TANJANT DEMETTE SEMİ-SİMETRİK METRİK KONNEKSİYON

Erkan KARAKAŞ

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalı
Doç. Dr. Aydın GEZER
2016

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TANJANT DEMETTE SEMİ-SİMETRİK METRİK KONNEKSİYON

Erkan KARAKAŞ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
Geometri Bilim Dalı

ERZURUM
2016

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAY FORMU

TANJANT DEMETTE SEMİ-SİMETRİK METRİK KONNEKSİYON

Doç. Dr. Aydın Gezer danışmanlığında, Erkan KARAKAŞ tarafından hazırlanan bu çalışma 01/09/2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı – Geometri Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak **oybirliği** ile kabul edilmiştir.

Başkan : Doç. Dr. Ömer TARAKCI *İmza* :

Üye : Doç. Dr. Aydın GEZER *İmza* :

Üye : Yrd. Doç. Dr. Sibel TURANLI *İmza* :

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulunun 07/09/2016 tarih ve 35/36 nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Cavit KAZAZ
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

TANJANT DEMETTE SEMİ-SİMETRİK METRİK KONNEKSİYON

Erkan KARAKAŞ

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Aydın GEZER

Bu tezde, tam lift (II) metriğine sahip tanjant demet üzerinde semi-simetrik metrik konneksiyon tanımlandı. Tanımlanan bu semi-simetrik metrik konneksiyonun eğrilik tensörü, Ricci tensörü ve skaler eğrilik tensörü hesaplandı. Hesaplanan bu tensörlerin bazı özellikleri araştırıldı.

2016, 78 sayfa

Anahtar Kelimeler: Tanjant demet, Tam lift(II) metriği, Semi-simetrik metrik konneksiyon, Adapte olmuş çatı.

ABSTRACT

MS Thesis

SEMI-SYMMETRIC METRIC CONNECTION ON THE TANGENT BUNDLE

Erkan KARAKAŞ

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Department of Geometry

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Aydın GEZER

In this thesis, a semi-symmetric metric connection on the tangent bundle endowed with the metric II is defined. The curvature tensor, Ricci tensor and scalar curvature tensor of the semi-symmetric metric connection are computed. Also, some curvature properties of this connections are investigated.

2016, 78 pages

Keywords: Tangent bundle, Complete lift (II) metric, Semi-symmetric metric connection, Adapted frame.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde yapılmıştır.

Bu tez konusunu çalışmama vesile olan, çalışma sürecinde verdiği güven ve destekle deniz feneri misali inşirah salan danışmanım Sayın Doç. Dr. Aydın GEZER'e kalbî teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek Lisans eğitimim boyunca bilgilerinden istifade ettiğim Sayın Yrd. Doç. Dr. Çağrı KARAMAN'a ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Murat ALTUNBAŞ' a sonsuz teşekkür ederim.

Eğitim hayatım boyunca vermiş oldukları güven ve destekten, göstermiş oldukları anlayıştan dolayı başta annem ve babam olmak üzere ailemin tüm fertlerine en içten teşekkürlerimi sunarım.

Erkan KARAKAŞ
Ağustos, 2016

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
M_n	: n-boyutlu M Manifoldu
$T(M_n)$	: M_n Manifoldunun Tanjant Demeti
$C^{\infty}(M_n,\mathbb{R})$	: $f: M_n \to \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı her mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip fonksiyonların kümesi
C	: Kontraksiyon Operatörü
D	: Türev Operatörü
π	: Doğal İzdüşüm Fonksiyonu
$[X,Y]$	: X ve Y vektör alanlarının Lie çarpımı
L_X	: X vektör alanı yönündeki Lie türevi
∇	: M_n de tanımlı Afin (Lineer) Konneksiyon
∇_X	: X vektör alanı yönündeki kovaryant türev
$\tilde{\nabla}$	: $T(M_n)$ de tanımlı Riemann konneksiyon
$\overline{\nabla}$	: $T(M_n)$ de tanımlı Semi-Simetrik Metrik Konneksiyon
Γ_{ij}^{k}	: ∇ konneksiyonunun katsayıları (2. tür Christoffel sembolleri)
$\tilde{\Gamma}_{\gamma\beta}^{\alpha}$	: $T(M_n)$ de tanımlı Riemann konneksiyonun katsayıları
$\overline{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma}$	: $T(M_n)$ de tanımlı Semi-Simetrik Metrik konneksiyonun katsayıları
$T_{ij}^{\ \ k}$	: M_n manifoldunda tanımlı ∇ konneksiyonunun Burulma Tensörü
$\tilde{T}_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma}$	: $T(M_n)$ de $\tilde{\nabla}$ Riemann Konneksiyonun Burulma Tensörü
$\overline{T}_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma}$	: $T(M_n)$ de $\overline{\nabla}$ konneksiyonunun Burulma Tensörü
R_{ijk}^{l}	: M_n manifoldunda tanımlı ∇ konneksiyonunun Eğrilik Tensörü
$\overline{R}_{\alpha\beta\gamma}^{\ \ \ \sigma}$	: $T(M_n)$ de $\overline{\nabla}$ konneksiyonunun Eğrilik Tensörü
g	: M_n de tanımlı Riemann metriği

$\tilde{g}$	: $T(M_n)$ de tanımlı Tam Lift (II) metriği
${}^{S}g$	: Sasaki metriği
${}^{CG}g$	: Cheeger-Gromoll metriği
τ	: M_n de ∇ konneksiyonunun Skaler eğriliği
$\bar{\tau}$	: $T(M_n)$ de $\overline{\nabla}$ konneksiyonunun Skaler eğriliği
$T_p(M_n)$	: M_n manifoldunun p noktasındaki tanjant uzay
$T_p{}^{*}(M_n)$	: M_n manifoldunun p noktasındaki kotanjant uzay
$T_q^p(M_n)$	: M_n manifoldunda tanımlı tüm (p,q) tipli tensörlerin kümesi
$\Im(M_n)$	: M_n manifoldunda tanımlı tensör alanlarının toplamı
$\otimes$	: Tensör Çarpımı
${}^{V}A$	: A tensör alanının dikey (vertikal) lifti
${}^{C}A$	: A tensör alanının tam (complete) lifti
${}^{H}A$	: A tensör alanının yatay (horizantal) lifti

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Gauss'un zamanından bu yana geometriyi tanımlamada iki yaklaşım mevcuttur. Bu yaklaşımdan ilki F. Klein'ın kullandığı yöntemdir. Bu yöntemde geometri, herhangi bir uzay ve bu uzayda verilen dönüşümler grubu kullanılarak tanımlanmaktadır. Klein'e göre, bu uzayın geometrisini oluşturan problemlerin incelenmesi, geometrik objelerin, dönüşümler grubu altında invaryant kalan özelliklerinin incelenmesidir. Buna göre, Öklid geometrisi düzlemde "katı" dönüşümler altında değişmeyen bir geometridir.

Diğer yöntem ise Gauss'un yüzeyler üzerine olan teorisini n-boyutlu duruma taşıyan Riemann'ın çalışmalarına dayanır. Bu n-boyutlu durum Riemann manifoldu olarak adlandırılmış olup yüzeylerde olduğu gibi burada da bir noktadan başka bir noktaya değişen eğrilik kavramı mevcuttur (Şahin 2015).

İlk kez Riemann'ın *"Mannigfaltigkeit"* olarak adlandırdığı, Clifford'un *"Manifoldness"* olarak İngilizce'ye çevirdiği "manifold" kavramı esas itibari ile yüzey kavramını çok boyutlu uzaylara taşıyabilmek amacı ile ortaya çıkmıştır. En genel tanımı ile manifold, her bir noktasında bu noktayı içine alan ve Öklid uzayının açık bir alt kümesine homeomorfik olacak şekilde açık bir kümesi bulunan bir Hausdorff uzayıdır. Yani, manifoldlar yerel olarak $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayına benzeyen nokta kümeleridir.

Manifoldu örten bu açık kümeler "haritalar" ve bu haritaların topluluğu ise "atlas" olarak adlandırılır. Manifold ile Öklid uzayı arasında birer homeomorfizm olan bu haritalar ve atlaslarla manifold üzerinde bir "diferensiyel yapı" kurulmakta, böylece manifoldun yapısından dolayı gerçekleştirilemeyen türev ve integral alma gibi çeşitli işlemler, bu işlemleri kolaylıkla yapabileceğimiz Öklid uzayı aracılığı ile manifold üzerinde yapılabilir hale gelmektedir. Ayrıca üzerinde bir diferensiyel yapı kurulan manifold ise artık "diferensiyellenebilir manifold" olarak adlandırılmaktadır (Şuhubi 2008).

Bir diferensiyellenebilir manifoldun bir p noktasındaki "tanjant vektörler" ve bu vektörlerin oluşturduğu "tanjant uzay" tanımlanırken iki amaç gözetilir:

- Öklid uzaylarında olduğu gibi fonksiyonların bir doğrultu boyunca türev kavramını manifoldlara genişletmek,
- p noktası civarında manifolda yerel olarak vektör uzayı yapısı kazandırmak.

Tanımlanan diferensiyel yapı ve tanjant vektör sayesinde manifold üzerinde sırasıyla diferensiyel ve cebirsel işlemler yapmak olanaklı hale gelmektedir. Bu suretle, mekanik sistemlerin incelenmesine imkan bulunabilir ve hareketler modellenebilir (Şuhubi 2008; Şahin 2012).

Bir M diferensiyellenebilir manifoldu verildiğinde, M üzerindeki temel diferensiyellenebilir elemanların (fonksiyon, vektör alanı, 1-form, tensör alanı, metrik) diğer manifoldlara taşınması ve M üzerindeki geometrik yapılarla diğer manifoldlar üzerindeki geometrik yapılar arasındaki ilişki diferensiyel geometri açısından önemli bir problemdir. Bu yolla, M ve diğer manifoldların geometrisi arasındaki ilişki incelenebilir (Özkan 2006).

M manifolduna difeomorfik olan manifoldlar haricinde, M ile en yakın ilişkili olan manifold M nin tanjant demetidir. M manifoldunun her bir noktasındaki tanjant uzayların ayrık birleşimine "tanjant demet" denir ve $T(M)$ ile gösterilir. Bu durumda M , $T(M)$ nin baz manifoldu olur.

Tanjant demetler, matematik ve fiziğin birçok alanında büyük bir öneme sahiptir. Mesela Lagrange ve Hamilton sistemleri verilen Q konfigürasyon manifoldunun hız ve momentum faz uzayları olan tanjant ve kotanjant demetlerde tanımlı uygun bir X vektör alanı tarafından karakterize edilir (Çağlar 2011).

Yarım asrı aşkın süredir farklı yaklaşımlar ve değişik notasyonlar kullanılarak tanjant demetin diferensiyel geometrik özelliklerini belirlemek için pek çok çalışma yapıldı. Tanjant demetin en az iki sebepten dolayı dikkat çekici bir yapı olduğunu söyleyebiliriz:

- Bir manifold üzerinde Riemann tensör alanının var olduğunu düşünürsek, tanjant demet, kotanjant demet ile "ikili" bir yapı oluşturur ve kotanjant demet doğal bir simplektik yapıya sahip olur.
- Riemann tensör alanı, tanjant demet üzerinde jeodezik akış olarak adlandırılan doğal bir akış meydana getirir (Şimşir 2005).

Tanjant demetlerin diferensiyel geometrisi hakkındaki ilk veriler Sasaki' nin "temel" olarak görülen 1958 tarihli yayınına aittir. Sasaki, diferensiyellenebilir bir M manifoldu üzerinde verilen g metriğini kullanarak $T(M)$ tanjant demette ${}^{S}g$ metriğini inşa eder. Günümüzde bu metrik "Sasaki metriği" (veya $I+III$ metriği) olarak adlandırılmaktadır. Sasaki metriğinde olduğu gibi, $T(M)$ tanjant demetteki herhangi bir G metriği, M baz manifoldu üzerinde verilen g Riemann metriğinden elde edilebiliyorsa bu tür metriklere " g - doğal metrik" adı verilir.

Sasaki metriği, doğal bir metrik olmasına rağmen rijit (katı, değişmez) yapıya sahiptir. Yani, M baz manifoldu lokal flat ise,

- $\left(T(M),{}^{S}g\right)$ de lokal flat olmaktadır.
- $\left(T(M),{}^{S}g\right)$ lokal simetrik olmaktadır (Kowalski 1971).
- $\left(T(M),{}^{S}g\right)$ sabit skaler eğriliğe sahip olmaktadır (Musso and Triccerri 1988; Sekizawa 1991).

Kowalski (1971), $\left(T(M),{}^{S}g\right)$ üzerinde tanımlı Levi-Civita konneksiyonunun eğrilik tensörünü hesaplamış; Dombrowski (1962), $T(M)$ de Lie parantezi ile ilgili hesaplamalar yapmıştır.

Yano and Ledger (1965), $T(M)$ nin lokal simetrik olmasının ancak ve ancak M nin lokal simetrik olması ile mümkün olduğunu göstermiştir (Kowalski 1971).

Kandatu (1966), lineer olmayan konneksiyon tanımlı bir manifoldun tanjant demetinin geometrik özelliklerini çalışmıştır.

Tensör alanlarının ve konneksiyonların "dikey ve tam liftleri" Yano and Kobayashi (1966); "yatay liftleri" ise Yano and Ishihara (1967) tarafından geliştirilerek $T(M)$ tanjant demetin ne tür geometrik özelliklere sahip olduğu araştırılmıştır.

Yano ve Ishihara (1973), M üzerinde tanımlı bir Riemann metriğinin klasik liftleri vasıtasıyla $T(M)$ de Riemann ya da pseudo- Riemann metrikler olarak addedilen metrikleri tanımlayarak, geometrik özelliklerini incelemişlerdir.

Bir diğer iyi bilinen g- doğal metrik ise, Musso and Tricerri (1988) tarafından adlandırılan Cheeger-Gromoll (${}^{CG}g$) metriğidir. Bu metrik Cheeger and Gromoll(1972) tarafından tanımlanmasına rağmen, anlaşılabilir bir şekilde Musso and Tricerri (1988) tarafından ifade edilmiştir. Sasaki metriğinin aksine (M,g) baz manifoldu lokal flat olsa da $\left(T(M),{}^{CG}g\right)$ lokal flat olmamaktadır (Gezer and Bilen 2012).

Sekizawa (1991), $\left(T(M),{}^{CG}g\right)$ üzerinde tanımlı Levi-Civita konneksiyonunu ve bu konneksiyonun Riemann eğriliği ile skaler eğriliğini hesaplamıştır. Eğrilik formüllerindeki hatalar Gudmundsson and Kappos (2002) tarafından düzeltilmiştir

Diğer yandan, Oproiu (1999), (M,g) sabit negatif kesitsel eğriliğe sahipken $\left(T(M),G\right)$ sabit pozitif skaler eğriliğe sahip olacak biçimde doğal G metrikleri tanımlamıştır (Abbassi and Sarih 2005a).

Abbassi and Sarih (2005a), tanjant demette g Riemann doğal metriğinin dikey, yatay ve Sasaki liftlerinin kombinasyonu olarak $G = a\,^{S}g + b\,^{H}g + c\,^{V}g$ şeklinde tanımlanan metriği çalışmışlardır. Burada $a,\ b,\ c;\ \ a > 0$ ve $a(a+c) - b^2 > 0$ şartlarını sağlayan katsayılardır.

Eğer $\left(T(M), G\right)$ sırasıyla flat, ya da lokal simetrik, ya da sabit kesitsel eğrilikli, ya da sabit skaler eğrilikli, ya da Einstein manifoldu ise (M, g) de sırasıyla aynı özelliklere sahiptir (Abbassi and Sarih 2005b).

Salimov and Kazimova (2009), $T(M)$ tanjant demette Cheeger-Gromoll metriğinin jeodeziklerini araştırmışlardır.

Semi-simetrik metrik konneksiyon da matematik ve fiziğin birçok alanında önem arz etmektedir. Şimdi de semi-simetrik metrik konneksiyonun tarihsel gelişiminden bahsedelim.

İlk kez Friedmann and Schouten (1924) tarafından düzgün bir manifold üzerinde tanımlanan "semi-simetrik lineer konneksiyon" kavramını Bartoletti (1930) geometrik olarak yorumlamıştır (Pandey *et al.*2014).

"Semi-simetrik metrik konneksiyon" ise 1932'de Hayden tarafından Riemann manifoldu üzerinde tanımlanmıştır. "Hayden konneksiyonu" olarak da adlandırılan bu konneksiyon aslında burulmalı bir metrik konneksiyondur.

Yano (1970), "Bir Riemann manifoldu üzerindeki semi-simetrik metrik konneksiyonun eğrilik tensörünün $R = 0$ olması için manifoldun konformal flat olması" gerektiğini ispatlamıştır.

Imai (1972), semi-simetrik metrik konneksiyona göre bir Riemann manifoldunun hiperyüzeylerini çalışmış ve bu konneksiyona göre Gauss eğrilik denklemi ile Codazzi-Mainardi denklemini elde etmiştir.

Nakao (1976), bir Riemann manifoldunun alt manifoldlarında semi-simetrik metrik konneksiyonu çalışarak Gauss eğrilik denklemi ile Codazzi-Mainardi denklemini elde etmiştir.

Duggal and Sharma (1986), bir semi-Riemann manifoldu üzerinde semi-simetrik metrik konneksiyonu incelemiş ve bu konneksiyona göre Riemann ve semi-Riemann geometriler arasında bir etkileşimin var olduğunu göstermişlerdir.

Zhao and Song (2001), izdüşüm yolu ile Levi-Civita konneksiyonuna eşdeğer olan ve "projektif semi-simetrik konneksiyon" olarak adlandırılan semi-simetrik konneksiyonu çalışmışlardır.

Konar and Biswas (2001), Lorentz manifoldları üzerinde; Yücesan (2008) ise bir semi-Riemann manifoldunun semi-Riemann alt manifoldlarında semi-simetrik metrik konneksiyonun özelliklerini incelemişlerdir.

Prvanovic (1975), Agashe and Chafle (1992), Liang (1994) ve Sengupta *et al.* (2000) gibi birçok araştırmacı değişik yaklaşımlarla "semi-simetrik metrik olmayan konneksiyonu" tanımlamışlardır.

