DİTOPOLOJİK DOKU UZAYLARINDA YEREL BAĞLANTILIK

Fatih Rıza ÇELİK

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Topoloji Bilim Dalı
Doç. Dr. Tamer UĞUR
2015

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DİTOPOLOJİK DOKU UZAYLARINDA YEREL BAĞLANTILILIK

Fatih Rıza ÇELİK

MATEMATİK ANABİLİM DALI
Topoloji Bilim Dalı

ERZURUM
2015

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAY FORMU

DİTOPOLOJİK DOKU UZAYLARINDA YEREL BAĞLANTILILIK

Doç. Dr. Tamer UĞUR danışmanlığında, Fatih Rıza ÇELİK tarafından hazırlanan bu çalışma 02/07/2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı – Topoloji Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak **oybirliği/oy çokluğu (…/…)** ile kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Abdullah KOPUZLU *İmza* :

Üye : Doç. Dr. Tamer UĞUR *İmza* :

Üye : Doç. Dr. Ceren Sultan ELMALI *İmza* :

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu 09/07/2015 tarih ve 27/901 nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Ertan YILDIRIM
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Yüksek Lisan Tezi

DİTOPOLOJİK DOKU UZAYLARINDA YEREL BAĞLANTILILIK

Fatih Rıza ÇELİK

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Topoloji Bilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Tamer UĞUR

Bu çalışmada, genel topolojide bilinen bağlantılılık, yerel bağlantılık ve bileşen kavramlarının, ditopolojik doku uzaylarındaki karşılıkları sunulmuştur. Ditopolojik doku uzaylarındaki bağlantılılık kavramı önceki yıllarda yapılan çalışmalar da baz alınarak yeniden incelenmiştir. Bununla birlikte bu tezde yerel bağlantılı ditopolojik doku uzayının belli bir şart altında sürekli ve açık bir fonksiyon altındaki görüntüsünün de yerel bağlantılı olduğu gösterilmiştir. Bununla birlikte bu tezde ditopolojik doku uzayının yerel bağlantılı olması için gerek ve yeter şartın S uzayının her açık U kümesi için, U ya ait her bileşen, S de açık olması gerektiği gösterilmiş ve yerel bağlantılı ditopolojik uzayında bileşenin belli şartlar altında hem açık hem de kapalı olduğu gösterilmiştir.

2015, 41 sayfa

Anahtar Kelimeler: Doku Uzayları, Ditopolojik Doku Uzayları, Bağlantılılık, Yerel Bağlantılılık, Bileşen

ABSTRACT

Master Thesis

LOCAL CONNECTEDNESS IN DITOPOLOGICAL TEXTURE SPACES

Fatih Rıza ÇELİK

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Discipline of Topology

Supervisor: Assoc. Proff. Dr. Tamer UĞUR

In this study, the counterparts of connectness, local connectedness and components, which are known from the general topology, have been introduced in ditopological texture spaces. The concept of connectedness in the ditopological texture space has been reexamined with considering the previous studies. In addition, in this thesis, it has been shown that the image of ditopological texture space under the certain conditions and under a continous open map is locally connected. Together with this information, it has been shown that the necessary and sufficient conditions are: for every set U in the topological space S, every component of U should be open in S, and in the ditopological texture space under the certain conditions, the component should be both open and closed so that are ditopological texture space is locally connected.

2015, 41 pages

Keywords: Texture Spaces, Ditopological Texture Spaces, Connectedness, Local Connectedness, Component.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma, Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde hazırlanmıştır.

Bu tez konusunda çalışmamı sağlayan, her adımda bilgilerini esirgemeyen, çok değerli hocam Sayın Doç. Dr. Tamer UĞUR'a en içten dileklerimle saygılarımı sunarım.

Tezin hazırlanması sürecinde değerli bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım Topoloji Bilim Dalı hocaları Sayın Prof. Dr. Ahmet KÜÇÜK'e ve Sayın Prof. Dr. Abdullah KOPUZLU'ya teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, çalışmalarım esnasında kendilerinden görmüş olduğum destek ve sonsuz güvenden dolayı başta eşim Cansu Selçuk ÇELİK olmak üzere, aileme ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Fatih Rıza ÇELİK
Haziran, 2015

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$(\mathcal{L}, \subseteq)$	: Tam latis
$(S, \mathcal{S}, \sigma)$	: Tümleyenli doku uzayı
$(V, \mathcal{S}_V, \tau_V, \kappa_V)$	: Alt ditopolojik doku uzayı
$\bar{P}_{(s,t\ \ )}$	: $\mathcal{P}(S) \otimes \mathcal{T}$ çarpım dokusunun q-kümesi
$\bar{Q}_{(s,t)}$	: $\mathcal{P}(S) \otimes \mathcal{T}$ çarpım dokusunun p-kümesi
$f^{\rightarrow}A(F^{\rightarrow}A)$	: Görüntü (Ko-görüntü)
$[A]^{\kappa}$	: κ topolojisine göre A nın kapanışı
$[A]^{\tau}$	: τ topolojisine göre A nin kapanışı
$\{A, B\}$	: Parçalanış
$[A]$	: A nın kapanışı
K_s	: s nin yarı bileşenleri kümesi
P_s	: p-küme
Q_s	: q-küme
$(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$	: Ditopolojik doku uzayı
$(S, \mathcal{S})$	: Doku uzayı
(f, F)	: Difonksiyon
$f^{\leftarrow}B(F^{\leftarrow}B)$	: Ters görüntü (Ko-ters görüntü)
$\prod_{i \in I} S_i$	: S_i ailesinin çarpımı
$\otimes_{i \in I} \mathcal{S}_i$	: $\mathcal{S}_i$ dokularının çarpım dokulanması
π_j	: İzdüşüm fonksiyonu
$]A[$	: A nın içi
$\vee$	: Supremum
$\wedge$	: İnfremum

$C(S,S^*)$	: S den S^* a tüm sürekli fonksiyonların kümesi
$C(Z,s)$	: Z kümesinin s yi içeren tüm bağlantılı kümelerin maksimali
$b(A)$	: A nın sınırı
$ext(A)$	: A nın dışı
$\mathcal{P}(X)$	: X in tüm alt kümelerinin ailesi

1. GİRİŞ

Bağlantılılık kavramı 1883 yılında IR^n in kapalı ve sınırlı alt kümeleri için Cantor tarafından tanımlandı fakat yapmış olduğu tanım üzerinde uzaklık tanımlanmadığından genel topolojik uzaylar için uygun değildi. 1892 yılında bağlantılığın modern tanımı IR^n in kapalı ve sınırlı alt kümeleri için Camille Jordan tarafından verilmiştir. Jordan'ın tanımı 1911 yılında Lennes tarafından soyut kümelere genişletilmiştir. Bağlantılılığın sistematik çalışılması Hausdorff'un 1914 yılında yayımladığı bilimsel tezi Grundzüge der Mengenlehre ile başlamıştır. Ayrılmış (separated) kümeler kavramı Hausdorff'a göre tanımlanmış ve bir kümenin bağlantılı olması için iki ayrılmış kümenin birleşimi olmaması gerektiği belirtilmiştir. "Bileşen" kavramı Hausdorff'a göre "tamamen bağlantısızlık" kavramına bağlı olarak o dönemde "kalıtımsal bağlantısız" olarak verilmiştir. 'Yerel bağlantılılık' 1914 yılında Hans Hahn (1879-1934) tarafından ileri sürülmüştür. Benzer özellikler 1911'de Pia Nalli ve 1913'de Mazurkiewicz tarafından ele alınmıştır.

Doku uzaylarının tanımı ilk olarak Brown (1993a, 1993b) tarafından, belirsiz (fuzzy) kümelerin nokta-küme tabanlı bir karşılığı olarak, belirsiz yapılar (fuzzy structure) adıyla tanıtıldı. Daha sonra bu yapılara Brown ve (2000a, 2000b) tarafından geliştirilerek doku uzayları (texture spaces) adı verildi ve bundan sonrada bu alandan yapılan çalışmalarda bu isim kullanmıştır. Yapılan bu çalışmalarda; tümleyen işleminden bağımsız matematiksel kavram ve yapıların da bir genel çerçeveye sahip olduğu gözlenmiştir.

$(S, \mathcal{S})$ doku uzayı üzerinde tanımlanan ditopoloji kavramı; genelde birbirinden bağımsız olan açık ve kapalı küme aksiyomlarını sağlayan τ, κ biçimindeki (τ, κ) çiftidir. τ nun elemanları açık kümeler, ve κ nın elemanları ise kapalı kümeler olarak isimlendirilirler. Diğer taraftan ditopolojiler, ikili topolojilerin bir genellemesi olup birçok bitopolojik kavram ditopolojik doku uzayların içinde ifade edilebilir. Ayrıca belirsiz topolojilerin de basit dokular üzerindeki ditopolojiye karşılık gelebilir olması yönüyle de doku uzayları teorisinde elde edilen sonuçlar kısmen bitopoloji ve belirtisiz topolojilere uygulanabilir.

Ditopolojik doku uzaylarında bağlantılılık kavramı ilk kez Diker (1999) tarafından sunulmuş, Diker çalışmasında, sadece S nin kümeleri için değil ayrıca S nin bütün altkümeleri için tanımlanan bağlantılılık kavramını vermiştir. Daha sonra O.A.E. Tantawy *et al.* (2014) tarafından ditopolojik doku uaylarında bağlantılık üzerine yeni özellikler ortaya konulmuş ve ditopolojik doku uzaylarında yerel bağlantılık ve tamamen bağlantısızlık tanımları verilmiş ve ditopolojik doku uzaylarının alt uzaylarında da bu kavramlar tanımlanmıştır.

Sunulan bu tez, Giriş, Kuramsal Temeller, Materyal ve Yöntemler, Araştırma Bulguları ve Tartışma ve Sonuçlar olmak üzere beş bölümden oluşmaktadır. Kuramsal Temeller bölümünde ihtiyacımız olan temel topolojik tanımlar ve teoremler verilmiştir. Materyal ve Yöntemler bölümünde, doku uzayları ve ditopolojik doku uzayları hakkında tanım ve teoremler verilmiştir. Araştırma ve Bulgular bölümünde, topolojik uzaylardaki bağlantılık ve yerel bağlantılık kavramlarının ditopolojik doku uzaylarındaki karşılıkları verilmiştir. Özellikle ditopolojik doku uzayının yerel bağlantılı olması için gerekli olan şartlar, lokal bağlantılı ditopolojik doku uzayının sürekli ve açık bir fonksiyon altındaki görüntüsünün de yerel bağlantılı olduğu verildi, yerel bağlantılı ditopolojik doku uzayının bileşenin hem açık hem de kapalı olması için gereken şartlar verilmiştir. Tartışma ve Sonuç bölümünde, elde edilen sonuçlar özetlenmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölüm, yapılan çalışmada önbilgi olarak ihtiyaç duyulan tanım ve teoremleri içermektedir.

Tanım 2.1 (Kısmi Sıralı Küme): Bir L kümesi ve bunun üzerinde tanımlanan $\leq$ bağıntısı göz önüne alınsın.

(i) Her $x \in L$ için $x \leq x$ (yansıma),
(ii) $x, y \in L$ için $x \leq y$ ve $y \leq x \Rightarrow x = y$ (ters simetrik),
(iii) $x, y, z \in L$ için $x \leq y$ ve $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (geçişlilik),

şartlarını sağlayan $\leq$ bağıntısına L kümesi üzerinde tanımlı *kısmi sıralama bağıntısı* ve $(L, \leq)$ ikilisine de bir *kısmi sıralı küme* denir (Ergun 2005).

Tanım 2.2 (Tam Sıralı Küme): $(L, \leq)$ kısmi sıralı küme olsun. Her $x, y \in L$ noktaları için, $x \leq y$ ya da $y \leq x$ oluyorsa, yani L nin herhangi iki öğesi karşılaştırılabilir ise, $\leq$ bağıntısına L üzerinde tanımlı *tam sıralama bağıntısı* ve $(L, \leq)$ ikilisine de *tam sıralı küme* denir (Ergun 2005).

Tanım 2.3 (Sınırlılık): $(L, \leq)$ kısmi sıralı küme, $A \subseteq L$ bir alt küme ve $x, y \in L$ olsun. Eğer $\forall\, a \in A$ için, $a \leq x$ ve $y \leq a$ ise sırasıyla x elemanına A kümesinin bir *üst sınırı* ve y elemanına A kümesinin bir *alt sınırı* denir. Eğer A kümesi bir üst sınıra sahipse, A kümesine *üstten sınırlı* ve eğer A kümesi bir alt sınıra sahipse, A kümesine *alttan sınırlı* denir. Ayrıca A kümesi, hem alt hem de üst sınıra sahip ise, A kümesine *sınırlıdır* denir. Bir kümenin alt ve üst sınırları kümeye ait olmayabilir (Yüksel 2002).

Tanım 2.4 (İnfumum, Supremum): $(L, \leq)$ kısmi sıralı kümesi ve $A \subseteq L$ alt kümesi verilsin. A kümesinin alt sınırlarının en büyüğüne, A kümesinin en büyük alt sınırı (infumumu) denir ve $\inf(A)$ şeklinde gösterilir. Benzer şekilde, A kümesinin üst sınırlarının en küçüğüne, A kümesinin en küçük üst sınırı (supremumu) denir ve $\sup(A)$ şeklinde gösterilir. Bir A kümesi, en küçük üst sınıra ve en büyük alt sınıra sahip ise, bu elemanlar tektir (Yüksel 2002).

