

**BAZI ÖZEL SABİT SIRT UZAKLIKLIL
YÜZEYLER**

Ali ÇAKMAK

Doktora Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Geometri Bilim Dalı

Doç. Dr. Ömer TARAKCI

2015

Her hakkı saklıdır

**ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

BAZI ÖZEL SABİT SIRT UZAKLIKLI YÜZEYLER

Ali ÇAKMAK

**MATEMATİK ANABİLİM DALI
Geometri Bilim Dalı**

**ERZURUM
2015**

Her hakkı saklıdır



T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



TEZ ONAY FORMU

BAZI ÖZEL SABİT SIRT UZAKLIKLI YÜZEYLER

Doç. Dr. Ömer TARAKCI danışmanlığında, Ali ÇAKMAK tarafından hazırlanan bu çalışma 29/05/2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı – Geometri Dalı'nda Doktora tezi olarak **oybirliği** ile kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Kazım İLARSLAN

İmza :

Üye: Prof. Dr. Abdullah KAPLAN

İmza :

Üye: Doç. Dr. Ömer TARAKCI

İmza :

Üye: Doç. Dr. Aydın GEZER

İmza :

Üye: Doç. Dr. Mehmet YILDIRIM

İmza :

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu 04/06/2015 tarih ve 22/763 nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Ertan YILDIRIM
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Doktora Tezi

BAZI ÖZEL SABİT SIRT UZAKLIKLI YÜZEYLER

Ali ÇAKMAK

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ömer TARAKCI

Bu tezde E^3 de dönel yüzeyler, tüp yüzeyleri ve regle yüzeylerin sabit sırt uzaklıklı yüzeyleri elde edildi ve bu yüzeylerin belli durumlarda korunduğu gösterildi. Sonra, eğrilikleri hesaplandı ve bazı özel durumlar için dönel yüzeyler, tüp yüzeyleri ve regle yüzeylerin eğrilikleri ile bu yüzeylerin sabit sırt uzaklıklı yüzeyleri arasındaki ilişkiler verildi.

2015, 102 sayfa

Anahtar Kelimeler: Sabit sırt uzaklıklı yüzey, dönel yüzeyler, tüp yüzeyleri, regle yüzeyler, eğrilikler.

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

SOME SPECIAL SURFACES AT A CONSTANT DISTANCE FROM THE EDGE OF REGRESSION

Ali ÇAKMAK

Ataturk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Geometry Science

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ömer TARAKCI

In this thesis, surfaces at a constant distance from the edge of regression on surfaces of revolution, tubular surfaces and ruled surfaces in E^3 are obtained and it is shown that these surfaces are preserved in certain cases. Then, their curvatures are calculated and it is given relationships between curvatures of surfaces of revolution, tubular surfaces and ruled surfaces and curvatures of surfaces at a constant distance from the edge of regression on these surfaces for some special cases.

2015, 102 pages

Keywords: Surfaces at a constant distance from the edge of regression, surface of revolution, tubular surface, ruled surface, curvatures.

TEŞEKKÜR

Doktora tezi olarak sunduğum bu alışma, Atatürk Üniversitesi Fen Fakóltesi Matematik Bölümü'nde hazırlanmıştır.

Bu çalışmada bana her türlü kolaylığı sağlayan, bilgi ve tecrübeleriyle beni destekleyen çok değerli hocam Sayın Doç. Dr. Ömer TARAKCI'ya en içten dileklerle teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Tezin hazırlanması sürecinde değerli fikirlerinden yararlandığım Sayın Doç. Dr. Aydın GEZER'e, Sayın Prof. Dr. Abdullah KAPLAN'a, Sayın Prof. Dr. Arif SALİMOV'a, Sayın Prof. Dr. Abdullah MAĞDEN'e, Sayın Doç. Dr. Murat İŐCAN'a ve Matematik Bölümü'nde gerekli ilgi ve yardımı esirgemeyen anabilim dalımızın değerli öğretim üye ve elemanlarına sonsuz teőekkürlerimi sunarım. Ayrıca bu tezin őekillenmesinde büyük katkı sağlayan Sayın Arő. Gör. Semra YURTTANIKMAZ'a ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Sezai KIZILTUĞ'a teőekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, çalışmalarım esnasında kendilerinden görmüő olduğum destek ve güvenden dolayı aileme ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Ali ÇAKMAK

Nisan, 2015

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ.....	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	7
2.1. 3-Boyutlu Öklid Uzayı ve Bu Uzayda Eğrilerle İlgili Genel Kavramlar	7
2.2. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Yüzeylerle İlgili Genel Kavramlar	9
2.3. Öklid Uzayında Eğri Yüzey İkilişinin Eğrilikleri	14
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	20
3.1. Paralel Yüzeyler	20
3.2. Sabit Sırt Uzaklıklı Yüzeyler	22
3.2.1. Sabit sırt uzaklıklı eğri	22
3.2.2. Sabit sırt uzaklıklı yüzeyin ifadesi	22
3.2.3. Sabit sırt uzaklıklı yüzeyin parametrik ifadesi	23
3.2.4. Sabit sırt uzaklıklı yüzeyin şekil operatörü	27
3.3. Dönel Yüzeyler.....	33
3.4. Tüp Yüzeyleri.....	38
3.4.1. Frenet çatılı tüp yüzeyi	38
3.4.2. Frenet çatılı tüp yüzeyinin eğrilikleri	39
3.5. Regle Yüzeyler	41
4. ARAŞTIRMA BULGULARI.....	43
4.1. Dönel Yüzeylerin Sabit Sırt Uzaklıklı Yüzeyi	43
4.1.1. Dönel yüzeyin sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin I. ve II. esas formlarının katsayılar matrisinin ve eğriliklerinin bulunması.....	46
4.1.2. Bir M dönel yüzeyinin $\lambda_2 = 0$ değeri için sabit sırt uzaklıklı yüzeyi	50
4.1.3. Dönel yüzeyin $\lambda_2 = 0$ değeri için eğrilikleri ile sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin eğrilikleri arasındaki ilişki.....	58

4.1.4. Dönel yüzeyin $\lambda_2 = 0$ için α meridyen eğrisinin sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntüsü.....	62
4.2. Frenet Çatılı Tüp Yüzeyinin Sabit Sırt Uzaklıklı Yüzeyi	71
4.2.1. Frenet çatılı tüp yüzeyinin sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin ifadesi.....	71
4.2.2. Tüp yüzeyinin $\lambda_1 = 0$ şartı dahilindeki sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin I., II. esas formlarının katsayıları ve eğrilikleri.....	75
4.2.3. Tüp yüzeyi ve $\lambda_1 = 0$ için sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin eğrilikleri arasındaki ilişki	77
4.3. Regle Yüzeyin Sabit Sırt Uzaklıklı Yüzeyi.....	84
4.3.1. Regle yüzeyin sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin ifadesi	84
4.3.2. Silindir yüzeyinin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi	89
4.3.3. Silindir yüzeyinin α dayanak eğrisinin sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntüsü.....	93
5. SONUÇ	99
KAYNAKLAR	101
ÖZGEÇMİŞ	103

SİMGELER DİZİNİ

H^f	Sabit sırt uzaklıklı yüzeyin ortalama eğriliği
K^f	Sabit sırt uzaklıklı yüzeyin Gauss eğriliği
M^f	Bir M yüzeyinin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi
n^f	Sabit sırt uzaklıklı yüzeyin normali
t_r	Geodezik burulma
t_r^f	Sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerinde ki geodezik burulma
κ_1	Birinci asli eğrilik fonksiyonu
κ_1^f	Sabit sırt uzaklıklı yüzeyin birinci asli eğrilik fonksiyonu
κ_2	İkinci asli eğrilik fonksiyonu
κ_2^f	Sabit sırt uzaklıklı yüzeyin ikinci asli eğrilik fonksiyonu
κ^f	Sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerinde ki eğrinin eğriliği
κ_g	Geodezik eğrilik
κ_g^f	Sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerinde ki geodezik eğrilik
κ_n	Normal eğrilik
κ_n^f	Sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerinde ki normal eğrilik
λ_d	Dağılma parametresi
H	Ortalama eğrilik
K	Gauss eğriliği
α	Eğri
κ	Eğrilik
τ	Torsion

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Frenet ve Darboux çatılarına ait vektör alanları	15
Şekil 3.1. Dönel yüzey üzerindeki meridyen eğrileri ve paralel daireler (çemberler)	35
Şekil 4.1. Tor yüzeyi ve onun sabit sırt uzaklıklı yüzeyi.....	55
Şekil 4.2. Dönel paraboloid ve onun sabit sırt uzaklıklı yüzeyi	56
Şekil 4.3. Örnek 4.1.8 için dönel yüzey ve onun sabit sırt uzaklıklı yüzeyi.....	57
Şekil 4.4. Tek kanatlı bir dönel hiperboloid ve onun sabit sırt uzaklıklı yüzeyi	58
Şekil 4.5. α ve β eğrilerinin eğrilik çemberlerinin merkezlerinin kesişimi	70
Şekil 4.6. Tüp yüzeyi ve onun $\lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$ için sabit sırt uzaklıklı yüzeyi.....	75
Şekil 4.7. Helikoid ve $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 1$ değerleri için sabit sırt uzaklıklı yüzeyi	87
Şekil 4.8. Helikoid ve $\lambda_2 = 2$ değeri için sabit sırt uzaklıklı yüzeyi.....	87
Şekil 4.9. Silindir yüzeyi ve onun sabit sırt uzaklıklı yüzeyi.....	91

1. GİRİŞ

İnsanoğlu yüzeyler teorisinin doğuşunu, yeryüzü ölçümleri yani jeodeziye borçludur. Özellikle, 18.yüzyılda ticari, mali, idari ve askeri sebeplerden dolayı, dikkate değer ölçümler yapılmış ve böylece jeodezi gelişmiş, teorik bir kurama erişebilecek düzeye ulaşmıştı.

İşte bu zamanda Leonard Euler yüzeyler teorisi olarak adlandırılan matematik alanının kurucusu olmuştur. Euler 1760 yılında yayımladığı bir makalesinde yüzeylerin eğriliğinin nasıl tanımlanacağı problemini ele almıştır. Yüzeyin kesitlerini oluşturan eğrilerin eğriliklerinin birbirlerinden farklı olmaları söz konusu olduğundan yüzeyde bir noktada eğrilik tanımı yapmanın çok güç olduğunu belirtmiştir. Bunun üzerine yüzeyin hangi noktasında eğriliğinin tanımlanması isteniyorsa, o noktada yüzeye dik olan düzlemlerin incelenmesi, bu düzlemler ile yüzeyin kesitleri olan eğrilerin eğriliklerinin bulunması ve bunlardan en büyük ve en küçük eğriliği veren düzlemlerin aralarındaki açının daima doksan derece olması gerektiğini ispat etmiştir. Eğer yüzeye dik olan bir düzlem, bu iki düzlemden biri ile θ kadar aç yapıyorsa, onun yüzey ile kesiti olan eğrinin eğriliğinin $\kappa = \kappa_m \cos^2 \theta_m + \kappa_M \sin^2 \theta_m = \kappa_m \sin^2 \theta_M + \kappa_M \cos^2 \theta_M$ formülleri ile verildiğini gösterir (Burada κ_m ve κ_M eğriliklerin en küçüğünü ve en büyüğünü θ_m ve θ_M bu eğrilikleri veren düzlemler ile diğer düzlem arasındaki açılarını göstermektedir).

Yüzeyleri $z = f(x, y)$ şeklinde değil de $F(x, y, z) = 0$ şeklinde denklemlerle yazarak üç koordinatın birbirine denk görölmesi, yüzey noktalarının iki nicelik ile gösterilmesi, iki yüzeyin birbirlerine sarılabilmesi için yay elemanlarının çakışması şartının bulunması, jeodezik yolların diferansiyel denklemlerinde bunların bir eğri ailesiyle yaptığı açılarının kullanılması, hep Euler'in attığı temellere dayanır.

Bahsedilmesi gereken bir başka matematikçi tasarı geometrinin kurucusu ve "*L'application de l'analyse á la géometrie*" isimli kitabıyla diferansiyel geometrinin ilk

kitabını yazmış olan Gaspard Monge'dur. Eğrilik hakkında özgün düşünceler üretmiş olan Monge, yüzeyler üzerinde eğrilik hattı diye bir kavram tanımlamıştır. Bir yüzeyin başka bir yüzey üzerine sarılabilmesi için $rt - s^2 = 0$ şeklinde ifade ettiği bir diferansiyel denklemin gerek ve yeter şart olduğunun üç ayrı yoldan ispatını yaptı. Monge'un öğrencisi olan Meusnier 1776 yılında, yüzeyin, yüzeye dik olmayan düzlemler ile arakesiti olan eğrilerin eğriliği yahut eğrilik yarıçapı için bir formül buldu. Eğik düzlem ile arakesit olan eğrinin eğrilik yarıçapı, dik düzlem ile arakesit olan eğrinin eğrilik yarıçapının eğik düzlem üzerine izdüşümüdür. Yani bu iki düzlem arasındaki açı φ ise $r_e = r_d \cos \varphi$ dir. Buradan da şu sonuç çıkarılır: Yüzeye aynı bir teğet doğrudan geçen bütün düzlemlerin yüzey ile arakesitlerini oluşturan eğrilerin eğrilik çemberleri, yarıçapı dik kesitin eğrilik yarıçapı olan kürenin üzerinde bulunurlar.

Gauss'a kadar yüzeyler hakkında tohumları atılan belli başlı çalışmalar Gauss'da meyvesini vemiştir. Altona gözlemevi müdürü Heinrich Christian Schumacher 1816 yılında Danimarka kralı VI. Friedrich'den, Danimarka'nın uç noktaları arasında enlem ve boylam ölçümleri siparişini alınca Gauss'a başvurup, ölçümlerin Hannover krallığını da kapsayacak ve Prusya'ya uzanacak şekilde genişletilmesini önermiş, Gauss da bu öneriyi beğenmişti. Gauss'un 1812-1816 yılları arasında elipsoid üzerindeki en kısa yolları bulmak için araştırmalar yaptığı biliniyor. Gauss homojen elipsoidin çekim yasaları hakkında yazdığı "*Theoria Attractionis Corporum Sphaeroidicorum Ellipticorum Homogeneorum Methodo Nova Tractata*" başlıklı ve 1813 tarihli makalesinin onuncu maddesinde bir yüzeyin parametrik gösterilişini tanıtır, inceler ve bir yüzeyden başka bir yüzeye tasvirlerini araştırır.

1822 de Danimarka Kraliyet Bilim Cemiyeti'nin ödüllü sorusuna verdiği yanıt makalesinde Gauss tasvir kavramına ağırlık verir. Yay elemanının karesi

$$ds^2 = E dp^2 + F dpdq + G dq^2$$

olarak yazılabilen herhangi bir yüzey için yay elemanının karesinin

$$ds^2 = \psi(\lambda, \mu)(d\lambda^2 + d\mu^2)$$

şekline getirilebileceğini ispat eder. 13-15 Aralık 1822’de “Yüzeylerin dönüşümü hakkında araştırmalarımın durumu” adlı kendine yönelik yazdığı raporda; bazı hesapların yapıldığı, eğrilik ölçüsünün $m(p, q)$ ve m nin p ile q ya göre türevlerine bağlı olduğunun keşfedilmiş, bükülmeler altında eğrilik ölçüsünün değişmediğinin bulunmuş olduğunu kaydeder. 1825’de Gauss, Olbers’e yazdığı mektubunda yüksek jeodezinin küçük bir bölümünü yazmaya başladığını anlatır. Olbers’e bahsettiği bölüm *Allgemeine Untersuchungen* da eğik düzlemlerle yüzeyin ne zaman kesişeceğini inceler ve Meusnier teoremini ispatlar. Hazırlık aşamalarından sonra en kısa mesafeler hakkında araştırmalar yapar. Bu yazısının daha sonra *Disquisitiones generales circa superficies curvas* adlı eserinin taslağı olduğu görülür. *Disquisitiones*’de ise Meusnier teoremi yoktur. Taslakta bulunup *Disquisitiones*’de yer almayan bir konu da jeodezik eğriliktir. Gauss yüzeyde bir eğrinin bir noktadaki κ_g yan eğriliğini, ψ eğrinin o noktadaki esas normali ile yüzeyin aynı noktadaki (ve negatif yöndeki) normali arasındaki açı olmak üzere, eğrilik ile $\sin\psi$ nin çarpımı olarak tanımlar:

$$\kappa_g = \frac{1}{r} \sin\psi.$$

Şimdi yan eğrilik yerine jeodezik eğrilik terimi kullanılmaktadır. Y gibi bir yüzey üzerindeki C eğrisinin P noktasındaki jeodezik eğriliği, Y nin P de ki teğet düzlemine yapılan dik izdüşüm altında C nin resmi olan düzlem eğrisinin P noktasındaki eğriliğidir. Nasıl düzlem eğrileri için eğrilik, doğru olmaktan sapmayı ölçen bir nicelikse, yüzey eğrileri için jeodezik eğrilik de jeodezik olmaktan sapmayı ölçer. Gauss’un *Disquisitiones* adlı eserinin ana konusu ise genel yüzeyler teorisidir. Bu teori için Gauss, büyük bir emek harcamış ve yoğun uğraşlardan sonra amacına ulaşabilmiştir. *Disquisitiones* sadece yüzey teorisine ilgili bir eser olmayıp, aynı zamanda matematiğin diğer alanlarına da etki yapmış bir eserdir. 1827 yılında Gauss muhteşem teoremi Theorema Egregium da, yüzeyin eğriliğini ölçmede bugün Gauss eğriliği adı verilen, bir ölçünün olduğunu ortaya koydu ve bu ölçünün sadece yüzey üzerindeki eğrilere bağlı olduğunu gösterdi. Bunun anlamı bu ölçü yüzeyin şeklinin değişmesi ile değişmemesidir. Örneğin bir düzlem parçası kıvrılarak silindire veya koniye dönüştürüldüğünde bu ölçü değişmez. Gauss’un bu keşfi bugün içsel geometri

olarak adlandırılmaktadır. Yani yüzey üzerinde yaşayan bir canlı Gauss eğriliğini kullanarak yüzeyin eğriliği hakkında bilgi edinebilir. Bu keşif 2-boyutlu soyut manifoldların keşfine yol açtı. Gauss iki değişkenli kuadratik diferansiyel formları incelemişti. Daha genel olarak n değişkenli kuadratik diferansiyel formların incelenmesi n boyutlu manifold kavramını geliştiren Bernhard Riemann tarafından başlatıldı. Bu çalışmalar ve uygulamaları Albert Einstein'ın genel izafiyet teorisine kadar uzanır ve günümüze kadar aktif çalışma sahası olmaya devam eder.

Bu çalışmanın meydana gelmesinde ki başlangıç noktası ise bir eğri için sabit sırt uzaklıklı eğri kavramıdır. Bir eğri için sabit sırt uzaklıklı eğri kavramı Hans Vogler tarafından ortaya atılmış ve Vogler (1963), makalesinde bir uzay eğrisinin, bir tors üzerine çizilmiş sabit sırt uzaklıklı eğrilerin Frenet çatısı tarafından teşkil edilen geometrik özelliklerini incelemiştir.

Hacısalıhoğlu (1968), bir uzay eğrisinin Frenet çatısının eğri boyunca hareketi esnasında, rektifiyan düzlemine sıkı suretle bağlı bir doğrunun oluşturduğu açılmayan bir yüzey üzerine çizilmiş parametre eğrilerinin (sabit sırt uzaklıklı eğrilerden daha genel) özelliklerini incelemiştir.

Tarakcı (2002) ise Vogler'in ileri sürdüğü problemde bir eğri yerine bir yüzey almış ve ortaya çıkan yeni yüzeye ilk yüzeyin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi olarak bakmıştır. Söz konusu yüzeyler arasındaki geometrik ve diferensiyel geometrik özellikleri incelemiştir.

Tarakcı and Hacısalıhoğlu (2004), sabit sırt uzaklıklı yüzeyin özel bir hali olan, paralel yüzeylerin bazı teorem ve özelliklerini, sabit sırt uzaklıklı yüzeyler için elde etmiştir.

Aktan *et al.* (2006), sabit sırt uzaklıklı yüzeylerin eşlenik tanjant vektörlerini ve asimptotik yönlerini ele almış, Aktan *et al.* (2009), sabit sırt uzaklıklı yüzeyler için Euler Teoremi ve Dupin indikatiksini vermiştir. Sağlam and Kalkan (2010), E_1^3 Minkowski uzayında alınan bir yüzeyin sabit sırt uzaklıklı yüzeyini incelemiştir. Aynı yazarlar (2013), E_1^3 'de sabit sırt uzaklıklı yüzey için Euler Teoremi ve Dupin

indikatrisini vermiştir. Yine aynı yazarlar (2014), E_1^3 de sabit sırt uzaklıklı yüzeylerin eşlenik tanjant vektörlerini ve asimptotik yönlerini incelemişlerdir. Yurttançıkmaç and Tarakcı (2014), sabit sırt uzaklıklı yüzeyler ve fokal yüzeyler arasındaki ilişkiyi çalışmışlardır.

Bu çalışmanın amacı ise Tarakcı (2002)'nin ifade ettiği sabit sırt uzaklıklı yüzey kavramından hareketle Öklid uzayda bazı özel yüzeylerin sabit sırt uzaklıklı yüzeylerini elde etmek ve hangi şart altında korunduklarını göstererek başlangıçtaki durumları ile sabit sırt uzaklıklı yüzeylerini geometrik özellikler açısından karşılaştırmaktır. Bu çalışmada ele alınan yüzeyler diferensiyel geometride çok sık kullanılan dönel yüzeyler regle yüzeyler ve tüp yüzeyleridir.

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünden sonra, Kuramsal Temeller adını alan ikinci bölümde, çalışmamızda kullandığımız temel tanım ve kavramlara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, ilk olarak çalışmamızın temelini oluşturan sabit sırt uzaklıklı yüzey kavramı tanıtılıp, parametrik ifadesi elde edilmiştir. Sonra, çalışmamızda ele alacağımız özel yüzeyler olan dönel yüzeyler, tüp yüzeyleri ve regle yüzeyler tanımlanmış; çalışmamızda gerekli olan diferensiyel geometrik özellikleri verilmiştir.

Dördüncü bölümde, ilk olarak birinci adımda dönel yüzeyler ele alınmış ve öncelikle bu yüzeylerin sabit sırt uzaklıklı yüzeyleri elde edilerek, I., II. esas form katsayılarının matrisi, Gauss ve ortalama eğrilikleri hesap edilmiştir. Daha sonra bazı özel durumlar için, dönel yüzeylerin sabit sırt uzaklıklı yüzeyleri bulunarak, şekil operatörü elde edilmiş ve bazı geometrik sonuçlar bulunmuştur. Son olarak, bu tip yüzeylere verilen örnek ve şekillerle konu tamamlanmıştır. İkinci adımda dönel yüzeylerin $\lambda_2 = 0$ şartı dahilinde, sabit sırt uzaklıklı yüzeyleri üzerinde durulmuştur. Bu durumda, dönel yüzeyle sabit sırt uzaklıklı yüzeyin eğrilikleri arasındaki bağıntılar elde edilmiştir. Daha sonra, yine aynı şart altında dönel yüzey üzerinde ki meridyen eğrisinin sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerinde ki görüntüsü elde edilerek, eğri-yüzey ikilisinin eğrilikleri elde

edilmiş, aralarındaki ilişkiler belirtilmiş ve bazı geometrik sonuçlar bulunmuştur. İkinci olarak t p yüzeyleri ele alınmış ve t p yüzeylerinin sabit sırt uzaklıklı yüzeyleri elde edilerek hangi durumda yeniden t p yüzeyi olduğu ispatlanmıştır. Yine burada yüzeyin eğrilikleri ile sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin eğrilikleri karşılaştırılmıştır. Son olarak regle yüzeyler ele alınmış ve regle yüzeylerin de hangi şart altında sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin yine regle yüzey olduğu gösterilmiştir. Bu şart altında elde edilen yüzeyin eğrilikleri incelenmiş önceki yüzeyle karşılaştırma yapılmıştır. Bütün bu yüzeyler ve sabit sırt uzaklıklı yüzeyleri SWP programı yardımıyla görsel olarak örneklendirilmiştir.

Beşinci bölümde, bu çalışmada elde edilen bazı sonuçlar verilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde bazı temel tanım ve kavramlar ifade edilecektir.

2.1. 3-Boyutlu Öklid Uzayı ve Bu Uzayda Eğrilerle İlgili Genel Kavramlar

Tanım 2.1.1: Bir reel afin uzay A ve A ile birleşen vektör uzayı da V olsun. V de $x = (x_1, x_2, x_3)$ ve $y = (y_1, y_2, y_3)$ olmak üzere

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^3 x_i y_i$$

şeklinde bir Öklid iç çarpımı tanımlanırsa, A afin uzayına 3-boyutlu Öklid uzayı denir ve E^3 ile gösterilir (Hacısalıhoğlu 1983).

Tanım 2.1.2: E^3 de bir x vektörünün kendisi ile iç çarpımının karekökü x vektörünün normu olarak isimlendirilir ve $\|x\|$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.3: \mathbb{R}^3 uzayında, $u = (u_1, u_2, u_3)$ ve $v = (v_1, v_2, v_3)$ olmak üzere u ile v nin gerdiği düzleme dik olan ve

$$u \times v = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

eşitliğiyle tanımlanan $u \times v$ vektörüne u ile v nin vektörel çarpımı denir.

$u \times v \neq 0$ olmak üzere, u ile v vektörleri arasındaki açı θ , $0 < \theta < \pi$ ise

$$u \times v = \|u\| \|v\| \sin \theta$$

dir.

Tanım 2.1.4: $I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere (I, α) koordinat komşuluğu ile tanımlanan

$$\alpha: I \rightarrow E^n$$

$$t \rightarrow \alpha(t)$$

diferensiyellenebilir fonksiyonuna E^n de bir eğri denir. $I \subseteq \mathbb{R}$ aralığına α nın parametre aralığı ve $t \in I$ değişkenine de α nın parametresi denir (Hacısalıhoğlu 1983).

Tanım 2.1.5: M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilmiş olsun. Eğer, $\forall s \in I$ için $\|\alpha'(s)\| = 1$ ise M eğrisi, (I, α) ya göre birim hızlı eğridir denir. Bu durumda eğrinin $s \in I$ parametresine yay parametresi denir (Hacısalıhoğlu 1983).

Tanım 2.1.6: Her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye regüler eğri denir. Yani $\forall s \in I$ için $\alpha'(s) \neq 0$ dır (Hacısalıhoğlu 1983).

Tanım 2.1.7: α sıfırdan farklı birim hızlı bir uzay eğrisi ve $T = \alpha'$ bu eğrinin teğet vektör alanı olsun. Bu durumda eğrinin her bir noktasına T teğet, N asli normal ve B binormal vektörlerinden oluşan bir $\{T, N, B\}$ ortonormal çatısı karşılık gelir. Bu hareketli $\{T, N, B\}$ vektör alanı üçlüsüne α eğrisi üzerindeki Frenet Çatısı denir ve

$$T(s) = \alpha'(s)$$

$$N(s) = \frac{\alpha''}{\|\alpha''\|}$$

$$B(s) = T(s) \times N(s)$$

dir.

Tanım 2.1.8: α sıfırdan farklı birim hızlı bir uzay eğrisi ve $T = \alpha'$ bu eğrinin teğet vektör alanı olmak üzere eğri boyunca ilerlediğimiz zaman teğetin değişim oranını ifade eden

$$\frac{dT}{ds} = \kappa N$$

vektörüne eğrilik vektörü denir ve κ çarpanına eğrinin birinci eğriliği veya eğrinin eğriliği denir. Eğrinin eğriliği eğrinin doğrudan ayrılmasını karakterize eder.

Tanım 2.1.9: α sıfırdan farklı birim hızlı bir uzay eğrisi ve B eğrinin bir noktasındaki binormal vektörü olmak üzere

$$\frac{dB}{ds} = -\tau N$$

eşitliğini sağlayan τ fonksiyonuna α eğrisinin ikinci eğriliği veya burulması denir (Struik 1988).

Teorem 2.1.10: α sıfırdan farklı κ eğrilikli ve τ burulmalı birim hızlı bir uzay eğrisi olsun. Bu durumda Frenet-Serret formülleri aşağıdaki gibidir:

$$T'(s) = \kappa(s)N(s)$$

$$N'(s) = -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s)$$

$$B'(s) = -\tau(s)N(s)$$

2.2. 3-Boyutlu Öklid Uzayında Yüzeylerle İlgili Genel Kavramlar

Tanım 2.2.1: U , E^2 düzleminin bağlantılı açık bir alt kümesi olsun. U ile homeomorf olan E^3 Öklid uzayının alt kümesine sade yüzey denir (Salimov ve Mağden 2008).

Tanım 2.2.2: Bir $\phi: U \rightarrow E^3$ koordinat komşuluğu, E^2 nin bir U açık alt kümesinden E^3 ün içine birebir ve regüler bir dönüşümdür (O'Neill 2006).

Tanım 2.2.3: $M \subset E^3$ olmak üzere $\forall P \in M$ için, M nin içinde görüntüsü P nin bir komşuluğunu içeren uygun bir koordinat komşuluğu varsa ($\phi^{-1}: \phi(U) \rightarrow U$ sürekli) varsa M ye bir yüzey denir (O'Neill 2006).

Tanım 2.2.4: M yüzeyi verilmiş olsun. E^2 düzleminin $U \subset E^2$ bölgesinin homeomorf $\gamma: U \rightarrow M$ dönüşümünde yüzeyin $P \in M$ noktasının, E^2 düzleminin $P_0 \in E^2$ noktasına dönüştüğü açıktır. P_0 noktasının kartezyen koordinatları u ve v ile gösterilsin. u ve v ye yüzeyin P noktasının eğrisel koordinatları denir. γ ya ise M yüzeyinin parametrizasyonu denir (Salimov ve Mağden 2008).

Sürekliliğe göre, U bölgesindeki her bir doğruya, yüzeyde herhangi bir eğri karşılık gelecektir. $u = sbt$ ve $v = sbt$ doğrularına, yüzeyde karşılık gelen eğrilere yüzeyin koordinat eğrileri denir.