Bu tezde ise tam lift (II) metriğine sahip $T(M)$ tanjant demette semi-simetrik metrik konneksiyonun tanımlanması; bu konneksiyonun eğrilik, Ricci ve skaler eğrilik tensörlerinin hesaplanması ve hesaplanan bu tensörlerin bazı özelliklerinin incelenmesi amaçlanmaktadır. Ayrıca, çalışmamızda tanjant demette daha kolay tensör hesabı yapmaya imkan veren adapte olmuş çatı kullanılmıştır.

Bu amaçla kuramsal temeller adlı ikinci bölümde, temel tanım, kavram ve teoremlere yer verilmiştir.

Materyal ve yöntem adlı üçüncü bölümde, tanjant demet, baz manifoldda tanımlı bazı geometrik nesnelerin tanjant demete liftleri, tanjant demette bir afin konneksiyona adapte olmuş çatı, semi-simetrik metrik konneksiyon ve tam lift (II) metriği hakkında bilgiler verilmiştir.

Araştırma ve bulgular adlı dördüncü bölümde, tam lift (II) metriğine sahip tanjant demette semi-simetrik metrik konneksiyon tanımlanarak, bu konneksiyonun eğrilik, Ricci ve skaler eğrilik tensörleri hesaplanmıştır. Ayrıca bu tensörlerin bazı özellikleri araştırılmıştır.

Beşinci bölümde ise tezden elde edilen sonuçlara yer verilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Diferensiyellenebilir Manifoldlar

Tanım 2.1.1: M ve N birer topolojik uzay olmak üzere, $f:M \to N$ fonksiyonu birebir, örten ve sürekli iken f^{-1} de sürekli ise f fonksiyonuna M den N ye bir homeomorfizm (topolojik dönüşüm) adı verilir.

Burada f bir homeomorfizm olduğu taktirde M ve N uzaylarına da topolojik olarak birbirlerine denktir veya homeomorfiktir denir (Hacısalihoğlu 1998).

Tanım 2.1.2: M bir Hausdorff uzayı olmak üzere, $\forall p \in M$ için $\mathbb{R}^n$ uzayının açık bir alt kümesine homeomorfik olacak şekilde p noktasının bir U açık komşuluğu varsa M ye bir topolojik manifold ya da kısaca manifold denir. Yani bir manifold yerel olarak Öklid uzayına eşdeğerdir (Şuhubi 2008).

Bu taktirde $boy(\mathbb{R}^n) = n$ olduğundan, manifoldun boyutu da n dir ve n-boyutlu M manifoldu M_n olarak gösterilir (Şahin 2012).

Tanım 2.1.3: Tanım 2.1.2 ye göre, herhangi bir $U \subset M$ açık kümesinden $V \subset \mathbb{R}^n$ açık bölgesine olan $\varphi: U \to V$ bir homeomorfizm ise (U,φ) ikilisine bir harita veya koordinat sistemi denir (Salimov ve Mağden 2008).

Haritanın boyutu n dir. U açık kümesi ise haritanın tanım bölgesi veya koordinat bölgesi (koordinat komşuluğu) olur (Şuhubi 2008; Salimov ve Mağden 2008).

Tanım 2.1.4: φ bir homeomorfizm olduğundan , $p \in U \subset M$ noktası için

$$\varphi(p) = x = (x^1(p),...,x^n(p))$$

yazılır. Böylece φ homeomorfizmi, M manifoldunun bir p noktasına $(x^1(p),...,x^n(p))$ n lisini karşılık getirmiş olur. $x^1(p),...,x^n(p)$ reel sayılarına $p \in M$ noktasının (U,φ) haritasındaki yerel koordinatları adı verilir. Yani $p \in M$ noktasının koordinatları, $x = \varphi(p) \in \mathbb{R}^n$ noktasının koordinatları olarak tanımlanır (Şuhubi 2008; Şahin 2012).

Buna göre bir harita bir "yerel koordinat takımı" oluşturur. Bir topolojik manifoldun her bir noktasında n-boyutlu bir harita varsa manifoldun boyutu bu n sayısıdır. Tüm haritalardaki yerel koordinat takımlarının birleşimi ise M manifoldunun "koordinat örtüsünü" oluşturur.

$\varphi^{-1}: V \to U$ ters dönüşümü U kümesinin bir parametrelemesi adını alır ve $x^1, x^2,...,x^n$ koordinatlarına U kümesinin parametreleri denir.

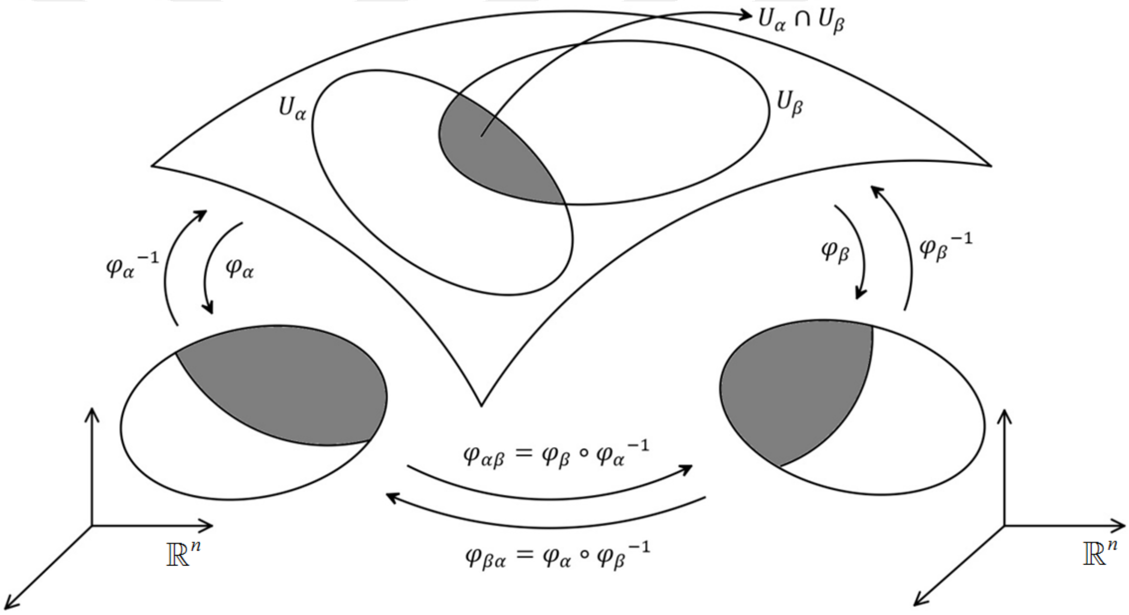
M manifoldu üzerindeki koordinat çizgileri, $\mathbb{R}^n$ deki kartezyen koordinat çizgilerinin $\varphi^{-1}: V \to U$ dönüşümü altındaki görüntüleri olan eğriler olup M manifoldu p noktası civarında yerel olarak $\mathbb{R}^n$ uzayının bir açık alt kümesi gibi davranmaktadır (Şuhubi 2008).

Tanım 2.1.5: Keyfi $\alpha, \beta \in I$ için $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ olmak üzere $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ve (U_β, φ_β) iki farklı harita olsun. $U_\alpha \cap U_\beta$ arakesit kümesinin φ_α ve φ_β altında $\mathbb{R}^n$ deki görüntüleri genellikle farklı kümeler olacaktır. φ_α ve φ_β homeomorfizmlerinin ortak tanım bölgesi $U_\alpha \cap U_\beta$ üzerinde, bir noktanın φ_α altındaki koordinatları $(x^1, x^2,...,x^n)$ olsun. φ_α

homeomorfizminin φ_α^{-1} tersi var olduğundan, $U_\alpha \cap U_\beta$ de bir tek p noktası vardır. Bu p noktasının φ_β altındaki koordinatları ise $(y^1, y^2, ..., y^n)$ olmak üzere bu koordinatlar arasında,

$$\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$
$$\varphi_{\alpha\beta}^{-1} = \varphi_{\beta\alpha} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

olacak şekilde,



Şekil 2.1. Diferensiyellenebilir yapı

$$y_i = f^i(x^1, x^2, ..., x^n) = \left(\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}(x^1, x^2, ..., x^n)\right)^i, \tag{2.1}$$

$$x_i = g^i(y^1, y^2, ..., y^n) = \left(\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}(y^1, y^2, ..., y^n)\right)^i \tag{2.2}$$

bağıntıları elde edilir. Bu bağıntıların $U_\alpha \cap U_\beta$ açık kümesi üzerinde bir koordinat dönüşümüne karşılık geldiği açıktır. $\mathbb{R}^n$ üzerinde kısmi türevleri tanımlayabileceğimizi biliyoruz. Eğer f^i ve g^i fonksiyonlarının sırasıyla x_i ve y_i değişkenlerine göre k. ve daha küçük mertebeden sürekli kısmi türevleri var ise $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ve (U_β, φ_β) haritaları k. mertebeden uyumludur (C^k-bağdaşır veya C^k-uzlaşır) denir.

Eğer $U_\alpha \cap U_\beta = \varnothing$ ise bu haritalar uyumlu olarak kabul edilir. Burada $(x^1, x^2, ..., x^n) \in \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$, $(y^1, y^2, ..., y^n) \in \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ ve $i = 1,2,...,n$ şeklindedir (Şuhubi 2008; Şahin 2012).

Tanım 2.1.6: M_n, n- boyutlu bir manifold olsun. Eğer M_n üzerindeki haritaların bir ailesi olan $A = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in I\}$ kümesi için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa A koleksiyonuna "C^k-sınıfından atlas" adı verilir (Şuhubi 2008).

(i) $\{U_\alpha\}$ açık kümelerinin koleksiyonu M_n manifoldunun açık bir örtüsüdür. Yani

$$M_n = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$$

dir.

(ii) A daki herhangi iki harita k. mertebeden uyumludur (veya C^k sınıfındandır).

C^k sınıfından bir atlas tüm haritaları C^k-uzlaşır olan bir atlastır.

Tanım 2.1.7: $A_1 = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ ve $A_2 = \{(U_\beta, \varphi_\beta)\}$, C^k sınıfından herhangi iki atlas olsun. Bu atlasların keyfi $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ve (U_β, φ_β) haritaları C^k-uzlaşan ise, yani A_1 ve A_2 atlaslarının birleşimi de C^k sınıfından ise verilen atlaslara "denk atlaslar" denir (Salimov ve Mağden 2008).

Atlasların C^k-uzlaşır olması bir denklik bağıntısı olup bu ise C^k atlaslar kümesini denklik sınıflarına ayırır.

Tanım 2.1.8: M_n manifoldu üzerindeki C^k atlasların bir denklik sınıfına k. mertebeden diferensiyellenebilir yapı (veya C^k-yapı) adı verilir (Salimov ve Mağden 2008).

Böyle bir denklik sınıfının içindeki atlasların birleşimi de bu sınıfın içinde kalmak zorundadır. Yani her bir denklik sınıfı bir tane en büyük atlası içerir ki bu atlasa "maksimal atlas" denir (Şuhubi 2008).

Tanım 2.1.9: M_n manifoldu üzerinde k. mertebeden maksimal bir atlas var ise M_n manifolduna C^k diferensiyellenebilir manifold denir.

Eğer (2.1) ve (2.2) reel değişkenli ve reel değerli fonksiyonlarının her mertebeden sürekli kısmi türevleri var ise M_n manifolduna C^∞ atlas veya C^∞ diferensiyellenebilir manifold adı verilir. C^∞ diferensiyellenebilir manifolduna kısaca düzgün manifold denir (Şuhubi 2008).

2.2. Diferensiyellenebilir Fonksiyonlar

Tanım 2.2.1: M_n, n-boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold ve $f : M \to \mathbb{R}$ olsun. $p \in M_n$ noktasını içine alan bir $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ haritası için $x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere,

$$f(p) = f(\varphi_\alpha^{-1}(x)) = (f \circ \varphi_\alpha^{-1})(x)$$

yazılır. $\varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ açık kümesi üzerinde $f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ reel değerli, n değişkenli fonksiyonu için $x = \varphi_\alpha(p)$ olmak üzere, $f(p) = (f \circ \varphi^{-1})(x)$ eşitliği vardır. $\left(f \circ \phi^{-1}\right)(x^1,...,x^n)$ fonksiyonunun $x \in \varphi_\alpha(U_\alpha)$ noktasında k. mertebeye kadar sürekli kısmi türevleri varsa f fonksiyonuna $p \in M_n$ noktasında k. mertebeden diferensiyellenebilirdir denir (Şuhubi 2008).

k. mertebeden diferensiyellenebilir bir fonksiyon, C^k sınıfından bir fonksiyon olarak nitelenir ve $f \in C^k(U,\mathbb{R})$ olarak gösterilir. Burada $\varphi_\alpha(U_\alpha) = V \subset \mathbb{R}^n$ dir. Eğer $\left(f \circ \phi^{-1}\right)(x^1,...,x^n)$ fonksiyonunun $x \in \varphi_\alpha(U_\alpha)$ noktasında her mertebeden sürekli kısmi türevleri varsa f fonksiyonuna düzgün fonksiyon denir ve $f \in C^\infty(U,\mathbb{R})$ şeklinde gösterilir.

2.3. Tanjant Vektörler ve Vektör Alanları

Tanım 2.3.1: M_n, n-boyutlu bir manifold, $p \in M$ ve manifold üzerindeki düzgün fonksiyonların kümesi $C^\infty(M_n,\mathbb{R})$ ve $f \in C^\infty(M_n,\mathbb{R})$ olsun. p noktasındaki bir harita (U,φ) ise $\varphi(p) = (x^1,...,x^n) \in \mathbb{R}^n$ iken $p = \varphi^{-1}(x^1,...,x^n)$ olup

$$y = f(p) = f(\varphi^{-1}(x^1,...,x^n)) = g(x^1,...,x^n)$$

yazılır. Burada $g = f \circ \varphi^{-1}$ şeklindedir. f ve g fonksiyonları için

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_p := \frac{\partial g}{\partial x^i}\Big|_{\varphi(p)}$$

eşitliğini göz önüne alalım. Burada $\frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_p$ yerine $\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p(f)$ de yazılır.

n tane olan $\xi^i \in \mathbb{R}$ sayıları için,

$$V_p(f) = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_p$$

biçiminde tanımlanan $V_p : C^\infty(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ lineer fonksiyonuna bakalım. Bu fonksiyon,

$$V_p = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$$

şeklinde olup ve bu şekildeki tüm fonksiyonların kümesini de $T_p(M_n)$ ile gösterelim. $T_p(M_n)$ kümesi,

$i)$ $(V_p + W_p)(f) = V_p(f) + W_p(f)$

$ii)$ $(a V_p)(f) = a V_p(f)$

şeklinde tanımlanan toplama ve skalerle çarpma işlemleriyle beraber $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olur. Bu vektör uzayına M_n manifoldunun p noktasındaki tanjant uzayı, bu uzayın elemanlarına da M_n manifoldunun p noktasındaki tanjant vektörleri denir (Salimov ve Mağden 2008). Burada $V, W \in T_p(M_n)$ ve $a \in \mathbb{R}$ dir.

Sonuç 2.3.1: M_n, n-boyutlu düzgün bir manifold olmak üzere, $p \in M_n$ ve manifold üzerindeki diferensiyellenebilir fonksiyonların kümesi $C^\infty(M_n, \mathbb{R})$ olsun. Bu durumda $f, g \in C^\infty(M_n, \mathbb{R})$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere her $V_p \in T_p(M_n)$ tanjant vektörü için,

$i)$ $V_p(af + bg) = aV_p f + bV_p g$

$ii)$ $V_p(fg) = V_p(f)g(p) + f(p)V_p(g)$

yazılır (Hicks 1971; O'Neill 1983).

Teorem 2.3.1: $T_p(M_n)$, n-boyutlu M_n manifoldunun p noktasındaki tanjant uzayı ve p noktasının $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ haritasındaki koordinatları $(x^1, \dots, x^n)$ olsun. Bu durumda $T_p(M_n)$ vektör uzayının bir bazı $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n} \right)_p \right\}$ dır.

Tanım 2.3.2: Teorem 2.2.1 de verilen $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n} \right)_p \right\}$ bazına M_n manifoldunun p noktasındaki doğal çatısı denir (Altunbaş 2014).

Kısalığın hatırı için $\sum_{i=1}^{n} \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ yazılışını $\xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ şeklinde göstereceğiz. $\xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ yazılışındaki i indisi toplama indisi adını alır. Benzer olarak $\frac{\partial}{\partial x^i}$ bazı ise $\frac{\partial}{\partial x^i} = \partial_i$ şeklinde gösterilecektir.

Tanım 2.3.3: M_n, n-boyutlu bir manifold ve $T_p(M_n)$ bu manifoldun p noktasındaki tanjant uzayı olsun. Bu durumda her $p \in M$ noktasına $T_p(M_n)$ uzayından bir tanjant vektörü karşılık getiren C^∞ sınıfından bir fonksiyona bir "vektör alanı" denir. Böylece M_n manifoldu üzerinde bir V vektör alanı,

$$V : M \to \bigcup_{p \in M} T_p(M_n)$$

şeklinde tanımlı diferensiyellenebilir bir dönüşümdür (Şahin 2012).

Aslında vektör alanı büyük bir tanjant vektör kolleksiyonu olup M_n manifoldunun her bir noktasında bir tanjant vektöre sahiptir. Burada vektör alanının diferensiyellenebilir olması, $\forall\ f \in C^\infty(M_n, \mathbb{R})$ için

$$V f : M_n \to \mathbb{R}$$
$$p \to V f(p) = V_p(f)$$

şeklinde tanımlı fonksiyonun her mertebeden diferensiyellenebilir olmasıdır.

Vektör alanlarının kümesi $\Im_0^1(M_n)$ ile gösterilecektir. Yerel koordinat sisteminde bir V vektör alanı,

$$V = V^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

olarak ifade edilir (Şahin 2012).

