UYUMLU KESİRLİ TÜREV VE DİZİSEL LİNEER DİFERENSİYEL DENKLEMLER

Emrah ÜNAL

Doktora Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalı
Doç. Dr. Ercan ÇELİK
Doç. Dr. Ahmet GÖKDOĞAN
2015

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

UYUMLU KESİRLİ TÜREV VE DİZİSEL LİNEER DİFERENSİYEL DENKLEMLER

Emrah ÜNAL

MATEMATİK ANABİLİM DALI
Uygulamalı Matematik Bilim Dalı

ERZURUM
2015

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAY FORMU

UYUMLU KESİRLİ TÜREV VE DİZİSEL LİNEER DİFERENSİYEL DENKLEMLER

Doç. Dr. Ercan ÇELİK danışmanlığında, Doç. Dr. Ahmet GÖKDOĞAN ortak danışmanlığında Emrah ÜNAL tarafından hazırlanan bu çalışma 23/12/2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı – Uygulamalı Matematik Bilim Dalı'nda Doktora tezi olarak **oybirliği** ile kabul edilmiştir.

Başkan	: Prof. Dr. Charyyar ASHYRALYYEV	*İmza*	:	
Üye	: Doç. Dr. Ercan ÇELİK	*İmza*	:	
Üye	: Doç. Dr. Ahmet GÖKDOĞAN	*İmza*	:	
Üye	: Doç. Dr. Aydın GEZER	*İmza*	:	
Üye	: Doç. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR	*İmza*	:	
Üye	: Doç. Dr. Mehmet KARAKAN	*İmza*	:	
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Mesut KARABACAK	*İmza*	:	

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulunun 31...../..12../.2015 tarih ve ..54./..1745....... nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Ertan YILDIRIM
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Doktora Tezi

UYUMLU KESİRLİ TÜREV VE DİZİSEL LİNEER DİFERENSİYEL DENKLEMLER

Emrah ÜNAL

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ercan ÇELİK
Eş Danışman: Doç. Dr. Ahmet GÖKDOĞAN

Bu tezde uyumlu kesir mertebeden dizisel lineer diferensiyel denklemlerin genel çözümleri ve kesirsel kuvvet seri çözümleri incelenmiştir. Beş bölümden oluşan bu çalışmanın birinci bölümünde konuyla ilgili literatürden bahsedildi. İkinci bölümde bu tezde kullanılacak olan çeşitli tanım ve teoremler verildi. Üçüncü bölümde uyumlu kesirli türevin analiziyle alakalı genel özellikler tanıtıldı. Dördüncü bölümde ise ilk olarak uyumlu kesirli türevin analizine yapılan katkılar, ikinci olarak uyumlu kesir mertebeden dizisel lineer diferensiyel denklemlerin çözümünün varlık ve teklik teoremleri verildi. Üçüncü olarak, sabit katsayılı uyumlu kesir mertebeden dizisel lineer diferensiyel denklemlerin genel çözümlerinin bulunuş metodları sunuldu. Dördüncü olarak, değişken katsayılı uyumlu α ve 2α mertebeden dizisel lineer diferensiyel denklemlerin genel çözümlerinin bulunuş yöntemleri verildi. Son olarak uyumlu kesir mertebeden Hermite ve Bessel diferensiyel denklemlerinin çözümleri ile metotların sayısal örnekleri desteklendi. Son bölümde ise elde edilen sonuçlar değerlendirildi.

2015, 130 sayfa

Anahtar Kelimeler: Uyumlu kesirli türev, uyumlu kesirli integral, uyumlu kesir mertebeli diferensiyel denklem, uyumlu kesir mertebeden dizisel lineer diferensiyel denklem, kesirsel kuvvet serisi

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

CONFORMABLE FRACTIONAL DERIVATIVE AND SEQUENTIAL LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

Emrah ÜNAL

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Discipline of Applied Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ercan ÇELİK
Co-Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ahmet GÖKDOĞAN

In this thesis, the general solution and fractional power series solution of sequential linear conformable fractional differential equations were investigated. The literature of the subject was discussed in the first section of this study formed with five chapters. Several definitions and theorems would be used in this thesis were given in the second section. In the third section, the general properties regard with conformable calculus was introduced. Firstly, contributions which were done to conformable fractional calculus were presented in the fourth section. Secondly, existence and uniqueness theorems for sequential linear conformable fractional differential equations were given. Thirdly, method finding the general solution to sequential linear conformable fractional differential equations with constant coefficients was presented. Fourthly, methods finding the general solution to sequential linear conformable fractional differential equations with variable coefficients of order α and 2α were presented. Finally, numerical examples of these metods were supported by with solutions of conformable fractional Hermite and Bessel equations. Our obtained results were evaluated in the last section.

2015, 130 pages

Keywords: Conformable fractional derivative, conformable fractional integral**,** conformable fractional differential equation, sequential linear conformable fractional equation, fractional power series

TEŞEKKÜR

Doktora tezi olarak sunduğum bu çalışma, Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde hazırlanmıştır.

Bu çalışmada bana her türlü kolaylığı sağlayan, bilgi ve tecrübeleriyle beni destekleyen çok değerli hocalarım Sayın Doç. Dr. Ercan ÇELİK'e ve Sayın Doç. Dr. Ahmet GÖKDOĞAN'a en içten dileklerimle teşekkür eder saygılarımı sunarım.

2211-Yurt İçi Doktora Burs Programı kapsamında sağladığı destekten ötürü TÜBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığı birimine teşekkür ederim.

Bu doktora çalışmasını saygıdeğer anne ve babama, hiçbir zaman desteğini ve ilgisini eksik etmeyen eşim Şuayibe ÜNAL'a ithaf ediyorum…

Emrah ÜNAL
Aralık, 2015

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$W(.)$	Fonksiyonların Wronskian determinantı
$\Re(z)$	z kompleks sayısının reel kısmı
$\Gamma(z)$	Gama fonksiyonu
$E_\alpha(z)$	Bir parametreli Mittag-Leffler fonksiyonu
$E_{\alpha,\beta}(z)$	İki parametreli Mittag-Leffler fonksiyonu
$e_\alpha^{\lambda z}$	α üstel fonksiyon
$e_{\alpha,n}^{\lambda z}$	Genelleştirilmiş α üstel fonksiyon
J_α^a	Sol Riemann-Liouville kesirli integrali
D_α^a	Sol Riemann-Liouville kesirli türevi
${}^C D_\alpha^a$	Sol Caputo kesirli türevi
${}^{(k)}D_\alpha^a$	$k\alpha$ mertebeli dizisel Riemann-Liouville kesirli türev
T_α	Uyumlu kesirli türev
T_α^a	Sol uyumlu kesirli türev
${}^b T_\alpha$	Sağ uyumlu kesirli türev
I_α^a	Sol uyumlu kesirli integral
${}^b I_\alpha$	Sağ uyumlu kesirli integral
${}^{(n)}T_\alpha^a$	$n.$ mertebeden sol dizisel uyumlu kesirli türev
${}^b T_\alpha^{(n)}$	$n.$ mertebeden sağ dizisel uyumlu kesirli türev
$L_\alpha[.]$	Kesirli diferensiyel operatör
$W_\alpha(.)$	Fonksiyonların α Wronskian determinantı
$H_m^\alpha(t)$	*m*. mertebeden kesirli Hermite polinomu
$H_m(t)$	*m*. mertebeden klasik Hermite polinomu
$(\mathcal{J}_\alpha)_p(t)$	*p*. mertebeden kesirli Bessel fonksiyonu
$\mathcal{J}_p(t)$	*p*. mertebeden klasik Bessel fonksiyonu
$(K_\alpha)_m(t)$	*m*. mertebeden ikinci çeşit kesirli Bessel fonksiyonu
$K_m(t)$	*m*. mertebeden ikinci çeşit klasik Bessel fonksiyonu

1. GİRİŞ

L'Hospital tarafından Leibniz'e, türev operatörünün kesirli olmasının anlamının sorulduğu mektupla (Ross 1977) matematik literatürüne giren kesirli türevler (fractional derivatives), günümüzde pek çok alanda kendini göstermektedir. Kesirli türevler üzerine ortaya atılan bu soru, 300 yıldan daha fazla bir zamandır Liouville, Riemann, Weyl, Fourier, Laplace, Lagrange, Euler, Abel, Lacroix, Grünwald ve Letnikov gibi ünlü birçok matematikçinin de üzerinde çalıştığı bir konu olmuştur (Loverro 2004). O günden bu yana hızla artan bir biçimde, kesirli diferensiyel denklemler iletim hatları teorisi, sıvıların kimyasal analizi, ısı transferi, difüzyon, Schrödinger denklemi, malzeme bilimi, akışkanlar, elektrokimya, fraktal süreçler ve fazlasını da içine alan birçok uygulama alanı bulmuştur (Bayın 2004). Kesirli hesap tekniğinin matematik uygulamalarının çoğu 20.yy bitmeden ortaya koyulmuştur fakat mühendislik ve bilimsel uygulamalarda heyecan verici başarılar elde etmesi ancak geçtiğimiz yüz yıl içerisinde gerçekleşebilmiştir.

Kesirli diferensiyel hesap tekniği, fiziksel olayları açıklamak için yapılan matematiksel yaklaşımlara yeni bir boyut kazandırmasının yanı sıra, fiziksel olayların yorumlarına da katkıda bulunmuştur. Fiziksel olayları betimleyen diferensiyel denklemlerin mertebeleri, ele alınan fiziksel olaydaki değişim hızını belirlemektedir. Bu noktada kesirli mertebeden diferensiyel, tamsayı mertebeden diferensiyel denklemlerin bazı fiziksel olayları açıklamaktaki zayıflıklarını kapatmakla birlikte fiziksel olayın karakterinin anlaşılmasında da büyük bir rol oynamaktadır.

Literatürde kesirli türevin birçok tanımı mevcuttur. Bu tanımların birçoğu kesirli türev tanımını yaparken integral formundan yararlanmaktadır. Bu şekildeki tanımlardan en meşhur olanları Riemann- Liouville ve Caputo tanımlarıdır. Diğer bir meşhur tanım olan Grunwald-Letnikov tanımı kesirli türevin tanımı için bir limit formundan yararlanır. Bu kesirli türev tanımlarıyla alakalı literatürde birçok çalışma mevcuttur.

Bu çalışma alanlarından biri de dizisel lineer kesirli diferensiyel denklemler olmuştur. Dizisel kesirli türev kavramı 1993 de Miller and Ross (1993) tarafından ortaya atılmıştır. Dizisel lineer kesirli diferensiyel denklemlerle alakalı genel teori ise Bonilla *et al.* (2007) tarafından sunulmuştur. Bonilla *et al.* (2007) yaptıkları bu çalışmada Mittag-Leffler tipi bir fonksiyon olan α üstel fonksiyon yardımıyla sabit katsayılı dizisel lineer kesirli diferensiyel denklemlerin genel çözümlerini bulmuşlardır. Bu alandaki diğer bir çalışma, sabit katsayılı dizisel lineer kesirli diferensiyel denklem sistemlerinin genel çözümlerinin bulunması üzerine yapılmıştır (Bonilla *et al.* 2007). Ayrıca değişken katsayılı durum için kesirsel kuvvet serisi açılımı yardımıyla α adi nokta ve α düzgün tekil nokta civarlarında seri çözümler bulunmuştur (Kilbas *et al.* 2007; Rivero *et al.* 2008).

Yukarıda adı geçen kesirli türev tanımları da dahil literatürdeki bütün kesirli türev tanımlarının klasik türev tanımından aldıkları tek ortak özellik lineer olma özelliğidir (Khalil *et al.* 2014). Bunun dışındaki özelliklerle alakalı olarak bir uyum genellikle söz konusu değildir. Mesela sabitin kesirli türevi Riemann-Liouville kesirli türev tanımı için sıfır olmamaktadır. Yine klasik türevdeki iki fonksiyonun çarpımının ve bölümünün türevi formulü bütün kesirli türevler için geçerli değildir. Buna benzer olarak yine bütün kesirli türev tanımları klasik türevdeki zincir kuralını sağlamaz.

Son zamanlarda klasik türevin doğal genişletilmesi olarak görülen kesirli türevin yeni bir tanımı verildi (Khalil *et al.* 2014). Bu yeni tanım klasik türeve uyumuyla dikkat çekmektedir. Yukarıda sayılan ve diğer kesirli türevler için sağlanmayan, çarpım kuralı ve bölüm kuralı bu yeni kesirli türev tanımı için sağlanmaktadır. Zincir kuralı ise klasik türevdeki kurala çok yakın olarak yazılabilmektedir. Uyumlu kesirli türev (conformable fractional derivative) olarak adlandırılan bu yeni kesirli türev tanımı, sağladığı bu özelliklerden dolayı büyük bir ilgiyi üzerine çekmiş ve kısa zamanda bu yeni tanımla alakalı birçok çalışma yapılmıştır.

Bazı yazarlar (Ortiguera and Machado 2015) tarafından uyumlu kesirli türevin gerçekten kesirsel bir operatör olup olmadığı tartışıldı. Bugün bu soru hala tartışmaya açık görülüyor. Belki de bu konu felsefik bir konudur (Batarfi *et al.* 2015). Ayrıca bu yeni tanım bir kesirli türev tanımı olmasa bile kesirli mertebeden diferensiyel denklemlerin çözümü için bir dönüşüm olarak düşünülebilir (Çenesiz and Kurt 2015). Anlaşılacağı üzere bu tartışma, bu yeni teoriye hangi ismin verileceği üzerine yapılan bir tartışmadır. Herhalükarda bu yeni kesirli türev tanımı üzerinde çalışılmayı hak eden bir konu olarak karşımızda durmaktadır.

Khalil *et al.* (2014) tarafından ortaya atılan bu yeni tanım klasik türevdekine benzer bir limit formuna sahiptir. Khalil ve arkadaşları yaptıkları çalışmada bu yeni kesirli türev tanımının (ya da dönüşümünün) çarpım kuralını ve bölüm kuralını sağladığını ispat ettiler. Ayrıca onlar yaptıkları çalışmada uyumlu kesir mertebeden diferensiyellenebilen fonksiyonlar için Rolle teoremi ve ortalama değer teoremini ifade ettiler. Uyumlu kesirli türev analizi, Abdeljawad (2015) tarafından geliştirildi. Abdeljawad yapmış olduğu çalışmada bu yeni tanım için sol ve sağ uyumlu kesirli türev kavramlarını, kesirsel zincir kuralını ve Gronwall eşitsizliğini sundu. Ayrıca uyumlu kesir mertebeden dizisel türev kavramını, $0 < \alpha \leq 1$ için iki tür kesirsel kısmi integrasyon formüllerini, uyumlu kesirsel kuvvet seri açılımını, kesirsel taylor eşitsizliğini ve son olarak kesirsel Laplace dönüşümünü verdi.

Bunun dışında, uyumlu kesirsel Fourier serileri (Khalil 2014), uyumlu kesir mertebeden Legendre diferensiyel denklemi ve kesirsel Legendre polinomları (Khalil and Abu Hammad 2014), bir adi nokta civarında uyumlu kesir mertebeden dizisel lineer diferensiyel denklemlerin kesirsel kuvvet seri çözümleri (Ünal *et al.* 2015), operatörlerin uyumlu kesirsel yarı grupları (Horani *et al.* 2014), keyfi zaman ölçeklerinde uyumlu kesirsel analiz (Benkhettou and Torres 2015), uyumlu kesirli türev ile kesirsel Newton mekaniği (Chung 2015), uyumlu kesirli diferensiyel denklemler için sınır değer problemleri (Batarfi *et al.* 2015; Anderson and Avery 2015) üzerine çalışmalar yapılmıştır.

Bu tezde, ilk olarak, uyumlu kesirli türev analizine yapılan katkılardan bahsedilmiştir. İkinci olarak, uyumlu kesir mertebeden dizisel lineer diferensiyel denklemlerin çözümlerinin varlık ve teklik teoremleri sunulmuştur. Üçüncü olarak, uyumlu kesirli mertebeden sabit katsayılı dizisel lineer diferensiyel denklemlerin genel çözümlerinin bulunuş metodları üzerinde durulmuştur. Dördüncü olarak, α mertebeden değişken katsayılı uyumlu kesirli diferensiyel denklemin çözümü için klasik türevdekine benzer olarak bir metod verilmiştir. Beşinci olarak, kesirsel kuvvet seri açılımından yararlanılarak 2α mertebeden uyumlu kesirli dizisel lineer diferensiyel denklemlerin kesirsel kuvvet seri çözümleri üzerine çalışılmıştır. Bu çalışmalar doğrultusunda kesirsel Hermite ve kesirsel Bessel denklemleri çözülmüş ve kesirsel Hermite polinomları ve kesirsel Bessel fonksiyonları elde edilmiştir. Son olarak, kesirsel Hermite polinomlarının ve kesirsel Bessel fonksiyonlarının bazı özellikleri klasik türeve benzer olarak yazılmış ve ispatlanmıştır.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde, tezde sık kullanılan bazı temel tanım ve kavramsal bilgiler verilecektir.

Tanım 2.1: Eğer tümü sıfır olmayan $c_1, c_2, \dots, c_n$ sabitleri ve $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ kapalı aralığındaki tüm t değerleri için

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \cdots + c_n f_n(t) = 0$$

oluyorsa $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ fonksiyonlarına lineer bağımlıdır denir. Eğer $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ fonksiyonları lineer bağımlı değilse, bu fonksiyonlara lineer bağımsız fonksiyonlar denir. Yani, $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ kapalı aralığındaki tüm t değerleri için, $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ olduğunda

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \cdots + c_n f_n(t) = 0$$

oluyorsa $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ fonksiyonlarına lineer bağımsızdır denir (Bayram 2010).

Tanım 2.2: f, (a,b) açık aralığında tanımlı bir fonksiyon ve $t_0 \in (a,b)$ olsun. Eğer

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$$

limiti varsa, f fonksiyonu t_0 noktasında diferensiyellenebilirdir denir (Kadıoğlu ve Kamali 2013).

Teorem 2.1: $f(t)$ fonksiyonu, bir t_0 noktasında diferensiyellenebilirse bu noktada süreklidir (Kadıoğlu ve Kamali 2013).

Teorem 2.2 (Rolle Teoremi): $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve $\forall t \in (a, b)$ noktasında türevlenebilir olsun. Eğer $f(a) = f(b)$ ise, (a, b) aralığında $f'(c) = 0$ olacak şekilde en az bir c noktası vardır (Balcı 2012).

Teorem 2.3 (Ortalama Değer Teoremi): $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve $\forall t \in (a, b)$ noktasında türevlenebilir olsun. Bu takdirde, (a, b) aralığında

$$f'(t_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

olacak şekilde en az bir t_0 noktası vardır (Balcı 2012).

Teorem 2.4 (Genelleştirilmiş Ortalama Değer Teoremi): $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve $\forall t \in (a, b)$ noktasında türevlenebilir fonksiyonlar olsun. Bu takdirde, (a, b) aralığında

$$\frac{f'(t_0)}{g'(t_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

olacak şekilde en az bir t_0 noktası vardır (Balcı 2012).

Tanım 2.3: Bağımsız t değişkeni, bağımlı $y(t)$ değişkeni (bilinmeyen fonksiyon) ve onun türevlerini içeren

$$f(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{2.1}$$

şeklindeki bir bağıntıya n. mertebeden adi diferensiyel denklem denir.

(2.1) denklemi $y^{(n)}$ ye göre çözülürse

$$y^{(n)} = g\ (t, y, y', y'', \dots\ , y^{(n-1)}) \tag{2.2}$$

elde edilir. Bu ise (2.1) denkleminin açık formda yazılmış şeklidir.

2.1. n. Mertebeden Lineer Diferensiyel Denklemler İçin Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 2.4: t bir reel değişken olmak üzere

$$y^{(n)}(t) + p_{(n-1)}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + p_1(t)y'(t) + p_0(t)y(t) = q(t) \tag{2.3}$$

şeklindeki denklemlere n. mertebeden lineer diferensiyel denklem denir. Bu denklemde, eşitliğin sağ tarafındaki $q(t)$ ve sol tarafındaki $p_0(t)$, $p_1(t)$, $p_2(t)$, … $p_{(n-1)}(t)$ katsayıları t değişkenine bağlıdır.

İşlemleri basitleştirmek için (2.3) eşitliğinin sol tarafı

$$L[y] = y^{(n)}(t) + p_{(n-1)}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + p_1(t)y'(t) + p_0(t)y(t)$$

biçiminde tanımlanırsa (2.3) denklemi

$$L[y] = q(t)$$

biçiminde yazılır.

Teorem 2.5: t bir reel değişken, $q(t)$, $p_0(t)$, $p_1(t)$, $p_2(t)$, … $p_{(n-1)}(t)$, fonksiyonları bir $a < t < b$ aralığında tanımlı ve sürekli olmak üzere

$$y^{(n)}(t) + p_{(n-1)}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + p_1(t)y'(t) + p_0(t)y(t) = q(t)$$

lineer diferensiyel denklemi

$$y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1},\ a < t_0 < b$$

şeklindeki başlangıç koşulları ile $a < t < b$ aralığında tek bir çözüme sahiptir (Finan 2013).

Teorem 2.6: $L[.]$ diferensiyel operatörü lineerdir. Yani, y_1 ve y_2 n kez türevlenebilen fonksiyonlar ve c_1 ve c_2 keyfi sabitler olmak üzere

$$L[c_1y_1 + c_2y_2] = c_1L[y_1] + c_2L[y_2]$$

dir (Finan 2013).

Teorem 2.7: $y_1, y_2, \dots, y_n,\ L[y] = 0$ denkleminin çözümleri olsun. Bu takdirde

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n$$

ifadesi de denklemin bir çözümüdür. Burada, $k = 1,2, \dots n$ için c_k lar keyfi sabittir (Finan 2013).

Tanım 2.5: Bir I aralığında $n-1$ kez diferensiyellenebilen $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ fonksiyonlarının Wronskian determinantı

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

şeklinde tanımlanır. (Coddington 2012)

Teorem 2.8: $y_1, y_2, \dots, y_n$, $L[y] = 0$ denkleminin çözümleri olsun. Eğer $W\big(y_1(t_0), y_2(t_0), \dots, y_n(t_0)\big) \neq 0$ olacak şekilde bir $t_0 \in (a, b)$ varsa $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ kümesine temel çözüm kümesi denir (Finan 2013).

Teorem 2.9: t bir reel değişken $p_0(t)$, $p_1(t)$, $p_2(t)$, … $p_{(n-1)}(t)$, fonksiyonları bir (a, b) aralığında tanımlı ve sürekli olmak üzere

$$y^{(n)} + p_{(n-1)}(t)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(t)y' + p_0(t)y = 0$$

homojen lineer diferensiyel denklemi $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ temel çözüm kümesine sahiptir (Finan 2013).

Teorem 2.10: $y_1, y_2, \dots, y_n$ fonksiyonları $L[y] = 0$ denkleminin n tane çözümü olsun. Bu takdirde

1. $W(t)$ determinant fonksiyonu $W'(t) + p_{n-1}(t)W(t) = 0$ denklemini sağlar.

2. Herhangi bir $t_0 \in (a, b)$ için

$$W(t) = W(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t} p_{n-1}(x)dx}$$

dir. Üstelik, eğer $W(t_0) \neq 0$ ise bu takdirde bütün $t \in (a, b)$ için $W(t) \neq 0$ dır (Finan 2013).

Teorem 2.11: t bir reel değişken $p_0(t)$, $p_1(t)$, $p_2(t)$, … $p_{(n-1)}(t)$, fonksiyonları bir (a, b) aralığında sürekli olmak üzere, eğer $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ kümesi

$$y^{(n)} + p_{(n-1)}(t)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(t)y' + p_0(t)y = 0$$

diferensiyel denkleminin temel çözüm kümesi ise bütün $t \in (a, b)$ için $W(t) \neq 0$ dır (Finan 2013).

Teorem 2.12: t bir reel değişken $p_0(t),\ p_1(t),\ p_2(t), \dots\ p_{(n-1)}(t),$ fonksiyonları bir (a, b) aralığında sürekli olmak üzere, $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ kümesi

$$y^{(n)} + p_{(n-1)}(t)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(t)y' + p_0(t)y = 0$$

diferensiyel denkleminin temel çözüm kümesidir ancak ve ancak $y_1, y_2, \dots, y_n$ fonksiyonları lineer bağımsızdır (Finan 2013).

Teorem 2.13: $\{y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)\}$ kümesi

$$y^{(n)} + p_{(n-1)}(t)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(t)y' + p_0(t)y = 0$$

denkleminin temel çözüm kümesi ve $y_p(t)$ ise

$$y^{(n)} + p_{(n-1)}(t)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(t)y' + p_0(t)y = q(t)$$

homojen olmayan diferensiyel denklemin özel çözümü olsun. Bu takdirde homojen olmayan lineer diferensiyel denklemin genel çözümü

$$y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) + \cdots + c_ny_n(t) + y_p(t)$$

şeklindedir. Burada, $k = 1,2, \dots n$ için c_k lar keyfi sabittir (Finan 2013).

2.2. Bazı Özel Fonksiyonlar

Tanım 2.6: $\Re(z)$, z kompleks sayısının reel kısmı olsun. $\Re(z) > 0$ için

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-u}u^{z-1}\,du$$

fonksiyonuna gama fonksiyonu denir. Gama fonksiyonu

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{2.4}$$

özelliğine sahip olduğu için tanım kümesi $\mathbb{C} - \{\mathbb{Z}^- \cup \{0\}\}$ kümesine genişletilebilir.

Tanım 2.7: $\Re(\alpha) > 0$ olmak üzere

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$$

ifadesine bir parametreli Mittag-Leffler fonksiyonu denir.

Tanım 2.8: $\Re(\alpha) > 0$ ve $\beta \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}$$

ifadesine iki parametreli Mittag-Leffler fonksiyonu denir.

Tanım 2.9: $\Re(\alpha) > 0$, $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ olsun. Bu durumda

$$e_\alpha^{\lambda z} = z^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda z^\alpha) = z^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda z^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + \alpha)}$$

ifadesine α üstel fonksiyonu denir.

Bu fonksiyon üstel fonksiyonun bir genelleştirmesi olarak göz önüne alınabilir (Kılbas *et al*. 2006).

Tanım 2.10: $\Re(\alpha) > 0$, $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. Bu durumda

$$e_{\alpha,n}^{\lambda z} = \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^n \left[e_\alpha^{\lambda z}\right]$$

ifadesine genelleştirilmiş α üstel fonksiyon denir (Kılbas *et al*. 2006).

2.3. Kesirli Türevler ve Kesirli İntegraller

Kesirli mertebeden türevlerin birbirinden farklı ve birbiriyle uyuşmayan birçok tanımı literatürde mevcuttur. Fakat literatür incelediğinde, bu tanımların aslında Riemann-Liouville türev tanımının genelleştirilmiş şekli ve varyantları yada belirli şartlar altında Riemann-Liouville türev tanımı ile bağlantılı olduğu görülür. Bu tanımlar arasındaki temel fark ele alınan fonksiyonların tanım kümesi ve seçilen yardımcı parametrelerdir (Li 2003).

Kesirli türev tanımları arasında en çok kullanılan Riemann-Liouville ve Caputo türev tanımıdır.

2.3.1. Riemann-Liouville kesirli türevleri ve kesirli integralleri

Tanım 2.11: $\alpha > 0$ olmak üzere α mertebeden Riemann-Liouville integral operatörü J

$$(J_\alpha^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)d\tau,\ t > a\ ; \tag{2.5}$$

$$(J_0^\alpha f)(t) = f(t) \tag{2.6}$$

biçiminde tanımlanır.

f fonksiyonu $[a,\infty)$ için sürekli olsun. $\alpha,\beta > 0$, ve $\gamma > -1$ olmak üzere, Riemann-Liouville integral operatörünün bazı özellikleri aşağıdaki gibidir:

a. $\left(J_\alpha^a J_\beta^a f\right)(t) = \left(J_{\alpha+\beta}^a f\right)(t),$ (2.7)

b. $\left(J_\alpha^a J_\beta^a f\right)(t) = \left(J_\beta^a J_\alpha^a f\right)(t),$ (2.8)

c. $J_\alpha^a t^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} t^{\alpha+\gamma}.$ (2.9)

Tanım 2.12: Riemann-Liouville kesirli türev operatörü, $\alpha > 0,\ a \in \mathbb{R},\ t > a$ ve $m - 1 < \alpha \leq m$ için,

$$(D_\alpha^a f)(t) = \frac{d^m}{dt^m}\left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_a^t \frac{f(x)}{(t-x)^{\alpha-m+1}}\,dx\right]$$

olarak tanımlanır.

2.3.2. Caputo kesirli türevleri

Caputo türev tanımı detaylı bir şekilde M. Caputo tarafından ve bazı kaynaklarda verilmiştir (Caputo 1967; Kılbas *et al*. 2006).

Tanım 2.13: $m - 1 < \alpha \leq m,\ m \in \mathbb{N},\ x > a$ olmak üzere, $f(t)$ fonksiyonunun α mertebeden ($\alpha > 0$) Caputo türev,

$$\left({}^C D_\alpha^a f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_a^t (t-x)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(x)\,dx \quad (2.10)$$

biçiminde tanımlanır.

Ayrıca $m - 1 < \alpha \leq m,\ m \in \mathbb{N},\ t > a$ ve $f \in C^{m-1},\ \alpha \geq -1$ olmak üzere Caputo türev tanımına ait,

a. $\left({}^{C}D_{\alpha}^{a} J_{\alpha}^{a} f\right)(t) = f(t),$ (2.11)

b. $\left(J_{\alpha}^{a}\, {}^{C}D_{\alpha}^{a} f\right)(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)} \frac{(t-a)^k}{k!}$ (2.12)

özellikleri de verilebilir.

2.4. Kesirli Diferensiyel Denklemler

Tanım 2.14: Bir veya daha fazla değişkenin kesirli türevlerini içeren denklemlere kesirli diferensiyel denklem denir.

Yani, kesirli diferensiyel denklemler, tam sayı türevleri yerine, kesirli türevlere sahip olan diferensiyel denklemlerdir. (Benghorbal 2004).

