Şekil 2.37. Kauffman parantez polinomunu tanımında kullanılan skein diyagramları (Murasugi 1996)

Bir düğümün D regüler diyagramı üzerinde tanımlanan bu teoremdaki $P_D(A)$ 'ya Kauffman parantez polinomu denir. Burada (5) nolu bağıntının, K aşık düğümü için $P_K(A)=1$ olduğu anlamına gelmez. Aslında $D = \text{öğüm}$ olduğunda $P_D(A)$ polinomu hesaplanırken $P_D(A) = -A^{-3}$ eşitliğini elde etmek için (6) nolu bağıntı kullanılmalıdır. Bu nedenle $P_D(A)$, birinci Reidemeister hareketi Ω_1 altında sabit değildir. Ancak $P_D(A)$ 'dan Ω_1 altında dahi değişmeyen bir sabit tanımlamak mümkündür; bu durum Kauffman prensibini içerir (Murasugi 1996).

Teorem 2.6: D yönlendirilmiş bir düğümün yönlendirilmiş bir regüler diyagramı olsun. Eğer $P_D(A)$, “yönlendirilmemiş” D diyagramının Kauffman parantez polinomu ve $w(D)$, D 'nin Tait sayısı ise o zaman aşağıdaki eşitlik tanımlanır:

$$\hat{P}_D(A) = (-A^{-3})^{w(D)} P_D(A).$$

O halde $\hat{P}_D(A)$, yönlendirilmiş bir düğümün bir sabitidir ve $\hat{P}_K(A)$ ile gösterilir. Eğer $A = t^{-1/4}$ alınırsa o zaman $\hat{P}_K(A)$, K 'nın Jones polinomu $V_K(t)$ ile uyuşur. Yani

$$\hat{P}_K(t^{-1/4}) = V_K(t)$$

elde edilir. Ayrıca $\hat{P}_K(A)$, Jones polinomu ile kesinlikle aynı biçimdedir (Şu belirtilmelidir ki; $P_D(A)$ üzerindeki kıvrımları yok etmek için $P_D(A)$, $(-A^{-3})^{w(D)}$ ile çarpılır. Çünkü $P_\infty(A) = -A^{-3}$ dir.) (Murasugi 1996).

Bir K düğümünün Kauffman parantez polinomunun (ve Jones polinomunun) bir uzantısı olarak bir 2-değişkenli tamsayı polinomu (negatif üslü olması mümkün) tanımlamak mümkündür. $F_K(a, x)$ için de yukarıdaki gibi benzer argümanlar kullanılır.

Teorem 2.7 [Kau 2]: D yönlendirilmemiş K düğümünün bir regüler diyagramı olsun. O halde aşağıdaki ispatlanmış üç aksiyomu sağlayan regüler hareketler altında sabit olan 2-değişkenli $A_p(a, x)$ polinomu mevcuttur (Murasugi 1996):

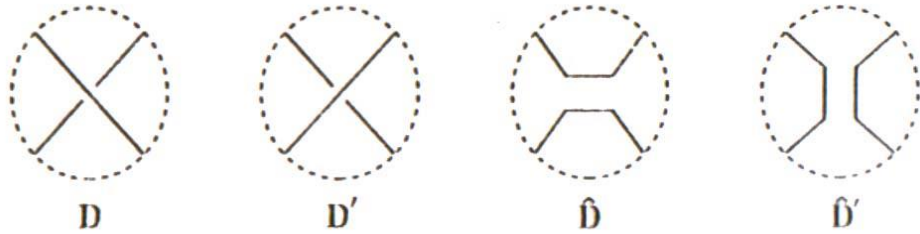
(1) 0 aşıkâr düğüm için

$$A_0(a, x) = 1$$

olur.

(2) D, D', \hat{D}, \hat{D}' bir tek geçitin komşuluğunda hariç aynı olsunlar. Bu komşulukta düğümün regüler diyagramları Şekil 2.38'deki gibidir. O halde aşağıdaki bağıntı sağlanır:

$$A_D(a, x) + A_{D'}(a, x) = x[A_{\hat{D}}(a, x) + A_{\hat{D}'}(a, x)]$$



Şekil 2.38. Kauffman polinomu hesaplamaları için skein diyagramları (Murasugi 1996)

(3) D, D^*, D_0 bir tek geçitin komşuluğunda hariç aynı olsunlar. Bu komşuluk içinde düğümün regüler diyagramları Şekil 2.39'deki gibidir. O halde aşağıdaki formül sağlanır:

$$(i) A_D(a, x) = aA_{D_0}(a, x)$$

$$(ii) A_{D^*}(a, x) = a^{-1}A_{D_0}(a, x)$$



Şekil 2.39. 2-değişkenli Kauffman polinomunu için regüler diyagramlar (Murasugi 1996)

Bu 2-değişkenli $A_D(a, x)$ polinomu da tektir. Kauffman parantez polinomunun hesaplanmasında olduğu gibi bu sabit, regüler diyagramdan tanımlanır. Böylece daha önce olduğu gibi eğer K aşıkâr düğüm ise $A_K(a, x) = 1$ tanımlanmaz. Aslında $A_D(a, x)$, birinci Reidemeister hareketi Ω_1 altında sabit değildir. Ayrıca $A_D(a, x)$ 'in de Ω_1 altında sabit olması için yeni bir polinom tanımlamaya gerek duyulur (Murasugi 1996).

Tanım 2.8.4.4: K yönlendirilmiş bir düğüm ve D , K için bir (yönlendirilmiş) regüler diyagram olsun. Ayrıca $w(D)$, D 'nin Tait sayısı olsun. O halde

$$F_D(a, x) = a^{w(D)} A_D(a, x)$$

olur (Murasugi 1996).

Teorem 2.8: $F_D(a, x)$, yönlendirilmiş K düğümünün bir sabitidir (onun regüler diyagramı D 'den bağımsızdır). Bu sabite 2-değişkenli Kauffman polinomu denir (Murasugi 1996).

Örnek 2.10: K sağ-el trefoil düğümünün 2-değişkenli Kauffman polinomu aşağıdaki şekildedir:

$$F_K(a, x) = a^{-3} [x^2(a + a^{-1}) + x(1 + a^{-2}) - (2a + a^{-1})].$$

Parantez polinomunda olduğu gibi Kauffman polinomu ve Jones polinomu bağlantılıdır (Murasugi 1996).

Teorem 2.9 [Kau2]: K bir yönlendirilmiş düğüm olsun. O halde

$$F_K(-t^{-3/4}, t^{1/4} + t^{-1/4}) = V_K(t)$$

eşitliği vardır (Murasugi 1996).

Böylece yukarıdaki Kauffman polinomu ile ek olarak Kauffman parantez polinomu, Jones polinomunun uzantıları olarak düşünülebilirler. Jones polinomunda olduğu gibi iki Kauffman polinomu tamamen sabit değildirler çünkü aynı Kauffman polinomları ve Kauffman parantez polinomları ile denk olmayan birçok düğüm vardır (Murasugi 1996).

Sonuç (Parantez polinomu): Her bir yönlendirilmemiş L halkasına, $\langle L \rangle$ ile gösterilen a, b, c değişkenli bir polinom atansın. Öyle ki; aşağıdakiler sağlanır:

1)

$$\langle \text{crossing} \rangle = a \langle \text{lens} \rangle + b \langle \text{mirror lens} \rangle$$

veya

$$\langle \text{crossing} \rangle = a \langle \text{mirror lens} \rangle + b \langle \text{lens} \rangle$$

$$2) \langle LU0 \rangle = c \langle L \rangle$$

$$3) \langle 0 \rangle = 1.$$

Şimdi a, b, c değişkenleri arasındaki ilişki verilsin. Polinom Ω_2 Reidemeister hareketine göre sabit olsun. Ω_2 hareketi ele alınırsa;

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \iff \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \\
 & \langle \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \rangle = a \langle \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \rangle + b \langle \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \rangle \\
 & = a \left[a \langle \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \rangle + b \langle \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \rangle \right] + b \left[a \langle \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \rangle + b \langle \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \rangle \right] \\
 & = a^2 \langle \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \rangle + abc \langle \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \rangle + ab \langle \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \rangle + b^2 \langle \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \rangle \\
 & = (abc + a^2 + b^2) \langle \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \rangle + ab \langle \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \rangle
 \end{aligned}$$

elde edilir. Eğer $ab=1$ ve $a^2 + b^2 + abc = 0$ olursa polinom Ω_2 ye göre sabit kalır.

Dolayısıyla $b = a^{-1}$ ve $abc + a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow c = -a^2 - b^2 \Rightarrow c = -a^2 - a^{-2}$ olur.

Örnek 2.11: $K_{2,3}$ tor düğümü için parantez polinomu hesaplanırsa:

$$\langle \text{tor} \rangle = a \langle \text{tor}_1 \rangle + a^{-1} \langle \text{tor}_2 \rangle$$

$$= a \left(a \langle \text{tor}_1 \rangle + a^{-1} \langle \text{tor}_2 \rangle \right) + a^{-1} \left(a \langle \text{tor}_3 \rangle + a^{-1} \langle \text{tor}_4 \rangle \right)$$

$$= a^2 \langle \text{tor}_1 \rangle + \langle \text{tor}_2 \rangle + \langle \text{tor}_3 \rangle + a^{-2} \langle \text{tor}_4 \rangle$$

$$= a^2(-a^2 - a^2) \left[a \langle \emptyset \rangle + a^{-1} \langle \emptyset \rangle \right] + a \langle \emptyset \rangle + a^{-1} \langle \emptyset \rangle + a \langle \emptyset \emptyset \rangle + a^{-1} \langle \emptyset \rangle + a^2 \left[a \langle \text{tor}_1 \rangle + a^{-1} \langle \text{tor}_2 \rangle \right]$$

$$= (-a - a^5)(-a^{-2} - a^2) + (-a^{-1} - a^3) + a(-a^{-2} - a^2) + a^{-1} + a(-a^{-2} - a^2) + a^{-1} + a^{-1} + a^{-3}(-a^{-2} + a^2)$$

$$= a^{-1} + a^3 + a^3 + a^7 - a^{-1} - a^3 - a^{-1} - a^3 + a^{-1} - a^{-1} - a^3 + a^{-1} + a^{-1} - a^{-5} - a^{-1}$$

$$= a^7 - a^3 - a^{-5}$$

sonucu elde edilir. Yani

$$P_{K_{2,3}}(a) = a^7 - a^3 - a^{-5}$$

dır.

2.9. Graflar

Bir graf noktalardan ve doğru parçalarından oluşan bir şekil olarak düşünülebilir (topolojik olarak buna 1-kompleks denir). Genelde bir graf soyut bir ifadenin matematiksel düşüncesidir. Eğer S^2 üzerine bir G uzay grafi yerleştirilebilirse o zaman G 'ye bir düzlemsel graf denir. Birçok kişi için graf, (x, y) değer çiftleri ile belirlenebilen noktaların bir kartezyen koordinat sisteminde işaretlenmesi ile ortaya çıkan şekildir. Aslında graf teorisi bunun çok ötesinde birçok teorem ve uygulama olanakları ile donatılmış bir teoridir.

Graflarla ilgili ilk çalışmaların L. Euler tarafından topoloji teorisi ile ilgili olarak yapıldığı söylenebilir.

Bir grafın, basit olarak “çeşitli nokta çiftlerinin çizgilerle birleştirilmiş hali” olduğu söylenebilir. Ayrıca graf teorisi ile ilgili sistemlerin genel bir imajını oluşturabilmek için graf kelimesi yerine belki “şebeke” kelimesini kullanmak da mümkün olabilir.

Tanım 2.9.1: V ile gösterilen, köşe (veya tepe) noktaları kümesi adı verilen elemanlar kümesi ile $V \times V$ kartezyen çarpımı kümesindeki sıralı ikililer ile tanımlanmış ayrıtların oluşturduğu E kümesinin birlikte oluşturduğu şemaya (diyagrama) graf denir. Graf $G = (V, E)$ ile gösterilir (Bollobas 1998).

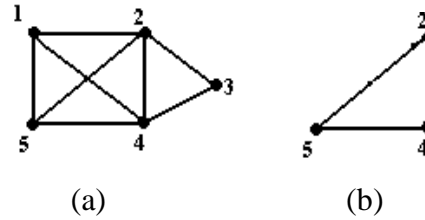
Bir grafda E kümesinin herhangi bir $e \in E$ elemanına, grafın bir ayrıtı denir ve ayrıt $e = (u, v)$ ile tanımlanmışsa $(u, v \in V)$ u ve v tepelerine de bitişik köşeler denir. Eğer e_1 ve e_2 G 'de ortak bir köşe noktasıyla bağlı ayrıtlar ise bu ayrıtlara da bitişik ayrıtlar denir.

Tanım 2.9.2: G grafında v köşesine bağlı ayrıtların sayısı, v köşesinin derecesi olarak isimlendirilir ve $der(v)$ ile gösterilir. G grafında herhangi bir tepenin derecesi sıfır ise

bu tepeye ayırık (izole) tepe, herhangi bir tepenin derecesi 1 ise bu tepeye de uç tepe denir (Gross and Yellen 2005).

Tanım 2.9.3: G ve H birer graf olmak üzere $V(H) \subseteq V(G)$ ve $E(H) \subseteq E(G)$ ise H grafına G 'nin bir alt grafıdır veya G, H grafının süper grafıdır denir. G grafından köşe veya ayırık silinerek G 'nin bir alt grafı elde edilebilir (Gross and Yellen 2005).

Örneğin; Şekil 2.40.(a)'daki G grafından $\{1,3\}$ köşeleri çıkarılarak G 'nin Şekil 2.40.(b)'deki alt grafı elde edilir.



Şekil 2.40. Bir alt graf elde edilmesi işlemi

Tanım 2.9.4: Herhangi bir G grafında istenilen bir köşeden bir başka köşeye gidilebiliyorsa (bir tepeden diğer tepeye daima ulaşılabiliriyorsa) bu grafa birleştirilmiş (bağlantılı) graf denir (Gross and Yellen 2005).

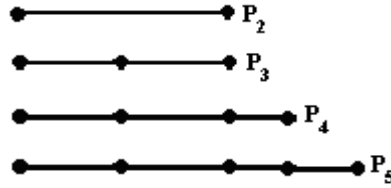
Tanım 2.9.5: G sonlu bir graf ve $V(G)$ ile $E(G)$ sırasıyla G grafının köşelerinin ve kenarlarının kümeleri olsun. Her bir kenarı + veya - ile işaretlenmiş bir G grafına işaretlendirilmiş graf denir (Gross and Yellen 2005).

Tanım 2.9.6: G bir graf olsun. Eğer $G = H \cup K$ ve $H \cap K = \{v_0\}$ olacak şekilde H ve K alt grafları varsa G 'ye ayrılabilir denir. Burada H ve K 'nin her ikisinin de en az bir kenarı vardır ve v_0 bir köşedir. Aksi halde G ayrılamazdır ve v_0 köşesine bir ayırma köşesi denir. Bir blok, G 'nin bir maksimum ayrılamayan bağlantılı alt grafıdır. Bir bağlantılı graf sonlu çoklukta bloklara ayrılabilir (Gross and Yellen 2005).

Tanım 2.9.7: G , 1-kompleks olarak $S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ içine yerleştirilebilir ise G grafına düzlemseldir denir. G , \mathbb{R}^2 'ye yerleştirilmiş bir graf ise o zaman G bir düzlemsel graftır. Eğer G bağlantılı bir düzlemsel graf ise G^* dual grafi şu şekilde tanımlanır: $S^2 - G$ içindeki bölgelerin $F(G)$ kümesi, $V(G^*)$ ile birebir karşılık gelir. $E(G^*)$ ile $E(G)$ birebir karşılık gelir öyle ki; $e^* \in E(G^*)$ ve onun eşi, köşe noktası olmayan ortak bir noktaya sahiptir. e^* in işareti onun eşinin zıttı gibi tanımlanabilir. Eğer G bağlantısız bir düzlemsel graf ise o zaman G^* , G 'nin bağlantılı bileşenlerinin duali olan grafların ayrık bir birleşimidir (Gross and Yellen 2005).

2.10. Graf Çeşitleri

Tanım 2.10.1 (Yol graf): Köşelerinden iki tanesinin derecesi 1, diğer tüm köşelerinin dereceleri ise 2 olan graflara yol graf denir. n köşeli bir yol graf P_n ile gösterilir. n köşeli bir yol grafın ayrıt sayısı ise $n - 1$ dir.



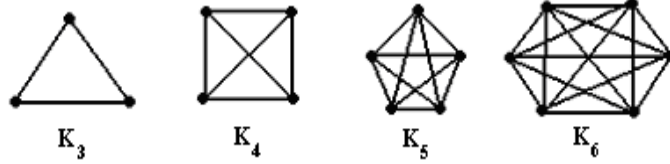
Şekil 2.41. Yol graf örnekleri

Tanım 2.10.2 (Çevre graf): Her köşesinin derecesi 2 olan grafa çevre graf denir. n köşeli bir çevre graf C_n ile gösterilir. n köşeli bir çevre grafın ayrıt sayısı n tanedir.



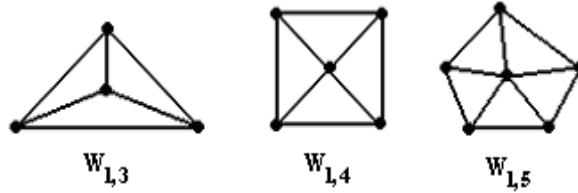
Şekil 2.42. Çevre graf örnekleri

Tanım 2.10.3 (Tam graf): Bir G grafindaki herhangi iki köşe arasında mutlaka bir ayrıt var ise bu grafa tam graf denir. n köşeli bir tam graf K_n ile gösterilir. n köşeli bir grafin ayrıt sayısı $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ dir. Tam graftaki her bir köşenin derecesi ise $(n - 1)$ dir.



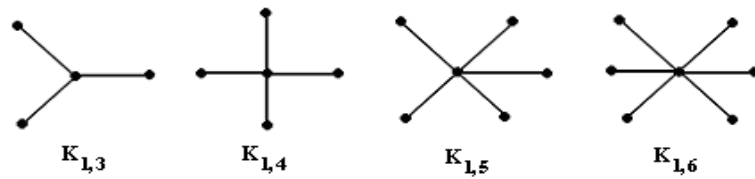
Şekil 2.43. Tam graf örnekleri

Tanım 2.10.4 (Tekerlek graf): n köşeli bir çevre grafin her bir köşesine, bir tek köşeden (bu köşe çevre grafa ait değildir) birer ayrıt eklenmesiyle elde edilen grafa tekerlek graf denir. n köşeli bir tekerlek graf $W_{1,n}$ ile gösterilir. Tekerlek grafi, $K_1 + C_n$ şeklinde de ifade etmek mümkündür.