$\Im_0^1(M_n)$, M_n manifoldu üzerindeki diferensiyellenebilir vektör alanlarının kümesi olsun. $p \in M_n$ olmak üzere, $\forall\ X, Y \in \Im_0^1(M_n)$ ve $\forall\ f, g \in C^\infty(M_n, \mathbb{R})$ için, $\Im_0^1(M_n)$ kümesi

$i)$ $(X+Y)_p(f) = X_p(f) + Y_p(f)$

$ii)$ $(gX)_p(f) = g(p)\, X_p(f)$

şeklinde tanımlanan toplama ve çarpma işlemleri ile beraber $C^\infty(M_n, \mathbb{R})$ halkası üzerinde bir modüldür.

2.4. Kotanjant Vektörler ve 1-Formlar

Tanjant uzayı bir vektör uzayı olduğundan onun cebirsel dualinden bahsedebiliriz.

Tanım 2.4.1: M_n, n-boyutlu bir manifold ve $f \in C^\infty(M_n, \mathbb{R})$ olmak üzere, f fonksiyonunun $p \in M_n$ noktasındaki diferensiyeli,

$$\left(d\,f\right)\Big|_p = \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_p dx^i$$

biçiminde tanımlanır. $\forall\, f, g \in C^\infty(M_n, \mathbb{R})$ ve $a \in \mathbb{R}$ için, $f + g \in C^\infty(M_n, \mathbb{R})$ fonksiyonunun diferensiyeli $df + dg$ ve $af \in C^\infty(M_n, \mathbb{R})$ fonksiyonun diferensiyeli de $a(df)$ şeklinde olup bu fonksiyonların $p \in M_n$ noktasındaki diferensiyelleri $\mathbb{R}$ üzerinde $T_p{}^*(M_n)$ uzayını oluşturur.

$x^i \in C^\infty(M_n, \mathbb{R})$ koordinat fonksiyonları için $d\,x^i \in T_p{}^*(M)$ olacağı aşikardır. $\frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_p \in \mathbb{R}$ olduğundan, $\forall\, df \in T_p{}^*(M_n)$ diferensiyeli dx^i diferensiyellerinin lineer terkibi olur. dx^i diferensiyelleri, bağımsız $x^i\ (i = 1,...,n)$ değişkenlerinin diferensiyelleri olduğundan dx^i lerde lineer bağımsız olacaktır. O halde $\left\{dx^i\right\} = \left\{dx^1,..., dx^n\right\}$, $T_p{}^*(M_n)$ uzayının bir bazı olur. Dolayısıyla $boy(T_p{}^*(M_n)) = n$ dir.

$\forall X \in T_p(M_n)$ için $T_p{}^*(M_n)$ uzayının keyfi df elemanı,

$$\begin{aligned} df : T_p(M_n) &\to \mathbb{R} \\ X &\to df(X) = X(f) \end{aligned}$$

şeklinde bir lineer dönüşüm tayin eder. Bu eşitlikte $f = x^j$ ve $X = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ olarak alınırsa,

$dx^j\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right) = \dfrac{\partial x^j}{\partial x^i} = \delta_i^j$ elde edilir. Yani, $\left\{dx^j\right\}$ ve $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ bazları dual bazlar olup $\left\{dx^j\right\}$ bazına kobaz denir. Bu durumda $T_p{}^*(M_n)$ uzayı, $T_p(M_n)$ uzayının duali olur.

Tanım 2.4.2: M_n bir manifold ve $T_p(M_n)$, $p \in M_n$ noktasındaki tanjant uzay olsun. $T_p(M_n)$ vektör uzayının dual uzayı olan $T_p{}^*(M_n)$ uzayına M_n nin p noktasındaki kotanjant uzayı, bu uzayın elemanlarına da kotanjant vektör (lineer form) veya kısaca kovektör denir (Salimov ve Mağden 2008).

Tanım 2.4.3: $T_p(M_n)$ vektör uzayının $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ çatısına, $T_p{}^*(M_n)$ uzayında karşılık gelen $\{dx^j\}$ bazına, yani

$$dx^j(\frac{\partial}{\partial x^i}) = \frac{\partial x^j}{\partial x^i} = \delta_i^j$$

şartını sağlayan $\{dx^j\} = \{dx^1,...,dx^n\}$ kobazına $p \in M_n$ noktasındaki koçatı adı verilir.

Tanım 2.4.4: M_n manifoldunun her bir noktasına bir kovektör karşılık getiren dönüşüme kovektör alanı veya 1-form adı verilir.

2.5. Tensörler ve Tensör Alanları

2.5.1. Tensörün tanımı

Tanım 2.5.1: M_n, n-boyutlu bir manifold ve $T_p(M_n)$ ile $T_p{}^*(M_n)$ sırasıyla $p \in M_n$ noktasındaki tanjant ve kotanjant uzayı olsun. $\overrightarrow{x_j} \in T_p(M_n),\ \ j = 1,...,q$ vektör ve $\xi^i \in T_p{}^*(M_n),\ i = 1,..., p$ kovektör değişkenlerinin

$$w = t(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2},..., \overrightarrow{x_q}, \xi^1, \xi^2,..., \xi^p)$$

reel değerli fonksiyonunu göz önüne alalım. Eğer bu fonksiyon her bir değişkene göre lineerlik şartını sağlıyorsa, bu fonksiyona multilineer fonksiyon denir. Mesela birinci vektör değişkenine göre lineerlik şartı, $\lambda, \mu \in R$ olmak üzere,

$$t(\lambda\vec{x}+\mu\vec{y},\vec{x_2},...,\vec{x_q},\xi^1,\xi^2,...,\xi^p)=\lambda\, t(\vec{x},\vec{x_2},...,\vec{x_q},\xi^1,\xi^2,...,\xi^p)$$

$$+\mu\, t(\vec{y},\vec{x_2},...,\vec{x_q},\xi^1,\xi^2,...,\xi^p)$$

biçiminde gösterilir. Bu $w=t(\vec{x_1},\vec{x_2},...,\vec{x_q},\xi^1,\xi^2,...,\xi^p)$ multilineer fonksiyonuna karşılık gelen

$$t:\underbrace{T_p(M)\times...\times T_p(M)}_{q}\times\overbrace{T_p^{\,*}(M)\times...\times T_p^{\,*}(M)}^{p}\rightarrow\mathbb{R}$$

operatörüne M_n manifoldunda p. dereceden kontravaryant, q. dereceden kovaryant tensör adı verilir. (p,q) sıralı ikilisine ise tensörün tipi denir.

2.5.2. Tensörler üzerinde işlemler

Tanım 2.5.1: Aynı tipli t_1 ve t_2 tensörlerinin toplamı,

$$(t_1+t_2)(\vec{x_1},...,\vec{x_q},\xi^1,...,\xi^p)=t_1(\vec{x_1},...,\vec{x_q},\xi^1,...,\xi^p)+t_2(\vec{x_1},...,\vec{x_q},\xi^1,...,\xi^p)$$

şeklinde ve keyfi (p,q) tipli t tensörü ile $\lambda\in\mathbb{R}$ sayısının çarpımı,

$$(\lambda t)(\vec{x_1},...,\vec{x_q},\xi^1,...,\xi^p)=\lambda\, t\,(\vec{x_1},...,\vec{x_q},\xi^1,...,\xi^p)$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 2.5.2: M_n manifoldunda tanımlı tüm (p,q) tipli tensörlerin kümesini $T_q^p(M_n)$ ile gösterelim. $T_q^p(M_n)$ kümesi Tanım 2.5.1 de tanımlanan toplama ve skalerle çarpma işlemleri ile beraber bir vektör uzayı yapısına sahiptir. Bu vektör uzayına tensör uzayı denir ve $T_q^p(M_n)$ ile gösterilir.

Tanım 2.5.3: Keyfi (p,q) ve (r,s) tipli t_1 ve t_2 tensörlerini göz önüne alalım. Bu tensörlerin çarpımı $(p+r,q+s)$ tipli $t_1 \otimes t_2$ tensörüdür. Bu tensör

$$(t_1 \otimes t_2)(\vec{x}_1,...,\vec{x}_q,\vec{x}_{q+1},...,\vec{x}_{q+s},\xi^1,...,\xi^p,\xi^{p+1},...,\xi^{p+r}) =$$

$$t_1(\vec{x}_1,...,\vec{x}_q,\xi^1,...,\xi^p)t_2(\vec{x}_{q+1},...,\vec{x}_{q+s},\xi^{p+1},...,\xi^{p+r})$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.5.4: M_n, n-boyutlu bir manifold ve $T_p{}^*(M_n)$ uzayı da $T_p(M_n)$ vektör uzayının dual vektör uzayı olsun. $T_q^p(M_n)$, M_n üzerindeki (p,q) tipli tensörlerin uzayı olmak üzere,

$$C_j^i : T_q^p(M_n) \to T_{q-1}^{p-1}(M_n)$$
$$A \to (C_j^i A)(X_1,...,X_{p-1},w^1,...,w^{q-1}) = C\{A(.\,,X_1,...,X_{p-1},...,\,.\,,w^1,...,w^{q-1})\}$$

ve

$$C_j^i A = \sum_m A(X_m, X_1,...,X_{p-1},w^m,w^1,...,w^{q-1})$$

ile tanımlanan operatöre kontraksiyon (daraltma) operatörü denir. Böylece kontraksiyon operatörü (p,q) tipli bir tensörü $(p-1,q-1)$ tipli bir tensöre dönüştürür (Şahin 2012).

Tanım 2.5.5: t, q. mertebeden kovaryant bir tensör olsun. $v_1,v_2,...,v_q \in T_p(M_n)$ ve σ permütasyonu için,

$i)$ $t(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, ..., v_{\sigma(q)}) = t(v_1, v_2, ..., v_q)$ ise t ye kovaryant simetrik tensör,

$ii)$ $t(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, ..., v_{\sigma(q)}) = (\text{sgn}\,\sigma)\, t(v_1, v_2, ..., v_q)$ ise t ye kovaryant anti-simetrik tensör adı verilir.

Kontravaryant tensörler içinde simetrik ve anti-simetrik tensör tanımı benzer biçimde yapılabilir (Şahin 2012).

Tanım 2.5.6: (p,q) tipli bir tensör hem kovaryant simetrik hem de kontravaryant simetrik ise simetrik tensör adını alır (Bishop and Goldberg 1968).

2.5.3. Tensörün koordinatları

Tanım 2.5.7: $$w = t(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, ..., \overrightarrow{x_q}, \xi^1, \xi^2, ..., \xi^p)$$

multilineer fonksiyonu ile M_n de (p,q) tipli t tensörü verilsin. $\partial_i \in T_p(M_n)$ baz ve $dx^j \in T_p^{\,*}(M_n)$ dual kobaz vektörleri için,

$$t^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = t(\partial_{j_1}, ..., \partial_{j_q}, dx^{i_1}, ..., dx^{i_p})$$

izlerine t tensörünün $\{\partial_i\}$ bazındaki koordinatları denir.

Şimdi ise M_n de koordinat komşuluğu (sistemi) değiştikçe $t \in \Im^p_q(M_n)$ tensörünün koordinatlarının değişme kuralını bulalım. $\partial_{i'} = A^i_{i'} \partial_i$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} t^{i'_1 \dots i'_p}_{j'_1 \dots j'_q} &= t(\partial_{j'_1}, ..., \partial_{j'_q}, dx^{i'_1}, ..., dx^{i'_p}) \\ &= t(A^{j_1}_{j'_1} \partial_{j_1}, ..., A^{j_q}_{j'_q} \partial_{j_q}, A^{i'_1}_{i_1} dx^{i_1}, ..., A^{i'_p}_{i_p} dx^{i_p}) \end{aligned}$$

$$= A^{j_1}_{j'_1} \ldots A^{j_q}_{j'_q} A^{i'_1}_{i_1} \ldots A^{i'_p}_{i_p} \, t(\partial_{j_1}, \ldots, \partial_{j_q}, dx^{i_1}, \ldots, dx^{i_p})$$

$$t^{i'_1 \ldots i'_p}_{j'_1 \ldots j'_q} = A^{j_1}_{j'_1} \ldots A^{j_q}_{j'_q} A^{i'_1}_{i_1} \ldots A^{i'_p}_{i_p} \, t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$$

olarak bulunur. Bu eşitliğe "tensör kanunu" denir.

2.5.4. Tensör alanları

Tanım 2.5.8: M_n, diferensiyellenebilir bir manifold olmak üzere manifoldun her $m \in M_n$ noktasına $T^p_q(M_n)$ tensör uzayından (p,q) tipli bir tensör karşılık getiren

$$t : M_n \to T^p_q(M_n)$$

$$m \to t^p_q(m) \in T^p_q(M_n)$$

dönüşümüne (p,q) tipli tensör alanı adı verilir (Bishop and Goldberg 1968).

Bu tanımdan hareketle,

- $p=1, q=0$ iken $(1,0)$ tipli tensör alanı olan vektör alanı,
- $p=0, q=1$ iken $(0,1)$ tipli tensör alanı olan kovektör alanı (1-form) elde edilir.
- $p=0, q=0$ iken $\forall m \in M_n$ noktasına skaler bir değer karşılık gelir. Yani $(0,0)$ tipli tensör alanı reel değerli bir fonksiyondur.

Dolayısıyla vektör alanların kümesi $\Im^1_0(M_n)$, kovektör alanlarının kümesi $\Im^0_1(M_n)$ ve reel değerli fonksiyonların kümesi ise $\Im^0_0(M_n)$ şeklinde gösterilir.

Eğer $U \subset M_n$ bölgesinde f fonksiyonu C^∞ sınıfından ise $\forall p \in U$ için $df\big|_p \in \Im_1^0\big|_p(M_n)$ olur. Böylece f fonksiyonunun diferensiyeli olan df operatörü (0,1) tipli bir tensör alanıdır.

M_n, C^∞ sınıfından bir manifold olmak üzere bu manifold üzerindeki tüm (p,q) tipli tensör alanlarının kümesi $T_q^p(M_n)$, $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayıdır. Tensör alanlarının toplamı,

$$\Im(M_n) = \sum_{p,q=0}^{\infty} \Im_q^p(M_n)$$

şeklinde gösterilir. Eğer üçüncü bir işlem olarak tensörel çarpım işlemi $(\otimes)$ de dahil edilir ise $T_q^p(M_n)$, $\mathbb{R}$ üzerinde bir cebir olur. Tensörel çarpım işlemi noktasal olarak

$$\underset{1}{t} \otimes \underset{2}{t} = \left(\underset{1}{t}\right)_p \otimes \left(\underset{2}{t}\right)_p, \qquad \forall p \in M, \ \forall \underset{1}{t}, \underset{2}{t} \in \Im(M)$$

biçiminde tanımlanır.

2.6. Tensör Diferensiyellemesi

Tanım 2.6.1: $\forall\ s, t \in \Im(M_n)$ ve $\forall\ a, b \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki şartları sağlayan $D : \Im(M_n) \to \Im(M_n)$ dönüşümüne $\Im(M_n)$ cebirinin tensör diferensiyellemesi işlemi denir (O' Neill 1983). Burada C kontraksiyon operatörüdür.

i) $D(at + bs) = a\,D(t) + b\,D(s)$

ii) $D(\Im_q^p(M)) \subset \Im_q^p(M)$

iii) $D(t \otimes s) = D(t) \otimes s + t \otimes D(s)$

iv) $D(Ct) = C(Dt)$

2.7. Lie Parantezi ve Lie Türevi

Tanım 2.7.1: M_n, C^∞ sınıfından bir manifold; M_n manifoldunun bir U açık kümesi üzerinde $X, Y \in \Im_0^1(M_n)$ ve $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ olmak üzere,

$$(Xf) = X^i \partial_i f \text{ ve } (Yf) = Y^j \partial_j f \tag{2.3}$$

iken

$$X(Yf) = X(Y^j \partial_j f) = X^i (\partial_i Y^j \partial_j f + Y^j \partial_{ij}^2 f)$$

$$Y(Xf) = Y(X^i \partial_i f) = Y^j (\partial_j X^i \partial_i f + X^i \partial_{ij}^2 f)$$

bulunur. Bu ifadeler kullanılarak

$$X(Yf) - Y(Xf) = (X^i \partial_i Y^j - Y^i \partial_i X^j) \partial_j f$$

şeklinde yeni bir vektör alanı elde edilir.

$$XY - YX = [X, Y]$$

ile tanımlanan bu vektör alanının ∂_i doğal çatısına göre ifadesi

$$[X, Y] = XY - YX = (X^i \partial_i Y^j - Y^i \partial_i X^j) \partial_j \tag{2.4}$$

biçimindedir.

Tanım 2.7.2: (2.4) eşitliği ile tanımlanan $[X, Y]$ vektör alanına X ile Y vektör alanlarının Lie parantezi denir. (2.3) eşitliğinde (Xf), f fonksiyonun X vektör alanı yönündeki türevini ifade etmektedir (Salimov ve Mağden 2008).

(2.4) eşitliğinde, $\partial_i = \delta_i^k \partial_k$ ve $\partial_j = \delta_j^k \partial_k$ vektör alanları kullanılırsa

$$[\partial_i, \partial_j] = 0$$

olduğu görülür.

Lie parantezi aşağıda verilen özellikler sahiptir (Şahin 2012; Salimov ve Mağden 2008).

1) $[X, Y+Z] = [X,Y] + [X,Z]$ (Lineerlik)
2) $[X, fY] = (Xf)Y + f[X,Y]$ (Leibniz şartı)
3) $[X,Y] = -[Y,X]$ (Antisimetriklik)
4) $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$ (Jacobi Özdeşliği)

Tanım 2.7.3: $\forall\, X, Y \in \Im_0^1(M)$ ve $\forall\, f \in \Im_0^0(M)$ olmak üzere, $D = L_X$ şeklinde gösterilen diferensiyelleme işlemi,

$i)\ L_X f = Xf$

$ii)\ L_X Y = [X,Y]$

şartlarını sağlarsa L_X e X vektör alanı yönündeki Lie diferensiyellemesi denir (Kobayashi and Nomizu 1963).

(2.4) formülüne göre, $L_X Y$ vektör alanının yerel koordinatlardaki ifadesi,

$$L_X Y^i = X^k \partial_k Y^i - Y^k \partial_k X^i$$

şeklindedir. Lie diferensiyellemesi sonucu bulunan değere ise Lie türevi adı verilir (Salimov ve Mağden 2008).