$x, y \in L$ için $A = \{x, y\}$ kümesinin en büyük alt sınırı $\inf(A) = x \wedge y$ ve en küçük alt sınır $\sup(A) = x \vee y$ şeklinde ifade edilir (Davey and Priestley 2002).

Tanım 2.5 (Latis): $(L, \leq)$ kısmi sıralı küme ve $L \neq \emptyset$ olsun. L nin elemanlarının her çiftinin, en büyük alt sınırı ve en küçük üst sınırı mevcut ise, $(L, \leq)$ kısmi sıralı kümesine *latis (örgü)* denir. Yani, her $x, y \in L$ için $x \wedge y$ ve $x \vee y$ var ise L ye *latis* denir (Birkhoff 1967).

Teorem 2.6: L bir latis ve $x, y \in L$ olsun. Aşağıdaki özellikler denktir:

(i) $x \leq y$
(ii) $x \wedge y = x$
(iii) $x \vee y = y$ (Davey and Priestley 2002).

Teorem 2.7: L bir latis olsun. Her $x, y, z \in L$ için aşağıdaki özellikler sağlanır:

(i) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$, $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ (Birleşme),
(ii) $x \vee y = y \vee x$, $x \wedge y = y \wedge x$ (Değişme),
(iii) $x \wedge (x \vee y) = x$, $x \vee (x \wedge y) = x$ (Yutma),
(iv) $x \vee x = x$ ve $x \wedge x = x$ (Sabit Kuvvetlilik) (Cohn 2002).

Tanım 2.8 (Tam Latis): $(L, \leq)$ kısmi sıralı küme olsun. L kümesinin boştan farklı her alt kümesinin en büyük alt sınırı ve en küçük üst sınırı varsa, $(L, \leq)$ kısmi sıralı kümesine *tam latis (tam örgü)* denir. $A \subseteq L$ olmak üzere A kümesinin en küçük üst sınırı $\bigvee A$ ve en büyük alt sınırı $\bigwedge A$ biçiminde gösterilir. Yani $\sup(A) = \bigvee A$ ve $\inf(A) = \bigwedge A$ dır (Birkhoff 1967).

Örnekler 2.9:

(i) $(\mathbb{R}, \leq)$, bir latistir fakat tam latis değildir. Çünkü ℝ nin en büyük elemanı yoktur.
(ii) $(\mathbb{N}, \leq)$**,** bir latistir ama tam latis değildir.
(iii) $\mathbb{I} = [0,1]$ bilinen sıralama ile tam latistir.
(iv) $X \neq \emptyset$ için $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ bir tam latistir. $\mathcal{P}(X)$ de bir alt ailenin infumumu bu ailein arakesitini ve supremumu da bu ailenin birleşimidir.

Önerme 2.10: Bir kısmi sıralı L kümesinin herhangi bir A alt kümesi de kısmi sıralıdır. Fakat L latis olsa bile A nın latis olması gerekmez. A nın latis olması için $\wedge$ ve $\vee$ işlemlerine göre kapalı olması gerekir (Cohn 2002).

Teorem 2.11: $X \in \mathcal{L}$ olmak üzere $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}(X)$, keyfi arakesit altında kapalı bir aile ise $(\mathcal{L}, \subseteq)$ ikilisi bir tam örgüdür (Birkhoff 1967).

Sonuç 2.12: $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}(X)$ keyfi arakesit altında kapalı bir aile, $(\mathcal{L}, \subseteq)$ bir tam örgü ve $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}$ olsun. Bu durumda,

$$\bigvee \mathcal{A} = \bigcup \mathcal{A} \Leftrightarrow \bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{L}$$

önermesi sağlanır (Birkhoff 1967).

Tanım 2.13 (Dağılımlı Latis): $x, y, z \in L$ olmak üzere,

(i) $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$,
(ii) $(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$

eşitliklerini sağlayan $(L, \leq)$ tam latisine *dağılımlı latis* denir (Birkhoff 1967).

Tanım 2.14 (Tamamen Dağılımlı Latis): I indis kümesi, $i \in I$ ve J_i indis kümesi için $j \in J_i$ ve $a_j^i \in L$ olmak üzere,

$$\bigwedge_{i \in I} \bigvee_{j \in J_i} a_j^i = \bigvee_{\gamma \in \prod_{i \in I} J_i} \bigwedge_{i \in I} a_{\gamma(i)}^i$$

eşitliğini sağlayan $(L, \leq)$ tam latisine *tamamen dağılımlı latis* denir (Birkhoff 1967).

Teorem 2.15: X boştan farklı bir küme olmak üzere $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ tam latisi tamamen dağılımlı latistir (Gohar 2002).

Teorem 2.16: $L = (0,1]$ ve $\mathcal{L} = \{(0, r]: r \in L\} \cup \{\emptyset\}$ olmak üzere $(\mathcal{L}, \subseteq)$ ikilisi tam ve tamamen dağılımlı bir latistir (Gohar 2002).

Teorem 2.17: $\mathbb{I} = [0,1]$ ve $\mathcal{J} = \{[0, r] : r \in [0, 1]\} \cup \{[0, r): r \in [0, 1]\}$ olmak üzere $(\mathcal{J}, \subseteq)$ ikilisi tam ve tamamen dağılımlı latistir (Gohar 2002).

Lemma 2.18 (Zorn Lemması): Her zinciri bir üst sınıra sahip olan, boştan farklı kısmi sıralı bir kümenin en az bir maximal elemanı vardır (Ergun 2005).

Tanım 2.19 (Süreklilik): (X, τ) ve (Y, τ') iki topolojik uzay, $x_0 \in X$ ve $f: X \to Y$ bir fonksiyon olsun. $f(x_0)$ içeren her bir U açık kümesi için x_0 noktasını içeren bir V açık kümesi $f(V) \subseteq U$ olacak şekilde bulunabiliyorsa f ye x_0 noktasında *süreklidir* denir (Koçak 2011).

Teorem 2.20: (X, τ) ve (Y, τ') herhangi iki topolojik uzay, $f: X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

1) f, X topolojik uzayında sürekli,

2) Y topolojik uzayındaki her açık alt kümenin f altındaki ters görüntüsü X de açıktır, yani her $V \in \tau'$ için $f^{-1}(V) \in \tau$ dır (Yıldız 2005).

Tanım 2.21 (Homeomorfizma): (X,τ) ve (Y,τ') herhangi iki topolojik uzay, $f: X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu sürekli ve tersi f^{-1} var ve f^{-1} de sürekli ise, f ye bir *homeomorfizma* veya *topolojik dönüşüm* denir.

Eğer X ile Y uzayları arasında bir homeomorfizma varsa, X ile Y topolojik uzaylarına *homeomorf (topolojik denk) uzaylar* denir (Yıldız 2005).

Tanım 2.22 (Ayrılmış Küme): (X,τ) topolojik uzay ve $A, B \subseteq X$ olsun. Eğer

$$A \cap \bar{B} = \emptyset \text{ ve } \bar{A} \cap B = \emptyset$$

ise, yani A ve B birbirlerinin değme noktalarını içermiyorsa, A ve B kümelerine *ayrılmış iki küme (bağlantısız, irtibatsız iki küme)* denir.

Eğer $A \cap \bar{B} \neq \emptyset$ ve ya $\bar{A} \cap B \neq \emptyset$ ise, A ve B ye *ayrılmamış iki küme (bağlantılı, irtibatlı iki küme)* denir (Yıldız 2005).

Tanım 2.23 (Bağlantılı Uzay, Bağlantısız Uzay): (X,τ) topolojik uzay olsun. Eğer X uzayı boş olmayan ayrılmış iki kümenin (veya boş olmayan ayrık iki açık kümenin) birleşimi olarak yazılabiliyorsa, X e *bağlantısız (irtibatsız) uzay* denir, yani

X irtibatsız $\Leftrightarrow \exists A, B \in \tau, A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$ ve $A \cap B = \emptyset$ için $X = A \cup B$.

Eğer X uzayı ayrılmış (veya ayrık açık) iki kümenin birleşimi olarak yazılamıyorsa, X e *bağlantılı (irtibatlı) uzay* denir, yani

$$A, B \in \tau, A \neq \emptyset, B \neq \emptyset \text{ ve } X = A \cup B \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$$

dir (Yıldız 2005).

Teorem 2.24: (X, τ) topolojik uzay olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

1) X bağlantılı uzaydır.
2) Xin boş olmayan kapalı $A, B \subseteq X$ alt kümeleri için $X = A \cup B$ ise $A \cap B \neq \emptyset$
3) X uzayında $\emptyset$ ve X den başka hem açık hem de kapalı alt küme yoktur.
4) X uzayında boştan farklı her öz alt kümesinin sınırı boştan farklıdır (Yıldız 2005).

Teorem 2.25: (X, τ) topolojik uzay olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

1) X uzayı bağlantısızdır.
2) X uzayı boştan farklı kapalı ve ayrık iki alt kümesinin birleşimine eşittir.
3) X uzayının boştan farklı, hem açık hem de kapalı bir alt kümesi vardır.
4) X uzayının boştan farklı bir alt kümesinin sınırı boştur (Yıldız 2005).

Tanım 2.26 (Bağlantılı Alt Küme): (X, τ) topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Eğer (A, τ_A) bağlantılı bir uzay ise, A ya (X, τ) uzayının *bağlantılı bir alt kümesi* denir.

Eğer (A, τ_A) bağlantısız bir uzay ise, A ya (X, τ) uzayının *bağlantısız bir alt kümesi* denir (Yıldız 2005).

Teorem 2.27: (X, τ) topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Aşağıdaki önermeler denktir:

1) A kümesi (X, τ) ya göre bağlantılı bir alt kümedir.
2) $A \cap V \neq \emptyset, A \cap W \neq \emptyset$ ve $A \subseteq V \cup W$ olacak şekilde $\exists\, V, W \in \tau$ için $A \cap V \cap W \neq \emptyset$ dır.
3) $A \cap K \neq \emptyset, A \cap K' \neq \emptyset$ ve $A \subseteq K \cup K'$ olacak şekilde $K, K' \in \kappa$ için $A \cap K \cap K' \neq \emptyset$ dır (Yıldız 2005).

Teorem 2.28: (X,τ) topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Aşağıdaki önermeler denktir:

1) A kümesi (X,τ) ya göre bağlantısız bir alt kümedir.

2)$A \cap V \neq \emptyset, A \cap W \neq \emptyset$ ve $A \subseteq V \cup W$ olacak şekilde $\forall\, V, W \in \tau$ için $A \cap V \cap W = \emptyset$ dır.

3) $A \cap K \neq \emptyset, A \cap K' \neq \emptyset$ ve $A \subseteq K \cup K'$ olacak şekilde $\forall K, K' \in \kappa$ için $A \cap K \cap K' = \emptyset$ dır (Yıldız 2005).

Tanım 2.29: (X,τ) topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Eğer $A \cap V \neq \emptyset, A \cap W \neq \emptyset$ ve $(A \cap V) \cup (A \cup W) = A$ ve $(A \cap V) \cap (A \cup W) = \emptyset$ olacak şekilde $V, W \in \tau$ varsa, $V \cup W$ ye A nın bağlantısızlığı denir (Yıldız 2005).

Teorem 2.30: (X,τ) topolojik uzay olsun. Aşağıdaki ifadeler vardır:

1) $\forall i \in I$ için $A_i \subseteq X$ bağlantılı alt küme ve $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$ ise, $B = \bigcup_{i \in I} A_i$ kümesi bağlantılıdır.

2) $\forall x, y \in X$ nokta çiftini içeren bağlantılı X in bir alt kümesi varsa, X uzayı bağlantılıdır.

3) X in bağlantılı alt kümelerinden oluşan $\{A_i\}_{i \in I}$ ailesi, $\forall i \in I$ için $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ özelliğini sağlıyor ise, $B = \bigcup_{i \in I} A_i$ kümesi de bağlantılıdır (Yıldız 2005).

Teorem 2.31: Bağlantılı yoğun bir kümeye sahip her uzay bağlantılıdır (Yıldız 2005)

Teorem 2.32: (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ kümesi bağlantılı olsun. Bu durumda $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$ ise B kümesi bağlantılıdır (Koçak 2011).

Teorem 2.33: (X,τ) bağlantılı topolojik uzay, (Y,τ') herhangi bir topolojik uzay ve $f: X \to Y$ sürekli bir fonksiyon olsun.Bu durumda $f(X)$ de bağlantılıdır (Yıldız 2005).

Teorem 2.34: (X,τ) bağlantılı topolojik uzay, $Y=\{0,1\}$ ve Y üzerindeki topoloji ayrık topoloji olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

1) (X,τ) bağlantısız uzaydır.
2) X den Y ye sürekli ve örten bir f fonksiyonu vardır (Yıldız 2005).

Teorem 2.35: $(X_i,\tau_i)_{i\in I}$ topolojik uzaylar ailesi ve $(X=\prod_{i\in I}X_i,\tau)$ çarpım uzayı olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

1) $X=\prod_{i\in I}X_i$ çarpım uzayı bağlantılıdır,
2) $\forall i\in I$ için (X_i,τ_i) uzayı bağlantılıdır (Yıldız 2005).

Tanım 2.36 (Bileşen): (X,τ) bağlantılı topolojik uzayının $\{C_x\}_{x\in X}$ denklik sınıflar ailesinin her bir elemanına X uzayının *bileşenleri* denir (Yıldız 2005).