Örnek 2.1: t bir değişken olmak üzere

$$tD_{1/2}y(t) - D_{2/3}y(t) - y(t) = sint \tag{2.13}$$

biçiminde verilen (2.13) denklemi bir kesirli diferensiyel denklemdir. Kesirli diferensiyel denklemler aşağıdaki gibi sınıflandırılabilir:

a) Adi kesirli diferensiyel denklemler. Örneğin, t bir değişken olmak üzere

$$D_{1/3}y(t) + 5y^2(t) = 3, \tag{2.14}$$

$$D_{1/2}y(t) + D_{1/2}x(t) = t, \tag{2.15}$$

$$D_{3/2}y(t) + D_{1/2}y(t) - 2y(t) = 0 \tag{2.16}$$

denklemleri adi kesirli diferensiyel denklemlerdir (Podlubny 1999).

b) Kesirli kısmi diferensiyel denklemler. Örneğin,

$$D^t_{1/2} u(x,t) = \lambda^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{2.17}$$

denklemi bir kesirli kısmi diferensiyel denklemdir (Podlubny 1999).
Başka bir sınıflandırma ise, denklemin lineer olup olmamasına göre yapılan sınıflandırma türüdür. Bir kesirli diferensiyel denklem eğer;

$$a_n(t) D_{\alpha_n} y(t) + a_{n-1}(t) D_{\alpha_{n-1}} y(t) + \cdots + a_1(t) D_{\alpha_1} y(t) + a_0(t) y(t) = f(t) \tag{2.18}$$

biçiminde ise lineer kesirli diferensiyel denklem olarak adlandırılır. (2.18) denkleminde; D_{α_i}, $(i = 1,2,\dots,n)$ kesirli diferensiyel operatörüdür ve lineerdir. Dikkat edilirse, lineer kesirli diferensiyel denklemlerin iki özelliği göze çarpmaktadır:

i) Bağımlı değişken y ve y'nin kesirli türevleri birinci derecedendir. Yani, y bağımlı değişkenini içeren her terimin kuvveti 1 dir.

ii) Her terimin katsayısı yalnız t bağımsız değişkenine bağlıdır (Benghorbal 2004).

Yukarıdaki iki şarttan en az birinin sağlanmadığı kesirli diferensiyel denklemlere lineer olmayan kesirli diferensiyel denklem denir. Yukarıdaki tanımlardan hareketle;

$$t^3 D_{3/2} y(t) + y(t) = e^t, \tag{2.19}$$

$$D_{2q} y(t) + D_q y(t) - y(t) = 0 \tag{2.20}$$

denklemleri lineerdir. Fakat;

$$D_{2/3}y(t) = y^2(t), \tag{2.21}$$

$$y(t)D_{3/2}y(t) + D_{3/5}y(t) = t^3 \tag{2.22}$$

denklemleri lineer olmayan kesirli diferensiyel denklemlerdir (Benghorbal 2004).

Tanım 2.15: Kesirli diferensiyel denklemdeki en yüksek mertebedeki türeve denklemin mertebesi denir.

Örneğin,

$$y(t)D_{7/3}y(t) + \left(D_{3/5}y(t)\right)^2 = (t+1)^2 \tag{2.23}$$

denklemi bir $\frac{7}{3}$. mertebeden lineer olmayan adi kesirli diferensiyel denklemdir (Benghorbal 2004).

2.5. Dizisel Kesirli Diferensiyel Denklemler

Tanım 2.16:. $a < t < b$ için ${}^{(n)}D_\alpha^a y(t) = (\prod_{k=1}^{n} D_\alpha^a) y(t)$ olsun. $k = 0,1,2,\dots,n$ için ${}^{(k)}D_\alpha^a y(t)$ ifadesi $k\alpha$ mertebeden dizisel kesirli türev olarak adlandırılır (Miller and Ross 1993). Burada ${}^{(k)}D_\alpha^a y(t)$ ifadesi k defa art arda D_α^a operatörünün uygulanması manasındadır.

Tanım 2.17: $n \in \mathbb{N}$ olsun. $a < t < b$ için

$$b_n(t)\,{}^{(n)}D_\alpha^a y + b_{n-1}(t)\,{}^{(n-1)}D_\alpha^a y + \cdots + b_1(t) D_\alpha^a y + b_0(t) y = f(t)$$

formundaki denkleme $n\alpha$ mertebeden dizisel lineer kesirsel diferensiyel denklem denir. Burada $k = 0,1,2, \dots, n$ için $b_k(t)$ reel fonksiyonlar ve ${}^{(n)}D_\alpha^a y = \underbrace{D_\alpha^a D_\alpha^a \dots D_\alpha^a}_{n} y$ dir (Kılbas *et al*. 2006).

Teorem 2.14: $j = 0,1, \dots, n-1$ için $a_j(t) \in C[a,b]$, $t_0 > a$, $f(t) \in C[a,b]$ ve $k = 0,1, \dots, n-1$ için y_0^k verilen reel sayılar olsun. O zaman

$$ {}^{(n)}D_\alpha^a y + a_{n-1}(t)\,{}^{(n-1)}D_\alpha^a y + \dots + a_2(t)\,{}^{(2)}D_\alpha^a y + a_1(t) D_\alpha^a y + a_0(t) y = f(t) $$
$$ y(t_0) = y_0^1, D_\alpha^a y(t_0) = y_0^2, \dots, {}^{(n-1)}D_\alpha^a y(t_0) = y_0^{n-1}, \qquad a < t_0 < b $$

Cauchy probleminin $(a,b]$ aralığında yalnız bir sürekli $y(t)$ çözümü vardır (Kılbas *et al*. 2006).

Lemma 2.1:

$$ {}^{(n)}D_\alpha^a y + a_{n-1}(t)\,{}^{(n-1)}D_\alpha^a y + \dots + a_2(t)\,{}^{(2)}D_\alpha^a y + a_1(t) D_\alpha^a y + a_0(t) y = 0 \qquad (2.24) $$

şeklindeki homojen dizisel lineer kesirli diferensiyel denklemin çözümlerinin herhangi bir lineer kombinasyonu da denklemin bir çözümüdür (Kılbas *et al*. 2006).

Lemma 2.2:

$$ {}^{(n)}D_\alpha^a y + a_{n-1}(t)\,{}^{(n-1)}D_\alpha^a y + \dots + a_2(t)\,{}^{(2)}D_\alpha^a y + a_1(t) D_\alpha^a y + a_0(t) y = f(t) \qquad (2.25) $$

denkleminin özel çözümü $y_p(t)$ olsun. Bu denklemin homojen halinin genel çözümü $y_h(t)$ olmak üzere (2.25) denkleminin genel çözümü

$$ y_g(t) = y_h(t) + y_p(t) $$

şeklindedir.

Sabit katsayılı homojen dizisel lineer kesirli diferensiyel denklemin genel çözümünü bulmak için Tanım 2.9 da verilen α üstel fonksiyon formundan yararlanılır. Bu fonksiyon

$$^{(n)}D_{\alpha}^{a}y + a_{n-1}{}^{(n-1)}D_{\alpha}^{a}y + \cdots + a_2{}^{(2)}D_{\alpha}^{a}y + a_1 D_{\alpha}^{a}y + a_0 y = 0 \tag{2.26}$$

denkleminde yerine yazılırsa

$$\left[\left({}^{(n)}D_{\alpha}^{a} + a_{n-1}{}^{(n-1)}D_{\alpha}^{a} + \cdots + a_2{}^{(2)}D_{\alpha}^{a} + a_1 D_{\alpha}^{a} + a_0\right)e_{\alpha}^{\lambda(x-a)}\right](t) = P_n(\lambda)e_{\alpha}^{\lambda(t-a)}$$

elde edilir. Burada

$$P_n(\lambda) = \lambda^n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \lambda^k \tag{2.27}$$

ifadesi denklemin karakteristik polinomudur.

Lemma 2.3: Eğer λ_1, (2.27) karakteristik polinomunun μ_1 katlı bir kökü ise $l = 0,1,\dots,\mu_1 - 1$ için

$$y_{1,l}(t) = (t-a)^{l\alpha} e_{\alpha,l}^{\lambda_1(t-a)}$$

fonksiyonları (2.26) denkleminin çözümleridir (Kılbas *et al*. 2006).

Sonuç 2.1: $j = 1,2,\dots,k$ için λ_j, (2.27) karakteristik denklemin $j = 1,2,\dots,k$ için μ_j katlı k tane farklı kökü olsun. Bu takdirde,

$$\bigcup_{m=1}^{k}\left\{(t-a)^{l\alpha}e_{\alpha,l}^{\lambda_m(t-a)}\right\}_{l=0}^{\mu_m-1}$$

fonksiyonları (2.26) denkleminin lineer bağımsız çözümleridir (Kılbas *et al*. 2006).

Lemma 2.4: Eğer (2.27) karakteristik denklemi σ_1 katlı λ_1 ve $\overline{\lambda_1}$ $(\lambda_1 = b + ic,\ c \neq 0)$ gibi iki kompleks köke sahipse o zaman (2.26) denklemi

$$\left\{\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{c^{2j}}{(2j)!}(t-a)^{(2j+l)\alpha}e_{\alpha,l+2j}^{b(t-a)}\right\}_{l=0}^{\sigma_1-1}$$

ve

$$\left\{\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{c^{2j+1}}{(2j+1)!}(t-a)^{(2j+l+1)\alpha}e_{\alpha,l+2j+1}^{b(t-a)}\right\}_{l=0}^{\sigma_1-1}$$

formunda $2\sigma_1$ lineer bağımsız reel çözüme sahiptir (Kılbas *et al*. 2006).

Sonuç 2.2: $\lambda_m = b_m + ic_m$ $(c_m \neq 0)$ olmak üzere $\left\{\lambda_m, \overline{\lambda_m}\right\}_{m=1}^{p}$, (2.27) karakteristik denkleminin $\{\sigma_m\}_{m=1}^{p}$ katlı kompleks eşlenik kökleri olsun. O zaman

$$\bigcup_{m=1}^{p}\left\{\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{c_m^{2j}}{(2j)!}(t-a)^{(2j+l)\alpha}e_{\alpha,l+2j}^{b_m(t-a)}\right\}_{l=0}^{\sigma_m-1}$$

ve

$$\bigcup_{m=1}^{p}\left\{\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{c_m^{2j+1}}{(2j+1)!}(t-a)^{(2j+l+1)\alpha}e_{\alpha,l+2j+1}^{b_m(t-a)}\right\}_{l=0}^{\sigma_m-1}$$

fonksiyonları (2.26) denkleminin lineer bağımsız çözüm kümelerini verir.

Teorem 2.15: $\{\lambda_j\}_{j=1}^{k}$, (2.27) denkleminin $\{\mu_j\}_{j=1}^{k}$ katlı birbirinden farklı reel kökü ve $\{r_j,\overline{r_j}\}_{j=1}^{p}$ $(r_j = b_j + ic_j)$, (2.27) denkleminin $\{\sigma_j\}_{j=1}^{p}$katlı eşlenik kompleks kökleri olsun. Burada $\sum_{j=1}^{k}\mu_j + 2\sum_{j=1}^{p}\sigma_j = n$ dir. O zaman

$$\cup_{m=1}^{k}\left\{(t-a)^{l\alpha}e_{\alpha,l}^{\lambda_m(t-a)}\right\}_{l=1}^{\mu_m-1},$$

$$\bigcup_{m=1}^{p}\left\{\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{c_m^{2j}}{(2j)!}(t-a)^{(2j+l)\alpha}e_{\alpha,l+2j}^{b_m(t-a)}\right\}_{l=1}^{\sigma_m-1}$$

ve

$$\bigcup_{m=1}^{p}\left\{\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{c_m^{2j+1}}{(2j+1)!}(t-a)^{(2j+l+1)\alpha}e_{\alpha,l+2j+1}^{b_m(t-a)}\right\}_{l=1}^{\sigma_m-1}$$

fonksiyonları (2.26) denkleminin lineer bağımsız çözüm kümelerini verir (Kılbas *et al.* 2006).

Örnek 2.2: ${}^{(2)}D_\alpha^a y(t) - y(t) = 0$, ${}^{(2)}D_\alpha^a y(t) - 2D_\alpha^a y(t) + y(t) = 0$ ve ${}^{(2)}D_\alpha^a y(t) + \mu^2 y(t) = 0$ denklemlerinin genel çözümlerini bulunuz.

İlk denklem için karakteristik denklemin kökleri $\lambda_1 = 1$ ve $\lambda_2 = -1$ olup genel çözüm

$y(t) = c_1 e_\alpha^{(t-a)} + c_2 e_\alpha^{-(t-a)}$ olur. İkinci denklem için $\lambda_1 = 1$ çift katlı kök olup genel çözüm $y(t) = c_1 e_\alpha^{(t-a)} + c_2 (t-a)^\alpha e_{\alpha,1}^{(t-a)}$ olarak bulunur. Son denklem için ise $\lambda_1 = \mu i$ ve $\lambda_2 = -\mu i$ kökleri bulunur. Genel çözüm ise $y(t) = c_1 cos_\alpha[\mu(t-a)] + c_2 sin_\alpha[\mu(t-a)]$ dir. Burada

$$
\begin{aligned}
cos_\alpha[\mu(t-a)] &= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\mu^{2j+1}}{(2j+1)!} (t-a)^{(2j+1)\alpha} e_{\alpha,2j+1}^{(t-a)} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\mu^{2j+1}}{\Gamma[(j+1)2\alpha]} (t-a)^{(j+1)2\alpha-1}
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
sin_\alpha[\mu(t-a)] &= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\mu^{2j}}{(2j)!} (t-a)^{(2j)\alpha} e_{\alpha,2j}^{(t-a)} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\mu^{2j}}{\Gamma[(2j+1)\alpha]} (t-a)^{(2j+1)\alpha-1}
\end{aligned}
$$

dir.

Sabit katsayılı homojen olmayan dizisel lineer diferensiyel denklemin özel çözümünü bulmak için operatör metodu kullanılır.

Teorem 2.16 (Operatör Metot): $\{\lambda_j\}_{j=1}^{k}$, (2.30) denkleminin $\{\mu_j\}_{j=1}^{k}$ $(\sum_{j=1}^{k} \mu_j = n)$ katlı birbirinden farklı kökü olsun. $(a,b]$ aralığında verilen bir $f(t)$ fonksiyonu için

$$
{}^{(n)}D_\alpha^a y + a_{n-1} {}^{(n-1)}D_\alpha^a y + \cdots + a_2 {}^{(2)}D_\alpha^a y + a_1 D_\alpha^a y + a_0 y = f(t)
$$

denkleminin özel çözümü

$$y_p(t) = \left[\prod_{j=1}^{k} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\lambda_j\right)^n J_{(n+1)\alpha}^{a+}\right)^{\mu_j} f\right](t) \tag{2.28}$$

olarak verilir. Burada (2.28) denkleminin sağ tarafındaki seri düzgün yakınsaktır (Kılbas *et al*. 2006).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde uyumlu kesirli türevin analiziyle alakalı bazı temel kavramlar verilecektir. (Khalil *et al*. 2014; Abdeljawad 2015).

Tanım 3.1: $f: [0, \infty) \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bütün $t > 0$ ve $\alpha \in (0,1)$ için f fonksiyonunun "uyumlu kesirli türev" diye adlandırılan α mertebeli kesirli türevi,

$$T_\alpha(f)(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$$

olarak tanımlanır. Eğer f fonksiyonu $a > 0$ olmak üzere bazı $(0, a)$ aralığında α diferensiyellenebilir ve $\lim_{t \to 0^+} f^{(\alpha)}(t)$ limiti varsa o zaman,

$$f^{(\alpha)}(0) = \lim_{t \to 0^+} f^{(\alpha)}(t)$$

olur. f nin α mertebeden uyumlu kesirli türevini göstermek için bazen $T_\alpha(f)(t)$ yerine $f^{(\alpha)}(t)$ yazılacaktır. Ayrıca, α mertebeden uyumlu kesirli türev mevcutsa bu durum için f, α diferensiyellenebilirdir denilecektir. Bu tanımın bir sonucu olarak aşağıdaki teorem yazılabilir.

Teorem 3.1: Bir $f: [0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $t_0 > 0$ da $\alpha \in (0,1)$ için α diferensiyellenebilirse, f fonksiyonu t_0 noktasında süreklidir.

İspat:

$$f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0) = \frac{f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0)}{\varepsilon} \varepsilon$$

tanımından

$$\lim_{\varepsilon \to 0}[f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0)] = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0)}{\varepsilon} . \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon$$

yazılır. $h = \varepsilon t_0^{1-\alpha}$ alınırsa,

$$\lim_{h \to 0}[f(t_0 + h) - f(t_0)] = f^{(\alpha)}(t_0). 0$$

olur. Böylece,

$$\lim_{h \to 0} f(t_0 + h) = f(t_0)$$

olur. Bu ise f fonksiyonunun t_0 noktasında sürekli olduğunu ifade eder.

Teorem 3.2: $\alpha \in (0, 1]$ için f ve g, $t > 0$ noktasında α diferensiyellenebilir olsun. O halde,

1. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için $T_\alpha(af + bg) = aT_\alpha(f) + bT_\alpha(g)$ dir.

2. $\forall p \in \mathbb{R}$ için $T_\alpha(t^p) = pt^{p-\alpha}$ dir.

3. Tüm $f(t) = \lambda$ biçimindeki sabit fonksiyonlar için $T_\alpha(\lambda) = 0$ dır.

4. $T_\alpha(fg) = fT_\alpha(g) + gT_\alpha(f)$.

5. $T_\alpha(f/g) = \frac{gT_\alpha(f) - fT_\alpha(g)}{g^2}$ $(g(t) \neq 0)$.

6. Ek olarak eğer f diferensiyellenebilirse $T_\alpha(f) = t^{1-\alpha} \frac{df}{dt}(t)$ dir.

İspat: **(1)**, **(2)** ve **(3)** ün ispatları direkt tanımdan görülebilir. Burada (4), (5) ve (6) nın ispatları verilecektir.

(4) $t > 0$ için

$$T_\alpha(fg)(t) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t)}{\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) + f(t)g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)g(t)}{\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})\right) + f(t)\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - g(t)}{\varepsilon}$$

$$= T_\alpha f(t)\lim_{\varepsilon\to 0} g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) + f(t)T_\alpha g(t)$$

yazılabilir. g fonksiyonu t noktasında sürekli olduğu için $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) = g(t)$ olup ispat tamamlanır.

(5) $t > 0$ için

$$T_\alpha\left(\frac{f}{g}\right)(t) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\dfrac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})}{g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})} - \dfrac{f(t)}{g(t)}}{\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})g(t) - f(t)g(t) + f(t)g(t) - f(t)g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})}{g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})g(t)\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{[f(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)]g(t) - [g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - g(t)]f(t)}{g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})g(t)\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\dfrac{[f(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)]}{\varepsilon}g(t) - \dfrac{[g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - g(t)]}{\varepsilon}f(t)}{g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})g(t)}$$

$$= \frac{T_\alpha f(t)g(t) - T_\alpha g(t)f(t)}{\lim\limits_{\varepsilon\to 0} g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})\, g(t)}$$

yazılabilir. g fonksiyonu t de sürekli olduğu için $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) = g(t)$ olduğu da hesaba katılarak ispat tamamlanır.

(6) Bu özelliğin ispatı için Tanım 3.1 de $h = \varepsilon t^{1-\alpha}$ dönüşümü yapalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned} T_\alpha f(t) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})-f(t)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{ht^{\alpha-1}} \\ &= t^{1-\alpha}\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h} \\ &= t^{1-\alpha}\frac{df}{dt}(t) \end{aligned}$$

olduğu kolayca görülür.

Teorem 3.3 (Uyumlu kesirli diferensiyellenebilen fonksiyonlar için Rolle teoremi): $a > 0$ olmak üzere $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

i. $[a,b]$ aralığında sürekli,

ii. $\alpha \in (0,1)$ için α diferensiyellenebilir,

iii. $f(a) = f(b)$

koşullarını sağlasın. Bu takdirde, $f^{(\alpha)}(c) = 0$ olacak şekilde bir $c \in (a,b)$ vardır.

İspat: f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve $f(a) = f(b)$ olduğu için bir $c \in (a,b)$ yerel ekstremum noktasına sahiptir. Genelliği bozmaksızın c noktasının bir yerel minimum nokta olduğunu kabul edelim. Böylece

$$f^{(\alpha)}(c) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{f(c+\varepsilon c^{1-\alpha})-f(c)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0^-}\frac{f(c+\varepsilon c^{1-\alpha})-f(c)}{\varepsilon}$$

yazılabilir. Fakat, ilk limit negatif, ikinci limit ise pozitif değildir. O halde, $f^{(\alpha)}(c) = 0$ dır.

Teorem 3.4 (Uyumlu kesirli diferensiyellenebilen fonksiyonlar için ortalama değer teoremi): $a > 0$ olmak üzere $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ sürekli ve bazı $\alpha \in (0,1)$ için α diferensiyellenebilir olsun. Bu durumda

$$f^{(\alpha)}(c) = \frac{f(b) - f(a)}{\frac{1}{\alpha}b^{\alpha} - \frac{1}{\alpha}a^{\alpha}}$$

olacak şekilde bir $c \in (a, b)$ vardır.

İspat: k bir sabit sayı olmak üzere $g: [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu $g(t) = f(t) + k\frac{1}{\alpha}t^{\alpha}$ olarak tanımlayalım. Bu fonksiyon da $[a, b]$ aralığında sürekli ve her $t \in (a, b)$ için α diferensiyellenebilirdir. Şimdi k sabiti $g(a) = g(b)$ olacak şekilde seçilirse, $f(a) + k\frac{1}{\alpha}a^{\alpha} = f(b) + k\frac{1}{\alpha}b^{\alpha}$ olup

$$k = -\frac{f(b) - f(a)}{\frac{1}{\alpha}b^{\alpha} - \frac{1}{\alpha}a^{\alpha}}$$

yazılabilir. O halde $g(t) = f(t) - \frac{f(b)-f(a)}{\frac{1}{\alpha}b^{\alpha}-\frac{1}{\alpha}a^{\alpha}}\left(\frac{1}{\alpha}t^{\alpha}\right)$ olur. Bu fonksiyon Rolle teoreminin bütün şartlarını sağlar. Dolayısıyla (a, b) aralığında öyle bir c sayısı vardır ki $g^{(\alpha)}(c) = 0$ dır. Böylece,

$$f^{(\alpha)}(c) - \frac{f(b) - f(a)}{\frac{1}{\alpha}b^{\alpha} - \frac{1}{\alpha}a^{\alpha}} = 0 \Rightarrow f^{(\alpha)}(c) = \frac{f(b) - f(a)}{\frac{1}{\alpha}b^{\alpha} - \frac{1}{\alpha}a^{\alpha}}$$

elde edilir. Burada $T_{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}t^{\alpha}\right) = 1$ özelliği kullanılmıştır.

Tanım 3.2: $f: [a, \infty) \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $0 < \alpha \leq 1$ için f fonksiyonunun α mertebeli sol uyumlu kesirli türevi

$$(T_\alpha^a f)(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon(t-a)^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$$

olarak tanımlanır. Eğer (a, b) aralığında $(T_\alpha^a f)(t)$ mevcutsa $(T_\alpha^a f)(a) = \lim_{t \to a^+} (T_\alpha^a f)(t)$ olur.

Tanım 3.3: $f: (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $0 < \alpha \leq 1$ için f fonksiyonunun α mertebeli sağ uyumlu kesirli türevi

$$({}_\alpha^b T f)(t) = -\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon(b-t)^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$$

olarak tanımlanır. Eğer (a, b) aralığında $\left({}^b T_\alpha f\right)(t)$ mevcutsa $\left({}^b T_\alpha f\right)(b) = \lim_{t \to b^-} \left({}^b T_\alpha f\right)(t)$ olur.

Eğer f fonksiyonu diferensiyellenebilir ise

$(T_\alpha^a f)(t) = (t-a)^{1-\alpha} f'(t)$ ve $({}_\alpha^b T f)(t) = -(b-t)^{1-\alpha} f'(t)$ dir.

Tanım 3.4: $\alpha \in (n, n+1]$ ve $\beta = \alpha - n$ olsun. $f: [a, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun α mertebeli sol uyumlu kesirli türevi

$$(T_\alpha^a f)(t) = \left(T_\beta^a f^{(n)}\right)(t)$$

olarak tanımlanır. Böylece α mertebeli sol uyumlu kesirli türevin var olabilmesi için f fonksiyonunun n kez türevlenebilir olması gerekir.

Benzer olarak $\alpha \in (n, n+1]$ ve $\beta = \alpha - n$ olsun. $f: (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun α mertebeli sağ uyumlu kesirli türevi

$$({}^{b}_{\alpha}Tf)(t) = (-1)^{n+1}\left({}^{b}_{\beta}Tf^{(n)}\right)(t)$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.5: $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere α mertebeli sol uyumlu kesirli integral

$$(I^{a}_{\alpha}f)(t) = \int_{a}^{t} f(x) d_{\alpha}(x, a) = \int_{a}^{t} (x-a)^{\alpha-1} f(x) dx$$

olarak tanımlanır. Benzer olarak $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere α mertebeden sağ uyumlu kesirli integral,

$$\left({}^{b}I_{\alpha}\, f\right)(t) = \int_{t}^{b} f(x) d_{\alpha}(b, x) = \int_{t}^{b} (b-x)^{\alpha-1} f(x) dx$$

olarak tanımlanır.

Lemma 3.1: $f: [a, \infty) \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Bu takdirde bütün $t > a$ için

$$T^{a}_{\alpha} I^{a}_{\alpha} f(t) = f(t)$$

olur. Sağ uyumlu kesirli analiz için de benzer bir lemma aşağıdaki gibi verilebilir.

Lemma 3.2: $f: (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Bu takdirde bütün $t < b$ için

$$ {}^{b}T_{\alpha} \ \ {}^{b}I_{\alpha} \, f(t) = f(t) $$

olur.

Tanım 3.6: $\alpha \in (n, n+1]$ olsun. Bu takdirde, $f: [a, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun α mertebeli sol uyumlu kesirli integrali

$$ (I_{\alpha}^{a} f)(t) = \boldsymbol{I}_{n+1}^{a}\left((t-a)^{\beta-1} f\right) = \frac{1}{n!} \int_{a}^{t} (t-x)^{n} (x-a)^{\beta-1} f(x) dx $$

olarak tanımlanır.

Eğer $\alpha = n+1$ ise bu takdirde $\beta = \alpha - n = n + 1 - n = 1$ olur. Böylece,

$$ (I_{\alpha}^{a} f)(t) = (\boldsymbol{I}_{n+1}^{a} f)(t) = \frac{1}{n!} \int_{a}^{t} (t-x)^{n} f(x) dx $$

olur. Bu ise, $(a, t]$ aralığında $n+1$ kez f fonksiyonunun tekrarlı integralinin Cauchy formülü ile yazılımıdır.

$\alpha > 0$ mertebeli sol Riemann-Liouville kesirli integralinin

$$ (J_{\alpha}^{a} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a}^{t} (t-x)^{\alpha-1} f(x) dx $$

olarak tanımlandığı biliniyor. $\alpha = n+1, \quad n = 0,1,2 \ldots$ için

$$ (I_{\alpha}^{a} f)(t) = (J_{\alpha}^{a} f)(t) $$

olduğu görülür.

Örnek 3.1: $\alpha, \mu > 0$ için

$$J_{\alpha}^{a}((t-a)^{\mu-1})(t) = \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\alpha+\mu)}(t-a)^{\alpha+\mu-1}$$

olduğu bilinmektedir. Şimdi $(t-a)^{\mu-1}$ fonksiyonunun $\alpha \in (n, n+1]$ için uyumlu kesirli integralini bulalım. μ, $\alpha+\mu-n-1>0$ olacak şekilde bir reel sayı olsun. Tanım 3.6 dan

$$\left(I_{\alpha}^{a}((t-a)^{\mu-1})\right)(t) = \left(\boldsymbol{I}_{n+1}^{a}((t-a)^{\alpha+\mu-n-2})\right)(t)$$

yazılır. Ayrıca, Riemann-Liouville kesirli integralin özelliğinden

$$\left(\boldsymbol{I}_{n+1}^{a}((t-a)^{\alpha+\mu-n-2})\right)(t) = \left(J_{n+1}^{a}((t-a)^{\alpha+\mu-n-2})\right)(t)$$

eşitliği de yazılabilir. Böylelikle

$$\left(I_{\alpha}^{a}((t-a)^{\mu-1})\right)(t) = \left(J_{n+1}^{a}((t-a)^{\alpha+\mu-n-2})\right)(t) = \frac{\Gamma(\alpha+\mu-n-1)}{\Gamma(\alpha+\mu)}(t-a)^{\alpha+\mu-1}$$

olur. Benzer şekilde, bu tip fonksiyonların sağ uyumlu kesirli integrali

$$\begin{aligned}\left({}^{b}I_{\alpha}\,((b-t)^{\mu-1})\right)(t) &= \left({}^{b}J_{n+1}((b-t)^{\alpha+\mu-n-2})\right)(t)\\ &= \frac{\Gamma(\alpha+\mu-n-1)}{\Gamma(\alpha+\mu)}(b-t)^{\alpha+\mu-1}\end{aligned}$$

olarak bulunur. Buradan da anlaşılıyor ki: Riemann-Liouville kesirli integrali ile uyumlu kesirli integral bir polinom fonksiyonuna uygulandığında bir sabit farkıyla aynı sonucu verirler.

Teorem 3.5: $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $1<\alpha+\mu\leq 2$ olacak şekilde $0<\alpha,\ \mu\leq 1$ olsun. Bu takdirde

$$\left(I_\alpha I_\mu f\right)(t)=\frac{t^\mu}{\mu}(I_\alpha f)(t)+\frac{1}{\mu}\left(I_{\alpha+\mu}f\right)(t)-\frac{t}{\mu}\int_0^t x^{\alpha+\mu-2}f(x)dx$$

olur.

İspat: Tanım 3.6 dan

$$\left(I_{\alpha+\mu}f\right)(t)=\left(\boldsymbol{I}_2 x^{\alpha+\mu-2}f(x)\right)(t)=\int_0^t (t-x)x^{\alpha+\mu-2}dx$$

yazılır. Şimdi, integral mertebelerinin yer değiştirmesi yardımıyla ispatı tamamlayalım:

$$\begin{aligned}\left(I_\alpha I_\mu f\right)(t)&=\int_0^t\left(\int_0^{t_1} f(x)x^{\alpha-1}dx\right)t_1^{\mu-1}dt_1\\&=\int_0^t f(x)x^{\alpha-1}\left(\int_x^t t_1^{\mu-1}dt_1\right)dx\\&=\int_0^t f(x)x^{\alpha-1}\left[\frac{t^\mu}{\mu}-\frac{x^\mu}{\mu}\right]dx\\&=\frac{t^\mu}{\mu}(I_\alpha f)(t)+\frac{1}{\mu}\left[\left(I_{\alpha+\mu}f\right)(t)-t\int_0^t x^{\alpha+\mu-2}f(x)dx\right].\end{aligned}$$

Riemann-Liouville sol ve sağ kesirli integral için Q-operatörünün işlevinin $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $Qf(t)=f(a+b-t)$ için

$$QJ_{\alpha}^{a}f(t) = {}^{b}J_{\alpha}\,Qf(t)$$

olduğu biliniyor.