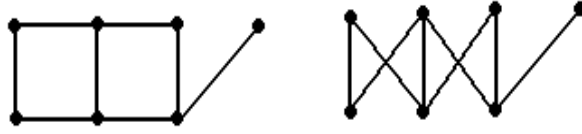
Şekil 2.44. Tekerlek graf örnekleri

Tanım 2.10.5 (Yıldız graf): $(n + 1)$ köşeli bir G grafinda bir köşe n dereceli diğer tüm köşeler 1 dereceli ise bu grafa yıldız graf denir ve $K_{1,n}$ ile gösterilir.



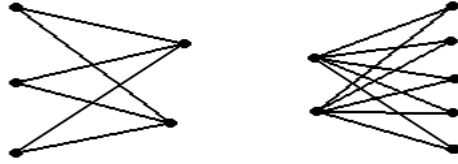
Şekil 2.45. Yıldız graf örnekleri

Tanım 2.10.6 (İki kümeli (bipartite) graflar): Bir G grafinin köşeler kümesi, V_1 ve V_2 gibi iki alt kümeye ayrılınsın. V_1 kümesindeki köşe çiftleri birbirleriyle, V_2 kümesindeki köşe çiftleri de birbirleriyle bitişik değilse ancak V_1 ve V_2 kümeleri arasında bazı ayrıntılar varsa böyle graflara iki kümeli (bipartite) graflar denir. $K_{m,n}$ ile gösterilir. (m ile V_1 kümesinin eleman sayısı, n ile V_2 kümesinin eleman sayısı temsil edilir.)



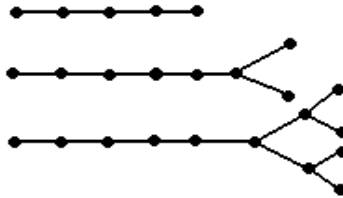
Şekil 2.46. İki kümeli graf örnekleri

Tanım 2.10.7 (İki kümeli tam graflar): Bir iki kümeli (bipartite) grafta V_1 kümesinin her bir köşesi, V_2 kümesinin her bir köşesiyle bitişikse böyle graflara iki kümeli tam graflar denir.



Şekil 2.47. İki kümeli tam graf örnekleri

Tanım 2.10.8 (Ağaç graflar): Çevre içermeyen graflara ağaç graf denir. Örneğin her yol graf, yıldız graf ve iki kümeli graf birer ağaç graftır.



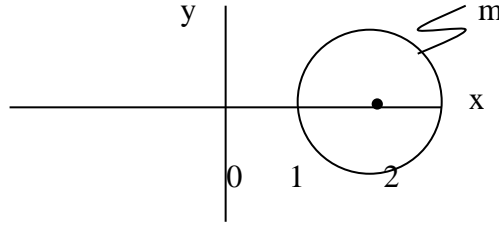
Şekil 2.48. Ağaç graf örnekleri

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Tor Düğümleri

Tanım 3.1.1: Bir düğüm (veya halka), eğer bir aşikar tor üzerinde arakesit noktaları olmaksızın çizilebilen bir düğüme denkse o düğüme (veya halkaya) tor düğümü denir (Murasugi 1996).

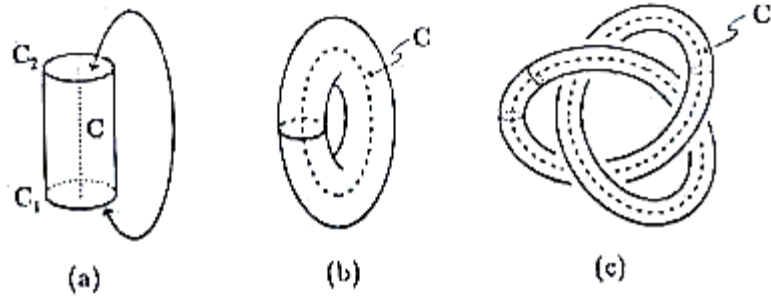
Tanım 3.1.2: Bir T aşikar toru, (x, y) -düzleminde $m: (x-2)^2 + y^2 = 1$ çemberinin y -ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilir. Bu çember $(2,0)$ merkezlidir ve 1 br yarıçaplıdır (Şekil 3.1).



Şekil 3.1. \mathbb{R}^2 de $(2,0)$ merkezli ve 1 br yarıçaplı çember (Murasugi 1996)

Aşikar toru elde etmenin bir diğer yolu, tabanı C_1 birim çemberi ve üstü C_2 birim çemberi olan bir silindir almaktır (Şekil 3.2.(a)). Daha sonra \mathbb{R}^3 de C_1 ve C_2 'yi birlikte yapıştırıp silindirin merkez ekseninde bir C aşikar düğümü elde etmektir (Şekil 3.2.(b)) (Eğer C_1 ve C_2 Şekil 3.2.(c)'deki gibi yapıştırılırsa elde edilen C 'nin bir aşikar düğüme denk olmadığına ve böylece torun aşikar tor olamayacağına dikkat edilmelidir) (Murasugi 1996).

Bir tor düğümü aşağıdaki gibi de ifade edilebilir (Murasugi 1996):

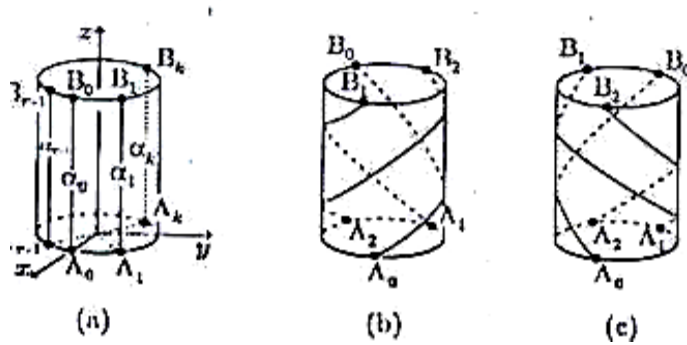


Şekil 3.2. Aşık tor ve aşık olmayan tor (Murasugi 1996)

Yukarıdaki silindir daha açıkça tabanı xy -düzleminde bir birim çember ve yüksekliği 1 birim uzunlukta olarak ifade edilebilir. Tabandaki C_1 ve üstteki C_2 çemberlerine sırasıyla A_0, A_1, \dots, A_{r-1} ve B_0, B_1, \dots, B_{r-1} noktaları atansın. Yardımcı koordinatlar aşağıdaki gibidir. Şekil 3.3.(a)'ya da bakınız.

$$A_0 = (1, 0, 0), A_1 = \left(\cos \frac{2\pi}{r}, \sin \frac{2\pi}{r}, 0 \right), \dots, A_{r-1} = \left(\cos \frac{2(r-1)\pi}{r}, \sin \frac{2(r-1)\pi}{r}, 0 \right)$$

$$B_0 = (1, 0, 1), B_1 = \left(\cos \frac{2\pi}{r}, \sin \frac{2\pi}{r}, 1 \right), \dots, B_{r-1} = \left(\cos \frac{2(r-1)\pi}{r}, \sin \frac{2(r-1)\pi}{r}, 1 \right)$$

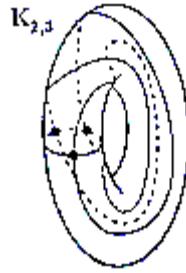


Şekil 3.3. Tor düğümünün elde edilmesi (Murasugi 1996)

Silindir üzerinde α_k doğrularıyla, A_k ve B_k ($k=0,1,\dots,r-1$) noktaları birbirlerine bağlansınlar. Daha sonra tabandaki C_1 sabit tutularak silindir, $\frac{2\pi q}{r}$ radyan açıyla z -ekseninin üst kısmındaki bir dönme ile bükülsün. (Bu durumda q pozitif ya da negatif

bir tamsayıdır.) Şekil 3.3.(b)'de $q=2$ ve $r=3$ durumu gösterilmektedir. Buna karşılık Şekil 3.3.(c)'de $q=-2$ ve $r=3$ durumu gösterilmiştir.

Sonuç olarak C_1 'in $(x, y, 0)$ noktası ile C_2 'nin $(x, y, 1)$ noktası özdeşlendi (basit bir yapıştırma ile). (Önceki gibi C merkezi, aşikar düğüm olur.) Bu yapıştırma, yüzeyinde bir düğüme (veya halkaya) dönüşen $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}$ r -daire kesmeleri ile bir aşikar T toru oluşturur. Yüzeyde elde edilen bu düğüme (veya halkaya) (q, r) -tor düğümü (veya halkası) denir ve $K_{q,r}$ şeklinde gösterilir (Şekil 3.4) (Murasugi 1996).



Şekil 3.4. $K_{2,3}$ tor düğümünün orijinal şekli (Murasugi 1996)

T aşikar torunu biçimlendirmek için orijinal olarak kullanılan m çemberi bir kez daha göz önüne alınsın. Ayrıca K 'nın T üzerinde bulunan diskin sınırı olduğu kabul edilsin (Şekil 3.5).



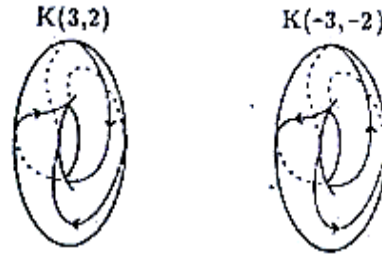
Şekil 3.5. $K_{1,0}$ ve $K_{0,0}$ tor düğümleri (Murasugi 1996)

Bu m ve K aşikar düğümleri veya T üzerindeki bu düğümlerin birkaçından ibaret olan bir aşikar halka yukarıda ifade edildiği gibi bir tor düğümü değildir. Aslında $r=0$ durumuna karşılık gelen düğüm (veya halka) tipleri göz önüne alınırsa, m bir $(1,0)$ -tor

düğümü olur. Yani $K_{1,0}$ oluşur. Diğer $K_{0,0}$ düğümüne de bir $(0,0)$ -tor düğümü denir (Murasugi 1996).

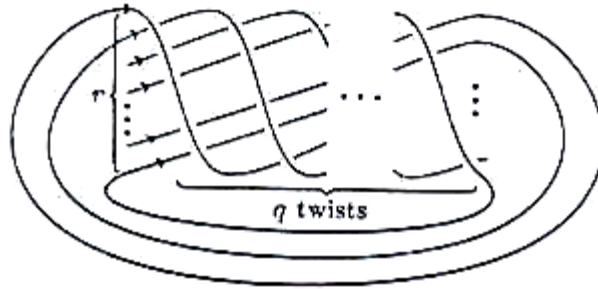
Yukarıdaki tanımlamalarda yönlendirme hariç tutulmuştur. Bununla birlikte her bir α_i doğru parçasını A_i 'den B_i 'ye doğru yönlendirmek suretiyle bir $K_{q,r}$ tor düğümüne yönlendirme verilebilir. Bu yönlendirilmiş tor düğümü $K(q,r)$ ile gösterilir. Ayrıca eğer her bir α_i 'nin yönlendirmesi ters çevrilirse elde edilen yönlendirilmiş tor düğümü $K(-q,-r)$ ile gösterilir (Murasugi 1996).

Örnek 3.1: Şekil 3.6'da verilen $K(3,2)$ ve $K(-3,-2)$ tor düğümleri sağ-el yonca yaprağı (trefoil) düğümüne denktir.



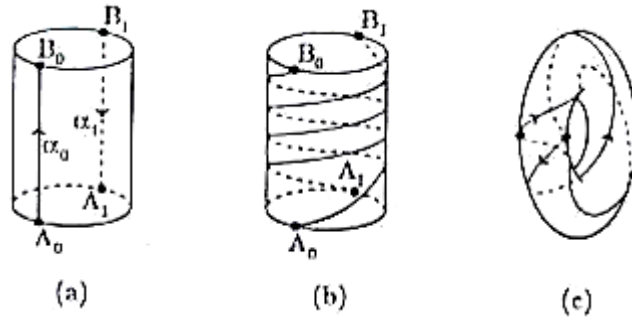
Şekil 3.6. $K(3,2)$ ve $K(-3,-2)$ tor düğümleri (Murasugi 1996)

$K(q,r)$, $q,r > 0$ düğümünün Şekil 3.7'de gösterildiği gibi bir regüler diyagrama sahip olduğu bilinmektedir (Murasugi 1996).



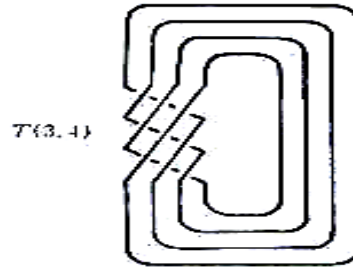
Şekil 3.7. $K(q,r)$ tor düğümünün regüler diyagramı (Murasugi 1996)

Bir $K_{q,r}$ tor düğümünden (yönlendirilmiş) ya $K(q,r)$ ya da $K(-q,-r)$ tor düğümlerinin elde edilebileceği bilinmektedir. Bununla birlikte $K_{q,r}$ tor halkasından, bunlardan biri olan yönlendirilmiş tor halkasını elde etmek de mümkündür. Örneğin; $q=4$ ve $r=2$, ve α_0 'ın yukarıya doğru bir yönlendirmeye, buna karşılık α_1 'in de aşağıya doğru bir yönlendirmeye sahip olduğu kabul edilsin (Şekil 3.8.(a)) (Murasugi 1996).



Şekil 3.8. Tor halkasının elde edilmesi

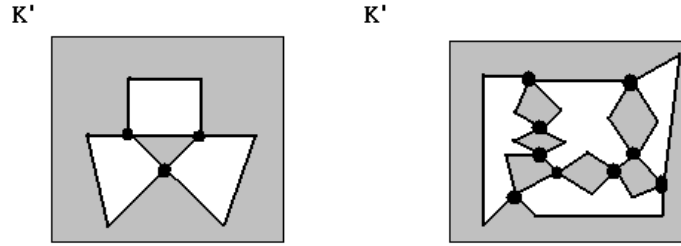
Böylece yukarıda tanımlandığı gibi uç noktalar özdeşlenerek yönlendirilmiş bir tor halkası elde edilir (Şekil 3.8.(b) ve (c)). Bununla beraber bu tor halkası ne $K(4,2)$ ne de $K(-4,-2)$ dir. Üstelik $K(q,r)$ tipli yönlendirilmiş bir tor halkası oluşturacak bir q ve r mevcut değildir. Böyle bir karışıklıktan kaçınmak için bundan sonra yukarıda tanımlandığı gibi yalnız bir yönlendirme verilmiş $K(q,r)$ yönlendirilmiş tor düğümleri veya halkaları göz önüne alınacaktır (Murasugi 1996). Tor halkasının bir örneği aşağıdadır:



Şekil 3.9. Bir tor halkası örneği (Kawauchi 1996)

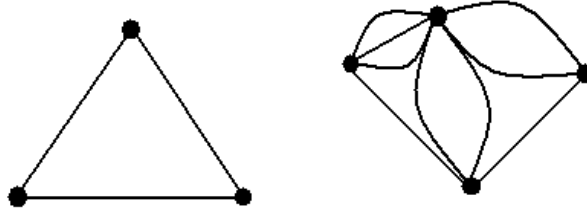
3.2. Dügümler ve Graflar

Tanım 3.2.1: D , bir K düğümü için bir regüler diyagram ve K' , K düğümü için bir regüler izdüşüm olsun. K' düzlemsel bir graf olarak düşünülebilir. Grafın köşe noktaları, K nın geçitlerine karşılık gelir (Şekil 3.10) (Leung 2008).



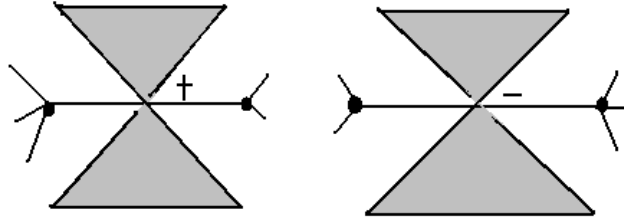
Şekil 3.10. Dama deseni biçimde renklendirilmiş graflar (Leung 2008)

Düzlem üzerindeki bu graflar daha etraflıca incelenirse K' izdüşümünün düzlemi birkaç bölgeye ayırdığı görülür. En dışta bulunan bölgeden başlanarak bölgeler, ya siyah ya da beyaz ile renklendirilir. En dıştaki (sınırsız) bölge siyah ile renklendirilsin. Aslında komşu bölgeler asla aynı renk olmayacak şekilde yani bir kenarın her iki yanındaki renkler uyuşmayacak şekilde bölgeler renklendirilir. Sonra her bir beyaz bölge içinde bir nokta seçilir. Bu noktalara beyaz bölgelerin merkezleri denir. Eğer iki beyaz bölge ortak geçite sahipseler o zaman bu beyaz bölgelerin iki merkezi kenarlar vasıtasıyla birleştirilir. Her bir kenar sırasıyla bir ortak geçite karşılık gelir. Böylelikle K' den G düzlemsel grafi elde edilir (Leung 2008). Şekil 3.10'daki iki K' izdüşümüne karşılık gelen iki düzlemsel graf oluşur (Şekil 3.11). Wikipedia kaynaklarına göre (Anonymous 2012) Jordan eğri teoremi bu yöntemin iyi tanımlı olduğunu belirtir. Oluşan şekile, 4-birleşme değerli orijinal grafın medial grafi denir.