Teorem 2.37: (X,τ) bağlantılı topolojik uzay olsun. Aşağıdaki ifadeler vardır:

1) $C_x\subseteq X$ bağlantılı ve x noktasını eleman kabul eden en geniş bileşendir.
2) C_x kapalıdır (Yıldız 2005).

Teorem 2.38: (X,τ) bağlantılı topolojik uzay ve $x\neq y$ olmak üzere $x,y\in X$ olsun. Bu durumda $C_x=C_y$ veya $C_x\cap C_y=\emptyset$ dur (Koçak 2011).

Tanım 2.39 (Tamamen Bağlantısız Uzay): (X,τ) bağlantılı topolojik uzay olsun. $\forall x\in X$ noktasının C_x denklik sınıfı (bileşeni) $\{x\}$ tek nokta kümesi ise, X uzayına *tamamen bağlantısız uzay* denir (Yıldız 2005).

Tanım 2.40 (Yerel Bağlantılı Uzay): (X,τ) bağlantılı topolojik uzay ve $x\in X$ olsun. x noktasının her komşuluğu, x noktasının bağlantılı bir komşuluğunu kapsıyorsa, yani x

noktasının bağlantılı kümelerden oluşan bir komşuluklar tabanı (yerel tabanı) varsa, X uzayına x noktasında *yerel bağlantılı uzay* denir.

Eğer X uzayı her noktasında yerel bağlantılı ise, X uzayına *yerel bağlantılı uzay* denir (Yıldız 2005).

Teorem 2.41: (X, τ) yerel bağlantılı bir uzay olsun. Bu durumda X uzayının bileşenleri, hem açık hem de kapalı alt kümelerdir (Yıldız 2005).

Teorem 2.42: (X, τ) yerel bağlantılı bir uzay olsun. Aşağıdaki ifadeler vardır:

1) Yerel bağlantılı bir uzayın sürekli ve açık (veya kapalı) bir fonksiyon altındaki görüntüsü yerel bağlantılıdır.

2) X uzayının her alt uzayının bileşenleri X uzayında açıktır.

3) $A \subseteq X$ açık bir küme ve C, A alt uzayının bir bileşeni ise $b(C) \subseteq b(A)$ dır (Yıldız 2005).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Doku Uzayları

Tanım 3.1.1 (Doku Uzayı): S bir küme olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(S)$ ailesine S kümesinin bir *dokulanması*, $(S, \mathcal{S})$ çiftine de bir *doku uzayı* veya kısaca *doku* denir.

(1) $(\mathcal{S}, \subseteq)$ikilisi$S$ ve $\emptyset$ kümeyi kapsayan bir tam örgüdür.

(2) $(\mathcal{S}, \subseteq)$üzerindeki infimum ve supremum işlemleri, $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$üzerindeki arakesit ve birleşim işlemleri ile aşağıdaki anlamda bağlantılıdır. Tüm J indeks kümeleri için $j \in J, A_j \in \mathcal{S}$ olmak üzere,

$$\bigcap_{j \in J} A_j = \bigwedge_{j \in J} A_j$$

ve her sonlu J index kümesi için $j \in J, A_j \in \mathcal{S}$ olmak üzere,

$$\bigcup_{j \in J} A_j = \bigvee_{j \in J} A_j$$

dir.

(3) $\mathcal{S}$tamamen dağılımlıdır.

(4) $\mathcal{S}, S$kümesinin noktalarını ayırır. Yani, $s_1, s_2 \in S$ ve $s_1 \neq s_2$ olmak üzere $s_1 \in A$, $s_2 \notin A$ veya $s_2 \in A$, $s_1 \notin A$olacak şekilde bir $A \in \mathcal{S}$ vardır (Brown 1993a).

Tanım 3.1.2 (Tümleyenli Doku Uzayı): Eğer $\sigma: \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ fonksiyonu

(1) Her $A \in \mathcal{S}$ için $\sigma^2(A) = A$,

(2) Her $A, B \in \mathcal{S}$ için $A \subseteq B \Rightarrow \sigma(B) \subseteq \sigma(A)$

koşullarını gerçekliyorsa σ ya $\mathcal{S}$ üzerinde bir *tümleyen* işlemi ve $(S, \mathcal{S}, \sigma)$ ya da *tümleyenli doku uzayı* denir. Tümleyen işleminin bire-bir ve örten olduğu açıktır (Brown 1993a).

Tanım 3.1.3 (p-küme): $(S, \mathcal{S})$ bir doku uzayı ve her $s \in S$ için

$$P_s = \bigcap \{A \in \mathcal{S} | s \in A\}$$

olsun. P_s kümesine *p-küme* denir (Brown 1993a).

Tanım 3.1.4 (q-küme): $(S, \mathcal{S})$ bir doku uzayı ve her $s \in S$ için

$$Q_s = \bigvee \{A \in \mathcal{S} | s \notin A\} = \bigvee \{P_u | u \in S, P_s \nsubseteq P_u\}$$

olsun. $Q_s$kümesine *q-küme* denir (Brown 1993a).

Tanım 3.1.5 (Basit Doku): Eğer $(\mathcal{S}, \subseteq)$nin bütün moleküleri $\{P_s | s \in S\}$ ailesine aitse $(S, \mathcal{S})$ doku uzayına basit doku denir (Brown 1993a).

$\{P_s | s \in S\}$ kümesinin $\mathcal{S}$ dokusunun moleküllerinin bir kümesi olduğu açıktır ve $A \in \mathcal{S}$ için,

$$A = \bigvee_{s \in S} P_s = \bigcup_{s \in S} P_s$$

dir.

Dikkat edilirse, bir dokuda keyfi supremumla birleşimler aynı olmak zorunda değildir. Ancak bu durum, dokunun keyfi birleşimler altında kapalı olması durumunda gerçeklenir.

Tanım 3.1.6 (Sade Doku): Her $s \in S$ için $P_s \nsubseteq Q_s$oluyorsa, $(S, \mathcal{S})$ uzayına *sade doku* uzayı denir (Brown *et al.* 2004a).

Örnekler 3.1.7 :

(1) $\mathcal{R} = \{(-\infty, r) | r \in \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, r] \; | r \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}, \emptyset\}$ olmak üzere $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$ bir doku uzayıdır. Her $r \in \mathbb{R}$ için $P_r = (-\infty, r]$ve $Q_r = (-\infty, r)$dir. Her $r \in \mathbb{R}$ için Q_r kümesi de bir molekül ve $Q_r \notin \{P_r | r \in \mathbb{R}\}$ olduğundan $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$ dokusu basit değildir. Ayrıca bu doku uzayında supremum ile birleşim aynıdır (Brown and Ertürk 2000a).

(2) $\mathbb{I} = [0,1]$ ve $\mathcal{J} = \{[0, t] \mid t \in [0, 1]\} \cup \{[0, t) | t \in [0, 1]\}$ olsun. $(\mathcal{J}, \subseteq)$ tam ve tamamen dağılımlı bir örgüdür. Üstelik,$(\mathbb{I}, \mathcal{J})$çifti supremum ile birleşimin aynı olduğu bir dokudur. Burada $t \in \mathbb{I}$ için $P_t = [0, t]$ ve $Q_t = [0, t)$ olur. Dolayısıyla $(\mathbb{I}, \mathcal{J})$ dokusu sade ama basit değildir.

Ayrıca $t \in [0, 1]$ için $\lambda([0, t]) = [0, 1-t)$, $\lambda([0, t)) = [0, 1-t]$ ile tanımlı λ, bir tümleyen dönüşümüdür. $(\mathbb{I}, \mathcal{J}, \lambda)$ tümleyenli dokusu *birim aralık dokusu* olarak isimlendirilir (Brown and Ertürk 2000a).

(3) Açıkça $(X, \mathcal{P}(X))$ bir doku uzayıdır. Her $x \in X$ için, $P_x = \{x\}$, $Q_x = X \backslash \{x\}$ dir. $\mathcal{P}(X)$ in tüm molekülleri P_x biçimindedir. Her $x \in X$ için $P_x \nsubseteq Q_x$ olduğundan bu doku sadedir. Ayrıca, $\pi_X : Y \subseteq X \to X \backslash Y$ fonksiyonu $(X, \mathcal{P}(X))$ in tümleyenidir. $(X, \mathcal{P}(X), \pi_X)$ dokusu *tümleyenli ayrık doku* olarak adlandırılır (Brown and Ertürk 2000a).

(4) $L = (0,1]$ ve $\mathcal{L} = \{(0, r] : r \in [0,1]\}$ olmak üzere $(L, \mathcal{L})$ bir doku uzayıdır. Burada

$$(0,1] = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \left(0,1-\frac{1}{n}\right] \neq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(0,1-\frac{1}{n}\right] = (0,1)$$

olduğundan bu dokuda sup ile birleşim her zaman eşit değildir. $r \in L$ için, $P_r = Q_r = (0,r]$ dir. Bu dokunun bütün molekülleri P_r biçiminde olduğundan bu doku basittir. $P_r \nsubseteq Q_r$ olmadığından bu doku sade değildir. Son olarak $\lambda\big((0,r]\big) = (0,1-r]$ fonksiyonu $(L,\mathcal{L})$ dokusu üzerinde doğal bir tümleyendir. Yani $(L,\mathcal{L},\lambda)$ bir tümleyenli,basit bir dokudur (Brown and Ertürk 2000a).

Tanım 3.1.8 (Alt Doku): $(S,\mathcal{S})$ doku uzayı, $V \in \mathcal{S}$ ve $\mathcal{S}_V = \{A \cap V : A \in \mathcal{S}\}$ olsun. Bu durumda $\mathcal{V} = \mathcal{S}_V$ ailesine *V üzerinde indirgenmiş doku*, ve $(\mathcal{V},\mathrm{V})$ ikilisine de $(S,\mathcal{S})$ dokusunun bir *temel alt dokusudur* denir (Brown and Ertürk 2000b).

Tanım 3.9: $\{(S_i,\mathcal{S}_i) | i \in I\}$ dokuların bir ailesi ve $S = \prod_{i\in I} S_i$ kümesi, $(S_i)_{i\in I}$ kümelerinin kartezyen çarpımı olsun. Şimdi her $k \in I$ve $A \subseteq S_k$ için

$$Y_i = \begin{cases} A, & i = k \\ S_{i,} & i \neq k \end{cases}$$

olmak üzere, $E(k,A) = \prod_{i\in I} Y_i$ olsun. Şimdi de

$$\varepsilon = \left\{ \bigcup_{k\in K} E\,(k,L_k) | K \subseteq I, L_k \in \mathcal{S}_k \right\}$$

olarak tanımlansın. $\mathcal{S}$, ε kümesinin elemanlarının keyfi arakesitinden oluşsun. $(\mathcal{S},\subseteq)$ bir tam latis ve her K indeks kümesi, $A_\alpha \in \mathcal{S},\ \alpha \in K$ için $\bigwedge_{\alpha\in K} A_\alpha = \bigcap_{\alpha\in K} A_\alpha$ dir. Ayrıca

$$\bigvee_{\alpha\in K} A_\alpha = \bigcap \left\{ Q : \bigcup_{\alpha\in K} A_\alpha \subseteq Q \in \mathcal{S} \right\} = \bigcap \left\{ P : \bigcup_{\alpha\in K} A_\alpha \subseteq P \in \varepsilon \right\}$$

olduğu kolayca görülebilir (Brown 1993b).

Tanım 3.1.10 (Çarpım Dokusu): Yukarıda tanımlanan, $(S, \mathcal{S})$ dokusuna $\{(S_i, \mathcal{S}_i) | i \in I\}$ ailesinin *çarpım dokusu* denir ve $\mathcal{S} = \otimes_{i \in I} \mathcal{S}_i$ ile gösterilir (Brown and Ertürk 2000a).

Tanım 3.1.11 (Doku İzomorfizması): $(S_i, \mathcal{S}_i)$, $i = 1,2$ doku uzayları ve $f: S_1 \to S_2$ dönüşümü verilsin. f bire bir ve örten ve $\tilde{f}: \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$, $\tilde{f}: A \to f(A)$ bire bir ve örten ise f dönüşümüne bir *doku izomorfizması*, aralarında izomorfizma olan dokulara ise *izomorf dokular* denir ve $(S_1, \mathcal{S}_1) \approx (S_2, \mathcal{S}_2)$ biçiminde gösterilir Doku izomorfizması $\mathcal{S}_1$ ve $\mathcal{S}_2$ dokularının elemanlarını koruyan bire bir eşleyen ve iki dokunun sup ve inf işlemlerini koruyan bir fonksiyondur (Brown and Diker 1998a).

Sonuç 3.1.12 : $f: S_1 \to S_2$ bire bir ve örten bir fonksiyon ve S_1 in bir $\mathcal{S}_1$ dokulanması için $\mathcal{S}_2 = \{f(A): A \in \mathcal{S}_1\}$ olsun. Bu durumda $(S_2, \mathcal{S}_2)$ bir doku uzayıdır (Brown and Diker 1998a).

Tanım 3.1.13 (Difonksiyon) : (f, F) , $(S, \mathcal{S})$ 'den $(T, \mathcal{T})$ 'ya bir di-bağıntı olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa, (f, F) di-bağıntısına *difonksiyon* denir ve $(f, F): (S, \mathcal{S}) \to (T, \mathcal{T})$ya da $(S, \mathcal{S}) \xrightarrow{(f,F)} (T, \mathcal{T})$ ile gösterilir.