Keyfi (p,q) tipli t tensörünün Lie türevi,

$$L_X t^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} = X^k \partial_k t^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} + \sum_{\lambda=1}^{q} (\partial_{j_\lambda} X^k)\, t^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots k\dots j_q} - \sum_{\mu=1}^{p} (\partial_k X^{i_\mu})\, t^{i_1\dots k\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$$

şeklindedir (Salimov ve Mağden 2008).

2.8. Afin(Lineer) Konneksiyon ve Kovaryant Türev

Tanım 2.8.1: M_n, C^∞ sınıfından n-boyutlu bir manifold ve M_n üzerindeki vektör alanlarının kümesi $\Im^1_0(M_n)$ olmak üzere, $\forall X,Y,Z \in \Im^1_0(M_n)$ ve $\forall\, f,\, g \in C^\infty(M_n,\mathbb{R})$ için

$$\nabla : \Im^1_0(M_n)\times\Im^1_0(M_n) \to \Im^1_0(M_n)$$

$$(X,Y) \to \nabla(X,Y) = \nabla_X Y$$

işlemi,

$i)$ $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$

$ii)$ $\nabla_X (Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

$iii)$ $\nabla_X (fY) = (Xf)Y + f\,\nabla_X Y$

şartlarını sağlıyorsa ∇ dönüşümüne afin veya lineer konneksiyon; (M_n,∇) çiftine ise afin konneksiyonlu uzay adı verilir (Hicks 1971; O' Neill 1983).

Tanım 2.8.2: ∇, C^∞ sınıfından M_n manifoldu üzerinde bir afin konneksiyon olmak üzere, $\forall\, X,Y \in \Im^1_0(M_n)$, $\forall\, t \in \Im^p_q(M_n)$ ve $\forall\, f,g \in C^\infty(M_n,\mathbb{R})$ için,

$$D = \nabla_X : \Im(M_n) \to \Im(M_n)$$

diferensiyelleme işlemi,

$i)\quad \nabla_{fX+gY}\, t = f\nabla_X t + g\nabla_Y t$

$ii)\quad \nabla_X f = Xf$

şartlarını sağlıyorsa, ∇_X e X vektör alanı yönündeki kovaryant türev adı verilir (Salimov ve Mağden 2008).

Tanım 2.8.3: ∇, M_n manifoldu üzerinde bir afin konneksiyon ve (U,φ), M_n manifoldunun (x^i) yerel koordinatlarına sahip bir haritası olsun. $\frac{\partial}{\partial x^i} = \partial_i$ doğal vektör alanı olmak üzere, $\nabla_{\partial_i} = \nabla_i$ gösterimini göz önüne alalım. ∇_i kovaryant türevini, ∂_j vektör alanına uygularsak

$$\nabla_i \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k$$

olacak şekilde yeni bir vektör alanı elde ederiz. Burada $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k(x)$, U komşuluğunda tayin edilmiş olan C^∞ sınıfından fonksiyonlardır. Γ_{ij}^k fonksiyonlarına ∇ konneksiyonun katsayıları veya 2. tür Christoffel sembolleri denir.

$\nabla_i \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k$ ifadesini yeni bir koordinat sistemine geçerek de ifade edebiliriz. Bu yeni koordinat sistemindeki yerel koordinatlar $x^{i'} = x^{i'}(x^i)$ biçiminde olsun. Bu taktirde,

$$\nabla_{i'} \partial_{j'} = \Gamma_{i'j'}^{k'} \partial_{k'}$$

olarak yazabiliriz. Yeni koordinatlarda $\partial_{i'} = \frac{\partial}{\partial x^{i'}}$ olacağından,

$$\Gamma^{k'}_{i'j'}\partial_{k'} = \nabla_{i'}\partial_{j'} = \nabla_{\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial}{\partial x^i}}\partial_{j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\nabla_{\partial_i}\partial_{j'}$$

$$= \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\nabla_{\partial_i}\left(\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

$$= \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\right)\frac{\partial}{\partial x^j} + \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\nabla_{\partial_i}\partial_j\right]$$

$$= \frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}\frac{\partial}{\partial x^j} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\Gamma^k_{ij}\partial_k, \quad j \mapsto k \text{ yazılırsa,}$$

$$\Rightarrow \left(\Gamma^{k'}_{i'j'}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\right)\frac{\partial}{\partial x^k} = \left(\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}}\Gamma^k_{ij}\right)\frac{\partial}{\partial x^k}$$

$$\Rightarrow \left(\Gamma^{k'}_{i'j'}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\right) = \left(\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}}\Gamma^k_{ij}\right)$$

$$\Rightarrow \Gamma^{k'}_{i'j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\Gamma^k_{ij} + \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}$$

$$\Rightarrow \Gamma^{k'}_{i'j'} = A^i_{i'}A^j_{j'}A^{k'}_k\Gamma^k_{ij} + A^{k'}_k A^k_{i'\,j'}$$

eşitliği elde edilir. Bu ifadeye konneksiyon dönüşüm kuralı adı verilir.

Şimdi ilk olarak bir vektör alanının kovaryant türevini koordinatlarla yazalım. $X = X^i\partial_i$ ve $Y = Y^j\partial_j$ olmak üzere,

$$\nabla_X Y = \nabla_{X^i\partial_i}(Y^j\partial_j) = X^i\nabla_{\partial_i}(Y^j\partial_j)$$

$$= X^i((\partial_i Y^j)\partial_j + Y^j\nabla_i\partial_j)$$

$$= X^i((\partial_i Y^j)\partial_j + Y^j\Gamma^k_{ij}\partial_k)$$

$$= X^i(\partial_i Y^k + \Gamma_{ij}^k Y^j)\partial_k$$

olmak üzere $X = X^i \partial_i = \delta_s^i \partial_i = \partial_s$ (yani $X^i = \delta_s^i$) olarak alınırsa,

$$(\nabla_{\partial_s} Y)^k \partial_k = \delta_s^i(\partial_i Y^k + \Gamma_{ij}^k Y^j)\partial_k$$

$$(\nabla_s Y)^k = \partial_s Y^k + \Gamma_{sj}^k Y^j \tag{2.5}$$

elde edilir. Bu ise Y vektör alanının kovaryant türevinin koordinatlarla ifadesidir.

İkinci olarak bir kovektör alanının kovaryant türevini koordinatlarla yazalım. $w \in \Im_1^0$ ve $X, Y \in \Im_0^1$ için,

$$w(Y) = C_1^1(w \otimes Y) \Rightarrow \nabla_X(w(Y)) = \nabla_X[C_1^1(w \otimes Y)]$$

$$= C_1^1[\nabla_X(w \otimes Y)]$$

$$= C_1^1[(\nabla_X w) \otimes Y + w \otimes (\nabla_X Y)]$$

$$= (\nabla_X w)Y + w(\nabla_X Y)$$

olmak üzere,

$$(\nabla_X w)Y = \nabla_X(w(Y)) - w(\nabla_X Y)$$

$$(\nabla_X w)Y = X(w(Y)) - w(\nabla_X Y)$$

olup $X = \partial_i$ ve $Y = \partial_j$ yazılırsa

$$(\nabla_i w)(\partial_j) = \partial_i(w(\partial_j)) - w(\nabla_i \partial_j)$$

$$= \partial_i w_j - w\Gamma_{ij}^k \partial_k$$

$$\nabla_i w_j = \partial_i w_j - \Gamma_{ij}^k w_k \tag{2.6}$$

elde edilir.

Son olarak keyfi (p,q) tipli t tensörünün yerel koordinatlarda kovaryant türevi,

$$\nabla_k t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = \partial_k t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} + \sum_{\mu=1}^{p} \Gamma_{km}^{i_\mu} t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots m \dots i_p} - \sum_{\lambda=1}^{q} \Gamma_{k j_\lambda}^{m} t_{j_1 \dots m \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$$

şeklindedir.

2.9. Burulma ve Eğrilik Tensörleri

(M_n, ∇) afin konneksiyonlu uzayında $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ fonksiyonun tam diferensiyelinin $df = \partial_i f dx^i$ şeklinde olduğu ve bir kovektör (1- form) belirttiği (2.5). alt başlıkta ifade edilmişti. df ye koordinatları $f_i = \partial_i f$ olan kovektör karşılık gelir. Schwarz teoremine göre f sürekli bir fonksiyon olduğundan f için ikinci türevler sıraya bağlı olmayıp yer değiştirebilir. Dolayısıyla,

$$\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f \Rightarrow \partial_i f_j = \partial_j f_i$$

yazılır. f_i nin kovektör olmasından dolayı yer değiştirme özelliğinin kovaryant türevler için de geçerli olup olmadığı düşünülebilir. (2.6) eşitliğinden

$$\nabla_j f_i = \partial_j f_i - \Gamma_{ji}^k f_k \quad \text{ve} \quad \nabla_i f_j = \partial_i f_j - \Gamma_{ij}^k f_k$$

olmak üzere kovaryant türevlerin farkları alınırsa

$$\nabla_j f_i - \nabla_i f_j = \partial_j f_i - \Gamma_{ji}^k f_k - (\partial_i f_j - \Gamma_{ij}^k f_k)$$

$$= (\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}) f_k = T^k_{ij} f_k \tag{2.7}$$

bulunur (Şuhubi 2008; Altunbaş 2014).

Tanım 2.9.1: (2.7) eşitliğindeki (1,2) tipli $T^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}$ tensörüne ∇ konneksiyonun burulma tensörü adı verilir. $T^k_{ij} = -T^k_{ji}$ olduğu açıktır.

Burulma tensörü sıfır olan uzaylara burulmasız uzaylar adı verilir. Bu tür uzaylarda konneksiyon katsayıları

$$T^k_{ij} = 0 \Leftrightarrow \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji} = 0$$

olmak üzere simetriktir $(\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji})$. Bu da ∇ konneksiyonunun simetrik olması anlamına gelir. Burulma tensörünün invaryant formdaki yazılışı ise,

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y], \qquad \forall X,\ Y \in \Im^1_0(M)$$

şeklindedir (Kobayashi and Nomizu 1963; Hicks 1971) Dolayısıyla

$$T(X,Y) = 0 \Leftrightarrow \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$$

olduğu görülür.

Yukarıda burulma tensörünü elde etmek için f fonksiyonuna uygulanan işlemleri keyfi $v = v^i \partial_i$ vektörü için tatbik edelim. (2.5) eşitliğinden $v = v^i \partial_i$ vektörünün kovaryant türevi $\nabla_s v^i = \partial_s v^i + \Gamma^i_{sk} v^k$ şeklinde idi. (1,1) tipli $\nabla_s v^i$ kovaryant türevinin tekrar kovaryant türevi alınırsa

$$\nabla_r \nabla_s v^i = \partial_r \nabla_s v^i + \Gamma^i_{rm} \nabla_s v^m - \Gamma^m_{rs} \nabla_m v^i$$

$$= \partial_r(\partial_s v^i + \Gamma^i_{sk} v^k) + \Gamma^i_{rm}(\partial_s v^m + \Gamma^m_{sk} v^k) - \Gamma^m_{rs} \nabla_m v^i$$

$$= \partial^2_{rs} v^i + (\partial_r \Gamma^i_{sk}) v^k + \Gamma^i_{sk}(\partial_r v^k) + \Gamma^i_{rm} \partial_s v^m + \Gamma^i_{rm} \Gamma^m_{sk} v^k - \Gamma^m_{rs} \nabla_m v^i$$

$$= \partial^2_{rs} v^i + (\partial_r \Gamma^i_{sk} + \Gamma^i_{rm} \Gamma^m_{sk}) v^k + \Gamma^i_{sk}(\partial_r v^k) + \Gamma^i_{rm} \partial_s v^m - \Gamma^m_{rs} \nabla_m v^i \qquad (2.8)$$

ve benzer olarak

$$\nabla_s \nabla_r v^i = \partial^2_{sr} v^i + (\partial_s \Gamma^i_{rk} + \Gamma^i_{sm} \Gamma^m_{rk}) v^k + \Gamma^i_{rk}(\partial_s v^k) + \Gamma^i_{sm} \partial_r v^m - \Gamma^m_{sr} \nabla_m v^i \qquad (2.9)$$

bulunur.. (2.8) eşitliğinden (2.9) eşitliğinin çıkarılmasıyla

$$\nabla_r \nabla_s v^i - \nabla_s \nabla_r v^i = (\partial_r \Gamma^i_{sk} - \partial_s \Gamma^i_{rk} + \Gamma^i_{rm} \Gamma^m_{sk} - \Gamma^i_{sm} \Gamma^m_{rk}) v^k - (\Gamma^m_{rs} \nabla_m v^i - \Gamma^m_{sr} \nabla_m v^i)$$

olmak üzere

$$\nabla_{[r} \nabla_{s]} v^i = R^i_{rsk} v^k - T^k_{rs} \nabla_k v^i \qquad (2.10)$$

elde edilir. Bu eşitliğe v^i vektör alanı için Ricci özdeşliği denir. Burada

$$R^i_{rsk} = \partial_r \Gamma^i_{sk} - \partial_s \Gamma^i_{rk} + \Gamma^i_{rm} \Gamma^m_{sk} - \Gamma^i_{sm} \Gamma^m_{rk} \qquad (2.11)$$

şeklindedir (Şuhubi 2008; Altunbaş 2014).

Tanım 2.9.2: (2.10) da elde edilen R^i_{rsk} tensörüne ∇ konneksiyonunun eğrilik tensörü denir.

$\forall\, X, Y, Z \in \Im^1_0(M_n)$ için eğrilik tensörünün invaryant yazılımı

$$R(X,Y,Z) = [\nabla_X, \nabla_Y]Z - \nabla_{[X,Y]}Z$$

$$= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \qquad (2.12)$$

şeklindedir (Kobayashi and Nomizu 1963).

(2.11) eşitliğinden

$$R(X,Y,Z) = -R(Y,X,Z)$$

olduğu görülür. Bu eşitliği koordinatlarla

$$R_{ijk}{}^{s} = -R_{jik}{}^{s}$$

veya

$$R_{(ij)k}{}^{s} = 0$$

şeklinde yazabiliriz. Yani, eğrilik tensörü alttaki ilk iki indise göre antisimetriktir.

Teorem 2.9.1: M_n, C^∞ sınıfından bir manifold ve ∇, bu manifold üzerinde simetrik bir afin konneksiyon olsun. (M_n, ∇) burulmasız uzayında konneksiyonun R eğrilik tensörü aşağıdaki özelliklere sahiptir.

1) $R_{[ijk]}{}^{s} = \frac{1}{3}(R_{ijk}{}^{s} + R_{jki}{}^{s} + R_{kij}{}^{s}) = 0$ (1. Bianchi özdeşliği)

2) $\nabla_{[l} R_{ij]k}{}^{s} = \frac{1}{3}(\nabla_l R_{ijk}{}^{s} + \nabla_l R_{jki}{}^{s} + \nabla_l R_{kij}{}^{s}) = 0$ (2. Bianchi özdeşliği)

2. Bianchi özdeşliği, Bianchi-Padov özdeşliği olarak da bilinir.

2.10. Riemann Manifoldu

Tanım 2.10.1: C^{∞} sınıfından bir M_n manifoldu üzerinde tanımlı,

$$g : \Im_0^1(M_n) \times \Im_0^1(M_n) \to C^{\infty}(M_n, \mathbb{R})$$

g bilineer formu (veya (0,2) tipli tensörü) $\forall X, Y \in \Im_0^1(M_n)$ için,

$i)$ $g(X,Y) = g(Y,X)$ (simetriklik)

$ii)$ $g(X,X) \geq 0$ ve $g(X,X) = 0 \Leftrightarrow X = \vec{0}$ (pozitif tanımlılık)

şartlarını sağlarsa g ye Riemann metriği veya metrik tensör adı verilir. (M_n, g) ikilisine ise Riemann manifoldu denir (Yano and Kon 1984).

Manifold üzerinde Riemann metriğinin tanımlı olması bir vektör alanının uzunluğunu ve iki vektör alanı arasındaki açıyı tanımlamayı mümkün kılmaktadır. Ayrıca bu metrik tensör ile manifold üzerinde tanımlı bir tensörün kovaryant ve kontravaryant bileşenleri arasında geçiş yapılabilir

(U, φ) haritasındaki $\{x^1, ..., x^n\}$ yerel koordinatlarına göre, g metriğinin kovaryant ve kontravaryant bileşenleri sırasıyla $g(\partial_i, \partial_j) = g_{ij}$ ve $g(dx^i, dx^j) = g^{ij}$ şeklinde olup

$$g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k$$

olur.

Tanım 2.10.2: ∇, (M_n, g) Riemann manifoldu üzerinde bir afin konneksiyon olmak üzere,

$$\nabla g = 0$$

ise, ∇ konneksiyonuna metrik konneksiyon adı verilir (Yano and Kon 1984).

Teorem 2.10.1: (M_n, g) Riemann manifoldu üzerinde,

$i)$ $T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = 0$

$ii)$ $\nabla g = 0$

şartlarını sağlayan bir ve yalnız bir afin konneksiyon vardır (Yano and Kon 1984).

Tanım 2.10.3: Teorem 2.10.1'de ifade edilen burulmasız metrik konneksiyona Levi-Civita veya Riemann konneksiyonu adı verilir (Yano and Kon 1984).

Teorem 2.10.2: (M_n, g) Riemann manifoldu ve $\forall X,Y,Z \in \Im_0^1(M)$ olmak üzere, Levi-Civita konneksiyonu olan ∇ için Koszul formülü adı verilen

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) \\ &\quad - g(X,[Y,Z]) + g(Y,[Z,X]) + g(Z,[X,Y]) \end{aligned}$$

denklemi geçerlidir. Bu denklemde $X = \partial_i$, $Y = \partial_j$, $Z = \partial_k$ alınırsa

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{\partial_i}\partial_j, \partial_k) &= \partial_i g(\partial_j, \partial_k) + \partial_j g(\partial_k, \partial_i) - \partial_k g(\partial_i, \partial_j) \\ &\quad - g(\partial_i, [\partial_j, \partial_k]) + g(\partial_j, [\partial_k, \partial_i]) + g(\partial_k, [\partial_i, \partial_j]) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2g(\Gamma_{ij}^h \partial_h, \partial_k) = \partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij}$$

$$\Rightarrow 2\Gamma_{ij}^{h} g_{hk} = \partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij}$$

$$\Rightarrow \Gamma_{ij}^{h} = \frac{1}{2} g^{hk} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij}) \tag{2.13}$$

elde edilir. Bulunan Γ_{ij}^{h} fonksiyonlarına Levi-Civita konneksiyonunun katsayıları denir.