Şimdi, $\alpha \in (n, n+1]$ için uyumlu kesirli integral için bu durum incelenirse

$$\begin{aligned} QI_{\alpha}^{a}f(t) &= QJ_{n+1}^{a}\big((t-a)^{\alpha-n-1}f(t)\big) = {}^{b}J_{n+1}\big((b-t)^{\alpha-n-1}f(a+b-t)\big) \\ &= {}^{b}I_{\alpha}\,Qf(t) \end{aligned}$$

olduğu görülür. Yani, Q-operatörü burada da aynı işlevi görür.

Lemma 3.3: $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $f^{(n)}(t)$ sürekli ve $\alpha \in (n, n+1]$ olsun. Bu durumda, $\forall t > a$ için

$$T_{\alpha}^{a}I_{\alpha}^{a}f(t) = f(t)$$

olur.

İspat: Tanım 2.4 den

$$\begin{aligned} T_{\alpha}^{a}I_{\alpha}^{a}f(t) &= T_{\beta}^{a}\left(\frac{d^{n}}{dt^{n}}I_{\alpha}^{a}f(t)\right) = T_{\beta}^{a}\left(\frac{d^{n}}{dt^{n}}I_{n+1}^{a}\left((t-a)^{\beta-1}f(t)\right)\right) \\ &= T_{\beta}^{a}\left(I_{1}^{a}\left((t-a)^{\beta-1}f(t)\right)\right) = T_{\beta}^{a}I_{\beta}^{a}f(t) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, Lemma 3.1 den sonuç görülür. Benzer olarak Lemma 3.2 de Lemma 3.4 deki gibi genelleştirilebilir.

Lemma 3.4: $f: (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $f^{(n)}(t)$ sürekli ve $\alpha \in (n, n+1]$ olsun. Bu durumda, $\forall t < b$ için

$$^{b}T_{\alpha} \ \ ^{b}I_{\alpha} \, f(t) = f(t)$$

olur.

Lemma 3.5: $f: [a, \infty) \to \mathbb{R}$ diferensiyellenebilen bir fonksiyon ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Bu takdirde $\forall t > a$ için

$$I_{\alpha}^{a} T_{\alpha}^{a} f(t) = f(t) - f(a)$$

olur.

İspat: Tanım 3.5 den

$$I_{\alpha}^{a} T_{\alpha}^{a} f(t) = \int_{a}^{t} (x-a)^{\alpha-1} T_{\alpha}^{a} f(x) dx$$

yazılır. f diferensiyellenebilir olduğundan

$$I_{\alpha}^{a} T_{\alpha}^{a} f(t) = \int_{a}^{t} (x-a)^{\alpha-1} (x-a)^{1-\alpha} f'(x) dx = f(t) - f(a)$$

sonucu elde edilir. Lemma 3.5 daha yüksek mertebeler için aşağıdaki gibi genelleştirebilir.

Lemma 3.6: $\alpha \in (n, n+1]$ ve $f: [a, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $(n+1)$ kez diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Bu takdirde, $\forall t > a$ için

$$I_\alpha^a T_\alpha^a f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^k}{k!}$$

olur.

İspat: Tanım 3.4, Tanım 3.6 ve f fonksiyonunun $(n+1)$ kez diferensiyellenebilen bir fonksiyon olmasından aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

$$I_\alpha^a T_\alpha^a f(t) = I_{n+1}^a \left((t-a)^{\beta-1} T_\beta^a f^{(n)}(t)\right) = I_{n+1}^a \left((t-a)^{\beta-1}(t-a)^{1-\beta} f^{(n+1)}(t)\right) = I_{n+1}^a \left(f^{(n+1)}(t)\right).$$

Sonra kısmi integrasyon uygulanarak ispat tamamlanır. Benzer olarak sağ uyumlu kesirli türev için bu durum aşağıdaki gibi verilebilir.

Lemma 3.7: $\alpha \in (n, n+1]$ ve $f: (-\infty, b] \to \mathbb{R}$, $(n+1)$ kez diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Bu takdirde $\forall t < b$ için

$$^{b}I_\alpha \ ^{b}T_\alpha \ f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k f^{(k)}(b)(b-t)^k}{k!}$$

olur.

Teorem 3.6 (Zincir Kuralı): $\alpha \in (0,1]$ ve $f, g: [a, \infty) \to \mathbb{R}$ (sol) α diferensiyellenebilen fonksiyonlar olsun. $h(t) = f\big(g(t)\big)$ olmak üzere bütün $t \neq a$ ve $g(t) \neq 0$ için $h(t)$, (sol) α diferensiyellenebilirdir ve

$$(T_\alpha^a h)(t) = (T_\alpha^a f)\big(g(t)\big)(T_\alpha^a g)(t) g(t)^{\alpha-1}$$

şeklindedir. Eğer $t = a$ ise,

$$(T_\alpha^a h)(t) = \lim_{t\to a^+} (T_\alpha^a f)\big(g(t)\big)(T_\alpha^a g)(t) g(t)^{\alpha-1}$$

olur.

İspat: Tanım 3.2 de $u = t + \varepsilon(t-a)^{1-\alpha}$ değişken değiştirmesi yapılır ve g fonksiyonunun sürekli olduğu kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
(T_\alpha^a h)(t) &= \lim_{u\to t} \frac{f\big(g(u)\big) - f\big(g(t)\big)}{(u-t)} (t-a)^{1-\alpha} \\
&= \lim_{u\to t} \frac{f\big(g(u)\big) - f\big(g(t)\big)}{\big(g(u)-g(t)\big)} . \lim_{u\to t} \frac{g(u)-g(t)}{u-t} (t-a)^{1-\alpha} \\
&= \lim_{g(u)\to g(t)} \frac{f\big(g(u)\big) - f\big(g(t)\big)}{\big(g(u)-g(t)\big)} g(t)^{1-\alpha} . T_\alpha^a g(t) . g(t)^{\alpha-1} \\
&= (T_\alpha^a f)\big(g(t)\big) . (T_\alpha^a g)(t) . g(t)^{\alpha-1}
\end{aligned}$$

olur.

Lemma 3.8: $f: [a, \infty) \to \mathbb{R}$, iki kez diferensiyellenebilen bir fonksiyon ve $1 < \alpha + \mu \leq 2$ olacak şekilde $0 < \alpha, \beta \leq 1$ olsun. Bu durumda,

$$\big(T_\alpha^a T_\beta^a f\big)(t) = T_{\alpha+\beta}^a f(t) + (1-\beta)(t-a)^{-\beta} T_\alpha^a f(t)$$

olur.

İspat: f, fonksiyonu iki kez türevlenebildiği için

$$\big(T_\alpha^a T_\beta^a f\big)(t) = T_\alpha^a \Big((t-a)^{1-\beta} f'(t)\Big)$$

yazılabilir. Elde edilen bu eşitliğe uyumlu kesirli türevler için geçerli olan çarpım kuralı uygulanırsa,

$$\left(T_\alpha^a T_\beta^a f\right)(t) = (1-\beta)(t-a)^{-\beta}(t-a)^{1-\alpha} f'(t) + (t-a)^{1-\beta} T_\alpha^a\left(f'(t)\right)$$

elde edilir. f fonksiyonu iki kez türevlenebildiği için $T_\alpha^a\left(f'(t)\right) = (t-a)^{1-\beta} f''(t)$ yazılabilir. Böylece,

$$\left(T_\alpha^a T_\beta^a f\right)(t) = (1-\beta)(t-a)^{-\beta}(t-a)^{1-\alpha} f'(t) + (t-a)^{2-(\alpha+\beta)} f''(t)$$

elde edilir. $T_\alpha^a f(t) = (t-a)^{1-\alpha} f'(t)$ ve $T_{\alpha+\beta}^a f(t) = (t-a)^{2-(\alpha+\beta)} f''(t)$ olduğundan,

$$\left(T_\alpha^a T_\beta^a f\right)(t) = T_{\alpha+\beta}^a f(t) + (1-\beta)(t-a)^{-\beta} T_\alpha^a f(t)$$

ifadesi elde edilir.

Teorem 3.7: fg, türevlenebilir olacak şekilde $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$ iki fonksiyon olsun. Bu takdirde,

$$\int_a^b f(t) T_\alpha^a g(t) d_\alpha(t, a) = fg \Big|_a^b - \int_a^b g(t) T_\alpha^a f(t) d_\alpha(t, a)$$

olur.

İspat: Lemma 3.5 den

$$\int_a^b T_\alpha^a (fg)(t)\, d_\alpha(t, a) = fg \Big|_a^b$$

yazılabilir. Ayrıca, Teorem 3.2 (4) den

$$\int_a^b \left(T_\alpha^a f(t)g(t) + f(t)T_\alpha^a g(t)\right) d_\alpha(t,a) = fg\,\Big|_a^b$$

yazılır. Buradan da,

$$\int_a^b f(t)T_\alpha^a g(t)d_\alpha(t,a) = fg\,\Big|_a^b - \int_a^b g(t)T_\alpha^a f(t)d_\alpha(t,a)$$

olduğu görülür.

Lemma 3.9: $0 < \alpha \leq 1$ ve $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ iki fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\int_a^b I_\alpha^a\big(f(t)\big)g(t)d_\alpha(b,t) = \int_a^b f(t)\ {}^bI_\alpha\ \big(g(t)\big)d_\alpha(t,a)$$

olur.

İspat: Tanım 3.5 den

$$\int_a^b I_\alpha^a\big(f(t)\big)g(t)d_\alpha(b,t) = \int_a^b \left(\int_a^t (x-a)^{\alpha-1}f(x)dx\right)g(t)(b-t)^{\alpha-1}dt$$

elde edilir. Buradan da integrallerin mertebelerini değiştirerek

$$\int_a^b I_\alpha^a\big(f(t)\big)g(t)d_\alpha(b,t) = \int_a^b f(t)\ {}^bI_\alpha\ \big(g(t)\big)d_\alpha(t,a)$$

olduğu görülür.

Teorem 3.8: $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$ türevlenebilen iki fonksiyon ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Bu durumda,

$$\int_a^b T_\alpha^a \left(f(t)\right) g(t) d_\alpha(t, a) = \int_a^b f(t)\, {}^b I_\alpha \left(g(t)\right) d_\alpha(b, t) + \left. fg \right|_a^b$$

olur.

İspat: Lemma 3.7 den ve g fonksiyonunun türevlenebilir olmasından,

$$\int_a^b T_\alpha^a \left(f(t)\right) g(t) d_\alpha(t, a)$$

$$= \int_a^b T_\alpha^a \left(f(t)\right)\, {}^b I_\alpha \;\; {}^b T_\alpha \; g(t) d_\alpha(t, a) + g(b) \int_a^b T_\alpha^a \left(f(t)\right) d_\alpha(t, a)$$

yazılır. Şimdi, Lemma 3.9 uygulanırsa,

$$\int_a^b T_\alpha^a \left(f(t)\right) g(t) d_\alpha(t, a) = \int_a^b I_\alpha^a T_\alpha^a \left(f(t)\right)\, {}^b T_\alpha \; \left(g(t)\right) d_\alpha(t, a) + g(b) I_\alpha^a T_\alpha^a \left(f(t)\right)$$

elde edilir. Son olarak, f türevlenebilir olduğu için $I_\alpha^a T_\alpha^a \left(f(t)\right) = f(t) - f(a)$ ve g türevlenebilir olduğu için ${}^b I_\alpha \;\; {}^b T_\alpha \; g(t) = g(t) - g(b)$ olup bu ifadeler yerlerine yazılarak ispat tamamlanır.

Tanım 3.7: $0 < \alpha < 1$ ve $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ olsun. Bu durumda n. mertebeden sol dizisel uyumlu kesirli türev

$${}^{(n)}T_\alpha^a f(t) = T_\alpha^a T_\alpha^a \ldots T_\alpha^a f(t)$$

biçiminde tanımlanır. Burada T_α^a, n kez tekrar etmektedir. Benzer şekilde, $n.$ mertebeden sağ dizisel uyumlu kesirli türev

$$^{b}T_\alpha^{(n)}f(t) = {}^{b}T_\alpha \ {}^{b}T_\alpha \ \dots \ {}^{b}T_\alpha \ f(t)$$

şeklindedir.

Teorem 3.9: f fonksiyonu bazı $0 < \alpha \leq 1$ için bir t_0 noktası civarında sonsuz bir şekilde α diferensiyellenebilir olsun. Bu takdirde f fonksiyonu

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(T_\alpha^{t_0} f\right)^{(k)}(t_0)(t-t_0)^{\alpha k}}{\alpha^k k!}, \qquad t_0 < t < t_0 + R^{1/\alpha}, \qquad R > 0$$

biçiminde kesirsel kuvvet seri açılımına sahiptir. Burada $\left(T_\alpha^{t_0} f\right)^{(k)}(t_0)$ ifadesi k defa art arda uyumlu kesirli türevin uygulanması manasındadır.

İspat: $t_0 < t < t_0 + R^{1/\alpha}$, $R > 0$ olmak üzere $f(t)$=$c_0 + c_1(t-t_0)^\alpha + c_2(t-t_0)^{2\alpha} + \cdots$ olsun. Bu takdirde $f(t_0)$=c_0 olur. f fonksiyonuna $T_\alpha^{t_0}$ uygulanırsa t_0 noktası için $\left(T_\alpha^{t_0} f\right)(t_0)$=$\alpha c_1$ olur ve böylece $c_1 = \frac{\left(T_\alpha^{t_0} f\right)(t_0)}{\alpha}$ olur. Bu şekilde devam edilerek f fonksiyonuna n defa $T_\alpha^{t_0}$ uygulanırsa $\left(T_\alpha^{t_0} f\right)^{(n)}(t_0) = c_n\alpha(2\alpha)\dots(n\alpha) = c_n\alpha^n n!$ olur. Buradan da $c_n = \frac{\left(T_\alpha^{t_0} f\right)^{(n)}(t_0)}{\alpha^n n!}$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Örnek 3.2: $y(t) = e^{\frac{t^\alpha}{\alpha}}$ ve $t_0 = 0$ olsun. Böylece, fonksiyonun kesirsel kuvvet seri açılımı

$$y(t) = e^{\frac{t^\alpha}{\alpha}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k\alpha}}{\alpha^k k!}$$

biçiminde yazılır. Oran testi bu fonksiyonun $[0, \infty)$ aralığında yakınsak olduğunu gösterir. Diğer bir örnek olarak $y(t) = \frac{1}{1-\frac{t^\alpha}{\alpha}}$ fonksiyonunun kesirsel kuvvet seri açılımı

$$y(t) = \frac{1}{1 - \frac{t^\alpha}{\alpha}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{\alpha k}}{\alpha^k}, \quad t \in [0,1)$$

şeklinde bulunur.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Uyumlu Kesirli Türevin Analizi

Bu bölümde, bu yeni kesirli türev tanımının analizine katkı sağlayan bazı toeremler verilmiştir.

Teorem 4.1 (Uyumlu kesirli türevler için genelleştirilmiş ortalama değer teoremi): $a > 0$ olmak üzere f ve g fonksiyonları $[a,b]$ aralığında sürekli ve (a,b) aralığında bazı $\alpha \in (0,1)$ için α diferensiyellenebilir olsun. Ayrıca, her $t \in (a,b)$ için $g^{(\alpha)}(t) \neq 0$ olsun. Bu takdirde, (a,b) aralığında

$$\frac{f^{(\alpha)}(c)}{g^{(\alpha)}(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

olacak şekilde en az bir c noktası vardır.

İspat: İspatı, klasik türevde verilen ispat gibidir.

Teorem 4.2: $a > 0$ olmak üzere $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli monoton artan ve $\alpha \in (0,1]$ için α diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $a < c < b$ ve $f'(c) \neq 0$ ise f^{-1} ters fonksiyonu $d = f(c)$ noktasında α diferensiyellenebilirdir ve

$$(f^{-1})^{(\alpha)}(d) = (dc)^{1-\alpha} \frac{1}{f^{(\alpha)}(c)}$$

dir.

İspat: Uyumlu kesirli türevin tanımından,

$$(f^{-1})^{(\alpha)}(d) = \frac{f^{-1}(d + \varepsilon d^{1-\alpha}) - f^{-1}(d)}{\varepsilon}$$

yazılabilir. $f^{-1}(d + \varepsilon d^{1-\alpha}) = t$ denirse $f(t) = d + \varepsilon d^{1-\alpha}$ ve $d = f(c)$ olduğundan $f^{-1}(d) = c$ olur. Dolayısıyla,

$$(f^{-1})^{(\alpha)}(d) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{t - c}{\frac{f(t) - f(c)}{d^{1-\alpha}}}$$

yazılabilir. Buradan da,

$$(f^{-1})^{(\alpha)}(d) = d^{1-\alpha} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\frac{f(t) - f(c)}{t - c}}$$

$$(f^{-1})^{(\alpha)}(d) = d^{1-\alpha} \frac{1}{f'(c)}$$

elde edilir. Son olarak, f fonksiyonu c noktasında türevlenebildiği için

$$f^{(\alpha)}(c) = c^{1-\alpha} f'(c)$$

yazılabilir. Buna göre,

$$(f^{-1})^{(\alpha)}(d) = (dc)^{1-\alpha} \frac{1}{f^{(\alpha)}(c)}$$

olacaktır.

Örnek 4.1: e^t fonksiyonunun ters fonksiyonu için $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere $t = 1$ noktasındaki α mertebeli uyumlu kesirli türevini bulunuz.

Çözüm: e^t fonksiyonunun tersinin $\ln t$ olduğu biliniyor. Önce, $\ln t$ fonksiyonunun α mertebeli uyumlu kesirli türevi bulunup verilen teoremdeki sonuçla karşılaştırılacaktır. Uyumlu kesirli türev tanımına göre

$$T_\alpha(lnt) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{ln(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - lnt}{\varepsilon}$$

yazılabilir. Logaritmanın özelliğinden

$$T_\alpha(lnt) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{ln(1 + \varepsilon t^{-\alpha})}{\varepsilon}$$

olur. $\varepsilon t^{-\alpha} = k$ denirse $\varepsilon \to 0$ iken $k \to 0$ olup

$$T_\alpha(lnt) = t^{-\alpha} \lim_{k \to 0} \frac{ln(1 + k)}{k} = t^{-\alpha} \lim_{k \to 0} ln(1 + k)^{1/k} = t^{-\alpha}$$

elde edilir. Bulunan bu sonuç, teoremle uyumludur. Çünkü $c = 1$ için $d = e$ dir. e^t fonksiyonunun c noktası için α mertebeli uyumlu kesirli türevi

$$f^{(\alpha)}(c) = c^{1-\alpha} e^c$$

şeklindedir. Dolayısıyla

$$f^{(\alpha)}(1) = e$$

olur. Bütün bu yazılanlara göre

$$(f^{-1})^{(\alpha)}(e) = e^{1-\alpha} \frac{1}{e} = e^{-\alpha}$$

olacaktır.

Teorem 4.3: $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $y = f(t)$ fonksiyonu bir $x > 0$ parametresi yardımıyla $t = h(x)$ ve $y = k(x)$ olarak verilsin. $h, k: (0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $\alpha \in (0,1]$ için α diferensiyellenebilir olmak üzere,

$$T_\alpha(f)(t) = t^{1-\alpha} \frac{T_\alpha(k)(x)}{T_\alpha(h)(x)}$$

olur.

İspat: $t = h(x)$ ve $y = k(x)$, α diferensiyellenebilir olduğundan

$$\Delta t = h(x + \varepsilon x^{1-\alpha}) - h(x),$$
$$\Delta y = k(x + \varepsilon x^{1-\alpha}) - k(x)$$

olarak yazılabilir. f fonksiyonunun α mertebeli uyumlu kesirli türevi

$$T_\alpha(f)(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$$

olduğundan pay ve payda $t^{1-\alpha}$ ile çarpılırsa,

$$T_\alpha(f)(t) = t^{1-\alpha} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon t^{1-\alpha}}$$

olur. Son eşitlik de

$$T_\alpha(f)(t) = t^{1-\alpha} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

olarak yazılabilir. Δy ve Δt ifadelerinin değerleri yerine yazılarak devam edilirse,

$$T_\alpha(f)(t) = t^{1-\alpha} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = t^{1-\alpha} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{k(x+\varepsilon x^{1-\alpha}) - k(x)}{h(x+\varepsilon x^{1-\alpha}) - h(x)}$$

$$= t^{1-\alpha} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\dfrac{k(x+\varepsilon x^{1-\alpha}) - k(x)}{\varepsilon}}{\dfrac{h(x+\varepsilon x^{1-\alpha}) - h(x)}{\varepsilon}}$$

$$= t^{1-\alpha} \frac{T_\alpha(k)(x)}{T_\alpha(h)(x)}$$

elde edilir.

Örnek 4.2: $y = 4x$ ve $t = 2x$ olmak üzere $y = f(t)$ fonksiyonun α mertebeli uyumlu kesirli türevini bulunuz.

Çözüm: Teorem 4.3 den

$$T_\alpha(f)(t) = t^{1-\alpha} \frac{T_\alpha(y)(x)}{T_\alpha(t)(x)} = t^{1-\alpha} \frac{4x^{1-\alpha}}{2x^{1-\alpha}} = 2t^{1-\alpha}$$

olur. Gerçekten de eğer parametre yok edilecek olursa fonksiyon $y = 2t$ olarak bulunur. Şimdi, bu fonksiyon için α mertebeli uyumlu kesirli türev alınırsa,

$$T_\alpha(f)(t) = 2t^{1-\alpha}$$

olduğu görülür.

Teorem 3.4: $\alpha \in (0,1]$ olmak üzere $F(t, y) = 0$ bağıntısıyla verilen kapalı fonksiyonun α mertebeli uyumlu kesirli türevi

$$T_\alpha(y)(t) = -y^{1-\alpha}\frac{\frac{\partial T_\alpha(F)(t,y)}{\partial t^\alpha}}{\frac{\partial T_\alpha(F)(t,y)}{\partial y^\alpha}}$$

olur.

İspat: İki değişkenli fonksiyonlar için zincir kuralı formülü kullanılarak

$$\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial t}\frac{dt}{dt} = 0$$

yazılabilir. Fakat buradaki türev uyumlu kesirli türev olduğundan, uyumlu kesirli türevler için geçerli olan zincir kuralı kullanılmalıdır. Uyumlu kesirli türev için zincir kuralı hatırlanacak olursa $h(t) = f\big(g(t)\big)$ olmak üzere

$$\big(T_\alpha\ h\big)(t) = \big(T_\alpha\ f\big)\big(g(t)\big)\big(T_\alpha\ g\big)(t)g(t)^{\alpha-1}$$

yazılabilir. Bu formülden

$$\frac{\partial T_\alpha(F)}{\partial y^\alpha}T_\alpha(y)y^{\alpha-1} + \frac{\partial T_\alpha(F)}{\partial t^\alpha} = 0$$

olduğu görülür. Buradan da, $T_\alpha(y)$ yalnız bırakılırsa istenilen sonuca ulaşılır.

Örnek 4.3: $F(t,y) = t^2 + 3y^2t - 8t + 4y - 1$ kapalı fonksiyonu için $T_\alpha(y)$ yi bulunuz.

Çözüm:

$$T_\alpha(y)(t) = -y^{1-\alpha}\frac{\frac{\partial T_\alpha(F)(t,y)}{\partial t^\alpha}}{\frac{\partial T_\alpha(F)(t,y)}{\partial y^\alpha}}$$

olduğundan

$$T_\alpha(y)(t) = -y^{1-\alpha}\frac{2t^{2-\alpha} - 8t^{1-\alpha} + t^{1-\alpha}3y^2}{6y^{2-\alpha}t + 4y^{1-\alpha}}$$

yazılabilir. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$T_\alpha(y)(t) = -\frac{2t^{2-\alpha} - 8t^{1-\alpha} + t^{1-\alpha}3y^2}{6yt + 4}$$

olur. Bulunan bu sonuç direkt işlem yapılarak da görülebilir:

$$t^2 + 3y^2t - 8t + 4y - 1 = 0$$
$$2t^{2-\alpha} + 6y^{2-\alpha}T_\alpha(y)y^{\alpha-1}t + t^{1-\alpha}3y^2 - 8t^{1-\alpha} + 4T_\alpha(y) = 0$$
$$T_\alpha(y)(6yt + 4) = -(2t^{2-\alpha} + t^{1-\alpha}.3y^2 - 8t^{1-\alpha})$$

olup,

$$T_\alpha(y) = -\frac{(2t^{2-\alpha} + t^{1-\alpha}3y^2 - 8t^{1-\alpha})}{(6yt + 4)}$$

olduğu görülür.

4.2. Varlık ve Teklik Teoremleri

Bu bölümde uyumlu kesir mertebeden dizisel lineer diferensiyel denklemlerin varlık ve teklik teoremleri, sol uyumlu kesirli türevin $a = 0$ olması durumu için incelenmiştir. Benzer olarak diğer durumlar için de varlık ve teklik teoremleri yazılabilir.

$n\alpha$ mertebeli homojen dizisel lineer kesirli diferensiyel denklem

$$^{(n)}T_\alpha y + p_{n-1}(t)\,^{(n-1)}T_\alpha y + \cdots + p_2(t)\,^{(2)}T_\alpha y + p_1(t)T_\alpha y + p_0(t)y = 0 \qquad (4.1)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $^{(n)}T_\alpha y = T_\alpha T_\alpha \ldots T_\alpha y$, n. mertebeden dizisel uyumlu kesirli türevi göstermektedir. Benzer olarak, homojen olmayan dizisel lineer kesirli diferensiyel denklem

$$^{(n)}T_\alpha y + p_{n-1}(t)\,^{(n-1)}T_\alpha y + \cdots + p_2(t)\,^{(2)}T_\alpha y + p_1(t)T_\alpha y + p_0(t)y = f(t) \qquad (4.2)$$

şeklinde tanımlanır. İşlemlerin kolay ilerlemesi için (4.2) denklemi

$$L_\alpha[y] = \left(^{(n)}T_\alpha + p_{n-1}(t)\,^{(n-1)}T_\alpha + \cdots + p_2(t)\,^{(2)}T_\alpha + p_1(t)T_\alpha + p_0(t)\right)y = f(t) \qquad (4.3)$$

olarak yazılabilir.

Teorem 4.5: $a \geq 0$ olmak üzere $p(t)$, $q(t) \in C(a,b)$ ve $0 < \alpha \leq 1$ için y, α diferensiyellenebilir olsun. Bu takdirde, $t_0 \in (a,b)$ olmak üzere

$$T_\alpha y + p(t)y = q(t) \qquad (4.4)$$

$$y(t_0) = y_0 \qquad (4.5)$$

başlangıç değer problemi (a,b) aralığında tek bir çözüme sahiptir.

İspat: y, α diferensiyellenebilir olduğu için

$$T_\alpha y + p(t)y = q(t) \tag{4.6}$$
$$t^{1-\alpha}y' + p(t)y = q(t) \tag{4.7}$$
$$y' + t^{\alpha-1}p(t)y = t^{\alpha-1}q(t) \tag{4.8}$$

yazılır. $t^{\alpha-1}p(t)$ ve $t^{\alpha-1}q(t)$ ifadeleri verilen şartlar altında sürekli olduğu için klasik lineer denklemler için verilen varlık ve teklik teoremlerinden ispat görülür.

Teorem 4.6: $p_{n-1}(t),\ldots,p_1(t),p_0(t),q(t) \in C(a,b)$ ve y, n kez α diferensiyellenebilir olsun. Bu takdirde,

$$^{(n)}T_\alpha y + p_{n-1}(t)\,^{(n-1)}T_\alpha y + \cdots + p_2(t)\,^{(2)}T_\alpha y + p_1(t)T_\alpha y + p_0(t)y = q(t) \tag{4.9}$$
$$y(t_0) = y_0, T_\alpha y(t_0) = y_1, \ldots, \,^{(n-1)}T_\alpha y(t_0) = y_{n-1},\ a < t_0 < b \tag{4.10}$$

başlangıç değer probleminin (a,b) aralığında yalnız bir $y(t)$ çözümü vardır.

İspat: Yerel çözümün varlığını göstermek için, problemin birinci mertebeden diferensiyel denklem sistemine indirgenmesi gerekir. Bunun için

$$x_1 = y, x_2 = T_\alpha y, x_3 = \,^{(2)}T_\alpha y, \ldots, x_n = \,^{(n-1)}T_\alpha y \tag{4.11}$$

dönüşümü yapılırsa

$$\begin{gathered} T_\alpha x_1 = x_2 \\ T_\alpha x_2 = x_3 \\ \vdots \\ T_\alpha x_{n-1} = x_n \\ T_\alpha x_n = -p_{n-1}x_n - \cdots - p_2x_3 - p_1x_2 - p_0x_1 + q(t) \end{gathered} \tag{4.12}$$

diferensiyel denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi

$$X(t)=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}, P(t)=\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_{n-1} \end{bmatrix}}_{P(t)}, Q(t)=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ q(t) \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

olmak üzere kısaca

$$T_\alpha X(t)+P(t)X(t)=Q(t) \tag{4.14}$$

şeklinde yazılabilir. y fonksiyonu, n kez α diferensiyellenebilir olduğundan (4.14) ifadesi

$$X'(t)+t^{\alpha-1}P(t)X(t)=t^{\alpha-1}Q(t) \tag{4.15}$$

olarak yazılabilir. Böylece, (4.9) ve (4.10) ile verilen başlangıç değer problemi için çözümünün varlık ve tekliği klasik teorideki teoremler yardımıyla görülebilir.

Teorem 4.7: y_1 ve y_2 n kez α diferensiyellenebilen fonksiyonlar ve c_1, c_2 keyfi sabitler olmak üzere

$$L_\alpha[c_1y_1+c_2y_2]=c_1L_\alpha[y_1]+c_2L_\alpha[y_2] \tag{4.16}$$

olur. Yani, L_α operatörü lineerdir.

İspat: Uyumlu kesirli türevin tanımından

$$L_\alpha[c_1y_1 + c_2y_2] = {}^{(n)}T_\alpha(c_1y_1 + c_2y_2) + p_{n-1}(t)\,{}^{(n-1)}T_\alpha(c_1y_1 + c_2y_2) + \cdots + p_1(t)T_\alpha(c_1y_1 + c_2y_2) + p_0(t)(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1\left({}^{(n)}T_\alpha y_1 + p_{n-1}(t)\,{}^{(n-1)}T_\alpha y_1 + \cdots + p_0(t)y_1\right) + c_2\left({}^{(n)}T_\alpha y_2 + p_{n-1}(t)\,{}^{(n-1)}T_\alpha y_2 + \cdots + p_0(t)y_2\right) \tag{4.17}$$

yazılabilir. Böylece,

$$L_\alpha[c_1y_1 + c_2y_2] = c_1L_\alpha[y_1] + c_2L_\alpha[y_2].$$

olduğu görülür.