DF1 $s, s' \in S$ için $P_s \not\subseteq Q_{s'}$ ise $f \not\subseteq \bar{Q}_{(s,t)}$ ve $\bar{P}_{(s',t)} \not\subseteq F$ olacak şekilde bir $t \in T$ vardır.
DF2 $t, t' \in T$ ve $s \in S$ için $f \not\subseteq \bar{Q}_{(s,t)}$ ve $\bar{P}_{(s,t')} \not\subseteq F$ ise $P_{t'} \not\subseteq Q_t$dir.

$(S, \mathcal{S})$ üzerindeki (i_S, I_S) birim di-bağıntısı bir di-fonksiyondur ve *birim difonksiyon* olarak isimlendirilir (Brown *et al.* 2004a).

Teorem 3.1.14: (f, F), $(S, \mathcal{S})$ 'den $(T, \mathcal{T})$ 'ya bir di-bağıntı olsun. Aşağıdakiler denktir.

(1) (f, F)birdifonksiyondur.

(2) Aşağıdaki kapsamalar geçerlidir.

a) Her $A \in \mathcal{S}$ için $f^{\leftarrow}(F^{\rightarrow}A) \subseteq A \subseteq F^{\leftarrow}(f^{\rightarrow}A)$ ve
b) Her $B \in \mathcal{T}$ için $f^{\rightarrow}(F^{\leftarrow}B) \subseteq B \subseteq F^{\rightarrow}(f^{\leftarrow}B)$ dir.

(3) Her $B \in \mathcal{T}$ için $f^{\leftarrow}B = F^{\leftarrow}B$'dir.

Şimdi $(f, F): (S, \mathcal{S}) \to (T, \mathcal{T})$ bir difonksiyon, $A \in \mathcal{S}$ ve $B \in \mathcal{T}$ olsun. Bu durumda, $f^{\rightarrow}A(F^{\rightarrow}A)$ 'ya A kümesinin *görüntüsü (ko- görüntüsü)* denir. Bu kümeler genelde eşit değildir. Diğer yandan, $f^{\leftarrow}B(F^{\leftarrow}B)$ 'ye Bkümesinin *ters görüntüsü (ters ko-görüntüsü)* denir ve yukarıdaki teoreme göre bu kümeler eşittir (Brown *et al.* 2004a).

Tanım 3.1.15 (Örtenlik ve Birebirlik):$(f, F): (S, \mathcal{S}) \to (T, \mathcal{T})$ bir difonksiyon olsun. Bu durumda (f, F) fonksiyonuna

SUR. $t, t' \in T, P_t \nsubseteq Q_{t'} \Longrightarrow \exists s \in S,\ f \nsubseteq \bar{Q}_{(s,t')}$ ve $\bar{P}_{(s,t)} \nsubseteq F$ koşulunu sağlıyorsa *örten* denir.

INJ. $s, s' \in S$ve$t \in T, f \nsubseteq \bar{Q}_{(s,t)}$ ve $\bar{P}_{(s',t)} \nsubseteq F \Longrightarrow P_s \nsubseteq Q_{s'}$ koşulunu sağlıyorsa *birebir* denir (Brown *et al.* 2004a).

Teorem 3.1.16: $\varphi: (S_1, \mathcal{S}_1) \to (S_2, \mathcal{S}_2)$ dokusal izomorfizma olsun. O zaman,

(1) $(f_\varphi, F_\varphi): (S_1, \mathcal{S}_1) \to (S_2, \mathcal{S}_2)$ dokular ve difonksiyonların kategorisinde (dfTex) bir izomorfizmadır.

$$f_\varphi = \bigvee\{\bar{P}_{(s,t)}: P_{\varphi(s)} \nsubseteq Q_t\} \text{ ve } F_\varphi = \bigcap\{\bar{Q}_{(s,t)}: P_t \nsubseteq Q_{\varphi(s)}\}$$

(2) Her $A \in \mathcal{S}_1$ için $f_\varphi{}^{\rightarrow}A = F_\varphi{}^{\rightarrow}A = \varphi(A)$

(3) Her $B \in \mathcal{S}_2$ için $f_\varphi{}^{\leftarrow}B = F_\varphi{}^{\leftarrow}B = \varphi^{-1}(B)$ (Uğur and Diker 2006).

Tanım 3.1.17 (Ditopolojik Doku Uzayı): $(S, \mathcal{S})$ doku uzayı olsun.

Aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\tau \subseteq \mathcal{S}$ ailesine $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir *topoloji*, ve τ nun elemanlarına topolojinin *açık kümeleri* denir

(1) $S, \emptyset \in \tau$
(2) $G_1, G_2 \in \tau \Longrightarrow G_1 \cap G_2 \in \tau$
(3) $G_j \in \tau, j \in J \Longrightarrow \bigvee_{j \in J} G_j \in \tau$

Aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\kappa \subseteq \mathcal{S}$ ailesine $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir *ko-topoloji*, ve κ nın elemanlarına ko-topolojinin *kapalı kümeleri* denir.

(1) $S, \emptyset \in \kappa$
(2) $K_1, K_2 \in \kappa \Longrightarrow K_1 \cup K_2 \in \kappa$
(3) $K_j \in \kappa, j \in J \Longrightarrow \bigcap_{j \in J} K_j \in \kappa$

τ, $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir topoloji, κ $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir ko-topoloji ise bu durumda (τ, κ) ikilisine $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir *ditopoloji*, ve $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$' ya da bir *ditopolojik doku uzayı* denir (Brown and Diker 1998a).

Genelde açık kümeler ile kapalı kümeler arasında bir ilişki olmak zorunda değildir. Bununla beraber σ, $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir tümleyen ve (τ, κ) ditopolojisi $\kappa = \sigma(\tau), \kappa = \{\sigma(G) : G \epsilon \tau\}$koşulunu sağlıyorsa bu durumda (τ, κ) ye $(S, \mathcal{S}, \sigma)$ üzerinde *tümleyensel ditopoloji*, $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa, \sigma)$'ya da bir *tümleyensel ditopolojik doku uzayıdır* denir (Brown and Diker 1998a).

Örnekler 3.1.18:

(1) $(X, \mathcal{P}(X), \pi_X)$ ayrık dokusu üzerinde bir (τ, κ) tümleyensel ditopolojisi ele alalım. Bu durumda τ, X üzerinde bilinen anlamda topoloji ve $\kappa = \pi(\tau) = \{F \subseteq X: \pi(F) = X \backslash F \in \tau\}$ ise τ topolojisi bilinen anlamda kapalı kümelerden oluşur. Sonuç olarak $(X, \mathcal{P}(X), \pi_X)$ ayrık dokusu üzerinde bir (τ, κ) tümleyensel ditopolojisi, kesinlikle bir noktasal topolojiye karşılık gelir. Ayrıca (X, τ) bir noktasal topolojik uzay ise $\kappa = \{F \subseteq X: \pi_X(K) = X \backslash K \in \tau\}$ olmak üzere $(X, \mathcal{P}(X), \pi_X, \tau, \kappa)$ bir tümleyensel ditopolojik uzaydır (Brown *et al.* 2004b).
(2) $(S, \mathcal{S})$ herhangi bir doku olsun. Açıkça $\tau = \mathcal{S}$, $(S, \mathcal{S}, \sigma)$ üzerinde bir topoloji ve $\kappa = \mathcal{S}$, $(S, \mathcal{S}, \sigma)$ üzerinde bir ko-topolojidir. Ayrıca $(S, \mathcal{S})$ üzerindeki herhangi bir (τ, κ) ditopolojisi için; $\tau = \kappa = \mathcal{S}$ ditopolojisine *ko-ayrık,* $\tau = \kappa = \mathcal{S}$ ise (τ, κ) ditopolojisine *ikili-ayrık ditopoloji* denir (Brown *et al.* 2004b).
(3) $(S, \mathcal{S})$ herhangi bir doku olsun. Açıkça $\tau = \{\emptyset, S\}$, $(S, \mathcal{S}, \sigma)$ üzerinde bir topoloji ve $\kappa = \{\emptyset, S\}$, $(S, \mathcal{S}, \sigma)$ üzerinde bir ko-topolojidir. Ayrıca $(S, \mathcal{S})$ üzerindeki herhangi bir (τ, κ) ditopolojisi için; $\tau = \{\emptyset, S\}$ ise (τ, κ) ditopolojisine *ayrık olmayan*, $\kappa = \{\emptyset, S\}$ ise (τ, κ) ditopolojisine *ko-ayrık olmayan*, $\tau = \kappa = \{\emptyset, S\}$ ise (τ, κ) ditopolojisine *ikili-ayrık olmayan* ditopoloji denir (Brown, Ertürk and Dost 2004b).
(4) $(\mathbb{I}, \mathcal{J}, \lambda)$ dokusunu göz önüne alalım. Burada, $\tau = \{[0, r] \mid r \in [0, 1]\} \cup \{\mathbb{I}\}$ ve $\kappa = \{[0, r) \mid r \in [0, 1]\} \cup \{\emptyset\}$ biçiminde tanımlanan (τ, κ) çifti $(\mathbb{I}, \mathcal{J}, \lambda)$ dokusu üzerinde bir ditopolojidir ve özel olarak bu ditopolojiye *doğal ditopoloji* denir (Brown *et al.* 2004b).

Tanım 3.1.19 (Komşuluk ve Kokomşuluk): (τ, κ), $(S, \mathcal{S})$ dokusu üzerinde bir ditopoloji olsun.

(i) $s \in S^b$ için $P_s \subseteq G \subseteq N \nsubseteq Q_s$ olacak şekilde bir $G \in \tau$ varsa $N \in \mathcal{S}$ kümesine, s nin bir *komşuluğudur* denir.
(ii) $s \in S^b$ için $P_s \subseteq M \subseteq K \nsubseteq Q_s$ olacak şekilde bir $K \in \kappa$ varsa $M \in \mathcal{S}$ kümesine, s nin bir *kokomşuluğudur* denir.

Her ne kadar bir noktanın kokomşuluğu, her $s \in S$ için tanımlansa da sadece S^b nin noktalarının kokomşuluklarını gözönünene almamız yeterli olabilir. Komşuluk ve kokomşuluk kavramları arasındaki dualite, tanımlarından açıkça görülmektedir (Brown *et al.* 2006).

Tanım 3.1.20 (Kapanış, İç ve Dış): (τ, κ), $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir ditopoloji ve $A \in \mathcal{S}$ olsun.

$$[A] = \bigcap \{K \in \kappa : A \subseteq K\}$$

kümesine A nın *kapanışı* ve,

$$]A[= \bigvee \{G \in \tau : G \subseteq A\}$$

kümesine A nın *içidir* ve,

$$ext(A) = \bigvee \{G : G \in \tau \ ve \ G \cap A = \emptyset\}$$

kümesine A nın *dışıdır* denir (Brown *et al.* 2004b).

Örnek 3.14 (4) deki ditopoloji için $\big[[0,r)\big] = [0,r]$ ve $][0,r)[= [0,r)$ dir. Bu ditopolojinin, [0,1] üzerinde bilinen noktasal topolojiye benzerliği dikkat çekicidir. $(\mathbb{I}, \mathcal{J}, \lambda)$ üzerinde böyle bir ditopolojik yapının varlığı, bu doku uzayı üzerinde topolojik açıdan zengin araştırma imkanları sunmaktadır (Brown *et al.* 2004b).

Tanım 3.1.21 (İkili Yoğunluk): (τ, κ), $(S, \mathcal{S})$ dokusu üzerinde bir ditopoloji ve $A \in \mathcal{S}$ olsun.

(1) Eğer her $G \in \tau \backslash \{\emptyset\}$ için, $G \cap A \neq \emptyset$ oluyorsa A kümesine S kümesi üzerinde *yoğundur* denir.

(2) Eğer her $F \in \kappa \backslash \{S\}$ için, $A \nsubseteq F$ oluyorsa A kümesine S kümesi üzerinde *koyoğundur* denir.
(3) Eğer A kümesine S kümesi üzerinde yoğun ve koyoğun ise, A kümesi *ikili yoğundur* denir (Uğur and Diker 2006).

Tanım 3.1.22 (Ditopolojik Alt Doku Uzayı): $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayı ve $(V, \mathcal{S}_V)$, $V \in \mathcal{S}$ için $(S, \mathcal{S})$ nin esas bir dokusu olsun. O zaman $(V, \mathcal{S}_V, \tau_V, \kappa_V)$, $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayının bir alt uzayıdır denir ve $\tau_V = \{V \cap G : G \in \tau\}$ ve $\kappa_V = \{V \cap F : F \in \kappa\}$ dir. Eğer $V \in \tau$ ise , V bir açık alt uzaydır ve $V \in \kappa$ ise, V kapalı bir alt uzaydır denir (Tantawy *et al.* 2014)

Teorem 3.1.23: $(V, \mathcal{S}_V, \tau_V, \kappa_V)$, $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayının bir alt uzayı olsun ve $A \subseteq V$;

(1) A, τ_V-açıkdır ancak ve ancak herhangi bir τ-açık G kümesi için,

$$A = V \cap G$$

dir.

(2) A, κ_V-kapalıdır ancak ve ancak herhangi bir κ -kapalı F kümesi için

$$A = V \cap F$$

dir (Tantawy *et al.* 2014).