Tanım 2.10.3: ∇, (M_n, g) Riemann manifoldu üzerindeki Levi-Civita konneksiyonu olsun. $\forall\ X, Y, Z \in \Im_0^1(M)$ için

$$R(X,Y,Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

olarak tanımlanan $(1,3)$ tipli R tensörüne, Levi-Civita konneksiyonunun Riemann eğrilik tensörü adı verilir.

Tanım 2.10.4: Bir (M_n, g) Riemann manifoldunun Riemann eğrilik tensörü (R) özdeş olarak sıfır ise M_n ye flat (düz) manifold denir (Wilkins 2005; Altunbaş 2014).

Herhangi bir afin konneksiyonun eğrilik tensörünün aksine, $(1,3)$ tipli Riemann eğrilik tensörünün kontravaryant indisi indirilerek $(0,4)$ tipli kovaryant tensör elde edilebilir. Yani,

$$R_{ijk}^{\ \ \ m} g_{ml} = R_{ijkl}$$

şeklindedir.

Teorem 2.10.3: $(0,4)$ tipli Riemann eğrilik tensörü aşağıdaki özelliklere sahiptir.

1) $R_{ijkl} = -R_{jikl}$

2) $R_{ijkl} = -R_{ijlk}$

3) $R_{ijkl} = R_{klij}$

4) $R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0$

5) $\nabla_{[s} R_{ij]kl} = 0$

Tanım 2.10.5: $(1,3)$ tipli $R_{ijk}^{\ \ \ l}$ eğrilik tensörüne kontraksiyon uygulanarak elde edilen $(0,2)$ tipli

$$C_1^1(R_{ijk}^{\ \ \ l}) = R_{ljk}^{\ \ \ l} = R_{jk}$$

tensörüne Ricci (eğrilik) tensörü denir (Kühnel 2005).

Tanım 2.10.6: Bir (M_n, g) Riemann manifoldunun $(0,2)$ tipli Ricci eğrilik tensörü R,

$$\nabla R = 0$$

şartını sağlarsa, (M_n, g) Riemann manifoldu lokal Ricci simetriktir.

Tanım 2.10.7: Ricci tensörünün tam kontraksiyonu sonucu elde edilen tensöre, skaler eğrilik denir ve τ ile gösterilir. Buna göre,

$$\tau = g^{jk} R_{jk}$$

şeklindedir (Karaman 2015).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Tanjant Demet

Tanım 3.1.1: M_n, C^∞ sınıfından n-boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold ve M_n manifoldunun p noktasındaki tanjant uzay $T_p(M_n)$ olmak üzere,

$$T(M_n) = \bigcup_{p \in M} T_p(M_n)$$

şeklinde tanımlanan $T(M_n)$ kümesine, M_n manifoldu üzerindeki tanjant demet denir.

$T(M_n)$ nin herhangi bir $\tilde{p} \in T_p(M_n)$ noktası için $(\tilde{p} \to p)$ ilişkisi, M_n manifoldu üzerindeki $T(M_n)$ nin tabii demet yapısını gösteren

$$\begin{aligned} \pi : T(M_n) &\to M_n \\ \tilde{p} &\to \pi(\tilde{p}) = p \end{aligned}$$

demet izdüşümünü belirler. $\pi^{-1}(p) = \tilde{p} \in T_p(M_n)$ kümesine ise M_n baz manifoldunun p noktasındaki fibresi adı verilir (Yano and Ishihara 1973).

(x^h), U koordinat komşuluğundaki yerel koordinatlar olmak üzere; M_n baz manifoldu $\{U; x^h\}$ koordinat komşuluklar sistemiyle örtülmüş olsun. $\pi^{-1}(U) \subset T(M_n)$ açık kümesi için $\psi : \pi^{-1}(U) \subset T(M_n) \to U \times \mathbb{R}^n$ dönüşümü diferensiyellenebilir bir homeomorfizm olur. Burada $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}$ üzerindeki n-boyutlu vektör uzayıdır.

$\tilde{p} \in T_p(M_n)$ noktası, (p, X) sıralı çifti ile gösterilir. $X \in \mathbb{R}^n$ vektörünün bileşenleri, $\left\{\partial_h = \frac{\partial}{\partial x^h}\right\}$ doğal bazına göre $T_p(M_n)$ tanjant uzayındaki $\tilde{p}$ noktasının $(y^h) = (x^{\bar{h}})$ $(\bar{h} = n+1,..., 2n)$ kartezyen koordinatları ile verilir. Yani $X \in \mathbb{R}^n$ vektörü,

$$X = y^h \partial_{\bar{h}} = x^{\bar{h}} \partial_{\bar{h}}$$

şeklinde yazılabilir.

U koordinat komşuluğundaki $p = \pi(\tilde{p})$ noktasının koordinatları (x^h) $(h = 1,..., n)$ ile gösterilir ve $(x^h, y^h) \mapsto \tilde{p}$ ilişkisi dikkate alınırsa $\pi^{-1}(U) \subset T(M_n)$ açık kümesinde (x^h, y^h) yerel koordinatlar sistemi elde edilir. Burada $(x^h, y^h) = (x^h, x^{\bar{h}})$ sistemine, (x^h) yerel koordinatlarından indirgenmiş (elde edilmiş) koordinatlar (veya $\pi^{-1}(U)$ daki indirgenmiş koordinatlar) denir.

M_n manifoldu üzerinde $p = \pi(\tilde{p})$ noktasını ihtiva eden diğer bir koordinat komşuluğu $\{U'; x^{h'}\}$ olmak üzere $\tilde{p} \in \pi^{-1}(U')$ dir. $\pi^{-1}(U')$ ye göre $\tilde{p}$ nin indirgenmiş koordinatları $(x^{h'}, y^{h'})$ olarak verilsin. Koordinatlar arasındaki dönüşüm,

$$\begin{cases} x^{h'} = x^{h'}(x^h) \\ y^{h'} = \dfrac{\partial x^{h'}}{\partial x^h} y^h \end{cases} \tag{3.1}$$

şeklindedir. $x^{h'}(x^h)$, p noktasındaki $x^1,..., x^n$ değişkenlerinin C^∞ sınıfından olan diferensiyellenebilir fonksiyonlarıdır. $x^{\bar{h}} = y^h$, $x^{\bar{h}'} = y^{h'}$ gösterimini kullanarak (3.1) dönüşümü

$$x^{H'} = x^{H'}(x^H), \quad H = (h, \bar{h}),\ h = 1,..., n;\ \ \bar{h} = n+1,..., 2n$$

olarak ifade edilebilir. (3.1) koordinat dönüşümünün Jakobiyeni,

$$\left(\frac{\partial x^{H'}}{\partial x^{H}}\right)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x^{h'}}{\partial x^{h}} & \dfrac{\partial x^{h'}}{\partial x^{\bar{h}}}\\ \dfrac{\partial x^{\bar{h}'}}{\partial x^{h}} & \dfrac{\partial x^{\bar{h}'}}{\partial x^{\bar{h}}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x^{h'}}{\partial x^{h}} & 0\\ \dfrac{\partial^2 x^{h'}}{\partial x^{h}\partial x^{s}}y^{s} & \dfrac{\partial x^{h'}}{\partial x^{h}}\end{pmatrix}$$

matrisi şeklindedir. (3.1) dönüşümünün tersi ise,

$$\begin{cases} x^{h}=x^{h}(x^{h'})\\ y^{h}=\dfrac{\partial x^{h}}{\partial x^{h'}}y^{h'}\end{cases} \tag{3.2}$$

veya

$$x^{H}=x^{H}(x^{H'}),\quad H=1,...,n,n+1,...,2n$$

olarak yazılır. (3.2) dönüşümünün Jakobiyeni ise,

$$\left(\frac{\partial x^{H}}{\partial x^{H'}}\right)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x^{h}}{\partial x^{h'}} & 0\\ \dfrac{\partial^2 x^{h}}{\partial x^{h'}\partial x^{s'}}y^{s'} & \dfrac{\partial x^{h}}{\partial x^{h'}}\end{pmatrix}$$

matrisi şeklindedir.

Sonuç 3.1.1: $Det(\dfrac{\partial x^{h'}}{\partial x^{h}})\neq 0 \Rightarrow Det\left(\dfrac{\partial x^{H'}}{\partial x^{H}}\right)\neq 0$ ve $Det(\dfrac{\partial x^{h}}{\partial x^{h'}})\neq 0 \Rightarrow Det\left(\dfrac{\partial x^{H}}{\partial x^{H'}}\right)\neq 0$

olmak üzere, $Det\left(\dfrac{\partial x^{H'}}{\partial x^{H}}\right)>0$ ve $Det\left(\dfrac{\partial x^{H}}{\partial x^{H'}}\right)>0$ olacağından (3.1) ve (3.2) denklemleri $T(M_n)$ tanjant demetinin daima yönlendirilebilir olduğunu gösterir.

M_n manifoldu üzerindeki C^{∞} sınıfından (r,s) tipli tüm tensör alanlarının kümesini $\Im_s^r(M_n)$ ve M_n deki tüm tensör alanlarının kümesini de $\Im(M_n)=\sum_{r,s=0}^{\infty}\Im_s^r(M_n)$ olarak göstereceğiz. Benzer olarak $T(M_n)$ tanjant demetindeki (r,s) tipli tüm tensör alanlarının kümesini $\Im_s^r(T(M_n))$ ve $T(M_n)$ deki tüm tensör alanlarının kümesini de $\Im(T(M_n))$ ile göstereceğiz (Yano and Ishihara 1973).

3.2. Fonksiyonun Dikey (Vertikal) Lifti

Tanım 3.2.1: f, M_n de bir fonksiyon olsun. $f : M_n \to \mathbb{R}$ ve $\pi : T(M_n) \to M_n$ olmak üzere,

$$^{V}f = f \circ \pi \,,\ ^{V}f : T(M_n) \to \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona f fonksiyonunun dikey lifti denir.

$\tilde{p} \in \pi^{-1}(U)$ noktasının indirgenmiş koordinatları $\tilde{p} = (x^i, y^i) = (x^i, x^{\bar{i}})$ olmak üzere,

$$^{V}f(\tilde{p}) = {}^{V}f(x,y) = f \circ \pi(\tilde{p}) = f(p) = f(x) \tag{3.3}$$

olacağından $^{V}f(\tilde{p})$ değeri her bir fibre boyunca sabittir ve $p = \pi(\bar{p}) \in M_n$ noktasındaki $f(p)$ değerine eşittir (Yano and Ishihara 1973).

Teorem 3.2.1: $f, g \in \Im_0^0(M_n)$ olmak üzere,

$i)$ $\ ^{V}(f+g) = {}^{V}f + {}^{V}g$

$ii)$ $\ ^{V}(f.g) = {}^{V}f . {}^{V}g$

şeklindedir.

Tanjant demette farklı bir şekilde de fonksiyon tanımlanabilir. $\omega \in \Im_1^0(M_n)$ olmak üzere, ι operatörünü kullanarak $T(M_n)$ tanjant demette $\iota\omega$ fonksiyonunu yazalım. M_n in bir U koordinat komşuluğunda ω yerel olarak $\omega = \omega_i dx^i$ şeklinde ifade edilebildiğine göre, $\pi^{-1}(U) \subset T(M_n)$ deki indirgenmiş koordinatlara göre $\iota\omega \in \Im_0^0(T(M_n))$ fonksiyonu,

$$\iota\omega = \omega_s y^s$$

olarak yazılır. Böylece f, M_n de bir fonksiyon ise $df \in \Im_1^0(M_n)$ olmak üzere, $\iota(df)$ fonksiyonu $\pi^{-1}(U) \subset T(M_n)$ deki indirgenmiş koordinatlara göre,

$$\iota(df) = (\partial_s f) y^s$$

şeklinde ifade edilir (Yano and Ishihara 1973).

3.3. Vektör Alanının Dikey (Vertikal) Lifti

Tanım 3.3.1 (Dikey Vektör Alanı): $\tilde{X} \in \Im_0^1(T(M_n))$ ve $\forall f \in \Im_0^0(M_n)$ için $\tilde{X}\ {}^V f = 0$ ise $\tilde{X}$ e dikey vektör alanı denir. $\tilde{X}$ vektör alanının indirgenmiş koordinatlara göre bileşenleri $\begin{pmatrix} \tilde{X}^i \\ \tilde{X}^{\bar{i}} \end{pmatrix}$ olmak üzere, bileşenler

$$\begin{aligned}
\tilde{X}\ {}^V f = 0 &\Rightarrow \tilde{X}^I \partial_I\ {}^V f = 0 \\
&\Rightarrow \tilde{X}^i \partial_i\ {}^V f + \tilde{X}^{\bar{i}} \partial_{\bar{i}}\ {}^V f = 0 \\
&\Rightarrow \tilde{X}^i \partial_i f + \tilde{X}^{\bar{i}} \partial_{\bar{i}} f = 0 \\
&\Rightarrow \tilde{X}^i = 0, \quad \tilde{X}^{\bar{i}} \neq 0
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Yani, $\tilde{X} = \begin{pmatrix} \tilde{X}^{i} \\ \tilde{X}^{\bar{i}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{X}^{\bar{i}} \end{pmatrix}$ şeklindedir.

Tanım 3.3.2. (Vektör Alanının Dikey Lifti): $X \in \Im_0^1(M_n)$ ve $\omega \in \Im_1^0(M_n)$ olmak üzere $T(M_n)$ tanjant demette,

$$ {}^{V}X(\iota\omega) = {}^{V}(\omega(X)) $$

şeklinde tanımlanan ${}^{V}X$ vektör alanına, X vektör alanının dikey lifti denir. ${}^{V}X$ vektör alanının indirgenmiş koordinatlara göre bileşenleri,

$$ {}^{V}X(\iota\omega) = {}^{V}(\omega(X)) \Rightarrow {}^{V}X^{J}\partial_{J}(\iota\omega) = {}^{V}(\omega_j X^{j}) $$

$$ \Rightarrow {}^{V}X^{j}\partial_{j}(\omega_s y^{s}) + {}^{V}X^{\bar{j}}\partial_{\bar{j}}(\omega_s y^{s}) = \omega_j X^{j} $$

$$ \Rightarrow {}^{V}X^{j}((\partial_{j}\omega_s)y^{s} + \omega_s(\partial_{j}y^{s})) + {}^{V}X^{\bar{j}}((\partial_{\bar{j}}\omega_s)y^{s} + \omega_s(\partial_{\bar{j}}y^{s})) = \omega_j X^{j} $$

$$ \Rightarrow {}^{V}X^{j} = 0, \quad {}^{V}X^{\bar{j}} = X^{j} $$

$$ \Rightarrow {}^{V}X = \begin{pmatrix} {}^{V}X^{j} \\ {}^{V}X^{\bar{j}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ X^{j} \end{pmatrix} \tag{3.4} $$

şeklindedir (Yano and Ishihara 1973).

Sonuç 3.3.1: O halde bir vektör alanının dikey lifti, bir dikey vektör alanıdır.

Sonuç 3.3.2: ${}^{V}X = \begin{pmatrix} 0 \\ X^{j} \end{pmatrix} \Rightarrow {}^{V}\left(\dfrac{\partial}{\partial x^{i}}\right) = {}^{V}(\partial_i) = \partial_{\bar{i}}$ dir.

Teorem 3.3.1: $f \in \Im_0^0(M_n)$ ve $X, Y \in \Im_0^1(M_n)$ olmak üzere,

$i)\ {}^{V}(X+Y)={}^{V}X+{}^{V}Y$

$ii)\ {}^{V}(fX)={}^{V}f\,{}^{V}X$

$iii)\ [{}^{V}X,{}^{V}Y]=0$

şeklindedir (Yano and Ishihara 1973).

3.4. 1-formun Dikey (Vertikal) Lifti

Tanım 3.4.1 (Dikey 1-form): $\tilde{\omega}\in\Im_1^0\left(T\left(M_n\right)\right)$ ve $\forall X\in\Im_0^1\left(M_n\right)$ için $\tilde{\omega}({}^{V}X)=0$ ise $\tilde{\omega}$ ya dikey 1-form denir. $\tilde{\omega}$ nın indirgenmiş koordinatlara göre bileşenleri $(\tilde{\omega}_i,\tilde{\omega}_{\bar{i}})$ olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
\tilde{\omega}({}^{V}X)=0 &\Rightarrow \tilde{\omega}_I({}^{V}X)^I=0\\
&\Rightarrow \tilde{\omega}_i({}^{V}X)^i+\tilde{\omega}_{\bar{i}}({}^{V}X)^{\bar{i}}=0\\
&\Rightarrow \tilde{\omega}_i\neq 0,\quad \tilde{\omega}_{\bar{i}}=0\\
&\Rightarrow \tilde{\omega}=(\tilde{\omega}_i,\tilde{\omega}_{\bar{i}})=(\tilde{\omega}_i,0)
\end{aligned}
$$

şeklindedir.

Tanım 3.3.2. (1-formun Dikey Lifti):

(i) $f\in\Im_0^0(M_n)$ için $df\in\Im_1^0(M_n)$ olup tanjant demete df 1- formunun dikey lifti,

$$
{}^{V}(df)=d({}^{V}f) \tag{3.5}
$$

şeklinde tanımlanır.

$(ii)\quad f,g \in \Im_0^0(M_n)$ için tanjant demete (gdf) 1- formunun dikey lifti,

$$^V(gdf)={}^Vg\ {}^V(df)={}^Vg\ (d^Vf) \tag{3.6}$$

şeklinde tanımlanır.

Bu hazırlıklardan sonra $\omega \in \Im_1^0(M_n)$ 1- formunun $^V\omega$ dikey liftini tanımlayalım.