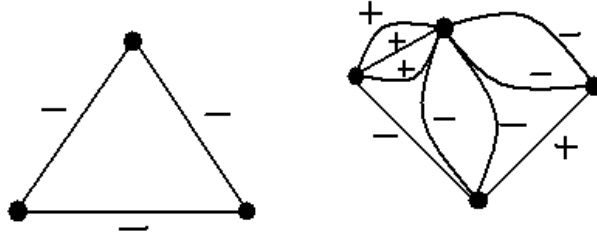
Şekil 3.11. İki düzlem graf örneği (Leung 2008)

Bununla birlikte uygun bir düzlemsel graf için düğümün bazı karakteristiklerinin somutlaştırılmasında izdüşümden ziyade regüler diyagramın kullanılmasına ihtiyaç duyulur. Böylece bir geçitte alt geçitler ve üst geçitler düşünülür. Ya bir alt geçit ya da bir üst geçit için her bir kenar üzerinde + ya da – işareti belirlemeye çalışılır. Bu işlem aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi yapılır (Şekil 3.12) (Leung 2008):



Şekil 3.12. Bir düğümün regüler izdüşümüne karşılık gelen düzlemsel grafın kenarlarının ya bir alt geçit ya da bir üst geçit için işaretlenmesi kuralı (Leung 2008)

Dikkat edilirse her bir resim içindeki yatay çizgi, geçitin içinden geçen kenardır (Şekil 3.11'deki kenara karşılık gelen kenardır). Graf içinde + ya da – belirlendikten sonra Şekil 3.11'deki iki düzlemsel graf için işaretlendirilmiş düzlemsel graflar elde edilir (Şekil 3.13):

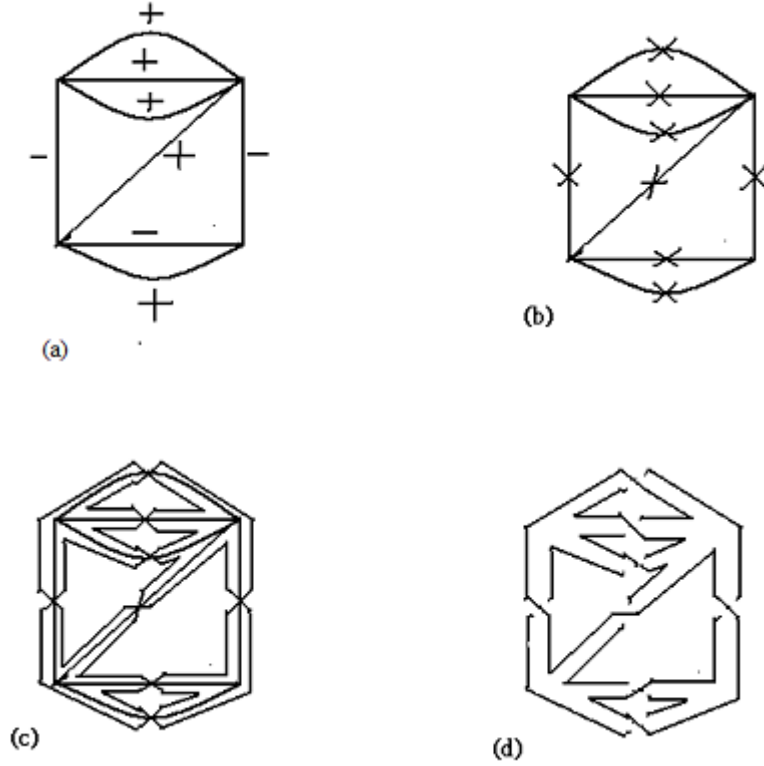


Şekil 3.13. İşaretlendirilmiş düzlemsel graf örnekleri (Leung 2008)

Yukarıdaki işlemin tersine işaretlendirilmiş rastgele bir düzlemsel grafdan bir düğüm diyagramı kurulabilir (Leung 2008):

İstenilen düğümü oluşturmak için ilk olarak G 'nin her bir kenarının merkezinde küçük bir “ \times ” işareti konulur (Şekil 3.14.(b)). Bu “ \times ” işaretlerinin birinin uç noktalarından bir komşu “ \times ” işaretinin uç noktalarına ulaşmaya kadar G 'nin kenarları boyunca takip eden dört çizgi çizilir. Her bir “ \times ” işaretinde bu işlem gerçekleştirilirse görülmeye başlanılacak şey, bir düğümün bir izdüşümüdür fakat geçitlerin karakteri hakkında bilgi vermez (Şekil 3.14.(c)). Şimdi bu düzlemsel bölgeler (yeni şekillendirilmiş projektif diyagram vasıtasıyla ilgili bölgenin bölümlerinden elde edilen), daha önce irdelendiği gibi hangi rengin uygulanacağına karar verilen aynı metod kullanılarak ya siyah ya da beyaz ile renklendirilir. Böylelikle orijinal grafın işaretlerinden uygun geçiş noktası bilgisine ulaşılabilir. Kolayca görülebileceği gibi siyah ve beyaz şeklindeki renklendirme, geçit bilgisi eklendiğinde ortadan kalkar ve böylece istenilen düğüm diyagramı elde edilir (Şekil 3.14.(d)) (Leung 2008).

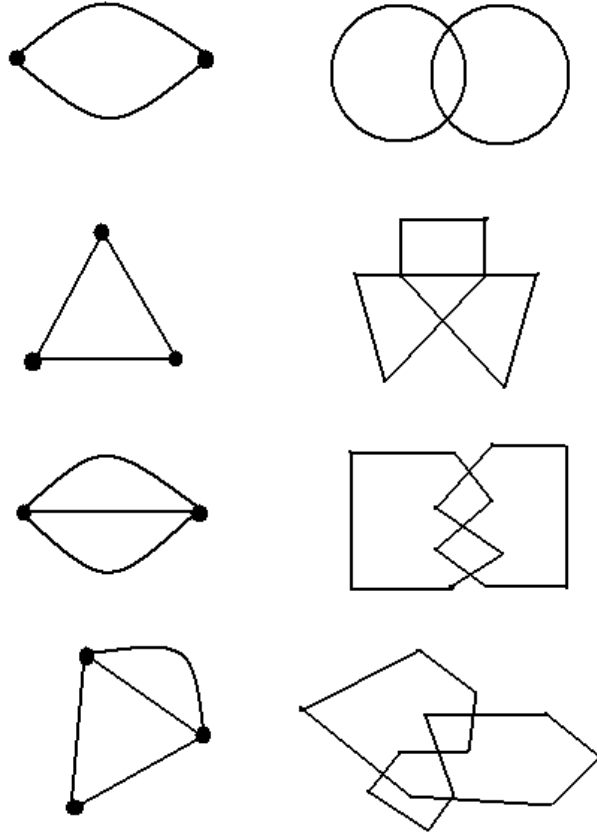
O halde her bir işaretlendirilmiş düzlemsel graf için karşılık gelen bir regüler düğüm diyagramı vardır (Şekil 3.14.(a) ile Şekil 3.14.(d) arasındaki ilişkiye bakınız). Bununla birlikte iki farklı düzlemsel grafın, yukarıdaki işlem yardımıyla elde edilen iki denk olmayan düğümüne neden olduğu mutlaka doğru değildir.



Şekil 3.14. İşaretilendirilmiş bir düzlemsel grafa karşılık gelen düğümün regüler diyagramının elde edilmesi (Leung 2008)

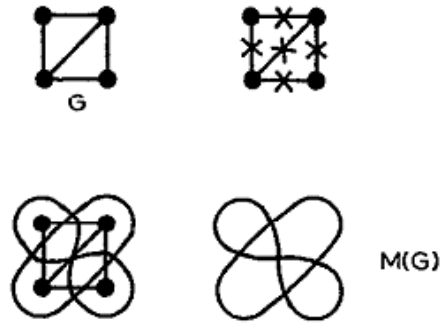
Aslında yukarıdaki yaklaşım, oldukça küçük bir sayıda kenara sahip olan ve daha sonra kenar sayısı artan graflarla başlayan tüm düğümlerin regüler diyagramlarının bir tablosunu oluşturmak için kullanılan metotlardan birisidir. Bu yolla Tait ve Little, 11 geçite kadar sahip olan düğümlerin regüler diyagramlarının hemen hemen bir tam tablosunu oluşturdular. Son yıllarda bu tablo yeniden düzenlendi (Leung 2008).

Şekil 3.15’de 4-kenara kadar sahip olan bağlantılı düzlemsel graflar ve onlara karşılık gelen düğümler (ve halkalar) gösterilmiştir. Kenarların sayısı, düğümün regüler diyagramının geçitlerinin sayısına eşittir. Netlik için kenarlara işaretler verilmemiştir. Çünkü onlar düğümlerin regüler diyagramları değildir, fakat daha ziyade onların izdüşümleridir (Leung 2008).



Şekil 3.15. Bazı bağlantılı düzlemsel graflar ile onlara karşılık gelen düğümlerin (halkaların) regüler izdüşüm örnekleri (Leung 2008)

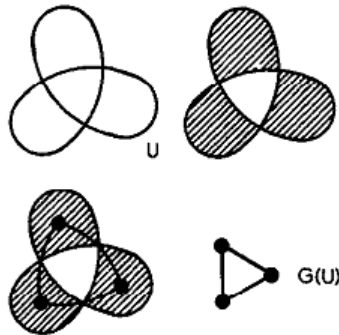
Tanım 3.2.2 (Medial yapı): G düzlemsel graf (düzlem içinde bu grafın bir gömülmesi ile birlikte olan bir G grafi manasında) olsun. Medial graf $M(G)$, Şekil 3.16’da gösterildiği gibi şu şekilde elde edilir (Kauffman 1989): G ’nin her bir kenarı “ \times ” çarpım sembolüyle işaretlenir. Bu semboller, herhangi birinden başlanılmak suretiyle G ’nin kenarına paralel olacak, G ’nin karşılaşılan köşe noktası atlanılacak ve bir sonraki mevcut sembolle birleştirilecek şekilde birbirlerine bağlanırlar. Her bir sembol, medial grafdaki bir köşe noktasını belirtir.



Şekil 3.16. Bir grafa karşılık gelen medial grafın elde edilmesi (Kauffman 1989)

Elde edilen medial graf $M(G)$, 4-birleşme değerlidir. Yani bir bakıma o, her bir köşe noktasında yerel biçimde sunulan dört kenara sahiptir. $M(G)$ 'nin kenarlarının bazıları ilmekler olabilirler. Düzlemde gömülen bu tip bir grafa bir evren denir (Kauffman 1989).

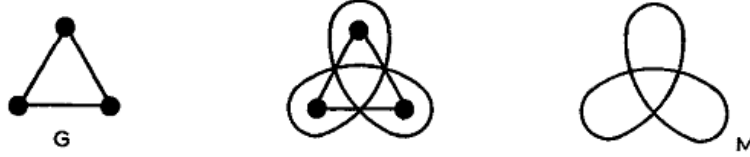
Medial yapının bir tersi vardır (Kauffman 1989): Düzlemdeki her bir bağlantılı evren U 'ya $M(G(U)) = U$ olacak şekilde bir düzlemsel graf $G(U)$ birleştirilebilir. Ters işlem Şekil 3.17'de gösterildi. İlk olarak evren, sınırsız bölge gölgesiz olacak şekilde dama desenli biçimde gölgelendirilir ve bir kenarı paylaşan iki bölge zıt gölgelere sahiptirler. O zaman bir $G(U)$ grafi, U 'nun gölgeli bölgeleri ile birebir karşılık gelecek şekilde köşe noktaları ile biçimlendirilir. Her ne zaman karşılık gelen bölgeler bir sembolü paylaşırsa o zaman $G(U)$ 'daki iki köşe noktası bir kenar ile birleştirilirler.



Şekil 3.17. Medial yapısı verilen bir grafın elde edilmesi (Kauffman 1989)

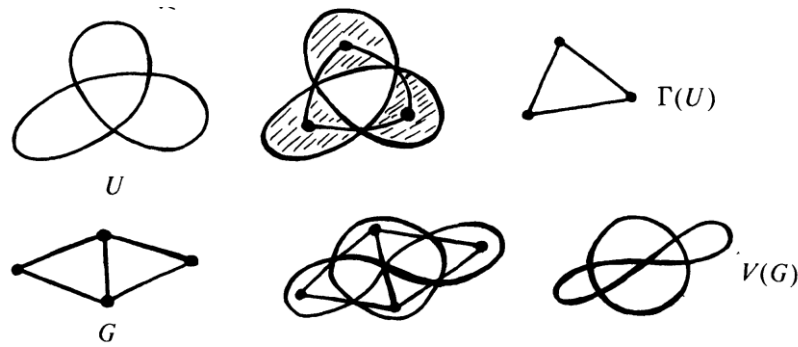
Önerme 3.1: Bağlantılı düzlemsel grafların kümesi, bağlantılı evrenlerin kümesi ile birebir karşılık gelir (Kauffman 1989).

Örnek 3.2: G üçgen grafinin M medialı trefoil evrendir (Kauffman 1989).



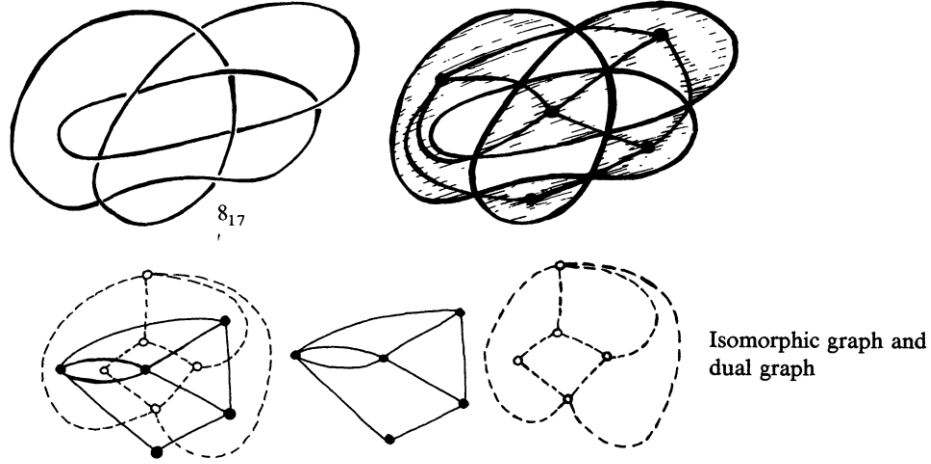
Teorem 3.1: Düğüm evrenleri düzlemsel graflara birebir karşılık gelir (Kauffman 1988).

İspat: Sınırlanmamış bölge taranmayacak şekilde her bir evren taransın. U evreninden $\Gamma(U)$ grafi aşağıdaki şekilde elde edilir: $\Gamma(U)$ 'nin köşeleri U 'nun taranmış bölgelerine karşılık gelirse taranmış bölgeyi taranmamış bölgeye bağlayan, geçitlerden geçen ve köşeleri birbirine bağlayan eğriler $\Gamma(U)$ 'nin kenarlarını gösterecektir. Bu şekilde elde edilen graf $\Gamma(U)$ ile gösterilsin. Bir G grafi verildiğinde G 'nin her bir kenarı üzerine $\bullet \text{---} \times \text{---} \bullet$ şeklinde bir kavşak işareti yerleştirilirse ve Şekil 3.18'de gösterildiği gibi her bir köşeye bu kavşaklar bağlanırsa G grafi bir $V(G)$ evrenine birleştirilmiş olur. $\Gamma(V(G)) = G$ ve $V(\Gamma(U)) = U$ olduğunu doğrulamak kolaydır. Dolayısıyla bu ispatı tamamlar (Kauffman 1988).



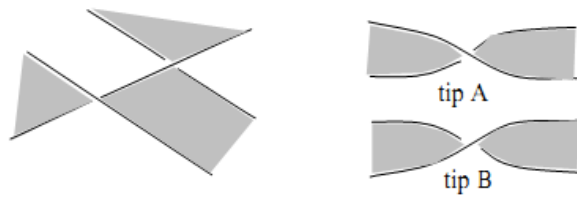
Şekil 3.18. Düğüm evrenleri ile düzlemsel grafların birebir karşılık geldiklerine ilişkin bir örnek (Kauffman 1988)

Taranmamış bölgelerden oluşturulan bir graf, taranmış bölgelerden oluşturulan bir grafa izomorftur (Kauffman 1988). 8_{17} düğümünün bir örneği için Şekil 3.19'a bakınız.



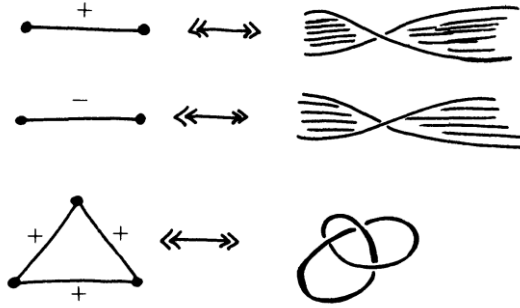
Şekil 3.19. 8_{17} düğümünün izomorfik ve dual graflarının elde edilmesi (Kauffman 1988)

Şekil 3.20'de olduğu gibi bir alterne halkanın taranmış diyagramında her bir geçitte taranan bölgelerin hepsi aynı tiptedir (A ve B burada parantezi tanımlamak için aynı ayırımdır) (Kauffman 1988).



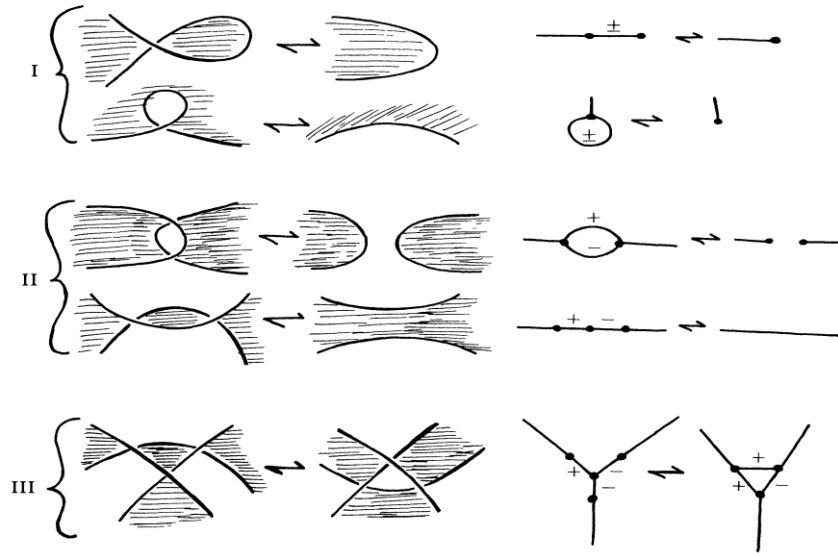
Şekil 3.20. Bir alterne halkanın taranmış diyagramında her bir geçitin durumu (Kauffman 1988)

Düğümün ve halkaların diyagramlarının işaretlendirilmiş düzlemsel graflara birebir karşılık geldiğine dikkat edilirse burada (+) bir A kanalına (-) de bir B kanalına karşılık gelecek şekilde işaretler grafın kenarları üzerine yerleştirilir (Şekil 3.21) (Kauffman 1988).



Şekil 3.21. İşaretilendirilmiş grafların nasıl elde edilebileceğinin kuralı (Kauffman 1988)

Yukarıda tanımlanan işlemi test etmek için ilk önce Reidemeister hareketlerinin bir graf versiyonu incelenebilir (Şekil 3.22) (Kauffman 1988).