Tanım 2.2.5: $\phi: U \rightarrow E^3$ koordinat komşuluğu ile verilsin. Burada $(u, v) \rightarrow \phi(u, v)$, u ya da v sabit tutulduğunda bir eğri üretir. $v = v_0$ için $u \rightarrow \phi(u, v_0)$ eğrisine u -parametre eğrisi, $u = u_0$ için $v \rightarrow \phi(u_0, v)$ eğrisine de v -parametre eğrisi denir.

Tanım 2.2.6: E^3 de regüler bir M yüzeyi $\phi(u, v)$ parametrizasyonu ile verilsin. M nin birim normal vektör alanı n olmak üzere

$$n = \frac{\phi_u \times \phi_v}{\|\phi_u \times \phi_v\|}$$

biçimindedir.

Tanım 2.2.7: M yüzeyi $\phi: U \rightarrow E^3$ biçiminde bir parametrizasyonla verilmiş olsun. Birinci temel form, $\phi(U)$ içinde bir $\alpha: I \rightarrow M$ eğrisinin $\alpha(a)$ ve $\alpha(b)$ noktaları arasında kalan parçasının uzunluğu, $\phi^{-1} \circ \alpha = (\beta_1, \beta_2)$,

$$E = \langle \phi_u, \phi_u \rangle$$

$$F = \langle \phi_u, \phi_v \rangle$$

$$G = \langle \phi_v, \phi_v \rangle$$

olmak üzere,

$$L = \int_a^b (E\beta_1'^2 + 2F\beta_1'\beta_2' + G\beta_2'^2) dt$$

eşitliği ile belirlidir. E^2 de koordinat fonksiyonları u ve v olmak üzere, birinci temel form, $I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ biçiminde de verilebilir.

Yüzeyin ikinci temel formu ise yüzey normalini n ve ikinci temel form katsayıları

$$e = \langle n, \phi_{uu} \rangle$$

$$f = \langle n, \phi_{uv} \rangle$$

$$g = \langle n, \phi_{vv} \rangle$$

olmak üzere

$$II = edu^2 + 2fdudv + gdv^2$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.8: E^3 de bir yüzey M ve M nin birim normal vektör alanı n olsun. D , kovaryant türev operatörü olmak üzere $\forall X \in \chi(M)$ için

$$S(X) = D_X n$$

olarak tanımlanan S dönüşümüne M üzerinde şekil operatörü denir (Hacısalıhoğlu 1983). $p \in M$ olmak üzere $S_p: T_p M \rightarrow T_p M, S_p(X_p) = D_{X_p} n$ dönüşümünün lineer olduğu açıktır.

Tanım 2.2.9: E^3 de bir M yüzeyinin birinci temel form katsayıları E, F, G ve ikinci temel form katsayıları e, f, g olmak üzere yüzeyin şekil operatörünün matrisi S

$$S = \frac{1}{EG - F^2} \begin{vmatrix} Ge - Ff & Ef - Fe \\ Gf - Fg & Eg - Ff \end{vmatrix}$$

şeklindedir.

Tanım 2.2.10: M, E^3 de bir regüler yüzey olsun. M yüzeyinin Gauss eğriliği K ve ortalama eğriliği H ; $K, H: M \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere sırasıyla

$$K(P) = \det(S_P)$$

$$H(P) = \frac{1}{2} \text{iz}(S_P)$$

şeklinde tanımlanır (Gray 1998).

Teorem 2.2.11: M, E^3 de bir regüler yüzey olsun. M nin Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği sırasıyla

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

$$H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}$$

olarak hesaplanır. Burada E, F, G ; M yüzeyinin birinci temel form katsayıları ve e, f, g ; ikinci temel form katsayılarıdır.

Tanım 2.2.12: M, E^3 de bir regüler yüzey ve M nin şekil operatörü S olsun. M nin bir P noktasına karşılık gelen S_P nin karakteristik (eigen) değerlerine M nin bu noktadaki asli eğrilikleri denir ve κ_1, κ_2 ile gösterilir. Asli eğriliklere karşılık gelen ve karakteristik vektör olarak adlandırılan vektörlerin belirttiği doğrultulara da M nin bu noktasındaki asli eğrilik doğrultuları denir.

Teorem 2.2.13: M, E^3 de bir regüler yüzey, K Gauss eğriliği, H ortalama eğriliği ve asli eğrilikler de κ_1, κ_2 olmak üzere

$$K = \kappa_1 \kappa_2$$

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$$

dir. Buradan

$$\kappa^2 - 2H\kappa + K = 0$$

yazılabilir. Bu durumda

$$\kappa_1 = H + \sqrt{H^2 - K}$$

$$\kappa_2 = H - \sqrt{H^2 - K}$$

olur.

Tanım 2.2.14: α, M yüzeyi üzerinde bir regüler eğri olsun. Eğer α'' ivme vektörü daima M yüzeyine dik ise, α eğrisine bir geodezik eğri denir (O'Neill 2006).

Tanım 2.2.15: α, M yüzeyi üzerinde bir regüler eğri olsun. Eğer α'' ivme vektörü daima M yüzeyine teğet ise, α eğrisine bir asimptotik eğri denir (O'Neill 2006).

Teorem 2.2.16: M yüzeyinin bir hiperbolik nokta komşuluğundaki ($eg - f^2 < 0$) $\phi(u, v)$ parametrizasyonu için, parametre eğrileri aynı zamanda asimptotik eğri olması için gerek ve yeter şart $e = g = 0$ olmasıdır. Burada e ve g, M yüzeyinin ikinci temel form katsayılarıdır (do Carmo 1976).

Tanım 2.2.17: M, E^3 de bir regüler yüzey ve M üzerindeki bir eğri α olsun. α nın teğet vektör alanı T ve M nin şekil operatörü S olsun. Eğer T vektör alanı α eğrisi boyunca S

nin karakteristik vektörlerine karşılık geliyorsa α eğrisine M üzerinde bir eğrilik çizgisi denir (Hacısalıhoğlu 1983).

Teorem 2.2.18: Bir yüzey üzerinde umbilik olmayan bir nokta komşuluğunda parametre eğrileri aynı zamanda eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart umbilik olmayan bu noktanın komşuluğunda $F = f = 0$ dır (do Carmo 1976). Burada F yüzeyin birinci temel form katsayısı, f yüzeyin ikinci temel form katsayısını göstermektedir.

Tanım 2.2.19: $M(u, v)$ bir yüzey K ve H da sırası ile M nin Gauss ve ortalama eğriliği olmak üzere, yüzeyin eğrilikleri

$$\Phi(K, H) = \det \begin{pmatrix} K_u & K_v \\ H_u & H_v \end{pmatrix} = 0$$

denklemini sağlıyorsa bu yüzeye Weingarten yüzeyi denir. Yüzeyin Weingarten yüzey olması için

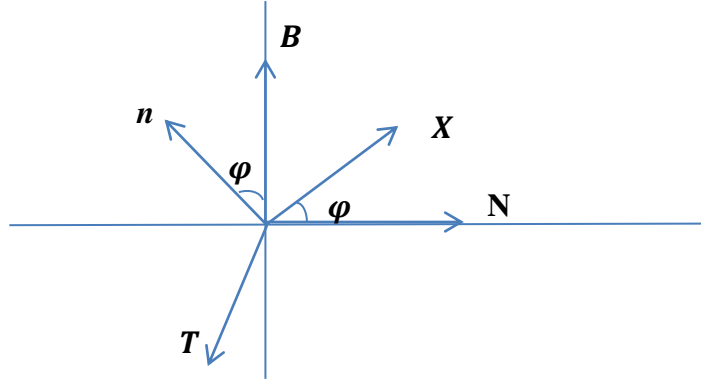
$$K_u H_v - K_v H_u = 0$$

denklemini sağlaması gerekir (Tunçer *et al.* 2011).

2.3. Öklid Uzayında Eğri Yüzey İkilişinin Eğrilikleri

Tanım 2.3.1: M regüler bir yüzey ve $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ birim hızlı bir eğri olsun. M yüzeyi üzerindeki α eğrisi boyunca eğrinin her bir noktasında Darboux çatısı olarak isimlendirilen ikinci bir çatı mevcuttur. Bu çatı, eğrinin bir P noktasında yüzeye ve eğriye teğet olan T birim teğet vektör alanı, n yüzeyin bir P noktasındaki birim normal vektör alanı ve $X = n \times T$ geodezik normal vektör alanı olmak üzere $\{T, X, n\}$ ortonormal çatısı olarak tanımlanır.

Hem Frenet çatısı hem de Darboux çatısında T vektörü ortak olup N, B, X , ve n vektörleri aynı düzlemde bulunurlar. Bu durum Şekil 2.1 ile gösterilmiştir.



Şekil 2.1. Frenet ve Darboux çatılarına ait vektör alanları

Frenet çatısı, T etrafında pozitif yönde $\varphi = \varphi(s)$ açılıklı bir dönmeye tabi tutulursa Darboux çatısı oluşur. Bu durumda X ile N ve n ile B arasındaki açı φ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} T \\ X \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

matris çarpımından

$$X = \cos\varphi N + \sin\varphi B \quad (2.1)$$

$$n = -\sin\varphi N + \cos\varphi B \quad (2.2)$$

yazılabilir. (2.1) ve (2.2) eşitliklerinden N ve B vektörleri

$$N = \cos\varphi X - \sin\varphi n \quad (2.3)$$

$$B = \sin\varphi X + \cos\varphi n \quad (2.4)$$

biçiminde bulunur. Teorem 2.1.10 da verilen Frenet türev formülleri yardımıyla eğrinin yay parametresine göre Darboux türev formülleri şu şekilde hesaplanır:

Teorem 2.1.10 dan $T' = \kappa N$ olduğu biliniyor. Bu durumda (2.3) den

$$T' = \kappa(\cos\varphi X - \sin\varphi n) = \kappa\cos\varphi X - \kappa\sin\varphi n \quad (2.5)$$

yazılır. Benzer şekilde

$$X = \cos\varphi N + \sin\varphi B$$

$$X' = -\sin\varphi \frac{d\varphi}{ds} N + \cos\varphi N' + \cos\varphi \frac{d\varphi}{ds} B + \sin\varphi B'$$

$$X' = -\sin\varphi \frac{d\varphi}{ds} N + \cos\varphi(-\kappa T + \tau B) + \cos\varphi \frac{d\varphi}{ds} B + \sin\varphi(-\tau N)$$

$$X' = (-\kappa \cos\varphi)T + \left(-\sin\varphi \frac{d\varphi}{ds} - \tau \sin\varphi\right)N + \left(\cos\varphi \frac{d\varphi}{ds} + \tau \cos\varphi\right)B$$

N ve B nin (2.3) ve (2.4) eşitliğindeki değerleri yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} X' &= (-\kappa \cos\varphi)T + \left(-\sin\varphi \frac{d\varphi}{ds} - \tau \sin\varphi\right)(\cos\varphi X - \sin\varphi n) \\ &\quad + \left(\cos\varphi \frac{d\varphi}{ds} + \tau \cos\varphi\right)(\sin\varphi X + \cos\varphi n) \end{aligned}$$

olur. Bu son eşitlikte gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$X' = (-\kappa \cos\varphi)T + \left(\frac{d\varphi}{ds} + \tau\right)n \quad (2.6)$$

eşitliği bulunur. (2.6) eşitliğinde

$$\kappa_g = \kappa \cos\varphi, \quad t_r = \tau + \frac{d\varphi}{ds} \quad (2.7)$$

olarak seçilsin. Son olarak,

$$n = -\sin\varphi N + \cos\varphi B$$

olduğundan

$$n' = -\cos\varphi \frac{d\varphi}{ds} N - \sin\varphi N' - \sin\varphi \frac{d\varphi}{ds} B + \cos\varphi B'$$

$$n' = -\cos\varphi \frac{d\varphi}{ds} N - \sin\varphi(-\kappa T + \tau B) - \sin\varphi \frac{d\varphi}{ds} B + \cos\varphi(-\tau N)$$

$$n' = (\kappa \sin\varphi)T + \left(-\cos\varphi \frac{d\varphi}{ds} - \tau \cos\varphi\right)N + \left(-\tau \sin\varphi - \sin\varphi \frac{d\varphi}{ds}\right)B$$

bulunur. N ve B nin (2.3) ve (2.4) eşitliğindeki değerleri yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} n' &= (\kappa \sin \varphi)T + \left(-\cos \varphi \frac{d\varphi}{ds} - \tau \cos \varphi\right)(\cos \varphi X - \sin \varphi n) \\ &+ \left(-\tau \sin \varphi - \sin \varphi \frac{d\varphi}{ds}\right)(\sin \varphi X + \cos \varphi n) \end{aligned}$$

olur. Gerekli düzenlemeler yapıldığı takdirde

$$n' = \kappa \sin \varphi T - \left(\frac{d\varphi}{ds} + \tau\right)X \quad (2.8)$$

eşitliği elde edilir. Eğer

$$\kappa_n = \kappa \sin \varphi, t_r = \tau + \frac{d\varphi}{ds} \quad (2.9)$$

olarak seçilirse ve (2.7), (2.9) eşitlikleri (2.5) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$T' = \kappa_g X - \kappa_n n \quad (2.10)$$

bulunur. Böylece Darboux türev formülleri, (2.6), (2.8) ve (2.10) eşitliklerinden

$$\begin{bmatrix} T' \\ X' \\ n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_g & \kappa_n \\ -\kappa_g & 0 & t_r \\ -\kappa_n & -t_r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ X \\ n \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

matris çarpımı ile ifade edilebilir. Burada κ_g geodezik eğrilik, κ_n normal eğrilik ve t_r de geodezik burulma olarak adlandırılır.

Tanım 2.3.2: $\alpha: I \rightarrow M$ birim hızlı bir eğri olsun.

$$\kappa_n(s) = \langle \alpha''(s), n \rangle$$

eşitliği ile belirli $\kappa_n(s)$ sayısına, (α, M) eğri-yüzey ikilisinin $\alpha(s)$ noktasındaki normal eğriliği denir.

Tanım 2.3.3: $\alpha: I \rightarrow M$ birim hızlı bir eğri olsun.

$$\kappa_g(s) = \langle \alpha''(s), X \rangle$$

sayısına, (α, M) eğri-yüzey ikilisinin $\alpha(s)$ noktasındaki geodezik eğriliği denir.

Tanım 2.3.4: $\alpha: I \rightarrow M$ birim hızlı bir eğri olsun.

$$t_r(s) = -\langle n', X \rangle$$

sayısına, (α, M) eğri-yüzey ikilisinin $\alpha(s)$ noktasındaki geodezik burulması denir.

Teorem 2.3.5: Birim hızlı olmayan bir $\alpha: I \rightarrow M$ eğrisini göz önüne alalım. $\|\alpha'\| = v$ olmak üzere, (α, M) eğri-yüzey ikilisinin κ_n, κ_g, t_r eğrilikleri,

$$\kappa_n = \frac{1}{v^2} \langle \alpha'', n \rangle$$

$$\kappa_g = \frac{1}{v^2} \langle \alpha'', X \rangle$$

$$t_r = -\frac{1}{v} \langle n', X \rangle$$

şeklindedir (Sabuncuoğlu 2006).

Teorem 2.3.6: $\alpha: I \rightarrow M$ regüler eğrisinin bir asimptotik eğri olması için gerek ve yeter şart $\kappa_n = 0$ olmasıdır.

Teorem 2.3.7: $\alpha: I \rightarrow M$ eğrisi bir geodezik eğri ise $\kappa_g = 0$ dır. Tersine $\alpha: I \rightarrow M$ eğrisinin hız vektörünün uzunluğu sabit ve $\kappa_g = 0$ ise α eğrisi bir geodezik eğridir.

Teorem 2.3.8: $\alpha: I \rightarrow M$ regüler eğrisinin bir eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart $t_r = 0$ olmasıdır.

Tanım 2.3.9: E^3 de yönlendirilmiş iki yüzey M ve M_1 olsun. M ve M_1 üzerinde yatan ve yay uzunluğu parametresi ile verilen eğriler de sırasıyla $\alpha(s)$ ve $\alpha_1(s_1)$ olsun. $\alpha(s)$

ve $\alpha_1(s_1)$ eğrilerinin Darboux çatıları $\{T, X, n\}$ ve $\{T_1, X_1, n_1\}$ ile gösterilsin. Eğer $\alpha(s)$ ve $\alpha_1(s_1)$ eğrilerinin karşılıklı noktalarında $\alpha(s)$ eğrisinin X Darboux çatı elemanı ile $\alpha_1(s_1)$ eğrisinin X_1 Darboux çatı elemanı çakışiyorsa bu takdirde $\alpha(s)$ e bir Bertrand D-eğrisi ve $\alpha_1(s_1)$ eğrisine de $\alpha(s)$ eğrisinin bir Bertrand D-eğrisidir denir. Böylece $\{\alpha, \alpha_1\}$ eğri çiftine bir Bertrand D-çifti adı verilir. Eğer yönlendirilmiş M ve M_1 yüzeyleri üzerinde yatan böyle eğriler var ise $\{M, M_1\}$ yüzey çiftine Bertrand yüzey çifti denir (Kazaz 2010).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde çalışmanın çıkış noktası olan paralel yüzeyler ve sabit sırt uzaklıklı yüzeyler tanıtıldı. Ayrıca dönel yüzeyler ve üzerindeki eğrilerden bahsedilip, yüzeyin ve üzerindeki eğrinin eğrilikleri ele alındı. Son olarak tüp yüzeyleri ve regle yüzeylerden bahsedildi.

3.1. Paralel Yüzeyler

Tanım 3.1.1: M_1 ve M_2 , 3-boyutlu Öklid uzayında iki yüzey ve M_1 in birim normal vektör alanı n olsun. r sabit bir sayı olmak üzere,

$$f: M_1 \rightarrow M_2, f(P) = P + rn_P$$

olarak tanımlanan bir f fonksiyonu varsa M_1 ve M_2 yüzeylerine paralel yüzeyler denir (Hacısalıhoğlu1983).

M yüzeyi verildiğinde,

$$M_r = \{P + rn_P : P \in M, r \in \mathbb{R} \text{ ve } r = sbt\}$$

eşitliği ile verilen M_r cümlesi, M ye paralel bir yüzeydir (Craig 1883). M nin birim normal vektör alanı n , şekil operatörü S ve M_r nin birim normal vektör alanı n_r , şekil operatörü de S_r ile gösterilecektir. Burada

$$n = \sum_{i=1}^3 a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, a_i \in C^\infty(M, \mathbb{R}) \text{ için, } \bar{a}_i(f(P)) = a_i(P) \text{ olmak üzere } \bar{n} = \sum_{i=1}^3 \bar{a}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

ise, $n_r = \bar{n}$ dir. (Hacısalıhoğlu 1983).

Teorem 3.1.2: E^3 de M yüzeyine paralel M_r yüzeyi verilsin. $X \in \chi(M)$, $\bar{X} \in \chi(M_r)$ vektör alanları $\forall P \in M$ için $b_i(P) = \bar{b}_i(f(P))$, $1 \leq i \leq 3$ olmak üzere

$$X = \sum_{i=1}^3 b_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \bar{X} = \sum_{i=1}^3 \bar{b}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

olarak verilsin. Bu durumda

- i. $f_*(X) = \bar{X} + r\overline{S(X)}$
- ii. $S_r(f_*(X)) = \overline{S(X)}$

dir (Hacısalıhoğlu 1983).

M ve M_r arasındaki özellikler diferensiyel geometri açısından aşağıdaki teorem ile verilebilir.

Teorem 3.1.3: E^3 de, $f: M \rightarrow M_r$ olmak üzere, M nin bir paralel yüzeyi M_r olsun. Bu durumda,

- i. f , üçüncü temel form olma özelliğini korur.
- ii. f , umbilik nokta olma özelliğini korur.
- iii. f , asli eğrilik doğrultusu olma özelliğini korur.
- iv. M nin temel formları sırasıyla I , II ve III ile gösterilmek üzere, $\forall X, Y \in \chi(M)$ ve $\forall P \in M$ için

$$\langle f_*(X), f_*(Y) \rangle|_{f(P)} = I(X_P, Y_P) + 2rII(X_P, Y_P) + r^2III(X_P, Y_P)$$

dir (Hacısalıhoğlu 1983).

Ayrıca, M ve M_r paralel yüzeylerinin Gauss eğrilikleri ile ortalama eğrilikleri arasındaki bağıntı aşağıdaki teorem ile verilebilir.

Teorem 3.1.4: E^3 de bir M yüzeyinin bir paralel yüzeyi M_r olsun. $P \in M$ noktasında M nin Gauss ve ortalama eğrilikleri, sırasıyla, K ve H , $f(P) \in M_r$ noktasında M_r nin Gauss ve ortalama eğrilikleri de K_r ve H_r olsun. Bu durumda,

$$K_r = \frac{K}{1 + rH + r^2K}$$

$$H_r = \frac{H + 2rK}{1 + rH + r^2K}$$

dır (Hacısalihoglu 1983).

3.2. Sabit Sırt Uzaklıkları Yüzeyler

3.2.1. Sabit sırt uzaklıkları eğri

Tanım 3.2.1: E^3 de bir eğri α ve α nın $P = \alpha(s)$ noktasındaki Frenet üçayaklısı $\{T, N, B\}$ olsun. d_1, d_2, d_3 sabit sayılar ve $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 1$ olmak üzere

$$d = d_1T + d_2N + d_3B$$

vektörüne $\{T, N, B\}$ ye sıkı suretle bağlı vektör, P noktasından geçen ve d doğrultusundaki k doğrusuna $\{T, N, B\}$ ye sıkı suretle bağlı doğru denir (Hacısalihoglu 1968).

Tanım 3.2.3: $\alpha: I \rightarrow E^3$ bir eğri ve α nın bir P noktasındaki Frenet üçayaklısı $\{T, N, B\}$ olsun. $\{T, N, B\}$ ye sıkı suretle bağlı k doğrusu üzerindeki, P noktasından sabit bir v uzaklığındaki nokta P_v ile gösterilsin. $\{T, N, B\}$ nin eğri boyunca hareketi esnasında P_v noktasının geometrik yeri olan C_v eğrisine α eğrisinin sabit sırt uzaklıkları eğrisi denir (Hacısalihoglu 1968).

3.2.2. Sabit sırt uzaklıkları yüzeyin ifadesi

Tanım 3.2.4: M ve M_1, E^3 de iki yüzey, M nin bir P noktasındaki birim normal vektörü n_p ve tanjant uzayı T_pM , T_pM nin ortonormal bir bazı $\{X_p, Y_p\}$ olsun. $d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R}$ sabit sayılar ve $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 1$ olmak üzere $Z_p = d_1X_p + d_2Y_p + d_3n_p$ şeklinde tanımlı X_p, Y_p, n_p ye sıkı suretle bağlı Z_p birim vektörünü alalım. r sabit bir sayı olmak üzere,

$$f: M \rightarrow M_1, f(P) = P + rZ_P$$

olarak tanımlanan bir f fonksiyonu varsa M_1 yüzeyine M yüzeyinin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi denir. M_1 yüzeyi f fonksiyonu yardımıyla tanımlandığı için M^f ile gösterilecektir. (M, M^f) çifti ile M yüzeyi ve onun M^f sabit sırt uzaklıklı yüzeyi temsil edilecektir.

Özel olarak $d_1 = d_2 = 0$ alınması halinde $Z_P = n_P$ ve $f(P) = P + rn_P$ olur. Bu durumda M ve M^f yüzeylerinin paralel yüzeyler olacağı açıktır.

3.2.3. Sabit sırt uzaklıklı yüzeyin parametrik ifadesi

M yüzeyi için bir parametrizasyon (ϕ, U) ve

$$\begin{aligned} \phi: U \subset E^2 &\rightarrow M \\ (u, v) &\quad \phi(u, v) \end{aligned}$$

olsun. Bu durumda $T_P M$ nin bir bazı $\{\phi_u, \phi_v\}$, $P \in M$ noktasındaki birim normal vektör alanı n_P ve $d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R}$ sabit sayılar, $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 1$ ve $Z_P = d_1 X_P + d_2 Y_P + d_3 n_P$ olmak üzere

$$M^f = \{f(P): f(P) = P + rZ_P\}$$

olarak verildiğinden M^f yüzeyi için bir parametrizasyon

$$\psi(u, v) = \phi(u, v) + rZ(u, v)$$

olur. Buna göre

$$M^f = \{\psi(u, v): \psi(u, v) = \phi(u, v) + r(d_1 \phi_u(u, v) + d_2 \phi_v(u, v) + d_3 n(u, v))\}$$

olarak ifade edilir. Burada r, d_1, d_2, d_3 sabit sayılar oldukları bilindiklerine göre λ_1, λ_2 ve λ_3 sabit sayılar olmak üzere $rd_1 = \lambda_1, rd_2 = \lambda_2, rd_3 = \lambda_3$ olarak yazılabilir. Bu durumda

$$M^f = \left\{ \psi(u, v): \psi(u, v) = \phi(u, v) + \lambda_1 \phi_u(u, v) + \lambda_2 \phi_v(u, v) + \lambda_3 n(u, v), \right. \\ \left. \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = r^2 \right\}$$

olur. Burada

$$\psi_u = \phi_u + \lambda_1 \phi_{uu} + \lambda_2 \phi_{vu} + \lambda_3 n_u \quad (3.1)$$

$$\psi_v = \phi_v + \lambda_1 \phi_{uv} + \lambda_2 \phi_{vv} + \lambda_3 n_v \quad (3.2)$$

olarak bulunur. M yüzeyi için ϕ_{uu} , ϕ_{uv} , ϕ_{vu} , n_u , n_v değerleri aşağıdaki gibi hesaplanabilir (Hacısalıhoğlu 1983).

$$\phi_{uu} = \frac{\langle \phi_{uu}, \phi_u \rangle}{\|\phi_u\|^2} \phi_u + \frac{\langle \phi_{uu}, \phi_v \rangle}{\|\phi_v\|^2} \phi_v + \frac{1}{\|\phi_u\| \|\phi_v\|} \det(\phi_{uu}, \phi_u, \phi_v) n$$

$$\phi_{uv} = \phi_{vu} = \frac{\langle \phi_{uv}, \phi_u \rangle}{\|\phi_u\|^2} \phi_u + \frac{\langle \phi_{uv}, \phi_v \rangle}{\|\phi_v\|^2} \phi_v + \frac{1}{\|\phi_u\| \|\phi_v\|} \det(\phi_{uv}, \phi_u, \phi_v) n$$

$$\phi_{vv} = \frac{\langle \phi_{vv}, \phi_u \rangle}{\|\phi_u\|^2} \phi_u + \frac{\langle \phi_{vv}, \phi_v \rangle}{\|\phi_v\|^2} \phi_v + \frac{1}{\|\phi_u\| \|\phi_v\|} \det(\phi_{vv}, \phi_u, \phi_v) n$$

$$n_u = -\frac{1}{\|\phi_u\|^2 \|\phi_v\|^2} \det(\phi_{uu}, \phi_u, \phi_v) \phi_u - \frac{1}{\|\phi_u\|^2 \|\phi_v\|^2} \det(\phi_{uv}, \phi_u, \phi_v) \phi_v$$

$$n_v = -\frac{1}{\|\phi_u\|^2 \|\phi_v\|^2} \det(\phi_{uv}, \phi_u, \phi_v) \phi_u - \frac{1}{\|\phi_u\|^2 \|\phi_v\|^2} \det(\phi_{vv}, \phi_u, \phi_v) \phi_v.$$

M nin parametre eğrileri eğrilik çizgileri ve u ile v de bu çizgilerin yay parametreleri olarak seçilmesi durumunda $\|\phi_u\| = 1$, $\|\phi_v\| = 1$ olacağı açıktır. Böylece

$$\det(\phi_{uv}, \phi_u, \phi_v) = 0$$

ve ϕ_u , ϕ_v de M üzerinde asli eğrilik doğrultuları olduğundan

$$\langle \phi_u, \phi_v \rangle = 0$$

olur. Ayrıca M yüzeyinin asli eğrilik fonksiyonları olan κ_1 ve κ_2 ise yukarıdaki şartlar altında

$$\kappa_1 = -\det(\phi_{uu}, \phi_u, \phi_v)$$

$$\kappa_2 = -\det(\phi_{vv}, \phi_u, \phi_v)$$

biçimindedir (Hacısalihoglu 1983). Yine bu şartlar altında

$$\begin{aligned} \langle \phi_u, \phi_u \rangle = 1 &\Rightarrow \phi_u[\langle \phi_u, \phi_u \rangle] = \phi_u[1] \\ &\Rightarrow \langle \phi_{uu}, \phi_u \rangle + \langle \phi_u, \phi_{uu} \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle \phi_{uu}, \phi_u \rangle = 0 \end{aligned}$$

Benzer şekilde

$$\langle \phi_v, \phi_v \rangle = 1 \Rightarrow \langle \phi_{vv}, \phi_v \rangle = 0$$

bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned} \langle \phi_u, \phi_u \rangle = 1 &\Rightarrow \phi_v[\langle \phi_u, \phi_u \rangle] = \phi_v[1] \\ &\Rightarrow \langle \phi_{uv}, \phi_u \rangle + \langle \phi_u, \phi_{uv} \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle \phi_{uv}, \phi_u \rangle = 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} \langle \phi_v, \phi_v \rangle = 1 &\Rightarrow \phi_u[\langle \phi_v, \phi_v \rangle] = \phi_u[1] \\ &\Rightarrow \langle \phi_{vu}, \phi_v \rangle + \langle \phi_v, \phi_{vu} \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle \phi_{vu}, \phi_v \rangle = 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned} \langle \phi_u, \phi_v \rangle = 0 &\Rightarrow \phi_u[\langle \phi_u, \phi_v \rangle] = \phi_u[0] \\ &\Rightarrow \langle \phi_{uu}, \phi_v \rangle + \langle \phi_u, \phi_{vu} \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle \phi_{uu}, \phi_v \rangle = -\langle \phi_u, \phi_{vu} \rangle \end{aligned} \tag{3.5}$$

olur. (3.5) eşitliğinde $\phi_{uv} = \phi_{vu}$ olduğu ve (3.3) eşitliği kullanılırsa

$$\langle \phi_{uu}, \phi_v \rangle = 0$$

bulunur.

$$\begin{aligned}\langle \phi_u, \phi_v \rangle = 0 &\Rightarrow \phi_v[\langle \phi_u, \phi_v \rangle] = \phi_v[0] \\ &\Rightarrow \langle \phi_{uv}, \phi_v \rangle + \langle \phi_u, \phi_{vv} \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle \phi_{uv}, \phi_v \rangle = -\langle \phi_u, \phi_{vv} \rangle\end{aligned}$$

bu son eşitlikte yine $\phi_{uv} = \phi_{vu}$ olduğu ve (3.4) eşitliği kullanılırsa

$$\langle \phi_{uu}, \phi_v \rangle = 0$$

bulunur. Bütün bu hesaplamalar sonucunda

$$\left. \begin{aligned}\phi_{uu} &= -\kappa_1 n \\ \phi_{vv} &= -\kappa_2 n \\ \phi_{uv} &= \phi_{vu} = 0 \\ n_u &= \kappa_1 \phi_u \\ n_v &= \kappa_2 \phi_u\end{aligned}\right\} \quad (3.6)$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece (3.1) ve (3.2) eşitliklerinde (3.6) eşitlikleri kullanılırsa

$$\psi_u = (1 + \lambda_3 \kappa_1) \phi_u - \lambda_1 \kappa_1 n \quad (3.7)$$

$$\psi_v = (1 + \lambda_3 \kappa_2) \phi_v - \lambda_2 \kappa_2 n \quad (3.8)$$

bulunur. Burada $\{\psi_u, \psi_v\}$, $\chi(M^f)$ için bir bazdır. Öyleyse, M^f yüzeyinin birim normal vektör alanı n^f olmak üzere

$$\begin{aligned}n^f &= \frac{\psi_u \times \psi_v}{\|\psi_u \times \psi_v\|} \\ n^f &= \frac{\lambda_1 \kappa_1 (1 + \lambda_3 \kappa_2) \phi_u + \lambda_2 \kappa_2 (1 + \lambda_3 \kappa_1) \phi_v + (1 + \lambda_3 \kappa_1)(1 + \lambda_3 \kappa_2) n}{\sqrt{\lambda_1^2 \kappa_1^2 (1 + \lambda_3 \kappa_2)^2 + \lambda_2^2 \kappa_2^2 (1 + \lambda_3 \kappa_1)^2 + (1 + \lambda_3 \kappa_1)^2 (1 + \lambda_3 \kappa_2)^2}}\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Eğer

$$A = \sqrt{\lambda_1^2 \kappa_1^2 (1 + \lambda_3 \kappa_2)^2 + \lambda_2^2 \kappa_2^2 (1 + \lambda_3 \kappa_1)^2 + (1 + \lambda_3 \kappa_1)^2 (1 + \lambda_3 \kappa_2)^2}$$

olarak alınırsa

$$n^f = \frac{\lambda_1 \kappa_1 (1 + \lambda_3 \kappa_2)}{A} \phi_u + \frac{\lambda_2 \kappa_2 (1 + \lambda_3 \kappa_1)}{A} \phi_v + \frac{(1 + \lambda_3 \kappa_1)(1 + \lambda_3 \kappa_2)}{A} n \quad (3.9)$$

elde edilir.