Teorem 3.1.24: $(V, \mathcal{S}_V, \tau_V, \kappa_V)$, $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayının bir alt uzayı olsun.

(1) Her τ_V açık kümesi τ açık kümedir ancak ve ancak $V \in \tau$ dur.
(2) Her κ_V kapalı kümesi κ-kapalı kümedir ancak ve ancak $V \in \kappa$ dur (Tantawy *et al.* 2014).

Sonuç 3.1.25: $(V, \mathcal{S}_V, \tau_V, \kappa_V)$, $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayının bir alt uzayı olsun ve $A \subseteq V$. A, τ_V açık kümesidir ancak ve ancak A τ açık kümedir (Tantawy *et al.* 2014).

Sonuç 3.1.26: $(V, \mathcal{S}_V, \tau_V, \kappa_V)$, $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayının bir alt uzayı olsun ve $A \subseteq V$. A, κ_V kapalı kümesidir ancak ve ancak A κ-kapalı kümedir (Tantawy *et al.* 2014)

Tanım 3.1.27 (İkili Süreklilik): $k = 1, 2$ için $(S_k, \mathcal{S}_k, \tau_k, \kappa_k)$ ditopolojik uzaylar ve $(f, F): (S_1, \mathcal{S}_1) \to (S_2, \mathcal{S}_2)$ bir difonksiyon olsun.

(1) *Her* $G \in \tau_2$ için $F^{\leftarrow}G \in \tau_1$ ise, (f, F) 'ye *sürekli*,
(2) Her $K \in \kappa_2$ için$f^{\leftarrow}K \in \kappa_1$ise, (f, F) 'ye *ko-sürekli*,
(3) Eğer (f, F) hem sürekli hem de ko-sürekli ise, (f, F) difonksiyonuna *ikili-sürekli* denir (Brown *et al.* 2004b).

(4) **Tanım 3.1.28 (Açık, Kapalı Difonksiyon ve Dihomeomorfizma):** $k = 1, 2$ için $(S_k, \mathcal{S}_k, \tau_k, \kappa_k)$ ditopolojik doku uzayları ve $(f, F): (S_1, \mathcal{S}_1) \to (S_2, \mathcal{S}_2)$ bir difonksiyon olsun. Bu durumda,

(1) $G \in \tau_1 \Longrightarrow f^{\rightarrow}G \in \tau_2 (F^{\rightarrow}G \in \tau_2)$ koşulunu sağlıyorsa (f, F) *açıktır(ko-açıktır)* denir.
(2) $K \in \kappa_2 \Longrightarrow F^{\rightarrow}K \in \kappa_2 (f^{\rightarrow}K \in \kappa_2)$ koşulunu sağlıyorsa (f, F) *kapalıdır(ko-kapalıdır)* denir.
(3) (f, F) difonksiyonu bire-bir, örten, ikili-sürekli ve tersi ikili-sürekli ise, (f, F)difonksiyonuna bir *dihomeomorfizma* denir (Brown *et al.* 2004b).

Tanım 3.1.29: $(S, \mathcal{S})$ bir doku uzayı ve $A \subseteq S$ olsun. O zaman;

(1) $\lambda(A) = \bigvee_{s \in A} P_s$

olacak şekilde $\lambda(A)$ tanımlarsak. Buradan $\lambda(A)$ A kümesini içeren $\mathcal{S}$ nin en küçük elemanıdır.

(2) Eğer $\lambda(A) = \bigcup_{s\in A} P_s$ ise A ya *(saturated) doygundur* denir.

Şimdi $(S_{j,}\mathcal{S}_j)$, $j = 1,2$ doku uzayı ve $f: S_1 \to S_2$ bir dönüşüm. $\tilde{f}^{-1}: \mathcal{S}_2 \to \mathcal{S}_1$ her $L \in \mathcal{S}_2$ için $\tilde{f}^{-1}(L) = \lambda_1(f^{-1}(L))$ olacak şekilde bir dönüşüm tanımlayalım öyleki λ_1 (1) deki gibi, $\mathcal{S}_1$ için tanımlanmıştır (M.Diker 1999).

Teorem 3.1.30: Bir $f: S_1 \to S_2$ fonksiyonu için aşagıdaki ifadeler denktir;

(1) her $L \in \mathcal{S}_2$ için, $f^{-1}(L) \in \mathcal{S}_1$,
(2)her $L \in \mathcal{S}_2$ için, $\tilde{f}^{-1}(L) = f^{-1}(L)$ dir (Diker 1999).

Tanım 3.1.31: $(\mathcal{S}_j, \tau_j, \kappa_j)$, S_j , $j = 1,2$, uzayında bir ditopolojik uzay ve $f: S_1 \to S_2$

bir dönüşüm olsun. Eğer

(1) her $G \in \tau_2$ için, $\tilde{f}^{-1}(G) \in \tau_1$ ve
(2) her $F \in \kappa_2$ için , $\tilde{f}^{-1}(F) \in \kappa_1$.

ise f *süreklidir* denir (Diker 1999).

4. ARAŞTIRMA ve BULGULAR

4.1. Ditopolojik Doku Uzaylarında Bağlantılılık

Tanım 4.1.1 (Parçalanış):$(S,\mathcal{S})$ bir doku uzayı ve $\emptyset \neq Z \subseteq S$ olsun. Eğer $A \cap Z \neq \emptyset$, $Z \nsubseteq B$ ve $A \cap Z = B \cap Z$ ise $\{A,B\} \subseteq \mathcal{P}(S)$, Z kümesinin bir *parçalanışı* denir.

Burada A ve B nin rolleri yer değiştirebilir. Gerçekten, eğer Z nin bir ayrışımı $\{A,B\}$ ise $B \cap Z \neq \emptyset, Z \nsubseteq A$ dır. Eğer $\mathcal{S} = \mathcal{P}(S)$ şeklinde alınırsa kolayca görülebilir ki basit anlamda $\{A, S\backslash B\}$ ve $\{B, S\backslash A\}$, Z nin parçalanışıdır. Örneğin, $Z \subseteq A \cup (S\backslash B)$, $Z \cap A \neq \emptyset$, $Z \cap (S\backslash B) \neq \emptyset$ ve $Z \cap A \cap (S\backslash B) = \emptyset$ dir (Diker 1999).

Tanım 4.1.2 (Bağlantılılık): $(S,\mathcal{S},\tau,\kappa)$ bir ditopolojik uzayı ve $Z \subseteq S$ olsun. Z nin $G \in \tau$ ve $F \in \kappa$ olacak şekilde $\{G,F\}$ parçalanışı yoksa Z bağlantılıdır denir.

$S^* = \{0,1\}$ ve $\mathcal{S}^* = \mathcal{P}(S^*)$ olsun. $\tau^* = \kappa^* = \{S^*, \{0\}, \emptyset\}$ olacak şekilde $(S^*,\mathcal{S}^*,\tau^*,\kappa^*)$ ditopolojik doku uzayını göz önüne alalım. S den S^* tüm sürekli fonksiyonların ailesini $C(S,S^*)$ şeklinde ifade edebiliriz (Diker 1999).

Önerme 4.1.3:

(1) S nin bağlantılı olması için gerek ve yeterli koşul, $\tau \cap \kappa = \{S,\emptyset\}$ olmasıdır.
(2) $s \neq r$ olacak şekilde tüm $s,r \in S$ için $s,r \in Z$ olacak şekilde bir $Z \subseteq S$ bağlantılı kümesi varsa S bağlantılıdır.
(3) S bağlantılı olması için gerek ve yeter şart her $f \in C(S,S^*)$ sürekli fonksiyonun sabit olmasıdır (Diker 1999).

İspat:

(1) Kabul edelim ki $(\tau \cap \kappa) \neq \{S, \emptyset\}$ olsun. $H \neq S$ ve $H \neq \emptyset$ olacak şekilde bir $H \in \tau \cap \kappa$ kümesi seçebiliriz. Açıkça görülür ki $H \cap S \neq \emptyset$, $S \nsubseteq H$ ve $H \cap S = H \cap S$ dir. Buradan $\{H, H\}$, S kümesinin bir parçalanışıdır ve bu bir çelişkidir. Tersi yönde, eğer $(\tau \cap \kappa) = \{S, \emptyset\}$ ise, S bağlantılı olur. Aksi taktirde S nin bir $\{G, F\}$ parçalanışı bulabiliriz ve buradan $G = F \in \tau \cap \kappa \neq \{S, \emptyset\}$ dir.

(2) Kabul edelim ki S bağlantılı değil. (1) den $(\tau \cap \kappa) \neq \{S, \emptyset\}$ dır. $H \neq S$ ve $H \neq \emptyset$ olacak şekilde bir $H \in \tau \cap \kappa$ kümesi alalım. O zaman $s \notin H$ ve $r \in H$ olacak şekilde $s, r \in S$ seçilebilir. Hipotezden $s, r \in Z$ olacak şekilde bir Z bağlantılı kümesi vardır. $H \cap S \neq \emptyset, S \nsubseteq H$ olduğunda, $\{H, H\}$, Z nin bir parçalanışıdır ve bu Z nin bağlantılılığıyla çelişir.

(3) S bağlantılı olsun. (1) den $(\tau \cap \kappa) = \{S, \emptyset\}$ dir. Eğer $f: S \to S^*$ sürekli bir fonksiyon ise $\tilde{f}^{-1}(\{0\}) = S$ veya $\emptyset$ dir. Bunun anlamı f fonksiyonu sabittir. Tersi yönde, kabul edelim ki tüm sürekli f fonksiyonu sabittir ve S bağlantılı değildir. $H \neq S$ ve $H \neq \emptyset$ olacak şekilde bir $H \in \tau \cap \kappa$ kümesi seçelim. Her $s \notin H$ için $f(H) = \{0\}$ ve $f(s) = 1$ olacak şekilde bir $f: S \to S^*$ fonksiyonu tanımlayalım. O zaman f sürekli olur fakat sabit olmaz.

Açıklama 4.1.4: Tüm $s \in S$ ler için , $\{s\}$ tek nokta kümesi bağlantılıdır. Eğer $(G, F) \in (\tau, \kappa)$, $\{s\} \cap G \neq \emptyset$ ve $\{s\} \nsubseteq F$ ise $\{s\} \cap G = \{s\} \neq \{s\} \cap F = \emptyset$ olur. Böylelikle $\{s\}$ bağlantılıdır (Diker 1999).

Örnekler 4.1.5:

(1) Açıkça görülüyor ki $(S^*, \mathcal{S}^*, \tau^*, \kappa^*)$ ditopolojik doku uzayı bağlantılı değildir.

(2) $S = \mathbb{R}$ ve $\mathcal{S} = \{(-\infty, a) | a \in \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, b] \, | b \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}, \emptyset\}$ olsun. Açıkça görülüyor ki $(\mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayı bağlantılıdır.

Burada $\tau = \{(-\infty, a) | a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}, \emptyset\}$ ve $\kappa = \{(-\infty, b] \,| b \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}, \emptyset\}$ dir (Diker 1999)

Teorem 4.1.6: Eğer $\{Z_i : i \in I\}$, $\mathcal{S}$ de $\bigcap_{i \epsilon I} Z_i \neq \emptyset$ şeklindeki bağlantılı kümelerin bir ailesi ise $\bigvee_{i \in I} Z_i$ de bir bağlantılı kümedir (Diker 1999).

İspat: Varsayalım ki $Z = \bigvee_{i \in I} Z_i$ bağlantılı olmasın. $(G, F) \in (\tau, \kappa)$ olacak şekilde Z nin bir $\{G, F\}$ parçalanışını alalım. O zaman $Z \cap G \neq \emptyset, Z \nsubseteq F$ ve $Z \cap G = Z \cap F$ olur. Açıkça görülüyor ki her $i \in I$ için $Z_i \cap F = Z_i \cap G$ dir. Her bir $i \in I$ için Z_i bağlantılı olduğunda $Z_i \cap G = \emptyset$ veya $Z_i \subseteq F$ yazılabilir. Şimdi $s \in \bigcap_{i \epsilon I} Z_i$ yi seçelim. O zaman $s \in G$ ya da $s \notin F$ olur. Gerçekten, $s \notin G$ ve $s \in F$ olursa $s \notin Z \cap G$ ve $s \in Z \cap F$ olur. Buradan $Z \cap G \neq Z \cap F$ bir çelişkidir. Kabul edelim ki $s \in G$ dir. O zaman tüm $i \in I$, $Z_i \cap G \neq \emptyset$ dir. Buradan tüm $i \in I$ için $Z_i \subseteq F$ elde edilir ve böylece $\bigvee_{i \epsilon I} Z_i = Z \subseteq F$ bize bir çelişki verir. Şimdi $s \notin F$olduğunu kabul edelim. Tüm $i \in I$ için $s \in Z_i$ olunca $Z_i \nsubseteq F$ olur. Buradan tüm $i \in I$ için, $Z_i \cap G = \emptyset$ dir. $\mathcal{S}$ tamamen dağılımlı olduğundan $G \cap (\bigvee_{i \epsilon I} Z_i) = \bigvee_{i \epsilon I}(G \cap Z_i) = \emptyset$ olur ve böylece $G \cap Z = \emptyset$ bir çelişkidir. Böylelikle ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.7: $Z \subseteq S$ bağlantılı bir küme, $Z \subseteq A \subseteq [Z]$ ve $ext(Z) \cap A = \emptyset$ olsun. O zaman A da bağlantılıdır (Diker 1999).