(iii) $\omega = \omega_i dx^i$ olmak üzere $\omega \in \Im_1^0(M_n)$ 1- formunun $^V\omega \in T(M_n)$ dikey lifti,

$$^V\omega = {}^V(\omega_i)^V(dx^i)$$

olarak tanımlanır. (3.3), (3.5) ve (3.6) eşitliklerini dikkate alarak $^V\omega$ dikey lifti $T(M_n)$ tanjant demette indirgenmiş koordinatlara göre,

$$\begin{aligned}
{}^V\omega = {}^V(\omega_i)^V(dx^i) &\Rightarrow {}^V(\omega_i dx^i) = {}^V(\omega_i)^V(dx^i) \\
&\Rightarrow {}^V\omega_i(d^Vx^i) = {}^V\tilde{\omega}_i{}^Vdx^i + {}^V\tilde{\omega}_{\bar{i}}{}^Vdx^{\bar{i}} \\
&\Rightarrow \omega_i dx^i = {}^V\tilde{\omega}_i dx^i + {}^V\tilde{\omega}_{\bar{i}} dx^{\bar{i}} \\
&\Rightarrow {}^V\tilde{\omega}_i = w_i, \quad {}^V\tilde{\omega}_{\bar{i}} = 0 \\
&\Rightarrow {}^V\omega = (\omega_i, 0)
\end{aligned}$$

bileşenlerine sahiptir (Yano and Ishihara 1973).

Sonuç 3.4.1: $^V\omega = (\omega_i, 0) \Rightarrow {}^V(dx^i) = dx^i$ dir.

Teorem 3.4.1: $f \in \Im_0^0(M_n)$ ve $\omega, \theta \in \Im_1^0(M_n)$ olmak üzere,

$i)$ ${}^V(f\omega) = {}^V f . {}^V\omega$

$ii)$ ${}^V(\omega + \theta) = {}^V\omega + {}^V\theta$

şeklindedir.

3.5. Tensör Alanlarının Dikey Lifti

M_n manifoldu üzerindeki keyfi $P, Q, R \in \Im(M_n)$ tensör alanlarının dikey lifti,

$$ {}^V(P \otimes Q) = {}^V P \otimes {}^V Q, \qquad {}^V(P + R) = {}^V P + {}^V R $$

şartları sağlayacak şekilde tanımlanır (Yano and Ishihara 1973).

3.6. γ Operatörü

$S \in \Im_{q+1}^p(M_n)$ tensör alanı koordinatlarla,

$$ S = S_{l\, j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \otimes dx^l \otimes dx^{j_1} \dots \otimes dx^{j_q} $$

olarak verilsin. $\pi^{-1}(U)$ da $\left(x^h, y^h\right)$ indirgenmiş koordinatlarına göre γ operatörü,

$$ \gamma_X S = (X^l S_{l\, j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}) \frac{\partial}{\partial y^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial y^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \dots \otimes dx^{j_q} $$

ve

$$ \gamma S = (y^l S_{l\, j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}) \frac{\partial}{\partial y^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial y^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \dots \otimes dx^{j_q} $$

şeklinde tanımlanır. Burada $\gamma_X S$ ve γS , $T(M_n)$ tanjant demette birer tensör alanıdır. Eğer $S \in \Im_0^0(M_n) \Rightarrow \gamma_X S = \gamma S = 0$ olarak kabul edilir (Yano and Ishihara 1973).

3.7. Fonksiyonun Tam (Complete) Lifti

Tanım 3.7.1: M_n manifoldu üzerinde $f : M_n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $T(M_n)$ tanjant demette,

$$^{C}f = \iota(df)$$

ile tanımlanan ^{C}f fonksiyonuna f fonksiyonunun tam lifti denir. ^{C}f fonksiyonu indirgenmiş koordinatlara göre yerel olarak

$$^{C}f = \iota(df) = y^s(\partial_s f) = \partial f \tag{3.7}$$

şeklinde ifade edilir (Yano and Ishihara 1973).

Teorem 3.7.1: $f, g \in \Im_0^0(M_n)$ olmak üzere,

$i)$ $^{C}(f+g) = {}^{C}f + {}^{C}g$

$ii)$ $^{C}(f.g) = {}^{C}f.{}^{V}g + {}^{V}f.{}^{C}g$

şeklindedir.

3.8. Vektör Alanının Tam (Complete) Lifti

Tanım 3.8.1: $X \in \Im_0^1(M_n)$ ve $f \in \Im_0^0(M_n)$ fonksiyonu için $T(M_n)$ tanjant demette,

$$^{C}X\,{}^{C}f = {}^{C}(Xf)$$

olarak tanımlanan ${}^{C}X \in \Im_0^1(T(M_n))$ vektör alanına, X vektör alanının tam lifti denir. ${}^{C}X$ vektör alanının $\pi^{-1}(U)$ komşuluğunda indirgenmiş koordinatlara göre bileşenleri,

$$ {}^{C}X = \begin{pmatrix} {}^{C}X^{i} \\ {}^{C}X^{\bar{i}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^{i} \\ y^{s}\partial_{s}X^{i} \end{pmatrix} \tag{3.8} $$

şeklindedir (Yano and Ishihara 1973).

Sonuç 3.8.1: ${}^{C}(\partial_i) = \partial_i$ dir.

Teorem 3.8.1: $f \in \Im_0^0(M_n)$ ve $X, Y \in \Im_0^1(M_n)$ olmak üzere,

$i)$ ${}^{C}(X+Y) = {}^{C}X + {}^{C}Y$

$ii)$ ${}^{C}(fX) = {}^{C}f.{}^{V}X + {}^{V}f.\,{}^{C}X$

$iii)$ $[{}^{C}X, {}^{C}Y] = {}^{C}[X,Y]$

$iv)$ $[{}^{V}X, {}^{C}Y] = {}^{V}[X,Y]$

şeklindedir (Yano and Ishihara 1973).

3.9. 1-Formun Tam (Complete) Lifti

Tanım 3.9.1: $\omega \in \Im_1^0(M_n)$ ve $X \in \Im_0^1(M_n)$ olmak üzere,

$$ {}^{C}\omega({}^{C}X) = {}^{C}(\omega(X)) $$

şeklinde tanımlanan ${}^{C}\omega \in \Im_1^0(T(M_n))$ ye, ω nın tam lifti denir.

${}^{C}\omega \in \Im_1^0(T(M_n))$ 1- formu indirgenmiş koordinatlara göre,

$$^{C}\omega = ({}^{C}\omega_i, {}^{C}\omega_{\bar{i}}) = (y^s \partial_s \omega_i, \omega_i) \tag{3.9}$$

bileşenlerine sahiptir (Yano and Ishihara 1973).

Sonuç 3.9.1: ${}^{C}(dx^h) = dx^{\bar{h}} = dy^h$ dır.

Teorem 3.9.1: $f \in \Im_0^0(M_n)$ ve $\omega, \theta \in \Im_1^0(M_n)$ olmak üzere,

$i)$ ${}^{C}(\omega + \theta) = {}^{C}\omega + {}^{C}\theta$

$ii)$ ${}^{C}(f\omega) = {}^{C}f.{}^{V}\omega + {}^{V}f.{}^{C}\omega$

şeklindedir (Yano and Ishihara 1973).

3.10. Tensör Alanlarının Tam Lifti:

M_n manifoldu üzerindeki keyfi $P, Q, R \in \Im(M_n)$ tensör alanlarının tam lifti,

$$^{C}(P \otimes Q) = {}^{C}P \otimes {}^{V}Q + {}^{V}P \otimes {}^{C}Q, \qquad {}^{C}(P + R) = {}^{C}P + {}^{C}R$$

şartlarını sağlayacak şekilde tanımlanır (Yano and Ishihara 1973).

3.11. $(0,2)$ tipli Tensör Alanlarının Tam Lifti

M_n manifoldu üzerindeki $G \in \Im_2^0(M_n)$ tensör alanının tam lifti,

$$^{C}G = {}^{C}(G_{ij}dx^i \otimes dx^j) = {}^{C}(G_{ij})\, {}^{V}(dx^i \otimes dx^j) + {}^{V}(G_{ij})\, {}^{C}(dx^i \otimes dx^j)$$

$$= {}^{C}(G_{ij})({}^{V}dx^i \otimes {}^{V}dx^j) + {}^{V}(G_{ij})({}^{C}dx^i \otimes {}^{V}dx^j + {}^{V}dx^i \otimes {}^{C}dx^j)$$

$$= (y^s \partial_s G_{ij})\, dx^i \otimes dx^j + G_{ij}\, (dx^{\bar{i}} \otimes dx^j + dx^i \otimes dx^{\bar{j}})$$

$$= (y^s \partial_s G_{ij})\, dx^i \otimes dx^j + (G_{ij})\, dx^{\bar{i}} \otimes dx^j + (G_{ij}) dx^i \otimes dx^{\bar{j}}$$

bileşenlerine sahiptir. Yani,

$$^C G = \begin{pmatrix} y^s \partial_s G_{ij} & G_{ij} \\ G_{ij} & 0 \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

şeklindedir (Yano and Ishihara 1973).

Teorem 3.11.1: M_n de $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ şeklinde verilen g Riemann metriğinin $T(M_n)$ tanjant demette $^C g$ tam lifti,

$$^C g = 2 g_{ij} \delta y^i dx^j$$

şeklindedir. Burada $\delta y^i = dy^i + \begin{Bmatrix} i \\ l\,k \end{Bmatrix} dx^l y^k$ ve $\begin{Bmatrix} i \\ l\,k \end{Bmatrix}$, g_{ij} nin Christoffel sembolleridir.

İspat : (3.10) eşitliğinde bileşenleri verilen $(0,2)$ tipli G tensör alanının tam liftinden hareketle $g \in \Im_2^0(M_n)$ Riemann metriğinin $T(M_n)$ tanjant demette $^C g$ tam lifti,

$$^C g = (y^s \partial_s g_{ij}) dx^i dx^j + g_{ij} dx^i dy^j + g_{ij} dy^i dx^j$$

$$= (y^s \partial_s g_{ij}) dx^i dx^j + 2 g_{ij} dy^i dx^j$$

şeklinde olup bu eşitlikte $\partial_s g_{ij} = \begin{Bmatrix} h \\ s\,i \end{Bmatrix} g_{hj} + \begin{Bmatrix} h \\ s\;j \end{Bmatrix} g_{ih}$ olduğu kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
{}^{C}g &= y^{s}\left(\begin{Bmatrix} h \\ s\ i \end{Bmatrix} g_{hj} + \begin{Bmatrix} h \\ s\ j \end{Bmatrix} g_{ih}\right) dx^{i} dx^{j} + 2 g_{ij} dy^{i} dx^{j} \\
&= 2 g_{ij} \begin{Bmatrix} i \\ l\ s \end{Bmatrix} dx^{l} y^{s} dx^{j} + 2 g_{ij} dy^{i} dx^{j} \\
&= 2 g_{ij} \left(dy^{i} + \begin{Bmatrix} i \\ l\ s \end{Bmatrix} dx^{l} y^{s}\right) dx^{j} \\
&= 2 g_{ij} \delta y^{i} dx^{j}
\end{aligned}
$$

elde edilir (Yano and Ishihara 1973).

3.12. Fonksiyonun Yatay (Horizantal) Lifti

Tanım 3.12.1: ∇, M_n de bir afin konneksiyon olmak üzere, $f \in \Im_0^0(M_n)$ fonksiyonunun gradientini ∇f şeklinde yazabiliriz. Ayrıca (3.6). alt başlıkta tanımlanan γ operatörü ∇f gradientine uygulanırsa,

$$\nabla_{\gamma} f = \gamma(\nabla f) = y^{s} \partial_{s} f$$

olur. $f \in \Im_0^0(M_n)$ fonksiyonu için $T(M_n)$ tanjant demette,

$${}^{H}f = {}^{C}f - \nabla_{\gamma} f$$

şeklinde tanımlanan ${}^{H}f$ fonksiyonuna, f in yatay lifti denir (Yano and Ishihara 1973).

(3.7) eşitliğinden ${}^{C}f = y^{s} \partial_{s} f$ olup f fonksiyonunun yatay lifti,

$${}^{H}f = 0$$

bulunur.

3.13. Vektör Alanın Yatay (Horizantal) Lifti

Tanım 3.13.1: ∇, M_n de bir afin konneksiyon olmak üzere $X \in \Im_0^1(M_n)$ için,

$$^{H}X = {}^{C}X - \nabla_{\gamma} X$$

ile tanımlanan ^{H}X vektör alanına, X vektör alanının yatay lifti denir. Ayrıca $\nabla_{\gamma} X = \gamma(\nabla X)$ dir. X vektör alanının ve ∇ afin konneksiyonun M_n deki yerel koordinatları sırasıyla X^h ve Γ_{ij}^h olmak üzere, $T(M_n)$ tanjant demette ^{C}X ve $\nabla_{\gamma} X$,

$$^{C}X = \begin{pmatrix} X^h \\ y^s \partial_s X^h \end{pmatrix}, \qquad \nabla_{\gamma} X = \gamma(\nabla X) = \begin{pmatrix} 0 \\ y^s \nabla_s X^h \end{pmatrix}$$

yerel bileşenlerine sahiptir. $\nabla_s X^h = \partial_s X^h + \Gamma_{si}^h X^i$ olmak üzere ^{H}X in bileşenleri,

$$^{H}X = \begin{pmatrix} X^h \\ -y^s \Gamma_{si}^h X^i \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

şeklinde bulunur (Yano and Ishihara 1973).

3.14. Adapte Olmuş Çatı

Adapte olmuş çatı, $T(M_n)$ tanjant demette tensörlerle ilgili işlemlerin daha kullanışlı bir şekilde yapılmasına imkan veren bir yapıdır. (M_n, ∇) manifoldunun her bir $\{U; x^h\}$ koordinat komşuluğunda

$$X_{(i)} = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \left(X_{(i)} = \delta_i^h \frac{\partial}{\partial x^h} \right) \quad (i = 1, \ldots, n)$$

olarak alınırsa (3.11) ve (3.4) eşitliklerinden sırasıyla

$${}^{H}X_{(i)} = \begin{pmatrix} \delta_i^h \\ -y^s \Gamma_{sm}^h \delta_i^m \end{pmatrix} \Rightarrow {}^{H}X_{(i)} = \delta_i^h \partial_h - y^s \Gamma_{si}^h \partial_{\bar{h}} \Rightarrow {}^{H}X_{(i)} = \partial_i - y^s \Gamma_{si}^h \partial_{\bar{h}}$$

ve

$${}^{V}X_{(i)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_i^h \end{pmatrix} \Rightarrow {}^{V}X_{(i)} = 0.\partial_h + \delta_i^h.\partial_{\bar{h}} \Rightarrow {}^{V}X_{(i)} = \partial_{\bar{i}}$$

olacak şekilde $2n$ boyutlu vektör alanları elde edilir. Bu vektör alanları lineer bağımsız olup sırasıyla ∇ nın yatay dağılımını ve $T(M_n)$ nin dikey dağılımını meydana getirir. $\left\{ {}^{H}X_{(i)}, {}^{V}X_{(i)} \right\}$ kümesine, ∇ konneksiyonuna "adapte olmuş çatı" denir.

$$\begin{cases} E_i = {}^{H}X_{(i)} \\ E_{\bar{i}} = {}^{V}X_{(i)} \end{cases}$$

olarak alındığında adapte olmuş çatı $\{E_\lambda\} = \{E_i, E_{\bar{i}}\}$ şeklinde yazılır.

(x^h) yerel koordinatları ile verilen $X \in \Im_0^1(M_n)$ vektör alanının yatay $({}^{H}X)$, dikey $({}^{V}X)$ ve tam $({}^{C}X)$ liftleri adapte olmuş çatıya göre,

$${}^{H}X = \begin{pmatrix} X^h \\ -y^s \Gamma_{sm}^h X^m \end{pmatrix} \Rightarrow {}^{H}X = \begin{pmatrix} X^i \delta_i^h \\ -X^i y^s \Gamma_{sm}^h \delta_i^m \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow {}^{H}X = X^i \underbrace{\begin{pmatrix} \delta_i^h \\ -y^s \Gamma_{si}^h \end{pmatrix}}_{E_i}$$

$$\Rightarrow {}^{H}X = X^{i} \cdot E_{i} \Rightarrow H_{X} = \begin{pmatrix} X^{i} \\ 0 \end{pmatrix},$$

ve

$${}^{V}X = \begin{pmatrix} 0 \\ X^{h} \end{pmatrix} \Rightarrow {}^{V}X = \begin{pmatrix} 0 \\ X^{i}\delta_{i}^{h} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow {}^{V}X = X^{i} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \delta_{i}^{h} \end{pmatrix}}_{E_{\bar{i}}}$$

$$\Rightarrow {}^{V}X = X^{i}E_{\bar{i}} \Rightarrow {}^{V}X = \begin{pmatrix} 0 \\ X^{i} \end{pmatrix}$$

olmak üzere,

$${}^{C}X = \begin{pmatrix} X^{h} \\ y^{s}\partial_{s}X^{h} \end{pmatrix} \Rightarrow {}^{C}X = \begin{pmatrix} X^{i}\delta_{i}^{h} \\ y^{s}\partial_{s}\left(X^{i}\delta_{i}^{h}\right) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow {}^{C}X = X^{i} \underbrace{\begin{pmatrix} \delta_{i}^{h} \\ -y^{s}\Gamma_{si}^{h} \end{pmatrix}}_{E_{i}} + y^{s}\nabla_{s}X^{i} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \delta_{i}^{h} \end{pmatrix}}_{E_{\bar{i}}}$$

$$\Rightarrow {}^{C}X = X^{i}.E_{i} + y^{s}\nabla_{s}X^{i}E_{\bar{i}}$$

$$\Rightarrow {}^{C}X = \begin{pmatrix} X^{i} \\ y^{s}\nabla_{s}X^{i} \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir (Yano and Ishihara 1973; Gezer *et al.* 2015).