Eğer $\kappa_1 = \kappa_2$ ve $\lambda_3 = -\frac{1}{\kappa_1} = -\frac{1}{\kappa_2}$ ise ψ_u ve ψ_v lineer bağımlı olacağından M^f regüler bir yüzey olmaz. Bu sebeple bu durum dikkate alınmayacaktır.

Sonuç 3.2.5: (M, M^f) çifti bir paralel yüzey olması için gerek ve yeter şart $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ olmasıdır.

İspat: (3.9) dan $1 + \lambda_3 \kappa_1 \neq 0$ ve $1 + \lambda_3 \kappa_2 \neq 0$ olacağından $n^f \in Sp\{n\}$ olması için gerek ve yeter şart $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ olmasıdır. Bu da (M, M^f) yüzey çiftinin paralel yüzeyler olmasını gerektirir. Ayrıca bu durumda $n^f = n$ olur.

3.2.4. Sabit sırt uzaklıklı yüzeyin şekil operatörü

M yüzeyinin şekil operatörü S ve M^f yüzeyinin şekil operatörü S^f ile gösterilsin. Bu durumda S^f şekil operatörü $\chi(M^f)$ in

$$\psi_u = (1 + \lambda_3 \kappa_1) \phi_u - \lambda_1 \kappa_1 n$$

$$\psi_v = (1 + \lambda_3 \kappa_2) \phi_v - \lambda_2 \kappa_2 n$$

bazına göre hesaplanabilir.

$$S^f(\psi_u) = D_{\psi_u} n^f = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\lambda_1 \kappa_1 (1 + \lambda_3 \kappa_2)}{A} \right) \phi_u + \frac{\lambda_1 \kappa_1 (1 + \lambda_3 \kappa_2)}{A} \frac{\phi_{uu}}{-\kappa_1 n}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\lambda_2 \kappa_2 (1 + \lambda_3 \kappa_1)}{A} \right) \phi_v + \frac{\lambda_2 \kappa_2 (1 + \lambda_3 \kappa_1)}{A} \underbrace{\phi_{vu}}_0 \\
& + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{(1 + \lambda_3 \kappa_1)(1 + \lambda_3 \kappa_2)}{A} \right) n + \frac{(1 + \lambda_3 \kappa_1)(1 + \lambda_3 \kappa_2)}{A} \underbrace{n_u}_{\kappa_1 \phi_u}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S^f(\psi_u) &= \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\lambda_1 \kappa_1 (1 + \lambda_3 \kappa_2)}{A} \right) + \frac{\kappa_1 (1 + \lambda_3 \kappa_1)(1 + \lambda_3 \kappa_2)}{A} \right\} \phi_u \\
& + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\lambda_2 \kappa_2 (1 + \lambda_3 \kappa_1)}{A} \right) \phi_v \\
& + \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{(1 + \lambda_3 \kappa_1)(1 + \lambda_3 \kappa_2)}{A} \right) - \frac{\lambda_1 \kappa_1^2 (1 + \lambda_3 \kappa_2)}{A} \right\} n
\end{aligned}$$

Hesaplamanın yapılabilmesi için eşitliğin sağ tarafında ki ϕ_u , ϕ_v ve n nin katsayıları ayrı ayrı hesaplanarak yerlerine yazıldığı takdirde

$$\begin{aligned}
S^f(\psi_u) &= \frac{(1 + \lambda_3 \kappa_1)(1 + \lambda_3 \kappa_2)}{A^3} \left\{ \lambda_1 \frac{\partial \kappa_1}{\partial u} (\lambda_2^2 \kappa_2^2 + (1 + \lambda_3 \kappa_2)^2) + \kappa_1 A^2 \right\} \phi_u \\
& - \frac{\lambda_1^2 \lambda_2}{A^3} \frac{\partial \kappa_1}{\partial u} \kappa_1 \kappa_2 (1 + \lambda_3 \kappa_2)^2 \phi_v \\
& - \frac{\lambda_1 \kappa_1 (1 + \lambda_3 \kappa_2)}{A^3} \left\{ \lambda_1 \frac{\partial \kappa_1}{\partial u} (1 + \lambda_3 \kappa_2)^2 + \kappa_1 A^2 \right\} n
\end{aligned} \tag{3.10}$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
S^f(\psi_v) &= D_{\psi_v} n^f = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\lambda_1 \kappa_1 (1 + \lambda_3 \kappa_2)}{A} \right) \phi_u + \frac{\lambda_1 \kappa_1 (1 + \lambda_3 \kappa_2)}{A} \underbrace{\phi_{uv}}_0 \\
& + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\lambda_2 \kappa_2 (1 + \lambda_3 \kappa_1)}{A} \right) \phi_v + \frac{\lambda_2 \kappa_2 (1 + \lambda_3 \kappa_1)}{A} \underbrace{\phi_{vv}}_{-\kappa_2 n} \\
& + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{(1 + \lambda_3 \kappa_1)(1 + \lambda_3 \kappa_2)}{A} \right) n + \frac{(1 + \lambda_3 \kappa_1)(1 + \lambda_3 \kappa_2)}{A} \underbrace{n_v}_{\kappa_2 \phi_v}
\end{aligned}$$

$$S^f(\psi_v) = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\lambda_1 \kappa_1 (1 + \lambda_3 \kappa_2)}{A} \right) \phi_u$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\lambda_2 \kappa_2 (1 + \lambda_3 \kappa_1)}{A} + \frac{\kappa_2 (1 + \lambda_3 \kappa_1) (1 + \lambda_3 \kappa_2)}{A} \right) \right\} \phi_v \\
& + \left\{ \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{(1 + \lambda_3 \kappa_1) (1 + \lambda_3 \kappa_2)}{A} \right) - \frac{\lambda_1 \kappa_2^2 (1 + \lambda_3 \kappa_1)}{A} \right\} n
\end{aligned}$$

bulunur. Yine benzer şekilde eşitliğin sağ tarafında ki ϕ_u , ϕ_v ve n nin katsayıları ayrı ayrı hesaplanarak yerlerine yazıldığı takdirde

$$\begin{aligned}
S^f(\psi_v) &= -\frac{1}{A^3} \frac{\partial \kappa_2}{\partial v} \lambda_1 \lambda_2^2 \kappa_1 \kappa_2 (1 + \lambda_3 \kappa_1)^2 \phi_u \\
& + \frac{(1 + \lambda_3 \kappa_1) (1 + \lambda_3 \kappa_2)}{A^3} \left\{ \lambda_2 \frac{\partial \kappa_2}{\partial v} (\lambda_1^2 \kappa_1^2 + (1 + \lambda_3 \kappa_1)^2) + \kappa_2 A^2 \right\} \phi_v \\
& - \frac{\lambda_2 \kappa_2 (1 + \lambda_3 \kappa_1)}{A^3} \left\{ \lambda_2 \frac{\partial \kappa_2}{\partial v} (1 + \lambda_3 \kappa_1)^2 + \kappa_2 A^2 \right\} n
\end{aligned} \tag{3.11}$$

olarak bulunur.

Böylece $S^f(\psi_u)$ ve $S^f(\psi_v)$ değerleri ϕ_u , ϕ_v ve n cinsinden elde edilmiş oldu. Bu ifadeler ψ_u ve ψ_v cinsinden de elde edilebilir. Bunun için

$$S^f(\psi_u) = \mu_1 \psi_u + \mu_2 \psi_v$$

olmak üzere, ψ_u ve ψ_v nin sırasıyla (3.7) ve (3.8) deki değerleri yerlerine yazılırsa

$$S^f(\psi_u) = \mu_1 \{ (1 + \lambda_3 \kappa_1) \phi_u - \lambda_1 \kappa_1 n \} + \mu_2 \{ (1 + \lambda_3 \kappa_2) \phi_v - \lambda_2 \kappa_2 n \}$$

$$S^f(\psi_u) = \mu_1 (1 + \lambda_3 \kappa_1) \phi_u + \mu_2 (1 + \lambda_3 \kappa_2) \phi_v - (\mu_1 \lambda_1 \kappa_1 + \mu_2 \lambda_2 \kappa_2) n \tag{3.12}$$

elde edilir. (3.10) ve (3.12) birlikte değerlendirildiğinde

$$\mu_1 = \frac{(1 + \lambda_3 \kappa_2)}{A^3} \left\{ \lambda_1 \frac{\partial \kappa_1}{\partial u} (\lambda_2^2 \kappa_2^2 + (1 + \lambda_3 \kappa_2)^2) + \kappa_1 A^2 \right\} \tag{3.13}$$

$$\mu_2 = -\frac{1}{A^3} \frac{\partial \kappa_1}{\partial u} \lambda_1^2 \lambda_2 \kappa_1 \kappa_2 (1 + \lambda_3 \kappa_2) \tag{3.14}$$

olarak bulunur. Ayrıca

$$S^f(\psi_v) = \mu_3\psi_u + \mu_4\psi_v$$

için ψ_u ve ψ_v nin sırasıyla (3.7) ve (3.8) deki değerleri yerlerine yazılırsa

$$S^f(\psi_v) = \mu_3\{(1 + \lambda_3\kappa_1)\phi_u - \lambda_1\kappa_1n\} + \mu_4\{(1 + \lambda_3\kappa_2)\phi_v - \lambda_2\kappa_2n\}$$

$$S^f(\psi_v) = \mu_3(1 + \lambda_3\kappa_1)\phi_u + \mu_4(1 + \lambda_3\kappa_2)\phi_v - (\mu_3\lambda_1\kappa_1 + \mu_4\lambda_2\kappa_2)n \quad (3.15)$$

elde edilir. (3.11) ve (3.15) eşitliklerinden

$$\mu_3 = -\frac{1}{A^3} \frac{\partial \kappa_2}{\partial v} \lambda_1 \lambda_2^2 \kappa_1 \kappa_2 (1 + \lambda_3 \kappa_1) \quad (3.16)$$

$$\mu_4 = \frac{(1 + \lambda_3 \kappa_1)}{A^3} \left\{ \lambda_2 \frac{\partial \kappa_2}{\partial v} (\lambda_1^2 \kappa_1^2 + (1 + \lambda_3 \kappa_1)^2) + \kappa_2 A^2 \right\} \quad (3.17)$$

bulunur.

Bu durumda $\chi(M^f)$ in $\{\psi_u, \psi_v\}$ bazına göre M^f yüzeyinin şekil operatörünün matrisi

$$A = \sqrt{\lambda_1^2 \kappa_1^2 (1 + \lambda_3 \kappa_2)^2 + \lambda_2^2 \kappa_2^2 (1 + \lambda_3 \kappa_1)^2 + (1 + \lambda_3 \kappa_1)^2 (1 + \lambda_3 \kappa_2)^2}$$

veya farklı bir ifadeyle

$$A = \sqrt{\lambda_1^2 \kappa_1^2 + \lambda_2^2 \kappa_2^2 + 2\lambda_3 (\lambda_1^2 \kappa_1 + \lambda_2^2 \kappa_2) K + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \lambda_3^2 K^2 + (1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K)^2}$$

olmak üzere (3.13), (3.14), (3.16) ve (3.17) eşitliklerinden

$$S^f = \frac{1}{A^3} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} (1 + \lambda_3 \kappa_2) \left\{ \lambda_1 \frac{\partial \kappa_1}{\partial u} (\lambda_2^2 \kappa_2^2 + (1 + \lambda_3 \kappa_2)^2) + \kappa_1 A^2 \right\} & -\frac{\partial \kappa_1}{\partial u} \lambda_1^2 \lambda_2 \kappa_1 \kappa_2 (1 + \lambda_3 \kappa_2) \\ -\frac{\partial \kappa_2}{\partial v} \lambda_1 \lambda_2^2 \kappa_1 \kappa_2 (1 + \lambda_3 \kappa_1) & (1 + \lambda_3 \kappa_1) \left\{ \lambda_2 \frac{\partial \kappa_2}{\partial v} (\lambda_1^2 \kappa_1^2 + (1 + \lambda_3 \kappa_1)^2) + \kappa_2 A^2 \right\} \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir.

Bu hesaplamaların bir sonucu olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.6: E^3 de bir M yüzeyi için parametrizasyon (ϕ, U) ve $\chi(M)$ nin asli eğrilik doğrultularından oluşan ortonormal bazı $\{\phi_u, \phi_v\}$, M nin asli eğrilikleri κ_1, κ_2 ve M nin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi M^f olsun. $\chi(M^f)$ in $\{\psi_u, \psi_v\}$ bazı

$$\psi_u = (1 + \lambda_3 \kappa_1) \phi_u - \lambda_1 \kappa_1 n$$

$$\psi_v = (1 + \lambda_3 \kappa_2) \phi_v - \lambda_2 \kappa_2 n$$

alındığında M^f yüzeyinin S^f şekil operatörüne karşılık gelen matris, alınan bu baza göre

$$S^f = \frac{1}{A^3} \cdot \begin{pmatrix} (1 + \lambda_3 \kappa_2) \left\{ \lambda_1 \frac{\partial \kappa_1}{\partial u} (\lambda_2^2 \kappa_2^2 + (1 + \lambda_3 \kappa_2)^2) + \kappa_1 A^2 \right\} & -\frac{\partial \kappa_1}{\partial u} \lambda_1^2 \lambda_2 \kappa_1 \kappa_2 (1 + \lambda_3 \kappa_2) \\ -\frac{\partial \kappa_2}{\partial v} \lambda_1 \lambda_2^2 \kappa_1 \kappa_2 (1 + \lambda_3 \kappa_1) & (1 + \lambda_3 \kappa_1) \left\{ \lambda_2 \frac{\partial \kappa_2}{\partial v} (\lambda_1^2 \kappa_1^2 + (1 + \lambda_3 \kappa_1)^2) + \kappa_2 A^2 \right\} \end{pmatrix}$$

dir.

Teorem 3.2.7: E^3 de bir M yüzeyinin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi M^f ve M^f in Gauss eğriliği K^f , ortalama eğriliği H^f ise

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\lambda_1^2 \kappa_1^2 (1 + \lambda_3 \kappa_2)^2 + \lambda_2^2 \kappa_2^2 (1 + \lambda_3 \kappa_1)^2 + (1 + \lambda_3 \kappa_1)^2 (1 + \lambda_3 \kappa_2)^2} \\ &= \sqrt{\lambda_1^2 \kappa_1^2 + \lambda_2^2 \kappa_2^2 + 2\lambda_3 (\lambda_1^2 \kappa_1 + \lambda_2^2 \kappa_2) K + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \lambda_3^2 K^2 + (1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K)^2} \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$K^f = \frac{(1 + \lambda_3 \kappa_1)(1 + \lambda_3 \kappa_2)}{A^4} \begin{pmatrix} \lambda_1 \lambda_2 \frac{\partial \kappa_1}{\partial u} \frac{\partial \kappa_2}{\partial v} + \kappa_1 \lambda_2 \frac{\partial \kappa_2}{\partial v} (\lambda_1^2 \kappa_1^2 + (1 + \lambda_3 \kappa_1)^2) \\ + \kappa_2 \lambda_1 \frac{\partial \kappa_1}{\partial u} (\lambda_2^2 \kappa_2^2 + (1 + \lambda_3 \kappa_2)^2) + \kappa_1 \kappa_2 A^2 \end{pmatrix}$$

veya burada A nın değeri ve $\kappa_1 \kappa_2 = K$, $\kappa_1 + \kappa_2 = H$ olduğu kullanılırsa

$$K^f = (1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K) \left\{ \frac{\lambda_1 \lambda_2 \frac{\partial \kappa_1}{\partial u} \frac{\partial \kappa_2}{\partial v} + \lambda_1 \kappa_2 \frac{\partial \kappa_1}{\partial u} (\lambda_2^2 \kappa_2^2 + (1 + \lambda_3 \kappa_2)^2) + \lambda_2 \kappa_1 \frac{\partial \kappa_2}{\partial v} (\lambda_1^2 \kappa_1^2 + (1 + \lambda_3 \kappa_1)^2)}{\left(\lambda_1^2 \kappa_1^2 + \lambda_2^2 \kappa_2^2 + 2\lambda_3 (\lambda_1^2 \kappa_1 + \lambda_2^2 \kappa_2) K + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \lambda_3^2 K^2 \right)^2 + (1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K)^2} + \frac{K}{\lambda_1^2 \kappa_1^2 + \lambda_2^2 \kappa_2^2 + 2\lambda_3 (\lambda_1^2 \kappa_1 + \lambda_2^2 \kappa_2) K + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \lambda_3^2 K^2 + (1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K)^2} \right\}$$

dır ve

$$H^f = \frac{1}{A^3} \left\{ (1 + \lambda_3 \kappa_2) \left(\lambda_1 \frac{\partial \kappa_1}{\partial u} (\lambda_2^2 \kappa_2^2 + (1 + \lambda_3 \kappa_2)^2) + \kappa_1 A^2 \right) + (1 + \lambda_3 \kappa_1) \left(\lambda_2 \frac{\partial \kappa_2}{\partial v} (\lambda_1^2 \kappa_1^2 + (1 + \lambda_3 \kappa_1)^2) + \kappa_2 A^2 \right) \right\}$$

veya burada A nın değeri ve $\kappa_1 \kappa_2 = K$, $\kappa_1 + \kappa_2 = H$ olduğu kullanılırsa

$$H^f = \frac{\lambda_1 \frac{\partial \kappa_1}{\partial u} (1 + \lambda_3 \kappa_2) (\lambda_2^2 \kappa_2^2 + (1 + \lambda_3 \kappa_2)^2) + \lambda_2 \frac{\partial \kappa_2}{\partial v} (1 + \lambda_3 \kappa_1) \left(\frac{\lambda_1^2 \kappa_1^2}{+(1 + \lambda_3 \kappa_1)^2} \right)}{\left(\lambda_1^2 \kappa_1^2 + \lambda_2^2 \kappa_2^2 + 2\lambda_3 (\lambda_1^2 \kappa_1 + \lambda_2^2 \kappa_2) K + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \lambda_3^2 K^2 \right)^{\frac{3}{2}} + (1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K)^2} + \frac{H + 2\lambda_3 K}{\sqrt{\lambda_1^2 \kappa_1^2 + \lambda_2^2 \kappa_2^2 + 2\lambda_3 (\lambda_1^2 \kappa_1 + \lambda_2^2 \kappa_2) K + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \lambda_3^2 K^2 + (1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K)^2}}$$

dır.

Özel olarak, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = r = \text{sabit}$ alınırsa,

$$\psi(u, v) = \phi(u, v) + rn|_{\phi(u, v)}$$

şeklini alır ve bu durumda M nin M^f sabit sırt uzaklıklı yüzeyi, M nin M_r paralel yüzeyi olur. M nin asli eğrilikleri κ_1 , κ_2 , Gauss eğriliği $K = \kappa_1 \kappa_2$, ortalama eğriliği $H = \kappa_1 + \kappa_2$ ve bu özel durumda $M^f = M_r$ yüzeyinin Gauss eğriliği K^f , ortalama eğriliği H^f için, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = r = \text{sabit}$ olmak üzere

$$A = (1 + \lambda_3 \kappa_1)(1 + \lambda_3 \kappa_2) = 1 + rH + r^2 K$$

olur ve böylece

$$K^f = \frac{K}{1 + rH + r^2K}$$

$$H^f = \frac{H + 2rK}{1 + rH + r^2K}$$

bulunmuş olur. Bu durumda şu teorem verilebilir.

Teorem 3.2.8: E^3 de (M, M^f) sabit sırt uzaklıklı yüzey çiftinin paralel yüzey çifti olması için gerek ve yeter şart

$$K^f = \frac{K}{1 + rH + r^2K}$$

$$H^f = \frac{H + 2rK}{1 + rH + r^2K}$$

olmasıdır.

3.3. Dönel Yüzeyler

Tanım 3.3.1: Bir eğrinin bir doğru çevresinde döndürülmesiyle elde edilen yüzeye bir dönel yüzey denir.

Örneğin, xz düzleminde α bir düzlemsel eğri ve α eğrisinin Oz eksenini etrafında döndürülmesiyle elde edilen M yüzeyi ele alınsın. Burada

$$\alpha: I \rightarrow E^2$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = (r(t), h(t))$$

eğrisi E^2 de birim hızlı bir eğri ve $\phi(t, \theta)$ bir parametrizasyon olmak üzere M yüzeyi,

$$\phi(t, \theta) = (r(t)\cos\theta, r(t)\sin\theta, h(t)) \quad (3.18)$$

biçiminde ele alınabilir. Ayrıca her bir $\theta \in \mathbb{R}$ için bir

$$\alpha_\theta: I \rightarrow M$$

eğrisi $t \in I$ olmak üzere,

$$\alpha_\theta(t) = (r(t)\cos\theta, r(t)\sin\theta, h(t)) \quad (3.19)$$

biçiminde ve $\forall t \in I$ için bir

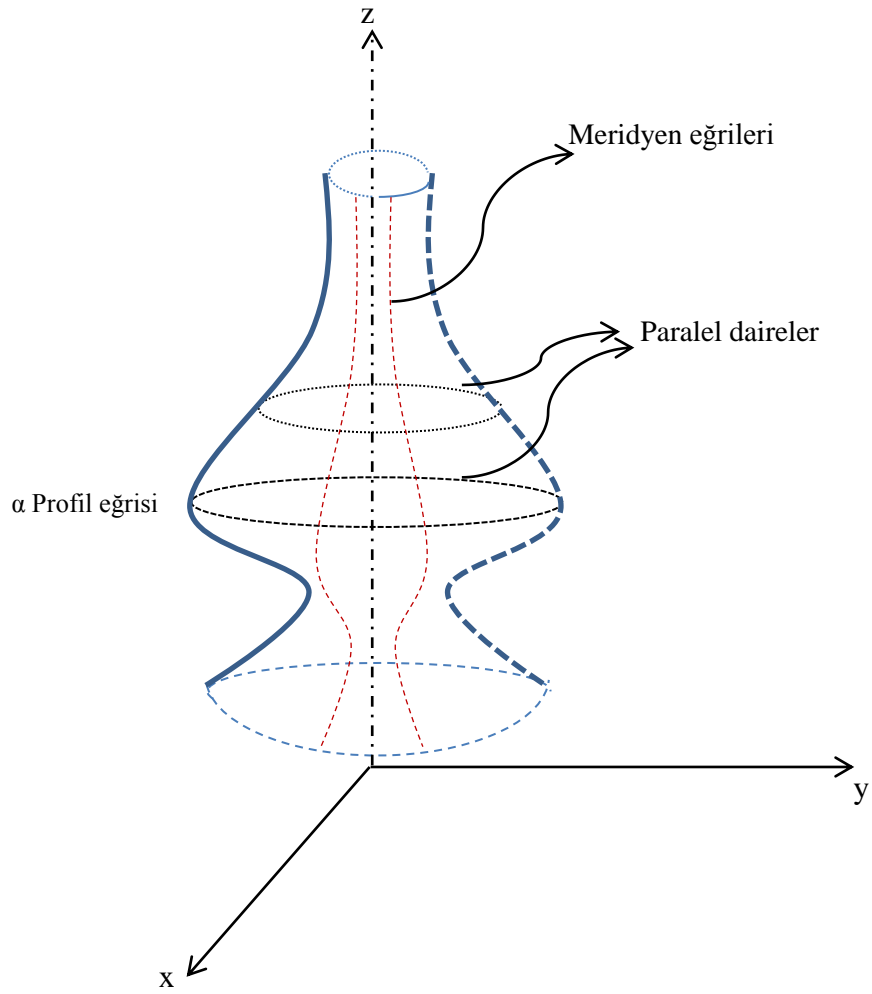
$$\beta_t: \mathbb{R} \rightarrow M$$

eğrisi de,

$$\beta_t(\theta) = (r(t)\cos\theta, r(t)\sin\theta, h(t))$$

olarak tanımlansın.

α_θ eğrilerine M dönele yüzeyinin meridyen eğrileri ve β_t eğrileri (çemberleri) ne de M nin paralel daireleri denir. α eğrisine de M dönele yüzeyinin profil eğrisi denir. Bu şekilde tanımlanan meridyenler ve paralel daireleri daima birbirini dik keser (Hacısalihoglu 1983).



Şekil 3.1. Dönel yüzey üzerindeki meridyen eğrileri ve paralel daireler (çemberler)

(3.18) eşitliği ile ifade edilen dönel yüzeyler için, Gauss eğriliği, ortalama eğrilik I. ve II. esas form, asli eğrilikler gibi çok önemli geometrik nicelikler kolayca hesaplanabilir. O halde (3.18) den,

$$\phi_t(t, \theta) = (r'(t)\cos\theta, r'(t)\sin\theta, h'(t)) \quad (3.20)$$

$$\phi_\theta(t, \theta) = (-r(t)\sin\theta, r(t)\cos\theta, 0) \quad (3.21)$$

eşitlikleri elde edilir. (3.20) ve (3.21) eşitliklerinden dönel yüzeyin I.esas form katsayılar matrisi

$$I = \begin{pmatrix} r'^2 + h'^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

şeklinde hesaplanır. Ayrıca yüzeyin birim normal vektörü olarak

$$n = \frac{\phi_t \times \phi_\theta}{\|\phi_t \times \phi_\theta\|} = \frac{1}{\sqrt{r'^2 + h'^2}} (-h' \cos \theta, -h' \sin \theta, r') \quad (3.22)$$

seçilebilir. Böylece (3.20) ve (3.21) eşitliklerinde tekrar t ve θ ya göre kısmi türevler alınıp (3.22) eşitliğinin de kullanılmasıyla II. esas form katsayılar matrisi

$$II = \frac{1}{\sqrt{r'^2 + h'^2}} \begin{pmatrix} -r''h' + r'h'' & 0 \\ 0 & rh' \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir. Buradan açıktır ki t ve θ ya bağlı parametre eğrileri eğrilik çizgileridir.

Eğer t yay parametresi olarak seçilirse

$$\dot{r}^2 + \dot{h}^2 = 1 \quad (3.23)$$

olup, bu durumda birinci ve ikinci esas form katsayılar matrisi

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

$$II = \begin{pmatrix} -\dot{r}\dot{h} + r\ddot{h} & 0 \\ 0 & r\dot{h} \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

biçiminde elde edilir. Ayrıca asli eğrilikler

$$\kappa_1 = -\dot{r}\dot{h} + r\ddot{h} \quad (3.26)$$

ve

$$\kappa_2 = \frac{\dot{h}}{r} \quad (3.27)$$

olur. (3.23) eşitliğinde türev alınırsa,

$$\dot{r}\ddot{r} + \dot{h}\ddot{h} = 0 \quad (3.28)$$

elde edilir. O halde (3.26) ve (3.28) den

$$\kappa_1 = -\dot{r}\dot{h} + r\ddot{h} = \frac{\dot{h}\ddot{h}}{\dot{r}}\dot{h} + r\ddot{h} = \frac{\ddot{h}}{\dot{r}}(\dot{h}^2 + r^2) = \frac{\ddot{h}}{\dot{r}} = -\frac{\ddot{r}}{\dot{h}} \quad (3.29)$$

yazılabilir. Buradan hareketle (3.27) ve (3.29) dan Gauss ve ortalama eğrilikler de sırasıyla

$$K = \kappa_1\kappa_2 = -\frac{\ddot{r}}{r} \quad (3.30)$$

$$H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = \frac{r\ddot{h} + \dot{r}\dot{h}}{2r\dot{r}} \quad (3.31)$$

olarak hesaplanır (Kühnel 2006).