Teorem 4.8: $y_1, y_2, \dots, y_n$ fonksiyonları $L_\alpha[y] = 0$ denkleminin çözümleri olsun. Bu durumda,

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n \tag{4.18}$$

lineer kombinasyonu da denklemin bir çözümüdür. Burada $k = 1, \dots, n$ için c_k lar keyfi sabitlerdir.

İspat: $y_1, y_2, \dots, y_n$ fonksiyonları $L_\alpha[y] = 0$ denkleminin çözümleri ve c_k lar keyfi sabit olmak üzere

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n \tag{4.19}$$

denklemine $L_\alpha[.]$ operatörü uygulanır ve $L_\alpha[.]$ operatörünün lineer olma özelliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} L_\alpha[y] = L_\alpha[c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n] &= c_1L_\alpha[y_1] + c_2L_\alpha[y_2] + \cdots + c_nL_\alpha[y_n] \\ &= 0 + \cdots + 0 = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise, y fonksiyonunun bir çözüm olduğu anlamına gelir.

Tanım 4.1: $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ fonksiyonları, en az $(n-1)$ kez α diferensiyellenebilen fonksiyonlar olsun. Herhangi bir $0 < \alpha \leq 1$ için,

$$W_\alpha(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ T_\alpha y_1 & T_\alpha y_2 & \cdots & T_\alpha y_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ {}^{(n-1)}T_\alpha\, y_1 & {}^{(n-1)}T_\alpha\, y_2 & \cdots & {}^{(n-1)}T_\alpha\, y_n \end{vmatrix} \tag{4.20}$$

determinantına, bu fonksiyonların α-Wronskian determinantı denir.

Tanım 4.2: $L_\alpha[y] = 0$ denkleminin her çözümü $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ kümesinin elemanlarının bir lineer kombinasyonu olarak yazılabiliyorsa, $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ kümesine çözümlerin temel kümesi denir.

Teorem 4.9: $y_1, y_2, \dots, y_n$ fonksiyonları $L_\alpha[y] = 0$ denkleminin n tane çözümü olsun. Eğer bir $t_0 \in (a, b)$ için $W_\alpha(y_1, y_2, \dots, y_n)(t_0) \neq 0$ ise $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ bir temel çözüm kümesidir.

İspat: Eğer $y(t)$, $L_\alpha[y] = 0$ denkleminin bir çözümü ise $y(t)$ fonksiyonu $y_1, y_2, \dots, y_n$ fonksiyonlarının bir lineer kombinasyonu olarak yazılabildiği gösterilmelidir. Yani,

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n \tag{4.21}$$

olmalıdır. Böylece, problem $1 \leq k \leq n$ için c_k sabitlerini bulma problemine indirgenir. c_k sabitlerini bulmak için

$$\begin{array}{ccc} c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) + \cdots + c_n y_n(t_0) & = & y(t_0) \\ c_1 T_\alpha y_1(t_0) + c_2 T_\alpha y_2(t_0) + \cdots + c_n T_\alpha y_n(t_0) & = & T_\alpha y(t_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_1{}^{(n-1)}T_\alpha y_1(t_0) + c_2{}^{(n-1)}T_\alpha y_2(t_0) + \cdots + c_n{}^{(n-1)}T_\alpha y_n(t_0) & = & {}^{(n-1)}T_\alpha y(t_0) \end{array} \tag{4.22}$$

lineer denklem sistemi yazılabilir. Bu denklem sistemi için gramer metodu kullanılarak

$$c_k = \frac{W_\alpha^k(t_0)}{W_\alpha(t_0)},\ 1 \leq k \leq n \tag{4.23}$$

olduğu bulunur. $W_\alpha(t_0) \neq 0$ olduğu için, $c_1, c_2, \dots, c_n$ sabitleri mevcuttur.

Teorem 4.10: $p_{n-1}(t), \dots, p_1(t), p_0(t) \in C(a,b)$ olsun. Bu takdirde, $L_\alpha[y] = 0$ denklemi $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ gibi bir temel çözüm kümesine sahiptir.

İspat: $t_0 \in (a,b)$ olsun. Aşağıda verilen n tane başlangıç değer problemi göz önüne alınsın.

$$\begin{array}{c} L_\alpha[y] = 0, y(t_0) = 1, T_\alpha y(t_0) = 0, \dots, {}^{(n-1)}T_\alpha y(t_0) = 0 \\ L_\alpha[y] = 0, y(t_0) = 0, T_\alpha y(t_0) = 1, \dots, {}^{(n-1)}T_\alpha y(t_0) = 0 \\ \vdots \\ L_\alpha[y] = 0, y(t_0) = 0, T_\alpha y(t_0) = 0, \dots, {}^{(n-1)}T_\alpha y(t_0) = 1 \end{array} \tag{4.24}$$

Teorem 4.6 dan, her bir i indisi için i. problemin y_i çözümü vardır. Teorem 4.9 dan

$$W_\alpha(t) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \tag{4.25}$$

olduğu için $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ kümesi çözümlerin bir temel kümesidir.

Teorem 4.11: $y_1, y_2, \dots, y_n$ fonksiyonları $L_\alpha[y] = 0$ denkleminin n tane çözümü olsun. Bu takdirde,

1. $W_\alpha(t)$, $T_\alpha W_\alpha(t) + p_{n-1}(t) W_\alpha(t) = 0$ diferensiyel denklemini sağlar.

2. Herhangi bir $t_0 \in (a,b)$ için

$$W_\alpha(t) = W_\alpha(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t} x^{\alpha-1}(p_{n-1}(x))dx} \tag{4.26}$$

olur. Üstelik, eğer $W_\alpha(t_0) \neq 0$ ise $\forall t \in (a,b)$ için $W_\alpha(t) \neq 0$ olur.

İspat: İlk olarak

$$x_1 = y, x_2 = T_\alpha y, x_3 = {}^{(2)}T_\alpha y, \dots, x_n = {}^{(n-1)}T_\alpha y \tag{4.27}$$

şeklinde yeni değişkenler tanımlansın. Böylece diferensiyel denklem matris formunda

$$T_\alpha \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}}_{X(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -p_0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 & \dots & -p_{n-1} \end{bmatrix}}_{P(t)} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}}_{X(t)} \tag{4.28}$$

$$T_\alpha X(t) = P(t)X(t) \tag{4.29}$$

olarak yazılabilir. Bu yüzden

$$T_\alpha W_\alpha(t) = (P_{11} + P_{22} + \dots + P_{nn})W_\alpha(t). \tag{4.30}$$

eşitliği yazılabilir.

Gerçekten de, eğer $W_\alpha(y_1, y_2, \dots, y_n)$ determinantının α uyumlu kesirli türevi hesaplanırsa

$$T_\alpha W_\alpha(t) = -p_{n-1}(t)W_\alpha(t) \tag{4.31}$$

olduğu görülür. Böylece,

$$\frac{T_\alpha(W_\alpha(t))}{W_\alpha(t)} = -p_{n-1}(t), \tag{4.32}$$

$$\ln(W_\alpha(t)) - \ln(W_\alpha(t_0)) = -\int_{t_0}^{t} x^{\alpha-1} p_{n-1}(x)dx, \tag{4.33}$$

$$W_\alpha(t) = W_\alpha(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t} x^{\alpha-1} p_{n-1}(x)dx} \tag{4.34}$$

olur.

Teorem 4.12: $p_{n-1}(t), \dots, p_1(t), p_0(t) \in C(a,b)$ olsun. Eğer $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ kümesi, $L_\alpha[y] = 0$ denkleminin bir temel çözüm kümesi ise $\forall t \in (a,b)$ için $W_\alpha(t) \neq 0$ olur.

İspat: $t_0 \in (a,b)$ herhangi bir nokta olsun. Teorem 4.6 dan,

$$L_\alpha[y] = 0, y(t_0) = 1, T_\alpha y(t_0) = 0, \dots, {}^{(n-1)}T_\alpha y(t_0) = 0 \tag{4.35}$$

başlangıç değer probleminin tek bir $y(t)$ çözümü vardır. $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ kümesi çözümlerin bir temel kümesi olduğundan $\forall t \in (a,b)$ için

$$\begin{array}{ccc} c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \cdots + c_n y_n(t) & = & y(t) \\ c_1 T_\alpha y_1(t) + c_2 T_\alpha y_2(t) + \cdots + c_n T_\alpha y_n(t) & = & T_\alpha y(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_1{}^{(n-1)}T_\alpha y_1(t) + c_2{}^{(n-1)}T_\alpha y_2(t) + \cdots + c_n{}^{(n-1)}T_\alpha y_n(t) & = & {}^{(n-1)}T_\alpha y(t) \end{array} \tag{4.36}$$

olacak şekilde $c_1, c_2, \dots, c_n$ sabitleri mevcuttur. Özel olarak, $t = t_0$ için,

$$\begin{array}{ccc} c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) + \cdots + c_n y_n(t_0) & = & 1 \\ c_1 T_\alpha y_1(t_0) + c_2 T_\alpha y_2(t_0) + \cdots + c_n T_\alpha y_n(t_0) & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_1{}^{(n-1)}T_\alpha y_1(t_0) + c_2{}^{(n-1)}T_\alpha y_2(t_0) + \cdots + c_n{}^{(n-1)}T_\alpha y_n(t_0) & = & 0 \end{array} \tag{4.37}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu sistem her $k \in \{1,2,\dots,n\}$ için

$$W_\alpha^k = \begin{bmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) & \dots & y_{k-1}(t_0) & 1 & y_k(t_0) & \dots & y_n(t_0) \\ T_\alpha y_1(t_0) & T_\alpha y_2(t_0) & \dots & T_\alpha y_{k-1}(t_0) & 0 & T_\alpha y_k(t_0) & \dots & T_\alpha y_n(t_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ {}^{(n-1)}T_\alpha y_1(t_0) & {}^{(n-1)}T_\alpha y_2(t_0) & \dots & {}^{(n-1)}T_\alpha y_{k-1}(t_0) & 0 & {}^{(n-1)}T_\alpha y_k(t_0) & \dots & {}^{(n-1)}T_\alpha y_n(t_0) \end{bmatrix}$$

(4.38)

olmak üzere

$$c_k = \frac{W_\alpha^k}{W_\alpha(t_0)},\ 1 \le k \le n \tag{4.39}$$

şeklinde tek bir çözüme sahiptir. $c_1, c_2, \dots, c_n$ sabitlerinin mevcut olması için $W_\alpha(t_0) \neq 0$ olmalıdır. Teorem 4.11 den, bütün $a < t < b$ için $W_\alpha(t) \neq 0$ olduğu görülür.

Teorem 4.13: $p_{n-1}(t), \dots, p_1(t), p_0(t) \in C(a,b)$ olsun. $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ çözüm kümesinin $L_\alpha[y] = 0$ denkleminin temel çözüm kümesi olması için gerek ve yeter şart $y_1, y_2, \dots, y_n$ fonksiyonlarının lineer bağımsız olmasıdır.

İspat: $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ çözüm kümesinin temel çözüm kümesi olduğunu varsayalım. O halde, Teorem 4.12 den $W_\alpha(t_0) \neq 0$ olacak şekilde $t_0 \in (a,b)$ vardır. Bütün $t \in (a,b)$ için

$$c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \dots + c_n y_n(t) = 0 \tag{4.40}$$

olduğunu varsayalım.

(4.40) denklemi için arka arkaya uyumlu kesirli türev alınırsa,

$$\begin{array}{rcl} c_1y_1(t)+c_2y_2(t)+\cdots+c_ny_n(t) & = & 0 \\ c_1T_\alpha y_1(t)+c_2T_\alpha y_2(t)+\cdots+c_nT_\alpha y_n(t) & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_1{}^{(n-1)}T_\alpha y_1(t)+c_2{}^{(n-1)}T_\alpha y_2(t)+\cdots+c_n{}^{(n-1)}T_\alpha y_n(t) & = & 0 \end{array} \tag{4.41}$$

denklem sistemi elde edilir. Böylece, $t_0 \in (a,b)$ için

$$\begin{array}{rcl} c_1y_1(t_0)+c_2y_2(t_0)+\cdots+c_ny_n(t_0) & = & 0 \\ c_1T_\alpha y_1(t_0)+c_2T_\alpha y_2(t_0)+\cdots+c_nT_\alpha y_n(t_0) & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_1{}^{(n-1)}T_\alpha y_1(t_0)+c_2{}^{(n-1)}T_\alpha y_2(t_0)+\cdots+c_n{}^{(n-1)}T_\alpha y_n(t_0) & = & 0 \end{array} \tag{4.42}$$

denklem sistemi çözülerek $c_1, c_2, \dots, c_n$ sabitleri bulunabilir. Gramer kuralı kullanılırsa,

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = \frac{0}{W_\alpha(t_0)} = 0 \tag{4.43}$$

olarak bulunur. Böylece, $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ fonksiyon kümesi lineer bağımsızdır.

Tersine, $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ kümesinin lineer bağımsız küme olduğunu varsayalım. Ayrıca, $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ kümesinin temel çözüm kümesi olmadığını kabul edelim. Bu durumda, Teorem 4.9 dan, bütün $t \in (a,b)$ için $W_\alpha(t) = 0$ olur. Herhangi bir $t_0 \in (a,b)$ seçelim. Bu $t_0 \in (a,b)$ için de $W_\alpha(t_0) = 0$ olur. Bu ise

$$\begin{bmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) & \dots & y_n(t_0) \\ T_\alpha y_1(t_0) & T_\alpha y_2(t_0) & \dots & T_\alpha y_n(t_0) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ {}^{(n-1)}T_\alpha y_1(t_0) & {}^{(n-1)}T_\alpha y_2(t_0) & \dots & {}^{(n-1)}T_\alpha y_n(t_0) \end{bmatrix} \tag{4.44}$$

matrisinin tersinir olmadığı anlamına gelir. Yani,

$$\begin{array}{rcl} c_1y_1(t_0)+c_2y_2(t_0)+\cdots+c_ny_n(t_0) & = & 0 \\ c_1T_\alpha y_1(t_0)+c_2T_\alpha y_2(t_0)+\cdots+c_nT_\alpha y_n(t_0) & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_1{}^{(n-1)}T_\alpha y_1(t_0)+c_2{}^{(n-1)}T_\alpha y_2(t_0)+\cdots+c_n{}^{(n-1)}T_\alpha y_n(t_0) & = & 0 \end{array} \tag{4.45}$$

olacak şekilde bütünüyle sıfır olmayan $c_1, c_2, \dots, c_n$ sabitleri mevcuttur. Şimdi, bütün $t \in (a, b)$ için

$$y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) + \cdots + c_ny_n(t) \tag{4.46}$$

fonksiyonunu ele alalım. $y(t)$ diferensiyel denklemin bir çözümüdür ve

$$y(t_0) = T_\alpha y(t_0) = \cdots = {}^{(n-1)}T_\alpha y(t_0) = 0 \tag{4.47}$$

şeklindedir. Fakat, sıfır fonksiyonu da başlangıç değer probleminin bir çözümüdür. Teorem 4.6 dan, bütün $t \in (a, b)$ ve hepsi birden sıfır olmayan $c_1, c_2, \dots, c_n$ sabitleri için

$$c_1y_1(t) + c_2y_2(t) + \cdots + c_ny_n(t) = 0 \tag{4.48}$$

olmalıdır. Bu ise $y_1, y_2, \dots, y_n$ fonksiyonlarının lineer bağımsız olması durumu ile çelişir. O halde başta yapılan varsayım yanlıştır. Yani, $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ kümesi bir temel çözüm kümesidir.

Teorem 4.14: $y_1, y_2, \dots, y_n$ fonksiyonları $L_\alpha[y] = 0$ denkleminin lineer bağımsız çözümleri olsun. Bu takdirde, $L_\alpha[y] = 0$ denkleminin genel çözümü

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n \tag{4.49}$$

şeklindedir. Burada $c_1, c_2, \dots, c_n$ katsayıları keyfi sabitlerdir.

İspat: Herhangi bir $t = t_0$ da özel çözüm aşağıdaki başlangıç şartları yardımıyla elde edilir:

$$y(t_0) = \gamma_0, T_\alpha y(t_0) = \gamma_1, \dots, {}^{(n-1)}T_\alpha y(t_0) = \gamma_{n-1}. \tag{4.50}$$

Burada, $t_0 \in (a, b)$ ve $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$ keyfi sabitlerdir. (4.50) deki başlangıç şartlarını koruyarak $c_1, c_2, \dots, c_n$ seçimi yapılabilirse ispat tamamlanır. Bunu gerçekleştirmek için, aşağıdaki denklem sistemi yazılabilir:

$$\begin{gathered} c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) + \cdots + c_n y_n(t_0) = \gamma_0 \\ c_1 T_\alpha y_1(t_0) + c_2 T_\alpha y_2(t_0) + \cdots + c_n T_\alpha y_n(t_0) = \gamma_1 \\ \vdots \\ c_1 {}^{(n-1)}T_\alpha y_1(t_0) + c_2 {}^{(n-1)}T_\alpha y_2(t_0) + \cdots + c_n {}^{(n-1)}T_\alpha y_n(t_0) = \gamma_{n-1}. \end{gathered} \tag{4.51}$$

Bu denklem sistemi matris formunda

$$\begin{bmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) & \dots & y_n(t_0) \\ T_\alpha y_1(t_0) & T_\alpha y_2(t_0) & \dots & T_\alpha y_n(t_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ {}^{(n-1)}T_\alpha y_1(t_0) & {}^{(n-1)}T_\alpha y_2(t_0) & \dots & {}^{(n-1)}T_\alpha y_n(t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{n-1} \end{bmatrix} \tag{4.52}$$

şeklinde yazılabilir. $y_1, y_2, \dots, y_n$ fonksiyonları $L_\alpha[y] = 0$ denkleminin lineer bağımsız çözümleri olduğu için, $W_\alpha(t_0) \neq 0$ olur. Bu durumda, cebirin temel teoremine göre, (4.51) sistemi tek bir çözüme sahiptir.

Teorem 4.15: y_p, (4.2) denkleminin herhangi bir özel çözümü ve $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ fonksiyon kümesi de (4.1) denkleminin temel çözüm kümesi olsun. Bu takdirde, (4.2) denkleminin genel çözümü

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n + y_p \tag{4.53}$$

olur. Burada $c_1, c_2, \dots, c_n$ katsayıları keyfi sabitlerdir.

İspat: $Y(t)$ ve $y_p(t)$, $L_\alpha[y] = q(t)$ homojen olmayan denklemin özel çözümleri olsun. Eğer $u(t) = Y(t) - y_p(t)$ şeklinde bir u fonksiyonu tanımlanır ve L_α operatörünün lineer olma özelliği kullanılırsa,

$$L_\alpha[u] = L_\alpha\left[Y(t) - y_p(t)\right] = L_\alpha[Y(t)] - L_\alpha\left[y_p(t)\right] = q(t) - q(t) = 0 \quad (4.54)$$

yazılabilir. Bu ise $u(t)$ fonksiyonunun, $L_\alpha[y] = 0$ denkleminin bir çözümü olduğunu gösterir. Böylece, Teorem 4.8 den,

$$u(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \cdots + c_n y_n(t) \quad (4.55)$$

ve

$$Y(t) - y_p(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \cdots + c_n y_n(t) \quad (4.56)$$

yazılır. Buradan da,

$$Y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \cdots + c_n y_n(t) + y_p(t) \quad (4.57)$$

olduğu görülür.

4.3. Uyumlu Kesir Mertebeli Sabit Katsayılı Homojen Dizisel Lineer Diferensiyel Denklemler

En genel sabit katsayılı $n\alpha$ mertebeli homojen dizisel lineer diferensiyel denklem

$$^{(n)}T_\alpha y + p_{n-1}{}^{(n-1)}T_\alpha y + \cdots + p_2{}^{(2)}T_\alpha y + p_1 T_\alpha y + p_0 y = 0 \quad (4.58)$$

biçiminde yazılabilir. Burada ${}^{(n)}T_\alpha y = T_\alpha T_\alpha \dots T_\alpha y$, n kez, dir. (4.58) denkleminin sol tarafı

$$L_\alpha[y] = \left({}^{(n)}T_\alpha + p_{n-1}{}^{(n-1)}T_\alpha + \cdots + p_2{}^{(2)}T_\alpha + p_1 T_\alpha + p_0\right)y$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Eğer (4.58) denklemi $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ gibi lineer bağımsız çözümlere sahipse, genel çözüm

$$y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \cdots + c_n y_n(t)$$

şeklindedir. Burada $c_1, c_2, \dots, c_n$ keyfi sabitlerdir.

Lemma 4.1: $L_\alpha[.]$ sabit katsayılı $n\alpha$ mertebeli bir operatör ise

$$L_\alpha\left[e^{\frac{r}{\alpha}t^\alpha}\right] = P_n(r)e^{\frac{r}{\alpha}t^\alpha}$$

olur. Burada r kompleks sabit ve $P_n(r) = r^n + p_{n-1}r^{n-1} + \cdots + p_0$ dir.

İspat: $y = e^{\frac{r}{\alpha}t^\alpha}$ için y nin uyumlu kesirli türevleri

$$T_\alpha y = re^{\frac{r}{\alpha}t^\alpha}, {}^{(2)}T_\alpha y = r^2 e^{\frac{r}{\alpha}t^\alpha}, \dots, {}^{(n)}T_\alpha y = r^n e^{\frac{r}{\alpha}t^\alpha} \tag{4.59}$$

şeklindedir. y fonksiyonu ve y fonksiyonunun (4.59) denkleminde verilen kesirli türevleri (4.58) denkleminde yerine yazılırsa

$$L_\alpha\left[e^{\frac{r}{\alpha}t^\alpha}\right] = P_n(r)e^{\frac{r}{\alpha}t^\alpha}$$

olduğu görülür.

Şimdi, klasik durumda yapılana benzer olarak, (4.58) denkleminin $y = e^{\frac{r}{\alpha}t^{\alpha}}$ biçiminde çözümleri aransın. (4.58) denkleminde y yerine $e^{\frac{r}{\alpha}t^{\alpha}}$ yazılırsa,

$$L_{\alpha}\left[e^{\frac{r}{\alpha}t^{\alpha}}\right] = 0$$

elde edilir.

$$L_{\alpha}\left[e^{\frac{r}{\alpha}t^{\alpha}}\right] = P_n(r)e^{\frac{r}{\alpha}t^{\alpha}} = 0$$

olup, her r değeri için $e^{\frac{r}{\alpha}t^{\alpha}} \neq 0$ olduğundan

$$P_n(r) = r^n + p_{n-1}r^{n-1} + \cdots + p_0 = 0 \tag{4.60}$$

olmalıdır. (4.60) denklemine (4.58) denkleminin yardımcı ya da karakteristik denklemi denir.

Lemma 4.2: Eğer r karakteristik denklemin bir kökü ise

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[L_{\alpha}\left[e^{\frac{r}{\alpha}t^{\alpha}}\right]\right] = L_{\alpha}\left[\frac{\partial}{\partial r}e^{\frac{r}{\alpha}t^{\alpha}}\right]$$

ve

$$\frac{\partial^l}{\partial r^l}e^{\frac{r}{\alpha}t^{\alpha}} = \left(\frac{t^{\alpha}}{\alpha}\right)^l e^{\frac{r}{\alpha}t^{\alpha}}$$

dir.

İspat: $\frac{\partial}{\partial r}$ ve $L_\alpha[.]$ lineer olduğundan

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[L_\alpha\left[e^{\frac{r}{\alpha}t^\alpha}\right]\right] = L_\alpha\left[\frac{\partial}{\partial r}e^{\frac{r}{\alpha}t^\alpha}\right]$$

eşitliği yazılabilir. Ayrıca, klasik türevden yararlanılarak,

$$\frac{\partial^l}{\partial r^l}e^{\frac{r}{\alpha}t^\alpha} = \frac{t^{l\alpha}}{\alpha^l}e^{\frac{r}{\alpha}t^\alpha}$$

olduğu görülür.

Önerme 4.1: r_1, (4.60) karakteristik denkleminin μ_1 katlı bir kökü olsun. Bu takdirde $l = 0,1, \dots \mu_1 - 1$ için

$$y_{1,l}(t) = \left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\right)^l e^{\frac{r_1}{\alpha}t^\alpha}$$

fonksiyonları (4.58) denkleminin çözümleridir.

İspat: Lemma 4.2 den yola çıkarak

$$\left\{L_\alpha\left[\frac{\partial^l}{\partial r^l}e^{\frac{r}{\alpha}t^\alpha}\right]\right\}_{r=r_1} = \left\{\frac{\partial^l}{\partial r^l}\left[L_\alpha\left[e^{\frac{r}{\alpha}t^\alpha}\right]\right]\right\}_{r=r_1}$$

yazılır. $L_\alpha\left[e^{\frac{r}{\alpha}t^\alpha}\right] = P_n(r)e^{\frac{r}{\alpha}t^\alpha}$ olduğu dikkate alınarak sağ taraf için klasik Leibniz kuralı uygulanırsa,

$$= \sum_{j=0}^{l} \binom{l}{j} \left[\frac{\partial^{l-j}}{\partial r^{l-j}} \left(e^{\frac{r}{\alpha} t^{\alpha}} \right) \right]_{r=r_1} \frac{\partial^j}{\partial r^j} [P_n(r)]_{r=r_1}$$

yazılır. r_1, $P_n(r) = 0$ denkleminin μ_1 katlı bir kökü olduğu için $j = 0,1, \dots, \mu_1 - 1$ için

$$\left[\frac{\partial^j}{\partial r^j} P_n(r) \right]_{r=r_1} = 0$$

olur. Ayrıca, $\frac{\partial^l}{\partial r^l} e^{\frac{r}{\alpha} t^{\alpha}} = \left(\frac{t^{\alpha}}{\alpha} \right)^l e^{\frac{r_1}{\alpha} t^{\alpha}} = y_{1,l}(t)$ olduğuda göz önüne alınırsa,

$$L_{\alpha} \left[y_{1,l}(t) \right] = 0$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1: $\{r_j\}_{j=1}^{k}$, (4.60) karakteristik polinomunun $\{\mu_j\}_{j=1}^{k}$ katlı k farklı kökü olsun. Bu takdirde,

$$\bigcup_{m=1}^{k} \left\{ \left(\frac{t^{\alpha}}{\alpha} \right)^l e^{\frac{r_m}{\alpha} t^{\alpha}} \right\}_{l=0}^{\mu_m - 1}$$

fonksiyonları (4.58) denkleminin lineer bağımsız çözümleridir.

İspat: Sonuç 4.1, Önerme 4.1 ve Teorem 4.9 dan görülür.

Önerme 4.2: r_1 ve $\overline{r_1}$ $(r_1 = \theta + i\beta, \beta \neq 0\ )$ (4.60) denkleminin σ_1 katlı iki kompleks kökü olsun. Bu takdirde, $l = 0,1, \dots \sigma_1 - 1$ için

$$y_{1,l}(t) = \left(\frac{t^{\alpha}}{\alpha}\right)^{l} e^{\frac{\theta}{\alpha}t^{\alpha}}\left[cos\left(\frac{\beta}{\alpha}t^{\alpha}\right) + isin\left(\frac{\beta}{\alpha}t^{\alpha}\right)\right]$$

ve

$$y_{2,l}(t) = \left(\frac{t^{\alpha}}{\alpha}\right)^{l} e^{\frac{\theta}{\alpha}t^{\alpha}}\left[cos\left(\frac{\beta}{\alpha}t^{\alpha}\right) - isin\left(\frac{\beta}{\alpha}t^{\alpha}\right)\right]$$

fonksiyonları (4.58) denkleminin lineer bağımsız çözümleridir.

İspat: $r_1 = \theta + i\beta$ (4.60) denkleminin σ_1 katlı bir kökü olduğu için Önerme 4.1 e göre (4.58) denkleminin

$$y_{1,l}(t) = \left(\frac{t^{\alpha}}{\alpha}\right)^{l} e^{\frac{\theta+i\beta}{\alpha}t^{\alpha}}$$

şeklinde lineer bağımsız çözümleri vardır. Aynı şekilde, $\overline{r_1} = \theta - i\beta$ için de (4.58) denkleminin

$$y_{2,l}(t) = \left(\frac{t^{\alpha}}{\alpha}\right)^{l} e^{\frac{\theta-i\beta}{\alpha}t^{\alpha}}$$

biçimde σ_1 tane lineer bağımsız çözümü vardır. Bu çözümler için

$$e^{i\frac{\beta}{\alpha}t^{\alpha}} = cos\frac{\beta}{\alpha}t^{\alpha} + isin\frac{\beta}{\alpha}t^{\alpha},$$
$$e^{-i\frac{\beta}{\alpha}t^{\alpha}} = cos\frac{\beta}{\alpha}t^{\alpha} - isin\frac{\beta}{\alpha}t^{\alpha}$$

şeklindeki Euler özdeşlikleri kullanılacak olursa yukardaki çözümler elde edilir.

Sonuç 4.2: $\{r_m, \overline{r_m}\}_{m=1}^{p}$, $r_m = \theta_m + i\beta_m, \beta_m \neq 0$, (4.60) karakteristik polinomunun $\{\sigma_m\}_{m=1}^{p}$ katlı $2p$ farklı kökü olsun. Bu takdirde, (4.58) denklemi

$$\bigcup_{m=1}^{p} \left\{ \left(\frac{t^{\alpha}}{\alpha}\right)^{l} e^{\frac{\theta_m}{\alpha} t^{\alpha}} \left[cos\left(\frac{\beta_m}{\alpha} t^{\alpha}\right) + isin\left(\frac{\beta_m}{\alpha} t^{\alpha}\right) \right] \right\}_{l=0}^{\sigma_m - 1}$$

ve

$$\bigcup_{m=1}^{p} \left\{ \left(\frac{t^{\alpha}}{\alpha}\right)^{l} e^{\frac{\theta_m}{\alpha} t^{\alpha}} \left[cos\left(\frac{\beta_m}{\alpha} t^{\alpha}\right) - isin\left(\frac{\beta_m}{\alpha} t^{\alpha}\right) \right] \right\}_{l=0}^{\sigma_m - 1}$$

biçiminde $2\sum_{m=1}^{p} \sigma_m$ tane lineer bağımsız çözüme sahiptir.