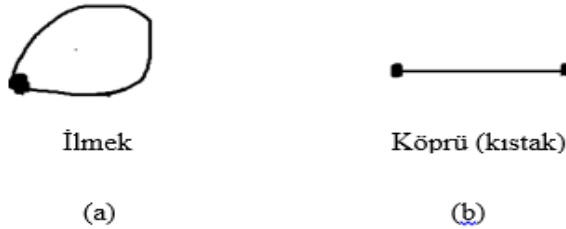


Şekil 3.22. Reidemeister hareketlerinin bir graf versiyonu (Kauffman 1988)

3.3. Tutte Polinomu

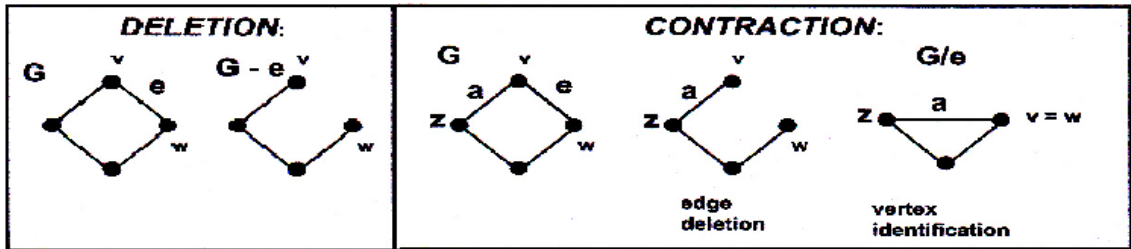
Bir graf, (V, E) çifti ile tanımlanır. Burada V ile köşe noktalarının kümesi ve $E \subseteq V \times V$ ile de kenarlar kümesi gösterilir. Sadece yönlendirilmemiş graflar düşünülürse $v, w \in V$ ve $(v, w) \in E$ için (v, w) ile (w, v) aynıdır. Bir ilmek, aynı köşe noktaları arasında

oluşan kenardır, yani $(v, v) \in E$ dir. Bir köprü, iki ya da daha fazla köşe noktalarıyla taşınması ayrılmış (yani onlar arasında artık bir yol bulunmayan) bir kenardır.



Şekil 3.23. İlmek ve köprü (kıstak) şekilleri

G grafının verilen bir e kenarı için; G grafından e kenarının silinmesiyle (deletion) elde edilen graf $G - e$ ile gösterilir, e kenarının bir köşe noktasına büzülmesiyle (contraction) elde edilen graf G/e ile gösterilir (Şekil 3.24) (Haggard *et al.* 2008).



Şekil 3.24. Silme (deletion) ve büzülme (contraction) işlemleri (Haggard *et al.* 2008)

Tanım 3.3.1: G , köşe noktalarının kümesi $V(G)$ ve kenar noktalarının kümesi $E(G)$ olan bir graf olsun. G grafının bir e kenarı; eğer kendi bir köşe noktasına birleşiyor ise bir ilmek (loop) ve e 'nin G 'den silinmesi bu grafın bileşenlerinin sayısını artırıyorsa bir kıstak (isthmus) olarak adlandırılır. G grafının $T(G; x, y)$ şeklinde gösterilen Tutte polinomu aşağıdaki aksiyomlar yardımıyla tek bir şekilde tanımlanır (Jablan *et al.* 2010):

i) Eğer e kenarı bir ilmek ya da kıstak değilse

$$T(G; x, y) = T(G - e; x, y) + T(G/e; x, y) \text{ dir.}$$

- ii) Eğer e kenarı bir kıstak ise $T(G; x, y) = xT(G/e; x, y)$ dir.
- iii) Eğer e kenarı bir ilmek ise $T(G; x, y) = yT(G - e; x, y)$ dir.
- iv) Eğer G grafının kenarları yoksa $T(G; x, y) = 1$ dir.

$T(G; x, y)$ 'nin x ve y 'ye bağlı iki değişkenli bir polinom olduğu açıktır.

Tanım 3.3.2: Bir $G = (V, E)$ grafının Tutte polinomu, aşağıda tanımlandığı gibi bir iki değişkenli polinomdur (Haggard *et al.* 2008):

$$T(G) = \begin{cases} 1, & E(G) = \emptyset \\ xT(G/e), & e \in E \text{ ve } e \text{ bir köprü ise} \\ yT(G - e), & e \in E \text{ ve } e \text{ bir ilmek ise} \\ T(G - e) + T(G/e), & e \in E \text{ ve } e \text{ bir köprü ya da ilmek değilse} \end{cases}$$

3.4. Tutte Polinomunun Kullanım Alanları

(x, y) -düzleminin çeşitli noktalarında ve çizgilerinde Tutte polinomu, matematiğin ve fiziğin farklı alanlarında onların kendi doğrulukları içinde çalışılan nicelikleri değerlendirir. Tutte polinomunun çekiciliği bu nicelikleri analiz etmek için sağladığı destekten gelmektedir (Bollobas 1998).

Tutte polinomu bir graf ile, bir matris ile ya da daha ziyade bir matroid ile birleştirilebilen iki değişkenli bir polinomdur. Onun birçok bilim alanında çok ilginç uygulamaları vardır. Örneğin; kombinatorik olasılık, istatistiksel mekanik, bilgisayar bilimi ve biyoloji gibi. Bu polinom W. T. Tutte tarafından tanıtıldı. Tutte polinomunun birkaç eşdeğer tanımı vardır. Whitney'in sıralı polinomu, Tutte'nin kendi dikromatik polinomu ve basit fonksiyonlar altında Fortuin-Kasteleyn'in rastgele küme modeli gibi. Bu aslında verilen bir büyüklüğün ve bağlantılı bileşenlerinin kenar kümelerinin sayısı için matroidlere en yakın genellemeler üreten bir fonksiyondur. Ayrıca Tutte polinomu, silme-büzülme indirgemesi ile tanımlanabilen en genel graf sabitidir (Bollobas 1998).

Verilen sonlu bir G grafının Tutte polinomu $T(G; x, y)$, grafın silme-büzülme indirgenmesiyle ilgili bir esas özelliği sağlar. Bundan dolayı bir silme-büzülme indirgenmesine bağlı herhangi bir nicel graf sabiti, sonunda Tutte polinomunun bir değeri olur. Bu polinom oldukça ilginçtir. Çünkü grafın birçok kombinatorik, dizin haline getirilmiş ve cebirsel özellikleri-köprü oluşturmuş ağaçların sayısı, köprü oluşturmuş bağlantılı alt grafların sayısı, köprü oluşturmuş ormanların sayısı ve grafın devirli olmayan konumlarının sayısı gibi-Tutte polinomunun özel değerleri olarak düşünülüp araştırılabilirler. Ayrıca Tutte polinomundan oluşan bir başka şey de reliability ve kromatik polinomlarının yeniden elde edilmesidir. Tutte polinomu Potts modeli, persolasyon, Abelyan Sandpile modeli gibi istatistiksel mekanik modelleriyle de çok ilginç bağlantılara sahiptir (Tullio *et al.* 2010).

Bilindiği gibi köşe noktaları kümesi $V(G)$ ve kenarları kümesi $E(G)$ olan bir graf $G = (V(G), E(G))$ şeklinde gösterilir. Daha sade olarak $G = (V, E)$ şeklinde gösterilir. Ayrıca E_n ile n köşe noktalı ve kenarı olmayan graf, K_n ile n köşe noktası üzerindeki tam graf gösterilir. Eğer $V(A) = V(G)$ şartı sağlanıyorsa bir $G = (V(G), E(G))$ grafının bir $A = (V(A), E(A))$ alt grafına, köprü oluşturmuş (spanning) denir. Özellikle G 'nin bir köprü oluşturmuş alt ağacı, bir ağaç olan G 'nin bir köprü oluşturmuş alt grafıdır. G 'nin bir köprü oluşturmuş ormanı, bir orman olan G 'nin bir köprü oluşturmuş alt ormanıdır. Bir G grafının köprü oluşturmuş ağaçlarının sayısına G 'nin tamlığı denir ve $\tau(G)$ ile gösterilir. Sistem geliştiğinde tamlığı çalışmak ilginçtir. Daha açık bir ifadeyle $|V(G_n)| \rightarrow \infty$ şartını sağlayan, $\tau(G_n)$ tamlığa sahip sonlu grafların verilen bir $(G_n)_{n \geq 1}$ dizisi için

$$\lim_{|V(G_n)| \rightarrow \infty} \frac{\log \tau(G_n)}{|V(G_n)|}$$

limit değerine (eğer varsa) $(G_n)_{n \geq 1}$ dizisinin köprü oluşturmuş ağaçlarının asimptotik gelişim sabiti denir. Sonuç olarak $k(G)$, G 'nin bağlantılı bileşenlerinin sayısı olsun (Tullio *et al.* 2010).

Tanım 3.4.1: Yönlendirilmemiş bir $G = (V, E)$ grafi için Tutte polinomu

$$T(G; x, y) = \sum_{A \subseteq E} (x-1)^{k(A)-k(E)} (y-1)^{k(A)+|A|-|V|}$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada $k(A)$, (V, A) grafının bağlantılı bileşenlerinin sayısını gösterir. Bu tanımda $T(G; x, y)$ 'nin x ve y 'ye bağlı iyi tanımlı bir fonksiyon olduğu açıktır. Aynı tanım $r(A) = |V| - k(A)$, (V, A) grafının mertebesi (rankı) olmak üzere biraz daha farklı bir gösterim kullanılarak verilebilir. O halde Whitney'in sıralı üretici fonksiyonu

$$R(G; x, y) = \sum_{A \subseteq E} x^{r(E)-r(A)} y^{|A|-r(A)}$$

olarak tanımlanır. İki fonksiyon değişkenlerin basit bir değişimi altında denktir:

$$T(G; x, y) = R(G; x-1, y-1).$$

Tutte'nin dikromatik polinomu $Q(G; x, y)$ bir başka basit değişimin sonucudur:

$$T(G; x, y) = (x-1)^{-k(G)} Q(G; x-1, y-1).$$

Bir başka tanım silme-büzülme indirgemesi kullanımınıdır (Tullio *et al.* 2010). Bu tanım daha önce verildi.

Cebirsel graf teorisindeki çalışmalardan bağımsız olarak Potts, 1952'de istatistiksel mekanikteki kesin modellerin bölüm fonksiyonunu çalışmaya başladı. Rastgele küme modeli üzerindeki Fortuin ve Kasteleyn'in çalışmaları –Potts modelinin bir genellemesi- Potts modeli ile Tutte polinomu arasında bir bağlantı olduğunu gösteren benzerleştirilmiş bir açıklama sağlar (Farr 2007).

İstatistiksel mekanikten gelen rastgele küme modeli yine bir başka denk tanımını sağlar:

$$Z(q, w) = \sum_{F \subseteq E} q^{k(F)} w^{|F|}$$

polinomu,

$$T(G; x, y) = (x - 1)^{-k(E)} (y - 1)^{-|V|} Z_G[(x - 1)(y - 1), (y - 1)]$$

değişimi altında $T(G; x, y)$ polinomuna denktir (Sokal 2005).

Tanım 3.4.2: A , G 'nin köprü oluşturmuş bir alt grafi olsun. O zaman A 'nın mertebesi $r(A)$ ve boşluğu $n(A)$ aşağıdaki şekilde tanımlanır (Tullio *et al.* 2010):

$$\begin{aligned} r(A) &= |V(A)| - k(A) = |V(G)| - k(A) \\ n(A) &= |E(A)| - r(A) \\ &= |E(A)| - |V(A)| + k(A). \end{aligned}$$

Tanım 3.4.3 (Köprü oluşturmuş alt graflar): $G = (V, E)$ bir graf olsun. G 'nin Tutte polinomu $T(G; x, y)$,

$$T(G; x, y) = \sum_{A \subseteq G} (x - 1)^{r(G) - r(A)} \cdot (y - 1)^{n(A)}$$

şeklinde tanımlanır. Burada toplam, G 'nin tüm köprü oluşturmuş A alt grafları üzerinde geçerlidir (Tullio *et al.* 2010).

Tanım 3.4.4: İki G ve H grafının birleşimi $G * H$ 'nin bir noktası, G 'nin bir v köşe noktası ve H 'nin bir w köşe noktası $G * H$ 'nin bir tek köşe noktası içinde saptanarak elde edilir. Aşağıdaki özellik Tanım 3.4.3 kullanılarak kolayca ispatlanabilir:

$$T(G * H; x, y) = T(G; x, y)T(H; x, y).$$

Bu özelliğe Tutte polinomunun multiplicative (çoklukla ilgili olan) özelliği denir (Tullio *et al.* 2010).

Teorem 3.2: $G = (V, E)$ bağlantılı bir graf olsun ve onun Tutte polinomu $T(G; x, y)$ ile gösterilsin. O halde

- (1) $T(G; 1,1) = \tau(G)$;
- (2) $T(G; 1,2)$, G 'nin köprü oluşturmuş bağlantılı alt graflarının sayısıdır;
- (3) $T(G; 2,1)$, G 'nin köprü oluşturmuş ormanlarının sayısıdır;
- (4) $T(G; 2,1) = 2^{|E|}$;
- (5) $T(G; 2,0)$, G 'nin devirli olmayan konumlarının sayısıdır yani konumlar yönlendirilmiş devirlere sahip değildirler (Tullio *et al.* 2010).

Tutte polinomunun başka bir ilginç tarafı, ondan başlanarak graf ile bağlantılı olan diğer Reliability polinom ve Kromatik polinom gibi ilginç polinomların elde edilebilmesidir:

$R(G, p)$ reliability polinomunun hesaplanmasında G 'nin her bir kenarının bağımsız bir şekilde p olasılıkla aktif (ya da açık) olarak ya da $1 - p$ olasılıkla aktif olmayan (kapalı) olarak seçildiği kabul edilsin. O halde $R(G, p)$ olasılık gibi tanımlanır öyle ki bu gelişigüzel model içerisinde G 'nin her köşe nokta çiftleri arasında aktif kenarların bir yolu vardır (Tullio *et al.* 2010).

Renklendirilebilme hususunda G 'nin köşe noktalarının uygun (ya da kabul edilebilir) bir λ -renklendirmesinin G 'nin köşe noktalarına λ renklerinin atanması anlamındadır. Bu yöntemde komşu köşe noktaları farklı renklere sahiptirler. Eğer G grafi uygun bir λ -renklendirmesine izin veriyorsa G grafi λ -renklendirilebilir denir. G grafının kromatik sayısı $\chi(G)$, λ -renklendirilebilir şeklindeki λ değerlerinin minimumu olarak tanımlanır. Eğer $\chi(G) = \lambda$ ve G grafının herhangi bir λ -renklendirmesi, $V(G)$ 'nin aynı parçalanmasını meydana getiriyorsa (aynı renkli köşe noktaları aynı sınıf içindedirler) G bir tek şekilde λ -renklendirilebilirdir. Kromatik polinom $\chi(G, \lambda)$, bütün λ değerleri için G 'nin uygun λ renklendirmelerinin sayısını verir. Ünlü 4-renk teoremi; eğer G düzlemsel bir graf ise o halde $\chi(G, 4) > 0$ olduğunu ifade eder. Tutte polinomu ile olan ilişki aşağıdaki teoremlerle verilir (Tullio *et al.* 2010):

Teorem 3.3: $G = (V, E)$ bir graf olsun. O halde

$$(1) R(G, p) = p^{|V(G)|-1} (1-p)^{|E(G)|-|V(G)|+1} T(G; 1, \frac{1}{1-p}) \text{ dir.}$$

$$(2) \chi(G, \lambda) = (-1)^{r(G)} \lambda^{k(G)} T(G; 1-\lambda, 0) \text{ dir.}$$

Son olarak bir grafın Tutte polinomu ve onun üzerinde kurulan Ising modeli arasındaki iyi bilinen ilişki hatırlanırsa (Tullio *et al.* 2010); burada Ising modeli, $Q = 2$ için Q-Potts modelinin özel bir durumu olarak elde edilir. Ferromagnetizmanın ünlü Ising modeli, G grafının köşe noktaları üzerinde düzenlenmiş dönmeler olarak adlandırılan farklı değişkenlerden oluşur. Her bir dönme ± 1 değerlerini alabilir ve sadece kendilerine en yakın komşularıyla birbirlerini etkilerler. İki komşu i ve j köşe noktalarındaki dönmelerin konfigürasyonu eğer dönmeler zıt değerlere sahipler $J > 0$ enerjisine ve eğer değerler aynı iseler $-J$ enerjisine sahiptir. $|V(G)| = N$ olsun ve $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_N)$, $\sigma_i \in \{\pm 1\}$ değerine sahip dönmelerin konfigürasyonunu gösterebilir. O halde $\vec{\sigma}$ konfigürasyonu içindeki sistemin toplam enerjisi

$$E(\vec{\sigma}) = -J \sum_{i \sim j} \sigma_i \sigma_j$$

dir. Burada $i \sim j$ gösterimi i ve j 'nin G 'deki komşu köşe noktaları oldukları anlamına gelir. T derecede belirli bir konfigürasyonun olasılığı

$$P(\vec{\sigma}) = \frac{1}{Z} \exp(-\beta E(\vec{\sigma}))$$

ile verilir. Burada β , kabul edilmiş ölçülere uygun bir şekilde $\beta \equiv 1/(k_B T)$ olarak tanımlanmış “ters derecedir” ve k_B Boltzmann sabitini gösterir. İstatistiksel fizikte alışıldığı üzere yukarıdaki bir olasılık hesaplama sistemine, dağıtım yapan normalleştirilmiş Z sabiti bölüm fonksiyonu denir:

$$Z = \sum_{\vec{\sigma}} \exp(-\beta E(\vec{\sigma})).$$

G grafi üzerindeki Ising modelinin bölüm fonksiyonunun Z 'nin $(x - 1)(y - 1) = 2$ hiperbolü üzerindeki $T(G; x, y)$ Tutte polinomunun hesaplanmasıyla elde edildiği bilinir. Daha açık bir ifadeyle, aşağıdaki bağıntı sağlanır:

$$Z = 2(e^{2\beta J} - 1)^{|V(G)|-1} e^{-\beta J|E(G)|} T(G; \frac{e^{2\beta J} + 1}{e^{2\beta J} - 1}, e^{2\beta J}).$$

3.4.1. Özellikler

Tutte polinomu, bağlantılı bileşenler içinde çarpanlarına ayrılır. Eğer G , H ve H' ayrık graflarının birleşimi ise o halde

$$T(G; x, y) = T(H; x, y)T(H'; x, y)$$

dir. Eğer G grafi düzlemsel ve G^* onun dual grafi ise o zaman

$$T(G; x, y) = T(G^*; y, x)$$

dir. Özellikle bir düzlemsel grafin kromatik polinomu, onun dualinin flow polinomudur (Tutte 2004).

3.4.2. Kromatik polinom

$T(G; x, y)$ Tutte polinomu $y = 0$ için kromatik polinoma dönüşür:

$$P(G; \lambda) = (-1)^{|V|-k(G)} \lambda^{k(G)} T(G; 1 - \lambda, 0)$$

dır. Burada $k(G)$, G grafinin bağlantılı bileşenlerinin sayısını gösterir. λ tamsayısı için $P(G; \lambda)$ kromatik polinomunun değeri, λ renklerinin bir kümesinin kullanıldığı G 'nin köşe noktalarının renklerinin sayısına eşit olur. $P(G; \lambda)$ 'nın renklerin kümesine bağlı olmadığı açıktır. Daha az açık olan şey onun tamsayı katsayılı bir polinomun λ değeri için oluşan değeri olduğudur. Bunu görmek için şunlar elde edilmelidir:

- (1) Eğer G n -tane köşe noktasına sahip ve hiç kenarı yoksa o zaman $P(G; \lambda) = \lambda^n$ dir.
- (2) Eğer G bir ilmek içeriyorsa o zaman $P(G; \lambda) = 0$ dır.