İspat: A nın bağlantılı olmadığını varsayalım. O zaman $G \in \tau$ ve $F \in \kappa$ olacak şekilde A nın bir $\{G, F\}$ parçalanışını seçebiliriz. Bir parçalanışın tanımından $G \cap A \neq \emptyset, A \nsubseteq F$ ve $G \cap A = F \cap A$ olur. $Z \subseteq A$ olduğunda açıkça görülür ki $G \cap Z = F \cap Z$ dir. Hipotezden Z bağlantılıdır ve buradan $Z \cap G = \emptyset$ ya da $Z \subseteq F$ dir. Kabul edelim ki $\cap G = \emptyset$, o zaman $G \subseteq ext(Z)$ dir. $ext(Z) \cap A = \emptyset$, $A \cap G = \emptyset$ olunca bir çelişkidir. Şimdi kabul edelim ki $Z \subseteq F$. $F \in \kappa$, $[Z] \subseteq F$ olduğundan $A \subseteq F$ dir ve buradan sonuç çıkar.

Tanım 4.1.8 (Bileşen) :Eğer Z bir maksimal bağlantılı küme ise $Z \subseteq S$ ye bir *bileşen(component)* denir (Diker 1999).

Teorem 4.1.9: Z bir bileşen ve $ext(Z) = \emptyset$ ise $Z = [Z]$ dir (Diker 1999).

İspat: $s \notin Z$ olsun. Z maksimal olduğundan, $Z \cup \{s\}$ bir bağlantılı küme olabilemez. $G \in \tau$ ve $F \in \kappa$ olacak şekilde $Z \cup \{s\}$ nin bir $\{G, F\}$ parçalanışını alalım. O zaman $(Z \cup \{s\}) \cap G \neq \emptyset$, $Z \cup \{s\} \nsubseteq F$ ve $(Z \cup \{s\}) \cap G = (Z \cup \{s\}) \cap F$ dir. $Z \cap G = Z \cap F$ olduğunda $Z \cap G = \emptyset$ ya da $Z \subseteq F$ dir. Kabul edelim ki $Z \cap G = \emptyset$, o zaman $s \in G$ dir ve böylece $s \in ext(Z)$ dir. Ama bu $ext(Z) = \emptyset$ olmasıyla çelişkilidir. Eğer $Z \subseteq F$ ise $s \notin F$ dir ve buradan $s \notin [Z]$ dir.

Teorem 4.1.10: Z, bir $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayında bir bağlantılı küme ve f teorem 3.1.30 un denk şartlarından birini sağlayan bir $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayından $(\mathcal{S}', S', \tau', \kappa')$ ditopolojik doku uzayına sürekli bir fonksiyonu olsun. O zaman $f(Z)$, S' üzerinde bağlantılıdır (Diker 1999).

İspat: Varsayalım ki $f(Z)$ bağlantılı değil. $G \in \tau'$ ve $F \in \kappa'$ olacak şekilde $f(Z)$ nin bir parçalanışı $\{G, F\}$ olsun. O zaman $f(Z) \cap G \neq \emptyset$, $f(Z) \nsubseteq F$ ve $f(Z) \cap G = f(Z) \cap F$ olur. $\tilde{f}^{-1}(G) = f^{-1}(G)$ ve $\tilde{f}^{-1}(F) = f^{-1}(F)$ olduğundan, açıkça görülürki $\{f^{-1}(G), f^{-1}(F)\}$, Z nin bir parçalanışıdır öyle ki $f^{-1}(G) \in \tau$, $f^{-1}(F) \in \kappa$ dır ve bu bariz bir şekilde çelişkidir.

Tanım 4.1.11 (Yoğun Küme): $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ bir ditopolojik doku uzayı ve $Z \subseteq S$ olsun. Eğer $[Z] = S$ ise Z, S üzerinde *yoğundur* denir (Diker 1999).

Boştan farklı bir S_i kümesi üzerinde her $i \in I$ için $(\mathcal{S}_i, \tau_i, \kappa_i)$ bir ditopolojik doku uzayı olsun. $S = \prod_{i \in I} S_i$ olacak şekilde $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik çarpım doku uzayını göz önüne alalım. Bir $s = (s_i)_{i \in I} \in S$ noktasını alalım. Her bir $j \in I$ için

$$E(s,j) = S_j \times \prod \{\{s_i\}: i \in I \backslash \{j\}\}$$

şeklinde tanımlanır (Diker 1999).

Yardımcı Teorem 4.1.12: $\{s_i\}$ üzerinde her bir $i \neq j$ için $\mathcal{S}_{s_i} = \tau_{s_i} = \kappa_{s_i} = \{\{s_i\}, \emptyset\}$ olacak şekilde $(\mathcal{S}_{s_i}, \tau_{s_i}, \kappa_{s_i})$ ditopolojik doku uzayını göz önüne alalım. Eğer $(\mathcal{S}', \tau', \kappa')$, $E(s,j)$ üzerinde $\{(\mathcal{S}_j, \tau_j, \kappa_j)\} \cup \{(\mathcal{S}_{s_i}, \tau_{s_i}, \kappa_{s_i}): i \in I \backslash \{j\}\}$ ailesinin ditopolojik çarpımı ise $\pi_j((a_i)_{i \in I}) = a_j$ koşulunda, $f(a_j) = (a_i)_{i \in I}$ şeklinde tanımlı $f: S_j \to E(s,j)$ fonksiyonu süreklidir (Diker 1999).

Teorem 4.1.13: Her $i \in I$ için boştan farklı bir S_i kümesi üzerinde $(\mathcal{S}_i, \tau_i, \kappa_i)$ bir ditopolojik doku uzayı olsun. O zaman $S = \prod_{i \in I} S_i$ olacak şekilde $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayı bağlantılıdır ancak ve ancak her bir $i \in I$ için $(S_i, \mathcal{S}_i, \tau_i, \kappa_i)$ bağlantılıdır (Diker 1999).

İspat: $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ bağlantılı olsun. π_i projeksiyon fonksiyonu teorem 3.1.30 un denk şartlarından birini sağlayan sürekli bir fonksiyon olduğundan teorem 4.1.10 dan her bir $i \in I$ için $(S_i, \mathcal{S}_i, \tau_i, \kappa_i)$ bağlantılıdır.

Şimdi varsayalım ki her bir $i \in I$ için $(S_i, \mathcal{S}_i, \tau_i, \kappa_i)$ bağlantılı olsun. Bir $s_0 \in S = \prod_{i \in I} S_i$ noktasını alalım. En fazla n-koordinatta, $s_0^n \in \prod_{i \in I} S_i$, s_0 dan farklı herhangi bir nokta olsun. Göstereceğiz ki s_0 ve s_0^n noktaları için $S' \subseteq S$ olacak şekilde bir S' bağlantılı kümesi vardır. Tümevarım yöntemiyle kanıtlayalım. $n = 1$ için bu iddia doğrudur. Bunun ispatı için j.koordinatta s_0 ve $s_0^1 = (s_i)_{i \in I}$ farklı olsun. $S' = E(s,j)$ dersek yardımcı teorem 4.1.12 den $\pi_j((a_i)_{i \in I}) = a_j$ olacak şekilde $f(a_j) = (a_i)_{i \in I}$ şeklinde tanımlı $f: S_j \to E(s,j)$ sürekli fonksiyonu tanımlanabilir. Açıktır ki teorem 3.1.30 un denk şartlarında birini f fonksiyonu sağlar. O zaman teorem 4.1.10 dan $(\mathcal{S}', S', \tau', \kappa')$ bağlantılıdır ve $s_0, s_0^1 \in S'$ dir. Basitçe görülüyor ki S' de S üzerinde bağlantılıdır. Şimdi varsayalım ki iddiamız $n-1$ için doğru olsun. $s_0^n \in S$ ve s_0^n en fazla $n-1$ koordinatta s_0 dan farklı bir nokta olsun. $n=1$ için iddiamız doğrudur ve buradan s_0^n ve s_0^{n-1} için s_0^n, $s_0^{n-1} \in S_1$ olacak şekilde bir S_1 bağlantılı kümesi vardır. Varsayımdan s_0 ve s_0^{n-1} bir S_2 kümesinde bulunur. $s_0^{n-1} \in S_1 \cap S_2$ olduğundan teorem 4.1.6 dan $S_1 \cup S_2$ bağlantılıdır. Şimdi s_0 ı içeren tüm bağlantılı kümelerin birleşimi Z olsun. Teorem 4.1.6 dan Z bağlantılıdır. En fazla sonlu koordinatta s_0 dan farklı noktaların Z' kümesini göz önüne alalım. Açıkça $Z' \subseteq Z$ dir.

Şimdi Z nin S üzerinde yoğun olduğunu göstereceğiz öyle ki $[Z]=S$ dir. $F \in \kappa$, $F \neq S$ olsun. Herhangi A indeks kümesi ve herhangi sonlu B kümesi için

$$F = \bigcap_{\alpha \in A} \bigcup_{j \in B} E(j, F_j^\alpha),\ F_j^\alpha \in \kappa_j$$

şeklinde yazılabilir. Herhangi bir $\alpha \in A$ ve her bir $j \in B$ için $s_j^\alpha \notin F_j^\alpha$ yi alalım. $j \in B$ için $\pi_j(s) = s_j^\alpha$ ve $i \in I \backslash B$ için $\pi_i(s) = \pi_i(s_0)$ olacak şekilde $s \in S$ noktasını göz önüne alalım. Açıktırki $s \notin F$ ve $s \in Z'$ dir. Bu ise $Z' \nsubseteq F$ olduğunu verir öyle ki $[Z']=S$ dir. $Z' \subseteq Z$ olduğundan, Z de S üzerinde yoğundur. Şimdi $G \in \tau$ ve $s \in G$ olsun. Bir sonlu B indeks kümesi için $s \in \bigcap_{j \in B} E(j, G_j) \subseteq G$ şeklinde yazılabilir. $s \in \bigcap_{j \in B} E(j, G_j) = \prod_{j \in B} G_j \times \prod_{i \in I \backslash B} S_i$ olduğunda herhangi bir s_0^m noktasını seçebiliriz böylece $|B| = m$ olacak şekilde en fazla m-koordinatta s_0 ve s_0^m noktaları farklıdır. Buradan $s_0^m \in G \cap Z' \neq \emptyset$ dir. $Z' \subseteq Z$ olduğundan $Z \cap G \neq \emptyset$ olur ve böylece $ext(Z) = \emptyset$ olarak bulunur. Son olarak teorem 4.1.7 den S bağlantılıdır ve böylece ispat tamamlanır.

Tanım 4.1.14 (Ayrılmış Kümeler): $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayının boştan farklı A, B alt kümesi, eğer $A \cap [B]^\tau = B \cap [A]^\kappa = \emptyset$ şartını sağlıyorsa *ayrılmıştır* denir. Burada A ve B nin yerleri değiştirilebilir. Daha farklı olarak, eğer A, B ayrılmış kümeler ise, o zaman $B \cap [A]^\tau = A \cap [B]^\kappa = \emptyset$ dir (Tantawy *et al.* 2014).

(Burada $[A]^\tau$; A nın τ ya göre kapanışı, $[A]^\kappa$; A nın κ ya göre kapanışıdır.)

Teorem 4.1.15: $A \subseteq C$ ve $B \subseteq D$ olsun ve $C, D,$ $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayının ayrılmış öz alt kümeleri olsun. O zaman A, B ayrılmış kümelerdir (Tantawy *et al.* 2014).

İspat: $A \subseteq C$ olduğunda o zaman $[A]^{\kappa} \subseteq [C]^{\kappa}$, buradan

$$B \cap [A]^{\kappa} \subseteq D \cap [A]^{\kappa} \subseteq D \cap [C]^{\kappa} = \emptyset$$

dir. O zaman $B \cap [A]^{\kappa} = \emptyset$ olur. Benzer yolla $A \cap [B]^{\tau} = \emptyset$ dir. A, B ayrılmış kümedir.

Teorem 4.1.16: A, B ayrılmış kümeler öyle ki $A \cup B \in \tau \cap \kappa$, o zaman A(ve ya B) $\in \tau \cap \kappa$ dır (Tantawy *et al.* 2014).

İspat: Kabul edelim ki A, B ayrılmış kümeler öyle ki $A \cup B \in \tau \cap \kappa$ dır, o zaman $[A \cup B]^{\tau} \in \tau^{c}$ şeklinde yazılabilir. $[B]^{\tau} \in \tau^{c}$ olduğundan $([B]^{\tau})^{c} \in \tau$ dir. O zaman $(A \cap ([B]^{\tau})^{c}) \in \tau$ olur. $(A \cap ([B]^{\tau})^{c}) \cup (B \cap ([B]^{\tau})^{c}) \in \tau$ dir, buradan $A \in \tau$ elde edilir. $A \cup B \in \kappa$ olduğundan $[A]^{\kappa} \in \kappa$, o zaman

$$(A \cup B) \cap [A]^{\kappa} \in \kappa \Longrightarrow (A \cap [A]^{\kappa}) \cup (B \cap [A]^{\kappa}) \in \kappa \Longrightarrow A \in \kappa$$

elde edilir böylece $A \in \tau \cap \kappa$ dır. Benzer yolla $B \in \tau \cap \kappa$ olduğu gösterilebilir.