İspat: Önerme 4.2 ve Teorem 4.9 dan ispat görülür.

Teorem 4.16: (4.60) tarafından verilen $P_n(r)$, (4.58) denkleminin karakteristik denklemi olsun. $\sum_{j=1}^{k} \mu_j + 2\sum_{j=1}^{p} \sigma_j = n$ olacak şekilde; $\{r_j\}_{j=1}^{k}$, (4.58) denkleminin $\{\mu_j\}_{j=1}^{k}$katlı birbirinden farklı k tane kökü ve $\{r_j, \overline{r_j}\}_{j=1}^{p}$, $r_j = \theta_j + i\beta_j, \beta_j \neq 0$, (4.58) denkleminin $\{\sigma_j\}_{j=1}^{p}$katlı $2p$ farklı kökü olsun. Bu takdirde,

$$\bigcup_{m=1}^{k} \left\{ \left(\frac{t^{\alpha}}{\alpha}\right)^{l} e^{\frac{r_m}{\alpha} t^{\alpha}} \right\}_{l=0}^{\mu_m - 1},$$

$$\bigcup_{m=1}^{p} \left\{ \left(\frac{t^{\alpha}}{\alpha}\right)^{l} e^{\frac{\theta_m}{\alpha} t^{\alpha}} \left[cos\left(\frac{\beta_m}{\alpha} t^{\alpha}\right) + isin\left(\frac{\beta_m}{\alpha} t^{\alpha}\right) \right] \right\}_{l=0}^{\sigma_m - 1}$$

ve

$$\bigcup_{m=1}^{p}\left\{\left(\frac{t^{\alpha}}{\alpha}\right)^{l} e^{\frac{\theta_m}{\alpha}t^{\alpha}}\left[\cos\left(\frac{\beta_m}{\alpha}t^{\alpha}\right)-i\sin\left(\frac{\beta_m}{\alpha}t^{\alpha}\right)\right]\right\}_{l=0}^{\sigma_m-1}$$

formundaki fonksiyonlar (4.58) denkleminin temel çözüm kümesini oluşturur.

İspat: İspat, Sonuç 4.1, Sonuç 4.2 ve Teorem 4.9 dan görülür.

Sonuç 4.1 in özel bir hali olarak, eğer (4.60) denkleminin $r_1, r_2, \dots, r_n$ gibi n tane farklı reel kökü varsa,

$$y_1(t) = e^{\frac{r_1}{\alpha}t^{\alpha}}, y_2(t) = e^{\frac{r_2}{\alpha}t^{\alpha}}, \dots, y_n(t) = e^{\frac{r_n}{\alpha}t^{\alpha}} \tag{4.61}$$

fonksiyonları (4.58) denkleminin lineer bağımsız çözümleri olur. (4.61) fonksiyonları lineer bağımsız olduklarından

$$y(t) = c_1 e^{\frac{r_1}{\alpha}t^{\alpha}} + c_2 e^{\frac{r_2}{\alpha}t^{\alpha}} + \dots + c_n e^{\frac{r_n}{\alpha}t^{\alpha}}$$

fonksiyonu (4.58) denkleminin genel çözümü olur.

Örnek 4.4: $T_\alpha T_\alpha y + 4T_\alpha y + 3y = 0$ uyumlu kesir mertebeli sabit katsayılı dizisel lineer homojen diferensiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm: $y = e^{\frac{r}{\alpha}t^{\alpha}}$ şeklinde bir çözüm arayalım. Bu denklemin karakteristik denklemi

$$r^2 + 4r + 3 = 0$$

olacaktır. Bu ifade için r çözülürse $r = -3$ ve $r = -1$ değerleri bulunur. Buradan da lineer bağımsız çözüm kümesi

$$\left\{e^{\frac{-3}{\alpha}t^{\alpha}}, e^{\frac{-1}{\alpha}t^{\alpha}}\right\}$$

şeklindedir. Böylece, denklemin genel çözümü

$$y(t) = c_1 e^{\frac{-3}{\alpha}t^{\alpha}} + c_2 e^{\frac{-1}{\alpha}t^{\alpha}}$$

olarak bulunur.

Örnek 4.5: $T_\alpha T_\alpha y - 10T_\alpha y + 25y = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm: Verilen diferensiyel denklemin karakteristik denklemi

$$r^2 - 10r + 25 = (r-5)^2 = 0$$

olur. Bu denklemin kökleri $r_{1,2} = 5$ olup, lineer bağımsız çözüm kümesi

$$\left\{e^{\frac{5}{\alpha}t^{\alpha}}, \frac{t^{\alpha}}{\alpha} e^{\frac{5}{\alpha}t^{\alpha}}\right\}$$

şeklindedir. Buradan da, genel çözüm

$$y(t) = \left(C_1 + C_2 \frac{t^{\alpha}}{\alpha}\right) e^{\frac{5}{\alpha}t^{\alpha}}$$

olarak yazılabilir. $c_2 = \frac{C_2}{\alpha}$ ve $c_1 = C_1$ denirse, denklemin genel çözümü

$$y(t) = (c_1 + c_2 t^{\alpha}) e^{\frac{5}{\alpha}t^{\alpha}}$$

biçimde bulunur.

Örnek 4.6: $T_\alpha T_\alpha y + T_\alpha y + y = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm: Verilen diferensiyel denklemin karakteristik denklemi

$$r^2 + r + 1 = 0$$

şeklindedir. Buradan $r_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ve $r_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ dir. Buradan verilen denklemin lineer bağımsız çözüm kümesi

$$\left\{e^{-\frac{1}{2\alpha}t^\alpha}\left(cos\frac{\sqrt{3}}{2\alpha}t^\alpha + isin\frac{\sqrt{3}}{2\alpha}t^\alpha\right), e^{-\frac{1}{2\alpha}t^\alpha}\left(cos\frac{\sqrt{3}}{2\alpha}t^\alpha - isin\frac{\sqrt{3}}{2\alpha}t^\alpha\right)\right\}$$

şeklindedir. Buradan da, genel çözüm

$$\begin{aligned} y(t) &= C_1 e^{-\frac{1}{2\alpha}t^\alpha}\left(cos\frac{\sqrt{3}}{2\alpha}t^\alpha + sin\frac{\sqrt{3}}{2\alpha}t^\alpha\right) + C_2 e^{-\frac{1}{2\alpha}t^\alpha}\left(cos\frac{\sqrt{3}}{2\alpha}t^\alpha - isin\frac{\sqrt{3}}{2\alpha}t^\alpha\right) \\ &= e^{-\frac{1}{2\alpha}t^\alpha}\left[(C_1 + C_2)cos\frac{\sqrt{3}}{2\alpha}t^\alpha + (C_1 - iC_2)sin\frac{\sqrt{3}}{2\alpha}t^\alpha\right] \end{aligned}$$

olup, $C_1 + C_2 = c_1$ ve $C_1 - iC_2 = c_2$ denirse

$$y(t) = e^{-\frac{1}{2\alpha}t^\alpha}\left(c_1 cos\frac{\sqrt{3}}{2\alpha}t^\alpha + c_2 sin\frac{\sqrt{3}}{2\alpha}t^\alpha\right)$$

olarak bulunur.

4.4. Uyumlu Kesirli Türev için Parametrelerin Değişimi Metodu

Bu bölümde,

$$^{(n)}T_\alpha y + p_{n-1}\,^{(n-1)}T_\alpha y + \cdots + p_2\,^{(2)}T_\alpha y + p_1 T_\alpha y + p_0 y = q(t) \tag{4.62}$$

denkleminin özel çözümünü bulmak için parametrelerin değişimi metodu kullanılacaktır.

Teorem 4.17: u fonksiyonu (4.62) denkleminin homojen halinin

$$u(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(t) \tag{4.63}$$

şeklindeki bir çözümü olsun. Bu durumda (4.62) denkleminin özel çözümü

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t) y_i(t)$$

şeklindedir. Burada $c_1(t), c_2(t), \ldots, c_n(t)$ ifadeleri

$$\begin{gathered}
c_1^{(\alpha)}(t)y_1(t) + c_2^{(\alpha)}(t)y_2(t) + \cdots + c_n^{(\alpha)}(t)y_n(t) = 0 \\
c_1^{(\alpha)}(t)y_1^{(\alpha)}(t) + c_2^{(\alpha)}(t)y_2^{(\alpha)}(t) + \cdots + c_n^{(\alpha)}(t)y_n^{(\alpha)}(t) = 0 \\
\vdots \\
c_1^{(\alpha)}(t)^{(n-2)}y_1^{(\alpha)}(t) + c_2^{(\alpha)}(t)^{(n-2)}y_2^{(\alpha)}(t) + \cdots + c_n^{(\alpha)}(t)^{(n-2)}y_n^{(\alpha)}(t) = 0 \\
c_1^{(\alpha)}(t)^{(n-1)}y_1^{(\alpha)}(t) + c_2^{(\alpha)}(t)^{(n-1)}y_2^{(\alpha)}(t) + \cdots + c_n^{(\alpha)}(t)^{(n-1)}y_n^{(\alpha)}(t) = q(t)
\end{gathered}$$

şeklindeki denklem sistemini sağlar.

İspat: Şimdi (4.62) denkleminin

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t) y_i(t)$$

şeklindeki özel çözümünü arayalım. Eğer,

$$y(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t) + \cdots + c_n(t)y_n(t)$$

denkleminin uyumlu kesirli türevi hesaplanırsa

$$T_\alpha y(t) = c_1^{(\alpha)}(t)y_1(t) + c_1(t)y_1^{(\alpha)}(t) + \cdots + c_n^{(\alpha)}(t)y_n(t) + c_1(t)y_n^{(\alpha)}(t)$$

elde edilir. Yani,

$$T_\alpha y(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t) y_i^{(\alpha)}(t) + \sum_{i=1}^{n} c_i^{(\alpha)}(t) y_i(t)$$

olur. Birinci şart olarak $\sum_{i=1}^{n} c_i^{(\alpha)}(t) y_i(t) = 0$ şartı kabul edilirse,

$$T_\alpha y(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t) y_i^{(\alpha)}(t)$$

olur. Eğer $T_\alpha y(t)$ fonkiyonunun uyumlu kesirli türevi hesaplanırsa,

$$^{(2)}T_\alpha y(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t)^{(2)} y_i^{(\alpha)}(t) + \sum_{i=1}^{n} c_i^{(\alpha)}(t) y_i{}^{(\alpha)}(t)$$

elde edilir. Bu denklem için de, ikinci şart olarak $\sum_{i=1}^{n} c_i^{(\alpha)}(t) y_i{}^{(\alpha)}(t) = 0$ şartı konulursa,

$$^{(2)}T_\alpha y(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t)\,^{(2)}y_i^{(\alpha)}(t)$$

olur. Bu şekilde devam edilirse,

$$^{(n-1)}T_\alpha y(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t)\,^{(n-1)}y_i^{(\alpha)}(t) + \sum_{i=1}^{n} c_i^{(\alpha)}(t)\,^{(n-2)}y_i{}^{(\alpha)}(t)$$

denklemi elde edilir. Bu denklem için de $(n-1)$. şart olarak $\sum_{i=1}^{n} c_i^{(\alpha)}(t)\,^{(n-2)}y_i{}^{(\alpha)}(t) = 0$ şartı kabul edilirse,

$$^{(n-1)}T_\alpha y(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t)\,^{(n-1)}y_i^{(\alpha)}(t)$$

olarak yazılabilir. Son olarak $^{(n-1)}T_\alpha y(t)$ ifadesinin uyumlu kesirli türevi alınırsa

$$^{(n)}T_\alpha y(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t)\,^{(n)}y_i^{(\alpha)}(t) + \sum_{i=1}^{n} c_i^{(\alpha)}(t)\,^{(n-1)}y_i{}^{(\alpha)}(t)$$

bulunur. Eğer $y(t), T_\alpha y(t), {}^{(2)}T_\alpha y(t) \ldots, {}^{(n)}T_\alpha y(t)$ ifadeleri (4.62) denkleminde yerine konulursa,

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^{(\alpha)}(t)\,^{(n-1)}y_i{}^{(\alpha)}(t) + \sum_{i=1}^{n} c_i(t)\Big[p_o y_i(t) + p_1 y_i^{(\alpha)}(t) + \cdots + {}^{(n)}y_i^{(\alpha)}(t)\Big] = q(t)$$

elde edilir. $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ (4.62) denkleminin homojen halinin çözümleri olduğundan

$$\sum_{i=1}^{n} c_i(t)\left[p_o y_i(t) + p_1 y_i^{(\alpha)}(t) + \cdots + {}^{(n)}y_i^{(\alpha)}(t)\right] = 0$$

eşitliğini yazılabilir. Bu eşitlik yukarıdaki denklemde kullanılacak olursa,

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^{(\alpha)}(t)^{(n-1)}y_i{}^{(\alpha)}(t) = q(t)$$

elde edilir. Elde edilen bu son denklem de n. şarttır. Dolayısıyla bu n tane şartın oluşturduğu

$$\begin{gathered}
c_1^{(\alpha)}(t)y_1(t) + c_2^{(\alpha)}(t)y_2(t) + \cdots + c_n^{(\alpha)}(t)y_n(t) = 0 \\
c_1^{(\alpha)}(t)y_1^{(\alpha)}(t) + c_2^{(\alpha)}(t)y_2^{(\alpha)}(t) + \cdots + c_n^{(\alpha)}(t)y_n^{(\alpha)}(t) = 0 \\
\vdots \\
c_1^{(\alpha)}(t)^{(n-2)}y_1^{(\alpha)}(t) + c_2^{(\alpha)}(t)^{(n-2)}y_2^{(\alpha)}(t) + \cdots + c_n^{(\alpha)}(t)^{(n-2)}y_n^{(\alpha)}(t) = 0 \\
c_1^{(\alpha)}(t)^{(n-1)}y_1^{(\alpha)}(t) + c_2^{(\alpha)}(t)^{(n-1)}y_2^{(\alpha)}(t) + \cdots + c_n^{(\alpha)}(t)^{(n-1)}y_n^{(\alpha)}(t) = q(t)
\end{gathered}$$

denklem sistemini sağlayan $c_1(t), c_2(t), \dots, c_n(t)$ ifadeleri yardımıyla (4.62) denkleminin özel çözümü

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t)y_i(t)$$

şeklinde bulunabilir.

Örnek 4.7: $T_\alpha T_\alpha y + 4T_\alpha y + 3y = q(t)$ uyumlu diferensiyel denklem olmak üzere sırasıyla

a. $q(t) = e^{2t^\alpha}$,

b. $q(t) = 2t^{2\alpha} + t^\alpha - 3$,

c. $q(t) = sin2t^\alpha$,

d. $q(t) = e^{2t^\alpha} t^\alpha$,

e. $q(t) = e^{-4t^\alpha}$

fonksiyonları için denklemin özel çözümlerini bulunuz.

Çözüm: a. $q(t) = e^{2t^\alpha}$ olsun. Verilen uyumlu kesirli diferensiyel denklemin homojen halinin çözümü

$$u = c_1 e^{\frac{-3}{\alpha}t^\alpha} + c_2 e^{\frac{-1}{\alpha}t^\alpha}$$

şeklindedir. Teoremde verilen şartlar tarafından inşa edilen denklem sistemi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{gathered} c_1^{(\alpha)}(t) e^{\frac{-3}{\alpha}t^\alpha} + c_2^{(\alpha)}(t) e^{\frac{-1}{\alpha}t^\alpha} = 0 \\ -3c_1^{(\alpha)}(t) e^{\frac{-3}{\alpha}t^\alpha} - c_2^{(\alpha)}(t) e^{\frac{-1}{\alpha}t^\alpha} = e^{2t^\alpha}. \end{gathered}$$

Bu denklem sistemi çözülecek olursa,

$$c_1^{(\alpha)}(t) = -\frac{1}{2} e^{\frac{2\alpha+3}{\alpha}t^\alpha} \text{ve } c_2^{(\alpha)}(t) = \frac{1}{2} e^{\frac{2\alpha+1}{\alpha}t^\alpha}$$

elde edilir. Elde edilen bu sonuçlara, uyumlu kesirli integral uygulanırsa $c_1(t) = -\frac{1}{4\alpha+6}e^{\frac{2\alpha+3}{\alpha}t^\alpha}$ ve $c_2(t) = \frac{1}{4\alpha+2}e^{\frac{2\alpha+1}{\alpha}t^\alpha}$ olarak bulunur. Bulunan bu c_1 ve c_2, u fonksiyonunda yerine yazılırsa özel çözüm

$$\begin{aligned} v &= -\frac{1}{4\alpha+6}e^{\frac{2\alpha+3}{\alpha}t^\alpha}.e^{\frac{-3}{\alpha}t^\alpha} + \frac{1}{4\alpha+2}e^{\frac{2\alpha+1}{\alpha}t^\alpha}.e^{\frac{-1}{\alpha}t^\alpha} \\ &= \frac{1}{4\alpha^2+8\alpha+3}e^{2t^\alpha} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

b. $q(t) = 2t^{2\alpha} + t^\alpha - 3$ için ise denklem sistemi

$$\begin{aligned} c_1^{(\alpha)}(t)e^{\frac{-3}{\alpha}t^\alpha} + c_2^{(\alpha)}(t)e^{\frac{-1}{\alpha}t^\alpha} &= 0 \\ -3c_1^{(\alpha)}(t)e^{\frac{-3}{\alpha}t^\alpha} - c_2^{(\alpha)}(t)e^{\frac{-1}{\alpha}t^\alpha} &= 2t^{2\alpha} + t^\alpha - 3 \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Bu denklem sistemi çözülecek olursa $c_1^{(\alpha)}(t) = -\frac{1}{2}(2t^{2\alpha} + t^\alpha - 3)e^{\frac{3}{\alpha}t^\alpha}$ ve $c_2^{(\alpha)}(t) = \frac{1}{2}(2t^{2\alpha} + t^\alpha - 3)e^{\frac{1}{\alpha}t^\alpha}$ olarak elde edilir. Bu ifadelere uyumlu kesirli türevler için verilen kısmi integrasyon formülü uygulanacak olursa c_1 ve c_2,

$$\begin{aligned} c_1(t) &= -\frac{1}{3}t^{2\alpha}e^{\frac{3}{\alpha}t^\alpha} + \frac{4\alpha-3}{18}t^\alpha e^{\frac{3}{\alpha}t^\alpha} + \frac{-4\alpha^2+3\alpha+27}{54}e^{\frac{3}{\alpha}t^\alpha}, \\ c_2(t) &= t^{2\alpha}e^{\frac{1}{\alpha}t^\alpha} + \frac{1-4\alpha}{2}t^\alpha e^{\frac{1}{\alpha}t^\alpha} + \frac{4\alpha^2-2\alpha-6}{2}e^{\frac{1}{\alpha}t^\alpha} \end{aligned}$$

olarak bulunur. c_1 ve c_2 değerleri u fonksiyonunda yerlerine konulursa özel çözüm

$$v = \frac{2}{3}t^{2\alpha} + \frac{3-16\alpha}{9}t^\alpha + \frac{52\alpha^2-12\alpha-27}{27}$$

şeklinde elde edilir.

c. $q(t) = sin2t^{\alpha}$ olsun. Bu durumda özel çözümü elde etmek için yazılması gereken denklem sistemi

$$c_1^{(\alpha)}(t)e^{\frac{-3}{\alpha}t^{\alpha}} + c_2^{(\alpha)}(t)e^{\frac{-1}{\alpha}t^{\alpha}} = 0$$
$$-3c_1^{(\alpha)}(t)e^{\frac{-3}{\alpha}t^{\alpha}} - c_2^{(\alpha)}(t)e^{\frac{-1}{\alpha}t^{\alpha}} = sin2t^{\alpha}$$

şeklinde olur. Bu denklem sisteminden $c_1^{(\alpha)}(t) = -\frac{1}{2}(sin2t^{\alpha})e^{\frac{3}{\alpha}t^{\alpha}}$ ve $c_2^{(\alpha)}(t) = \frac{1}{2}(sin2t^{\alpha})e^{\frac{1}{\alpha}t^{\alpha}}$ sonuçları elde edilir. Yine uyumlu kesirli türevler için verilen integrasyon formülü yardımıyla

$$c_1(t) = -\frac{3}{8\alpha^2 + 18}sin2t^{\alpha}e^{\frac{3}{\alpha}t^{\alpha}} + \frac{\alpha}{4\alpha^2 + 9}cos2t^{\alpha}e^{\frac{3}{\alpha}t^{\alpha}}$$

ve

$$c_2(t) = \frac{1}{8\alpha^2 + 2}sin2t^{\alpha}e^{\frac{1}{\alpha}t^{\alpha}} - \frac{\alpha}{4\alpha^2 + 1}cos2t^{\alpha}e^{\frac{1}{\alpha}t^{\alpha}}$$

sonuçlarına ulaşılır. c_1 ve c_2 nin bu değerleri yerlerine yazılırsa özel çözüm aşağıdaki gibi elde edilir:

$$v = \frac{-8\alpha}{16\alpha^2+40\alpha+9}cos2t^{\alpha} + \frac{-4\alpha^2+3}{16\alpha^4+40\alpha^2+9}sin2t^{\alpha}.$$

d. $q(t) = e^{2t^{\alpha}}t^{\alpha}$ fonksiyonu için denklem sistemi

$$c_1^{(\alpha)}(t)e^{\frac{-3}{\alpha}t^{\alpha}} + c_2^{(\alpha)}(t)e^{\frac{-1}{\alpha}t^{\alpha}} = 0$$

$$-3c_1^{(\alpha)}(t)e^{\frac{-3}{\alpha}t^{\alpha}} - c_2^{(\alpha)}(t)e^{\frac{-1}{\alpha}t^{\alpha}} = e^{2t^{\alpha}}t^{\alpha}$$

olarak yazılır. Bu denklem sistemi çözülerek $c_1^{(\alpha)}(t) = -\frac{1}{2}\left(e^{2t^{\alpha}}t^{\alpha}\right)e^{\frac{3}{\alpha}t^{\alpha}}$ ve $c_2^{(\alpha)}(t) = \frac{1}{2}\left(e^{2t^{\alpha}}t^{\alpha}\right)e^{\frac{1}{\alpha}t^{\alpha}}$ olduğu bulunur. Kesirsel kısmi integrasyon yardımıyla

$$c_1(t) = -\frac{1}{4\alpha+6}e^{\frac{2\alpha+3}{\alpha}t^{\alpha}}t^{\alpha} + \frac{\alpha}{2(2\alpha+3)^2}e^{\frac{2\alpha+3}{\alpha}t^{\alpha}},$$

$$c_2(t) = \frac{1}{4\alpha+2}e^{\frac{2\alpha+1}{\alpha}t^{\alpha}}t^{\alpha} + \frac{\alpha}{2(2\alpha+1)^2}e^{\frac{2\alpha+1}{\alpha}t^{\alpha}}$$

sonuçlarına ulaşılır. Şimdi de bu değerler u fonksiyonunda yerine yazılırsa

$$v = \frac{e^{2t^{\alpha}}t^{\alpha}}{4\alpha^2+8\alpha+3} - \frac{4\alpha^2+4\alpha}{(4\alpha^2+8\alpha+3)^2}e^{2t^{\alpha}}$$

özel çözümü elde edilir.

e. $q(t) = e^{-4t^{\alpha}}$ fonksiyonu için $\alpha \neq {}^{3}/_{4}$ ve $\alpha \neq {}^{1}/_{4}$ iken denklem sistemi

$$c_1^{(\alpha)}(t)e^{\frac{-3}{\alpha}t^{\alpha}} + c_2^{(\alpha)}(t)e^{\frac{-1}{\alpha}t^{\alpha}} = 0$$

$$-3c_1^{(\alpha)}(t)e^{\frac{-3}{\alpha}t^{\alpha}} - c_2^{(\alpha)}(t)e^{\frac{-1}{\alpha}t^{\alpha}} = e^{-4t^{\alpha}}$$

şeklinde yazılır. Denklem sistemi çözüldüğünde $c_1^{(\alpha)}(t) = -\frac{1}{2}\left(e^{-4t^{\alpha}}\right)e^{\frac{3}{\alpha}t^{\alpha}}$ ve $c_2^{(\alpha)}(t) = \frac{1}{2}\left(e^{-4t^{\alpha}}\right)e^{\frac{1}{\alpha}t^{\alpha}}$ sonuçları elde edilir. Uyumlu kesirli integral yardımıyla $c_1(t) = \frac{1}{8\alpha-3}e^{\frac{3-4\alpha}{\alpha}t^{\alpha}}$ ve $c_2(t) = \frac{1}{2-8\alpha}e^{\frac{1-4\alpha}{\alpha}t^{\alpha}}$ bulunur. Bu ifadeler yerine yazılılırsa özel çözüm

$$v = \frac{e^{-4t^{\alpha}}}{16\alpha^2 - 16\alpha + 3}$$

olarak bulunur. $\alpha = {}^3/_4$ için u fonksiyonu

$$u = c_1 e^{-4t^{3/4}} + c_2 e^{-\frac{4}{3}t^{3/4}}$$

olarak yazılır. Bu u fonksiyonu için denklem sistemi aşağıdaki gibi yazılır:

$$c_1^{(3/4)}(t)e^{-4t^{3/4}} + c_2^{(3/4)}(t)e^{-\frac{4}{3}t^{3/4}} = 0$$
$$-3c_1^{(3/4)}(t)e^{-4t^{3/4}} - c_2^{(3/4)}(t)e^{-\frac{4}{3}t^{3/4}} = e^{-4t^{3/4}}.$$

Bu denklem sistemi çözülecek olursa $c_1^{(3/4)}(t) = -\frac{1}{2}$ ve $c_2^{(3/4)}(t) = \frac{1}{2}e^{-\frac{8}{3}t^{(3/4)}}$ elde edilir. Bu ifadelere uyumlu kesirli integral uygulanacak olursa $c_1(t) = -\frac{2}{3}t^{3/4}$ ve $c_2(t) = -\frac{1}{4}e^{-\frac{8}{3}t^{(3/4)}}$ elde edilir. Bu değerler $\alpha = {}^3/_4$ için yazılmış olan u fonksiyonunda yerine yazılırsa

$$v = -\frac{2}{3}t^{3/4}e^{-4t^{3/4}} - \frac{1}{4}e^{-4t^{3/4}}$$

özel çözümü bulunur. Benzer olarak, $\alpha = {}^1/_4$ için u fonksiyonu

$$u = c_1 e^{-12t^{1/4}} + c_2 e^{-4t^{1/4}}$$

olarak yazılır. Yukarıdaki denklem göz önüne alınarak özel çözümü bulmak için aşağıdaki denklem sistemi yazılabilir:

$$c_1^{(1/4)}(t)e^{-12t^{1/4}} + c_2^{(1/4)}(t)e^{-4t^{1/4}} = 0$$
$$-3c_1^{(1/4)}(t)e^{-12t^{1/4}} - c_2^{(1/4)}(t)e^{-4t^{1/4}} = e^{-4t^{1/4}}.$$

Bu denklem sistemi çözülerek $c_1^{(1/4)}(t) = -\frac{1}{2}e^{8t^{1/4}}$ ve $c_2^{(1/4)}(t) = \frac{1}{2}$ bulunur. $\alpha = 1/4$ için bu ifadelerin uyumlu kesirli integrali alınırsa $c_1(t) = -\frac{1}{4}e^{8t^{1/4}}$ ve $c_2(t) = 2t^{1/4}$ olur. Bulunan bu değerler yerine yazıldığında özel çözüm

$$v = 2t^{1/4}e^{-4t^{1/4}} - \frac{1}{4}e^{-4t^{1/4}}$$

olarak bulunur.

4.5. α Mertebeden Uyumlu Kesirli Lineer Denklemler

Bu bölümde $0 < \alpha \leq 1$, $p(t)$ ve $q(t)$ (a, ∞) aralığında tanımlı ve sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$T_\alpha^a y + p(t)y = q(t)$$

formundaki α mertebeden uyumlu kesirli lineer denklemlerin çözümü incelenecektir.

Teorem 4.18: $0 < \alpha \leq 1$ için

$$T_\alpha^a y + p(t)y = q(t) \tag{4.64}$$

şeklindeki uyumlu kesirli diferensiyel denklemin çözümü

$$y(t) = e^{-I_\alpha^a(p(t))}\left[I_\alpha^a\left(e^{I_\alpha^a(p(t))}q(t)\right) + c\right]$$

şeklindedir. Burada c bir sabittir.

İspat: (4.64) denkleminin her iki tarafı $e^{I_\alpha^a(p(t))}$ ile çarpalırsa

$$e^{I_\alpha^a(p(t))}T_\alpha^a y + e^{I_\alpha^a(p(t))}p(t)y = e^{I_\alpha^a(p(t))}q(t)$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemin sol tarafı $T_\alpha^a\left(e^{I_\alpha^a(p(t))}y\right)$ ifadesine eşittir. O halde

$$T_\alpha^a\left(e^{I_\alpha^a(p(t))}y\right) = e^{I_\alpha^a(p(t))}q(t) \tag{4.65}$$

olur. Elde edilen (4.65) ifadesi için her iki tarafa uyumlu kesirli integral uygulanır ise

$$y(t) = e^{-I_\alpha^a(p(t))}\left[I_\alpha^a\left(e^{I_\alpha^a(p(t))}q(t)\right) + c\right]$$

sonucu görülür. Şimdi, Khalil *et al*. (2014) de herhangi bir kurala ihtiyaç duyulmaksızın çözülen iki denklem verilen teorem yardımıyla çözülecektir.

Örnek 4.8: $T_{1/2}y + y = t^2 + 2t^{3/2}$, $y(0) = 0$ denkleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm: Yukarıda ifade edilen referansta bu örneğin sonucu $y(t) = t^2$ olarak bulunmuştur. $I_{1/2}(1) = 2\sqrt{t}$ olup teoreme göre çözüm

$$y(t) = e^{-2\sqrt{t}}\left[I_{1/2}\left(e^{2\sqrt{t}}\left(t^2 + 2t^{3/2}\right)\right) + c\right]$$

olur. Teorem 3.7 (yani uyumlu kesirli mertebeden türevler için kısmi integrasyon formülü) e göre

$$y(t) = ce^{-2\sqrt{t}} + t^2$$

olarak bulunur. $y(0) = 0$ başlangıç koşulu göz önüne alınırsa çözüm

$$y(t) = t^2$$

şeklinde elde edilir. Görüleceği üzere bu sonuç ilgili referansındaki sonuç ile aynıdır.