(3) Eğer e ilmek olmayan bir kenar ise $P(G; \lambda) = P(G - e; \lambda) - P(G/e, \lambda)$ dır.

Yukarıdaki verilen üç şart bir dizi kenar silme ve büzülme indirgemesi uygulayarak $P(G; \lambda)$ 'yı hesaplamaya olanak verir. Fakat bu şartlar farklı bir kenar silme ve büzülme dizisinin aynı değeri vereceğini garanti edemezler. Garanti, indirgmeden bağımsız olarak $P(G; \lambda)$ 'nın bir şeyleri sayması gerçeğinden gelir. Özellikle

$$T(G; 2,0) = (-1)^{|V|} P(G; -1)$$

devirli olmayan konumların sayısını verir (Tutte 2004).

3.4.3. Jones polinomu

G grafi düzlemsel ise $xy = 1$ hiperbolü boyunca Tutte polinomu bir alterne düğümün Jones polinomunu verir (Jaeger *et al.* 1990).

3.4.4. Özel noktalar

- (1) $T(G; 2,1)$ ormanların sayısını verir yani devirsiz kenar alt kümelerinin sayısını verir.
- (2) $T(G; 1,1)$ köprü oluşturmuş ağaçların sayısına eşittir.
- (3) $T(G; 1,2)$ Tutte polinomu, bağlantılı köprü oluşturmuş alt grafların sayısını verir.
- (4) $T(G; 0,2)$ G 'nin güçlü bir şekilde bağlantılı konumlarının sayısını verir.
- (5) Eğer G grafi, $x \times y$ koordinat sistemi grafi ise o zaman $2T(G; 3,3)$ T -tetrominoesli $4x$ enli ve $4y$ uzunluklu bir dikdörtgeni kaplamak için gerekli olan yolların sayısına eşit olur (Las Vergnas 1980).

3.4.5. Potts ve Ising modelleri

$(x - 1)(y - 1) = 2$ ile tanımlanan hiperbol boyunca Tutte polinomu istatistiksel fizikte çalışılan Ising modelinin bölüm fonksiyonuna dönüşür. Daha genel olarak her pozitif q

tamsayısı için $(x - 1)(y - 1) = q$ denklemiyle tanımlanan H_q hiperbolü boyunca Tutte polinomu, q -yapı Potts modelinin bölüm fonksiyonuna dönüşür. Potts modelinin çatısı altında analiz edilmiş çeşitli fiziksel nicelikler H_q 'nin spesifik parçalarına dönüşür (Welsh and Merino 2000).

Potts modeli ve Tutte düzlemi arasındaki ilişkiler:

<u>Potts model</u>	<u>Tutte polinomu</u>
Ferromagnetizm H_q 'nin pozitif dalı
Antiferromagnetizm $y > 0$ ile H_q 'nin negatif dalı
Yüksek ısı derecesi $y = 1$ 'e H_q 'nin asimptotu
Düşük ısı dereceli ferromagnetik $x = 1$ 'e H_q 'nin pozitif dalının asimptotu
Sıfır ısı dereceli antiferromagnetik q -renklendirilmiş graf yani $x = 1 - q, y = 0$

3.4.6. Flow polinomu

$T(G; x, y)$ Tutte polinomu $x = 0$ için kombinatorik çalışmalarındaki flow polinomuna dönüşür. Bağlantılı yönlendirilmemiş bir G grafi ve k tamsayısı için bir hiçbir yerde – sıfır k -flow, G 'nin rastgele bir konumunun kenarlarına atanan $1, 2, \dots, k - 1$ “flow” değerlerinden biridir öyle ki; her bir köşe noktasına giren ve çıkan toplam flow k modülüne eşittir. Flow polinomu $C_G(k)$ hiçbir yerde –sıfır k -flowlarının sayısını gösterir. Bu değer ayrıntılı bir şekilde kromatik polinom ile bağlantılıdır. Aslında G düzlemsel graf ise G 'nin kromatik polinomu onun dual grafi G^* 'in flow polinomuna denktir. Bu durum şu teoremle verilebilir:

Teorem 3.4 (Tutte): $C(G, k) = k^{-1}\chi(G^*, k)$ eşitliğinin Tutte polinomuna olan bağlantısı $C(G, k) = (-1)^{m-n+1}T(0, 1 - k)$ ile verilir (Tutte 2004).

3.4.7. Reliability polinomu

$T(G; x, y)$ Tutte polinomu $x = 1$ için network teorisinde çalışılan bütün dönem sonuna ait Reliability polinomuna dönüşür. p olasılıklı her kenarı kaldırılan bir bağlantılı G grafi için bu rastgele kenar aksaklıklarına bağlı bir network'ü biçimlendirir. O halde Reliability polinomu, kenarların aksamasından sonra G grafindaki köşe nokta çiftlerinin bağlantılı kalma olasılığını veren bir $R(G, p)$ fonksiyondur (p değişkenli bir polinomdur). Tutte polinomu ile olan bağlantısı

$$R(G, p) = (1 - p)^{n-1} p^{m-n+1} T(G; 1; \frac{1}{p})$$

ile verilir (Tutte 2004).

3.4.8. Dikromatik polinom

Tutte, kromatik polinomun daha kapalı bir genelleştirilmiş olan 2-değişkenli dikromatik polinomunu da tanımlamıştır. Bu polinom

$$Q(G; u, v) = \sum_{A \subseteq E} u^{c(A)} v^{|A| - c(A) + |V|}$$

şeklindedir. Burada $c(A)$, köprü oluşturmuş alt graf (V, A) 'nın bağlantılı bileşenlerinin sayısıdır. Bu polinom

$$Q(G; u, v) = u^c R(G; u, v)$$

ile verilen corank-nullity polinomu ile ilişkilidir. Burada c , G grafinin bileşenlerinin sayısıdır. Dikromatik polinom matroidlere genelleştirilemez çünkü c bir matroid özelliği değildir: Aynı matroidli farklı graflar farklı sayılarda bileşenlere sahip olabilirler (Tutte 2004).

3.4.9. Gauss eliminasyonu

Bazı sınırlı örneklerde eninde sonunda Tutte polinomu polinom zamanı içinde hesaplanabilir. Çünkü Gauss eliminasyonu verimli bir şekilde matris operasyonları; determinant ve Pfaffian'ı hesaplar. Bu algoritmalar kendi önemli sonuçlarını cebirsel graf teorisinden ve istatistiksel mekanikten alırlar. $T(G; 1,1)$ değeri, bir bağlantılı grafın köprü oluşturmuş ağaçlarının sayısı $\tau(G)$ 'ye eşittir. Bu, cebirsel graf teorisinin ilk zamanlarında Kirchhoff'un matris-ağaç teoremi adıyla bilinen G 'nin Laplasyan matrisinin bir maksimal temel alt matrisinin determinantının bir sonucu olarak polinom zamanı içinde hesaplanabilir. Benzer şekilde $T(G; -1, -1)$ için bisiklet uzayının boyutu polinom zamanı içinde Gauss eliminasyonu ile hesaplanabilir.

Düzlemsel graflar için Ising modelinin bölüm fonksiyonu yani $(x - 1)(y - 1) = 2$ hiperbolündeki Tutte polinomu, FKT algoritması aracılığıyla verimli bir şekilde hesaplanabilir ve bir Pfaffian olarak açıklanabilir. Bu fikir Fisher, Kasteleyn ve Temperley tarafından bir düzlemsel kafes modelinin dimer örtülerinin sayısını hesaplamak için geliştirildi (Anonymous 2012).

3.5. İşaretilendirilmiş Graflar İçin Tutte Polinomu

İşaretilendirilmiş bir graf G olsun. e , G 'nin bir kenarı olsun ve bu kenarın (+ ya da -) işareti $sign(e)$ ile gösterilsin. e kenarı bir kıstak ya da bir ilmek olabilir. G içindeki pozitif kıstakların sayısı $i_+ = i_+(G)$ ile, negatif kıstakların sayısı $i_- = i_-(G)$ ile gösterilsin. Benzer şekilde $l_+ = l_+(G)$ ve $l_- = l_-(G)$, G 'deki pozitif ve negatif ilmeklerin sayısını gösterebilir.

İşaretilendirilmiş graflar için tanımlanan silme-büzülme ve değer verme formülleri vasıtasıyla $Q[G] = Q[G](a, b, d)$ şeklinde bir polinom tanımlanabilir (Kauffman 1989).

Burada

$$X = a + bd \text{ ve } Y = ad + b$$

şeklindeki kısaltma işlemleri kullanılır. Buradaki a ve b değişkenleri, Bölüm 2.8.4'ün Sonuç kısmında anlatılan Kauffman parantez polinomundaki değişkenlerle aynıdır. Kauffman bu değişkenleri büyük harf kullanarak göstermiş olsa da ilgili çalışmalarda daha önceki alışkanlık devam ettirilip küçük harflerle gösterime devam edilecektir. Kauffman'ın çalıştığı diyagram aşağıda görülmektedir. $Q[G]$ polinomu için aşağıdaki formüller tanımlanabilir:

(1) G içindeki ne bir ilmek ne de bir kıstak olan bir e kenarı için bir silme-büzülme üçlüsü G, G', G'' olsun. O halde

$$\text{Eğer } \text{sign}(e) < 0 \text{ ise } Q[G] = aQ[G'] + bQ[G'']$$

$$\text{Eğer } \text{sign}(e) > 0 \text{ ise } Q[G] = bQ[G'] + aQ[G''] \text{ olur.}$$

(2) Eğer G 'nin her kenarı ya bir kıstak ya da bir ilmekse ve G bağlantılı ise o zaman

$$Q[G] = X^{i_+ + l_-} Y^{i_- + l_+} \text{ olur.}$$

(3) Eğer G grafi, G_1 ve G_2 graflarının ayrık birleşimi ise o zaman

$$Q[G] = dQ[G_1]Q[G_2] \text{ olur.}$$

Q	$\left[\begin{array}{c} \bullet \text{---} \text{+} \text{---} \bullet \\ \hline \end{array} \right]$	$=$	AQ	$\left[\begin{array}{c} \bullet \text{---} \\ \hline \end{array} \right]$	$+$	BQ	$\left[\begin{array}{c} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \\ \hline \end{array} \right]$			
Q	$\left[\begin{array}{c} \bullet \text{---} \text{-} \text{---} \bullet \\ \hline \end{array} \right]$	$=$	BQ	$\left[\begin{array}{c} \bullet \text{---} \\ \hline \end{array} \right]$	$+$	AQ	$\left[\begin{array}{c} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \\ \hline \end{array} \right]$			
Q	$\left[\begin{array}{c} \bullet \text{---} \text{+} \text{---} \bullet \\ \hline \end{array} \right]$	$=$	YQ	$\left[\begin{array}{c} \bullet \text{---} \\ \hline \end{array} \right]$						
Q	$\left[\begin{array}{c} \bullet \text{---} \text{-} \text{---} \bullet \\ \hline \end{array} \right]$	$=$	XQ	$\left[\begin{array}{c} \bullet \text{---} \\ \hline \end{array} \right]$						
Q	$\left[\begin{array}{c} \bullet \text{---} \text{+} \text{---} \bullet \\ \hline \end{array} \right]$	$=$	XQ	$\left[\begin{array}{c} \bullet \text{---} \\ \hline \end{array} \right]$	$,$	Q	$\left[\begin{array}{c} \bullet \text{---} \text{-} \text{---} \bullet \\ \hline \end{array} \right]$	$=$	YQ	$\left[\begin{array}{c} \bullet \text{---} \\ \hline \end{array} \right]$

Tüm işaretlendirilmiş graflar için tanımlanan $Q[G]$ polinomunun varlığını oluşturmak amacıyla $Q[G]$ polinomu için bir köprü oluşturmuş ağaç genişlemesi bulunmalıdır. Gelecek iki önerme, $Q[G]$ polinomunun; halka diyagramları için parantez polinomunu, rastgele grafların sabit işareti için de dikromatik ve Tutte polinomları gibi özel durumları içerdiğini gösterir (Kauffman 1989).

Önerme 3.2: G işaretlendirilmiş düzlemsel graf olsun. $K[G]$ medial yapı aracılığıyla oluşturulan G grafiyle ilişkili halka diyagramı olsun. O halde $\langle K[G] \rangle$ Kauffman parantez polinomu olmak üzere $Q[G] = \langle K[G] \rangle$ olur.

Önerme 3.3: Tüm kenarları pozitif işaretler alan işaretlendirilmiş bir graf G olsun. $Z[G](q, v)$, işaretlendirilmemiş graf altında yatan dikromatik polinomu gösterebilir. N , G 'nin köşe noktalarının sayısını ve c , G grafinin bileşenlerinin sayısını göstermek şartıyla

$$Z[G](q, v) = q^{\frac{N+c}{2}} Q[G](q^{-\frac{1}{2}}v, 1, q^{\frac{1}{2}})$$

eşitliği sağlanır. Tutte polinomu ile dikromatik polinom birbirlerine dönüştürülebildikleri için bu durum Tutte polinomu $T(G; x, y)$ 'nin, $Q[G]$ polinomunun özel bir hali olduğunu gösterir.

Hatırlatma: $X = a + bd$, $Y = ad + b$ olmak üzere d 'nin varlığı

$$aX - a^2 = bY - b^2$$

şartına denktir. a, b, X, Y değişkenleri üzerindeki bu sınırlamanın, $Q[G]$ polinomu için indirgeme iyi tanımlı olsun diye gerekli olduğunu görmek kolaydır. Örneğin; iki pozitif ve bir negatif işaretli kenarlara sahip bir üçgen grafi için $Q[G]$ polinomunun aşağıdaki iki hesaplaması göz önüne alınsın (Kauffman 1989):

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} + \\ \triangle \\ - \\ + \end{array} G \\
 (a) \quad Q[G] &= AQ \left[\begin{array}{c} \circ \\ + \end{array} \right] + BQ \left[\begin{array}{c} \circ \\ - \end{array} \right] \\
 &= ABQ \left[\begin{array}{c} \circ \\ - \end{array} \right] + A^2Q \left[\begin{array}{c} \circ \\ - \end{array} \right] + BXY \\
 &= ABY + A^2X + BXY. \\
 (b) \quad Q[G] &= AQ \left[\begin{array}{c} + \\ \circ \\ + \end{array} \right] + BQ \left[\begin{array}{c} + \\ \circ \\ + \end{array} \right] \\
 &= AX^2 + B^2Q \left[\begin{array}{c} \circ \\ + \end{array} \right] + BAQ \left[\begin{array}{c} \circ \\ + \end{array} \right] \\
 &= AX^2 + B^2X + ABY.
 \end{aligned}$$

İlk bakışta bulunan bu iki sonucun birbirlerinden farklı oldukları görülse de aslında

$$bY + a^2 = aX + b^2 \Rightarrow a^2X + bXY = aX^2 + b^2X$$

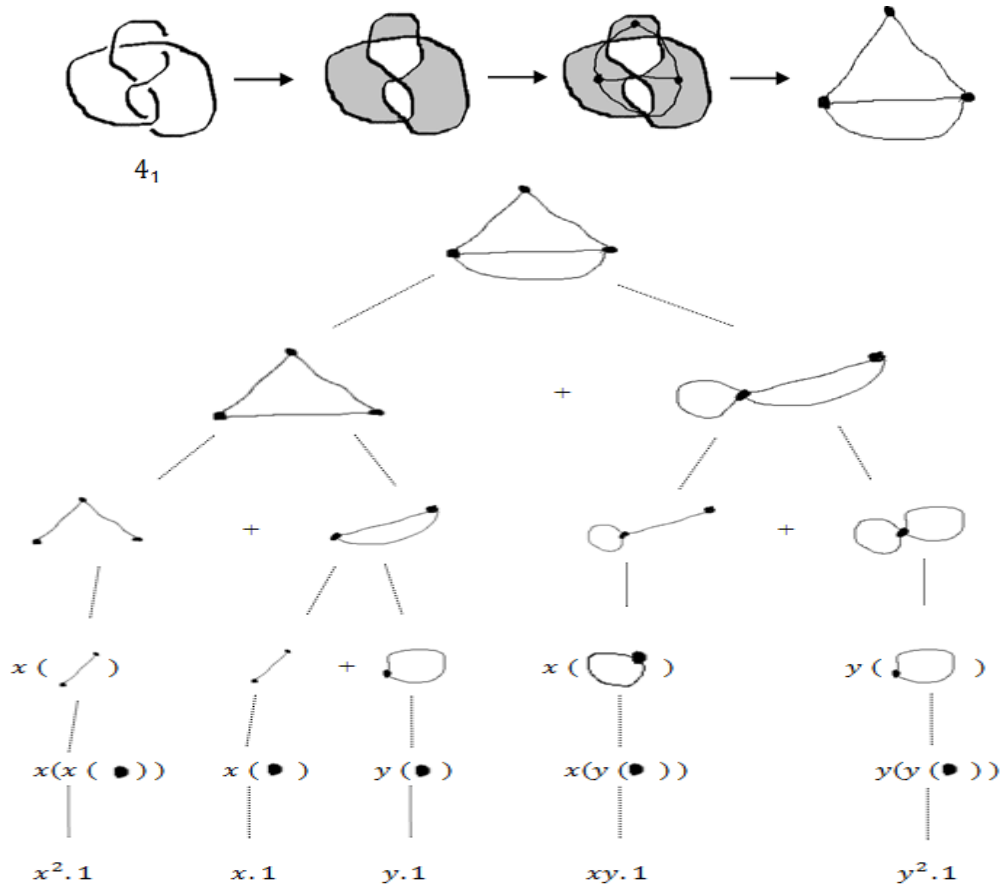
olduğundan her iki şıkta bulunan bu sonuçlar eşittir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Düğümlerin Tutte Polinomu

Bir K düğümünün Tutte polinomunun, Bölüm 3.3'de verilen Tutte polinomu tanımından yararlanarak nasıl bulunacağı aşağıdaki örnekte gösterilmiştir: İlk önce verilen düğümün regüler diyagramından düğüme ait medial graf (evren) oluşturulacaktır. Daha sonra elde edilen medial graf, bir önceki bölümde tanımlanan renklendirme yöntemiyle bölgeleri siyah ya da beyaz olacak şekilde taranacaktır. Taranmış grafdan elde edilen düğüme ait izomorfik graf üzerinden Tutte polinomu hesaplanacaktır.