Yay parametresi ile verilmiş olan α düzlem eğrisinin Oz eksenini etrafında döndürülmesiyle elde edilen dönel yüzey için Teorem 2.3.6, Teorem 2.3.7, Teorem 2.3.8 ile (3.24) ve (3.25) den aşağıdaki teoremler ifade edilebilir:

Teorem 3.3.2: Dönel yüzey üzerindeki her bir meridyen eğrisi α_θ , M üzerinde geodeziktir ($\kappa_g = 0$).

Teorem 3.3.3: Dönel yüzey üzerindeki α meridyen eğrisi için birinci eğrilik, normal eğriliğe eşittir ($\kappa_1 = \kappa_n$).

Teorem 3.3.4: Dönel yüzey üzerindeki α meridyen eğrisi için geodezik burulma sıfıra eşit olup α bir eğrilik çizgisidir ($t_r = 0$).

Teorem 3.3.5: Dönel yüzey üzerindeki $\beta_t(\theta)$ dairelerinin M üzerinde birer geodezik eğri olmaları için gerek ve yeter şart, α nın eğriliği olan $\frac{\dot{h}}{\dot{r}}$ nin $\alpha(t)$ de sıfır olmasıdır.

3.4. Tüp Yüzeyleri

Tanım 3.4.1: E^3 de 1-parametrelili küre ailesinin zarfına kanal yüzeyi denir. Alternatif olarak kanal yüzeyi, merkezlerinin yörüngesi bir $c(t)$ eğrisi ve yarıçap fonksiyonu $r(t)$ olan değişken yarıçaplı hareketli bir kürenin zarfı olarak tanımlanır (Gray 1998).

Tanım 3.4.2: $S^2(t)$ kürelerinin merkezlerinin yörüngesi olan $c(t)$ eğrisine kanal yüzeyinin merkez eğrisi ya da spine eğrisi, $r = r(t)$ fonksiyonuna ise kanal yüzeyinin yarıçap fonksiyonu denir (Gray 1998).

Tanım 3.4.3: Bir kanal yüzeyi için yarıçap fonksiyonu $r = r(t)$ sabit ise, kanal yüzeyine tüp ya da boru yüzeyi denir.

3.4.1. Frenet çatılı tüp yüzeyi

Bir önceki paragrafta kanal yüzeyi ve ona bağlı olarak tüp yüzeyinin tanımları verilmişti. Şimdi kanal yüzeyinin parametrisasyonunu ifade eden teorem verilip yine buradan hareketle tüp yüzeyinin parametrisasyonu verilecektir.

Teorem 3.4.4: Bir kanal yüzeyinin merkez eğrisi, eğriliği sıfırdan farklı olan birim hızlı $c: (a, b) \rightarrow E^3$ eğrisi olsun. $\{T, N, B\}$, c eğrisinin Frenet çatısı olmak üzere kanal yüzeyi aşağıdaki gibi iki farklı parametrisasyonla verilebilir.

$$K(s, \theta) = c(s) + r \left(-r'T(s) - \sqrt{1 - r'^2} (N(s)\cos\theta + B(s)\sin\theta) \right)$$

$$K(s, \theta) = c(s) + r \left(-r'T(s) + \sqrt{1 - r'^2} (N(s)\cos\theta + B(s)\sin\theta) \right) \quad (3.32)$$

(3.32) denkleminde $r = \text{sabit}$ olarak seçilirse Tanım 3.4.3 e göre tüp yüzeyi elde edilir. O halde tüp yüzeyinin parametrisasyonu için şu tanım yapılabilir.

Sonuç 3.4.5: $c: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi, eğriliği her yerde sıfırdan farklı ve parametresi yay uzunluğu olan düzgün, parametrik bir eğri olsun. c eğrisinin çevresinde, yarıçapı r olan tüp yüzeyi; c eğrisinin normal vektörü N , binormal vektörü B olmak üzere,

$$\phi(s, \theta) = c(s) + r(\cos\theta N(s) + \sin\theta B(s)) \quad (3.33)$$

parametrizasyonu ile verilebilir.

3.4.2. Frenet çatılı tüp yüzeyinin eğrilikleri

Bu bölümde (3.33) parametrizasyonu ile verilen Frenet çatılı tüp yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri ile asli eğrilikleri elde edilecektir.

Bunun için öncelikle $\phi(s, \theta)$ tüp yüzeyinin s ve θ parametrelerine göre kısmi türevlerinden yararlanılarak normali, birinci ve ikinci temel formlarının katsayıları hesaplanacaktır. Öyleyse,

$$\phi_\theta = r(-\sin\theta N + \cos\theta B)$$

$$\phi_s = (1 - r\kappa\cos\theta)T + \tau\phi_\theta$$

$$\phi_{\theta\theta} = -r(\cos\theta N + \sin\theta B)$$

$$\phi_{s\theta} = r\kappa\sin\theta T + \tau\phi_{\theta\theta}$$

$$\phi_{ss} = (-r\kappa'\cos\theta + r\kappa\tau\sin\theta)T$$

$$+(\kappa - r(\kappa^2 + \tau^2)\cos\theta - r\tau'\sin\theta)N + (-r\tau^2\sin\theta + r\tau'\cos\theta)B$$

olmak üzere birinci esas form katsayıları

$$E = \langle \phi_s, \phi_s \rangle = (1 - r\kappa\cos\theta)^2 + r^2\tau^2$$

$$F = \langle \phi_s, \phi_\theta \rangle = r^2\tau$$

$$G = \langle \phi_\theta, \phi_\theta \rangle = r^2$$

biçiminde hesaplanır ve yüzey normali

$$n = \frac{\phi_s \times \phi_\theta}{\|\phi_s \times \phi_\theta\|} = -\cos\theta N - \sin\theta B$$

için ikinci esas form katsayıları

$$e = \langle \phi_{ss}, n \rangle = -\kappa \cos\theta (1 - r\kappa \cos\theta) + r\tau^2$$

$$f = \langle \phi_{s\theta}, n \rangle = r\tau$$

$$g = \langle \phi_{\theta\theta}, n \rangle = r$$

olarak elde edilir.

Bir yüzey $EG - F^2 \neq 0$ olduğunda regüler yüzey olduğundan, $\phi(s, \theta)$ tüp yüzeyinin regüler yüzey olması için gerek ve yeter şart $1 - r\kappa \cos\theta \neq 0$ olmasıdır. Böylece yukarıda elde edilen birinci ve ikinci esas form katsayıları Teorem 2.2.11 de kullanılarak Frenet çatılı bir tüp yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{-\kappa \cos\theta}{r(1 - r\kappa \cos\theta)} \quad (3.34)$$

$$H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} + Kr \right) \quad (3.35)$$

bulunur. Asli eğrilikleri ise Teorem 2.2.13 den

$$\kappa_1 = \frac{-\kappa \cos\theta}{1 - r\kappa \cos\theta} \quad (3.36)$$

$$\kappa_2 = \frac{1}{r} \quad (3.37)$$

olarak elde edilir.

3.5. Regle Yüzeyler

Eğer bir yüzey, bir doğrunun hareketi ile oluşturuluyorsa, bu yüzeye regle yüzey denir. Hareket eden doğruya yüzeyin ana doğrusu ya da üretici, regle yüzeyin her bir doğrusunu kesen yüzey eğrisine de bu yüzeyin doğrultman eğrisi (dayanak eğrisi) denir (Salimov ve Mağden 2008).

Tanım 3.5.1: E^3 de bir regle yüzey;

$$F(\alpha, d): I \times E \rightarrow E^3$$

$$(s, v) \rightarrow F(\alpha, d)(s, v) = \alpha(s) + vd(s)$$

dönüşümü ile tanımlanır. Burada $\alpha: I \rightarrow E^3$, $d: I \rightarrow E^3 \setminus \{0\}$ diferensiyellenebilir dönüşümler ve I bir açık aralıktır. α ya dayanak eğrisi ve d ye doğrultman eğri denir. $v \rightarrow \alpha(s) + vd(s)$ doğrularına ana doğrular denir.

Tanım 3.5.2: Eğer $d(s) \times d'(s) \equiv 0$ ise $F(\alpha, d)$ regle yüzeyine bir silindirik yüzey denir. $d(s) \times d'(s) \not\equiv 0$ ise regle yüzeye silindirik olmayan regle yüzey denir.

Tanım 3.5.3: $F(\alpha, d)$ regle yüzey üzerinde $\sigma'(t).d'(t) = 0$ olacak şekilde $\sigma(t)$ eğrisini düşünelim. Bu eğriye striksiyon eğrisi (çizgisi) adı verilir. $F(\alpha, d)$ silindirik olmayan bir regle yüzey ise, bu regle yüzey üzerinde striksiyon çizgisi tek olarak vardır.

Tanım 3.5.4: Regle yüzeyin komşu iki ana doğrusu arasındaki en kısa uzaklığın bu iki komşu ana doğru arasındaki açıya oranına regle yüzeyin dağılma parametresi (drali) denir (Hacısalihoğlu 2000).

$X(s, v) = \alpha(s) + vd(s)$ için $(s, \alpha$ nın yay parametresi) dağılma parametresi

$$\lambda_d = \frac{\det(T, d, d')}{\|d'\|^2} \quad (3.38)$$

şeklinde hesaplanır.

Tanım 3.5.5: Bir regle yüzeyin ana doğruları boyunca teğet düzlemleri aynı ise regle yüzeye açılabilir denir (Hacısalıhoğlu 2000).

Teorem 3.5.6: Bir $\phi(s, v)$ regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart dağılma parametresinin sıfır olmasıdır (O'Neill 1966; Hacısalıhoğlu 2000).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde dönel yüzeyler, tüp yüzeyleri ve regle yüzeyler için sabit sırt uzaklıklı yüzeyler elde edilerek, bahsi geçen yüzeyler ile sabit sırt uzaklıklı yüzeyleri arasındaki ilişkiler diferensiyel geometri açısından incelenecektir.

4.1. Dönel Yüzeylerin Sabit Sırt Uzaklıklı Yüzeyi

Uzayda bir eğrinin bir doğru çevresinde döndürülmesiyle elde edilen yüzeyin bir dönel yüzey olduğu belirtilmişti. Burada xz düzleminde

$$\alpha: I \rightarrow E^2, \alpha(t) = (r(t), h(t))$$

biçiminde verilen bir α eğrisinin Oz eksenini çevresinde döndürülmesiyle elde edilen M dönel yüzeyi ele alınacak ve onun sabit sırt uzaklıklı yüzeyi elde edilecektir.

M dönel yüzeyi üzerinde seçilmiş bir P noktası

$$P = (r(t)\cos\theta, r(t)\sin\theta, h(t))$$

biçiminde olur. Buna göre;

$$\phi: I \times [0, 2\pi) \rightarrow E^3, \phi(t, \theta) = (r(t)\cos\theta, r(t)\sin\theta, h(t))$$

olarak alınırsa, $\phi(I \times [0, 2\pi)) = M \subset E^3$ dönel yüzeyi elde edilir.

Şimdi parametrik denklemi

$$\phi(t, \theta) = (r(t)\cos\theta, r(t)\sin\theta, h(t))$$

olan M dönel yüzeyinin sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin parametrik denklemini elde edelim.

M nin bir P noktasındaki bazı $\{\phi_t|_P, \phi_\theta|_P\}$ ve $P \in M$ de ki birim normal vektörü de n_P olsun.

$$\phi_t = (r'(t)\cos\theta, r'(t)\sin\theta, h'(t))$$

olup, t yay parametresi olarak seçilirse; $\|\phi_t\| = \sqrt{\dot{r}(t)^2 + \dot{h}(t)^2} = 1$ olur. Bu vektör

$$T = (\dot{r}(t)\cos\theta, \dot{r}(t)\sin\theta, \dot{h}(t))$$

şeklinde gösterilsin. Ayrıca;

$$\phi_\theta = (-r(t)\sin\theta, r(t)\cos\theta, 0)$$

doğrultusundaki birim vektör $\frac{\phi_\theta}{\|\phi_\theta\|} = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$ olur. Bu vektör de

$$X = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$$

biçiminde ifade edilsin. Buradan, $P \in M$ deki birim normal vektör alanı

$$n = \frac{T \times X}{\|T \times X\|} = (-\dot{h}(t)\cos\theta, -\dot{h}(t)\sin\theta, \dot{r}(t))$$

olarak elde edilir. Bu şekilde $\{T, X, n\}$ ortonormal sistemi elde edilmiş olur. Böylece, M dönele yüzeyinin sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin parametrik denklemi

$$\begin{aligned} \psi(t, \theta) &= \phi(t, \theta) + \lambda_1 T + \lambda_2 X + \lambda_3 n \\ &= \begin{pmatrix} \left(\frac{r(t) + \lambda_1 \dot{r}(t) - \lambda_3 \dot{h}(t)}{u(t)} \right) \cos\theta - \lambda_2 \sin\theta, \\ \left(\frac{r(t) + \lambda_1 \dot{r}(t) - \lambda_3 \dot{h}(t)}{u(t)} \right) \sin\theta + \lambda_2 \cos\theta, \\ \frac{h(t) + \lambda_1 \dot{h}(t) + \lambda_3 \dot{r}(t)}{v(t)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\psi(t, \theta) = (u(t)\cos\theta - \lambda_2 \sin\theta, u(t)\sin\theta + \lambda_2 \cos\theta, v(t)) \quad (4.1)$$

olur. Buradan M^f sabit sırt uzaklıklı yüzeyi

$$f: M \rightarrow M^f$$

$$M^f = \{\psi(t, \theta) | \psi(t, \theta) = \phi(t, \theta) + \lambda_1 T + \lambda_2 X + \lambda_3 n, \lambda_1 = sbt., \lambda_2 = sbt., \lambda_3 = sbt.\}$$

olarak yazılır.

Teorem 4.1.1: E^3 de verilen bir M d6nel y6zeyinin sabit sirt uzaklıklı y6zeyi de bir d6nel y6zeydir.

İspat: E^3 de parametrik ifadesi

$$\phi(t, \theta) = (r(t)\cos\theta, r(t)\sin\theta, h(t))$$

olan bir M d6nel y6zeyinin sabit sirt uzaklıklı y6zeyi (4.1) denkleminde

$$\psi(t, \theta) = (u(t)\cos\theta - \lambda_2\sin\theta, u(t)\sin\theta + \lambda_2\cos\theta, v(t))$$

olarak ifade edilmişti.

Burada; $x = u(t)\cos\theta - \lambda_2\sin\theta$ ve $y = u(t)\sin\theta + \lambda_2\cos\theta$

olsun. x ve y nin her iki tarafı $\sqrt{(u(t))^2 + \lambda_2^2}$ ile çarpılır ve b6l6n6rse;

$$x = \left(\frac{u(t)}{\sqrt{(u(t))^2 + \lambda_2^2}} \cos\theta - \frac{\lambda_2}{\sqrt{(u(t))^2 + \lambda_2^2}} \sin\theta \right) \sqrt{(u(t))^2 + \lambda_2^2} \quad (4.2)$$

$$y = \left(\frac{u(t)}{\sqrt{(u(t))^2 + \lambda_2^2}} \sin\theta + \frac{\lambda_2}{\sqrt{(u(t))^2 + \lambda_2^2}} \cos\theta \right) \sqrt{(u(t))^2 + \lambda_2^2} \quad (4.3)$$

elde edilir. (4.2) ve (4.3) de, $\frac{u(t)}{\sqrt{(u(t))^2 + \lambda_2^2}} = \cos\gamma$ ve $\frac{\lambda_2}{\sqrt{(u(t))^2 + \lambda_2^2}} = \sin\gamma$ olarak alınırsa,

$$x = \underbrace{(\cos\gamma\cos\theta - \sin\gamma\sin\theta)}_{\cos(\gamma+\theta)} \sqrt{(u(t))^2 + \lambda_2^2}$$

$$x = \sqrt{(u(t))^2 + \lambda_2^2} \cos(\gamma + \theta)$$

olur. Benzer şekilde,

$$y = \frac{(\cos\gamma\sin\theta + \sin\gamma\cos\theta)}{\sin(\gamma+\theta)} \sqrt{(u(t))^2 + \lambda_2^2}$$

$$y = \sqrt{(u(t))^2 + \lambda_2^2} \sin(\gamma + \theta)$$

olur. Bulunan x ve y değerleri (4.1) de yerlerine yazılırsa,

$$\psi(t, \theta) = \left(\sqrt{(u(t))^2 + \lambda_2^2} \cos(\gamma + \theta), \sqrt{(u(t))^2 + \lambda_2^2} \sin(\gamma + \theta), v(t) \right)$$

eşitliği elde edilir. Burada,

$$k(t) = \sqrt{(u(t))^2 + \lambda_2^2}, \cos\beta = \cos(\gamma + \theta) \text{ ve } \sin\beta = \sin(\gamma + \theta)$$

olarak alınırsa böylece,

$$\psi(t, \beta) = (k(t)\cos\beta, k(t)\sin\beta, v(t))$$

parametrik ifadesi ile verilen yeni bir döneel yüzey elde edilmiş olur.

4.1.1. Döneel yüzeyin sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin I. ve II. esas formlarının katsayılar matrisinin ve eğriliklerinin bulunması

E^3 de

$$\phi(t, \theta) = (r(t)\cos\theta, r(t)\sin\theta, h(t))$$

parametrik denklemlerle verilen bir M döneel yüzeyinin sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin parametrik ifadesi

$u(t) = r(t) + \lambda_1\dot{r}(t) - \lambda_3\dot{h}(t)$ ve $v(t) = h(t) + \lambda_1\dot{h}(t) + \lambda_3\dot{r}(t)$ olmak üzere,

$$\psi(t, \theta) = (u(t)\cos\theta - \lambda_2\sin\theta, u(t)\sin\theta + \lambda_2\cos\theta, v(t))$$

olarak (4.1) denklemi ile verilmişti. Buradan, (4.1) in t ve θ ya göre kısmi türevleri

$$\psi_t = (u'(t)\cos\theta, u'(t)\sin\theta, v'(t)) \quad (4.4)$$

$$\psi_\theta = (-u(t)\sin\theta - \lambda_2\cos\theta, u(t)\cos\theta - \lambda_2\sin\theta, 0) \quad (4.5)$$

olarak alınırsa, döneel yüzeyin sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin birim normali,

$$n^f = \frac{\psi_t \times \psi_\theta}{\|\psi_t \times \psi_\theta\|}$$

$$n^f = \frac{(-v'(t)(u(t)\cos\theta - \lambda_2\sin\theta), -v'(t)(u(t)\sin\theta + \lambda_2\cos\theta), u(t)u'(t))}{\sqrt{(u(t))^2((u'(t))^2 + (v'(t))^2) + \lambda_2^2(v'(t))^2}} \quad (4.6)$$

biçiminde elde edilir. (4.4) ve (4.5) eşitliklerinden döneel yüzeyin sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin I. esas formunun katsayılar matrisi

$$E = \langle \psi_t, \psi_t \rangle = (u'(t))^2 + (v'(t))^2$$

$$F = \langle \psi_t, \psi_\theta \rangle = -\lambda_2 u'(t)$$

$$G = \langle \psi_\theta, \psi_\theta \rangle = (u(t))^2 + \lambda_2^2$$

olmak üzere,

$$I = \begin{pmatrix} (u'(t))^2 + (v'(t))^2 & -\lambda_2 u'(t) \\ -\lambda_2 u'(t) & (u(t))^2 + \lambda_2^2 \end{pmatrix}$$

şeklinde hesaplanır. Ayrıca; (4.6) eşitliği ve

$$\psi_{tt} = (u''(t)\cos\theta, u''(t)\sin\theta, v''(t))$$

$$\psi_{t\theta} = (-u'(t)\sin\theta, u'(t)\cos\theta, 0) = \psi_{\theta t}$$

$$\psi_{\theta\theta} = (-u'(t)\cos\theta + \lambda_2\sin\theta, -u'(t)\sin\theta - \lambda_2\cos\theta, 0)$$

eşitliklerinden, II. esas formun katsayılar matrisi de aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$e = \langle \psi_{tt}, n^f \rangle = \frac{u(t)(u'(t)v''(t) - v'(t)u''(t))}{\sqrt{(u(t))^2((u'(t))^2 + (v'(t))^2) + \lambda_2^2(v'(t))^2}}$$

$$f = \langle \psi_{t\theta}, n^f \rangle = \frac{-\lambda_2 u'(t)v'(t)}{\sqrt{(u(t))^2((u'(t))^2 + (v'(t))^2) + \lambda_2^2(v'(t))^2}}$$

$$g = \langle \psi_{\theta\theta}, n^f \rangle = \frac{v'(t)((u(t))^2 + \lambda_2^2)}{\sqrt{(u(t))^2((u'(t))^2 + (v'(t))^2) + \lambda_2^2(v'(t))^2}}$$

olmak üzere

$$II = \left(\begin{array}{cc} \frac{u(t)(u'(t)v''(t) - v'(t)u''(t))}{\sqrt{(u(t))^2((u'(t))^2 + (v'(t))^2) + \lambda_2^2(v'(t))^2}} & \frac{-\lambda_2 u'(t)v'(t)}{\sqrt{(u(t))^2((u'(t))^2 + (v'(t))^2) + \lambda_2^2(v'(t))^2}} \\ \frac{-\lambda_2 u'(t)v'(t)}{\sqrt{(u(t))^2((u'(t))^2 + (v'(t))^2) + \lambda_2^2(v'(t))^2}} & \frac{v'(t)((u(t))^2 + \lambda_2^2)}{\sqrt{(u(t))^2((u'(t))^2 + (v'(t))^2) + \lambda_2^2(v'(t))^2}} \end{array} \right)$$

olur.

Teorem 4.1.2: E^3 de bir M döneel yüzeyinin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi M^f ve M^f in Gauss eğriliği K^f , ortalama eğriliği H^f ve $u(t) = r(t) + \lambda_1 \dot{r}(t) - \lambda_3 \dot{h}(t)$, $v(t) = h(t) + \lambda_1 \dot{h}(t) + \lambda_3 \dot{r}(t)$ olmak üzere,

$$K^f = \frac{(u(t))^3 v'(t)(u'(t)v''(t) - v'(t)u''(t))}{\left((u(t))^2 \left((u'(t))^2 + (v'(t))^2 \right) + \lambda_2^2 (v'(t))^2 \right)^2} + \frac{\lambda_2^2 v'(t)(u'(t)v''(t) - v'(t)u''(t) - (u'(t))^2 v'(t))}{\left((u(t))^2 \left((u'(t))^2 + (v'(t))^2 \right) + \lambda_2^2 (v'(t))^2 \right)^2} \quad (4.7)$$

$$H^f = \frac{\left((u(t))^3 + \lambda_2^2 u(t) \right) (u'(t)v''(t) - v'(t)u''(t))}{\left(\sqrt{(u(t))^2((u'(t))^2 + (v'(t))^2) + \lambda_2^2(v'(t))^2} \right)^3}$$

$$+ \frac{(u(t))^2 v'(t) \left((u'(t))^2 + (v'(t))^2 \right) + \lambda_2^2 (v'(t))^2 \left((v'(t))^2 - (u'(t))^2 \right)}{\left(\sqrt{(u(t))^2 \left((u'(t))^2 + (v'(t))^2 \right) + \lambda_2^2 (v'(t))^2} \right)^3} \quad (4.8)$$

İspat: Teorem 2.2.11 den biliniyor ki yüzeyin I. ve II. esas form katsayılarını bilmekle onun her bir noktasındaki Gauss ve ortalama eğrilikleri

$$K^f = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

$$H^f = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}$$

formülleri ile bulunabilir.

O halde, yukarıda elde edilen E, F, G ve e, f, g katsayıları formüllerde yerine yazılırsa, M döneel yüzeyinin sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla (4.7) ve (4.8) eşitlikleri olarak elde edilir.

Teorem 4.1.3: E^3 de M bir döneel yüzey ve M^f , M nin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi olsun. Bu durumda M^f bir Weingarten yüzeydir.

İspat: E^3 de bir M döneel yüzeyinin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi M^f ve M^f in Gauss eğriliği K^f , ortalama eğriliği H^f olmak üzere K^f ve H^f Teorem 4.1.2 de sırasıyla (4.7) ve (4.8) eşitlikleri ile verilmişti. Tanım 2.2.19 dan Weingarten yüzey tanımı gereğince,

$$K_t^f H_\theta^f - K_\theta^f H_t^f = K_t^f 0 - 0 H_t^f = 0$$

olur. Bu durumda M^f in bir Weingarten yüzey olduğu görülür.

4.1.2. Bir M döne1 yüzeyinin $\lambda_2 = 0$ değeri için sabit sırt uzaklıklı yüzeyi

Bu kısımda E^3 de ki M döne1 yüzeyi için,

$$\phi(t, \theta) = (r(t)\cos\theta, r(t)\sin\theta, h(t))$$

bir parametrizasyon olmak üzere ve $T_M(P)$ nin asli eğrilik doğrultularından oluşan ortonormal bazı $\{T|_P, X|_P\}$, $P \in M$ de ki birim normal vektör alanı n_P olmak üzere,

$$f: M \rightarrow M^f$$

$$M^f = \{\psi(t, \theta) | \psi(t, \theta) = \phi(t, \theta) + \lambda_1 T + \lambda_2 X + \lambda_3 n, \lambda_1 = sbt., \lambda_2 = sbt., \lambda_3 = sbt\}$$

sabit sırt uzaklıklı yüzeyinde $\lambda_2 = 0$ alınarak elde edilen

$$M^f = \{\psi(t, \theta) | \psi(t, \theta) = \phi(t, \theta) + \lambda_1 T + \lambda_3 n, \lambda_1, \lambda_3 = sabit\}$$

özel hali incelenecektir.

Bu durumda $u(t) = r(t) + \lambda_1 \dot{r}(t) - \lambda_3 \dot{h}(t)$, $v(t) = h(t) + \lambda_1 \dot{h}(t) + \lambda_3 \dot{r}(t)$ olmak üzere, (4.1) eşitliğinde $\lambda_2 = 0$ alınırsa,

$$\psi(t, \theta) = (u(t)\cos\theta, u(t)\sin\theta, v(t)) \quad (4.9)$$

denklemini elde edilir. Buradan hareketle t ve θ ya göre kısmi türevler

$$\psi_t = (u'(t)\cos\theta, u'(t)\sin\theta, v'(t))$$

$$\psi_\theta = (-u(t)\sin\theta, u(t)\cos\theta, 0)$$

olur ve döne1 yüzeyin sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin birim normali $u(t) > 0$ için,

$$n^f = \frac{1}{\sqrt{(u'(t))^2 + (v'(t))^2}} (-v'(t)\cos\theta, -v'(t)\sin\theta, u'(t))$$

olarak bulunur. Böylece I. ve II. esas form katsayılar matrisi de sırasıyla

$$I = \begin{pmatrix} (u'(t))^2 + (v'(t))^2 & 0 \\ 0 & (u(t))^2 \end{pmatrix}$$

$$II = \begin{pmatrix} \frac{(u'(t)v''(t) - v'(t)u''(t))}{\sqrt{(u'(t))^2 + (v'(t))^2}} & 0 \\ 0 & \frac{v'(t)u(t)}{\sqrt{((u'(t))^2 + (v'(t))^2)}} \end{pmatrix}$$

biçiminde elde edilir.

Teorem 4.1.4: M , E^3 de bir döneel yüzey ve M^f de bu yüzeyin $Sp\{T, n\}$ düzleminde yatan vektörleri boyunca oluşan sabit sırt uzaklıklı yüzeyi, başka bir ifadeyle $\lambda_2 = 0$ olsun. Bu durumda

$$u(t) = r(t) + \lambda_1 \dot{r}(t) - \lambda_3 \dot{h}(t), \quad v(t) = h(t) + \lambda_1 \dot{h}(t) + \lambda_3 \dot{r}(t)$$

olmak üzere M^f in şekil operatörünün matrisi

$$S^f = \begin{pmatrix} \frac{v'(t)u''(t) - u'(t)v''(t)}{\left(\sqrt{(u'(t))^2 + (v'(t))^2}\right)^3} & 0 \\ 0 & \frac{-v'(t)}{u(t)\sqrt{(u'(t))^2 + (v'(t))^2}} \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

şeklindedir.

İspat: E^3 de parametrik ifadesi

$$\phi: (u, v) \rightarrow \phi(u, v) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v), \varphi_3(u, v))$$

olan bir M yüzeyi için $\langle \phi_u, \phi_v \rangle = 0$ ve eğrilik çizgilerinin yüzeyin parametre eğrileri olması durumunda Weingarten dönüşümünün matrisi

$$S = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\|\phi_u\|^3 \|\phi_v\|} \det(\phi_{uu}, \phi_u, \phi_v) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\|\phi_u\| \|\phi_v\|^3} \det(\phi_{vv}, \phi_u, \phi_v) \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

biçiminde hesaplanır (Hacısalıhoğlu 1983). Böylece, M^f sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin parametrik ifadesi $u(t) = r(t) + \lambda_1 \dot{r}(t) - \lambda_3 \dot{h}(t)$ ve $v(t) = h(t) + \lambda_1 \dot{h}(t) + \lambda_3 \dot{r}(t)$ için,

$$\psi: (t, \theta) \rightarrow \psi(t, \theta) = \phi(t, \theta) + \lambda_1 T + \lambda_3 n$$

$$\psi_t = (u'(t) \cos \theta, u'(t) \sin \theta, v'(t))$$

$$\psi_\theta = (-u(t) \sin \theta, u(t) \cos \theta, 0)$$

$$\psi_{tt} = (u''(t) \cos \theta, u''(t) \sin \theta, v''(t))$$

$$\psi_{\theta\theta} = (-u(t) \cos \theta, -u(t) \sin \theta, 0)$$

olmak üzere, yukarıdaki (4.11) ifadesinde yerlerine yazıldığında (4.10) eşitliği ile verilen matris elde edilir.

Sonuç 4.1.5: M , E^3 de bir dönele yüzey ve M^f de bu yüzeyin $\lambda_2 = 0$ şartı dahilinde sabit sırt uzaklıklı yüzeyi ise, bu durumda asli eğrilik doğrultusu olma özelliği korunur.