Örnek 4.9: $T_{1/2}y + \sqrt{t}y = te^{-t}$ denkleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm. Teorem 4.18 e göre,

$$y(t) = e^{-I_{1/2}(\sqrt{t})}\left[I_{1/2}\left(e^{I_{1/2}(\sqrt{t})}(te^{-t})\right) + c\right]$$

yazılır. $I_{1/2}(\sqrt{t}) = t$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$y(t) = e^{-t}[I_{1/2}(t) + c]$$

olur. Buradan da,

$$y(t) = ce^{-t} + \frac{2}{3}t^{3/2}$$

olduğu görülür. Bu sonuç da ilgili referanstaki sonuçla uyumludur.

Örnek 4.10: $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere $T_\alpha\, y + t^\alpha y = t^\alpha e^{t^{2\alpha}}$denkleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm: Teorem 4.18 e göre,

$$y(t) = e^{-I_\alpha\,(t^\alpha)}\left[I_\alpha\,\left(e^{I_\alpha\,(t^\alpha)}t^\alpha e^{t^{2\alpha}}\right) + c\right]$$

yazılır. $I_\alpha\,(t^\alpha) = \frac{t^{2\alpha}}{2\alpha}$ olup yerine yazıldığında

$$y(t) = e^{-\frac{t^{2\alpha}}{2\alpha}}\left[I_\alpha\,\left(e^{\left(\frac{1+2\alpha}{2\alpha}\right)t^{2\alpha}}t^\alpha\right) + c\right]$$

olur. $I_\alpha\,\left(e^{\left(\frac{1+2\alpha}{2\alpha}\right)t^{2\alpha}}t^\alpha\right) = \frac{1}{1+2\alpha}e^{\left(\frac{1+2\alpha}{2\alpha}\right)t^{2\alpha}}$ eşitliği dikkate alındığında çözüm

$$y(t) = ce^{-\frac{t^{2\alpha}}{2\alpha}} + \frac{e^{t^{2\alpha}}}{1+2\alpha}$$

olarak bulunur.

4.6. Uyumlu Kesirli Mertebeden Diferensiyel Denklemler için Seri Çözümler

En genel homojen dizisel lineer diferensiyel denklem

$$^{(n)}T_\alpha^a y + p_{n-1}(t)^{(n-1)}T_\alpha^a y + \ldots + p_1(t)T_\alpha^a y + p_0(t)y = 0 \tag{4.66}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $^{(n)}T_\alpha^a y$, y fonksiyonuna art arda n kez uyumlu kesir mertebeden türevin uygulanması manasındadır.

Tanım 4.3: $\alpha \in (0,1]$, $f(t)$, $[a,b]$ aralığında tanımlı reel değerli bir fonksiyon ve $t_0 \in [a,b]$ olsun. Bu durumda $N(t_0)$, t_0 ın bir komşuluğu olmak üzere $\forall t \in N(t_0)$ için $f(t)$ fonksiyonu, $(t-t_0)^\alpha$ nın doğal kuvvetlerinin bir serisi olarak yazılabiliyorsa $f(t)$ fonksiyonuna t_0 noktasında α analitiktir denir. Yani,

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(t-t_0)^{k\alpha} \qquad (c_k\in R)$$

olarak yazılabilir ve $|t-t_0|<\delta$ $(\delta>0)$ için bu seri mutlak yakınsaktır. Burada δ, serinin yakınsaklık yarıçapıdır.

Tanım 4.4: $\alpha\in(0,1]$, $t_0\in[a,b]$ ve $k=0,1,2,\dots,n-1$ için $p_k(t)$ fonksiyonları $t_0\in[a,b]$ noktasında α analitik olsun. Bu durumda, $t_0\in[a,b]$ noktasına (4.66) denkleminin bir α adi noktası denir. Eğer $t_0\in[a,b]$ bir α adi noktası değilse, o zaman bu noktaya α singüler nokta denir.

Örnek 4.11: a) Aşağıdaki uyumlu kesir mertebeden dizisel lineer diferensiyel denklemleri göz önüne alalım.

$$T_\alpha y-t^\alpha y=0,$$
$${}^{(2)}T_\alpha y-2t^\alpha y=0,$$
$$t^{2\alpha\,(2)}T_\alpha y-2t^\alpha T_\alpha y+t^{2\alpha}y=0.$$

Herhangi bir $t=t_0>0$ noktası yukarıdaki denklemlerin α adi noktasıdır.

b)

$$(t-1)^\alpha T_\alpha y-y=0,$$
$$(t-1)^{2\alpha\,(2)}T_\alpha y-2(t-1)^\alpha T_\alpha y+(t-1)^{2\alpha}y=0.$$

Bu denklemler için, herhangi bir $t=t_0>1$ noktası α adi noktadır.

Tanım 4.5: $\alpha\in(0,1]$ ve $k=0,1,2,\dots,n-1$ için $t_0\in[a,b]$, $p_k(t)$ fonksiyonlarının bir α singüler noktası olsun. Eğer $(t-t_0)^{(n-k)\alpha}p_k(t)$ fonksiyonları $k=0,1,2,\dots,n-1$

için $t_0 \in [a,b]$ noktasında α analitik ise t_0 noktasına (4.66) denkleminin α düzgün tekil noktası denir. Aksi durumda t_0 noktasına α esas tekil nokta denir.

Örnek 4.12: a) Aşağıdaki uyumlu kesir mertebeden dizisel lineer diferensiyel denklemleri göz önüne alalım.

$$t^{\alpha} T_{\alpha} y - y = 0,$$
$$t^{2\alpha\,(2)} T_{\alpha} y - 2t^{\alpha} y = 0,$$
$$t^{2\alpha\,(2)} T_{\alpha} y - 2t^{\alpha} T_{\alpha} y + t^{2\alpha} y = 0.$$

$t = 0$ noktası yukarıdaki denklemlerin bir α düzgün tekil noktasıdır.

b)

$$(t-1)^{\alpha} T_{\alpha} y - y = 0,$$
$$(t-1)^{2\alpha\,(2)} T_{\alpha} y - 2(t-1)^{\alpha} T_{\alpha} y + (t-1)^{2\alpha} y = 0.$$

Bu denklemler için, $t = 1$ noktası α düzgün tekil noktasıdır.

4.6.1. α Adi nokta civarında seri çözümler

Teorem 4.19: $\alpha \in (0,1]$ ve $t_0 \in [a,b]$

$$T_{\alpha}^{t_0} T_{\alpha}^{t_0} y + p(t) T_{\alpha}^{t_0} y + q(t) y = 0 \tag{4.67}$$

denkleminin bir α adi noktası olsun. O zaman $c_0 = y(t_0)$, $\alpha c_1 = T_{\alpha} y(t_0)$ başlangıç şartları ile verilen (4.67) denkleminin $t \in (t_0, t_0 + \rho)$ için aşağıdaki gibi bir çözümü vardır:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (t - t_0)^{k\alpha} . \tag{4.68}$$

Burada $\rho = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ dir. Burada t_0, (4.67) denkleminin bir α adi noktası olduğu için, Tanım 4.3 ve Tanım 4.4 den dolayı

$$p(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k (t - t_0)^{k\alpha} \qquad (t \in [t_0, t_0 + \delta_1];\ \delta_1 > 0) \tag{4.69}$$

ve

$$q(t) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k (t - t_0)^{k\alpha} \qquad (t \in [t_0, t_0 + \delta_2];\ \delta_2 > 0) \tag{4.70}$$

dir.

İspat: (4.67) denkleminin (4.68) biçiminde çözümünü arayalım. Eğer (4.68) ve (4.68) in uyumlu kesirli türevleri (4.67) denkleminde yerine yazılırsa

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^2 (k+2)(k+1) c_{k+2} (t - t_0)^{k\alpha} + \left(\sum_{k=0}^{\infty} p_k (t - t_0)^{k\alpha}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha(k+1) c_{k+1} (t - t_0)^{k\alpha}\right) + \left(\sum_{k=0}^{\infty} q_k (t - t_0)^{k\alpha}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k (t - t_0)^{k\alpha}\right) = 0 \tag{4.71}$$

sonucu elde edilir. Bu ifadedeki seri çarpımları

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} p_k (t - t_0)^{k\alpha}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha(k+1) c_{k+1} (t - t_0)^{k\alpha}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} \alpha(j+1) p_{k-j} c_{j+1}\right)(t - t_0)^{k\alpha} \tag{4.72}$$

ve

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} q_k (t - t_0)^{k\alpha}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k (t - t_0)^{k\alpha}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} q_{k-j} c_j\right)(t - t_0)^{k\alpha} \tag{4.73}$$

şeklinde yazılabilir. Elde edilen bu (4.72) ve (4.73) denklemleri (4.71) denkleminde yerine yazılırsa

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\alpha^2(k+2)(k+1)c_{k+2}+\sum_{j=0}^{k}\alpha(j+1)p_{k-j}c_{j+1}+\sum_{j=0}^{k}q_{k-j}c_j\right](t-t_0)^{k\alpha}=0$$

elde edilir. Böylece, c_k katsayıları aşağıdaki rekürsif bağıntıyı sağlamalıdır:

$$\alpha^2(k+2)(k+1)c_{k+2}=-\sum_{j=0}^{k}\left[\alpha(j+1)p_{k-j}c_{j+1}+q_{k-j}c_j\right]. \tag{4.74}$$

Eğer $k\geq 2$ için c_k katsayıları (4.74) tarafından tanımlanırsa,

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(t-t_0)^{k\alpha}$$

serisinin $0<t-t_0<\rho$ için yakınsak olduğu gösterilmelidir. $0<r<\rho$ olacak şekilde uygun bir r sabiti alalım. (4.69) ve (4.70) serileri $0\leq t-t_0\leq r$ için yakınsak olduğundan, bir $M>0$ sayısı için

$$\left|p_{k-j}\right|\leq\frac{Mr^{j\alpha}}{r^{k\alpha}}\qquad(k\in N_0;0\leq j\leq k) \tag{4.75}$$

ve

$$\left|q_{k-j}\right|\leq\frac{Mr^{j\alpha}}{r^{k\alpha}}\qquad(k\in N_0;0\leq j\leq k) \tag{4.76}$$

yazılabilir. (4.74) denkleminde (4.75) ve (4.76) denklemleri kullanılacak olursa,

$$\begin{aligned}\alpha^2(k+2)(k+1)|c_{k+2}|&\leq\frac{M}{r^{k\alpha}}\sum_{j=0}^{k}\left[\alpha(j+1)\left|c_{j+1}\right|+\left|c_j\right|\right]r^{j\alpha}\\&\leq\frac{M}{r^{k\alpha}}\sum_{j=0}^{k}\left[\alpha(j+1)\left|c_{j+1}\right|+\left|c_j\right|\right]r^{j\alpha}+M\left|c_{j+1}\right|r^{\alpha}\end{aligned} \tag{4.77}$$

elde edilir. Şimdi,

$$C_0 = |c_0|, C_1 = |c_1|$$

olacak şekilde C_0 ve C_1 i tanımlayalım. Ayrıca, $k \geq 2$ için C_k katsayıları

$$\alpha^2(k+2)(k+1)C_{k+2} = \frac{M}{r^{k\alpha}}\sum_{j=0}^{k}\left[\alpha(j+1)C_{j+1} + C_j\right]r^{j\alpha} + MC_{k+1}r^{\alpha} \tag{4.78}$$

tarafından tanımlansın. Tüm bunlardan sonra

$$|c_k| \leq C_k, \qquad C_k \geq 0, \qquad (k = 0,1,2,\dots)$$

olduğu görülür. Şimdi ise, t nin hangi değerleri için

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k(t-t_0)^{k\alpha} \tag{4.79}$$

serisinin yakınsak olduğunu analiz edelim. (4.78) denklemi kullanılarak,

$$\alpha^2(k)(k+1)C_{k+1} = \frac{M}{r^{(k-1)\alpha}}\sum_{j=0}^{k-1}\left[\alpha(j+1)C_{j+1} + C_j\right]r^{j\alpha} + MC_k r^{\alpha} \tag{4.80}$$

$$\alpha^2(k)(k-1)C_k = \frac{M}{r^{(k-2)\alpha}}\sum_{j=0}^{k-2}\left[\alpha(j+1)C_{j+1} + C_j\right]r^{j\alpha} + MC_{k-1}r^{\alpha} \tag{4.81}$$

sonuçlarına ulaşılır. (4.80) ve (4.81) den

$$r^{\alpha}\alpha^2(k)(k+1)C_{k+1} = \alpha^2(k)(k-1)C_k + \alpha Mkr^{\alpha}C_k + MC_k r^{2\alpha}$$

olduğu bulunur. Böylece,

$$\frac{C_{k+1}}{C_k} = \frac{\alpha^2(k)(k-1) + \alpha Mkr^{\alpha} + Mr^{2\alpha}}{r^{\alpha}\alpha^2(k)(k+1)}$$

elde edilir. Oran testi yardımıyla,

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{C_{k+1}(t-t_0)^{(k+1)\alpha}}{C_k(t-t_0)^{k\alpha}}\right| = \left(\frac{|t-t_0|}{r}\right)^{\alpha} < 1$$

olduğu görülür. Böylece, (4.79) serisi $0 < t - t_0 < r$ için yakınsaktır. Bu (4.68) serisinin de $0 < t - t_0 < r$ için yakınsak olduğunu ima eder. r, $0 < r < \rho$ aralığındaki herhangi bir sayı olduğu için, (4.68) serisi $0 < t - t_0 < \rho$ için yakınsaktır.

Örnek 4.13: Aşağıdaki uyumlu kesir mertebeden dizisel lineer diferensiyel denklemin çözümünü bulunuz:

$$T_\alpha T_\alpha y - t^\alpha T_\alpha y - y = 0. \tag{4.82}$$

$t_0 = 0$ bu denklem için bir α adi nokta olduğundan

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k\alpha}$$

biçimde çözüm aranmalıdır. Buna göre, bu ifadenin birinci ve ikinci mertebeden dizisel kesirli türevleri

$$T_\alpha y = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha(k+1)c_{k+1}t^{k\alpha}$$

ve

$$T_\alpha T_\alpha y = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^2(k+1)(k+2)c_{k+2}t^{k\alpha}$$

şeklinde yazılabilir. Bulunan bu ifadeler (4.82) denkleminde yerine yazılacak olursa,

$$c_2 = \frac{1}{2\alpha^2} c_0$$

ve

$$c_{k+2} = \frac{k\alpha + 1}{\alpha^2(k+1)(k+2)} c_k \quad k = 1,2, \dots$$

elde edilir. Yukarıdaki rekürsif bağıntı yardımıyla diğer katsayılar,

$$c_2 = \frac{1}{2\alpha^2} c_0 \qquad c_3 = \frac{2\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2\alpha}+2\right)}{\alpha.\Gamma\left(\frac{1}{2\alpha}+1\right)\Gamma(4)} c_1$$

$$c_4 = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2\alpha}+2\right)}{2^{-1}\alpha^3\Gamma\left(\frac{1}{2\alpha}+1\right)\Gamma(5)} c_0 \qquad c_5 = \frac{2^2\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2\alpha}+3\right)}{\alpha^2\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2\alpha}+1\right)\Gamma(6)} c_1$$

$$c_6 = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2\alpha}+3\right)}{2^{-2}\alpha^4\Gamma\left(\frac{1}{2\alpha}+1\right)\Gamma(7)} c_0 \qquad c_7 = \frac{2^3\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2\alpha}+4\right)}{\alpha^3\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2\alpha}+1\right)\Gamma(8)} c_1$$

$$\vdots$$

$$c_{2k} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2\alpha}+k\right)}{2^{1-k}\alpha^{k+1}\Gamma\left(\frac{1}{2\alpha}+1\right)\Gamma(2k+1)} c_0 \qquad c_{2k+1} = \frac{2^k\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2\alpha}+k+1\right)}{\alpha^k\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2\alpha}+1\right)\Gamma(2k+2)} c_1$$

şeklinde bulunur. Böylece, (4.82) denkleminin genel çözümü

$$y(t) = c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2\alpha}+k\right)}{2^{1-k}\alpha^{k+1}\Gamma\left(\frac{1}{2\alpha}+1\right)\Gamma(2k+1)} \right] t^{2k\alpha} + c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{2^k\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2\alpha}+k+1\right)}{\alpha^k\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2\alpha}+1\right)\Gamma(2k+2)} \right] t^{(2k+1)\alpha}$$

olarak bulunur.

4.6.1.a. Hermite uyumlu kesir mertebeli diferensiyel denklem ve kesirli Hermite polinomları

$$T_\alpha T_\alpha y - 2\alpha t^\alpha T_\alpha y + 2\alpha^2 m y = 0 \tag{4.83}$$

şeklindeki uyumlu kesir mertebeden Hermite diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Burada $\alpha \in (0,1]$ ve m bir reel sayıdır. Eğer $\alpha = 1$ ise, o zaman (4.83) denklemi klasik Hermite diferensiyel denklem haline gelir.

m negatif olmayan bir tamsayı olsun. $t_0 = 0$ noktası (4.83) denkleminin bir α adi noktasıdır. (4.83) denkleminin $t_0 = 0$ için (4.68) formunda çözümleri aranmalıdır. Yani,

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k\alpha}$$

şeklinde çözüm aranmalıdır. Bu çözüm için

$$T_\alpha y = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha(k+1)c_{k+1} t^{k\alpha}$$

ve

$$T_\alpha T_\alpha y = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^2(k+1)(k+2)c_{k+2} t^{k\alpha}$$

ifadeleri yazılabilir. Bulunan bu uyumlu kesir mertebeli türevler (4.83) de yerine yazılırsa,

$$c_2 = -mc_0$$

sonucu ve

$$c_{k+2} = \frac{2(k-m)}{(k+1)(k+2)} c_k \quad k = 1,2, \ldots$$

rekürsif bağıntısı bulunur. Bu bağıntı yardımıyla c_k katsayıları

$$c_2 = (-1)\frac{2m}{2!}c_0 \qquad c_3 = (-1)\frac{2(\mathrm{m}-1)}{3!}c_1$$

$$c_4 = (-1)^2\frac{2^2 m(m-2)}{4!}c_0 \qquad c_5 = (-1)^2\frac{2^2(\mathrm{m}-1)(m-3)}{5!}c_1$$

$$c_6 = (-1)^3\frac{2^3 m(m-2)(m-4)}{6!}c_0 \qquad c_7 = (-1)^3\frac{2^3(\mathrm{m}-1)(m-3)(m-5)}{7!}c_1$$

$$\vdots$$

$$c_{2k} = (-1)^k\frac{2^k m(m-2)\ldots(m-2k+2)}{(2n)!}c_0 \qquad c_{2k+1} = (-1)^k\frac{2^k(m-1)(m-3)\ldots(m-2k+1)}{(2n+1)!}c_1$$

şeklinde elde edilir. Buna göre (4.83) denkleminin genel çözümü

$$y(t) = c_0 + c_0\sum_{k=1}^{\infty}\left[(-1)^k\frac{2^k m(m-2)\ldots(m-2k+2)}{(2n)!}\right]t^{2k\alpha} + c_1 x^{\alpha}$$
$$+ c_1\sum_{k=1}^{\infty}\left[(-1)^k\frac{2^k(m-1)(m-3)\ldots(m-2k+1)}{(2k+1)!}\right]t^{(2k+1)\alpha}$$

olarak bulunur. Şimdi, başlangıç şartları aşağıdaki gibi konulsun:

$$y(0) = c_0 = (-2)^{\frac{m}{2}}(m-1)!!,$$

$$T_\alpha y(0) = \alpha c_1 = 0 \rightarrow c_1 = 0.$$

Burada,

$$(m-1)!! = \begin{cases} (m-1)(m-3)\ldots 3.1 & (m-1)\ tek \\ (m-1)(m-3)\ldots 4.2 & (m-1)\ çift \end{cases}$$

dir. Eğer $c_1 = 0$ ise, o zaman bütün k tek sayıları için $c_k = 0$ olur. Bu başlangıç şartları altında, çözüm

$$y(t) = (-2)^{\frac{m}{2}}(m-1)!!\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[(-1)^k \frac{2^k m(m-2)\ldots(m-2k+2)}{(2k)!}\right] t^{2k\alpha}\right] \qquad (4.84)$$

olarak bulunur. Özel olarak, $m = 6$ için, çözüm

$$y(t) = 64t^{6\alpha} - 480t^{4\alpha} + 720t^{2\alpha} - 120$$

olur. Bu çözüm 6. dereceden kesirli Hermite polinomudur. Yani,

$$H_6^\alpha(t) = 64t^{6\alpha} - 480t^{4\alpha} + 720t^{2\alpha} - 120$$

dir. Tek sayı dereceli Hermite polinomlarını bulmak için aşağıdaki özel başlangıç şartları seçilsin:

$$y(0) = c_0 = 0,$$
$$T_\alpha y(0) = \alpha c_1 = -\alpha(-2)^{\frac{m+1}{2}}(m)!! \rightarrow c_1 = -(-2)^{\frac{m+1}{2}}(m)!!.$$

Eğer $c_0 = 0$ ise, bütün k çift sayıları için de $c_k = 0$ olur. Bu başlangıç şartları ile çözüm

$$y(t) = -(-2)^{\frac{m+1}{2}}(m)!!\left[t^\alpha + \sum_{k=1}^{\infty}\left[(-1)^k \frac{2^k(m-1)(m-3)\ldots(m-2k+1)}{(2k+1)!}\right] t^{(2k+1)\alpha}\right] \qquad (4.85)$$

olarak bulunur. Özel olarak, $m = 5$ için, çözüm

$$y(t) = 32t^{5\alpha} - 160t^{3\alpha} + 120t^{\alpha}$$

şeklindedir. Bu ise 5. dereceden kesirli Hermite polinomudur. Yani,

$$H_5^{\alpha}(t) = 32t^{5\alpha} - 160t^{3\alpha} + 120t^{\alpha}$$

dir.

Önerme 4.3: Kesirli Hermite polinomları için

(I) $H_m^{\alpha}(t) = H_m(t^{\alpha})$,

(II) $T_{\alpha}\left(H_m^{\alpha}(t)\right) = 2m\alpha H_{m-1}^{\alpha}(t)$,

(III) ${}^{(m)}T_{\alpha}\left(H_m^{\alpha}(t)\right) = 2^m m!\, \alpha^m$,

(IV) $H_{m+1}^{\alpha}(t) = 2t^{\alpha} H_m^{\alpha}(t) - 2mH_{m-1}^{\alpha}(t)$,

(V) $H_{m+1}^{\alpha}(t) = 2t^{\alpha} H_m^{\alpha}(t) - \alpha^{-1} T_{\alpha}\left(H_m^{\alpha}(t)\right)$,

(VI) $H_m^{\alpha}(t) = (-\alpha^{-1})^m e^{t^{2\alpha}} {}^{(m)}T_{\alpha}\left(e^{-t^{2\alpha}}\right)$,

(VII) $\int_{-\infty}^{\infty} H_m^{\alpha}(t)\, H_n^{\alpha}(t) e^{-t^{2\alpha}} d_{\alpha}(t) = 0 \quad m \neq n \; ve \; \alpha = \frac{1}{2j+1} \quad j \in N$,

(VIII) $\int_{-\infty}^{\infty} H_m^{\alpha}(t)\, H_n^{\alpha}(t) e^{-t^{2\alpha}} d_{\alpha}(t) = \frac{1}{\alpha} 2^n n! \sqrt{\pi} \quad m = n \; ve \; \alpha = \frac{1}{2j+1} \quad j \in N$

özellikleri geçerlidir.

İspat: **(I)** İspat açıktır. Gerçekten de klasik Hermite polinomlarında t yerine t^α yazılırsa sonuç görülür.

(II) m çift olsun. O zaman $H_m^\alpha(t)$, (4.84) denklemi yardımıyla bulunur. (4.84) denklemine $\alpha \in (0,1]$ için uyumlu kesirli türev uygulanırsa,

$$T_\alpha\left(H_m^\alpha(t)\right) = 2m\alpha\left[-(-2)^{\frac{m}{2}}(m-1)!!\left[t^\alpha + \sum_{k=1}^{\infty}\left((-1)^k \frac{2^k(m-2)\dots(m-2k)}{(2k+1)!}\right)t^{(2k+1)\alpha}\right]\right]$$

elde edilir. $m-1$ tek olacağı için,

$$T_\alpha\left(H_m^\alpha(t)\right) = 2m\alpha H_{m-1}^\alpha(t).$$

yazılabilir. Tersine, m tek olsun. O zaman $H_m^\alpha(t)$, (4.85) denklemi yardımıyla bulunur. (4.85) denklemine $\alpha \in (0,1]$ için uyumlu kesirli türev uygulanırsa,

$$T_\alpha\left(H_m^\alpha(t)\right) = 2m\alpha\left[(-2)^{\frac{m-1}{2}}(m-2)!!\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left((-1)^k \frac{2^k(m-1)(m-3)\dots(m-2k+1)}{(2k)!}\right)t^{(2k)\alpha}\right]\right]$$

elde edilir. $m-1$ çift olacağı için benzer bir şekilde

$$T_\alpha\left(H_m^\alpha(t)\right) = 2m\alpha H_{m-1}^\alpha(t) \tag{4.86}$$

sonucu yazılabilir.

(III) İspat tümevarım ile yapılabilir. $m = 1$ için özellik sağlanır. Yani,

$$T_\alpha\left(H_1^\alpha(t)\right) = 2\alpha$$

dir. Bu özellik $m = n$ için geçerli olsun. Yani,

$$^{(n)}T_\alpha\left(H_n^\alpha(t)\right) = 2^n n!\,\alpha^n \tag{4.87}$$

olsun. (II) şıktaki özellikten dolayı,

$$T_\alpha\left(H_{n+1}^\alpha(t)\right) = 2(n+1)\alpha H_n^\alpha(t) \tag{4.88}$$

ifadesi yazılabilir. Bu ifadenin $\alpha \in (0,1]$ için n kez uyumlu kesirli mertebeden türevi alınırsa,

$$^{(n+1)}T_\alpha\left(H_{n+1}^\alpha(t)\right) = 2(n+1)\alpha\,^{(n)}T_\alpha\left(H_n^\alpha(t)\right) \tag{4.89}$$

elde edilir. (4.89) denkleminde (4.87) denklemi yerine yazılırsa,

$$^{(n+1)}T_\alpha\left(H_{n+1}^\alpha(t)\right) = 2^{n+1}(n+1)\alpha^{n+1} \tag{4.90}$$

sonucuna varılır. Böylece, ispat tamamlanır.

(IV) $H_{m+1}^\alpha(t)$, (4.83) denkleminin bir çözümü olduğu için,

$$^{(2)}T_\alpha\left(H_{m+1}^\alpha(t)\right) - 2\alpha t^\alpha T_\alpha\left(H_{m+1}^\alpha(t)\right) + 2\alpha^2(m+1)H_{m+1}^\alpha(t) = 0 \tag{4.91}$$

yazılabilir. Elde edilen bu ifadede (II) şıkkı kullanılırsa,

$$H_{m+1}^\alpha(t) = 2t^\alpha H_m^\alpha(t) - 2mH_{m-1}^\alpha(t) \tag{4.92}$$

sonucuna ulaşılır.

(V) (4.86) ve (4.92) denklemi birlikte düşünülerek, sonuç görülür.

(VI) İspat tümevarımla yapılır. $m = 1$ için, bu özellik sağlanır. $m = n$ için özelliğin geçerli olduğunu varsayılsın. Yani,

$$H_n^\alpha(t) = (-\alpha^{-1})^n e^{t^{2\alpha}\,(n)}T_\alpha\left(e^{-t^{2\alpha}}\right) \tag{4.93}$$

olsun. Eğer denklem (4.93), (V) özelliğinde yerine konulacak olursa o zaman

$$H_{n+1}^\alpha(t) = (-\alpha^{-1})^{n+1} e^{t^{2\alpha}\,(n+1)}T_\alpha\left(e^{-t^{2\alpha}}\right)$$

olduğu görülür. Böylece, ispat tamamlanır.

(VII) Tanım 3.1, $t > 0$ için verilmiştir. $(-\infty, 0]$ aralığındaki tanımsızlık probleminden kaçınmak için, $\alpha = \frac{1}{2j+1}$ olduğunu varsayalım. Burada j herhangi bir doğal sayıdır. $H_m^\alpha(t)$ ve $H_n^\alpha(t)$, (4.83) denkleminin çözümleri olduğu için, sırasıyla,

$$^{(2)}T_\alpha\left(H_m^\alpha(t)\right) - 2\alpha t^\alpha T_\alpha\left(H_m^\alpha(t)\right) + 2\alpha^2 m H_m^\alpha(t) = 0, \tag{4.94}$$

$$^{(2)}T_\alpha\left(H_n^\alpha(t)\right) - 2\alpha t^\alpha T_\alpha\left(H_n^\alpha(t)\right) + 2\alpha^2 m H_n^\alpha(t) = 0 \tag{4.95}$$

yazılabilir. (4.94) denklemi $e^{-t^{2\alpha}}H_n^\alpha(t)$ ile ve (4.95) denklemi $e^{-t^{2\alpha}}H_m^\alpha(t)$ ile çarpılıp taraf tarafa çıkarılırsa

$$T_\alpha\left[e^{-t^{2\alpha}}T_\alpha\left(H_m^\alpha(t)\right)\right]H_n^\alpha(t)-T_\alpha\left[e^{-t^{2\alpha}}T_\alpha\left(H_n^\alpha(t)\right)\right]H_m^\alpha(t)+ \\ 2\alpha^2(m-n)e^{-t^{2\alpha}}H_n^\alpha(t)H_m^\alpha(t)=0 \quad (4.96)$$

elde edilir. Eğer (4.96) denklemine uyumlu mertebeden kesirli integral uygulanırsa,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(T_\alpha\left[e^{-t^{2\alpha}}T_\alpha\left(H_m^\alpha(t)\right)\right]H_n^\alpha(t)-T_\alpha\left[e^{-t^{2\alpha}}T_\alpha\left(H_n^\alpha(t)\right)\right]H_m^\alpha(t)\right)d_\alpha t \\ +2\alpha^2(m-n)\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^{2\alpha}}H_n^\alpha(t)H_m^\alpha(t)d_\alpha t=0$$

sonucu elde edilir. Eğer yukarıdaki denklemdeki ilk kesirli integral için uyumlu kesir mertebeden kısmi integrasyon uygulanacak olursa bu integralin sonucunun sıfır olduğu görülür. Gerçekten de,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(T_\alpha\left[e^{-t^{2\alpha}}T_\alpha\left(H_m^\alpha(t)\right)\right]H_n^\alpha(t)-T_\alpha\left[e^{-t^{2\alpha}}T_\alpha\left(H_n^\alpha(t)\right)\right]H_m^\alpha(t)\right)d_\alpha t \\ =e^{-t^{2\alpha}}\left(T_\alpha\left(H_m^\alpha(t)\right)H_n^\alpha(t)-T_\alpha\left(H_n^\alpha(t)\right)H_m^\alpha(t)\right)\Big|_{-\infty}^{\infty} \\ =0$$

olur. Geriye kalan kısım için ise, $m\neq n$ olduğu için

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^{2\alpha}}H_n^\alpha(t)H_m^\alpha(t)d_\alpha t=0$$

olmalıdır. Böylece, ispat tamamlanır.