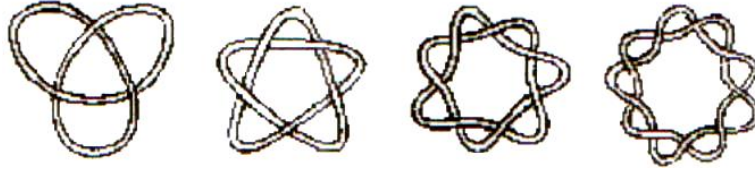
Örnek 4.1: 4_1 düğümünün Tutte polinomu şu şekildedir:



$$\Rightarrow T(G; x, y) = x^2 + y^2 + xy + x + y$$

4.2. $(2, n)$ -Tor Dügümlerinin Tutte Polinomu

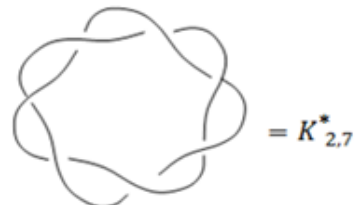
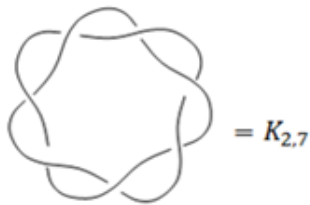
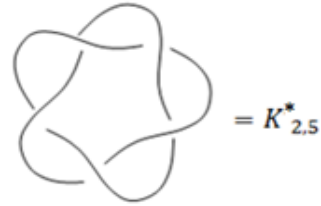
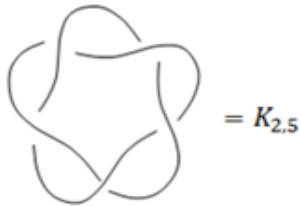
Bu bölümde Şekil 4.1’de bazı örnekleri verilen $(2, n)$ -tor düğümleri incelenecektir. $(2, n)$ -tor düğümlerinin, izomorfik ve dual grafları oluşturulacak ve bu graflar üzerinden Tutte polinomları hesaplanarak bunların sonuçları tartışılacaktır.



Şekil 4.1. $(2, n)$ -tor düğümü örnekleri

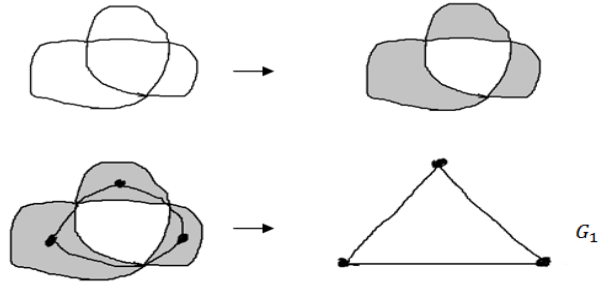
Bu bölümde incelenecek olan $(2, n)$ -tor düğümlerinin regüler diyagramları, onların izomorfik ve dual grafları aşağıdaki gibi etiketlendirilerek bu şekildeki isimlendirilmiş halleri örneklerde kullanılacaktır.

$(2, n)$ -tor düğümlerinin regüler diyagramları

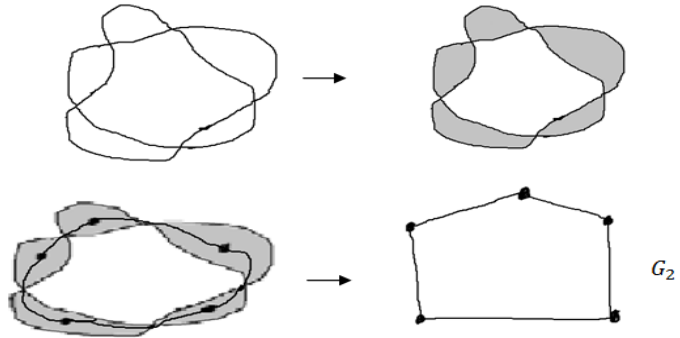


(2, n)-tor düğümlerinin izomorfik grafları

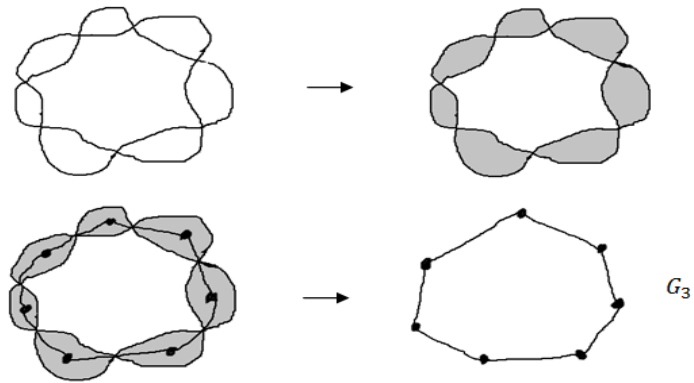
$K_{2,3}$ ve $K_{2,3}^*$ tor düğümlerinin grafi G_1 ile gösterilsin:



$K_{2,5}$ ve $K_{2,5}^*$ tor düğümlerinin grafi G_2 ile gösterilsin:

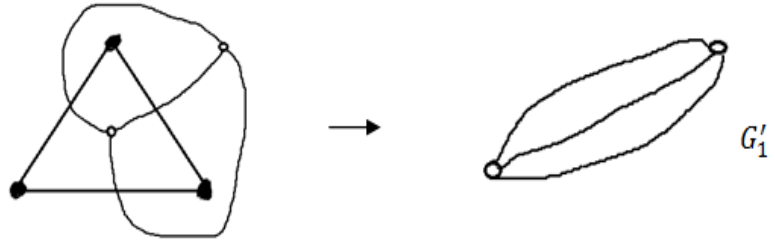


$K_{2,7}$ ve $K_{2,7}^*$ tor düğümlerinin grafi G_3 ile gösterilsin:

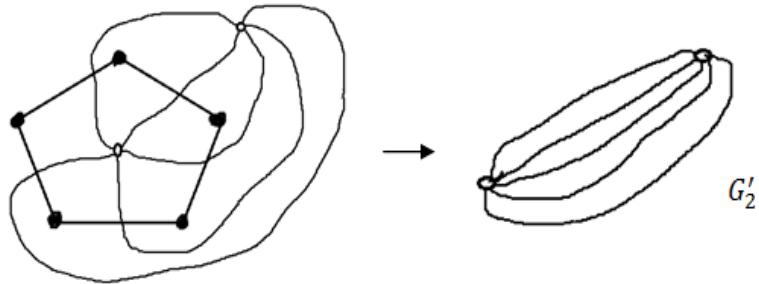


(2, n)-tor düğümlerinin dual grafları

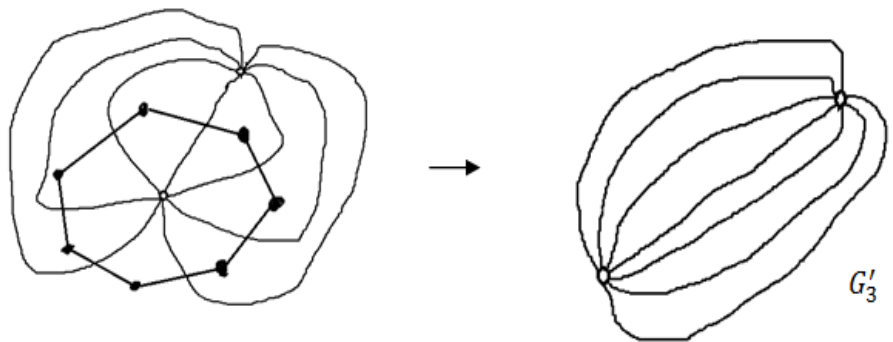
$K_{2,3}$ ve $K_{2,3}^*$ tor düğümlerinin grafının duali G'_1 ile gösterilsin:



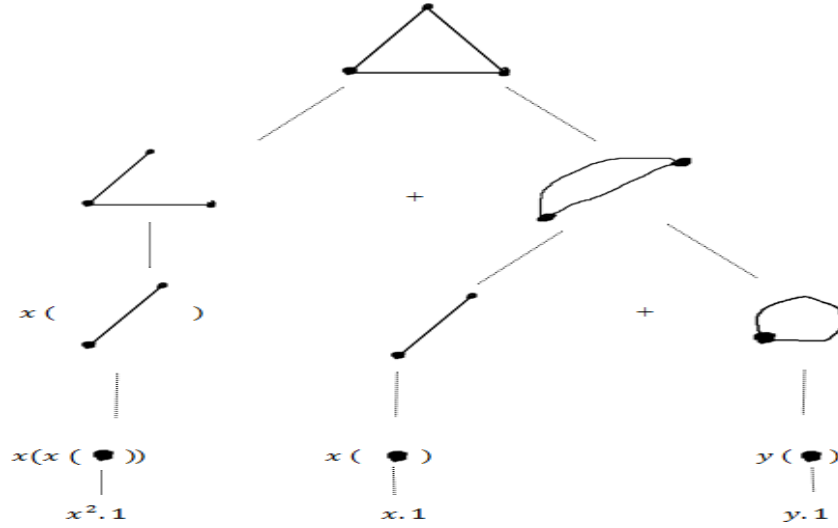
$K_{2,5}$ ve $K_{2,5}^*$ tor düğümlerinin grafının duali G'_2 ile gösterilsin:



$K_{2,7}$ ve $K_{2,7}^*$ tor düğümlerinin grafının duali G'_3 ile gösterilsin:

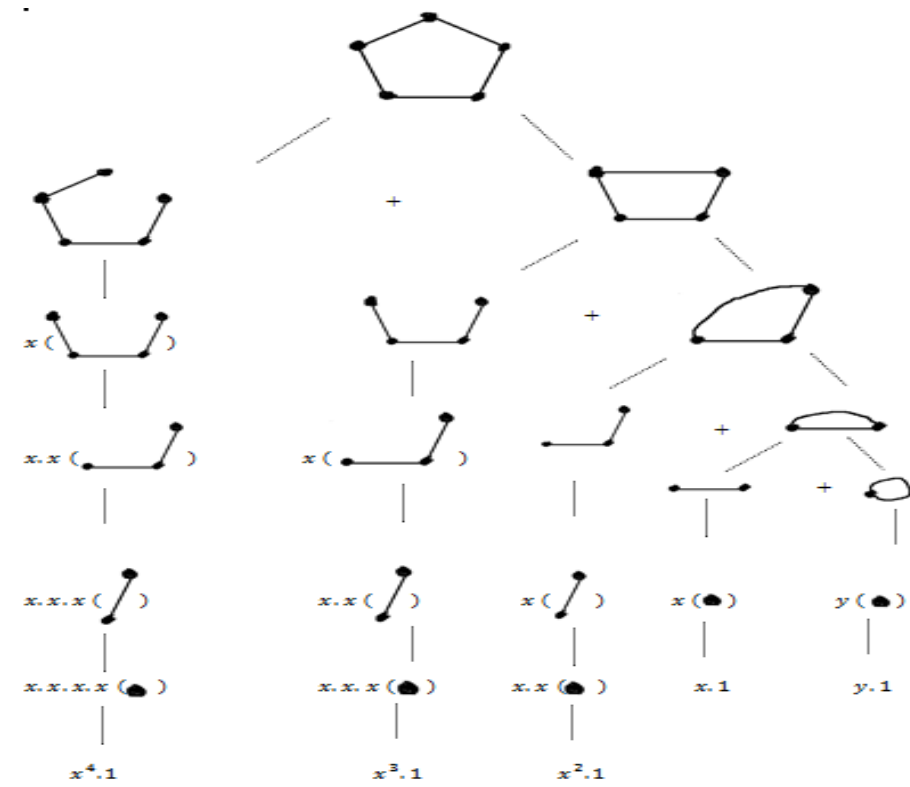


Örnek 4.2: $K_{2,3}$ ve $K_{2,3}^*$ tor düğümlerinin grafi G_1 için Tutte polinomu hesaplınsın.



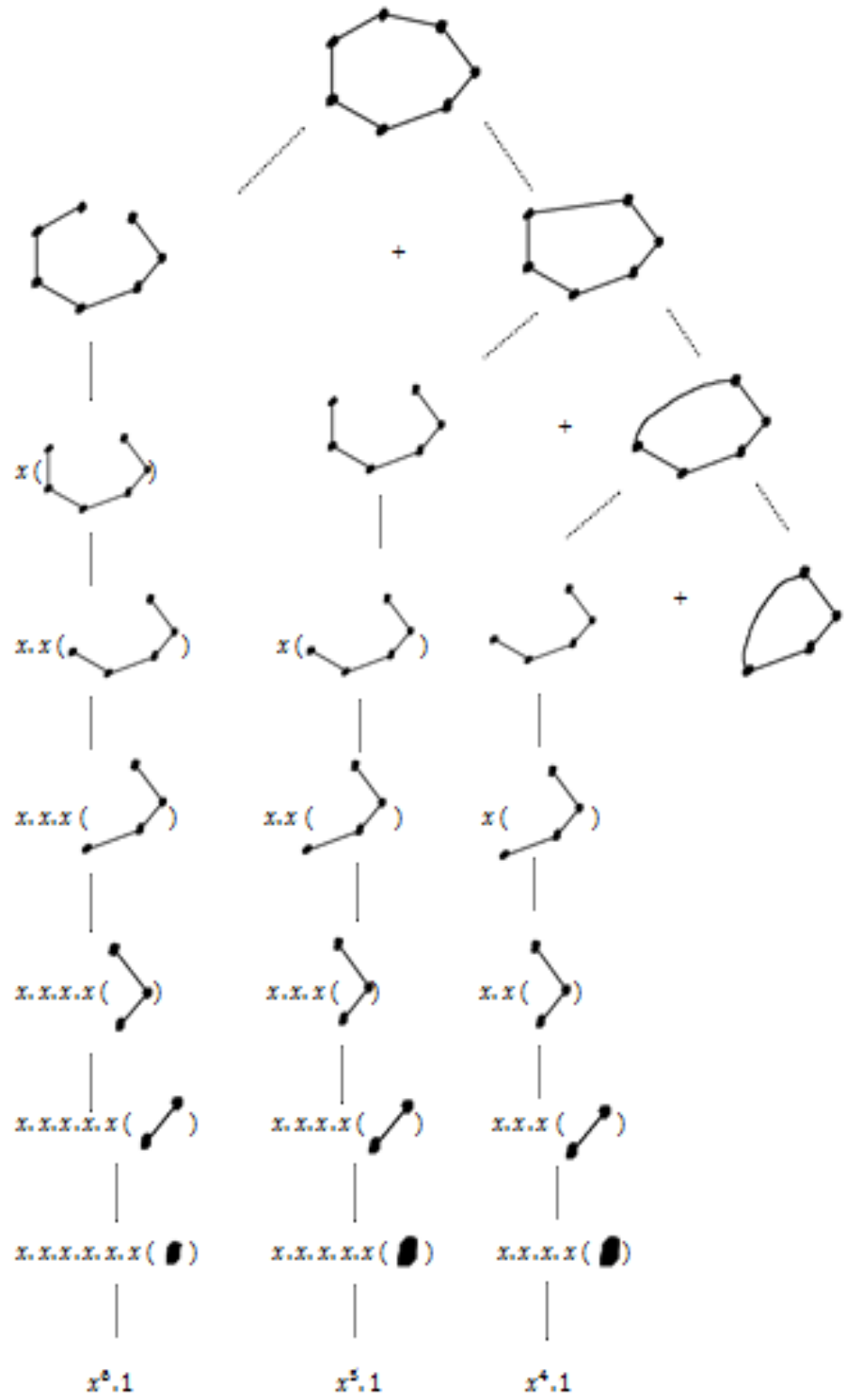
$\Rightarrow T(G_1; x, y) = x^2 + x + y$

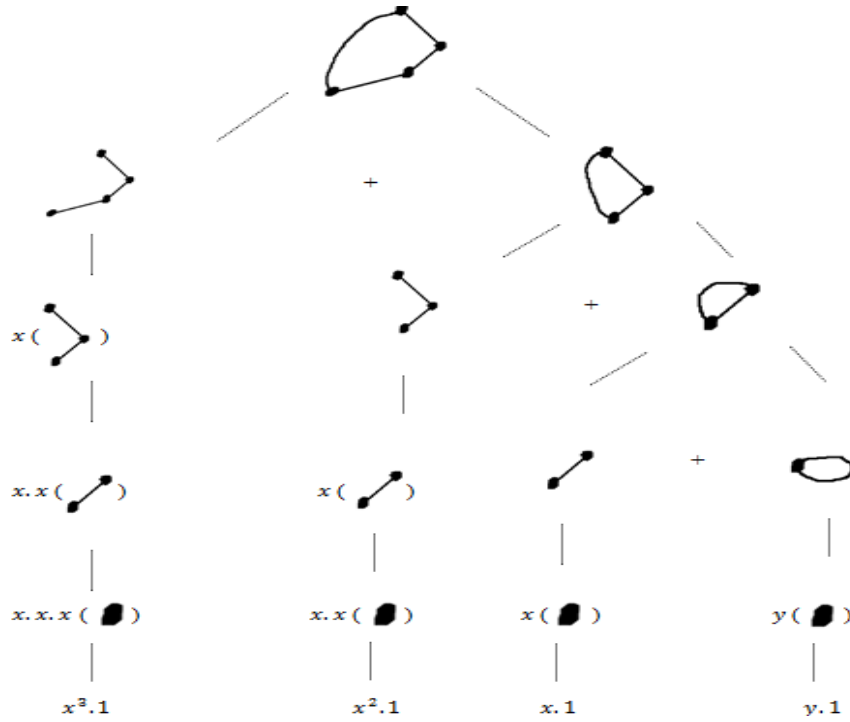
Örnek 4.3: $K_{2,5}$ ve $K_{2,5}^*$ tor düğümlerinin grafi G_2 için Tutte polinomu hesaplınsın.



$\Rightarrow T(G_2; x, y) = x^4 + x^3 + x^2 + x + y$

Örnek 4.4: $K_{2,7}$ ve $K_{2,7}^*$ tor düğümlerinin grafi G_3 için Tutte polinomu hesaplınsın.





$$\Rightarrow T(G_3; x, y) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + y$$

Sonuç 4.1: $(2, n)$ -tor düğümlerinin izomorfik grafları için Tutte polinomu;

$$T(G; x, y) = x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + x^{n-n}y$$

$$\Rightarrow T(G; x, y) = y + \sum_{k=1}^{n-1} x^k$$

eşitliği ile elde edilir.

İspat: $n = 3$ için

$$\begin{aligned} T(\triangle; x, y) &= x^2 + x + y \\ &= y + \sum_{k=1}^{3-1} x^k \end{aligned}$$

doğru olduğu Örnek 4.2'de gösterildi.