Sonuç 4.1.6: M , E^3 de bir dönele yüzey ve M^f de bu yüzeyin $\lambda_2 = 0$ özel durumuna sahip sabit sırt uzaklıklı yüzeyi ise, bu durumda M^f in asli eğrilikleri,

$$\kappa_1^f = \frac{-u''(t)v'(t) + u'(t)v''(t)}{\left(\sqrt{(u'(t))^2 + (v'(t))^2}\right)^3} \quad (4.12)$$

$$\kappa_2^f = \frac{v'(t)}{u(t) \sqrt{(u'(t))^2 + (v'(t))^2}} \quad (4.13)$$

olup, Gauss ve ortalama eğrilikleri de sırasıyla

$$K^f = k_1^f k_2^f = \frac{v'(t)(u'(t)v''(t) - v'(t)u''(t))}{u(t) \left((u'(t))^2 + (v'(t))^2 \right)^2} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} H^f &= \kappa_1^f + \kappa_2^f \\ &= \frac{u(t)(u'(t)v''(t) - v'(t)u''(t)) + v'(t) \left((u'(t))^2 + (v'(t))^2 \right)}{u(t) \left(\sqrt{(u'(t))^2 + (v'(t))^2} \right)^3} \end{aligned} \quad (4.15)$$

olarak hesaplanır.

Burada ki (4.14) ve (4.15) eşitlikleri (4.7) ve (4.8) ifadelerinde $\lambda_2 = 0$ alınmak koşuluyla da elde edilebilir.

Teorem 4.1.7: E^3 de bir M dönel yüzeyinin $\lambda_2 = 0$ şartı dahilinde sabit sırt uzaklıklı yüzeyindeki paralel $\beta_t^f(\theta)$ dairelerinin birer geodezik eğri olmaları için gerek ve yeter şart $\frac{u'(t)}{v'(t)} = 0$ olmasıdır.

İspat: E^3 de ki M dönel yüzeyi için bir parametrizasyon

$$\phi(t, \theta) = (r(t)\cos\theta, r(t)\sin\theta, h(t))$$

olmak üzere, bu yüzeyin $\lambda_2 = 0$ şartı dahilinde sabit sırt uzaklıklı yüzeyi (4.9) denklemi ile ifade edilmişti. Eğer $\beta_t^f(\theta)$ paralel daireleri geodezik ise bu eğrilerin normalleri ile yüzey normali lineer bağımlı olmalıdır. Buna göre; $\alpha_\theta^f(t) = (u\cos\theta, u\sin\theta, v)$ dönel yüzeyin meridyen eğrileri olmak üzere, $\beta_t^f(\theta)$ nın $Q \in M^f$ noktasındaki M^f in yüzey normali

$$\alpha_\theta^{f'}(t) \times \beta_t^{f'}(\theta) = (-uv'\cos\theta, -uv'\sin\theta, uu') = n^f$$

biçiminde elde edilir. $\beta_t^f(\theta)$ eğrisinin normal yönündeki vektör ise

$\beta_t^{f'}(\theta) = (-u\sin\theta, u\cos\theta, 0)$ ve $\beta_t^{f''}(\theta) = (-u\cos\theta, -u\sin\theta, 0)$ olmak üzere,

$$[\beta_t^{f'}(\theta), [\beta_t^{f'}(\theta), \beta_t^{f''}(\theta)]] = (-u^3\cos\theta, -u^3\sin\theta, 0) = N$$

olur. Burada, $\lambda = \frac{u^2}{v'}$ olmak üzere $N = \lambda n^f$ olması için gerek ve yeter şart, $\frac{u'}{v'} = 0$ olmasıdır. Bu da $\beta_t^f(\theta)$ eğrisinin M üzerinde geodezik eğri olması demektir.

Tersine, $\frac{u'}{v'} = 0$ ise bu durumda kolayca gösterilebilir ki $N = \lambda n^f$ dir. Bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 4.1.8: E^3 de bir M döneel yüzeyinin $\lambda_2 = 0$ şartı dahilinde sabit sırt uzaklıklı yüzeyindeki $\beta_t^f(\theta)$ paralel dairelerinin birer geodezik eğri olmaları için gerek ve yeter şart $\alpha_\theta^f(t)$ meridyen eğrilerinin doğru olmasıdır.

Eğer, $\lambda_2 = 0$ şartına ilaveten $\lambda_1 = 0$ şartı da eklenirse, döneel yüzeyin paralel yüzeyi elde edilmiş olur. Bu durumda (4.9) ifadesinde ki $u(t) = r(t) - \lambda_3 \dot{h}(t)$ ve $v(t) = h(t) + \lambda_3 \dot{r}(t)$ olarak yazılabilir. Böylece paralel yüzey için I. ve II. esas form katsayılar matrisi, şekil operatörü, Gauss ve ortalama eğrilikler ve asli eğrilikler yukarıdakine benzer şekilde yeniden hesaplanabilir.

Ayrıca, $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$ alınarak döneel yüzeyin sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin parametrik ifadesi

$$\psi(t, \theta) = \phi(t, \theta) + \lambda_2 X = (r(t)\cos\theta - \lambda_2\sin\theta, r(t)\sin\theta + \lambda_2\cos\theta, h(t))$$

olur ve yine aynı hesaplamalar yapılarak, benzer sonuçlar elde edilebilir.

Döneel yüzeylere ait sabit sırt uzaklıklı yüzey örnekleri:

Örnek 4.1.9 : $C = \{(R + r\cos t, 0, r\sin t) \mid R, r \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq 2\pi, r < R\}$

çemberinin Oz eksenini etrafında döndürülmesi ile elde edilen tor yüzeyi göz önüne alınsın. Bu yüzeyin parametrik denklemini $I = \{t \mid 0 \leq t \leq 2\pi\}$ olmak üzere;

$$\phi: I \times I \rightarrow E^3$$

$$\phi(t, \theta) = ((R + r \cos t) \cos \theta, (R + r \cos t) \sin \theta, r \sin t)$$

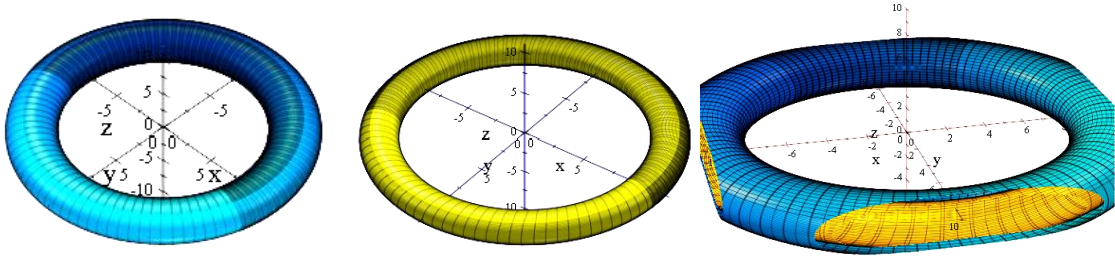
biçiminde ifade edilirse ve $R = 10 \text{ br}$, $r = 2 \text{ br}$ alınırsa, denklem

$$\phi(t, \theta) = ((10 + 2 \cos t) \cos \theta, (10 + 2 \cos t) \sin \theta, 2 \sin t)$$

biçimine dönüşecektir. Bu yüzeyin sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin parametrik denklemini

$$\psi(t, \theta) = \begin{pmatrix} (10 + (2 - \lambda_3) \cos t - \lambda_1 \sin t) \cos \theta - \lambda_2 \sin \theta, \\ (10 + (2 - \lambda_3) \cos t - \lambda_1 \sin t) \sin \theta + \lambda_2 \cos \theta, \lambda_1 \cos t + (2 - \lambda_3) \sin t \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$ alındığı takdirde, bu değerlere sahip olan tor yüzeyinin ve sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin grafiği Şekil 4.1'de görülebilir.



Şekil 4.1. Tor yüzeyi ve onun sabit sırt uzaklıklı yüzeyi

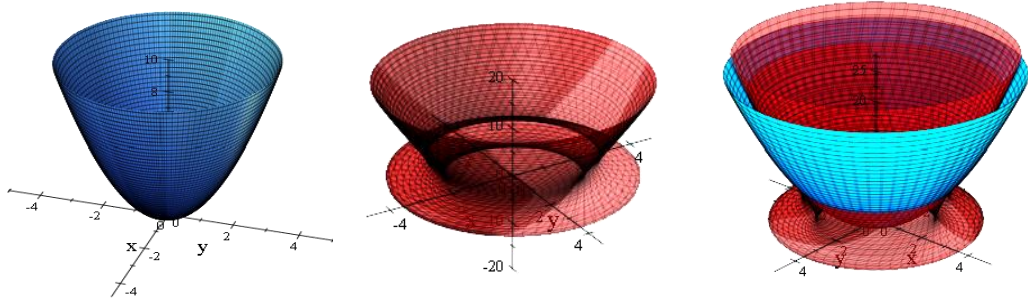
Örnek 4.1.10:

$$\phi(t, \theta) = (t \cos \theta, t \sin \theta, t^2)$$

şeklinde verilen paraboloid yüzeyinin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi

$$\psi(t, \theta) = \begin{pmatrix} \left(t + \frac{\lambda_1 - 2\lambda_3 t}{\sqrt{1 + 4t^2}} \right) \cos\theta - \lambda_2 \sin\theta, \left(t + \frac{\lambda_1 - 2\lambda_3 t}{\sqrt{1 + 4t^2}} \right) \sin\theta + \lambda_2 \cos\theta, \\ t^2 + \frac{2\lambda_1 t + \lambda_3}{\sqrt{1 + 4t^2}} \end{pmatrix}$$

olup, bu yüzeyin grafiği $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 1$ için aşağıdaki gibi bulunur.



Şekil 4.2. Dönel paraboloid ve onun sabit sırt uzaklıklı yüzeyi

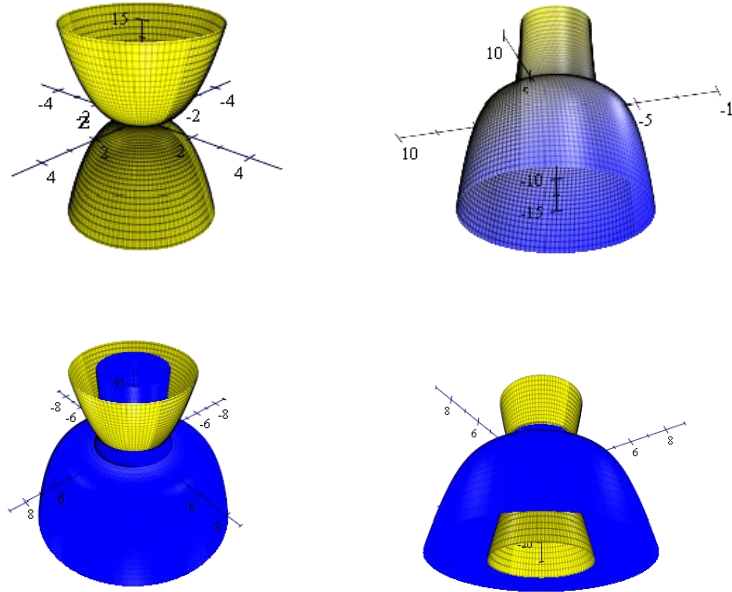
Örnek 4.1.11: $z = x^3$ denklemi ile verilen eğrinin Oz eksenini etrafında döndürülmesiyle elde edilen dönel yüzeyin parametrik denklemi

$$\phi(t, \theta) = (t \cos\theta, t \sin\theta, t^3)$$

biçiminde olur. Bu dönel yüzeyin sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin denklemi;

$$\psi(t, \theta) = \left(\left(t + \frac{\lambda_1 - 3\lambda_3 t^2}{\sqrt{1 + 9t^4}} \right) \cos\theta - \lambda_2 \sin\theta, \left(t + \frac{\lambda_1 - 3\lambda_3 t^2}{\sqrt{1 + 9t^4}} \right) \sin\theta + \lambda_2 \cos\theta, t^3 + \frac{\lambda_3 + 3\lambda_1 t^2}{\sqrt{1 + 9t^4}} \right)$$

olup, $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$ için grafiği aşağıdaki gibidir.



Şekil 4.3. Örnek 4.1.8 için dönel yüzey ve onun sabit sırt uzaklıklı yüzeyi

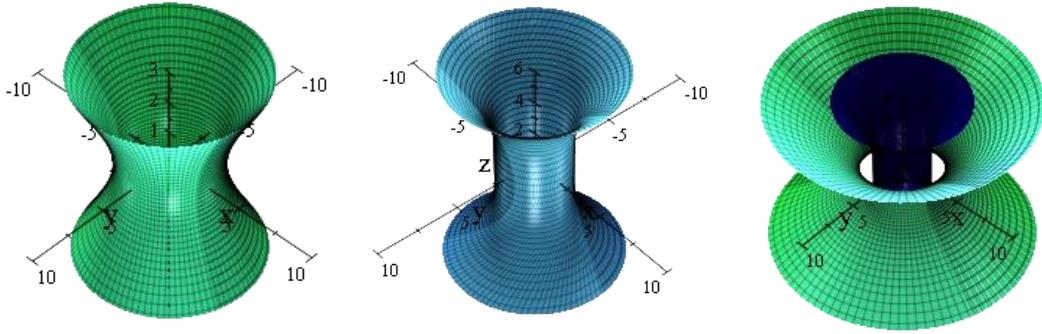
Örnek 4.1.12: Parametrik olarak

$$\phi(t, \theta) = (a \cos t \cos \theta, a \cos t \sin \theta, b \sin t)$$

şeklinde verilen tek kanatlı bir dönel hiperboloidin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi

$$\psi(t, \theta) = \begin{pmatrix} \left(a \cos t + \frac{\lambda_1 a \sin t - \lambda_3 b \cos t}{\sqrt{a^2 \sinh^2 t + b^2 \cosh^2 t}} \right) \cos \theta - \lambda_2 \sin \theta, \\ \left(a \cos t + \frac{\lambda_1 a \sin t - \lambda_3 b \cos t}{\sqrt{a^2 \sinh^2 t + b^2 \cosh^2 t}} \right) \sin \theta + \lambda_2 \cos \theta, \\ b \sin t + \frac{\lambda_1 b \cos t + \lambda_3 a \sin t}{\sqrt{a^2 \sinh^2 t + b^2 \cosh^2 t}} \end{pmatrix}$$

olup, $a = 3$, $b = 2$ olmak üzere dönel hiperboloidin ve $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ ve $\lambda_3 = 3$ için sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin grafikleri aşağıdaki gibidir.



Şekil 4.4. Tek kanatlı bir döneel hiperboloit ve onun sabit sırt uzaklıklı yüzeyi

4.1.3. Döneel yüzeyin $\lambda_2 = 0$ değeri için eğrilikleri ile sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin eğrilikleri arasındaki ilişki

Yay parametresi t olmak üzere

$$\alpha: I \rightarrow E^2, \alpha(t) = (r(t), h(t))$$

biçiminde verilen bir α eğrisinin Oz ekseninde döndürülmesiyle elde edilen döneel yüzey M ve $\lambda_2 = 0$ değeri için onun sabit sırt uzaklıklı yüzeyi M^f olsun. Döneel yüzey için asli eğrilikler daha önce (3.26), (3.27) ve (3.29) eşitlikleri ile ifade edilmişti. Bu eşitlikler yardımıyla,

$$\kappa_1 = -\ddot{r}h + \dot{r}\dot{h} = \frac{\ddot{h}}{\dot{r}} = -\frac{\ddot{r}}{\dot{h}} \Rightarrow \dot{h} = \dot{r}\kappa_1 \quad (4.16)$$

$$\kappa_2 = \frac{\dot{h}}{r} \Rightarrow \dot{h} = r\kappa_2 \Rightarrow \ddot{h} = \dot{r}\kappa_2 + r\kappa_2' \quad (4.17)$$

$$K = \kappa_1\kappa_2 = -\frac{\ddot{r}}{r} \Rightarrow \ddot{r} = -Kr \quad (4.18)$$

olur. (4.16) ve (4.17) eşitliklerinden,

$$\dot{r} = \frac{r\kappa_2'}{\kappa_1 - \kappa_2}, (\kappa_1 \neq \kappa_2) \quad (4.19)$$

elde edilir.

Buradan;

$$\dot{r}^2 + \dot{h}^2 = 1 \Rightarrow 2\dot{r}\ddot{r} + 2\dot{h}\ddot{h} = 0 \Rightarrow \dot{r}\ddot{r} + \dot{h}\ddot{h} = 0 \quad (4.20)$$

$$\dot{r}\ddot{r} + \dot{h}\ddot{h} = 0 \Rightarrow \ddot{r}\dot{r} + \dot{r}\ddot{r} + \ddot{h}\dot{h} + \dot{h}\ddot{h} = 0 \Rightarrow \ddot{r}^2 + \ddot{h}^2 = -\dot{r}\ddot{r} - \dot{h}\ddot{h} \quad (4.21)$$

$$\ddot{r}^2 + \ddot{h}^2 = \kappa_1^2 \dot{h}^2 + \kappa_1^2 \dot{r}^2 = \kappa_1^2 \underbrace{(\dot{r}^2 + \dot{h}^2)}_1 \Rightarrow \ddot{r}^2 + \ddot{h}^2 = \kappa_1^2 \quad (4.22)$$

$$\kappa_1 = -\dot{r}\ddot{h} + \dot{h}\ddot{r} \Rightarrow \kappa_1' = -\dot{r}\ddot{h} - \ddot{r}\dot{h} + \dot{r}\ddot{h} + \dot{h}\ddot{r} \Rightarrow \kappa_1' = -\dot{r}\ddot{h} + \dot{h}\ddot{r} \quad (4.23)$$

$$\dot{r}\ddot{h} - \dot{h}\ddot{r} = \ddot{h}(-\kappa_1'\dot{h} - \kappa_1\ddot{h}) - \ddot{r}(\dot{r}\kappa_1 + \dot{h}\kappa_1') = -\kappa_1'\dot{h}\ddot{h} - \kappa_1\dot{h}^2 - \kappa_1\dot{r}^2 - \kappa_1'\dot{r}\ddot{r}$$

$$\Rightarrow \dot{r}\ddot{h} - \dot{h}\ddot{r} = -\kappa_1' \underbrace{(\dot{r}\ddot{r} + \dot{h}\ddot{h})}_0 - \kappa_1 \underbrace{(\dot{r}^2 + \dot{h}^2)}_{\kappa_1^2} \Rightarrow \dot{r}\ddot{h} - \dot{h}\ddot{r} = -\kappa_1^3 \quad (4.24)$$

olur.

Dönel yüzeyin $\lambda_2 = 0$ şartı dahilindeki sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin asli eğrilikleri, (4.12) ve (4.13) denklemleri ile daha önceden belirtilmişti. Şimdi bu eğriliklerle sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin eğrilikleri arasındaki ilişkiyi gösteren aşağıdaki teorem ifade edilecektir:

Teorem 4.1.13: E^3 de

$$\phi(t, \theta) = (r(t)\cos\theta, r(t)\sin\theta, h(t))$$

parametrik ifadesi ile verilen bir M dönel yüzeyi için t yay parametresi olmak üzere κ_1 ve κ_2 asli eğrilikleri ile $\lambda_2 = 0$ şartı dahilinde M^f sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin asli eğrilikleri arasındaki ilişki

$$\kappa_1^f = \frac{\kappa_1 + \lambda_1 \kappa_1' - 2\lambda_3 \kappa_1^2 + (\lambda_1^2 + \lambda_3^2) \kappa_1^3}{\left(\sqrt{1 + (\lambda_1^2 + \lambda_3^2) \kappa_1^2 - 2\lambda_3 \kappa_1}\right)^3} \quad (4.25)$$

$$\kappa_2^f = \frac{(1 - \lambda_3 \kappa_1)(\kappa_1 - \kappa_2) \kappa_2 + \lambda_1 \kappa_1 \kappa_2'}{\left((1 - \lambda_3 \kappa_2)(\kappa_1 - \kappa_2) + \lambda_1 \kappa_2'\right) \sqrt{1 + (\lambda_1^2 + \lambda_3^2) \kappa_1^2 - 2\lambda_3 \kappa_1}} \quad (4.26)$$

biçimindedir.

İspat: Teoremin ispatı için (4.12) ve (4.13) denklemleriyle ifade edilen

$$\kappa_1^f = \frac{-u''(t)v'(t) + u'(t)v''(t)}{\left(\sqrt{(u'(t))^2 + (v'(t))^2}\right)^3}, \kappa_2^f = \frac{v'(t)}{u(t) \sqrt{(u'(t))^2 + (v'(t))^2}}$$

eşitliklerinde

$$u(t) = r(t) + \lambda_1 \dot{r}(t) - \lambda_3 \dot{h}(t) \text{ ve } v(t) = h(t) + \lambda_1 \dot{h}(t) + \lambda_3 \dot{r}(t)$$

değerleri yerlerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa;

$$\begin{aligned} \kappa_1^f &= \frac{-(\dot{h} + \lambda_1 \ddot{h} + \lambda_3 \ddot{r}) (\ddot{r} + \lambda_1 \ddot{r} - \lambda_3 \ddot{h}) + (\ddot{r} + \lambda_1 \ddot{r} - \lambda_3 \ddot{h}) (\ddot{h} + \lambda_1 \ddot{h} + \lambda_3 \ddot{r})}{\left(\sqrt{(\ddot{r} + \lambda_1 \ddot{r} - \lambda_3 \ddot{h})^2 + (\ddot{h} + \lambda_1 \ddot{h} + \lambda_3 \ddot{r})^2}\right)^3} \\ &= \frac{\ddot{r} \dot{h} - \dot{r} \ddot{h} + \lambda_1 (\ddot{r} \dot{h} - \dot{r} \ddot{h}) - \lambda_3 (\dot{r} \ddot{r} + \dot{h} \ddot{h}) + \lambda_1^2 (\dot{r} \ddot{h} - \dot{r} \ddot{h}) + \lambda_3 (\ddot{r}^2 + \ddot{h}^2) + \lambda_3^2 (\dot{r} \ddot{h} - \dot{r} \ddot{h})}{\left(\sqrt{\dot{r}^2 + \dot{h}^2 + \lambda_1^2 (\ddot{r}^2 + \ddot{h}^2) + \lambda_3^2 (\ddot{r}^2 + \ddot{h}^2) + 2(\lambda_1 (\dot{r} \ddot{r} + \dot{h} \ddot{h}) - \lambda_3 (-\dot{r} \dot{h} + \dot{r} \ddot{h}))}\right)^3} \end{aligned}$$

bulunur. (4.18), (4.19), (4.20), (4.21), (4.22), (4.23) ve (4.24) eşitlikleri kullanılarak;

$$\kappa_1^f = \frac{\kappa_1 + \lambda_1 \kappa_1' - 2\lambda_3 \kappa_1^2 + (\lambda_1^2 + \lambda_3^2) \kappa_1^3}{\left(\sqrt{1 + (\lambda_1^2 + \lambda_3^2) \kappa_1^2 - 2\lambda_3 \kappa_1}\right)^3}$$

elde edilir. Benzer şekilde, aynı eşitlikler kullanılarak κ_2^f de,

$$\begin{aligned}\kappa_2^f &= \frac{\dot{h} + \lambda_1 \ddot{h} + \lambda_3 \ddot{r}}{(r + \lambda_1 \dot{r} - \lambda_3 \dot{h}) \sqrt{(\dot{r} + \lambda_1 \dot{r} - \lambda_3 \dot{h})^2 + (\dot{h} + \lambda_1 \ddot{h} + \lambda_3 \ddot{r})^2}} \\ \kappa_2^f &= \frac{r\kappa_2 + \lambda_1 \kappa_1 \frac{r\kappa_2'}{\kappa_1 - \kappa_2} - \lambda_3 Kr}{(r + \lambda_1 \frac{r\kappa_2'}{\kappa_1 - \kappa_2} - \lambda_3 r\kappa_2) \sqrt{1 + (\lambda_1^2 + \lambda_3^2)\kappa_1^2 - 2\lambda_3\kappa_1}} \\ \kappa_2^f &= \frac{(1 - \lambda_3\kappa_1)(\kappa_1 - \kappa_2)\kappa_2 + \lambda_1\kappa_1\kappa_2'}{((1 - \lambda_3\kappa_2)(\kappa_1 - \kappa_2) + \lambda_1\kappa_2') \sqrt{1 + (\lambda_1^2 + \lambda_3^2)\kappa_1^2 - 2\lambda_3\kappa_1}}\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Sonuç 4.1.14: E^3 de bir M döneel yüzeyinin $\lambda_2 = 0$ şartı dahilinde sabit sırt uzaklıklı yüzeyi için $\lambda_2 = 0$ şartına ilaveten, $\lambda_1 = 0$ alınmasıyla döneel yüzeyin paralel yüzeyi elde edilmiş olur ve asli eğrilikler arasındaki ilişki aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned}\kappa_1^f &= \frac{\kappa_1}{1 - \lambda_3\kappa_1} \\ \kappa_2^f &= \frac{\kappa_2}{1 - \lambda_3\kappa_2}\end{aligned}$$

Teorem 4.1.15: E^3 de bir M döneel yüzeyinin $\lambda_2 = 0$ şartı dahilinde sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri, döneel yüzeyin eğrilikleri cinsinden sırasıyla;

$$\begin{aligned}K^f &= \frac{((1 + (\lambda_1^2 + \lambda_3^2)\kappa_1^2 - 2\lambda_3\kappa_1)\kappa_1 + \lambda_1\kappa_1')((1 - \lambda_3\kappa_1)(\kappa_1 - \kappa_2)\kappa_2 + \lambda_1\kappa_1\kappa_2')}{((1 - \lambda_3\kappa_1)(\kappa_1 - \kappa_2) + \lambda_1\kappa_2')(1 + (\lambda_1^2 + \lambda_3^2)\kappa_1^2 - 2\lambda_3\kappa_1)^2} \\ H^f &= \frac{(\kappa_1(1 + (\lambda_1^2 + \lambda_3^2)\kappa_1^2 - 2\lambda_3\kappa_1) + \lambda_1\kappa_1')((1 - \lambda_3\kappa_2)(\kappa_1 - \kappa_2) + \lambda_1\kappa_2')}{(\sqrt{(1 + (\lambda_1^2 + \lambda_3^2)\kappa_1^2 - 2\lambda_3\kappa_1})^3 ((1 - \lambda_3\kappa_2)(\kappa_1 - \kappa_2) + \lambda_1\kappa_2'))} \\ &+ \frac{(1 + (\lambda_1^2 + \lambda_3^2)\kappa_1^2 - 2\lambda_3\kappa_1)((1 - \lambda_3\kappa_1)(\kappa_1 - \kappa_2)\kappa_2 + \lambda_1\kappa_1\kappa_2')}{(\sqrt{(1 + (\lambda_1^2 + \lambda_3^2)\kappa_1^2 - 2\lambda_3\kappa_1})^3 ((1 - \lambda_3\kappa_2)(\kappa_1 - \kappa_2) + \lambda_1\kappa_2'))}\end{aligned}$$

olur.

Sonuç 4.1.16: E^3 de bir M dönel yüzeyinin $\lambda_2 = 0$ şartı dahilinde sabit sırt uzaklıklı yüzeyi için, $\lambda_2 = 0$ şartına ilaveten, $\lambda_1 = 0$ alınmasıyla dönel yüzeyin paralel yüzeyi elde edilmiş olur ve paralel yüzeyin sırasıyla Gauss ve ortalama eğrilikleri, dönel yüzeyin eğrilikleri cinsinden aşağıdaki gibi elde edilir.

$$K^f = \kappa_1^f \kappa_2^f = \frac{K}{1 - \lambda_3 H + \lambda_3^2 K}$$

$$H^f = \kappa_1^f + \kappa_2^f = \frac{H - 2\lambda_3 K}{1 - \lambda_3 H + \lambda_3^2 K}$$

4.1.4. Dönel yüzeyin $\lambda_2 = 0$ için α meridyen eğrisinin sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntüsü

E^3 de, bir α eğrisinin Oz eksenini çevresinde döndürülmesiyle elde edilen M dönel yüzeyi ve bu yüzeyin $\lambda_2 = 0$ şartı dahilinde sabit sırt uzaklıklı yüzeyi olan M^f dönel yüzeyi göz önüne alınsın.

M dönel yüzeyi üzerindeki α_θ meridyen eğrisinin parametrik ifadesi (3.19) eşitliğinde

$$\alpha_\theta(t) = (r(t)\cos\theta, r(t)\sin\theta, h(t))$$

olarak ifade edilmişti. Bu meridyen eğrisinin $\lambda_2 = 0$ şartı dahilinde sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntüsü de $\beta(t)$ olsun.