(VIII) Yine aynı şekilde tanımdan kaynaklanan problemi aşmak için j herhangi bir doğal sayı olmak üzere $\alpha = \frac{1}{2j+1}$ olduğu kabul edilsin. Ayrıca,

$$I_{m,n} = \int_{-\infty}^{\infty} H_m^\alpha(t)\, H_n^\alpha(t) e^{-t^{2\alpha}} d_\alpha(t)$$

şeklinde bir operatör tanımlansın. (VII) özelliğinden dolayı aşağıdaki denklem yazılabilir:

$$I_{n-1,n+1} = \int_{-\infty}^{\infty} H_{n-1}^\alpha(t)\, H_{n+1}^\alpha(t) e^{-t^{2\alpha}} d_\alpha(t) = 0.$$

Bu denkleme (IV) özelliği uygulanırsa,

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_{n-1}^\alpha(t) \left(2t^\alpha H_n^\alpha(t) - 2nH_{n-1}^\alpha(t)\right) e^{-t^{2\alpha}} d_\alpha(t) = 0$$

denklemi elde edilir. Yani,

$$\int_{-\infty}^{\infty} 2t^\alpha H_{n-1}^\alpha(t) H_n^\alpha(t)\, e^{-t^{2\alpha}} d_\alpha(t) = 2nI_{n-1,n-1} \quad (4.97)$$

olur.

$$H_n^\alpha(t) = (-\alpha^{-1})^n e^{t^{2\alpha}}\, {}^{(n)}T_\alpha\left(e^{-t^{2\alpha}}\right)$$

olduğunu hatırlanırsa, (4.97) denklemi

$$-(\alpha^{-1})^{2n-1} \int_{-\infty}^{\infty} 2t^\alpha e^{t^{2\alpha}} \left({}^{(n-1)}T_\alpha\left(e^{-t^{2\alpha}}\right)\right)\left({}^{(n)}T_\alpha\left(e^{-t^{2\alpha}}\right)\right) d_\alpha(t) = 2nI_{n-1,n-1} \quad (4.98)$$

haline gelir. Burada

$$2t^{\alpha}e^{t^{2\alpha}(n-1)}T_{\alpha}\left(e^{-t^{2\alpha}}\right)=\frac{1}{\alpha}T_{\alpha}\left[e^{t^{2\alpha}(n-1)}T_{\alpha}\left(e^{-t^{2\alpha}}\right)\right]-\frac{1}{\alpha}e^{t^{2\alpha}(n)}T_{\alpha}\left(e^{-t^{2\alpha}}\right)$$

olduğuna dikkat edelim. Böylece, (4.98) denklemi

$$\int_{-\infty}^{\infty}(\alpha^{-1})^{2n}e^{t^{2\alpha}(n)}T_{\alpha}\left(e^{-t^{2\alpha}}\right)^{(n)}T_{\alpha}\left(e^{-t^{2\alpha}}\right)d_{\alpha}(t)-(\alpha^{-1})^{2n}\int_{-\infty}^{\infty}T_{\alpha}\left[e^{t^{2\alpha}(n-1)}T_{\alpha}\left(e^{-t^{2\alpha}}\right)\right]^{(n)}T_{\alpha}\left(e^{-t^{2\alpha}}\right)d_{\alpha}(x)=2nI_{n-1,n-1}$$

şekline dönüşür. (IV) özelliği ve uyumlu mertebeden kesirli türevler için kısmi integrasyon metodu kullanılacak olursa,

$$I_{n,n}-(\alpha^{-1})^{2n}\left[e^{t^{2\alpha}(n-1)}T_{\alpha}\left(e^{-t^{2\alpha}}\right)^{(n)}T_{\alpha}\left(e^{-t^{2\alpha}}\right)\right]_{-\infty}^{\infty}+\int_{-\infty}^{\infty}(\alpha^{-1})^{2n}e^{t^{2\alpha}(n-1)}T_{\alpha}\left(e^{-t^{2\alpha}}\right)^{(n+1)}T_{\alpha}\left(e^{-t^{2\alpha}}\right)d_{\alpha}(t)=2nI_{n-1,n-1}$$

elde edilir. Aynı zamanda

$$\int_{-\infty}^{\infty}(\alpha^{-1})^{2n}e^{t^{2\alpha}(n-1)}T_{\alpha}\left(e^{-t^{2\alpha}}\right)^{(n+1)}T_{\alpha}\left(e^{-t^{2\alpha}}\right)d_{\alpha}(t)=I_{n-1,n+1}=0$$

$$-(\alpha^{-1})^{2n}\left[e^{t^{2\alpha}(n-1)}T_{\alpha}\left(e^{-t^{2\alpha}}\right)^{(n)}T_{\alpha}\left(e^{-t^{2\alpha}}\right)\right]_{-\infty}^{\infty}=0$$

eşitlikleri de göz önüne alınırsa, rekürsif bağıntı

$$I_{n,n}=2nI_{n-1,n-1}$$

şeklinde elde edilir. Bu işlemler *n* kez tekrar edildiğinde

$$I_{n,n} = 2^n n!\, I_{0,0}$$

sonucuna ulaşılır. $I_{0,0}$ operatörünün sonucu bulunacak olursa,

$$\begin{aligned} I_{0,0} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^{2\alpha}}\, d_\alpha(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t^{2\alpha}} dt \end{aligned}$$

olur. Burada $t^\alpha = u$ dersek $\alpha t^{\alpha-1} dt = du$ olur. Bu ifadeler yerine yazılırsa

$$I_{0,0} = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du$$

olur. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$ olduğu bilindiğine göre, $I_{0,0} = \frac{1}{\alpha}\sqrt{\pi}$ dir. Böylece,

$$I_{n,n} = 2^n n! \frac{1}{\alpha} \sqrt{\pi}$$

olur.

4.6.2. α Düzgün tekil nokta civarında seri çözümler

Aşağıdaki değişken katsayılı 2α mertebeli homojen dizisel lineer diferensiyel denklem göz önüne alınsın:

$$(t - t_0)^{2\alpha} T_\alpha^{t_0} T_\alpha^{t_0} y + (t - t_0)^\alpha p(t) T_\alpha^{t_0} y + q(t) y = 0. \tag{4.99}$$

Burada $\alpha \in (0,1]$ dır. Eğer t_0 noktası, (4.99) denkleminin bir α düzgün tekil noktası ise, o zaman bu nokta $p(t)$ ve $q(t)$ fonksiyonları için α analitik noktadır. Bu durumda, $p(t)$ ve $q(t)$ fonksiyonları sırasıyla aşağıdaki gibi seriye açılabilir:

$$p(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k (t - t_0)^{k\alpha} \qquad (0 < t - t_0 < \delta_1;\ \delta_1 > 0)$$

ve

$$q(t) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k (t - t_0)^{k\alpha} \qquad (0 < t - t_0 < \delta_2;\ \delta_2 > 0).$$

(4.99) denkleminin $c_0 \neq 0$ olmak üzere

$$y(t; s) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(s)(t - t_0)^{(k+s)\alpha} \tag{4.100}$$

şeklinde bir çözümü olduğu varsayılsın. Burada s belirlenecek bir sayıdır. (4.100) denklemi için

$$T_\alpha^{t_0} y = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha(k+s)c_k(s)(t - t_0)^{(k+s-1)\alpha}$$

ve

$$T_\alpha^{t_0} T_\alpha^{t_0} y = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^2 (k+s)(k+s-1)c_k(s)(t - t_0)^{(k+s-2)\alpha}$$

yazılabilir. (4.100) denklemi ve onun yukarıda elde edilen uyumlu kesir mertebeli türevleri (4.99) denkleminde yerine yazılırsa,

$$c_0\mathcal{I}_0(s)(t-t_0)^{s\alpha}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[c_k\mathcal{I}_0(k+s)+\sum_{j=0}^{k-1}c_j\mathcal{I}_{k-j}(j+s)\right](t-t_0)^{(k+s)\alpha}=0$$

elde edilir. Burada

$$\mathcal{I}_0(s)=\alpha^2 s(s-1)+\alpha s p_0+q_0, \tag{4.101}$$
$$\mathcal{I}_m(s)=p_m\alpha s+q_m \tag{4.102}$$

dir. (4.101) denklemi, (4.99) denkleminin kesirsel indis denklemi olarak adlandırılır. c_k katsayıları

$$c_k=-\frac{\sum_{j=0}^{k-1}a_j\mathcal{I}_{k-j}(j+s)}{\mathcal{I}_0(k+s)} \tag{4.103}$$

şeklinde bulunur.

Teorem 4.20: $\alpha\in(0,1]$ ve t_0 noktası

$$(t-t_0)^{2\alpha}T_\alpha^{t_0}T_\alpha^{t_0}y+(t-t_0)^{\alpha}p(t)T_\alpha^{t_0}y+q(t)y=0$$

denkleminin bir α düzgün tekil noktası olsun. Eğer kesirsel indis denkleminin s_1 ve s_2 kökleri birbirinden farklı ve $n\in N$ için $s_1-s_2\neq n$ ise o zaman $\rho=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ olmak üzere $t\in(t_0,t_0+\rho)$ için (4.99) denkleminin $y(t_0)=c_0,\ T_\alpha y(t_0)=\alpha c_1$ başlangıç şartları ile aşağıdaki gibi iki lineer bağımsız çözümü oluşur:

$$y_1(t;s_1)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(s_1)(t-t_0)^{(k+s_1)\alpha}, \tag{4.104}$$
$$y_2(t;s_2)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(s_2)(t-t_0)^{(k+s_2)\alpha}. \tag{4.105}$$

Burada δ_1 ve δ_2 sırasıyla aşağıdaki denklemlere göre belirlenir:

$$p(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k (t - t_0)^{k\alpha} \qquad (t \in [t_0, t_0 + \delta_1];\ \delta_1 > 0), \tag{4.106}$$
$$q(t) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k (t - t_0)^{k\alpha} \qquad (t \in [t_0, t_0 + \delta_2];\ \delta_2 > 0). \tag{4.107}$$

İspat: (4.100) denkleminde verilen serinin $t \in (t_0, t_0 + \rho)$ için yakınsak olduğu ispatlanmalıdır. s_1 ve s_2 kesirsel indis denkleminin $s_1 - s_2$ farkı pozitif tamsayı olmayacak şekilde iki farklı kökü olsun. Böylelikle, kesirsel indis denklemi

$$\mathcal{I}_0(s) = \alpha^2 (s - s_1)(s - s_2)$$

şeklinde yazılabilir. Böylece aşağıdaki denklemler yazılabilir:

$$\mathcal{I}_0(s_1 + k) = \alpha^2 k (k + s_1 - s_2),$$
$$\mathcal{I}_0(s_2 + k) = \alpha^2 k (k + s_2 - s_1).$$

s_1 ve s_2 için verilen şartlar dikkate alındığında,

$$\mathcal{I}_0(s_1 + k) \geq \alpha^2 k (k - |s_1 - s_2|), \tag{4.108}$$
$$\mathcal{I}_0(s_2 + k) \geq \alpha^2 k (k - |s_2 - s_1|) \tag{4.109}$$

yazılabilir. Şimdi, $0 < r < \rho$ olacak şekilde herhangi bir r sayısı alalım. (4.106) ve (4.107) deki seriler $t \in [t_0, t_0 + r]$ için yakınsaktır. Böylece,

$$|p_j| r^{j\alpha} \leq M \qquad (j \in N), \tag{4.110}$$
$$|q_j| r^{j\alpha} \leq M \qquad (j \in N) \tag{4.111}$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sabiti vardır. (4.108), (4.109), (4.110) ve (4.111) denklemleri (4.103) denkleminde kullanılacak olursa,

$$|c_k(s_1)| \leq \frac{M}{r^{k\alpha}} \frac{\sum_{j=0}^{k-1} \alpha(j+1+|s_1|)r^{j\alpha}|c_j(s_1)|}{\alpha^2 k(k-|s_1-s_2|)} \tag{4.112}$$

elde edilir. Şimdi de, $N-1 \leq |s_1 - s_2| < N$ olacak şekilde N bir tamsayı olsun. $k = 0,1,2,\dots,N-1$ için

$$C_0 = c_0(s_1) = 1, C_1 = |c_1(s_1)|, \dots, C_{N-1} = |c_{N-1}(s_1)|$$

alarak, $k \geq N$ için C_k katsayıları

$$C_k = \frac{M}{r^{k\alpha}} \frac{\sum_{j=0}^{k-1} \alpha(j+1+|s_1|)r^{j\alpha} C_j(s_1)}{\alpha^2 k(k-|s_1-s_2|)}. \tag{4.113}$$

olarak tanımlansın. C_k nın tanımından ve (4.102) denkleminden,

$$|c_k(s_1)| \leq C_k \quad k = 0,1,2,\dots$$

olduğu görülür. Şimdi,

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k (t-t_0)^{k\alpha} \tag{4.114}$$

serisinin $t \in (t_0, t_0+\rho)$ için yakınsak olduğu ispatlanmalıdır. (4.113) denkleminden,

$$\begin{aligned} r^{\alpha}\alpha^2(k+1)(k+1-|s_1-s_2|)C_{k+1} \\ = \alpha^2(k)(k-|s_1-s_2|)C_k + \alpha M(k+1+|s_1|)C_k \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan da,

$$\frac{C_{k+1}}{C_k} = \frac{\alpha^2(k)(k - |s_1 - s_2|) + \alpha M(k + 1 + |s_1|)}{r^\alpha \alpha^2(k + 1)(k + 1 - |s_1 - s_2|)}$$

sonucu elde edilir. Oran testi yardımıyla,

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{C_{k+1}(t - t_0)^{(k+1)\alpha}}{C_k(t - t_0)^{k\alpha}} \right| = \left(\frac{|t - t_0|}{r} \right)^\alpha < 1$$

sonucu elde edilir. Böylece, (4.114) denklemindeki seri $t \in [t_0, t_0 + r)$ için yakınsak olur. Bu $t \in [t_0, t_0 + r)$ aralığında s_1 için (4.100) deki serinin de yakınsak olduğunu ima eder. $r,\ 0 < r < \rho$ aralığındaki herhangi bir sayı olduğu için, (4.100) serisi $t \in (t_0, t_0 + \rho)$ için yakınsaktır. Benzer olarak, s_1 yerine s_2 yazılarak aynı işlemler yürütülürse (4.100) serisinin $t \in (t_0, t_0 + \rho)$ aralığında s_2 için de yakınsak olduğu görülür.

Örnek 4.14: Aşağıdaki değişken katsayılı uyumlu kesir mertebeli homojen dizisel lineer diferensiyel denklemi göz önüne alalım:

$$t^\alpha T_\alpha T_\alpha y - \tfrac{1}{2}\alpha T_\alpha y + y = 0.$$

Burada $p(t) = -\frac{1}{2}\alpha$ ve $q(t) = t^\alpha$ dir. Ayrıca $t = 0$ noktası yukarıdaki denklemin α düzgün tekil noktasıdır. Bu denklem için kesirsel indis denkleminin kökleri $s_1 = \frac{3}{2}$ ve $s_2 = 0$ olarak bulunur. Böylece, Teorem 4.20 ye göre, bu denklem

$$y_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{\left(k+\frac{3}{2}\right)\alpha}$$

ve

$$y_2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k t^{k\alpha}$$

biçiminde çözümlere sahiptir. $y_1(t)$ ve $y_1(t)$ in uyumlu kesirli türevleri denklemde yerine yazılırsa

$$c_k = -\frac{c_{k-1}}{\alpha^2 k\left(k+\frac{3}{2}\right)},\ k = 1,2,\ldots$$

rekürsif bağıntısı elde edilir. Benzer olarak, $y_2(x)$ için de

$$d_k = -\frac{d_{k-1}}{\alpha^2 k\left(k-\frac{3}{2}\right)}, k = 1,2,\ldots$$

bağıntısı elde edilir. Böylece, bu denklemin birinci ve ikinci çözümü sırasıyla

$$y_1(t) = c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(5/2)}{\alpha^{2k} k! \Gamma(5/2+k)} t^{\left(k+\frac{3}{2}\right)\alpha},$$
$$y_2(t) = d_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(-1/2)}{\alpha^{2k} k! \Gamma(-1/2+k)} t^{k\alpha},$$

şeklinde elde edilir. Burada $\delta_1 \to \infty$ ve $\delta_2 \to \infty$, olduğu için $\rho = \min\{\delta_1, \delta_2\} \to \infty$ olur.

Teorem 4.21: t_0, (4.99) denkleminin bir α düzgün tekil noktası olsun. Bu denklem için, $p(t)$ ve $q(t)$ $\rho > 0$ ile $t \in (t_0, t_0 + \rho)$ için kesirsel kuvvet serisi açılımına sahiptir. s_1 ve s_2 kesirsel indis denkleminin iki reel kökü olsun. Eğer $s_1 = s_2$ ise, denklem $t \in (t_0, t_0 + \rho)$ için lineer bağımsız iki çözüme sahiptir ve bu çözümler sırasıyla

$$y_1(t; s_1) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (t - t_0)^{(k+s_1)\alpha} \qquad (c_0 \neq 0),$$
$$y_2(t; s_1) = ln|t - t_0| y_1(t; s_1) + \sum_{k=0}^{\infty} b_k (t - t_0)^{(k+s_1+1)\alpha}$$

formlarına sahiptir. Eğer $s_1 - s_2$ pozitif bir tamsayı ise, $t \in (t_0, t_0 + \rho)$ için denklemin lineer bağımsız çözümleri sırasıyla

$$y_1(t; s_1) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (t - t_0)^{(k+s_1)\alpha} \qquad (c_0 \neq 0),$$

$$y_2(t; s_1) = Cln|t - t_0| y_1(t; s_1) + \sum_{k=0}^{\infty} b_k (t - t_0)^{(k+s_2)\alpha}$$

formlarına sahiptir. Burada, C sıfır da olabilen bir sabittir.

İspat: $s_1 \geq s_2$ için, Teorem 4.20 ye göre (4.99) denkleminin ilk çözümü

$$y_1(t; s_1) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(s_1)(t - t_0)^{(k+s_1)\alpha} \tag{4.115}$$

şeklindedir. (4.99) denklemini

$$T_\alpha^{t_0} T_\alpha^{t_0} y + P(t) T_\alpha^{t_0} y + Q(t) y = 0$$

şeklinde yeniden yazalım. Burada $P(t) = \frac{p(t)}{(t-t_0)^\alpha}$ ve $Q(t) = \frac{q(t)}{(t-t_0)^{2\alpha}}$ dir. Abu Hammad *et al*. (2014) tarafından yapılan çalışmada sunulan Abel formülü yardımıyla,

$$y_2(t) = y_1(t) I_\alpha^{t_0} \left(\frac{e^{-I_\alpha^{t_0}(P(t))}}{[y_1(t)]^2} \right) \tag{4.116}$$

yazılabilir. Şimdi, N negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere $s_1 - s_2 = N$ olsun. Böylece, s_1 ve $s_2 = s_1 - N$ kesirsel indis denkleminin kökleridir. Bundan dolayı,

$$-p_0 - 2\alpha s_1 = \alpha(-1 - N) \tag{4.117}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$P(t)=\frac{p_0+p_1(t-t_0)^{\alpha}+p_2(t-t_0)^{2\alpha}+\cdots}{(t-t_0)^{\alpha}}=\frac{p_0}{(t-t_0)^{\alpha}}+p_1+p_2(t-t_0)^{\alpha}+\cdots$$

Olup, (4.116) denkleminde $exp\left(-I_{\alpha}^{t_0}\big(P(t)\big)\right)$ ifadesinde yerine yazılacak olursa,

$$\begin{aligned} exp\left(-I_{\alpha}^{t_0}\big(P(t)\big)\right) &= exp\left(-I_{\alpha}^{t_0}\left(\frac{p_0}{(t-t_0)^{\alpha}}+p_1+p_2(t-t_0)^{\alpha}+\cdots\right)\right) \\ &= exp\left(-p_0 ln|t-t_0|-\tfrac{p_1}{\alpha}(t-t_0)^{\alpha}-\tfrac{p_2}{2\alpha}(t-t_0)^{2\alpha}-\cdots\right) \\ &= (t-t_0)^{-p_0}exp\left(-\tfrac{p_1}{\alpha}(t-t_0)^{\alpha}-\tfrac{p_2}{2\alpha}(t-t_0)^{2\alpha}-\cdots\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Yani,

$$exp\left(-I_{\alpha}^{t_0}\big(P(t)\big)\right)=(t-t_0)^{-p_0}(1+A_1(t-t_0)^{\alpha}+A_2(t-t_0)^{2\alpha}+\cdots) \qquad (4.118)$$

olur. Şimdi, $c_0=1$ seçelim ve (4.116) denkleminde (4.115) ve (4.118) denklemlerini yerlerine yazalım. Bu durumda,

$$y_2(t)=y_1(t)I_{\alpha}^{t_0}\left(\frac{(t-t_0)^{-p_0}(1+A_1(t-t_0)^{\alpha}+A_2(t-t_0)^{2\alpha}+\cdots)}{(t-t_0)^{2s_1\alpha}(1+c_1(t-t_0)^{\alpha}+c_2(t-t_0)^{2\alpha}+\cdots)^2}\right)$$

olup

$$\begin{aligned} y_2(t) &= y_1(t)I_{\alpha}^{t_0}\left(\frac{(t-t_0)^{-p_0-2s_1\alpha}(1+A_1(t-t_0)^{\alpha}+A_2(t-t_0)^{2\alpha}+\cdots)}{(1+B_1(t-t_0)^{\alpha}+B_2(t-t_0)^{2\alpha}+\cdots)}\right) \\ &= y_1(t)I_{\alpha}^{t_0}\left((t-t_0)^{\alpha(-1-N)}(1+C_1(t-t_0)^{\alpha}+C_2(t-t_0)^{2\alpha}+\cdots)\right) \end{aligned}$$

elde edilir. $N=0$ için, yani, $s_1=s_2$ için

$$
\begin{aligned}
y_2(t) &= y_1(t) I_\alpha^{t_0}((t-t_0)^{-\alpha} + C_1 + C_2(t-t_0)^\alpha + \cdots) \\
&= y_1(t) ln(t-t_0) + y_1(t)\left(\tfrac{C_1}{\alpha}(t-t_0)^\alpha + \tfrac{C_2}{2\alpha}(t-t_0)^{2\alpha} + \cdots\right) \\
&= y_1(t) ln(t-t_0) + (t-t_0)^{s_1\alpha}(1 + c_1(t-t_0)^\alpha + \\
&\quad \cdots)\left(\tfrac{C_1}{\alpha}(t-t_0)^\alpha + \tfrac{C_2}{2\alpha}(t-t_0)^{2\alpha} + \cdots\right) \\
&= y_1(t) ln(t-t_0) + (t-t_0)^{s_1\alpha}(b_0(t-t_0)^\alpha + b_1(t-t_0)^{2\alpha} + \\
&\quad b_2(t-t_0)^{3\alpha} \ldots)
\end{aligned}
$$

ifadesi elde edilir. Sonuç olarak, $s_1 = s_2$ için, ikinci çözümün genel formu

$$
y_2(t) = y_1(t) ln(t-t_0) + (t-t_0)^{(s_1+1)\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} b_k (t-t_0)^{k\alpha}
$$

olarak bulunur. $N > 0$ için, yani $s_1 - s_2 = N$ için,

$$
\begin{aligned}
y_2(t) &= y_1(t) I_\alpha^{t_0}\Big((t-t_0)^{\alpha(-1-N)}(1 + C_1(t-t_0)^\alpha + C_2(t-t_0)^{2\alpha} + \cdots \\
&\qquad + C_N(t-t_0)^{N\alpha} + \cdots)\Big) \\
&= y_1(t) I_\alpha^{t_0}\left(\left(\frac{C_N}{(t-t_0)^\alpha} + \frac{1}{(t-t_0)^{(1+N)\alpha}} + \frac{C_1}{(t-t_0)^{N\alpha}} + \cdots\right)\right) \\
&= C_N y_1(t) ln(t-t_0) + y_1(t)\left(\frac{(t-t_0)^{-N\alpha}}{-N\alpha} + \frac{C_1(t-t_0)^{(-N+1)\alpha}}{(-N+1)\alpha} + \cdots\right) \\
&= C_N y_1(t) ln(t-t_0) \\
&\qquad + (t-t_0)^{(s_2+N)\alpha}(1 + c_1(t-t_0)^\alpha + \cdots)(t-t_0)^{-N\alpha}\left(-\frac{1}{N\alpha}\right. \\
&\qquad \left. + \frac{C_1(t-t_0)^\alpha}{(-N+1)\alpha} + \cdots\right)
\end{aligned}
$$

yazılır. Böylece, $N > 0$ için, ikinci çözümün genel formu

$$y_2(t) = C_N y_1(t) ln(t - t_0) + (t - t_0)^{s_2 \alpha} \sum_{k=0}^{\infty} b_k (t - t_0)^{k\alpha}$$

şeklindedir. Burada, $b_0 = -\frac{c_0}{N} \neq 0$ dır.

4.6.2.a. Uyumlu kesirsel Bessel denklemi ve uyumlu Bessel fonksiyonları

Uyumlu kesir mertebeli Bessel denklemi aşağıdaki gibidir:

$$t^{2\alpha} T_\alpha T_\alpha y + \alpha t^\alpha T_\alpha y + \alpha^2 (t^{2\alpha} - p^2) y = 0. \tag{4.119}$$

Burada $0 < \alpha \leq 1$ ve p herhangi bir reel sayıdır. Eğer $\alpha = 1$ ise, o zaman denklem klasik Bessel denklemine dönüşür. $t = 0$ noktası uyumlu Bessel denklemi için bir α düzgün tekil noktadır. Bu durumda, $t > 0$ için, (4.119) denkleminin

$$y = t^{r\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{(n+r)\alpha}$$

biçiminde kesirsel seri çözümleri araştırılmalıdır. Bu serinin uyumlu kesir mertebeden türevleri

$$T_\alpha y = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \alpha(n + r) c_n t^{(n+r-1)\alpha},$$

$$T_\alpha T_\alpha y = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^2 (n + r)(n + r - 1) c_n t^{(n+r-2)\alpha}$$

şeklinde bulunur. Şimdi, bu bulunan türevler (4.119) denkleminde yerine yazılırsa,

$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^2 (n + r)(n + r - 1) c_n t^{(n+r)\alpha} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^2 (n + r) c_n t^{(n+r)\alpha} +$
$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^2 c_n t^{(n+r+2)\alpha} - \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^2 p^2 c_n t^{(n+r)\alpha} = 0,$

$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^2(n+r)(n+r-1)c_n t^{(n+r)\alpha} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^2(n+r)c_n t^{(n+r)\alpha} +$
$\sum_{n=2}^{\infty} \alpha^2 c_{n-2} t^{(n+r)\alpha} - \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^2 p^2 c_n t^{(n+r)\alpha} = 0,$

$$(r(r-1)\alpha^2 + r\alpha^2 - \alpha^2 p^2)c_0 t^{r\alpha} + (r(r+1)\alpha^2 + (r+1)\alpha^2 - \alpha^2 p^2)c_1 t^{(r+1)\alpha} + \sum_{n=0}^{\infty}[(\alpha^2(n+r)(n+r-1) + (n+r)\alpha^2 - \alpha^2 p^2)c_n + \alpha^2 c_{n-2}]t^{(n+r)\alpha} = 0$$

sonucu elde edilir. Eğer

$$\mathcal{J}(r) = r(r-1)\alpha^2 + r\alpha^2 - \alpha^2 p^2 \tag{4.120}$$

denirse, son denklem

$$\mathcal{J}(r)c_0 t^{r\alpha} + \mathcal{J}(r+1)c_1 t^{(r+1)\alpha} + \sum_{n=0}^{\infty}[\mathcal{J}(r+n)c_n + \alpha^2 c_{n-2}]t^{(n+r)\alpha} = 0$$

şekline dönüşür. $c_0 \neq 0$ olsun. Bu takdirde, $\mathcal{J}(r) = 0$ olmalıdır. Ayrıca, $\alpha^2 \neq 0$ olduğu için

$$\mathcal{J}(r) = 0 \Rightarrow r(r-1)\alpha^2 + r\alpha^2 - \alpha^2 p^2 = 0 \Rightarrow r^2 - p^2 = 0$$

yazılabilir. Böylece, $r_1 = p$ ve $r_2 = -p$ bulunur. İlk olarak, $p = 0$ olması durumu analiz edilip sıfırıncı mertebeden Bessel denkleminin çözümleri bulunacaktır. Bu durumda, kesirsel indis denkleminin kökleri $r_1 = 0$ ve $r_2 = 0$ olarak bulunur. $r_1 = 0$ için,

$$\mathcal{J}(r_1 + 1)c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

elde edilir. Buna ek olarak, rekürsif bağıntı

$$c_n = -\frac{\alpha^2 c_{n-2}}{\mathcal{J}(r_1 + n)} = -\frac{c_{n-2}}{(n)^2}, \qquad n \geq 2$$

olarak bulunur. Rekürsif bağıntıdan yaralanarak, $c_3 = c_5 = \cdots = 0$ olduğu görülür. c_0 keyfi bir sabit olduğu için diğer katsayılar

$$c_2 = -\frac{c_0}{2^2},$$
$$c_4 = -\frac{c_2}{4^2} = \frac{c_0}{2^4 2!2!},$$
$$c_6 = -\frac{c_4}{6^2} = -\frac{c_0}{2^6 3!3!},$$
$$\vdots$$
$$c_{2n} = \frac{c_0(-1)^n}{2^{2n} n!\, n!}$$

şeklinde c_0 a bağlı olarak bulunur. Böylece, sıfırıncı mertebeden Bessel denkleminin ilk çözümü

$$y_1 = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n\alpha}}{2^{2n} n!\, n!} = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\, \mathrm{n}!} \left(\frac{t^\alpha}{2}\right)^{2n}$$

olarak bulunur. Sıfırıncı mertebeden Bessel fonksiyonları ise,

$$(\mathcal{J}_\alpha)_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\, \mathrm{n}!} \left(\frac{t^\alpha}{2}\right)^{2n}$$

şeklindedir. İkinci çözüm için teoremde verilen genel form kullanılır. Yani,

$$y_2(t; s_1) = ln|t| y_1(t; s_1) + \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n(t)^{(n+s_1+1)\alpha}. \tag{4.121}$$

$s_1 = 0$ için, (4.121) denkleminin uyumlu kesir mertebeden türevleri

$$T_\alpha y_2 = T_\alpha y_1 lnt + \tfrac{y_1}{t^\alpha} + \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \alpha(n+1)b_n t^{n\alpha},$$

$$T_\alpha T_\alpha y_2 = T_\alpha T_\alpha y_1 lnt + 2\frac{T_\alpha y_1}{t^\alpha} - \alpha\frac{y_1}{t^{2\alpha}} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^2 n(n+1)b_n t^{(n-1)\alpha}$$

şeklindedir. Bu türevler (4.119) denkleminde yerine konulacak olursa,

$$2t^\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n\alpha(-1)^n}{n!\,n!\,2^{2n}} t^{(2n-1)\alpha} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^2(n+1)b_n t^{(n+1)\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^2 n(n+1)b_n t^{(n+1)\alpha}$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^2 b_n t^{(n+3)\alpha} = 0$$

elde edilir. Yukarıdaki denklem düzenlenecek olursa,

$$\alpha^2 b_0 t^\alpha + 2^2\alpha^2 b_1 t^{2\alpha} - \alpha t^{2\alpha} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4n\alpha(-1)^n}{n!\,n!\,2^{2n}} t^{2n\alpha}$$
$$+ \sum_{n=2}^{\infty} (\alpha^2(n+1)^2 b_n + \alpha^2 b_{n-2}) t^{(n+1)\alpha} = 0$$

olur. Bu denklemden $b_0 = 0$ ve $b_1 = \frac{1}{\alpha 2^2}$ sonuçları elde edilir. Ayrıca, eğer n bir çift sayı ise $\alpha^2(n+1)^2 b_n + \alpha^2 b_{n-2} = 0$ olup, bu da $b_0 = b_2 = \cdots = 0$ olduğunu ima eder. Eğer n tek ise $n \geq 2$ için

$$\alpha^2(2n)^2 b_{2n-1} + \alpha^2 b_{2n-3} = \frac{(-1)^{n+1} 4n\alpha}{n!\,n!\,2^{2n}}$$

rekürsif bağıntı yazılabilir. Böylece, tek indisli katsayılar

$$b_3 = -\frac{1}{\alpha 2^2 4^2}\left(1 + \frac{1}{2}\right),$$
$$b_5 = \frac{1}{\alpha 2^2 4^2 6^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right),$$
$$\vdots$$
$$b_{2n-1} = \frac{(-1)^{n+1}}{\alpha 2^{2n} n!\, n!}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$$

şeklinde bulunur. $\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = H_n$ denirse, o zaman sıfırıncı mertebeden Bessel denkleminin ikinci çözümü

$$(Y_\alpha)_0(t) = (\mathcal{J}_\alpha)_0(t) lnt + \frac{1}{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} H_n}{2^{2n} n!\, n!} t^{2n\alpha}$$

şeklinde bulunur.