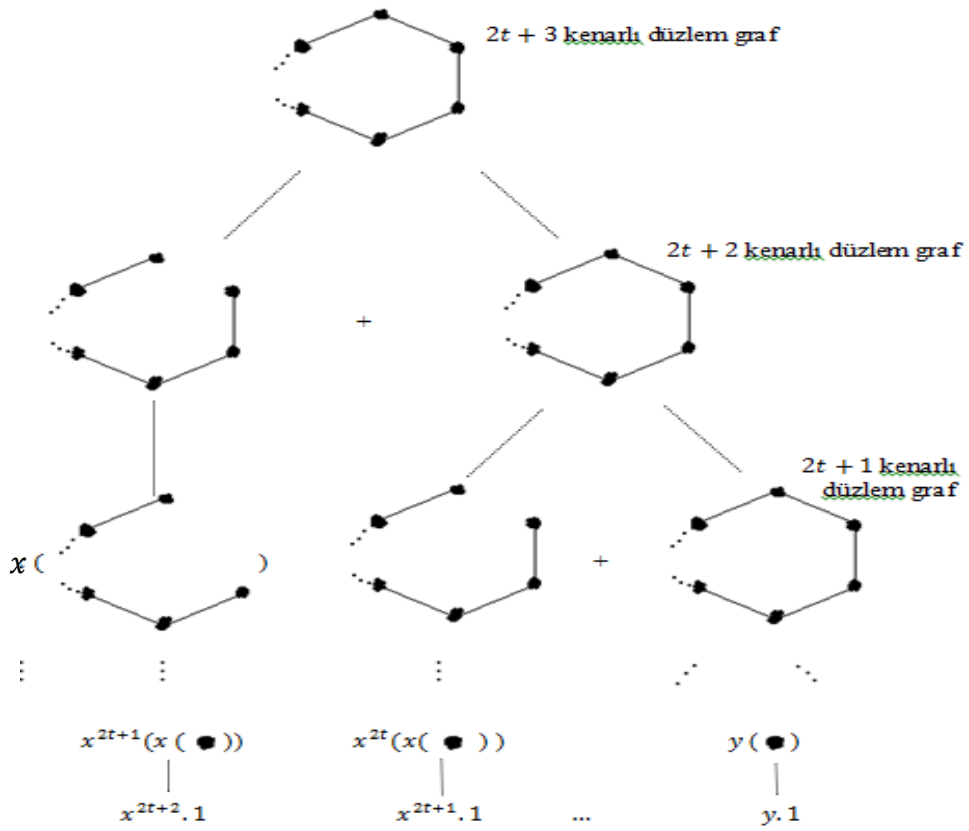
$n = 2t + 1$ ($t \in \mathbb{Z}^+$) için

$$T(\text{pentagon}; x, y) = x^{2t} + x^{2t-1} + x^{2t-2} + \dots + x^2 + x + y$$

$$= y + \sum_{k=1}^{(2t+1)-1} x^k$$

doğru olduğu kabul edilsin.

$n = 2(t + 1) + 1 = 2t + 3$ ($t \in \mathbb{Z}^+$) için doğru olduğu gösterilsin.



$$T(\text{pentagon}; x, y) = x^{2t+2} + x^{2t+1} + x^{2t} + \dots + x^2 + x + y$$

$$= y + \sum_{k=1}^{(2t+3)-1} x^k$$

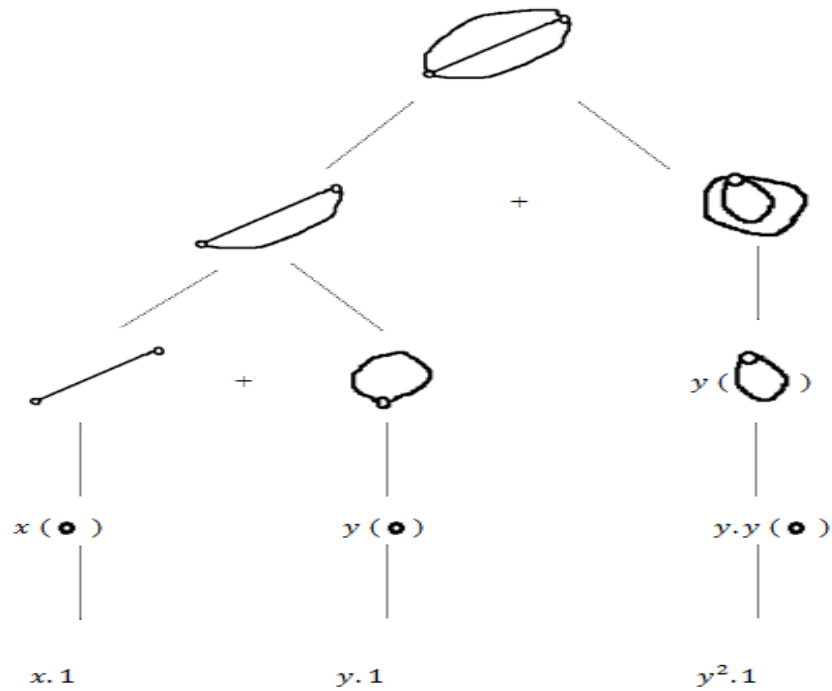
O halde her $n = 3, 5, 7, 9, \dots, 2t + 1$ ($t \in \mathbb{Z}^+$) için $(2, n)$ -tor düğümlerinin izomorfik graflarının Tutte polinomlarının

$$T(G; x, y) = x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + x^{n-n}y$$

$$\Rightarrow T(G; x, y) = y + \sum_{k=1}^{n-1} x^k$$

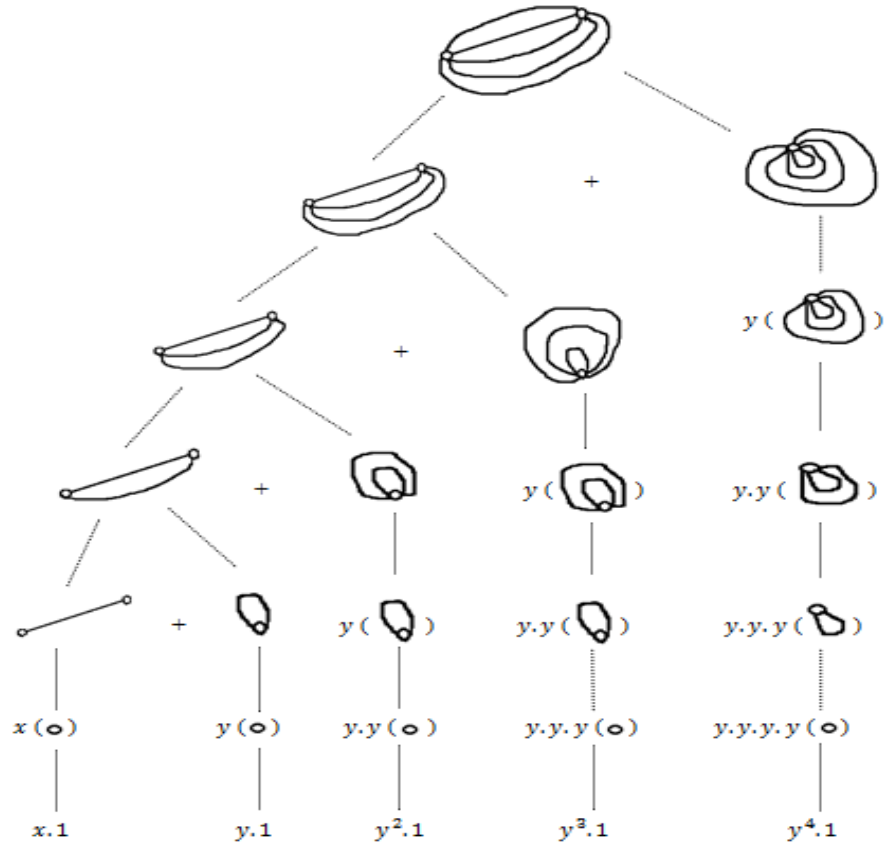
şeklinde olduğu tümevarım yöntemiyle ispatlanmış olur.

Örnek 4.5: $K_{2,3}$ ve $K_{2,3}^*$ tor düğümlerinin dual grafi G'_1 için Tutte polinomu hesaplınsın.



$$\Rightarrow T(G'_1; x, y) = x + y + y^2$$

Örnek 4.6: $K_{2,5}$ ve $K_{2,5}^*$ tor düğümlerinin dual grafi G'_2 için Tutte polinomu hesaplınsın.



$$\Rightarrow T(G'_2; x, y) = x + y + y^2 + y^3 + y^4$$

Örnek 4.7: $K_{2,7}$ ve $K_{2,7}^*$ tor düğümlerinin dual grafi G'_3 için yukarıda gösterilen yöntemle Tutte polinomunu hesaplanırsa

$$T(G'_3; x, y) = x + y + y^2 + y^3 + y^4 + y^5 + y^6$$

elde edilir.

Sonuç 4.2: $(2, n)$ -tor düğümlerinin dual grafları için Tutte polinomu;

$$T(G'; x, y) = xy^{n-n} + \dots + y^{n-2} + y^{n-1}$$

$$\Rightarrow T(G'; x, y) = x + \sum_{k=1}^{n-1} y^k$$

eşitliği ile elde edilir.

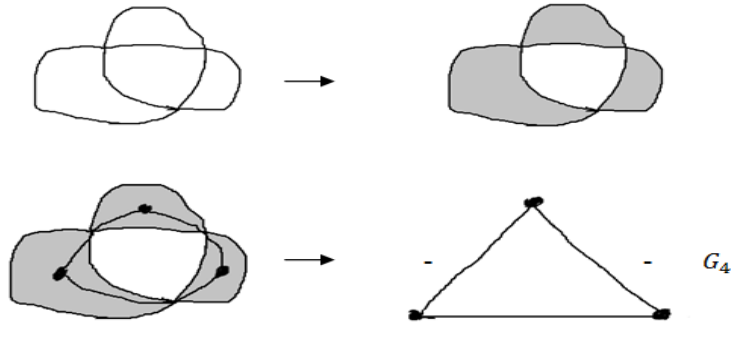
İspat: Sonuç 4.1'in ispatına benzer şekilde tümevarım yöntemiyle ispatlanır.

Sonuç 4.3: Sonuç 4.1 ve 4.2'den $T(G; x, y) = T(G'; y, x)$ olduğu görülür.

4.3. $(2, n)$ -Tor Düğümlerinin İşaretlendirilmiş Graflarının Tutte Polinomu

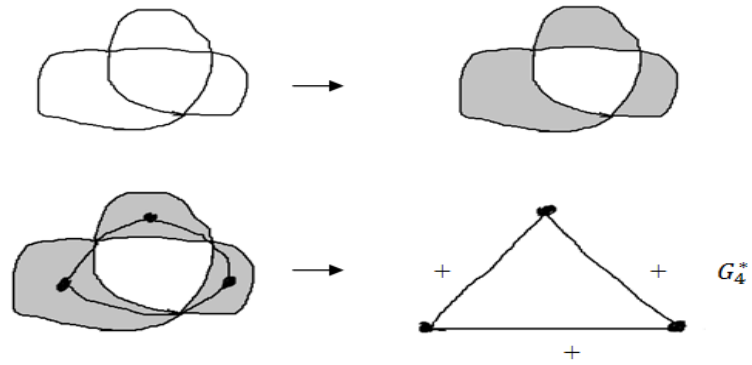
Bu bölümde $(2, n)$ -tor düğümlerinin, Bölüm 3.2'de açıklandığı gibi (+) ya da (-) işaretleri kullanılarak işaretlendirilmiş grafları oluşturulacak ve daha sonra bu grafların Bölüm 3.5'de açıklandığı gibi Tutte polinomları hesaplanacaktır.

Örnek 4.8: $K_{2,3}$ tor düğümünün işaretlendirilmiş grafi için Tutte polinomu hesaplınsın.



$$\begin{aligned}
 Q[G_4] &= aQ[\text{graph with 2 vertices and 1 edge}] + bQ[\text{graph with 2 vertices and 2 edges}] \\
 &= aY^2 + baQ[\text{graph with 2 vertices and 1 edge}] + bbQ[\text{graph with 1 vertex and 1 edge}] \\
 Q[G_4] &= aY^2 + abY + b^2X
 \end{aligned}$$

Örnek 4.9: $K_{2,3}^*$ tor düğümünün işaretlendirilmiş grafi için Tutte polinomu hesaplınsın.

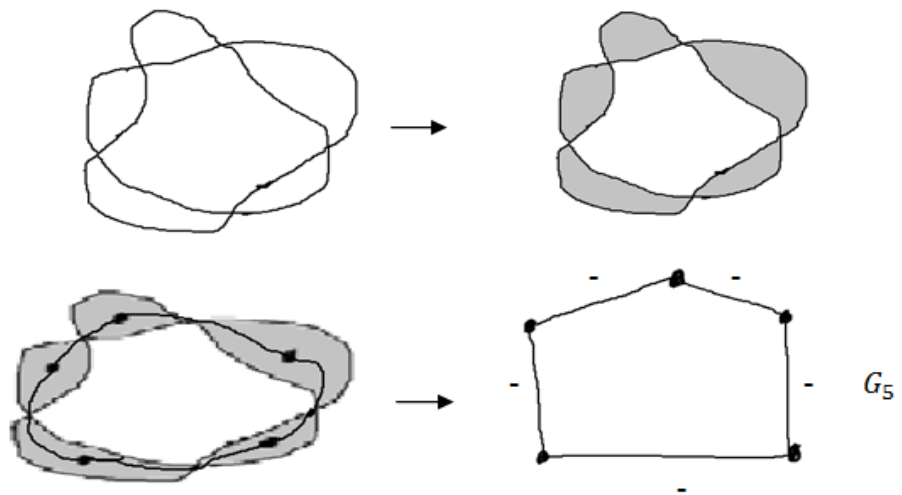


$$Q[G_4^*] = aQ[\text{graph with two vertices and two edges}] + bQ[\text{graph with three vertices and two edges}]$$

$$= aaQ[\text{circle}] + abQ[\text{graph with two vertices and one edge}] + bX^2$$

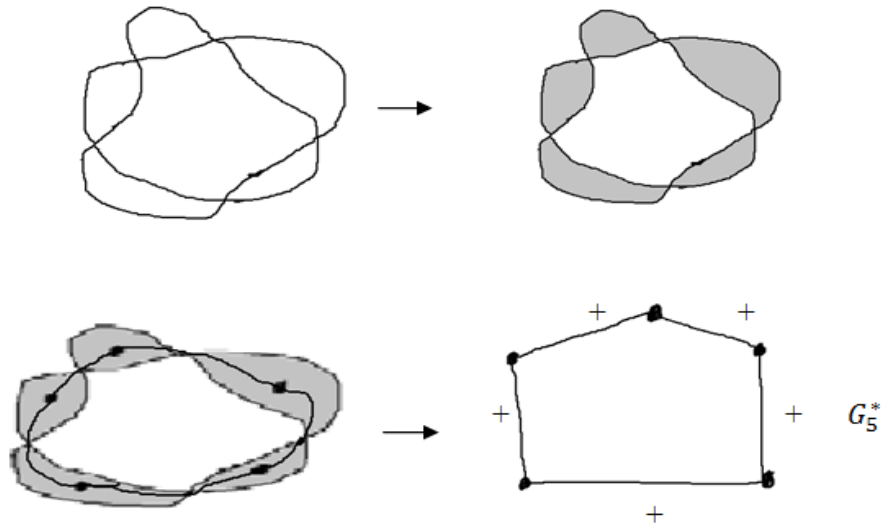
$$Q[G_4^*] = a^2Y + abX + bX^2$$

Örnek 4.10: $K_{2,5}$ tor düğümünün işaretlendirilmiş grafi için Tutte polinomu hesaplınsın.



$$\begin{aligned}
 Q[G_5] &= aQ[\text{pentagon}] + bQ[\text{pentagon with diagonal}] \\
 &= aY^4 + baQ[\text{pentagon with diagonal}] + bbQ[\text{pentagon with diagonal}] \\
 &= aY^4 + baY^3 + b^2aQ[\text{pentagon with diagonal}] + b^2bQ[\text{pentagon with diagonal}] \\
 &= aY^4 + baY^3 + b^2aY^2 + b^3aQ[\text{pentagon with diagonal}] + b^3bQ[\text{pentagon with diagonal}] \\
 Q[G_5] &= aY^4 + abY^3 + ab^2Y^2 + ab^3Y + b^4X
 \end{aligned}$$

Örnek 4.11: $K_{2,5}^*$ tor düğümünün işaretlendirilmiş grafi için Tutte polinomu hesaplınsın.



$$\begin{aligned}
Q[G_5^*] &= aQ[\text{diagram 1}] + bQ[\text{diagram 2}] \\
&= aaQ[\text{diagram 3}] + abQ[\text{diagram 4}] + bX^4 \\
&= a^2aQ[\text{diagram 5}] + a^2bQ[\text{diagram 6}] + abX^3 + bX^4 \\
&= a^3aQ[\text{diagram 7}] + a^3bQ[\text{diagram 8}] + a^2bX^2 + abX^3 + bX^4
\end{aligned}$$

$$Q[G_5^*] = a^4Y + a^3bX + a^2bX^2 + abX^3 + bX^4$$

Örnek 4.12: $K_{2,7}$ tor düğümünün, yukarıda gösterilen yöntemle işaretlendirilmiş grafi için Tutte polinomunu hesaplanırsa

$$Q[G_6] = aY^6 + abY^5 + ab^2Y^4 + ab^3Y^3 + ab^4Y^2 + ab^5Y + ab^6X$$

elde edilir.

Örnek 4.13: $K_{2,7}^*$ tor düğümünün, yukarıda gösterilen yöntemle işaretlendirilmiş grafi için Tutte polinomunu hesaplanırsa

$$Q[G_6^*] = bX^6 + abX^5 + a^2bX^4 + a^3bX^3 + a^4bX^2 + a^5bX + a^6Y$$

elde edilir.

Sonuç 4.4: Tüm kenarları (-) işareti alan $K_{2,n}$ tor düğümlerinin işaretlendirilmiş grafları için Tutte polinomu;

$$Q[G] = a \left(\sum_{k=1}^{n-1} b^{k-1} Y^{n-k} \right) + b^{n-1} X$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç 4.5: Tüm kenarları (+) işareti alan $K_{2,n}^*$ tor düğümlerinin işaretlendirilmiş grafları için Tutte polinomu;

$$Q[G^*] = b \left(\sum_{k=1}^{n-1} a^{k-1} X^{n-k} \right) + a^{n-1} Y$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç 4.6: Sonuç 4.4 ve 4.5'den $Q[G] \neq Q[G^*]$ olduğu görülür.