Lemma 3.14.1: Lie parantezi, $T(M_n)$ de adapte olmuş çatıya göre aşağıdaki özellikleri sağlar.

$$[E_{\bar{j}}, E_{\bar{i}}] = 0,$$

$$[E_j, E_{\bar{i}}] = \Gamma_{ji}^{a} E_{\bar{a}},$$

$$[E_j, E_i] = y^b R_{ijb}{}^{a} E_{\bar{a}}$$

Burada, $R_{ijb}{}^{a}$, M_n nin eğrilik tensörünün bileşenlerini tanımlar (Yano and Ishihara 1973).

3.15. Semi-Simetrik Metrik Konneksiyon

Tanım 3.15.1: $\breve{\nabla}$, C^{∞} sınıfından bir M_n manifoldu üzerinde tanımlı afin (lineer) konneksiyon olsun. $\forall\, X, Y \in \Im_0^1(M_n)$ olmak üzere,

$$T(X,Y) = \breve{\nabla}_X Y - \breve{\nabla}_Y X - [X,Y]$$

olarak tanımlanan $\breve{\nabla}$ konneksiyonunun T burulma tensörü,

$$T = 0$$

ise $\breve{\nabla}$ ya simetrik konneksiyon;

$$T \neq 0$$

ise, $\breve{\nabla}$ ya simetrik olmayan konneksiyon adı verilir (Hicks 1971).

Tanım 3.15.2: $\breve{\nabla}$, (M_n, g) Riemann manifoldu üzerinde bir afin konneksiyon olmak üzere,

$$\breve{\nabla} g = 0$$

ise, $\breve{\nabla}$ konneksiyonuna metrik konneksiyon;

$$\breve{\nabla} g \neq 0$$

ise, $\breve{\nabla}$ konneksiyonuna metrik olmayan konneksiyon adı verilir (Yano and Kon 1984).

Tanım 3.15.3: $\breve{\nabla}$, C^{∞} sınıfından (M_n, g) Riemann manifoldu üzerinde bir afin konneksiyon ve $\forall\, X, Y \in \mathfrak{I}_0^1(M_n)$ olmak üzere, $\breve{\nabla}$ konneksiyonunun T burulma tensörü,

$$T(X,Y) = \phi(Y)X - \phi(X)Y$$

şeklinde ise, $\breve{\nabla}$ ya semi-simetrik konneksiyon denir (Friedman and Schouten 1924; Pak 1969). Burada, $\rho \in \mathfrak{I}_0^1(M_n)$ olmak üzere ϕ,

$$\phi(X) = g(X, \rho)$$

şeklinde tanımlanan 1-formdur.

Tanım 3.15.4: Tanım 3.15.4 de verilen $\breve{\nabla}$ konneksiyonu,

$$T(X,Y) = \phi(Y)X - \phi(X)Y$$

şartına ek olarak

$$\breve{\nabla} g = 0$$

özelliğine de sahipse, $\breve{\nabla}$ konneksiyonuna semi-simetrik metrik konneksiyon adı verilir (Yano 1970).

Teorem 3.15.1: (M_n, g) bir Riemann manifoldu olsun. $\breve{\nabla}$ ve ∇, M_n de sırası ile semi-simetrik metrik konneksiyon ve Levi-Civita konneksiyonu olsun. İki konneksiyon arasında $\forall\ X, Y, \rho \in \Im_0^1(M_n)$ olmak üzere,

$$\breve{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \phi(Y) X - g(X, Y) \rho$$

şeklinde bir ilişki mevcuttur (Yano 1970).

Teorem 3.15.2: Bir (M_n, g) Riemann manifoldunda, $\breve{\nabla}$ ve ∇ konneksiyonlarının eğrilik tensörleri sırası ile $\breve{R}$ ve R olsun. $\forall\ X, Y, Z, \rho \in \Im_0^1(M_n)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\breve{R}(X,Y)Z = {} & R(X,Y)Z + g(Z, \nabla_X \rho)Y - g(Z, \nabla_Y \rho)X + g(X,Z)\nabla_Y \rho \\ & - g(Y,Z)\nabla_X \rho + \phi(\rho)\left[g(X,Z)Y - g(Y,Z)X\right] \\ & + \left[g(Y,Z)\phi(X) - g(X,Z)\phi(Y)\right]\rho + \phi(Z)\left[\phi(Y)X - \phi(X)Y\right]\end{aligned}$$

şeklinde $\breve{R}$ ve R eğrilik tensörleri arasında bir bağıntı vardır (Yano 1970; Sular and Özgür 2011; Gürler 2012).

3.16. Riemann Manifoldunun Tanjant Demetinde Metrikler

(M_n, g) Riemann manifoldunun U koordinat komşuluğunda, g metriğinin bileşenleri g_{ij} ve Christoffel sembolleri de Γ_{ij}^{j} ile gösterilsin. U, M_n in bir koordinat komşuluğu olmak üzere; eğer $\pi^{-1}(U) \subset T(M_n)$ komşuluğunda (x^h, y^h) indirgenmiş koordinatlara göre,

$$\delta y^h = dy^h + \Gamma_j^h dx^i, \qquad \left(\Gamma_j^h = y^i \Gamma_{ij}^h\right)$$

yazılır ise $T(M_n)$ tanjant demette,

$$I: \; g_{ij} dx^i dx^j,$$

$$II: \; 2g_{ij} dx^i \delta y^j,$$

$$III: \; g_{ij} \delta y^i \delta y^j$$

şeklinde global olarak tanımlanan ikinci dereceden diferensiyel formlar elde edilir ve

$$II: \; 2g_{ij} dx^i \delta y^j,$$

$$I + II: \; g_{ij} dx^i dx^j + 2g_{ij} dx^i \delta y^j,$$

$$I + III: \; g_{ij} dx^i dx^j + g_{ij} \delta y^i \delta y^j,$$

$$II + III: \; 2g_{ij} dx^i \delta y^j + g_{ij} \delta y^i \delta y^j$$

şeklindeki diferensiyel formlarının tamamı singüler olmayıp bu formlar $T(M_n)$ de Riemann ya da pseudo- Riemann metrikler olarak addedilir (Yano and Ishihara 1973).

3.17. Riemann Manifoldunun Tanjant Demetinde Tam Lift (II) Metriği

Tanım 3.17.1: Lokal bileşenleri g_{ij} olan g metriği ile beraber (M_n, g) bir Riemann manifold olsun. $T(M_n)$ de, $(x^A) = (x^h, y^h)$ indirgenmiş koordinatlarına göre lokal olarak

$$\tilde{g}_{CB} dx^C dx^B = 2g_{ij} dx^i \delta y^j$$

şeklinde ifade edilen metriğe "II metriği" adı verilir. Burada,

$$\delta y^h = dy^h + \Gamma_j^h dx^i, \qquad \left(\Gamma_j^h = y^i \Gamma_{ij}^h\right)$$

şeklinde olup Γ_{ij}^j ler Christoffel sembolleridir. Ayrıca, $\tilde{g}_{CB}$, ${}^C g$ metriğine ait bileşenleridir. Dolayısıyla $\tilde{g}$ metriğinin $T(M_n)$ de indirgenmiş koordinatlara göre kovaryant bileşenleri,

$$\left(\tilde{g}_{CB}\right) = \begin{pmatrix} \partial g_{ij} & g_{ij} \\ g_{ij} & 0 \end{pmatrix}$$

ve kontravaryant bileşenleri ise,

$$\left(\tilde{g}^{CB}\right) = \begin{pmatrix} 0 & g^{ij} \\ g^{ij} & \partial g^{ij} \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

Şimdi $X \in \Im_0^1(M_n)$ vektör alanını dikkate alalım. Bu vektör alanının ${}^V X$ dikey lifti, ${}^C X$ tam lifti ve ${}^H X$ yatay lifti, $T(M_n)$ deki indirgenmiş koordinatlara göre sırasıyla,

$$\left(`X^A\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ X^h \end{pmatrix}, \qquad \left(\tilde{X}^A\right) = \begin{pmatrix} X^h \\ \partial X^h \end{pmatrix}, \qquad \left(\bar{X}^A\right) = \begin{pmatrix} X^h \\ -\Gamma_i^h X^i \end{pmatrix}$$

bileşenlerine sahipti. Dolayısıyla, buradan $\nabla_k g_{ij} = \partial_k g_{ij} - \Gamma_{ki}^h g_{hj} - \Gamma_{kj}^h g_{ih} = 0$ özdeşliği kullanılarak

$$\tilde{g}_{CB} `X^C \, `X^B = 0, \qquad \tilde{g}_{CB} \bar{X}^C \, \bar{X}^B = 0 \tag{3.12}$$

elde edilir. Yani, II metriğine göre $X \in \Im_0^1(M_n)$ vektör alanının ${}^V X$ dikey lifti ve ${}^H X$ yatay lifti sıfırdır.

M_n de, sırasıyla X^h ve Y^h bileşenlerine sahip X ve Y vektör alanlarının $\tilde{X}$ ve $\tilde{Y}$ tam liftlerinin iç çarpımı,

$$ {}^{C}g\left({}^{C}X, {}^{C}Y\right) = {}^{C}\left(g(X,Y)\right) $$

eşitliği kullanılarak

$$ \tilde{g}\left(\tilde{X}, \tilde{Y}\right) = \partial\left(g_{ij} X^i Y^j\right) \tag{3.13} $$

elde edilir. Yani, M_n deki iki vektör alanının $T(M_n)$ de tam liftlerinin iç çarpımının sıfır olması için ancak ve ancak M_n deki iç çarpımları sabit olmalıdır (Yano and Ishihara 1973).

(3.12) ve (3.13) eşitlikleri ile beraber $\overline{X}^{\bar{h}} = 0$ olarak alınırsa adapte olmuş çatıya göre $\tilde{g}$ metriğinin kovaryant ve kontravaryant bileşenleri

$$ \left(\tilde{g}_{CB}\right) = \begin{pmatrix} 0 & g_{ij} \\ g_{ij} & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } \left(\tilde{g}^{CB}\right) = \begin{pmatrix} 0 & g^{ij} \\ g^{ij} & 0 \end{pmatrix} $$

olarak bulunur.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Tanjant Demette Tam Lift (II) Metriğinin Konneksiyon Katsayıları

$\widetilde{\nabla}$, $T(M_n)$ de Riemann konneksiyonunu göstersin. $T(M_n)$ tanjant demette adapte olmuş çatıya göre Riemann konneksiyonunun katsayıları,

$$\widetilde{\Gamma}^{\alpha}_{\gamma\beta} = \frac{1}{2}\widetilde{g}^{\alpha\varepsilon}(E_{\gamma}\widetilde{g}_{\varepsilon\beta} + E_{\beta}\widetilde{g}_{\gamma\varepsilon} - E_{\varepsilon}\widetilde{g}_{\gamma\beta}) + \frac{1}{2}(\Omega_{\gamma\beta}{}^{\alpha} + \Omega^{\alpha}{}_{\gamma\beta} + \Omega^{\alpha}{}_{\beta\gamma}) \tag{4.1}$$

eşitliği kullanılarak bulunur (Yano and Ishihara 1973). Burada,

$$[E_{\gamma}, E_{\beta}] = \Omega_{\gamma\beta}{}^{\alpha} E_{\alpha} \tag{4.2}$$

ve

$$\Omega^{\alpha}{}_{\gamma\beta} = \widetilde{g}^{\alpha\varepsilon}\widetilde{g}_{\delta\beta}\,\Omega_{\varepsilon\gamma}{}^{\delta} \tag{4.3}$$

biçiminde olup göz önüne alınacak (yani sıfırdan farklı) $\Omega_{\gamma\beta}{}^{\alpha}$ elemanları ise,

$$\Omega_{ji}{}^{\bar{h}} = -\Omega_{ij}{}^{\bar{h}} = -R_{jik}{}^{h} y^{k}, \tag{4.4}$$

$$\Omega_{j\bar{i}}{}^{\bar{h}} = -\Omega_{\bar{i}j}{}^{\bar{h}} = \Gamma^{h}_{ji}$$

şeklindedir. Ayrıca işlemlerimizde (3.17). alt başlıkta bahsedilen ve adapte olmuş çatıya göre kovaryant ve kontravaryant bileşenleri,

$$\left(\widetilde{g}_{CB}\right) = \begin{pmatrix} 0 & g_{ij} \\ g_{ij} & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } \left(\widetilde{g}^{CB}\right) = \begin{pmatrix} 0 & g^{ij} \\ g^{ij} & 0 \end{pmatrix}$$

olarak verilen tam lift (II) metriğini kullanacağız. O halde, (4.1), (4.2) ve (4.4) den tanjant demette Riemann konneksiyonunun katsayıları,

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}_{ij}^{k} &= \frac{1}{2}\tilde{g}^{k\varepsilon}(E_i\tilde{g}_{\varepsilon j}+E_j\tilde{g}_{i\varepsilon}-\underbrace{E_\varepsilon\tilde{g}_{ij}}_{0})+\frac{1}{2}(\underbrace{\Omega_{ij}{}^{k}}_{0}+\Omega^{k}{}_{ij}+\Omega^{k}{}_{ji}) \\
&= \frac{1}{2}\tilde{g}^{k\bar{h}}\left[\left(\partial_i-y^s\Gamma_{sj}^{l}\partial_{\bar{l}}\right)\tilde{g}_{\bar{h}j}+\left(\partial_j-y^s\Gamma_{sj}^{l}\partial_{\bar{l}}\right)\tilde{g}_{i\bar{h}}\right]+\frac{1}{2}\left(\tilde{g}^{k\varepsilon}\tilde{g}_{Aj}\,\Omega_{\varepsilon i}^{A}+\tilde{g}^{k\varepsilon}\tilde{g}_{Ai}\,\Omega_{\varepsilon j}^{A}\right) \\
&= \frac{1}{2}g^{kh}\left(\partial_i g_{hj}+\partial_j g_{ih}\right)+\frac{1}{2}\left(\tilde{g}^{k\bar{h}}\tilde{g}_{\bar{a}j}\,\Omega_{\bar{h}i}^{\bar{a}}+\tilde{g}^{k\bar{h}}\tilde{g}_{\bar{a}i}\,\Omega_{\bar{h}j}^{\bar{a}}\right) \\
&= \frac{1}{2}g^{kh}\left(\partial_i g_{hj}+\partial_j g_{ih}\right)-\frac{1}{2}g^{kh}\left(\underbrace{\Gamma_{ih}^{a}g_{aj}+\Gamma_{jh}^{a}g_{ai}}_{\partial_h g_{ij}}\right) \\
&= \frac{1}{2}g^{kh}\left(\partial_i g_{hj}+\partial_j g_{ih}-\partial_h g_{ij}\right) \\
&= \Gamma_{ij}^{k}
\end{aligned}
$$

ve benzer olarak

1) $\tilde{\Gamma}_{ij}^{k}=\Gamma_{ij}^{k}$ 3) $\tilde{\Gamma}_{i\bar{j}}^{k}=0$

2) $\tilde{\Gamma}_{\bar{i}j}^{k}=0$ 4) $\tilde{\Gamma}_{\bar{i}\bar{j}}^{k}=0$

5) $\tilde{\Gamma}_{ij}^{\bar{k}}=y^s R_{sij}{}^{k}$ 7) $\tilde{\Gamma}_{i\bar{j}}^{\bar{k}}=\Gamma_{ij}^{k}$

6) $\tilde{\Gamma}_{\bar{i}j}^{\bar{k}}=0$ 8) $\tilde{\Gamma}_{\bar{i}\bar{j}}^{\bar{k}}=0$

şeklinde elde edilir. Burada, Γ_{ij}^{k} katsayıları, M_n deki g_{ji} metriği ile şekillenen Christoffel sembollerini; $R_{sij}{}^{k}$ ise $\left(M_n, g_{ji}\right)$ manifoldunun eğrilik tensörüne ait bileşenleri göstermektedir.

Şimdi tanjant demette farklı bir semi-simetrik metrik konneksiyon tanımlayalım.

4.2. Tanjant Demette Semi-Simetrik Metrik Konneksiyon

Tanjant demette konneksiyon katsayıları,

$$\overline{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma} = \widetilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma} + U_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma} \tag{4.4}$$

şeklinde olan bir $\overline{\nabla}$ konneksiyonu olsun. Bu konneksiyonun bir metrik konneksiyon olabilmesi için $\overline{\nabla}_k \widetilde{g}_{\alpha\beta} = 0$ olmalıdır. O halde,

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_k \widetilde{g}_{\alpha\beta} = 0 \Rightarrow & \ \partial_k \widetilde{g}_{\alpha\beta} - \overline{\Gamma}_{k\alpha}^{\ \ \sigma} \widetilde{g}_{\sigma\beta} - \overline{\Gamma}_{k\beta}^{\ \ \sigma} \widetilde{g}_{\alpha\sigma} = 0 \\
& \Rightarrow \partial_k \widetilde{g}_{\alpha\beta} - \left(\widetilde{\Gamma}_{k\alpha}^{\ \ \sigma} + U_{k\alpha}^{\ \ \sigma}\right)\widetilde{g}_{\sigma\beta} - \left(\widetilde{\Gamma}_{k\beta}^{\ \ \sigma} + U_{k\beta}^{\ \ \sigma}\right)\widetilde{g}_{\alpha\sigma} = 0 \\
& \Rightarrow \underbrace{\left(\partial_k \widetilde{g}_{\alpha\beta} - \widetilde{\Gamma}_{k\alpha}^{\ \ \sigma} \widetilde{g}_{\sigma\beta} - \widetilde{\Gamma}_{k\beta}^{\ \ \sigma} \widetilde{g}_{\alpha\sigma}\right)}_{\nabla_k \widetilde{g}_{\alpha\beta} = 0} - U_{k\alpha}^{\ \ \sigma} \widetilde{g}_{\sigma\beta} - U_{k\beta}^{\ \ \sigma} \widetilde{g}_{\alpha\sigma} = 0 \\
& \Rightarrow U_{k\alpha}^{\ \ \sigma} \widetilde{g}_{\sigma\beta} + U_{k\beta}^{\ \ \sigma} \widetilde{g}_{\alpha\sigma} = 0 \\
& \Rightarrow U_{k\alpha\beta} + U_{k\beta\alpha} = 0
\end{aligned} \tag{4.5}$$

elde edilir. Yani, $(1,2)$ tipli U tensörü, alttaki son iki indise göre antisimetriktir.