Sonuç 4.3: $Y_0(t)$ sıfırıncı mertebeden klasik Bessel denkleminin ikinci çözümü olsun. Bu durumda,

$$(Y_\alpha)_0(t) = \frac{1}{\alpha} Y_0(t^\alpha)$$

dir.

Şimdi, $p \neq 0$ için, p. mertebeden Bessel denkleminin çözümlerini araştıralım. $p > 0$ durumu için indis denkleminin kökleri $r_1 = p$ ve $r_2 = -p$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, şeklindedir. $r_1 = p$ için

$$\mathcal{I}(r_1 + 1)c_1 = [\alpha^2(p)(p+1) + (p+1)\alpha^2 - \alpha^2 p^2]c_1 = 0,$$

$$(2p+1)c_1 = 0$$

yazılır. $p > 0$ olduğundan dolayı $c_1 = 0$ dır. Rekürsif bağıntı ise,

$$c_n = -\frac{\alpha^2 c_{n-2}}{\mathcal{J}(r+n)} = -\frac{c_{n-2}}{n(n+2p)}$$

şeklinde bulunur. $c_1 = 0$ ve rekürsif bağıntı birlikte düşünüldüğünde, $c_3 = c_5 = \cdots = 0$ ve

$$c_2 = -\frac{c_0}{2(2+2p)} = -\frac{c_0}{2^2 1!(p+1)},$$
$$c_4 = -\frac{c_2}{4(4+2p)} = \frac{c_0}{2^4 2!(p+1)(p+2)},$$
$$c_6 = -\frac{c_4}{6(6+2p)} = -\frac{c_0}{2^6 3!(p+1)(p+2)(p+3)},$$
$$\vdots$$
$$c_{2n} = \frac{(-1)^n c_0}{2^{2n} n!\,(p+1)(p+2)\ldots(p+n)}$$

olduğu görülür. $c_0 = \frac{c}{2^p \Gamma(p+1)}$ olarak kabul edilsin. Böylece, p. mertebeden Bessel denkleminin ilk çözümü

$$y_1 = ct^{p\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n\alpha}}{2^{2n+p} n!\,\Gamma(p+1)(p+1)(p+2)\ldots(p+n)}$$
$$= c \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(p+n+1)} \left(\frac{t^\alpha}{2}\right)^{2n+p}$$

olarak bulunur. Ayrıca, p. mertebeden Bessel fonksiyonu

$$(\mathcal{J}_\alpha)_p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(p+n+1)} \left(\frac{t^\alpha}{2}\right)^{2n+p} \tag{4.122}$$

şeklinde olur. $r_2 = -p$ için, eğer $r_1 - r_2 = 2p$ bir pozitif tamsayı değil ise, bu takdirde,

$$\mathcal{J}(r_2+1)c_1 = [\alpha^2(-p)(-p+1) + (-p+1)\alpha^2 - \alpha^2 p^2]c_1 = 0,$$
$$(1-2p)c_1 = 0$$

olur. Bu $c_1 = 0$ olduğunu ima eder. $n \geq 2$ için rekürsif bağıntı

$$c_n = -\frac{\alpha^2 c_{n-2}}{\mathcal{J}(r+n)} = -\frac{c_{n-2}}{n(n-2p)}$$

şeklinde yazılır. $c_1 = 0$ olduğundan dolayı $c_3 = c_5 = \cdots = 0$ sonucuna ulaşılır. n çift ise, katsayılar

$$c_2 = -\frac{2c_0}{2^2 1!(-p+1)},$$
$$c_4 = -\frac{c_2}{4(4-2p)} = \frac{c_0}{2^4 2!(-p+1)(-p+2)},$$
$$c_6 = -\frac{c_4}{6(6-2p)} = -\frac{c_0}{2^6 3!(-p+1)(-p+2)(-p+3)},$$
$$\vdots$$
$$c_{2n} = \frac{(-1)^n c_0}{2^{2n} n!\,(-p+1)(-p+2)(-p+3)\ldots(-p+n)}$$

olarak bulunur. $c_0 = \frac{c}{2^{-p}\Gamma(-p+1)}$ olsun. Bu durumda, p. mertebeden Bessel denkleminin ikinci çözümü

$$y_2(t) = ct^{-p\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n\alpha}}{2^{2n-p} n!\,\Gamma(-p+1)(-p+1)(-p+2)(-p+3)\ldots(-p+n)}$$
$$= c\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(-p+n+1)}\left(\frac{t^\alpha}{2}\right)^{2n+p}$$

şeklinde bulunur. p. mertebeden ikinci tip Bessel fonksiyonu

$$(\mathcal{J}_\alpha)_{-p}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(-p+n+1)} \left(\frac{t^\alpha}{2}\right)^{2n-p} \quad (4.123)$$

şeklinde olur. Eğer p bir pozitif tamsayı değil ise $r_1 - r_2 = 2p$ bir pozitif tamsayı olsa bile $n \geq 0$ için $\Gamma(-p+n+1)$ tanımlıdır. Dolayısıyla, bu durumda $(\mathcal{J}_\alpha)_{-p}$ oluşur. Yani bu durum için de ikinci çözüm

$$(\mathcal{J}_\alpha)_{-p}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(-p+n+1)} \left(\frac{t^\alpha}{2}\right)^{2n-p}$$

şeklindedir. Böylece geriye sadece p nin bir pozitif tamsayı olması durumu kalıyor. Bu durumda Teorem 4.21 de verilen

$$y_2(t;r_2) = Cln|t|y_1(t;r_1) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^{(n-p)\alpha} \quad (4.124)$$

formu kullanılarak çözüm aranacaktır. $p = m$ olsun. Böylece,

$$(\mathcal{J}_\alpha)_m(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n}(t^\alpha)^{2n+m}$$

yazılır. Burada,

$$c_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n+m} n!(m+n)!} \quad (4.125)$$

dır. (4.124) denklemi ve (4.124) denkleminin uyumlu kesir mertebeden türevleri (4.119) denkleminde yerine yazılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2C(2n+m)\alpha(-1)^n}{2^{2n+m} n!(m+n)!} t^{2(n+m)\alpha} + \sum_{n=2}^{\infty} [\alpha^2 n(n-2m) b_n + \alpha^2 b_{n-2}] t^{n\alpha} +$$
$$\alpha^2(1-2m) b_1 t^{\alpha} = 0 \qquad (4.126)$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemden $b_1 = 0$ olduğu bulunur. Buna ek olarak, eğer $m > 1$ ise,

$$\alpha^2 n(n-2m) b_n + \alpha^2 b_{n-2} = 0 \qquad (n = 2,3, \dots, 2m-1)$$

yazılır. Bu ise, $b_1 = b_3 = \cdots = b_{2m-1} = 0$ olduğunu ima eder. Ayrıca, eğer n çift ise, o zaman geriye kalan katsayılar

$$b_2 = \frac{b_0}{2^2(m-1)},$$
$$b_4 = \frac{b_0}{2^4 2!(m-1)(m-2)},$$
$$\vdots$$
$$b_{2j} = \frac{b_0}{2^{2j} j!\,(m-1)(m-2)\dots(m-j)}$$

olarak bulunur. Burada, $j = 1,2, \dots, m-1$ dir. Şimdi (4.124) denklemi için, $t^{2m\alpha}$ teriminin katsayılarını kıyaslayalım. (4.126) denkleminin ilk serisinde $n = 0$ ve (4.126) denkleminin ikinci serisinde $n = 2m$ yazılırsa,

$$(\alpha^2 b_{2m-2} + 2C\alpha m c_0) t^{2m\alpha} = 0$$

elde edilir. Yani,

$$\alpha b_{2m-2} = -\frac{C}{2^{m-1}(m-1)!}$$

dir. $j = m-1$ için,

$$\alpha \frac{b_0}{2^{2m-2}(m-1)!\,(m-1)!} = -\frac{C}{2^{m-1}(m-1)!}$$

olur. Böylece,

$$C = -\frac{\alpha b_0}{2^{m-1}(m-1)!} \tag{4.127}$$

sonucuna varılır. (4.126) denkleminin ilk serisi sadece t^{α} nın çift kuvvetlerini içerdiği için $b_{2m+1} = b_{2m+3} = \cdots = 0$ olur. b_{2m} katsayısı belirlenemez ama geriye kalan diğer $b_{2m+2}, b_{2m+4}, \ldots$ katsayıları aşağıdaki denklem yardımıyla tespit edilir:

$$\alpha^2 2n(2n+2m)b_{2n+2m} + \alpha^2 b_{2n+2m-2} = -2C(2n+m)\alpha c_{2n}. \tag{4.128}$$

Burada, $n = 1,2, \ldots$ dir. $n = 1$ için (4.128) denkleminden

$$b_{2m+2} = -\frac{C}{2\alpha} c_2 \left(1 + \frac{1}{m+1}\right) - \frac{b_{2m}}{4(1+m)}$$

sonucu elde edilir. Şimdi, b_{2m} yi

$$\frac{b_{2m}}{4(1+m)} = \frac{C}{2\alpha} c_2 \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m}\right) \tag{4.129}$$

olacak şekilde seçelim. (4.125) denkleminden $4(1+m)c_2 = -c_0$ elde edilir. (4.129) denkleminde bu ifade kullanılacak olursa,

$$b_{2m} = -\frac{C}{2\alpha} c_0 \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m}\right)$$

şeklinde olur. b_{2m} nin bu seçimiyle birlikte

$$b_{2m+2} = -\frac{C}{2\alpha} c_2 \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m+1}\right) \tag{4.130}$$

olarak bulunur. $n = 2$ için

$$b_{2m+4} = -\frac{C}{2\alpha} c_4 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{m+2}\right) - \frac{b_{2m+2}}{2^2 2(2+m)} \tag{4.131}$$

yazılır. (4.130) denklemi, (4.125) denkleminden elde edilen $2^2 2(2+m)c_4 = -c_2$ sonucuyla birlikte düşünülecek olursa,

$$\frac{b_{2m+2}}{2^2 2(2+m)} = \frac{C}{2\alpha} c_4 \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m+1}\right) \tag{4.132}$$

yazılır. (4.131) denkleminde (4.132) denklemi yerine yazılırsa,

$$b_{2m+4} = -\frac{C}{2\alpha} c_4 \left(1 + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m+2}\right)$$

sonucu elde edilir. Bu şekilde devam edilerek

$$b_{2m+2n} = -\frac{C}{2\alpha} c_{2n} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m}\right)\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m+n}\right)$$

olduğu görülür. Böylece, (4.119) denkleminin ikinci çözümü

$$y_2(t) = b_0 t^{-m\alpha} + b_0 t^{-m\alpha} \sum_{j=1}^{m-1} \frac{t^{2j\alpha}}{2^{2j} j!\,(m-1)(m-2)\dots(m-j)}$$
$$-\frac{C}{2\alpha} c_0 \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m}\right) t^{m\alpha}$$
$$-\frac{C}{2\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m}\right)\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m+n}\right) t^{(2n+m)\alpha}$$
$$+ c\ln t(\mathcal{J}_\alpha)_m$$

olarak bulunur. Burada, b_0 ve C sabitleri (4.127) denklemi tarafından ilişkilidir ve c_{2n}, (4.125) tarafından verilir. Eğer $C = 1$ ise, ikinci çözüm $(K_\alpha)_m$ ile gösterilir ve aşağıdaki gibidir:

$$(K_\alpha)_m = -\frac{1}{2\alpha}\left(\frac{t^\alpha}{2}\right)^{-m} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(m-j-1)!}{j!}\left(\frac{t^\alpha}{2}\right)^{2j} - \frac{1}{2\alpha}\frac{1}{m!} c_0 \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m}\right)\left(\frac{t^\alpha}{2}\right)^{m} -$$
$$\frac{1}{2\alpha}\left(\frac{t^\alpha}{2}\right)^{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(m+n)!}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m}\right)\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m+n}\right)\left(\frac{t^\alpha}{2}\right)^{2n} + \ln t(\mathcal{J}_\alpha)_m.$$

Sonuç 4.4: $K_m(t)$ m. mertebeden klasik Bessel denkleminin ikinci çözümü olsun. Bu durumda,

$$(K_\alpha)_m(t) = \frac{1}{\alpha} K_m(t^\alpha)$$

dır.

Örnek 4.15: $p = \pm\frac{1}{2}$ mertebeden uyumlu kesirli Bessel fonksiyonların

$$(\mathcal{J}_\alpha)_{1/2}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t^\alpha}} sin(t^\alpha) \quad \text{ve} \quad (\mathcal{J}_\alpha)_{-1/2}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t^\alpha}} cos(t^\alpha)$$

şeklinde olduğunu gösteriniz.

Çözüm: (4.122) denkleminde $p = \frac{1}{2}$ yerine yazılırsa,

$$(\mathcal{J}_\alpha)_{1/2}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+n+1\right)} \left(\frac{t^\alpha}{2}\right)^{2n+\frac{1}{2}}$$

olur. Bu ifadeyi sadeleştirmek için $\Gamma\left(\frac{1}{2}+n+1\right) = \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}n!}\sqrt{\pi}$ eşitliği kullanılacak olursa,

$$\begin{aligned}(\mathcal{J}_\alpha)_{1/2}(t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{(2n+1)!} \left(\frac{t^\alpha}{2}\right)^{2n+\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi t^\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (t^\alpha)^{(2n+1)} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi t^\alpha}} sin(t^\alpha)\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer kısmın ispatı için (4.122) denkleminde $p = -\frac{1}{2}$ yerine yazılır.

Önerme 4.4: p negatif olmayan bir tamsayı olsun. Bu takdirde,

1. $T_\alpha\left(t^{p\alpha}(\mathcal{J}_\alpha)_p(t)\right) = \alpha t^{p\alpha}(\mathcal{J}_\alpha)_{p-1}(t),$

2. $T_\alpha\left(t^{-p\alpha}(\mathcal{J}_\alpha)_p(t)\right) = -\alpha t^{-p\alpha}(\mathcal{J}_\alpha)_{p+1}(t),$

3. $T_\alpha\left((\mathcal{J}_\alpha)_p(t)\right) = \alpha(\mathcal{J}_\alpha)_{p-1}(t) - \frac{\alpha p}{t^\alpha}(\mathcal{J}_\alpha)_p(t),$

4. $T_\alpha\left((\mathcal{J}_\alpha)_p(t)\right) = \frac{\alpha p}{t^\alpha}(\mathcal{J}_\alpha)_p(t) - \alpha(\mathcal{J}_\alpha)_{p+1}(t),$

5. $(\mathcal{J}_\alpha)_{p+1}(t) = \frac{2p}{t^\alpha}(\mathcal{J}_\alpha)_p(t) - (\mathcal{J}_\alpha)_{p-1}(t),$

6. $(\mathcal{J}_\alpha)_{-p}(t) = (-1)^p(\mathcal{J}_\alpha)_p(t)$

özellikleri geçerlidir.

İspat:

1. $t^{p\alpha}(\mathcal{J}_\alpha)_p(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(t^\alpha)^{2n+2p}}{n!(p+n)!2^{2n+p}}$ ifadesinin uyumlu kesirli türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} T_\alpha\left(t^{p\alpha}(\mathcal{J}_\alpha)_p(t)\right) &= \alpha\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(t^\alpha)^{2n+2p-1}}{n!\,(p+n-1)!\,2^{2n+p-1}} \\ &= \alpha t^{p\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(p+n)}\left(\frac{t^\alpha}{2}\right)^{2n+p-1} \\ &= \alpha t^{p\alpha}(\mathcal{J}_\alpha)_{p-1}(t) \end{aligned}$$

elde edilir.

2. $t^{-p\alpha}(\mathcal{J}_\alpha)_p(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(t^\alpha)^{2n}}{n!(p+n)!2^{2n+p}}$ ifadesinin uyumlu kesirli türevi alınırsa,

$$T_\alpha\left(t^{-p\alpha}(\mathcal{J}_\alpha)_p(t)\right) = \alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(t^\alpha)^{2n-1}}{(n-1)!\,(p+n)!\,2^{2n+p-1}}$$

$$= -\alpha t^{-p\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(p+n+2)} \left(\frac{t^\alpha}{2}\right)^{2n+p+1}$$
$$= -\alpha t^{-p\alpha} (\mathcal{J}_\alpha)_{p+1}(t)$$

sonucuna ulaşılır.

3. Uyumlu kesir mertebeli türevler için çarpım kuralı kullanılarak

$$T_\alpha \left(t^{p\alpha} (\mathcal{J}_\alpha)_p(t) \right) = p\alpha t^{(p-1)\alpha} (\mathcal{J}_\alpha)_p(t) + t^{p\alpha} T_\alpha \left((\mathcal{J}_\alpha)_p(t) \right)$$

yazılır. (1) özelliğinden dolayı

$$p\alpha t^{(p-1)\alpha} (\mathcal{J}_\alpha)_p(t) + t^{p\alpha} T_\alpha \left((\mathcal{J}_\alpha)_p(t) \right) = \alpha t^{p\alpha} (\mathcal{J}_\alpha)_{p-1}(t)$$

olur. Böylece,

$$T_\alpha \left((\mathcal{J}_\alpha)_p(t) \right) = \alpha (\mathcal{J}_\alpha)_{p-1}(t) - \frac{\alpha p}{t^\alpha} (\mathcal{J}_\alpha)_p(t)$$

sonucu elde edilir.

4. Benzer olarak yine uyumlu kesir mertebeli türevler için çarpım kuralı uygulanacak olursa,

$$T_\alpha \left(t^{-p\alpha} (\mathcal{J}_\alpha)_p(t) \right) = -p\alpha t^{(-p-1)\alpha} (\mathcal{J}_\alpha)_p(t) + t^{-p\alpha} T_\alpha \left((\mathcal{J}_\alpha)_p(t) \right)$$

elde edilir. (2) özelliğinden dolayı

$$-p\alpha t^{(-p-1)\alpha} (\mathcal{J}_\alpha)_p(t) + t^{-p\alpha} T_\alpha \left((\mathcal{J}_\alpha)_p(t) \right) = -\alpha t^{-p\alpha} (\mathcal{J}_\alpha)_{p+1}(t)$$

olur. Böylece,

$$T_\alpha\left((\mathcal{J}_\alpha)_p(t)\right) = \frac{\alpha p}{t^\alpha}(\mathcal{J}_\alpha)_p(t) - \alpha(\mathcal{J}_\alpha)_{p+1}(t)$$

sonucuna ulaşılır.

5. (4) özelliğinde verilen denklemden (3) özelliğindeki denklem çıkarılırsa sonuç görülür.

6. Eğer s pozitif olmayan bir tamsayı ise,

$$(\mathcal{J}_\alpha)_{-s}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(-s+n+1)} \left(\frac{t^\alpha}{2}\right)^{2n-s}$$

yazılır. $p = 0$ yada $p \in Z^+$ için $\lim\limits_{z \to -p} |\Gamma(z)| = \infty$ olduğunu hatırlayalım. $s \to p$ olduğu zaman, $n = 0,1,2,\dots,(p-1)$ için $(-s+n+1)$, 0 yada negatif bir tamsayıya yaklaşır. Bu durumda, $\left(\frac{t^\alpha}{2}\right)^{2n-s}$ katsayıları 0 a yaklaşır. Yani,

$$\lim_{s \to p} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(-s+n+1)} = 0$$

dir. Böylece,

$$(\mathcal{J}_\alpha)_{-p}(t) = \lim_{s \to p} (\mathcal{J}_\alpha)_{-s}(t) = \sum_{n=p}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(-p+n+1)} \left(\frac{t^\alpha}{2}\right)^{2n-p}.$$

yazılır. Şimdi, yukarıdaki seride n yerine $n + p$ yazılır ve Gama fonksiyonunun temel özelliği kullanılırsa,

$$(\mathcal{J}_\alpha)_{-p}(t) = (-1)^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(p+n+1)} \left(\frac{t^\alpha}{2}\right)^{2n+p} = (-1)^p (\mathcal{J}_\alpha)_p(t)$$

elde edilir.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu çalışmada sunulan metotlar uyumlu mertebeden dizisel lineer diferensiyel denklemlerin çözümünde etkili metotlardır. Klasik türev için geçerli olan yöntemler uyumlu kesirli türevin analizine uygun olarak uyumlu kesirli türev için de yazılmıştır. Klasik türevdeki sabit katsayılı lineer diferensiyel denklemlerin genel çözümünde anahtar bir rol oynayan e^{rt} fonksiyonu, uyumlu kesirsel analiz için $e^{\frac{r}{\alpha}t^{\alpha}}$ fonksiyonuna dönüşmüştür. $e^{\frac{r}{\alpha}t^{\alpha}}$ fonksiyonu yardımıyla, uyumlu kesir mertebeden sabit katsayılı dizisel lineer diferensiyel denklemlerin genel çözümü elde edilmiştir. Yine klasik türevde birinci mertebeden değişken katsayılı lineer diferensiyel denklemin genel çözümünü bulmayı sağlayan metot, kesirsel analize uygun olarak ($0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere) α mertebeli değişken katsayılı uyumlu kesirli diferensiyel denklemin çözümünü bulma metoduna evrilmiştir. Benzer olarak klasik türevde ikinci mertebeden değişken katsayılı diferensiyel denklemin kuvvet serisi yardımıyla genel çözümleri bulunuyordu. Bu çalışmada da 2α mertebeli değişken katsayılı uyumlu kesirli dizisel lineer diferensiyel denklemlerin genel çözümü, kesirsel kuvvet serileri yardımıyla bulundu. Bütün bu çalışmalar gösterdi ki uyumlu kesirli türev, adı üstünde klasik türeve uyumlu bir kesirli türevdir. Bu da klasik türevin diğer çalışma alanları ile alakalı da benzer çalışmalar yapılabileceğini ima eder. Bunun yanı sıra bu yeni kesirli türev tanımı yardımıyla sayısal analiz metotları geliştirilerek uyumlu kesirli diferensiyel denklemlerin nümerik çözümleri üzerine çalışmalar yapılabilir. Dahası diğer kesirli türev tanımları ile yapılmış akademik çalışmalar taranarak benzer çalışmaların bu yeni kesirli türev tanımıyla yapılıp yapılamayacağı kontrol edilebilir.

KAYNAKLAR

Abdeljawad, T., 2015. On conformable fractional calculus. Journal of Computational and Applied Mathematics, 279, 57-66.

Abu Hammad M. and Khalil, R., 2014. Abel's formula and Wronskian for conformable fractional differential equations. International Journal of Differential Equations and Applications, 13(3), 177-183.

Anderson, D. R. and Avery R. I., 2015. Fractional-order boundary value problem with Sturm-Liouville boundary conditions. Electronic Journal of Differential Equations, 29, 1–10.

Arfken G.B. and Weber H.J., 1995. Mathematical Methods for Physicist, Fourth Edition, Academic Press.

Balcı, M., 2012. Matematik Analiz-1. Sürat Üniversite Yayınları, İstanbul, Türkiye.

Batarfi, H., Losada, J., Nieto, J. J. and Shammakh, W., 2015. Three-Point Boundary Value Problems for Conformable Fractional Differential Equations. Journal of Function Spaces.

Bayın, S., 2004. Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler, Ders Kitapları A.Ş., 458 s, Ankara.

Bayram, M., 2010. Diferensiyel Denklemler. Birsen yayınevi, İstanbul, Türkiye.

Benghorbal, M. M., 2004. Power Series Solutions of Fractional Differential Equations and Symbolic Derivatives and İntegrals. PhD Thesis, Faculty of Graduate Studies, The University of Western Ontario, Canada.

Benkhettou, N., Hassani, S. and Torres, D. F., 2015. A Conformable Fractional Calculus on Arbitrary Time Scales. Journal of King Saud University-Science.

Bonilla, Blanca, Margarita Rivero, and Juan J. Trujillo., 2007. Linear differential equations of fractional order. Advances in fractional calculus, Springer Netherlands, 77-91.

Bonilla, B., Margarita Rivero, and Juan J. Trujillo., 2007. On systems of linear fractional differential equations with constant coefficients. Applied Mathematics and Computation, 187.1, 68-78.

Caputo, M., 1967. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent. Part II. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, 13, 529–539.

Chung, W. S., 2015. Fractional Newton mechanics with conformable fractional derivative. Journal of Computational and Applied Mathematics, 290, 150-158.

Coddington, E. A., 2012. An introduction to ordinary differential equations, Courier Corporation.

Çenesiz, Y. and Kurt, A., 2015. The Solution of Time Fractional Heat Equation With New Fractional Derivative Definition. Recent Advances in Applied Mathematics, Modelling and Simulation.

Finan, M. B., 2013. A Second Course in Elementary Ordinary Differential Equations, Arkansas Tech University, 2013

Horani, M. A., Khalil, R. and Abdeljawad, T., 2014. Conformable Fractional Semigroups of Operators. arXiv preprint arXiv:1502.06014.

Kadıoğlu, E. ve Kamali, M., 2013. Genel Matematik. Kültür Eğitim Vakfı Yayınevi, Erzurum, Türkiye.

Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A. and Sababheh, M., 2014. A new definition of fractional derivative. Journal of Computational and Applied Mathematics, 264, 65-70.

Khalil, R., 2014. Fractional Fourier Series with Applications. American Journal of Computational and Applied Mathematics, 4(6), 187-191.

Khalil, R. and Abu Hammad, M., 2014. Legendre fractional differential equation and Legendre fractional polynomials. International Journal of Applied Mathematical Research, 3(3), 214-219.

Kilbas, A. A. A., Srivastava, H. M. and Trujillo, J. J., 2006. Theory and applications of fractional differential equations. Elsevier Science Limited, 204, 523 p, Amsterdam.

Kilbas, A. A., Rivero, M., Rodríguez-Germá, L. and Trujillo, J. J., 2007. α-Analytic solutions of some linear fractional differential equations with variable coefficients. Applied mathematics and computation, 187.1, 239-249.

Li, X., 2003. Fractional Calculus, Fractal Geometry and Stochastic Processes. PhD Thesis, The University of Western Ontario, Canada.

Loverro, A., 2004. Fractional calculus: history, definitions and applications for the engineer. Rapport technique, Univeristy of Notre Dame: Department of Aerospace and Mechanical Engineering.

Miller, K.S. and Ross, B., 1993. An introduction To Fractional Calculus And Fractional Differential Equations. John Wiley and Sons İnc., 366 p, Canada.

Oldham, K.B. and Spanier, J., 1974. The Fractional Calculus: Theory and Applications of Differentiation and İntegration to Arbitrary Order. Academic Press, New York, London.

Ortigueira, M. D. and Machado J.T., 2015. "What is a fractional derivative?." Journal of Computational Physics, 293, 4-13.

Podlubny, I., 1999. Fractional Differential Equations. Academic Press, 340 p, San Diego, California.

Rivero, M., Rodríguez-Germá, L. and Trujillo, J. J., 2008. Linear fractional differential equations with variable coefficients. Applied Mathematics Letters, 21.9, 892-897.

Ross, B., 1977. The Development of Fractional Calculus 1695-1900. Historia Mathematica, 4(1), 75-89.

Ünal, E., Gökdoğan, A. and Çelik,E. 2015. Solutions of Sequential Conformable Fractional Differential Equations around an Ordinary Point and Conformable Fractional Hermite Differential Equation. British Journal of Applied Science & Technology 10(2): 1-11.

ÖZGEÇMİŞ

1987 yılında Adana'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini burada tamamladı. 2005 yılında Atatürk Üniversitesi Eğitim Fakültesi Orta Öğretim Matematik bölümünde lisans öğrenimine başlayarak 2010 yılında mezun oldu. 2010 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik bilim dalında yüksek lisans eğitimine başladı. 2013 yılında aynı bölümde doktora eğitimine devam etti. Halen Artvin Çoruh Üniversitesi'nde Araştırma görevlisi olarak görev yapmaktadır. Evlidir.