Sonuç 4.7: $(2,n)$ -tor düğümlerinin işaretlendirilmiş graflarının $Q[G]$ Tutte polinomunda; $X = a^3$, $Y = a^{-3}$ ve $b = a^{-1}$ alınırsa $(2,n)$ -tor düğümlerinin Kauffman parantez polinomuna ulaşılır.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu tezde bir graf teorisi sabiti olan Tutte polinomunun düğüm teorisinde nasıl bir uygulama alanı bulabileceği sorusuna cevap arandı. Bu amaçla düğüm ve graf kavramları tanımlandıktan sonra ilk olarak bir düğüm ile bir graf arasındaki ilişki incelendi. Daha sonra Tutte polinomunun tanımı verilerek bir graf teorisi sabiti olan Tutte polinomunun nasıl hesaplandığı incelendi.

Özellikle $(2, n)$ -tor düğümlerinin Tutte polinomlarının nasıl hesaplanacağı ve bu hesaplamaların sonuçlarının bir geliştirilmesinin oluşturulup oluşturulamayacağı araştırıldı. $(2, n)$ -tor düğümlerinin Tutte polinomları hesaplandı ve bu hesaplamalar için bazı genel formüller verildi. İlk olarak $(2, n)$ -tor düğümlerinin regüler diyagramlarından yararlanılarak izomorfik ve dual grafları elde edildi. Bu grafların Tutte polinomları, silme-büzülme işlemleri vasıtasıyla tanımlanabilen indirgeme formülleriyle diyagramsal olarak hesaplandı. $(2, n)$ -tor düğümlerinin izomorfik ve dual graflarının Tutte polinomları için elde edilen genel formüllerin birbirine eşit oldukları sonucuna ulaşıldı. Daha sonra $(2, n)$ -tor düğümlerinin işaretlendirilmiş grafları elde edilerek bu grafların Tutte polinomları hesaplandı. Bu işaretlendirilmiş grafların Tutte polinomları için iki geliştirme elde edildi. Ayrıca Tutte polinomunun, matematik ve diğer bilim dallarında kendisine bulmuş olduğu uygulama alanları gösterilerek yerli araştırmacılar için Türkçe bir kaynak oluşturulabilmesi hedeflendi. Çalışmalar neticesinde elde edilen bulgular aşağıdaki sonuçlarla özetlendi.

Sonuç 1: $(2, n)$ -tor düğümlerinin izomorfik grafları için Tutte polinomu;

$$T(G; x, y) = x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + x^{n-n}y$$

$$\Rightarrow T(G; x, y) = y + \sum_{k=1}^{n-1} x^k$$

eşitliği ile elde edilir.

Sonuç 2: $(2, n)$ -tor düğümlerinin dual grafları için Tutte polinomu;

$$T(G'; x, y) = xy^{n-n} + \dots + y^{n-2} + y^{n-1}$$

$$\Rightarrow T(G'; x, y) = x + \sum_{k=1}^{n-1} y^k$$

eşitliği ile elde edilir.

Sonuç 3: Sonuç 1 ve 2'den $T(G; x, y) = T(G'; y, x)$ olduğu görülür.

Sonuç 4: Tüm kenarları (-) işareti alan $K_{2,n}$ tor düğümlerinin işaretlendirilmiş grafları için Tutte polinomu;

$$Q[G] = a \left(\sum_{k=1}^{n-1} b^{k-1} Y^{n-k} \right) + b^{n-1} X$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç 5: Tüm kenarları (+) işareti alan $K_{2,n}^*$ tor düğümlerinin işaretlendirilmiş grafları için Tutte polinomu;

$$Q[G^*] = b \left(\sum_{k=1}^{n-1} a^{k-1} X^{n-k} \right) + a^{n-1} Y$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç 6: Sonuç 4 ve 5'den $Q[G] \neq Q[G^*]$ olduğu görülür.

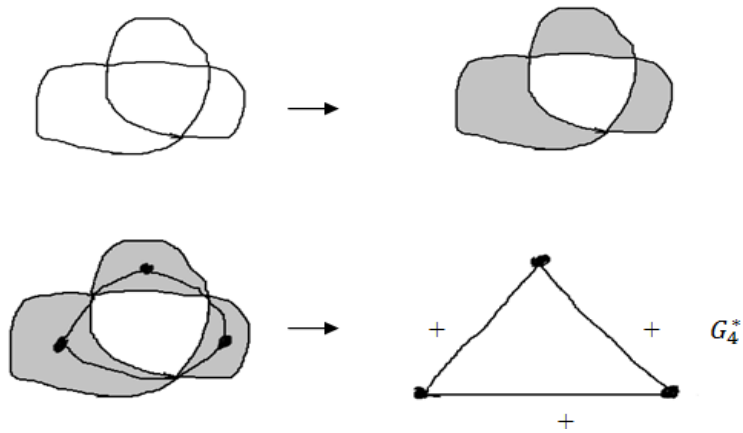
Sonuç 7: $(2, n)$ -tor düğümlerinin işaretlendirilmiş graflarının $Q[G]$ Tutte polinomunda; $X = a^3$, $Y = a^{-3}$ ve $b = a^{-1}$ alınırsa $(2, n)$ -tor düğümlerinin Kauffman parantez polinomuna ulaşılır.

Ayrıca bu sonuçlar üzerinden yola çıkılarak $(2, n)$ -tor düğümlerinin graflarının, Tutte polinomu ile bağlantılı olan diğer tüm graf polinomlarının da genelleştirilmiş elde edilebilir. Örneğin; Önerme 3.3'den yola çıkılarak $(2, n)$ -tor düğümlerinin, tüm kenarları pozitif işaretler alan grafları için Dikromatik polinomları hesaplanabilir. Tüm kenarları (+) işareti alan $K_{2,n}^*$ tor düğümlerinin işaretlendirilmiş grafları için Tutte polinomlarının;

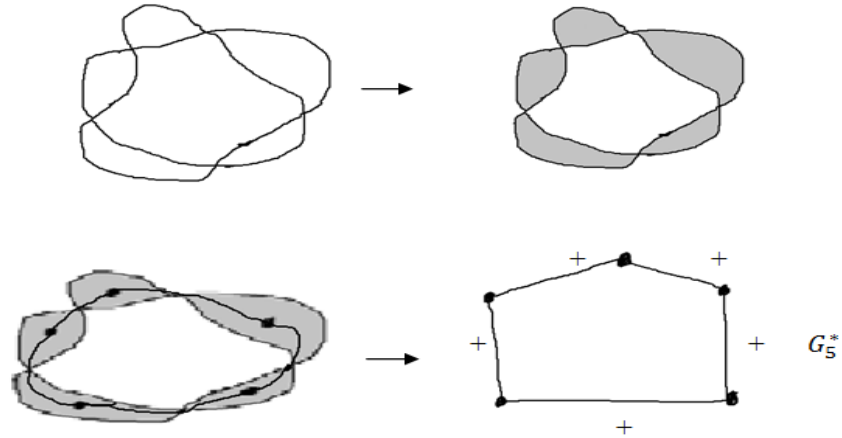
$$Q[G^*] = b \left(\sum_{k=1}^{n-1} a^{k-1} X^{n-k} \right) + a^{n-1} Y$$

şeklinde elde edilebileceği sonucu bulunmuştu. Bu grafların birkaç örneği aşağıda gösterilmiştir.

$K_{2,3}^*$ tor düğümünün işaretlendirilmiş grafi,



$K_{2,5}^*$ tor düğümünün işaretlendirilmiş grafi,



Önerme 3.3'de G tüm kenarları pozitif işaretler alan işaretlendirilmiş bir graf, $Z[G](q, v)$ işaretlendirilmemiş graf altında yatan dikromatik polinom, N , G 'nin köşe noktalarının sayısı ve c , G grafının bileşenlerinin sayısını göstermek şartıyla işaretlendirilmiş graflar için tanımlanan Tutte polinomu ile Dikromatik polinom arasındaki ilişki

$$Z[G](q, v) = q^{\frac{N+c}{2}} Q[G](q^{-\frac{1}{2}v}, 1, q^{\frac{1}{2}})$$

bağıntısı ile verilmiştir. Ayrıca işaretlendirilmiş grafların Tutte polinomu $Q[G]$ için $X = a + bd$ ve $Y = ad + b$ şeklindeki kısaltma işlemlerinin kullanılacağı Bölüm 3.5'de anlatılmıştı. Bütün bu ilişkilerden yararlanılarak aşağıdaki işlemler yapılabilir:

$$Q[G^*] = b \left(\sum_{k=1}^{n-1} a^{k-1} X^{n-k} \right) + a^{n-1} Y$$

$$Q[G^*] = b \left(\sum_{k=1}^{n-1} a^{k-1} (a + bd)^{n-k} \right) + a^{n-1} (ad + b).$$

$$\Rightarrow Z[G^*] = q^{\frac{N+c}{2}} Q[G^*] \left(q^{-\frac{1}{2}v}, 1, q^{\frac{1}{2}} \right)$$

$$Z[G^*] = q^{\frac{N+c}{2}} \left(\left[1 \left(\sum_{k=1}^{n-1} \left(q^{-\frac{1}{2}v} \right)^{k-1} \left(q^{-\frac{1}{2}v} + 1q^{\frac{1}{2}} \right)^{n-k} \right) \right] + \left(q^{-\frac{1}{2}v} \right)^{n-1} \left(q^{-\frac{1}{2}v} q^{\frac{1}{2}} + 1 \right) \right)$$

$$Z[G^*] = q^{\frac{N+c}{2}} \left(\left[\left(\sum_{k=1}^{n-1} q^{\frac{1-k}{2}} v^{k-1} \left(q^{-\frac{1}{2}}v + q^{\frac{1}{2}} \right)^{n-k} \right) \right] + q^{\frac{1-n}{2}} v^{n-1} (v+1) \right) \dots \dots \dots (1)$$

$(2, n)$ -tor düğümünün, tüm kenarları pozitif işaretler alan grafları için Dikromatik polinomları (1) nolu bağıntı ile elde edilir. Örneğin $K_{2,3}^*$ tor düğümünün işaretlendirilmiş grafi G_4^* için;

$$Z[G_4^*] = q^{\frac{3+3}{2}} \left(\left[\left(\sum_{k=1}^{3-1} q^{\frac{1-k}{2}} v^{k-1} \left(q^{-\frac{1}{2}}v + q^{\frac{1}{2}} \right)^{3-k} \right) \right] + q^{\frac{1-3}{2}} v^{3-1} (v+1) \right)$$

$$Z[G_4^*] = q^3 \left(\left[\left(q^{-\frac{1}{2}}v + q^{\frac{1}{2}} \right)^2 + q^{-\frac{1}{2}}v \left(q^{-\frac{1}{2}}v + q^{\frac{1}{2}} \right) \right] + q^{-1}v^3 + q^{-1}v^2 \right)$$

$$Z[G_4^*] = q^3 (q^{-1}v^2 + 2v + q + q^{-1}v^2 + v + q^{-1}v^3 + q^{-1}v^2)$$

$$Z[G_4^*] = q^3 (3q^{-1}v^2 + 3v + q + q^{-1}v^3)$$

$$Z[G_4^*] = 3q^2v^2 + 3q^3v + q^4 + q^2v^3$$

dikromatik polinomu elde edilir.

Bu tezden aşağıdaki makale üretilmiştir:

Şahin, A. and Kopuzlu A. and Uğur T., 2015. On Tutte Polynomials of $(2, n)$ -Torus Knots. Applied Mathematical Sciences 9 (15), 747-759.

KAYNAKLAR

- Anonymous, 2012. Knots and Graphs. Wikipedia, http://en.wikipedia.org/wiki/Knots_and_graphs (27.05.2012).
- Bernardi, O., 2006. The Tutte Polynomial and A Bijection Between Subgraphs and Orientations. Combinatorics Seminar at CRM, Barcelona.
- Bollobas, B., 1998. Modern Graph Theory. Springer Science + Business Media, Inc, 394 s, New York, USA.
- Brylawski, T. and Oxley G., 1992. The Tutte Polynomial and Its Applications. Matroid Applications, Cambridge University Press, 40 (1992), 123-225.
- Burde, G. and Zieschang H., 2003. Knots. Walter De Gruyter, 401 s, Berlin-New York.
- Cromwell, P., 2004. Knots and Links. Cambridge University Press, 328 s, New York, USA.
- Crowell, R. H. and Fox R. H., 1963. Introduction to Knot Theory. Blaisdell Publishing Company, 181 s, New York.
- Diao, Y. and Hetyei G., 1991. Relative Tutte Polynomials for Colored Graphs and Virtual Knot Theory. Mathematics Subject Classification, <http://www.math.uncc.edu/~ghetyei> (20.02.2012).
- Diao, Y. and Hetyei G. and Hinson K., 2000. Tutte Polynomials of signed Graphs and Jones Polynomial of Some Large Knots. Mathematical Subject Classification 2000: 57M25.
- Farr, G. E., 2007. Tutte-Whitney polynomials: some history and generalizations. Combinatorics, Complexity and Chance: A Tribute to Dominic Welsh, Oxford University Press pp. 28-52, http://en.wikipedia.org/wiki/Knots_and_graphs (27.05.2012).
- Fox, R. H., 1949. A Remarkable Simple Closed Curve. Ann. of Math., 50, 264-265.
- Gessel, I. M. and Sagan B. E., 1996. The Tutte Polynomial of A Graph, Depth-First Search, and Simplicial Complex Partitions. The Electronic Journal of Combinatorics 3, 2 (1996), 1-36.
- Gross, J. L. and Yellen J., 2005. Graph Theory and Its Applications. Chapman & Hall / CRC, 800 s, USA.
- Gordon, C. McA. and Leucke J., 1989. Knots are Determined by Their Complements. J. Amer. Math. Soc., 2, 371-415.
- Hempel, J., 1962. Construction of Orientable 3-Manifolds. Top. 3-Manifolds, Proc. Top. Int. Univ. Georgia.
- Hilden, H. M., 1974. Every, Closed, Orientable 3-Manifolds is A 3-Fold Branched Covering Space of S^3 . Bull. Amer. Math. Soc., 80, 1234-1244.
- Jablan, J. and Radovic L. and Sazdanovic R., 2010. Tutte and Jones Polynomials of Link Families. Filomat, 24 (3), 19-33.
- Jaeger, F., 1988. Tutte Polynomials and Link Polynomials. Proceedings of The American Mathematical Society, 103 (2), 647-654.
- Jaeger, F. and Vertigan, D. L. and Welsh, D. J. A., 1990. On the computational complexity of the Jones and Tutte polynomials. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 108: 35-53.
- Jasso-Hernandez, E. F. and Rong Y., 2006. A Categorification for The Tutte Polynomial. Algebraic & Geometric Topology, 6 (2006), 2031-2049.
- Haggard, G. and Pearce D. J. and Royle G., 2008. Computing Tutte Polynomials. The Isaac Newton for Mathematical Sciences, University of Cambridge, <http://www.homepages.ecs.vuw.ac.nz/~djp/files/HPR-TUTTE-TR08.pdf> (19.02.2012).
- Kauffman, L. H., 1987. On Knots. Princeton Univ. Press., 474 s, Princeton, New-Jersey.
- Kauffman, L. H., 1988. New Invariants in The Theory of Knots. American Mathematical Monthly, 95 (3), 195-242.

- Kauffman, L. H., 1989. A Tutte Polynomial for Signed Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 25 (1989), 105-127.
- Kawauchi, A., 1996. *A Survey of Knot Theory*, Birkhauser Verlag, 415 s, Basel-Boston-Berlin.
- Las Vergnas, M., 1980. Convexity in oriented matroids. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 29 (2): 231–243, http://en.wikipedia.org/wiki/Knots_and_graphs (27.05.2012).
- Leung, H. H., 2008. *Knot Theory*. Cornell Education, <http://www.math.cornell.edu/~mec/2008-2009/HoHonLeung/page7-knots.htm> (27.05.2012).
- Melvin, P. M. and Morton H. R., 1995. The Coloured Jones Function. *Comm. Math. Physics*, 169, 501-520.
- Murasugi, K., 1989. On Invariants of Graphs with Applications to Knot Theory. *Transactions of American Mathematical Society*, 314 (1) 1-49.
- Murasugi, K., 1996. *Knot Theory and Its Applications*. Birkhauser Verlag, 337 s, Boston.
- Prasolov, V. V. and Sossinsky A. B., 1996. *Knots, Links, Braids and 3-Manifolds*. Amer. Math. Soc., 237 s, Providence-Rhode Island.
- Rolfsen, D., 1976. *Knots and Links and Introduction Knot Theory*. Publish or Perish Inc., 437 s, Wilmington Delaware.
- Sokal, A. D., 2005, The multivariate Tutte polynomial (alias Potts model) for graphs and matroids. *London Mathematical Society Lecture Note Series*, 327, 173–226.
- Thistlethwaite, M. B., 1987. A Spanning Tree Expansion of The Jones Polynomial. *Topology*, 26 (3), 297-309.
- Tucker, T. W. and Gross J. L., 2001. *Topological Graph Theory*. Dover Publications INC, 384 s, New York.
- Tullio, C.-S. and Donno A. and Iacono D., 2010. The Tutte Polynomial of The Schreier Graphs of The Grigorchuk Group and Basilica Group. arXiv:1010.2902v1 [math.CO], <http://www.arxiv.org/pdf/1010.2902> (15.12.2012).
- Tutte, W.T., 1954. A Contribution to The Theory of Chromatic Polynomials. *Canadian Journal of mathematics* 6 (1954), 80-91.
- Tutte, W. T., 2004. Graph-polynomials. *Advances in Applied Mathematics* 32: 5–9.
- Welsh, D. J. A. and Merino C., 2000. The Potts Model and Tutte Polynomial. *Journal of Mathematical Physics*, 41 (3), 1127-1152.
- Welsh, D., 1999. *The Tutte Polynomial*. John Wiley & Sons, INC. Random Struct. Alg. 15 (1999) 210-228.
- Wu, F. Y. and Wang J., 2001. Zeroes of The Jones Polynomial. *Physica A*, 296 (2001), 483-494.
- Yajima, T. and Kinoshita S., 1957. On The Graphs of Knots. *Osaka Math. J.*, 9 (1957), 155-163.

ÖZGEÇMİŞ

Erzurum'da 1978 yılında doğdu. İlk, orta, lise öğrenimini Erzurum'da tamamladı. 1996 yılında girdiği Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümü'nden 2000 yılında mezun oldu. Aynı yıl Milli Eğitim Bakanlığı bünyesinde matematik dersi öğretmeni olarak çalışmaya başladı. 2001 yılında Atatürk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde başladığı yüksek lisans öğrenimini 2005 yılında tamamladı. 2009 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda doktora öğrenimine başladı. Halen Milli Eğitim Bakanlığı bünyesindeki matematik öğretmenliği görevine devam etmektedir. Evli ve üç çocuk babasıdır.