Burada t yay parametresi olarak seçilip s denirse ve

$$T = (\dot{r}\cos\theta, \dot{r}\sin\theta, \dot{h}), n = (-\dot{h}\cos\theta, -\dot{h}\sin\theta, \dot{r})$$

oldukları hatırlanırsa M^f yüzeyi üzerindeki β eğrisi

$$f(\alpha(s)) = \beta(s) = \alpha(s) + \lambda_1 T + \lambda_3 n$$

biçiminde yazılabilir. Bu durumda M^f yüzeyi üzerindeki β eğrisinin $f(P)$ noktasındaki ortonormal $\{T^f, X^f, n^f\}$ çatısı bulunabilir. Bunun için β nın türevi alınırsa

$$\beta'(s) = \alpha'(s) + \lambda_1 T' + \lambda_3 n'$$

olup, (2.11) den T' ve n' yerlerine yazılıp, Teorem 3.3.2 den $\kappa_g = 0$ ve Teorem 3.3.4 den $t_r = 0$ olduğu kullanılırsa,

$$\beta'(s) = T + \lambda_1 \kappa_n n - \lambda_3 \kappa_n T = (1 - \lambda_3 \kappa_n)T + \lambda_1 \kappa_n n$$

olur. Böylece,

$$\|\beta'(s)\| = \sqrt{(1 - \lambda_3 \kappa_n)^2 + (\lambda_1 \kappa_n)^2}$$

olmak üzere

$$T^f = \frac{\beta'(s)}{\|\beta'(s)\|} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \lambda_3 \kappa_n)^2 + (\lambda_1 \kappa_n)^2}} ((1 - \lambda_3 \kappa_n)T + \lambda_1 \kappa_n n)$$

olarak bulunur. Diğer yandan, $\lambda_2 = 0$ şartı dahilinde döneel yüzeyin sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin denklemi

$$\psi(t, \theta) = \phi(t, \theta) + \lambda_1 T + \lambda_3 n$$

olacağından, M^f yüzeyi için $f(P)$ noktasındaki baz vektörler

$$\psi_t = (1 - \lambda_3 \kappa_1)T + \lambda_1 \kappa_1 n$$

$$\psi_\theta = \left(1 + \frac{\lambda_1 \kappa_2' - \lambda_3 (\kappa_1 - \kappa_2) \kappa_2}{\sqrt{\kappa_2^2 (\kappa_1 - \kappa_2)^2 + \kappa_2'^2}} \right) X = bX$$

şeklinde ifade edilirse, $b > 0$ için,

$$n^f = \frac{\psi_t \times \psi_\theta}{\|\psi_t \times \psi_\theta\|} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \lambda_3 \kappa_1)^2 + (\lambda_1 \kappa_1)^2}} ((1 - \lambda_3 \kappa_1)n - \lambda_1 \kappa_1 T)$$

olur. Yine vektörel çarpımla;

$$X^f = n^f \times T^f = \frac{((1 - \lambda_3 \kappa_1)n - \lambda_1 \kappa_1 T)}{\sqrt{(1 - \lambda_3 \kappa_1)^2 + (\lambda_1 \kappa_1)^2}} \times \frac{((1 - \lambda_3 \kappa_n)T + \lambda_1 \kappa_n n)}{\sqrt{(1 - \lambda_3 \kappa_n)^2 + (\lambda_1 \kappa_n)^2}}$$

olup, Teorem 3.3.3 den $\kappa_1 = \kappa_n$ olduğu kullanılırsa;

$$X^f = X$$

bulunur.

Bu durumda aşağıdaki teorem ifade edilebilir.

Teorem 4.1.17: M , E^3 de bir dönel yüzey ve M^f de bu yüzeyin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi olsun. M yüzeyi üzerinde yatan $\alpha(s)$ meridyen eğrisinin, $\lambda_2 = 0$ şartı dahilinde sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntüsü $\beta(s)$ eğrisi olduğuna göre, (α, M) ve (β, M^f) eğri-yüzey ikililerinin çatıları arasındaki ilişki

$$T^f = \frac{1}{\sqrt{(1 - \lambda_3 \kappa_n)^2 + (\lambda_1 \kappa_n)^2}} ((1 - \lambda_3 \kappa_n)T + \lambda_1 \kappa_n n)$$

$$X^f = X$$

$$n^f = \frac{1}{\sqrt{(1 - \lambda_3 \kappa_1)^2 + (\lambda_1 \kappa_1)^2}} ((1 - \lambda_3 \kappa_1)n - \lambda_1 \kappa_1 T)$$

biçimindedir.

Sonuç 4.1.18: $X^f = X$ olduğundan Tanım 2.3.9 gereği (α, M) ve (β, M^f) eğri-yüzey ikilileri için (α, β) eğri çifti bir Bertrand D-çifti, (M, M^f) yüzey çiftide Bertrand yüzey çifti olur.

Şimdi de, E^3 de bir M dönel yüzeyi üzerindeki α meridyen eğrisinin, M nin $\lambda_2 = 0$ şartı dahilinde sabit sırt uzaklıklı yüzeyi üzerindeki görüntüsü β eğrisi olmak üzere, (β, M^f)

eğri-yüzey ikilisinin sırasıyla, geodezik eğriliği κ_g^f , normal eğriliği κ_n^f ve geodezik burulması t_r^f biçiminde ifade edilen eğrilikleri hesaplanacaktır.

Hesaplamayı yapabilmek için Teorem 2.3.5 de ki formüllerden faydalanılacaktır. Öyleyse;

$$\beta'(s) = T + \lambda_1 \kappa_n n - \lambda_3 \kappa_n T = (1 - \lambda_3 \kappa_n)T + \lambda_1 \kappa_n n$$

$$\beta''(s) = T' + \lambda_1 \kappa_n' n + \lambda_1 \kappa_n n' - \lambda_3 \kappa_n' T - \lambda_3 \kappa_n T'$$

$$\beta''(s) = (-\lambda_1 \kappa_n^2 - \lambda_3 \kappa_n')T + (\kappa_n + \lambda_1 \kappa_n' - \lambda_3 \kappa_n^2)n$$

olduğundan,

$$\kappa_g^f = \frac{1}{\|\beta'(s)\|^2} \langle \beta''(s), X^f \rangle$$

$$\kappa_g^f = \frac{1}{(1 - \lambda_3 \kappa_n)^2 + (\lambda_1 \kappa_n)^2} \langle (-\lambda_1 \kappa_n^2 - \lambda_3 \kappa_n')T + (\kappa_n + \lambda_1 \kappa_n' - \lambda_3 \kappa_n^2)n, X \rangle$$

$$\kappa_g^f = 0$$

bulunur. Teorem 2.3.5 den,

$$\kappa_n^f = \frac{1}{\|\beta'(s)\|^2} \langle \beta''(s), n^f \rangle$$

$$\kappa_n^f = \left\langle \frac{(-\lambda_1 \kappa_n^2 - \lambda_3 \kappa_n')T + (\kappa_n + \lambda_1 \kappa_n' - \lambda_3 \kappa_n^2)n}{(1 - \lambda_3 \kappa_n)^2 + (\lambda_1 \kappa_n)^2}, \frac{(1 - \lambda_3 \kappa_1)n - \lambda_1 \kappa_1 T}{\sqrt{(1 - \lambda_3 \kappa_1)^2 + (\lambda_1 \kappa_1)^2}} \right\rangle$$

$$\kappa_n^f = \frac{(-\lambda_1 \kappa_n^2 - \lambda_3 \kappa_n')\lambda_1 \kappa_1 - (1 - \lambda_3 \kappa_1)(\kappa_n + \lambda_1 \kappa_n' - \lambda_3 \kappa_n^2)}{((1 - \lambda_3 \kappa_n)^2 + (\lambda_1 \kappa_n)^2)\sqrt{(1 - \lambda_3 \kappa_1)^2 + (\lambda_1 \kappa_1)^2}} \quad (4.27)$$

olup, Teorem 3.3.3 den $\kappa_1 = \kappa_n$ eşitliği (4.27) de kullanılırsa,

$$\kappa_n^f = \frac{\kappa_n + \lambda_1 \kappa_n' - 2\lambda_3 \kappa_n^2 + (\lambda_1^2 + \lambda_3^2)\lambda_3 \kappa_n^3}{(\sqrt{(1 - \lambda_3 \kappa_n)^2 + (\lambda_1 \kappa_n)^2})^3}$$

olur. Yine Teorem 2.3.5 den,

$$t_r^f = -\frac{1}{\|\beta'(s)\|} \langle n^{f'}, X^f \rangle$$

$$t_r^f = -\frac{1}{\sqrt{(1 - \lambda_3 \kappa_n)^2 + (\lambda_1 \kappa_n)^2}}$$

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{(1 - \lambda_3 \kappa_1)^2 + (\lambda_1 \kappa_1)^2}} ((1 - \lambda_3 \kappa_1)n' - \lambda_1 \kappa_1 T', X) \right\rangle$$

$$t_r^f = -\frac{1}{(1 - \lambda_3 \kappa_n)^2 + (\lambda_1 \kappa_n)^2} \langle -(1 - \lambda_3 \kappa_1)\kappa_n T - \lambda_1 \kappa_1 \kappa_n n, X \rangle t_r^f$$

$$t_r^f = 0$$

bulunur.

Teorem 4.1.19: M , E^3 de bir d6nel y6zey ve M^f de bu y6zeyin, $\lambda_2 = 0$ şartı dahilinde sabit sırt uzaklıklı y6zeyi olsun. M y6zeyi 6zerinde yatan $\alpha(s)$ meridyen eğrisinin sabit sırt uzaklıklı y6zey 6zerindeki g6r6nt6s6 $\beta(s)$ eğrisi olduğuna g6re, (β, M^f) eğri-y6zey ikilisinin sırasıyla, κ_g^f , κ_n^f , t_r^f eğrilikleri,

$$\kappa_g^f = 0$$

$$\kappa_n^f = \frac{\kappa_n + \lambda_1 \kappa_n' - 2\lambda_3 \kappa_n^2 + (\lambda_1^2 + \lambda_3^2)\lambda_3 \kappa_n^3}{(\sqrt{(1 - \lambda_3 \kappa_n)^2 + (\lambda_1 \kappa_n)^2})^3}$$

$$t_r^f = 0$$

biçimindedir.

Yukarıda ki teoremden şu sonuçlar çıkarılabilir:

Sonuç 4.1.20: E^3 de ki bir M dönele yüzeyi üzerinde ki α meridyen eğrisinin geodezik eğri olması, bu eğrinin $\lambda_2 = 0$ şartı dahilinde M^f sabit sırt uzaklıklı yüzeyi üzerindeki resmi olan β eğrisinin de geodezik eğri olması demektir.

Sonuç 4.1.21: E^3 de ki bir M dönele yüzeyi üzerinde ki α meridyen eğrisinin birinci eğriliği normal eğriliğe eşit olması ($\kappa_1 = \kappa_n$), bu eğrinin $\lambda_2 = 0$ şartı dahilinde M^f sabit sırt uzaklıklı yüzeyi üzerindeki resmi olan β eğrisinin de birinci eğriliğinin normal eğriliğe eşit olmasını ($\kappa_1^f = \kappa_n^f$) gerektirir.

İspat:

$$\kappa_n^f = \frac{\kappa_n + \lambda_1 \kappa_n' - 2\lambda_3 \kappa_n^2 + (\lambda_1^2 + \lambda_3^2) \lambda_3 \kappa_n^3}{(\sqrt{(1 - \lambda_3 \kappa_n)^2 + (\lambda_1 \kappa_n)^2})^3}$$

ifadesinde Teorem 3.3.3 den $\kappa_1 = \kappa_n$ olduğu kullanılıp, (4.25) eşitliği de gözönüne alınırsa;

$$\kappa_n^f = \kappa_1^f = \frac{\kappa_1 + \lambda_1 \kappa_1' - 2\lambda_3 \kappa_1^2 + (\lambda_1^2 + \lambda_3^2) \lambda_3 \kappa_1^3}{(\sqrt{1 + (\lambda_1^2 + \lambda_3^2) \kappa_1^2 - 2\lambda_3 \kappa_1})^3}$$

olduğu kolaylıkla gösterilmiş olur.

Sonuç 4.1.22: E^3 de ki bir M dönele yüzeyi üzerinde ki α meridyen eğrisinin geodezik burulması $t_r = 0$ olduğundan eğrilik çizgisidir. Benzer şekilde, $t_r^f = 0$ olması, bu eğrinin $\lambda_2 = 0$ şartı dahilinde M^f sabit sırt uzaklıklı yüzeyi üzerindeki resmi olan β eğrisinin de eğrilik çizgisi olduğunu ifade eder.

Sonuç 4.1.23: E^3 de ki bir M dönele yüzeyi üzerinde ki α meridyen eğrisinin $\lambda_2 = 0$ şartı dahilinde sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntüsü olan β eğrisinin asimptotik eğri olması için gerek ve yeter şart α eğrisinin asimptotik olmasıdır.

Sonuç 4.1.24: E^3 de ki bir M dönel yüzeyi üzerinde ki α meridyen eğrisinin $\lambda_2 = 0$ şartı dahilinde sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntüsü olan β eğrisinin doğru olması için gerek ve yeter şart α eğrisinin doğru olmasıdır.

Sonuç 4.1.25: E^3 de bir M dönel yüzeyi üzerinde yatan α meridyen eğrisinin, M nin $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ şartı dahilinde sabit sırt uzaklıklı yüzeyi, yani paralel yüzeyi üzerindeki görüntüsü β eğrisi olduğuna göre, (β, M^f) eğri-yüzey ikilisinin $\kappa_n^f, \kappa_g^f, t_r^f$ eğrilikleri

$$\kappa_n^f = \frac{\kappa_n}{1 - \lambda_3 \kappa_n}$$

$$\kappa_g^f = 0$$

$$t_r^f = 0$$

biçiminde olur.

Bu bölümde son olarak, M dönel yüzeyi üzerindeki α meridyen eğrisi ile M nin $\lambda_2 = 0$ şartı dahilinde sabit sırt uzaklıklı yüzeyi üzerinde ki görüntüsü olan β eğrisinin eğrilik çemberlerinin merkezleri incelenerek hangi şart altında kesişebilecekleri bir teoremlerle gösterilecektir.

M yüzeyi üzerindeki α eğrisinin P noktasındaki eğrilik çemberi, eğrinin normali ile yüzey normalinin çakışması durumunda, (T_P, n_P) düzleminde yatan R yarıçaplı $C = P + Rn_P$ merkezli çemberdir (Hacısalıhoğlu 1983).

Bu durumda M dönel yüzeyi üzerinde ki $\alpha(s)$ meridyen eğrisinin P noktasında ki eğrilik çemberinin merkezi C_1 , M^f sabit sırt uzaklıklı yüzeyi üzerindeki resmi olan $\beta(s)$ eğrisinin $f(P)$ noktasındaki eğrilik çemberinin merkezi de C_2 ile gösterilirse,

$$C_1 = P + \frac{1}{\kappa} n_P$$

$$C_2 = f(P) + \frac{1}{\kappa^f} n_{f(P)}^f$$

olacaktır.

Teorem 4.1.26: M d6nel y6zeyi 6zerinde ki $\alpha(s)$ meridyen eğrisinin bir P noktasında ki eğrilik 7emberinin merkezi ile M nin $\lambda_2 = 0$ şartı dahilinde sabit sırt uzaklıklı y6zeyi 6zerindeki resmi olan $\beta(s)$ eğrisinin $f(P)$ noktasındaki eğrilik 7emberinin merkezinin keşişebilmesi i7in gerek ve yeter şart

$$\left(\frac{1}{\kappa_1} + \lambda_3\right)^2 + \lambda_1^2 = \frac{(1 + (\lambda_1^2 + \lambda_3^2)\kappa_1^2 - 2\lambda_3\kappa_1)^3}{(\kappa_1 + \lambda_1\kappa_1' - 2\lambda_3\kappa_1^2 + (\lambda_1^2 + \lambda_3^2)\kappa_1^3)^2}$$

olmasıdır.

İspat: M d6nel y6zeyinin α meridyen eğrisinin ve M nin $\lambda_2 = 0$ i7in elde edilen sabit sırt uzaklıklı y6zey 6zerindeki g6r6nt6s6 olan β eğrisinin birinci eğriliği arasındaki ilişi Teorem 4.1.13 6n (4.25) eşitliğinde

$$\kappa_1^f = \frac{\kappa_1 + \lambda_1\kappa_1' - 2\lambda_3\kappa_1^2 + (\lambda_1^2 + \lambda_3^2)\kappa_1^3}{\left(\sqrt{1 + (\lambda_1^2 + \lambda_3^2)\kappa_1^2 - 2\lambda_3\kappa_1}\right)^3}$$

olarak ifade edilmişi. Buradan,

$$C_1 = P + \frac{1}{\kappa_1}n_P$$

ve

$$C_2 = f(P) + \frac{1}{\kappa_1^f}n_{f(P)}^f = P + \lambda_1T + \lambda_3n_P + \frac{\left(\sqrt{1 + (\lambda_1^2 + \lambda_3^2)\kappa_1^2 - 2\lambda_3\kappa_1}\right)^3}{\kappa_1 + \lambda_1\kappa_1' - 2\lambda_3\kappa_1^2 + (\lambda_1^2 + \lambda_3^2)\kappa_1^3}n_{f(P)}^f$$

olup, bu iki noktanın keşişebilmesi i7in,

$$A = \frac{1}{\kappa_1}n_P + \lambda_1T + \lambda_3n_P = \left(\frac{1}{\kappa_1} + \lambda_3\right)n_P + \lambda_1T$$

olmalıdır. Ayrıca

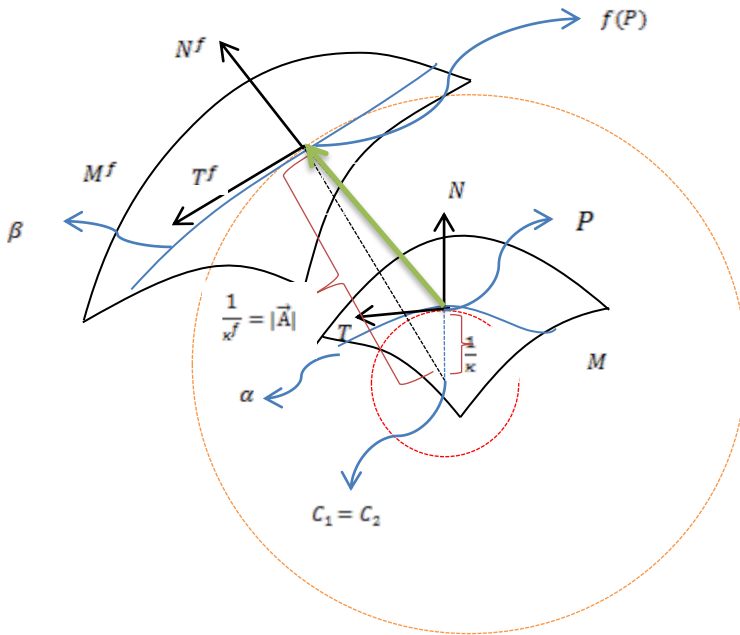
$$\|A\| = \frac{1}{\kappa_1^f}$$

olup buradan

$$\sqrt{\left(\frac{1}{\kappa_1} + \lambda_3\right)^2 + \lambda_1^2} = \frac{\left(\sqrt{1 + (\lambda_1^2 + \lambda_3^2)\kappa_1^2 - 2\lambda_3\kappa_1}\right)^3}{\kappa_1 + \lambda_1\kappa_1' - 2\lambda_3\kappa_1^2 + (\lambda_1^2 + \lambda_3^2)\kappa_1^3}$$

$$\left(\frac{1}{\kappa_1} + \lambda_3\right)^2 + \lambda_1^2 = \frac{(1 + (\lambda_1^2 + \lambda_3^2)\kappa_1^2 - 2\lambda_3\kappa_1)^3}{(\kappa_1 + \lambda_1\kappa_1' - 2\lambda_3\kappa_1^2 + (\lambda_1^2 + \lambda_3^2)\kappa_1^3)^2}$$

bulunur. Bu durum Şekil 4.5 ile gösterilmiştir.



Şekil 4.5. α ve β eğrilerinin eğrilik çemberlerinin merkezlerinin kesişimi

4.2. Frenet Çatılı Tüp Yüzeyinin Sabit Sırt Uzaklıklı Yüzeyi

Bu bölümde Frenet çatılı tüp yüzeyinin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi elde edilerek, elde edilen yüzeyin hangi şart altında tüp yüzeyi olduğu gösterilecek ve eğrilikleri incelenerek, tüp yüzeyinin eğrilikleri ile karşılaştırılacaktır.

4.2.1. Frenet çatılı tüp yüzeyinin sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin ifadesi

$c(s)$ birim hızlı bir uzay eğrisi ve $\{T, N, B\}$ onun Frenet çatısı olmak üzere, tüp yüzeyinin parametrik ifadesinin

$$\phi(s, \theta) = c(s) + r(\cos\theta N(s) + \sin\theta B(s))$$

olduğu daha önce (3.33) denkleminde belirtilmişti. Bu yüzeyin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi için öncelikle s e göre kısmi türev alınır

$$\phi_s = c'(s) + r(\cos\theta N'(s) + \sin\theta B'(s))$$

olup, Teorem 2.1.10 da ki Frenet-Serret formüllerinden $N'(s)$ ve $B'(s)$ yerlerine yazılırsa

$$\phi_s(s, \theta) = (1 - r\kappa\cos\theta)T - r\tau\sin\theta N + r\tau\cos\theta B$$

bulunur. Benzer şekilde θ ya göre kısmi türev

$$\phi_\theta(s, \theta) = -r\sin\theta N + r\cos\theta B$$

olur. Burada,

$$\|\phi_s\| = \sqrt{1 - 2r\kappa\cos\theta + r^2\kappa^2\cos^2\theta + r^2\tau^2} = A$$

olarak alınır,

$$X = \frac{\phi_s}{\|\phi_s\|} = \frac{1 - r\kappa\cos\theta}{A}T - \frac{r\tau\sin\theta}{A}N + \frac{r\tau\cos\theta}{A}B$$

$$Y = \frac{\phi_\theta}{\|\phi_\theta\|} = -\sin\theta N + \cos\theta B$$

yazılabilir. Burada $1 - r\kappa\cos\theta \neq 0$ olarak ele alındığından, tüp yüzeyi regüler bir tüp yüzeyidir. Buna göre yüzeyin birim normali

$$n = \frac{\phi_s \times \phi_\theta}{\|\phi_s \times \phi_\theta\|} = -\cos\theta N - \sin\theta B$$

şeklinde bulunur. Bulunan bu değerler,

$$\psi(s, \theta) = \phi(s, \theta) + \lambda_1 X + \lambda_2 Y + \lambda_3 n$$

biçimindeki sabit sırt uzaklıklı yüzeyi ifade eden denklemde yerine yazılırsa, tüp yüzeyinin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi

$$\begin{aligned} \psi(s, \theta) &= c(s) + \frac{\lambda_1}{A}(1 - r\kappa\cos\theta)T \\ &+ \left(r\cos\theta - \frac{r\tau\lambda_1}{A}\sin\theta - \lambda_2\sin\theta - \lambda_3\cos\theta \right) N \\ &+ \left(r\sin\theta + \frac{r\tau\lambda_1}{A}\cos\theta + \lambda_2\cos\theta - \lambda_3\sin\theta \right) B \end{aligned} \quad (4.28)$$

olarak bulunmuş olur.

Teorem. 4.2.1: E^3 de alınan bir tüp yüzeyinin sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin de tüp yüzeyi olması için gerek ve yeter şart $\lambda_1 = 0$ olmasıdır.

İspat: E^3 de

$$\phi(s, \theta) = c(s) + r(\cos\theta N(s) + \sin\theta B(s))$$

parametrizasyonu ile verilen tüp yüzeyinin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi (4.28) denklemi ile ifade edilmişti. Eğer bu yüzey tüp yüzeyi ise T nin katsayısı olan

$$\frac{\lambda_1}{A}(1 - r\kappa\cos\theta) = 0$$

olmalıdır. $\phi(s, \theta)$ tüp yüzeyi regüler bir tüp yüzeyi olarak kabul edildiğinden

$$1 - rk\cos\theta \neq 0$$

olup, $\lambda_1 = 0$ olur. O halde $\lambda_1 = 0$ değeri (4.28) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\psi(s, \theta) = c(s) + ((r - \lambda_3)\cos\theta - \lambda_2\sin\theta)N + ((r - \lambda_3)\sin\theta + \lambda_2\cos\theta)B \quad (4.29)$$

eşitliği elde edilir. Burada (4.29) ifadesi $\sqrt{(r - \lambda_3)^2 + \lambda_2^2}$ ile çarpılır ve bölünürse,

$$\begin{aligned} \psi(s, \theta) = c(s) &+ \left(\left(\frac{r - \lambda_3}{\sqrt{(r - \lambda_3)^2 + \lambda_2^2}} \cos\theta - \frac{\lambda_2}{\sqrt{(r - \lambda_3)^2 + \lambda_2^2}} \sin\theta \right) N \right. \\ &+ \left(\frac{r - \lambda_3}{\sqrt{(r - \lambda_3)^2 + \lambda_2^2}} \sin\theta \right. \\ &\left. \left. + \frac{\lambda_2}{\sqrt{(r - \lambda_3)^2 + \lambda_2^2}} \cos\theta \right) B \right) \sqrt{(r - \lambda_3)^2 + \lambda_2^2} \end{aligned} \quad (4.30)$$

bulunmuş olur. (4.30) ifadesinde

$$\frac{r - \lambda_3}{\sqrt{(r - \lambda_3)^2 + \lambda_2^2}} = \cos\beta \quad (4.31)$$

ve

$$\frac{\lambda_2}{\sqrt{(r - \lambda_3)^2 + \lambda_2^2}} = \sin\beta \quad (4.32)$$

olarak ele alınır ve (4.30) da yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \psi(s, \theta) = c(s) &+ ((\cos\theta\cos\beta - \sin\theta\sin\beta)N + (\sin\theta\cos\beta + \cos\theta\sin\beta)B) \sqrt{(r - \lambda_3)^2 + \lambda_2^2} \end{aligned} \quad (4.33)$$

elde edilir. (4.33) eşitliğinde

$$\cos\theta\cos\beta - \sin\theta\sin\beta = \cos(\theta + \beta) = \cos\gamma \quad (4.34)$$

$$\sin\theta\cos\beta + \cos\theta\sin\beta = \sin(\theta + \beta) = \sin\gamma \quad (4.35)$$

oldukları bilindiğine göre ve

$$\sqrt{(r - \lambda_3)^2 + \lambda_2^2} = R = sbt \quad (4.36)$$

olarak kabul edilirse, bu durumda (4.34), (4.35) ve (4.36) eşitlikleri (4.33) eşitliğinde yerine yazıldığı takdirde

$$\psi(s, \gamma) = c(s) + R(\cos\gamma N(s) + \sin\gamma B(s)) \quad (4.37)$$

biçimindeki yeni tüp yüzeyi elde edilir.

Aksine, $\lambda_1 = 0$ alınırsa, yine (4.28) denkleminde yerine yazılarak (4.29) eşitliği elde edilir. Buradan yine aynı işlemler yapılarak (4.37) eşitliğine ulaşılır.

Yani, $\lambda_1 = 0$ değeri için Frenet çatılı tüp yüzeyinin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi de bir tüp yüzeyidir.

Örnek 4.2.2:

$$c(s) = \left(\cos \frac{s}{5\sqrt{2}}, \sin \frac{s}{5\sqrt{2}}, \frac{7}{5\sqrt{2}}s \right)$$

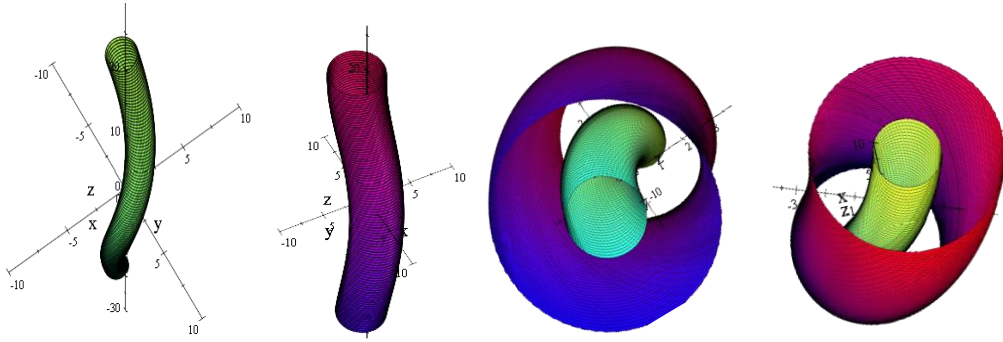
birim hızlı bir eğridir. Bu eğriyi merkez eğrisi kabul eden $r = 1$ yarıçaplı tüp yüzeyinin parametrik ifadesi

$$\begin{aligned} \phi(s, \theta) = & \left((1 - \cos\theta)\cos \frac{s}{5\sqrt{2}} + \frac{7}{5\sqrt{2}}\sin \frac{s}{5\sqrt{2}}\sin\theta, (1 - \cos\theta)\sin \frac{s}{5\sqrt{2}} \right. \\ & \left. - \frac{7}{5\sqrt{2}}\sin\theta\cos \frac{s}{5\sqrt{2}}, \frac{7}{5\sqrt{2}}s + \frac{\sin\theta}{5\sqrt{2}} \right) \end{aligned}$$

biçimindedir. $\lambda_1 = 0$ şartı dahilinde bu tüp yüzeyinin sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin parametrik ifadesi ise;

$$\begin{aligned} \psi(s, \theta) = & \left(\cos \frac{s}{5\sqrt{2}} (1 - \cos\theta + \lambda_2 \sin\theta + \lambda_3 \cos\theta) \right. \\ & + \frac{7}{5\sqrt{2}} \sin \frac{s}{5\sqrt{2}} (\sin\theta + \lambda_2 \cos\theta - \lambda_3 \sin\theta), \sin \frac{s}{5\sqrt{2}} (1 - \cos\theta \\ & + \lambda_2 \sin\theta + \lambda_3 \cos\theta) - \frac{7}{5\sqrt{2}} \cos \frac{s}{5\sqrt{2}} (\sin\theta + \lambda_2 \cos\theta - \lambda_3 \sin\theta), \frac{7}{5\sqrt{2}} s \\ & \left. + \frac{1}{5\sqrt{2}} (\sin\theta + \lambda_2 \cos\theta - \lambda_3 \sin\theta) \right) \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. Bu tüp yüzeyinin ve $\lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$ için sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin grafiği aşağıdaki gibi olur.



Şekil 4.6. Tüp yüzeyi ve onun $\lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$ için sabit sırt uzaklıklı yüzeyi

Bundan böyle Frenet çatılı tüp yüzeyinin $\lambda_1 = 0$ şartı dahilindeki sabit sırt uzaklıklı yüzeyi ele alınacaktır.