Tanım 4.1.17 (Hem Açık Hem Kapalı Küme): A kümesi hem τ-açık hem de κ-kapalı ise *hem açık hem de kapalıdır (clopen)* denir (Tantawy *et al.* 2014).

Teorem 4.1.18: $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ bir ditopolojik doku uzayı, o zaman aşağıdakiler denktir;

(1) S bağlantılıdır.
(2) S nin $A \in \tau$ ve $B \in \kappa$ olacak şekilde bir $\{A, B\} \subseteq \mathcal{P}(S)$ parçalanışı yoktur.
(3) S nin hem açık hem de kapalı olan A öz alt kümesi yoktur.

(4) S, $A \in \tau$ ve $B \in \kappa^c$ olacak şekilde S nin iki tane boştan farklı ayrık A, B alt kümesinin birleşimi şeklinde ifade edilemez.
(5) S, $A \in \tau^c$ ve $B \in \kappa$ olacak şekilde S nin iki tane boştan farklı ayrık A, B alt kümesinin birleşimi şeklinde ifade edilemez.
(6) S, S nin iki ayrılmış A, B alt kümesinin birleşimi şeklinde ifade edilemez (Tantawy *et al.* 2014).

İspat:

$(\mathbf{1}) \Leftrightarrow (\mathbf{2}) \Leftrightarrow (\mathbf{3})$ önerme 4.1.3 (1) den

$(\mathbf{3}) \Longrightarrow (\mathbf{4})$: Kabul edelim ki herhangi bir $A \in \tau$ ve $B \in \kappa^c$ için $S = A \cup B$ olsun öyle ki $A \cap B = \emptyset$ dir. O zaman $A = B^c \in \tau \cap \kappa$ olması (3) ile çelişir.

$(\mathbf{4}) \Longrightarrow (\mathbf{5})$: Kabul edelim ki $A \in \tau^c$ ve $B \in \kappa$ için $S = A \cup B$ dir öyle ki $A \cap B = \emptyset$. $A^c \in \tau$, $B^c \in \kappa^c$, $A = B^c$, $A^c \cap B^c = \emptyset$ ve $S = A^c \cup B^c$ dir ve bu (4) ile çelişir.

$(\mathbf{5}) \Longrightarrow (\mathbf{6})$: Kabul edelim ki ayrılmış A, B alt kümeleri için $S = A \cup B$ dir o zaman $S = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, $A = B^c$ ve $B = A^c$ dir. $A \cap [B]^\tau = \emptyset$ olduğundan $[B]^\tau \subseteq A^c = B$ olur fakat $B \subseteq [B]^\tau$ dir, dolayısıyla $B = [B]^\tau$ dir yani $B \in \tau^c$ dir. Benzer yolla $A \in \kappa$ elde edilir. Buradan S, $B \in \tau^c$, $A \in \kappa$ olacak şekilde S nin boştan farklı ayrık iki alt kümenin bir birleşimidir bu ise (5) ile çelişir.

$(\mathbf{6}) \Longrightarrow (\mathbf{1})$: Kabul edelim ki S bağlantısızdır. O zaman $(A, B) \in \tau \times \kappa$ olacak şekilde S nin bir parçalanışı olan en az $\{A, B\} \subseteq \mathcal{P}(S)$ vardır ,burada $A = B \in \tau \cap \kappa$, $A^c \in \tau^c$, $A \cap [A^c]^\tau = \emptyset$, $[A]^\kappa \cap A^c = \emptyset$ ve $A \cup A^c = S$ dir. Buradan S, S nin A ve A^c ayrılmış iki alt kümesinin bir birleşimidir, bu ise (6) ile çelişir.

Teorem 4.1.19: Z, $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ bir ditopolojik doku uzayının bir alt kümesi olsun. Z bağlantısızdır ancak ve ancak S nin en az iki tane boştan farklı ayrık τ-açık ve κ-kapalı (veya τ-kapalı ve κ-açık) olacak şekilde S nin A, B öz alt kümesi vardır öyle ki $Z \cap A \neq \emptyset$, $Z \cap B \neq \emptyset$, $(Z \cap A) \cap (Z \cap B) = \emptyset$ ve $(Z \cap A) \cup (Z \cap B) = Z$ dir. Bu durumda $A \cup B$, Z nin bir bağlantısızlığıdır denir (Tantawy *et al.* 2014).

Ek Sonuç 4.1.20: $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayının boştan farklı ayrılmış iki alt kümesinin birleşimi bağlantısızdır (Tantawy *et al.* 2014).

Önerme 4.1.21: $A \cup B$, $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayının bir Z alt kümesinin bir bağlantısızlığıdır ancak ve ancak A τ-açık, B κ-kapalı (ve ya A τ-kapalı, B κ-açık) S nin öz alt kümesidir öyle ki $Z \cap A \neq \emptyset$, $Z \cap B \neq \emptyset$, $A \cap B \subseteq Z^c$ ve $Z \subseteq A \cup B$ dir (Tantawy *et al.* 2014).

İspat: Kabul edelim ki $A \cup B$, ditopolojik doku uzayının bir Z alt kümesinin bir bağlantısızlığıdır $\Leftrightarrow$ A τ-açık, B κ-kapalı S nin öz alt kümesidir öyle ki $Z \cap A \neq \emptyset$, $Z \cap B \neq \emptyset$, $(Z \cap A) \cap (Z \cap B) = \emptyset$ ve $(Z \cap A) \cup (Z \cap B) = Z$ $\Leftrightarrow$ A τ-açık, B κ-kapalı S nin öz alt kümesidir öyle ki $Z \cap A \neq \emptyset$, $Z \cap B \neq \emptyset$, $Z \cap (A \cap B) = \emptyset$ ve $Z \cap (A \cup B) = Z$ $\Leftrightarrow$ A τ-açık, B κ-kapalı S nin öz alt kümesidir öyle ki $Z \cap A \neq \emptyset$, $Z \cap B \neq \emptyset$, $A \cap B \subseteq Z^c$ ve $Z \subseteq A \cup B$ dir.

Teorem 4.1.22: Z, $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayının hem açık hem de kapalı bağlantılı alt kümesi olsun, Z nin bir τ-açık A kümesi ve onun tümleyeni A^c ile boştan farklı bir kesişimi vardır. O zaman Z nin A nın sınırıyla boştan farklı bir kesişimi vardır. A nın sınırı $b(A) = [A]^{\kappa} -]A[^{\tau}$ dur (Tantawy *et al.* 2014).

İspat: Kabul edelim ki $Z \cap b(A) = \emptyset$ olsun. $Z = S \cap Z$ ve $S = A \cup A^c$ olduğundan $Z = (A \cup A^c) \cap Z = (A \cap Z) \cup (A^c \cap Z)$

ve

$$(A \cap Z) \cap [A^c \cap Z]^\tau \subseteq (A \cap Z) \cap ([A^c]^\tau \cap [Z]^\tau) = (A \cap Z) \cap ([A^c]^\tau)$$
$$\subseteq ([A]^\kappa \cap Z) \cap [A^c]^\tau = ([A]^\kappa \cap [A^c]^\tau) \cap Z = b(A) \cap Z = \emptyset.$$

Benzer bir yolla $(A^c \cap Z) \cap [A \cap Z]^\kappa = \emptyset$ dır. O zaman A, A^c Z nin bir ayrışımıdır bu ise Z nin bağlantılılığıyla çelişir.

Ek Sonuç 4.1.23: A, $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayının hem açık hem de kapalı bağlantılı alt kümesi olsun, o zaman $b(A) \neq \emptyset$ dir (Tantawy *et al.* 2014).

Tanım 4.1.24 (Noktanın Bileşeni): $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayı olsun ve $s \in Z$, $Z \subseteq S$ olsun. s ye göre Z nin bileşeni, s noktasını içeren Z nin bağlantılı tüm alt kümelerinin maksimalidir ve $C(Z, s)$ şeklinde ifade edilir yani;

$$C(Z, s) = \bigvee \{Y \subseteq Z : s \in Y \text{ , } Y \text{ bağlantılı}\}$$

dir (Tantawy *et al.* 2014).

Teorem 4.1.25: $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayının her bileşeni S nin bir maksimal bağlantılı alt kümesidir (Tantawy *et al.* 2014).

Teorem 4.1.26: $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayı olsun.

(1) S deki her bir nokta, S nin bir bileşenin tamamında kapsanmıştır.
(2) S nin farklı iki noktasına göre herhangi iki bileşen ya ayrıktır ya da özdeştir (Tantawy *et al.* 2014).

Ek Sonuç 4.1.27: S bağlantılıdır ancak ve ancak S, S üzerinde bir bileşendir (Tantawy *et al.* 2014).

Teorem 4.1.28: $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayının her hem açık hem de kapalı bağlantılı alt kümesi S nin bir bileşenidir (Tantawy *et al.* 2014).

İspat: $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayının bir hem açık hem de kapalı bağlantılı alt kümesi Z olsun. $Z = \emptyset$ ise kanıtımız tamamlanır. $Z \neq \emptyset$, $s \in Z$ ise o zaman Z, s yi içeren bağlantılı bir kümedir fakat s ye göre S nin $C(S, s)$ bileşeni s yi içeren en geniş kümedir, buradan $Z \subseteq C(S, s)$ dir. Şimdi $C(S, s) \subseteq Z$ olduğunu göstermek istiyoruz başka bir deyişle $C(S, s) \cap Z^c = \emptyset$ olduğunu. Aksine, kabul edelim ki $C(S, s) \cap Z^c \neq \emptyset$ olsun. $s \in C(S, s) \cap Z$ alırsak $Z \cap C(S, s) \neq \emptyset$. $Z \in \tau \cap \kappa$ olduğundan $Z^c \in \tau^c$, $Z \in \kappa$, $\big(Z \cap C(S, s)\big) \cap (\, C(S, s) \cap Z^c) = \emptyset$ ve $\big(Z \cap C(S, s)\big) \cup (\, C(S, s) \cap Z^c) = C(S, s)$ dir. Buradan $Z \cup Z^c$, Teorem 3.2.19 dan $C(S, s)$ nin bir bağlantısızlığıdır, bu ise $C(S, s)$ nin bağlantılı olmasıyla çelişir. O zaman $C(S, s) \subseteq Z$ dir.

Teorem 4.1.29: $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayının tüm farklı bileşenlerinin kümesi, S kümesini ayırır (Tantawy *et al.* 2014).

Tanım 4.1.30 (Tamamen Bağlantısızlık): $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayı *tamamen bağlantısızdır* denir ancak ve ancak $s \neq p$, her $s, p \in S$ için $s \in A$ ve $p \in B$ olacak şekilde S nin en az boştan farklı ayrık hem açık hem kapalı A, B öz alt kümeleri vardır (Tantawy *et al.* 2014).

Teorem 4.1.31: Her tamamen bağlantısız ditopolojik doku uzayı bağlantısızdır. (Tantawy *et al.* 2014).

Açıklama 3.2.32: Teorem 4.1.31 in tersi genelde doğru değildir. Aşağıdaki örneğe bakarsak;

$S = \{a, b, c\}$, $\mathcal{S} = \big\{S, \emptyset, \{a\}, \{a, c\}, \{a, b\}\big\}$, $\tau = \big\{S, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}\big\}$ ve

$\kappa = \{S, \emptyset, \{a\}, \{a, c\}\}$ olsun. $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik uzayı bağlantısızdır fakat tamamen bağlantısız değildir (Tantawy *et al.* 2014).

Teorem 4.1.33: Bir $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ tamamen bağlantısız ditopolojik doku uzayının bileşeni, S nin tek elemanlı alt kümeleridir (Tantawy *et al.* 2014).

Önerme 4.1.34: $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayının bir Z alt kümesi bağlantılıdır ancak ve ancak $\tau_Z \cap \kappa_Z = \{Z, \emptyset\}$ dir (Tantawy *et al.* 2014).

Teorem 4.1.35 : $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayı, A alt kümesi S de hem açık hem kapalı ve Z, S nin bağlantılı bir alt kümesi olsun. O zaman ya $Z \subseteq A$ ya da $Z \subseteq A^c$ dir (Tantawy *et al.* 2014).

Önerme 4.1.36 :$(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ tümleyenli ditopolojik doku uzayı, $\kappa = \tau^c = \{S \backslash G : G \in \tau\}$ ve Z, S nin yoğun bir alt kümesi olsun. O zaman, S bağlantılıdır ancak ve ancak Z bağlantılıdır (Tantawy *et al.* 2014).

Teorem 4.1.37: Her hem açık hem de kapalı küme,bileşenlerin bir birleşimidir (Tantawy *et al.* 2014).

Teorem 4.1.38: $(V, \mathcal{S}_V, \tau_V, \kappa_V)$, $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayının bir alt ditopolojik doku uzayı olsun ve $Z \subseteq V$. $(V, \mathcal{S}_V, \tau_V, \kappa_V)$ alt uzayında Z bağlantılıdır ancak ve ancak $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayında Z bağlantılıdır (Tantawy *et al.* 2014).

Teorem 4.1.39: Bağlantısızlık özelliği hem açık hem de kapalı kümelere göre kalıtsal bir özelliktir (Tantawy *et al.* 2014).