4.2.2. Tüp yüzeyinin $\lambda_1 = 0$ şartı dahilindeki sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin I., II. esas formlarının katsayıları ve eğrilikleri

Frenet çatılı tüp yüzeyinin $\lambda_1 = 0$ şartı dahilindeki sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin I. ve II. esas form katsayılarını hesaplamak için öncelikle (4.37) eşitliği kullanılarak γ ve s e göre kısmi türevler alınırsa,

$$\psi_\gamma(s, \gamma) = -R \sin \gamma N + R \cos \gamma B$$

$$\psi_s(s, \gamma) = c'(s) + R(\cos\gamma N'(s) + \sin\gamma B'(s))$$

olur. Teorem 2.1.10 da ki Frenet-Serret formüllerinden $N'(s)$ ve $B'(s)$ yerlerine yazılırsa

$$\psi_s(s, \gamma) = (1 - R\kappa\cos\gamma)T - R\tau\sin\gamma N + R\tau\cos\gamma B$$

$$\psi_s(s, \gamma) = (1 - R\kappa\cos\gamma)T + \tau\psi_\gamma(s, \gamma)$$

bulunur. Buradan, Tanım 2.2.7 den I. esas form katsayıları

$$E = \langle \psi_s, \psi_s \rangle = (1 - R\kappa\cos\gamma)^2 + R^2\tau^2$$

$$F = \langle \psi_s, \psi_\gamma \rangle = R^2\tau \quad (4.38)$$

$$G = \langle \psi_\gamma, \psi_\gamma \rangle = R^2$$

olarak bulunur. Yüzeyin birim normali ise

$$n^f = \frac{\psi_s \times \psi_\gamma}{\|\psi_s \times \psi_\gamma\|} = -\cos\gamma N - \sin\gamma B \quad (4.39)$$

olarak hesaplanır. Buradan II. esas form katsayıları için

$$\begin{aligned} \psi_{ss} = & (-R\kappa'\cos\gamma + R\kappa\tau\sin\gamma)T + (\kappa - R(\kappa^2 + \tau^2)\cos\gamma - R\tau'\sin\gamma)N \\ & + (-R\tau^2\sin\gamma + R\tau'\cos\gamma)B \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$\psi_{s\gamma} = R\kappa\sin\gamma T + \tau\psi_{\gamma\gamma} = \psi_{\gamma s}$$

$$\psi_{\gamma\gamma} = -R(\cos\gamma N + \sin\gamma B) \quad (4.41)$$

eşitlikleri kullanılarak yine Tanım 2.2.7'den

$$e = \langle \psi_{ss}, n^f \rangle = -\kappa\cos\gamma(1 - R\kappa\cos\gamma) + R\tau^2 \quad (4.42)$$

$$f = \langle \psi_{s\gamma}, n^f \rangle = R\tau \quad (4.43)$$

$$g = \langle \psi_{\gamma\gamma}, n^f \rangle = R \quad (4.44)$$

olarak hesaplanır. Buna göre, tüp yüzeyinin $\lambda_1 = 0$ şartı dahilindeki sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla, Teorem 2.2.11 den

$$K^f = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -\frac{\kappa \cos \gamma}{R(1 - R\kappa \cos \gamma)} \quad (4.45)$$

$$H^f = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R} + RK^f \right) \quad (4.46)$$

biçiminde bulunur. Asli eğrilikler ise,

$$\kappa_1^f = -\frac{\kappa \cos \gamma}{(1 - R\kappa \cos \gamma)} \quad (4.47)$$

$$\kappa_2^f = \frac{1}{R} \quad (4.48)$$

olur.

Şimdi Frenet çatılı tüp yüzeyi ile $\lambda_1 = 0$ için sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin eğrilikleri arasındaki ilişkiler incelenecektir.

4.2.3. Tüp yüzeyi ve $\lambda_1 = 0$ için sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin eğrilikleri arasındaki ilişki

Parametrik ifadesi

$$\phi(s, \theta) = c(s) + r(\cos \theta N(s) + \sin \theta B(s))$$

olan tüp yüzeyinin eğrilikleri (3.34), (3.35), (3.36) ve (3.37) ile verilmişti. Bu eşitliklerden

$$\cos \theta = \frac{Kr}{\kappa(Kr^2 - 1)} \quad (4.49)$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{K^2 r^2 (\kappa^2 r^2 - 1) - \kappa^2 (2\kappa r^2 - 1)}}{\kappa(Kr^2 - 1)} \quad (4.50)$$

olarak bulunur. Tüp yüzeyinin $\lambda_1 = 0$ dahilindeki sabit sırt uzaklıklı yüzeyi için, (4.31), (4.32), (4.34), (4.36), (4.49) ve (4.50) eşitlikleri ile (4.45) eşitliği birlikte değerlendirildiğinde, Gauss eğriliği

$$K^f = \frac{-\kappa \left(\frac{r - \lambda_3}{R} \frac{Kr}{\kappa(Kr^2 - 1)} - \frac{\lambda_2}{R} \frac{\sqrt{K^2 r^2 (\kappa^2 r^2 - 1) - \kappa^2 (2\kappa r^2 - 1)}}{\kappa(Kr^2 - 1)} \right)}{R \left(1 - R\kappa \left(\frac{r - \lambda_3}{R} \frac{Kr}{\kappa(Kr^2 - 1)} - \frac{\lambda_2}{R} \frac{\sqrt{K^2 r^2 (\kappa^2 r^2 - 1) - \kappa^2 (2\kappa r^2 - 1)}}{\kappa(Kr^2 - 1)} \right) \right)}$$

olur. (3.37) den $r = \frac{1}{\kappa_2}$ olduğu kullanılırsa

$$K^f = \frac{-K\kappa_2(1 - \lambda_3\kappa_2) + \lambda_2\kappa_2^2\sqrt{\kappa^2(\kappa_1 - \kappa_2)^2 - K^2}}{\left((1 - \lambda_3\kappa_2)^2 + \lambda_2^2\kappa_2^2\right)\left(\lambda_3K - \kappa_2 + \lambda_2\sqrt{\kappa^2(\kappa_1 - \kappa_2)^2 - K^2}\right)} \quad (4.51)$$

bulunur. Benzer şekilde, (4.46) eşitliğinden

$$H^f = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R} + RK^f \right)$$

olup, $R = \sqrt{(r - \lambda_3)^2 + \lambda_2^2}$, $r = \frac{1}{\kappa_2}$ ve K^f değerleri yerlerine yazılırsa ortalama eğrilik,

$$H^f = \frac{1}{2} \left(\frac{-K - \kappa_2^2 + 2\kappa_2 \left(\lambda_3K + \lambda_2\sqrt{\kappa^2(\kappa_1 - \kappa_2)^2 - K^2} \right)}{\sqrt{(1 - \lambda_3\kappa_2)^2 + \lambda_2^2\kappa_2^2} \left(-\kappa_2 + \lambda_3K + \lambda_2\sqrt{\kappa^2(\kappa_1 - \kappa_2)^2 - K^2} \right)} \right) \quad (4.52)$$

biçiminde hesaplanır. Buradan asli eğrilikler de; (4.31), (4.32), (4.34), (4.36), (4.49) ve (4.50) eşitlikleri ile (4.47) eşitliği birlikte değerlendirildiğinde

$$\kappa_1^f = \frac{-K(1 - \lambda_3\kappa_2) + \lambda_2\kappa_2\sqrt{\kappa^2(\kappa_1 - \kappa_2)^2 - K^2}}{\sqrt{(1 - \lambda_3\kappa_2)^2 + \lambda_2^2\kappa_2^2} \left(\lambda_3K - \kappa_2 + \lambda_2\sqrt{\kappa^2(\kappa_1 - \kappa_2)^2 - K^2} \right)} \quad (4.53)$$

olur ve (4.36), (4.48) eşitliklerinden de

$$\kappa_2^f = \frac{1}{R} = \frac{\kappa_2}{\sqrt{(1 - \lambda_3\kappa_2)^2 + \lambda_2^2\kappa_2^2}} \quad (4.54)$$

olarak elde edilir.

Teorem. 4.2.3: E^3 de Frenet çatılı bir tüp yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri ile $\lambda_1 = 0$ için sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri arasındaki ilişki κ_1 ve κ_2 tüp yüzeyinin asli eğrilikleri olmak üzere,

$$K^f = \frac{-K\kappa_2(1 - \lambda_3\kappa_2) + \lambda_2\kappa_2^2\sqrt{\kappa^2(\kappa_1 - \kappa_2)^2 - K^2}}{((1 - \lambda_3\kappa_2)^2 + \lambda_2^2\kappa_2^2)(\lambda_3K - \kappa_2 + \lambda_2\sqrt{\kappa^2(\kappa_1 - \kappa_2)^2 - K^2})}$$

$$H^f = \frac{1}{2} \left(\frac{-K - \kappa_2^2 + 2\kappa_2(\lambda_3K + \lambda_2\sqrt{\kappa^2(\kappa_1 - \kappa_2)^2 - K^2})}{\sqrt{(1 - \lambda_3\kappa_2)^2 + \lambda_2^2\kappa_2^2}(-\kappa_2 + \lambda_3K + \lambda_2\sqrt{\kappa^2(\kappa_1 - \kappa_2)^2 - K^2})} \right)$$

biçimindedir.

Sonuç 4.2.4: E^3 de Frenet çatılı bir tüp yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri ile $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ şartı dahilinde ki sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin yani, paralel yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri arasında

$$K^f = \frac{K}{1 - \lambda_3H + \lambda_3^2K} \quad (4.55)$$

$$H^f = \frac{H - 2\lambda_3K}{1 - \lambda_3H + \lambda_3^2K} \quad (4.56)$$

olacak şekilde bir ilişki vardır.

İspat: (4.51) ve (4.52) eşitliklerinde $\lambda_2 = 0$ alınarak, kolay bir şekilde (4.55) ve (4.56) eşitlikleri elde edilir.

Sonuç 4.2.5: E^3 de Frenet çatılı bir tüp yüzeyinin asli eğrilikleri ile $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ şartı dahilinde ki sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin yani, paralel yüzeyinin asli eğrilikleri arasında

$$\kappa_1^f = \frac{\kappa_1}{1 - \lambda_3 \kappa_1} \quad (4.57)$$

$$\kappa_2^f = \frac{\kappa_2}{1 - \lambda_3 \kappa_2} \quad (4.58)$$

olacak şekilde bir ilişki vardır.

İspat: (4.53) ve (4.54) eşitliklerinde $\lambda_2 = 0$ alınarak, kolayca (4.57) ve (4.58) eşitlikleri elde edilir.

Teorem 4.2.6: E^3 de $\phi(s, \theta) = c(s) + r(\cos\theta N(s) + \sin\theta B(s))$ biçimindeki Frenet çatılı bir regüler tüp yüzeyinin $\lambda_1 = 0$ şartı dahilinde sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin parametre eğrilerinin aynı zamanda eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart $c(s)$ merkez eğrisinin düzlemsel olmasıdır.

İspat: $\phi(s, \theta) = c(s) + r(\cos\theta N(s) + \sin\theta B(s))$ parametrizasyonu ile verilen tüp yüzeyinin $\lambda_1 = 0$ şartı dahilinde ki sabit sırt uzaklıklı yüzeyi (4.37) eşitliği ile ifade edilmişti. Eğer parametre eğrileri eğrilik çizgisi ise, Teorem 2.2.18 den biliniyor ki parametre eğrilerinin aynı zamanda eğrilik çizgisi olması durumunda I. esas form katsayılarından F ve II. esas form katsayılarından f için $F = f = 0$ olmalıdır.

O halde (4.38) ve (4.43) eşitliklerinden $F = R^2\tau = 0$ olur ve $f = R\tau = 0$ olacaktır. Bu durumda $R = \sqrt{(r - \lambda_3)^2 + \lambda_2^2}$ olduğundan $r \neq 0$ olur ve λ_2, λ_3 sıfırdan farklı sabitler olduğuna göre $R \neq 0$ olup, $\tau = 0$ olacaktır. Bu da $c(s)$ merkez eğrisinin düzlemsel olması demektir.

Tersine, $c(s)$ eğrisi düzlemsel ise $\tau = 0$ olacaktır. Böylece, $F = f = 0$ olur. Bu da yine Teorem 2.2.18 den parametre eğrilerinin eğrilik çizgisi olması demektir.

Teorem 4.2.7: $\phi(s, \theta)$ Frenet çatılı regüler bir tüp yüzeyi, $c(s)$ bu yüzeyin merkez eğrisi ve bu tüp yüzeyinin $\lambda_1 = 0$ şartı dahilinde sabit sırt uzaklıklı yüzeyi $\psi(s, \gamma)$

olsun. $\psi(s, \gamma)$ nın s -parametre eğrilerinin asimptotik eğri olması için gerek ve yeter şart $c(s)$ merkez eğrisinin eğriliklerinin

$$\frac{\tau^2}{\kappa} = \left(\frac{(r - \lambda_3)\cos\theta - \lambda_2\sin\theta}{(r - \lambda_3)^2 + \lambda_2^2} \right) \left(1 - \kappa((r - \lambda_3)\cos\theta - \lambda_2\sin\theta) \right)$$

eşitliğini sağlamasıdır.

İspat: Teorem 2.2.16 dan biliyoruz ki parametre eğrileri aynı zamanda asimptotik eğri ise II. esas form katsayılarından $e = g = 0$ olmalıdır. Buna göre, s -parametre eğrisi ise $e = 0$ olmalıdır. O halde (4.42) eşitliğinde

$$e = -\kappa\cos\gamma(1 - R\kappa\cos\gamma) + R\tau^2 = 0$$

olur. Buradan $\cos\gamma$ için (4.31), (4.32), (4.34) eşitlikleri kullanılır ve R nin (4.36) daki değeri yerine yazılıp düzenlenirse,

$$\frac{\tau^2}{\kappa} = \left(\frac{(r - \lambda_3)\cos\theta - \lambda_2\sin\theta}{(r - \lambda_3)^2 + \lambda_2^2} \right) \left(1 - \kappa((r - \lambda_3)\cos\theta - \lambda_2\sin\theta) \right)$$

eşitliği elde edilir.

Sonuç 4.2.8: $\phi(s, \theta)$ Frenet çatılı regüler bir tüp yüzeyi, $c(s)$ bu yüzeyin merkez eğrisi ve bu tüp yüzeyinin paralel yüzeyi $\psi(s, \gamma)$ olsun. $\psi(s, \gamma)$ nın s -parametre eğrilerinin asimptotik eğri olması için gerek ve yeter şart $c(s)$ merkez eğrisinin eğriliklerinin

$$\frac{\tau^2}{\kappa} = \left(\frac{\cos\theta(1 - \kappa(r - \lambda_3)\cos\theta)}{r - \lambda_3} \right)$$

eşitliğini sağlamasıdır.

Önerme 4.2.9: $\phi(s, \theta)$ Frenet çatılı regüler bir tüp yüzeyi, $c(s)$ bu yüzeyin merkez eğrisi ve bu tüp yüzeyinin $\lambda_1 = 0$ şartı dahilinde sabit sırt uzaklıklı yüzeyi $\psi(s, \gamma)$ olsun. $\psi(s, \gamma)$ nın γ -parametre eğrileri asimptotik eğri değildir.

İspat: Teorem 2.2.16 dan biliyoruz ki parametre eğrileri aynı zamanda asimptotik eğri ise II. esas form katsayılarından $e = g = 0$ olmalıdır. Buna göre, γ -parametre eğrilerinin asimptotik olması için $g = 0$ olmalıdır. Fakat (4.44) eşitliğinden

$$g = \langle \psi_{\gamma\gamma}, n^f \rangle = R \neq 0$$

olduğu görülür. Böylece γ -parametre eğrileri asimptotik eğri olamaz.

Teorem. 4.2.10: $\phi(s, \theta)$ Frenet çatılı regüler bir tüp yüzeyi, $c(s)$ bu yüzeyin merkez eğrisi ve bu tüp yüzeyinin $\lambda_1 = 0$ şartı dahilinde sabit sırt uzaklıklı yüzeyi $\psi(s, \gamma)$ olsun. $\psi(s, \gamma)$ nın s -parametre eğrilerinin geodezik eğri olmaları için gerek ve yeter şart $c(s)$ merkez eğrisinin eğriliklerinin

$$\begin{aligned} & \sqrt{(r - \lambda_3)^2 + \lambda_2^2} \left(\frac{r - \lambda_3}{\sqrt{(r - \lambda_3)^2 + \lambda_2^2}} \cos\theta - \frac{\lambda_2}{\sqrt{(r - \lambda_3)^2 + \lambda_2^2}} \sin\theta \right)^2 \kappa^2 \\ & - 2 \left(\frac{r - \lambda_3}{\sqrt{(r - \lambda_3)^2 + \lambda_2^2}} \cos\theta - \frac{\lambda_2}{\sqrt{(r - \lambda_3)^2 + \lambda_2^2}} \sin\theta \right) \kappa \\ & + \sqrt{(r - \lambda_3)^2 + \lambda_2^2} \tau^2 = c \end{aligned}$$

denklemini sağlamasıdır ($c \in \mathbb{R}$).

İspat: M yüzeyi üzerinde ki bir α eğrisinin geodezik olması için α'' vektörü ile yüzey normalinin lineer bağımlı olması gerekir. Buna göre, bu vektörlerin lineer bağımlı olması demek, n yüzey normalini göstermek üzere, $n \times \alpha'' = 0$ olması demektir.

O halde (4.39) ve (4.40) ifadelerinden

$$\begin{aligned} n^f \times \psi_{ss} &= (\kappa \sin\gamma - R\kappa^2 \sin\gamma \cos\gamma - R\tau')T + (R\kappa' \sin\gamma \cos\gamma - R\kappa\tau \sin^2\gamma)N \\ &+ (-R\kappa' \cos^2\gamma + R\kappa\tau \sin\gamma \cos\gamma)B \end{aligned}$$

vektörel çarpımı elde edilir. Buradan s -parametre eğrilerinin geodezik eğri olmaları için

$$\kappa \sin\gamma - R\kappa^2 \sin\gamma \cos\gamma - R\tau' = 0$$

$$R\kappa' \sin\gamma \cos\gamma - R\kappa\tau \sin^2\gamma = 0$$

$$-R\kappa' \cos^2 \gamma + R\kappa\tau \sin\gamma \cos\gamma = 0$$

eşitliklerinin sağlanması gerekir. Bu denklem sisteminin çözümünden

$$\kappa' \cos\gamma - R\kappa\kappa' \cos^2 \gamma - R\tau\tau' = 0$$

eşitliği elde edilir. Her iki tarafın integrali alınırsa,

$$R\kappa^2 \cos^2 \gamma - 2\kappa\cos\gamma + R\tau^2 = c$$

bulunur. Son olarak, R ve $\cos\gamma$ değerlerini yerlerine yazarsak,

$$\begin{aligned} & \sqrt{(r - \lambda_3)^2 + \lambda_2^2} \left(\frac{r - \lambda_3}{\sqrt{(r - \lambda_3)^2 + \lambda_2^2}} \cos\theta - \frac{\lambda_2}{\sqrt{(r - \lambda_3)^2 + \lambda_2^2}} \sin\theta \right)^2 \kappa^2 \\ & - 2 \left(\frac{r - \lambda_3}{\sqrt{(r - \lambda_3)^2 + \lambda_2^2}} \cos\theta - \frac{\lambda_2}{\sqrt{(r - \lambda_3)^2 + \lambda_2^2}} \sin\theta \right) \kappa \\ & + \sqrt{(r - \lambda_3)^2 + \lambda_2^2} \tau^2 = c \end{aligned}$$

olur.

Sonuç 4.2.11: $\phi(s, \theta)$ Frenet çatılı regüler bir tüp yüzeyi, $c(s)$ bu yüzeyin merkez eğrisi ve bu tüp yüzeyinin paralel yüzeyi $\psi(s, \gamma)$ olsun. $\psi(s, \gamma)$ nın s -parametre eğrilerinin geodezik eğri olmaları için gerek ve yeter şart $c(s)$ merkez eğrisinin eğriliklerinin

$$(r - \lambda_3) \cos^2 \theta \kappa^2 - 2\cos\theta\kappa + (r - \lambda_3)\tau^2 = c$$

denlemini sağlamasıdır.

Önerme 4.2.12: $\phi(s, \theta)$ Frenet çatılı regüler bir tüp yüzeyi, $c(s)$ bu yüzeyin merkez eğrisi ve bu tüp yüzeyinin $\lambda_1 = 0$ şartı dahilinde sabit sırt uzaklıklı yüzeyi $\psi(s, \gamma)$ olsun. $\psi(s, \gamma)$ nın γ -parametre eğrileri geodeziktir.

İspat: M yüzeyi üzerinde ki bir α eğrisinin geodezik olması için α'' vektörü ile yüzey normalinin lineer bağımlı olması gerekir. Buna göre, bu vektörlerin lineer bağımlı olması demek, n yüzey normalini göstermek üzere, $n \times \alpha'' = 0$ olması demektir. O halde (4.39) ve (4.41) değerlerinin vektörel çarpımı

$$n^f \times \psi_{\gamma\gamma} = 0$$

olduğundan γ -parametre eğrileri birer geodeziktir.

4.3. Regle Yüzeyin Sabit Sırt Uzaklıklı Yüzeyi

Bu bölümde regle yüzeyin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi elde edilerek, elde edilen bu yüzeyin hangi durumda regle yüzey olduğu gösterilecektir. Sonra silindir yüzeyi için aynı durum ele alınarak eğrilikleri hesaplanacak ve daha sonra silindir yüzeyinin eğrilikleri ile sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin eğrilikleri arasında bağıntılar kurulacaktır.

4.3.1. Regle yüzeyin sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin ifadesi

Tanım. 4.3.1: E^3 de bir regle yüzey;

$$\begin{aligned} \phi(\alpha, X): I \times E &\rightarrow E^3 \\ (u, v) &\rightarrow \phi(\alpha, X)(u, v) = \alpha(u) + vX(u) \end{aligned}$$

dönüşümü ile tanımlanır. Burada $\alpha: I \rightarrow E^3, X: I \rightarrow E^3 \setminus \{0\}$ diferensiyellenebilir dönüşümler ve I bir açık aralıktır. α ya dayanak eğrisi ve X e doğrultman eğri denir. $v \rightarrow \alpha(u) + vX(u)$ doğrularına ana doğrular denir.

Eğer $\phi(u, v) = \alpha(u) + vX(u)$ biçimindeki bir regle yüzey için $X(u)$ sabit ise regle yüzey genel silindir yüzeyi olarak isimlendirilir. Genel bir silindir $\alpha'(u) \times X(u) \neq 0$ olmak üzere regüler bir yüzeydir.

$\phi(u, v) = \alpha(u) + vX(u)$ biçiminde tanımlı regle yüzeyin $\{\phi_u, \phi_v, n_P\}$ bazına göre, sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin denklemi

$$\psi(u, v) = \phi(u, v) + \lambda_1 \phi_u(u, v) + \lambda_2 \phi_v(u, v) + \lambda_3 n_P(u, v)$$

$$\psi(u, v) = \alpha(u) + vX(u) + \lambda_1(\alpha'(u) + vX'(u)) + \lambda_2 X(u) + \lambda_3 \frac{\phi_u \times \phi_v}{\|\phi_u \times \phi_v\|} \quad (4.59)$$

şeklindedir. Burada n_P vektörü regle yüzeyin herhangi bir P noktasındaki yüzey normalidir ve

$$n_P = \frac{\phi_u \times \phi_v}{\|\phi_u \times \phi_v\|} = \frac{[\alpha'(u), X(u)] + v[X'(u), X(u)]}{\|[\alpha'(u), X(u)] + v[X'(u), X(u)]\|}$$

biçiminde hesaplanır.

Eğer α dayanak eğrisi yay parametresi ile alınır ve yüzeyin birim normali n olmak üzere, $T = \alpha'(u)$ için $\langle T, X \rangle = 0$ olacak şekilde bir X vektörü seçilirse, $\{T, X, n\}$ sistemi α boyunca bir ortonormal sistem oluşturur.

Lemma 4.3.2: M regle yüzeyinin dayanak eğrisi, her bir noktasında bu noktadan geçen ana doğruya dik olacak biçimde birim hızlı bir eğri olsun. Bu durumda

$$a = \langle T', X \rangle$$

$$b = \langle T', n \rangle$$

$$c = \langle X', n \rangle$$

olmak üzere,

$$T' = aX + bn \quad (4.60)$$

$$X' = -aT + cn \quad (4.61)$$

$$n' = -bT - cX \quad (4.62)$$

dir (Hacısalihoğlu 1983).

Bu durumda Lemma 4.3.2'deki (4.60), (4.61) ve (4.62) değerleri (4.59) da yerlerine yazılırsa regle yüzeyin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi

$$\begin{aligned} \psi(u, v) = & \alpha(u) + \left(\lambda_1 - av\lambda_1 - \frac{\lambda_3 cv}{\sqrt{(1-av)^2 + c^2v^2}} \right) T + (v + \lambda_2)X \\ & + \left(cv\lambda_1 + \frac{\lambda_3(1-av)}{\sqrt{(1-av)^2 + c^2v^2}} \right) n \end{aligned} \quad (4.63)$$

şeklinde bulunur.

Örnek 4.3.3: $\gamma(s) = \left(a \cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), a \sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$ birim hızlı dairesel helisini gözönüne alalım. $u = \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ve $X(s) = \left(-\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0 \right)$ olmak üzere

$$\phi(s, t) = \gamma(s) + tX(s)$$

$$\begin{aligned} \phi(u, t) &= (a \cos u, a \sin u, bu) + t(-\cos u, -\sin u, 0) \\ &= ((a-t)\cos u, (a-t)\sin u, bu) \end{aligned}$$

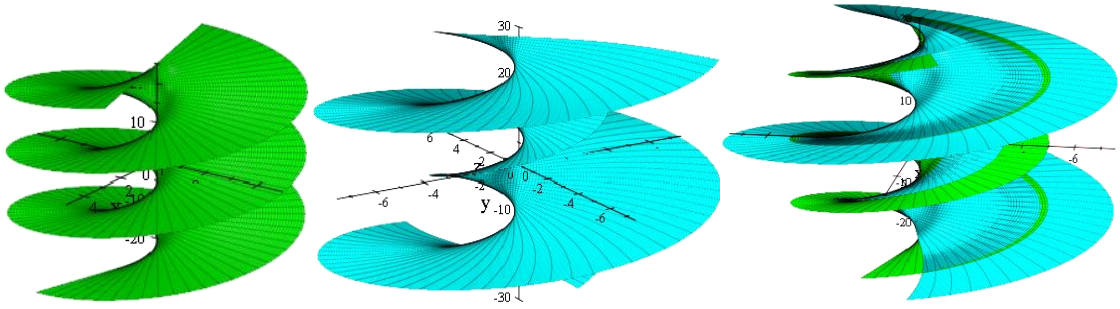
$$\phi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, bu)$$

helikoidi elde edilir. Bu helikoidin sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin denklemi

$$\begin{aligned} \psi(u, v) = & \left((v + \lambda_2)\cos u - \left(\frac{\lambda_1 v + \lambda_3 b}{\sqrt{v^2 + b^2}} \right) \sin u, (v + \lambda_2)\sin u \right. \\ & \left. + \left(\frac{\lambda_1 v + \lambda_3 b}{\sqrt{v^2 + b^2}} \right) \cos u, \frac{\lambda_1 b - \lambda_3 v}{\sqrt{v^2 + b^2}} + bu \right) \end{aligned} \quad (4.64)$$

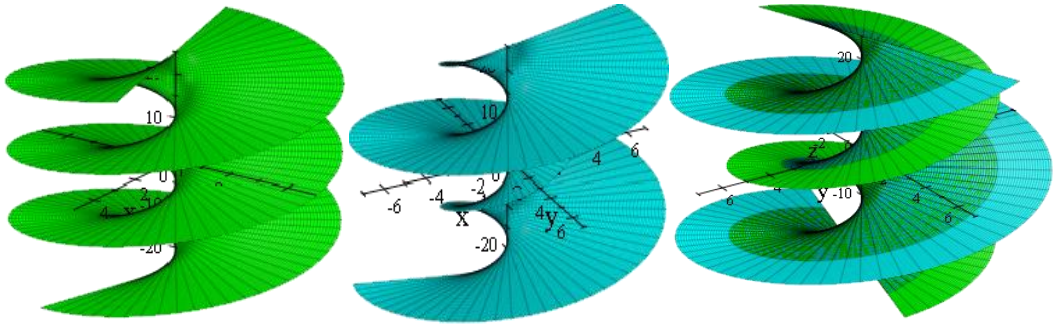
biçimindedir.

Helikoidin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi için elde ettiğimiz (4.64) denklemde $b = 5$ ve $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 1$ alınırsa, grafiği aşağıdaki gibi olur.



Şekil 4.7. Helikoid ve $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 1$ değerleri için sabit sırt uzaklıklı yüzeyi

Eğer, $b = 5$ ve $\lambda_1 = \lambda_3 = 0, \lambda_2 = 2$ değerleri (4.64) denkleminde yazılırsa grafik aşağıdaki gibi olur.



Şekil 4.8. Helikoid ve $\lambda_2 = 2$ değeri için sabit sırt uzaklıklı yüzeyi

Buradan görülebilirki helikoidin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi helikoid olmadığı halde $\lambda_2 = 2$ değeri için sabit sırt uzaklıklı yüzeyi aynı helikoidi verir. Bu örnekten aşağıdaki sonuç çıkarılabilir:

Sonuç 4.3.4: Regle yüzeyin $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$ şartı dahilindeki sabit sırt uzaklıklı yüzeyide aynı regle yüzeyi ifade eder.

İspat: $\phi(u, v) = \alpha(u) + vX(u)$ parametrizasyonu ile verilen regle yüzeyin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi için elde edilen (4.63) eşitliğinde $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$ alındığı takdirde,

$$\psi(u, v) = \alpha(u) + (v + \lambda_2)X$$

elde edilir. Burada λ_2 sabit olduğundan, bu ifade aynı regle yüzeyi ifade eder.

Sonuç 4.3.5: Regle yüzeyin dağılma parametresi ile $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$ şartı dahilindeki sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin dağılma parametresi aynıdır.

İspat: Tanım 3.5.4 de (3.38) eşitliğinden $X(s, v) = \alpha(s) + vd(s)$ için (s, α nın yay parametresi) dağılma parametresinin

$$\lambda_d = \frac{\det(T, d, d')}{\|d'\|^2}$$

olarak hesaplandığı biliniyor. Buna göre hem regle yüzeyin hem de $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$ şartı dahilindeki sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin X doğrultmanları aynı olduğundan, dağılma parametreleri aynıdır.

Teorem 4.3.6: Dayanak eğrisi parametre eğrisi olarak seçilen regle yüzeyin sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin de regle yüzey olması için gerek ve yeter şart regle yüzeyin silindir yüzeyi olmasıdır.

İspat: Dayanak eğrisi $\alpha(u)$ ve doğrultu vektörü de $X(u)$ olan bir M regle yüzeyinin denklemi,

$$\phi(u, v) = \alpha(u) + vX(u)$$

şeklinde olsun. Bu yüzeyin dayanak eğrisi birinci parametre eğrisi olarak seçildiği takdirde

$$\phi_u = \alpha'(u) = T$$

olur. Burada

$$\phi_u = \alpha'(u) + vX'(u) = (1 - av)T + cvn$$

olarak hesaplanır. $\phi_u = \alpha'(u) = T$ olduğu göz önüne alınırsa, $1 - av = 1$ ve $cv = 0$ eşitlikleri elde edilir. Burada v , regle yüzeyin ikinci parametre eğrisinin yay parametresi olduğundan, $a = 0$ ve $c = 0$ değerleri elde edilir. Bu değerler daha önce elde edilen regle yüzeyin sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin parametrik denklemi olan (4.63) denkleminde yazılırsa

$$\psi(u, v) = \alpha(u) + \lambda_1 T + \lambda_2 X + \lambda_3 n + vX \quad (4.65)$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$\beta(u) = \alpha(u) + \lambda_1 T + \lambda_2 X + \lambda_3 n$$

olarak alınabilir. Bu durumda β eğrisi, α eğrisinin sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntüsü olduğundan

$$\psi(u, v) = \beta(u) + vX(u) \quad (4.66)$$

yazılabilir. Elde edilen (4.66) eşitliği M regle yüzeyinin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi olan M^f yüzeyinin ifadesidir. Bu yüzey bir regle yüzey ifadesidir. Burada $a = 0$ ve $c = 0$ olduğundan, Lemma 4.3.2 de ki (4.61) e göre $X'(u) = 0$ olup, X sabittir. O halde, X sabit olduğuna göre (4.66) ifadesi aynı zamanda bir silindirik yüzey denklemini ifade eder. Yani M bir silindir yüzeyi olur.

Tersine, M bir silindir yüzeyi olsun. Bu durumda M^f in regle yüzey olacağı aşikârdır. Dolayısıyla bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 4.3.7: Silindirik bir yüzeyin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi de silindirik bir yüzeydir.

Şimdi silindir yüzeyinin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi üzerinde durulacaktır.

4.3.2. Silindir yüzeyinin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi

Dayanak eğrisi $\alpha(u)$ ve doğrultu vektörü de $X(u)$ olan regle yüzeyin denklemi,

$$\phi(u, v) = \alpha(u) + vX(u)$$

biçiminde ifade edilmişti. Silindir yüzeyi aynı zamanda bir regle yüzey olduğundan regle yüzey denkleminde X doğrultu vektörü sabit alınarak bir silindir yüzeyi elde edilebilir. Silindir yüzeyinin sabit sırt uzaklıklı yüzeyini bulmak için regle yüzeyin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi elde edilirken yapılan benzer işlemlerle yine (4.63) denklemi elde edilir.

Fakat burada, X doğrultmanı sabit olduğundan, Lemma 4.3.2 de ki (4.61) e göre, $X' = -aT + cn = 0$ olup T ve n lineer bağımsız olduklarından $a = c = 0$ bulunur. Bu değerler (4.63) de yerine yazılırsa (4.65) ve daha sonra (4.66) eşitliği bulunur. Buradan hareketle Sonuç 4.3.7 de belirtildiği gibi silindir yüzeyinin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi de yine bir silindir yüzeyi olarak bulunmuş olur.

Ayrıca Lemma 4.3.2 deki (4.60), (4.61) ve (4.62) eşitlikleri de

$$T' = bn \quad (4.67)$$

$$X' = 0 \quad (4.68)$$

$$n' = -bT \quad (4.69)$$

olarak yeniden elde edilir.

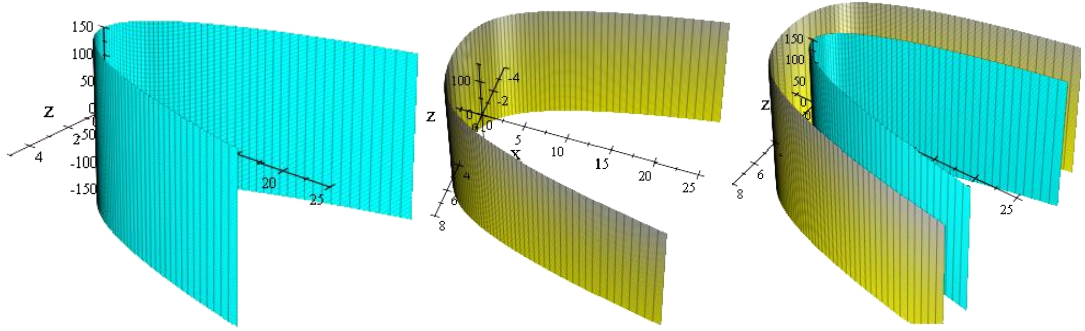
Örnek 4.3.8: E^3 de

$$\phi(u, v) = (u, u^2, v)$$

denklemleri ile verilen silindirin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi

$$\psi(u, v) = \left(u + \lambda_1 \frac{1}{\sqrt{1+4u^2}} + \lambda_3 \frac{2u}{\sqrt{1+4u^2}}, u^2 + \lambda_1 \frac{2u}{\sqrt{1+4u^2}} - \frac{\lambda_3}{\sqrt{1+4u^2}}, v + \lambda_2 \right)$$

biçiminde hesaplanır. Bu durumda silindir yüzeyinin ve $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ ve $\lambda_3 = 3$ değerleri için sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin şekilleri aşağıdaki gibidir:



Şekil 4.9. Silindir yüzeyi ve onun sabit sırt uzaklıklı yüzeyi

Şimdi de silindir yüzeyinin sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri ile silindir yüzeyinin Gauss ve ortalama eğriliklerini karşılaştıralım.

Dayanak eğrisi $\alpha(u)$ ve sabit doğrultu vektörü de $X(u)$ olan silindir yüzeyinin denklemi,

$$\phi(u, v) = \alpha(u) + vX$$

ve sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin denklemi de,

$$\psi(u, v) = \alpha(u) + \lambda_1 T + \lambda_2 X + \lambda_3 n + vX$$

olsun. Buna göre u ve v ye göre kısmi türevler alınır ve (4.67), (4.68) ve (4.69) eşitlikleri türev değerlerinde yerlerine yazılırsa

$$\psi_u = T + \lambda_1 bn + \lambda_3(-bT) = (1 - \lambda_3 b)T + \lambda_1 bn$$

$$\psi_v = X$$

olur. Böylece,

$$E = \langle \psi_u, \psi_u \rangle = (1 - \lambda_3 b)^2 + \lambda_1^2 b^2 \quad (4.70)$$

$$F = \langle \psi_u, \psi_v \rangle = 0 \quad (4.71)$$

$$G = \langle \psi_v, \psi_v \rangle = 1 \quad (4.72)$$

ve

$$\psi_{uu} = (-\lambda_1 b^2 - \lambda_3 b')T + (b - \lambda_3 b^2 + \lambda_1 b')n$$

$$\psi_{uv} = \psi_{vu} = 0$$

$$\psi_{vv} = 0$$

$$n^f = \frac{\psi_u \times \psi_v}{\|\psi_u \times \psi_v\|} = \frac{-\lambda_1 b T + (1 - \lambda_3 b)n}{\sqrt{(1 - \lambda_3 b)^2 + \lambda_1^2 b^2}} \quad (4.73)$$

olmak üzere

$$e = \langle \psi_{uu}, n \rangle = \frac{\lambda_1 b (\lambda_1 b^2 + \lambda_3 b') + b(1 - \lambda_3 b)^2 + \lambda_1 b'(1 - \lambda_3 b)}{\sqrt{(1 - \lambda_3 b)^2 + \lambda_1^2 b^2}} \quad (4.74)$$

$$f = \langle \psi_{uv}, n \rangle = 0 \quad (4.75)$$

$$g = \langle \psi_{vv}, n \rangle = 0 \quad (4.76)$$

eşitlikleri elde edilir.

Bilindiği gibi silindir yüzeyinin Gauss eğriliği

$$K = 0 \quad (4.77)$$

dır. Daha önce belirtildiği gibi silindir yüzeyinin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi de silindir yüzeyi olduğundan onunda Gauss eğriliğinin (4.70), (4.71), (4.72), (4.74), (4.75) ve (4.76) eşitliklerinden

$$K^f = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = 0 \quad (4.78)$$

olduğu görülür. Silindir yüzeyinin ortalama eğriliği ise

$$H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)} = b \quad (4.79)$$

dir. Sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin ortalama eğriliği ise yine (4.70), (4.71), (4.72), (4.74), (4.75) ve (4.76) eşitliklerinden

$$H^f = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)} = \frac{b + \lambda_1 b' - 2\lambda_3 b^2 + (\lambda_1^2 + \lambda_3^2)b^3}{(\sqrt{(1 - \lambda_3 b)^2 + (\lambda_1 b)^2})^3} \quad (4.80)$$

olarak hesaplanır.

Bu durumda aşağıdaki teorem ifade edilebilir:

Teorem 4.3.9: Silindir yüzeyi ile silindir yüzeyinin sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri arasındaki bağıntı

$$K^f = K = 0 \quad (4.81)$$

$$H^f = \frac{H - 2\lambda_3 H^2 + (\lambda_1^2 + \lambda_3^2)H^3}{((1 - \lambda_3 H)^2 + \lambda_1^2 H^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (4.82)$$

biçiminde olur.

İspat: Silindir yüzeyi ve onun sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri (4.77), (4.78), (4.79) ve (4.80) eşitlikleri ile gösterilmiştir. Bu eşitlikler yardımıyla kolaylıkla (4.81) ve (4.82) eşitlikleri elde edilebilir.

Sonuç 4.3.10: Silindir yüzeyi için $\kappa_1 = b = H$ olup, sabit sırt uzaklıklı yüzeyi içinde bu durum korunup, $\kappa_1^f = H^f$ dir.

4.3.3. Silindir yüzeyinin α dayanak eğrisinin sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntüsü

Yay parametresi ile verilmiş olan dayanak eğrisi $\alpha(u)$ ve sabit doğrultu vektörü de $X(u)$ olan silindir yüzeyinin denklemi,

$$\phi(u, v) = \alpha(u) + vX$$

ve sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin denklemi de,

$$\psi(u, v) = \alpha(u) + \lambda_1 T + \lambda_2 X + \lambda_3 n + vX$$

olarak verilsin. Bu durumda

$$\beta(u) = \alpha(u) + \lambda_1 T + \lambda_2 X + \lambda_3 n \quad (4.83)$$

eğrisi α eğrisinin sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntüsü olarak ele alınabilir.

Böylece sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki β eğrisinin herhangi bir noktasındaki ortonormal $\{T^f, X^f, n^f\}$ çatısı oluşturulabilir. Bunun için

$$\beta'(u) = \alpha'(u) + \lambda_1 T' + \lambda_2 X' + \lambda_3 n'$$

türevinde (4.67), (4.68) ve (4.69) eşitlikleri kullanılırsa

$$\beta'(u) = T + \lambda_1 bn - \lambda_3 bT = (1 - \lambda_3 b)T + \lambda_1 bn$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca,

$$\|\beta'(u)\| = \sqrt{(1 - \lambda_3 b)^2 + (\lambda_1 b)^2}$$

olur. O halde,

$$T^f = \frac{\beta'(s)}{\|\beta'(s)\|} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \lambda_3 b)^2 + (\lambda_1 b)^2}} ((1 - \lambda_3 b)T + \lambda_1 bn)$$

olarak bulunur. Diğer taraftan, silindir yüzeyinin sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin denklemi

$$\psi(u, v) = \alpha(u) + \lambda_1 T + \lambda_2 X + \lambda_3 n + vX$$

olduğundan, bu yüzey üzerindeki baz vektörler yine (4.67), (4.68) ve (4.69) yardımıyla

$$\psi_u = T + \lambda_1 bn + \lambda_3(-bT) = (1 - \lambda_3 b)T + \lambda_1 bn$$

$$\psi_v = X$$

şeklinde ifade edilebilir. Yüzeyin birim normali ise

$$n^f = \frac{\psi_u \times \psi_v}{\|\psi_u \times \psi_v\|} = \frac{-\lambda_1 b T + (1 - \lambda_3 b)n}{\sqrt{(1 - \lambda_3 b)^2 + \lambda_1^2 b^2}}$$

olur. Yine vektörel çarpımla;

$$X^f = n^f \times T^f = \frac{-\lambda_1 b T + (1 - \lambda_3 b)n}{\sqrt{(1 - \lambda_3 b)^2 + \lambda_1^2 b^2}} \times \frac{((1 - \lambda_3 b)T + \lambda_1 b n)}{\sqrt{(1 - \lambda_3 b)^2 + (\lambda_1 b)^2}}$$

$$X^f = X$$

bulunur.

Teorem 4.3.11: M , E^3 de bir silindir yüzey ve M^f de bu yüzeyin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi olsun. M yüzeyi üzerinde yatan $\alpha(u)$ dayanak eğrisinin, sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntüsü $\beta(u)$ eğrisi olduğuna göre, (α, M) ve (β, M^f) eğri-yüzey ikililerinin çatıları arasındaki ilişki,

$$T^f = \frac{(1 - \lambda_3 b)T + \lambda_1 b n}{\sqrt{(1 - \lambda_3 b)^2 + (\lambda_1 b)^2}}$$

$$X^f = X$$

$$n^f = \frac{-\lambda_1 b T + (1 - \lambda_3 b)n}{\sqrt{(1 - \lambda_3 b)^2 + \lambda_1^2 b^2}}$$

biçimindedir.

Şimdi, E^3 de silindir yüzeyinin α dayanak eğrisinin sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntüsü β eğrisi olmak üzere, (β, M^f) eğri-yüzey ikilisinin sırasıyla, geodezik eğriliği κ_g^f , normal eğriliği κ_n^f ve geodezik burulması t_r^f eğrilikleri hesaplanacaktır:

Hesaplamayı yapabilmek için Teorem 2.3.5 de ki,

$$\kappa_n = \frac{1}{v^2} \langle \alpha'', n \rangle$$

$$\kappa_g = \frac{1}{v^2} \langle \alpha'', X \rangle$$

$$t_r = -\frac{1}{v} \langle n', X \rangle$$

formülleri kullanılacaktır. Öyleyse (4.83) ile ifade edilen β eğrisinin türevi alınır ve (4.67), (4.68) ve (4.69) eşitlikleri de kullanılırsa

$$\beta'(u) = T + \lambda_1 b n - \lambda_3 b T = (1 - \lambda_3 b)T + \lambda_1 b n$$

bulunur. Aynı şekilde ikinci türev alınarak

$$\beta''(u) = T' + \lambda_1 b' n + \lambda_1 b n' - \lambda_3 b' T - \lambda_3 b T'$$

$$\beta''(u) = (-\lambda_1 b^2 - \lambda_3 b')T + (b + \lambda_1 b' - \lambda_3 b^2)n$$

eşitliği elde edilir. Böylece

$$\kappa_g^f = \frac{1}{\|\beta'(u)\|^2} \langle \beta''(u), X^f \rangle$$

$$\kappa_g^f = \frac{1}{(1 - \lambda_3 b)^2 + (\lambda_1 b)^2} \langle (-\lambda_1 b^2 - \lambda_3 b')T + (b + \lambda_1 b' - \lambda_3 b^2)n, X \rangle$$

$$\kappa_g^f = 0$$

olarak bulunur. Normal eğrilik ise

$$\kappa_n^f = \frac{1}{\|\beta'(u)\|^2} \langle \beta''(u), n^f \rangle$$

$$\kappa_n^f = \left\langle \frac{(-\lambda_1 b^2 - \lambda_3 b')T + (b + \lambda_1 b' - \lambda_3 b^2)n}{(1 - \lambda_3 b)^2 + (\lambda_1 b)^2}, \frac{-\lambda_1 b T + (1 - \lambda_3 b)n}{\sqrt{(1 - \lambda_3 b)^2 + \lambda_1^2 b^2}} \right\rangle$$

$$\kappa_n^f = \frac{(-\lambda_1 b^2 - \lambda_3 b')\lambda_1 b - (1 - \lambda_3 b)(b + \lambda_1 b' - \lambda_3 b^2)}{((1 - \lambda_3 b)^2 + (\lambda_1 b)^2)\sqrt{(1 - \lambda_3 b)^2 + \lambda_1^2 b^2}}$$

$$\kappa_n^f = \frac{b + \lambda_1 b' - 2\lambda_3 b^2 + (\lambda_1^2 + \lambda_3^2)b^3}{(\sqrt{(1 - \lambda_3 b)^2 + (\lambda_1 b)^2})^3}$$

olarak hesaplanır. Son olarak geodezik burulma ise

$$t_r^f = -\frac{1}{\|\beta'(u)\|} \langle n^{f'}, X^f \rangle$$

$$t_r^f = -\frac{1}{\sqrt{(1 - \lambda_3 b)^2 + (\lambda_1 b)^2}} \left\langle \left(\frac{-\lambda_1 b T + (1 - \lambda_3 b)n}{\sqrt{(1 - \lambda_3 b)^2 + \lambda_1^2 b^2}} \right)', X \right\rangle$$

$$t_r^f = 0$$

bulunur.

Teorem 4.3.12: M, E^3 de bir silindir yüzey ve M^f de bu yüzeyin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi olsun. M yüzeyi üzerinde yatan $\alpha(u)$ dayanak eğrisinin sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntüsü $\beta(u)$ eğrisi olduğuna göre, (β, M^f) eğri-yüzey ikilisinin sırasıyla, $\kappa_g^f, \kappa_n^f, t_r^f$ eğrilikleri,

$$\kappa_g^f = 0$$

$$\kappa_n^f = \frac{b + \lambda_1 b' - 2\lambda_3 b^2 + (\lambda_1^2 + \lambda_3^2)b^3}{(\sqrt{(1 - \lambda_3 b)^2 + (\lambda_1 b)^2})^3}$$

$$t_r^f = 0$$

biçimindedir.

Yukarıda ki teoremden şu sonuçlar çıkarılabilir:

Sonuç 4.3.13: E^3 de ki bir M silindir yüzeyi üzerinde ki α dayanak eğrisinin geodezik eğri olması, M^f sabit sırt uzaklıklı yüzeyi üzerindeki resmi olan β eğrisinin de geodezik eğri olması demektir.

Sonuç 4.3.14: E^3 de ki bir M silindir yüzeyi üzerinde ki α dayanak eğrisinin birinci eğriliği normal eğriliğe eşittir. Aynı şekilde bu eğrinin M^f sabit sırt uzaklıklı yüzeyi üzerindeki resmi olan β eğrisinde birinci eğriliğinin normal eğriliğine eşit olduğu görülür.

Sonuç 4.3.15: E^3 de ki bir M silindir yüzeyi üzerinde ki α dayanak eğrisinin geodezik burulması $t_r = 0$ olduğundan eğrilik çizgisidir. Benzer şekilde, $t_r^f = 0$ olması, bu eğrinin M^f sabit sırt uzaklıklı yüzeyi üzerindeki resmi olan β eğrisinin de eğrilik çizgisi olduğunu ifade eder.

Sonuç 4.3.16: E^3 de ki bir M silindir yüzeyi üzerinde ki α dayanak eğrisinin M nin sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntüsü olan β eğrisinin asimptotik eğri olması için gerek ve yeter şart α eğrisinin asimptotik olmasıdır.

5. SONUÇ

Yapılan bu çalışmada, ilk olarak Öklid uzayda dönele yüzeyler ele alınmıştır.

$$\phi(t, \theta) = (r(t)\cos\theta, r(t)\sin\theta, h(t))$$

parametrizasyonuna sahip olan bir dönele yüzeyin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi elde edilerek, elde edilen bu sabit sırt uzaklıklı yüzeyinde bir dönele yüzey olduğu ispatlanmıştır. $\phi(t, \theta)$ parametrizasyonuna sahip olan bir dönele yüzeyin

$$\psi(t, \theta) = \phi(t, \theta) + \lambda_1 T + \lambda_2 X + \lambda_3 n$$

sabit sırt uzaklıklı yüzeyinde $\lambda_2 = 0$ seçilerek elde edilen dönele yüzeyin sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin Gauss, ortalama eğrilik ve asli eğrilikleri hesaplanmış ve dönele yüzeyin eğrilikleri ile karşılaştırılarak aralarında bağıntılar kurulmuştur. Buna ilaveten bu durumda asli eğrilik doğrultusu olma özelliğinin korunduğu sonucuna varılmıştır. Ayrıca dönele yüzey üzerindeki meridyen (boylam) eğrilerinin ve paralel dairelerin dönele yüzeyin sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntüleri elde edilmiştir. Bu eğrilerden meridyen eğrilerinin sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntü eğrileri için eğri-yüzey ikilisinin eğrilikleri bulunup, meridyen eğrisinin eğri-yüzey ikilisinin eğrilikleri ile karşılaştırılmıştır ve sonuç olarak geodezik eğrilik, eğrilik çizgisi olma özelliklerinin korunduğu gösterilmiştir. Daha özel olarak, $\lambda_2 = 0$ şartına ilaveten $\lambda_3 = 0$ alınarak paralel yüzey için daha özel sonuçlar elde edilmiştir. Bu bölümde son olarak meridyen eğrisinin bir P noktasındaki eğrilik çemberinin merkezi ile meridyen eğrisinin sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntüsünün $f(P)$ noktasındaki eğrilik çemberinin merkezinin kesişme şartı bulunmuştur.

İkinci olarak Frenet çatılı bir tüp yüzeyinin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi elde edilmiştir. Bu yüzeyin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi için $\lambda_1 = 0$ şartı alınarak merkez eğrisi değişmeyen yeni bir tüp yüzeyi elde edilmiştir. Elde edilen bu yeni tüp yüzeyinin birinci ve ikinci esas form katsayıları, Gauss ve ortalama eğrilikleri ve asli eğrilikleri hesaplanmıştır. Bu hesaplamalarla elde edilen eğriliklerle önceki durumdaki eğrilikler arasında bağıntılar

kurulmuştur. Sonra dönele yüzeylerde ki duruma benzer şekilde $\lambda_1 = 0$ şartına ilaveten $\lambda_2 = 0$ alınarak paralel yüzey için daha özel sonuçlar verilmiştir. Daha sonra yine $\lambda_1 = 0$ için elde edilen $\phi(s, \theta)$ parametrizasyonuna sahip olan Frenet çatılı tüp yüzeyinin sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin parametre eğrileri incelenmiştir. Bu parametre eğrilerinin ne zaman eğrilik çizgisi olacağı gösterilmiş ve yine bu şart altında aynı parametre eğrilerinin birer asimptotik eğri olup olamayacakları, eğer asimptotik iseler hangi şart altında olacakları ispatlanmıştır. Benzer durum parametre eğrilerinin geodezikliği için de gösterilmiştir.

Üçüncü ve son olarak, regle yüzeyler ele alınmış ve regle yüzeyin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi bulunmuştur. Bu durumda elde edilen sabit sırt uzaklıklı yüzeyin regle yüzey olması için gerekli ve yeterli koşul iki farklı şekilde ortaya çıkmıştır. Birincisi, regle yüzeyin sabit sırt uzaklıklı yüzey ifadesinde $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$ alınmasıyla regle yüzey elde edilebileceği gösterilmiştir. Aslında bu durumda regle yüzeyin yine kendisi elde edilmiştir. İkinci olarak, dayanak eğrisi parametre eğrisi olan regle yüzeyin sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin regle yüzey olması için gerek ve yeter şartın silindir yüzeyi olması gerektiği ispat edilmiştir. Böylece silindir yüzeyinin sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin de silindir yüzeyi olduğu görülmüş ve yine eğrilikleri hesab edilerek önceki durumdaki eğrilikleri ile arasındaki ilişkiler gösterilmiştir. Son olarak silindir yüzeyinin dayanak eğrisinin sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki; yani yeni elde edilen silindir yüzeyi üzerinde ki görüntüsü bulunmuştur. Bu görüntü eğrisi için Darboux çatısı elde edilerek $\kappa_g^f, \kappa_n^f, t_r^f$ eğrilikleri hesab edilmiştir. Sonuç olarak görüntü eğrisinin geodezikliği ve eğrilik çizgisi olma özelliğinin korunduğu görülmüştür. Ayrıca normal eğriliğin görüntü eğrisinin eğriliğine eşit olduğu sonucu ortaya çıkmıştır.

KAYNAKLAR

- Aktan, N., Görgülü, A., Özüsağlam, E., Ekici, C., 2006. Conjugate Tangent Vectors and Asymptotic Directions for Surfaces at a Constant Distance From Edge of Regression on a Surface. IJPAM, 33, No. 1, 127-133.
- Aktan, N., Özüsağlam, E., Görgülü, A., 2009. The Euler Theorem and Dupin Indicatrix for Surfaces at a Constant Distance From Edge of Regression on a Surface. International J. of Appl. Mathematics&Statistics, 14, No.S09, 37-43.
- Banchoff, T., Lovett, S., 2010. Differential Geometry of Curves and Surfaces. Taylor and Francis Group, USA
- Çakmak, A., Tarakcı, Ö., 2016. The Image Curves on Surfaces at a Constant Distance from the Edge of Regression on a Surface of Revolution, International Journal of Mathematics and Computation, 27(1), 74-85.
- Do Carmo, M.P., 1976. Differential Geometry of Curves and Surfaces. Prentice-Hall, 503p., New Jersey.
- Gray, A., 1998. Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica. Second ed. CrcPress, 1053 p., USA.
- Hacısalıhoğlu, H. H. 1968. On The Motion of The Frenet Thrihedron of a Space Curve. Comm. Fac. Sci. Univ. Ankara. pp: 33-55.
- Hacısalıhoğlu, H. H., 1983. Diferensiyel Geometri. İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları Mat. No: 2, 895s., Ankara.
- Hicks, N. J. 1971. Notes On Differential Geometry. Van Nostrand Reinhold Company, London.
- Kazaz, M., Uğurlu, H. H., Önder, M., Kahraman, T., 2010. Mannheim Partner D-Curves in Euclidean 3-space. 5. Ankara Matematik Günleri, Ankara.
- Kızıltuğ, S., Tarakcı Ö. and Yaylı Y., 2013. On the curves lying on parallel surfaces in Euclidean 3-space E^3 . Journal of Advanced Research in Dynamical and Control Systems 5, 26-35,
- Kreyszig, E., 1991. Differential Geometry. Dover Publications, inc., New York.
- Kühnel W., 2006. Differential geometry, Curves-Surfaces-Manifolds, American Mathematical Society, 380, USA.
- O Neil, B., 2006. Elemantery Differential Geometry. Revised second ed. Academic Press Inc., 503p., USA
- Pressley, A., 2001. Elementary Differential Geometry. Springer-Verlag, 332p., NewYork
- Sabuncuoğlu, A., 2010. Diferensiyel Geometri. Nobel Yayın Dağıtım, No:258, 515s.,Ankara.
- Sağlam, D. and Kalkan, Ö. B., 2010. Surfaces at a Constant Distance From The Edge of Regression on a Surface in E_1^3 . Differential Geometry-Dynamical Systems, 12, 187-200.
- Sağlam, D. and Kalkan, Ö. B., 2013. The Euler Theorem and Dupin Indicatrix for Surfaces at a Constant Distance From The Edge of Regression on a Surface in E_1^3 . Matematicki Vesn., 65, No.2, 242-249.

- Sağlam, D. and Kalkan, Ö. B., 2014. Conjugate Tangent Vectors and Asymptotic Directions for Surfaces at a Constant Distance From Edge of Regression on a Surface in E_1^3 . Konuralp J. of Mathematics, 2, No. 1, 24-35.
- Salimov, A. ve Mağden A., 2008. Diferensiyel geometri. Aktif yayıncılık, Erzurum.
- Struik, D.J., 1988. Lectures on Classical Differential Geometry. 2nd ed. Addison Wesley, Dover.
- Şahin, B., 2013. Manifoldların diferensiyel geometrisi. Nobel yayıncılık, Ankara.
- Tarakcı, Ö. and Hacısalihoğlu, H. H., 2004. Surfaces at a Constant Distance from the Edge of Regression on a Surface. Applied Mathematics and Computation, 155, 81-93.
- Tarakcı, Ö., 2002. Sabit Sırt Uzaklıklı Hiperyüzeyler. Doktora tezi, Ankara Üniv. Fen Bilimleri Ens., Ankara.
- Tunçer Y, Yoon D. W., Karacan M. K., 2011, Weingarten and Linear Weingarten Canal Surfaces. arXiv: 1106.3175v1 [math.DG], 1-12.
- Vogler, H., 1963. Die auf einer Torse Verlaufenden Linien konstanten Gratabstandes als duale Seitenstücke zu den pseudorektifizieren den Torsen einer Raumkurve, Vorgelegt in der Sitzung, Wien.
- Yaylı Y., Doğan F., 2012. Tubes with Darboux Frame. Int. J. Contemp. Math. Sciences, Vol. 7, No. 16, 751-758.
- Yurttançıkılmaz, S., Tarakcı, Ö., 2014. The Relationship Between Focal Surfaces and Surfaces at a Constant Distance From The Edge of Regression On a Surface, Advances in Mathematical Phys. Article ID 397126, in press.
- Yücel, G., 2012. Eğri Yüzeyle Dair Genel Alıştırmalar. Boğaziçi Üniversitesi Yayınevi, İstanbul.

ÖZGEÇMİŞ

1979 yılında Erzurum’da doğdu. İlkokulu Palandöken İlkokulu’nda, ortaokulu Erzurum Şair Nefi ortaokulunda, liseyi Erzurum Lisesi’nde tamamladı. 1997 yılında girdiği Atatürk Üniversitesi Kâzım Karabekir Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Matematik Öğretmenliği Bölümünden 2001 yılında lisans derecesi ile mezun oldu. Aynı yıl matematik öğretmeni olarak atandı. Erzurum da ki çeşitli okullarda matematik öğretmeni olarak görev yaptı. Şubat 2008 de Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Geometri Bilim Dalından yüksek lisans derecesi ile mezun oldu. Ağustos 2010 yılında Bitlis Eren Üniversitesi’nde ÖYP araştırma görevlisi olarak göreve başladı. Ankara Üniversitesi tarafından verilen yabancı dil eğitimi sürecini tamamladıktan sonra 2011-2012 Bahar yarıyılı itibariyle Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Geometri Bilim Dalında doktora eğitimine başladı.