Açıklama 4.1.40: Bağlantılılık özelliği genelde kalıtsal bir özellik değildir. Aşağıdaki örnekleri incelersek;

(1) $S = \{a, b, c\}$,

$\mathcal{S} = \mathcal{P}(S)$, $\tau = \{S, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$, $\kappa = \{S, \emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$ ise S bağlantılıdır. $V = \{a, b\} \subseteq S$ ise $\mathcal{S}_V = \{V, \emptyset, \{a\}, \{b\}\}$, $\tau_V = \{V, \emptyset, \{a\}\}$, $\kappa_V = \{V, \emptyset, \{a\}, \{b\}\}$ olur, $(V, \mathcal{S}_V, \tau_V, \kappa_V)$ bağlantısızdır ve V τ-açıktır.

(2) $S = \{a, b, c\}$,

$\mathcal{S} = \mathcal{P}(S)$, $\tau = \{S, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$, $\kappa = \{S, \emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$ ise S bağlantılıdır. $V = \{b, c\} \subseteq S$ ise $\mathcal{S}_V = \{V, \emptyset, \{b\}, \{c\}\}$, $\tau_V = \{V, \emptyset, \{b\}\}$, $\kappa_V = \{V, \emptyset, \{b\}, \{c\}\}$ olur, $(V, \mathcal{S}_V, \tau_V, \kappa_V)$ bağlantısızdır ve V κ-kapalıdır (Tantawy *et al.* 2014)**.**

Tanım 4.1.41 (Yarı Bileşen) : $s \in S$ için, s yi içeren, s nin *yarı-bileşeninin(quasi-component)* kümesi

$$K_s = \{r : f(s) = f(r) \; ya \; da \; f(r) = 0 \;\; , \forall f \in C(S, S^*)\}$$

şeklinde tanımlanır (Diker 1999).

Teorem 4.1.42:

(i) Bir s noktasının bir yarı-bileşeni s yi içeren tüm açık ve kapalı kümelerin kesişimidir, diğer bir deyişle;

$$K_s = \bigcap \{H : s \in H \in \tau \cap \kappa\}$$

dir.

(ii) Eğer C_s, s yi içeren maksimal bağlantılı bir küme ise $C_s \subseteq K_s$ dir (Diker 1999).

İspat:

(i) $r \in \bigcap\{H: s \in H \in \tau \cap \kappa\}$ yı alalım. Eğer $f(r) = 0$ ise $r \in K_s$ dir. $f(r) = 1$ olsun. f sürekli olduğundan $f^{-1}(\{f(s)\})$ açık ve kapalıdır. Buradan $r \in f^{-1}(\{f(s)\})$ dir ve böylece $f(s) = f(r)$ öyleki $r \in K_s$ dir. Şimdi varsayalım ki $r \notin \bigcap\{H: s \in H \in \tau \cap \kappa\}$ olsun. O zaman herhangi bir $H \in \tau \cap \kappa$ için $r \notin H$ ve $s \in H$ dir. $s \notin H,\ f(H) = \{0\}$ ve $f(s) = 1,$ şeklinde tanımlı $f: S \to S^*$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Açıkça görülüyor ki f süreklidir. Fakat $f(r) = 1,\ f(s) = 0$ ve bundan dolayı $r \notin K_s$ dir.

(ii) $H \in \tau \cap \kappa$ ve $s \in H$ olsun. $C_s \subseteq S$ olduğunu gösterecez. Varsayalım ki $C_s \nsubseteq S$ olsun. $s \in C_s$ olduğunda $C_s \cap H \neq \emptyset$ dır öyle ki $\{H, H\}$, C_s nin bir parçalanışıdır bu ise C_s nin bağlantılığı ile çelişir.

4.2. Ditopolojik Doku Uzaylarında Yerel Bağlantılık

Tanım 4.2.1 (Yerel Bağlantılılık): $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayı bir $s \in S$ *noktasında yerel bağlantılıdır* denir ancak ve ancak s yi içeren S nin tüm açık alt kümeleri, s yi içeren bir bağlantılı açık kümeyi içerir. Eğer S, S nin her bir noktasında yerel bağlantılı ise S *yerel bağlantılıdır* denir (Tantawy *et al.* 2014).

Teorem 4.2.2: Her bağlantılı uzay bir yerel bağlantılı uzaydır fakat tersi her zaman doğru değildir (Tantawy *et al.* 2014).

İspat: Kabul edelim ki $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayı ve $\tau = \{S, \emptyset\}$, buradan her $s \in S$ en az $S \in \tau$ bağlantılı kümesi vardır, $s \in S \subseteq S$. O zaman S yerel bağlantılıdır. Diğer taraftan, bir noktadan daha fazlasını içeren $\big(S, \mathcal{S}, \mathcal{P}(S), \mathcal{P}(S)\big)$ ditopolojik doku uzayı yerel bağlantılıdır fakat bağlantısızdır.

Teorem 4.2.3: Yerel bağlantılı ditopolojik doku uzayının bileşeni bir açık kümedir. (Tantawy *et al.* 2014).

İspat : $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ yerel bağlantılı ditopolojik doku uzayı, $s \in S$ ve C, s ye göre S nin bir bileşeni olsun. $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ yerel bağlantılı olduğundan s yi içeren her açık küme, s yi içeren bağlantılı bir açık G kümesini içerir fakat C, s yi içeren en geniş kümedir o zaman $s \in G \subseteq C$ dir. Başka bir ifadeyle C, s nin bir τ −komşuluğudur. O zaman C nin her bir noktası τ −komşuluğudur, bunun anlamı C açık bir kümedir.

Teorem 4.2.4: Yerel bağlantılılık özelliği açık alt uzaylara göre kalıtsal bir özelliktir (Tantawy *et al.* 2014).

İspat: Kabul edelim ki yerel bağlantılı $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayında, $(V, \mathcal{S}_V, \tau_V, \kappa_V)$ bir alt uzay ve $s \in V$ olsun. S yerel bağlantılı olduğunda en az bir $G \in \tau$

vardır öyle ki G, S nin τ-bağlantılı alt kümesidir ve $s \in G \subseteq A$. $G \in \tau$ ve G, τ-bağlantılı olduğundan $G \cap V \in \tau_V$ dir ve teorem 4.1.38 den $G \cap V$, V nin τ_V -bağlantılı alt kümesidir. Böylece V, s noktasında yerel bağlantılıdır, buradan da V yerel bağlantılıdır.

Teorem 4.2.5: Yerel bağlantılı ditopolojik doku uzayının her açık alt uzayının bileşenleri τ-açıktır (Tantawy *et al.* 2014).

İspat: Kabul edelim ki yerel bağlantılı $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayının bir alt uzayı $(V, \mathcal{S}_V, \tau_V, \kappa_V)$ ve V nin bileşeni C olsun. S yerel bağlantılı olduğundan, teorem 4.2.4 den V de yerel bağlantılıdır, buradan teorem 4.2.3 den ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.6: Z, $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayda yerel bağlantılı bir küme ve $f: \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ her $N \in S'$ için $\tilde{f}^{-1}(N) = f^{-1}(N)$ olacak şekilde $(\mathcal{S}', S', \tau', \kappa')$ ditopolojik doku uzayında S nin sürekli ve açık bir fonksiyonu olsun. Bu durumda $f(Z)$, S' üzerinde yerel bağlantılıdır.

İspat: Herhangi bir $z' = f(z) \in f(Z)$ noktası ve z' nin açık τ' $-$komşuluğu N olsun. f sürekli olduğundan her $N \in \tau'$ için, $\tilde{f}^{-1}(N) \in \tau$ dir ve her $N \in \mathcal{S}'$ için, $\tilde{f}^{-1}(N) = f^{-1}(N)$ dir. Buradan da yerel bağlantılı olduğundan $E \subseteq f^{-1}(N)$ olacak şekilde z yi içeren bir bağlantılı açık kümesi vardır. $z' \in f(E) \subseteq f(f^{-1}(N)) \subseteq N$ dir. f sürekli ve açık olduğundan $f(E)$, teorem 4.1.10 dan z' nü içeren bağlantılı açık kümesidir. Her z' nin $f(E) \subseteq N$ olacak şekilde bağlantılı ve açık kümesi olduğundan $f(Z)$ yerel bağlantılıdır.

Teorem 4.2.7: $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayının yerel bağlantılı olması için gerek ve yeter şart S uzayının her açık U kümesi için, U ya ait her bileşen, S de açık olmasıdır.

İspat: $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ yerel bağlantılı. U , S de açık küme olsun. C de U nun bir bileşeni olsun. $s \in C$ ise $V \subseteq U$ olacak şekilde s noktasının bağlantılı ve açık V komşuluğu vardır. V bağlantılı olduğundan V, U nun C bileşeninde olmalıdır. Dolayısıyla C açıktır. $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayındaki açık kümelerin bileşeni açık olsun. S de verilen s noktası ve bu noktanın U komşuluğu için C, s noktasını içeren U nun bir bileşeni olsun. Şimdi C bağlantılıdır. C de S de açıktır. Böylece s noktası S de yerel bağlantılıdır.

Sonuç 4.2.8: Yerel bağlantılı ditopolojik doku uzayının bileşeni Z ve $ext(Z) = \emptyset$ ise hem açık hem de kapalı bir kümedir.

İspat: Teorem 4.2.3 den bileşen açık, ve Z bir bileşen ve $ext(Z) = \emptyset$ ise $Z = [Z]$ olduğundan bileşen kapalıdır.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu çalışmada, daha önceki yıllarda tanımlanmış olan ditopolojik doku uzaylarındaki bağlantılık ve yerel bağlantılık kavramları incelenmiş ve aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

Z, $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayda yerel bağlantılı bir küme ve $f: \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ her $N \in S'$için $\tilde{f}^{-1}(N) = f^{-1}(N)$ olacak şekilde $(\mathcal{S}', S', \tau', \kappa')$ ditopolojik doku uzayında S nin sürekli ve açık bir fonksiyonu olsun. Bu durumda $f(Z)$, S' üzerinde yerel bağlantılıdır.

$(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayının yerel bağlantılı olması için gerek ve yeter şart S uzayının her açık U kümesi için, U ya ait her bileşen, S de açık olmasıdır.

Yerel bağlantılı ditopolojik doku uzayının bileşeni Z ve $ext(Z) = \emptyset$ ise hem açık hem de kapalı bir kümedir.

KAYNAKLAR

Birkhoff, G., 1967. Lattice Theory. American Mathematical Society Colloquium Publications, 418p, USA.

Brown, L. M. and Ertürk, R., 2000a. Fuzzy sets as texture spaces, I. Representation theorems. Fuzzy Sets and Systems, 110, 227-236.

Brown, L. M., Ertürk, R. and Dost S., 2006. Ditopological texture spaces and fuzzy topology, III.Seperation axioms. Fuzzy Sets and Systems, 157, 1886-1912.

Brown, L. M., Ertürk, R. and Dost S., 2004a. Ditopological texture spaces and fuzzy topology, I. Basic concepts. Fuzzy Sets and Systems, 147, 171-199.

Brown, L. M., Ertürk, R. and Dost S., 2004b. Ditopological texture spaces and fuzzy topology, II. Topological Consideration. Fuzzy Sets and Systems, 147, 201-231.

Brown, L. M. and Ertürk, R., 2000b. Fuzzy sets as texture spaces, II. Subtextures and quotient textures. Fuzzy Sets and Systems 110, 237-245.

Brown, L. M. and Diker, M., 1998a. Ditopological texture spaces and intuitionistic sets. Fuzzy Sets and Systems, 98, 217-224.

Brown, L. M., 1993a. Ditopological fuzzy structures I. Fuzzy Systems a A. I M, 3(1).

Brown, L. M., 1993b. Ditopological fuzzy structures II. Fuzzy Systems a A. I M, 3(2).

Cohn, P. M., 2002. Basic Algebra: Groups, Rings and Fields. Springer-Verlag, 480p, London.

Davey, B. A. and Priestley, H. A., 2002. Introduction to Lattices and Order. Cambridge University Press, 298p, Cambridge.

Ergun, N., 2005. Kümeler Teorisine Giriş. Nobel Yayınları, 630p, Ankara

Gohar, M.M., 2002. Compactness in ditopological texture spaces. PhD Thesis, Hacettepe University, Ankara.

Koçak, M., Genel Topolojiye Giriş ve Çözümlü Alıştırmalar, Kampüs Yayıncılık 3. Baskı, Eskişehir, (2011)

M. Diker, Connectedness in ditopological texture spaces, Fuzzy Sets and Systems 108 (1999) 223-230

O. A. E. Tantawy, S. A. El-Sheikh, M. Yakout, A. M. Abd El-latif , On connectedness in ditopological texture spaces, Ann. Fuzzy Math. Inform. 7 (2014), No. 2, 343-354

Ugur, A. A. and Diker, M., 2006. A Wallman-type compactification of texture space. Fuzzy Sets and Systems, 157, 2683-2705.

Yıldız, C., " Genel Topoloji", Gazi Üni. Basımevi. Ankara, (2005)

Yüksel, Ş., 2002. Genel Topoloji. Selçuk Üniversitesi Basımevi, 490p, Konya.

ÖZGEÇMİŞ

1987 yılında Iğdır'da doğdu. Öğreniminin ilk, orta ve lise eğitimini Iğdır'da tamamladı. 2004 yılında lise eğitimin tamamlayarak aynı yıl Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde lisans eğitimine başladı. 2008 yılında lisans eğitimini tamamlayıp 2008-2009 yıllarında Gazi Üniversitesinde Pedagojik Formasyon eğitimini aldı. 2013 yılında Atatürk Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans öğrenimine başladı. Halen lisansüstü eğitimi devam etmektedir.