Tanjant demette, $\widetilde{\nabla}$ Riemann konneksiyonuna ve $\overline{\nabla}$ konneksiyonuna ait burulma tensörleri sırasıyla,

$$0 = \widetilde{T}_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma} = \widetilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma} - \widetilde{\Gamma}_{\beta\alpha}^{\ \ \gamma} - \Omega_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma} \tag{4.6}$$

ve

$$\overline{T}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = \overline{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} - \overline{\Gamma}_{\beta\alpha}{}^{\gamma} - \Omega_{\alpha\beta}{}^{\gamma} \tag{4.7}$$

şeklinde olup (4.4) eşitliği dikkate alınarak $\overline{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} - \overline{\Gamma}_{\beta\alpha}{}^{\gamma}$ farkına bakılırsa,

$$\overline{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} - \overline{\Gamma}_{\beta\alpha}{}^{\gamma} = \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} + U_{\alpha\beta}{}^{\gamma} - \left(\tilde{\Gamma}_{\beta\alpha}{}^{\gamma} + U_{\beta\alpha}{}^{\gamma}\right)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(\overline{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} - \overline{\Gamma}_{\beta\alpha}{}^{\gamma}\right)}_{\Downarrow(4.7)} = \underbrace{\left(\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} - \tilde{\Gamma}_{\beta\alpha}{}^{\gamma}\right)}_{\Downarrow(4.6)} + U_{\alpha\beta}{}^{\gamma} - U_{\beta\alpha}{}^{\gamma}$$

$$\Rightarrow \overline{T}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} + \Omega_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = \underbrace{\tilde{T}_{\alpha\beta}{}^{\gamma}}_{=0} + \Omega_{\beta\alpha}{}^{\gamma} + U_{\alpha\beta}{}^{\gamma} - U_{\beta\alpha}{}^{\gamma}$$

$$\Rightarrow \overline{T}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = U_{\alpha\beta}{}^{\gamma} - U_{\beta\alpha}{}^{\gamma}, \qquad (\gamma \to \sigma)$$

$$\Rightarrow \overline{T}_{\alpha\beta}{}^{\sigma} = U_{\alpha\beta}{}^{\sigma} - U_{\beta\alpha}{}^{\sigma} \qquad \therefore g_{\sigma\gamma}$$

$$\Rightarrow \overline{T}_{\alpha\beta\gamma} = U_{\alpha\beta\gamma} - U_{\beta\alpha\gamma} \tag{4.8}$$

yazılır. Buradan,

$$\overline{T}_{\alpha\beta\gamma} = U_{\alpha\beta\gamma} - U_{\beta\alpha\gamma}$$

$$\overline{T}_{\gamma\alpha\beta} = U_{\gamma\alpha\beta} - U_{\alpha\gamma\beta}$$

$$\overline{T}_{\gamma\beta\alpha} = U_{\gamma\beta\alpha} - U_{\beta\gamma\alpha}$$

olmak üzere,

$$\overline{T}_{\alpha\beta\gamma} + \overline{T}_{\gamma\alpha\beta} + \overline{T}_{\gamma\beta\alpha} = 2.U_{\alpha\beta\gamma} \tag{4.9}$$

elde edilir. $\overline{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} + U_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$ olarak ifade ettiğimiz $\overline{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$ katsayılarını bulmak için $(1,2)$ tipli $U_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$ tensörlerini belirlemeliyiz. $U_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$ tensörleri ise $\overline{T}$ burulmasına bağlı olmakla beraber $\overline{\nabla}$ nın semi-simetrik bir konneksiyon olması için $\overline{T}$,

$$\bar{T}_{ij}^{\bar{k}} = y_j \delta_i^k - y_i \delta_j^k \tag{4.10}$$

olarak alınacaktır. Burada $y_i = y^s g_{si}$ şeklindedir. Ayrıca,

$$\bar{T}_{\alpha\beta}{}^{\varepsilon} \tilde{g}_{\varepsilon\gamma} = \bar{T}_{\alpha\beta\gamma}$$

olmak üzere $(0,3)$ tipli burulma tensörleri $\bar{T}_{\alpha\beta\gamma}$,

$$\begin{aligned}
\bar{T}_{ijk} &= \bar{T}_{ij}^{\varepsilon} \tilde{g}_{\varepsilon k} \\
&= \underset{0}{\bar{T}_{ij}^{h}\, \tilde{g}_{hk}} + \bar{T}_{ij}^{\bar{h}} \tilde{g}_{\bar{h}k} \\
&= \left(y_j \delta_i^h - y_i \delta_j^h \right) g_{hk} \\
&= y_j \delta_i^h g_{hk} - y_i \delta_j^h g_{hk}
\end{aligned}$$

$$\bar{T}_{ijk} = y_j g_{ik} - y_i g_{jk}$$

ve benzer olarak

1) $\bar{T}_{ijk} = y_j g_{ik} - y_i g_{jk}$
2) $\bar{T}_{ij\bar{k}} = 0$
3) $\bar{T}_{\bar{i}jk} = 0$
4) $\bar{T}_{\bar{i}j\bar{k}} = 0$
5) $\bar{T}_{i\bar{j}k} = 0$
6) $\bar{T}_{i\bar{j}\bar{k}} = 0$
7) $\bar{T}_{\bar{i}\bar{j}k} = 0$
8) $\bar{T}_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}} = 0$

şeklindedir. (4.9) eşitliğinden $(1,2)$ tipli $U_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$ tensörleri,

$$\begin{aligned}
2.U_{ijk} &= \bar{T}_{ijk} + \bar{T}_{kij} + \bar{T}_{kji} \\
&= \left(y_j g_{ik} - y_i g_{jk} \right) + \left(y_i g_{kj} - y_k g_{ij} \right) + \left(y_j g_{ki} - y_k g_{ji} \right)
\end{aligned}$$

$$= 2\left(y_j g_{ik} - y_k g_{ij}\right)$$

$$\Rightarrow U_{ijk} = \left(y_j g_{ik} - y_k g_{ij}\right) / \tilde{g}^{k\bar{h}} \qquad \left(\tilde{g}^{k\bar{h}} = g^{kh}\right)$$

$$\Rightarrow U_{ij}^{\bar{h}} = y_j g_{ik} g^{kh} - y_k g_{ij} g^{kh}$$

$$\Rightarrow U_{ij}^{\bar{h}} = y_j \delta_i^h - y^h g_{ij}$$

ve benzer olarak

1) $U_{i\,j}{}^{h} = 0$

2) $U_{i\,j}{}^{\bar{h}} = y_j \delta_i^h - y^h g_{ij}$

3) $U_{\bar{i}\,j}{}^{h} = 0$

4) $U_{\bar{i}\,j}{}^{\bar{h}} = 0$

5) $U_{i\,\bar{j}}{}^{h} = 0$

6) $U_{i\,\bar{j}}{}^{\bar{h}} = 0$

7) $U_{\bar{i}\,\bar{j}}{}^{\bar{h}} = 0$

8) $U_{\bar{i}\,\bar{j}}{}^{h} = 0$

biçiminde bulunur. (4.4) eşitliğinden $\overline{\nabla}$ konneksiyonunun $\overline{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$ katsayıları ise,

1) $\overline{\Gamma}_{i\,j}{}^{k} = \Gamma_{i\,j}{}^{k}$

2) $\overline{\Gamma}_{\bar{i}\,j}{}^{k} = 0$

3) $\overline{\Gamma}_{i\,\bar{j}}{}^{k} = 0$

4) $\overline{\Gamma}_{\bar{i}\,\bar{j}}{}^{k} = 0$

5) $\overline{\Gamma}_{i\,j}{}^{\bar{k}} = y^s R_{sij}{}^{k} + y_j \delta_i^k - y^k g_{ij}$

6) $\overline{\Gamma}_{\bar{i}\,j}{}^{\bar{k}} = 0$

7) $\overline{\Gamma}_{i\,\bar{j}}{}^{\bar{k}} = \Gamma_{ij}^{k}$

8) $\overline{\Gamma}_{\bar{i}\,\bar{j}}{}^{\bar{k}} = 0$

olarak elde edilir.

4.3. Tanjant Demette Semi-Simetrik Metrik Konneksiyonun Eğrilik Tensörü

$\overline{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma}$ katsayıları, adapte olmuş çatıya göre $\overline{\nabla}$ konneksiyonunun bileşenleri olmak üzere,

$$\overline{R}_{\alpha\beta\gamma}^{\ \ \ \ \sigma} = E_\alpha \overline{\Gamma}_{\beta\gamma}^{\ \ \sigma} - E_\beta \overline{\Gamma}_{\alpha\gamma}^{\ \ \sigma} + \overline{\Gamma}_{\alpha\varepsilon}^{\ \ \sigma} \overline{\Gamma}_{\beta\gamma}^{\ \ \varepsilon} - \overline{\Gamma}_{\beta\varepsilon}^{\ \ \sigma} \overline{\Gamma}_{\alpha\gamma}^{\ \ \varepsilon} - \Omega_{\alpha\beta}^{\ \ \varepsilon} \overline{\Gamma}_{\varepsilon\gamma}^{\ \ \sigma}$$

eşitliği, adapte olmuş çatıya göre $\overline{\nabla}$ nın $(1,3)$ tipli $\overline{R}$ eğrilik tensörünün bileşenlerini verir. Bu bileşenler,

$$\begin{aligned}
\overline{R}_{i\bar{j}k}^{\ \ \ \ \bar{l}} &= E_i \underbrace{\overline{\Gamma}_{\bar{j}k}^{\ \ \bar{l}}}_{0} - E_{\bar{j}} \overline{\Gamma}_{ik}^{\ \ \bar{l}} + \overline{\Gamma}_{i\varepsilon}^{\ \ \bar{l}} \underbrace{\overline{\Gamma}_{\bar{j}k}^{\ \ \varepsilon}}_{0} - \underbrace{\overline{\Gamma}_{\bar{j}\varepsilon}^{\ \ \bar{l}}}_{0} \overline{\Gamma}_{ik}^{\ \ \varepsilon} - \underbrace{\Omega_{i\bar{j}}^{\ \ \varepsilon} \overline{\Gamma}_{\varepsilon k}^{\ \ \bar{l}}}_{0} \\
&= -\partial_{\bar{j}} \left(y^s R_{sik}^{\ \ \ \ l} + y_k \delta_i^l - y^l g_{ik} \right) \\
&= -\left(\partial_{\bar{j}} y^s\right) R_{sik}^{\ \ \ \ l} - \left(\partial_{\bar{j}} y_k\right) \delta_i^l + \left(\partial_{\bar{j}} y^l\right) g_{ik} \\
&= -\delta_j^s R_{sik}^{\ \ \ \ l} - \left[\partial_{\bar{j}} \left(g_{sk} y^s\right)\right] \delta_i^l + \delta_j^l g_{ik} \\
&= -R_{jik}^{\ \ \ \ l} - \left[g_{sk} \left(\partial_{\bar{j}} y^s\right)\right] \delta_i^l + \delta_j^l g_{ik} \\
&= -R_{jik}^{\ \ \ \ l} - g_{sk} \delta_j^s \delta_i^l + \delta_j^l g_{ik}
\end{aligned}$$

$$\overline{R}_{i\bar{j}k}^{\ \ \ \ \bar{l}} = R_{ijk}^{\ \ \ \ l} + g_{ik}\delta_j^l - g_{jk}\delta_i^l$$

ve benzer şekilde

1) $\overline{R}_{ijk}^{\ \ \ \ l} = R_{ijk}^{\ \ \ \ l}$

2) $\overline{R}_{\bar{i}jk}^{\ \ \ \ l} = 0$

3) $\overline{R}_{i\bar{j}k}^{\ \ \ \ l} = 0$

4) $\overline{R}_{ij\bar{k}}^{\ \ \ \ l} = 0$

5) $\overline{R}_{\bar{i}\bar{j}k}^{\ \ \ \ l} = 0$

6) $\overline{R}_{i\bar{j}\bar{k}}^{\ \ \ \ l} = 0$

7) $\overline{R}_{\bar{i}j\bar{k}}^{\ \ \ \ l} = 0$

8) $\overline{R}_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}}^{\ \ \ \ l} = 0$

9) $\overline{R}_{ijk}^{\ \ \ \ \bar{l}} = y^s \nabla_s R_{ijk}^{\ \ \ \ l}$

10) $\overline{R}_{\bar{i}jk}^{\ \ \ \ \bar{l}} = R_{ijk}^{\ \ \ \ l} + g_{ik}\delta_j^l - g_{jk}\delta_i^l$

11) $\overline{R}_{i\bar{j}k}{}^{\bar{l}} = R_{ijk}{}^{l} + g_{ik}\delta_j^l - g_{jk}\delta_i^l$

12) $\overline{R}_{ij\bar{k}}{}^{\bar{l}} = R_{ijk}{}^{l}$

13) $\overline{R}_{\bar{i}\bar{j}k}{}^{\bar{l}} = 0$

14) $\overline{R}_{\bar{i}j\bar{k}}{}^{\bar{l}} = 0$

15) $\overline{R}_{i\bar{j}\bar{k}}{}^{\bar{l}} = 0$

16) $\overline{R}_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}}{}^{\bar{l}} = 0$

olarak bulunur.

Ayrıca,

$$\overline{R}_{\alpha\beta\gamma}{}^{\sigma}\tilde{g}_{\sigma\mu} = \overline{R}_{\alpha\beta\gamma\mu}$$

olmak üzere, $\overline{\nabla}$ semi-simetrik metrik konneksiyonun $(0,4)$ tipli $\overline{R}$ eğrilik tensörünün bileşenleri ise,

1) $\overline{R}_{ijkh} = y^s \nabla_s R_{ijkh}$

2) $\overline{R}_{ijk\bar{h}} = R_{ijkh}$

3) $\overline{R}_{ij\bar{k}h} = R_{ijkh}$

4) $\overline{R}_{ij\bar{k}\bar{h}} = 0$

5) $\overline{R}_{i\bar{j}kh} = R_{ijkh} + g_{ik}g_{jh} - g_{jk}g_{ih}$

6) $\overline{R}_{i\bar{j}k\bar{h}} = 0$

7) $\overline{R}_{i\bar{j}\bar{k}h} = 0$

8) $\overline{R}_{i\bar{j}\bar{k}\bar{h}} = 0$

9) $\overline{R}_{\bar{i}jkh} = R_{ijkh} + g_{ik}g_{jh} - g_{jk}g_{ih}$

10) $\overline{R}_{\bar{i}jk\bar{h}} = 0$

11) $\overline{R}_{\bar{i}j\bar{k}h} = 0$

12) $\overline{R}_{\bar{i}j\bar{k}\bar{h}} = 0$

13) $\overline{R}_{\bar{i}\bar{j}kh} = 0$

14) $\overline{R}_{\bar{i}\bar{j}k\bar{h}} = 0$

15) $\overline{R}_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}h} = 0$

16) $\overline{R}_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}\bar{h}} = 0$

şeklindedir.

Teorem 4.3.1: (M_n, g) Riemann manifold ve $(T(M_n), \tilde{g})$ de M_n nin tanjant demeti olsun. $(T(M_n), \tilde{g})$ de tanımlı $\overline{\nabla}$ semi-simetrik metrik konneksiyonun $(0,4)$ tipli $\overline{R}$ eğrilik tensörü ilk iki indise göre antisimetriktir. Yani,

$$\bar{R}_{\alpha\beta\gamma\sigma} = -\bar{R}_{\beta\alpha\gamma\sigma}$$

şeklindedir.

Teorem 4.3.2: (M_n, g) Riemann manifold ve $(T(M_n), \tilde{g})$ de M_n nin tanjant demeti olsun. $(T(M_n), \tilde{g})$ de tanımlı $\bar{\nabla}$ semi-simetrik metrik konneksiyonun $(0,4)$ tipli $\bar{R}$ eğrilik tensörü son iki indise göre antisimetriktir. Yani,

$$\bar{R}_{\alpha\beta\gamma\sigma} = -\bar{R}_{\alpha\beta\sigma\gamma}$$

şeklindedir.

Şimdi,

$$\bar{K}_{\alpha\beta\gamma\sigma} = \bar{R}_{\alpha\beta\gamma\sigma} - \bar{R}_{\gamma\sigma\alpha\beta}$$

şeklinde $(0,4)$ tipli bir tensör tanımlayalım. $\bar{K}$ tensörünün bileşenleri,

1) $\bar{K}_{ijkh} = 0$

2) $\bar{K}_{ijk\bar{h}} = g_{ik}g_{jh} - g_{jk}g_{ih}$

3) $\bar{K}_{ij\bar{k}h} = g_{ik}g_{jh} - g_{jk}g_{ih}$

4) $\bar{K}_{ij\bar{k}\bar{h}} = 0$

5) $\bar{K}_{i\bar{j}kh} = g_{ik}g_{jh} - g_{jk}g_{ih}$

6) $\bar{K}_{i\bar{j}k\bar{h}} = 0$

7) $\bar{K}_{i\bar{j}\bar{k}h} = 0$

8) $\bar{K}_{i\bar{j}\bar{k}\bar{h}} = 0$

9) $\bar{K}_{\bar{i}jkh} = g_{ik}g_{jh} - g_{jk}g_{ih}$

10) $\bar{K}_{\bar{i}jk\bar{h}} = 0$

11) $\bar{K}_{\bar{i}j\bar{k}h} = 0$

12) $\bar{K}_{\bar{i}j\bar{k}\bar{h}} = 0$

13) $\bar{K}_{\bar{i}\bar{j}kh} = 0$

14) $\bar{K}_{\bar{i}\bar{j}k\bar{h}} = 0$

15) $\bar{K}_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}h} = 0$

16) $\bar{K}_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}\bar{h}} = 0$

olarak elde edilir.

Teorem 4.3.3: (M_n, g) Riemann manifold ve $(T(M_n), \tilde{g})$ de M_n nin tanjant demeti olsun. $(T(M_n), \tilde{g})$ de tanımlı $\overline{\nabla}$ semi-simetrik metrik konneksiyonun $(0,4)$ tipli eğrilik tensörü $\overline{R}_{\alpha\beta\gamma\sigma}$ nin ilk iki ve son iki indisinin yer değişimi için gerek ve yeter şart M_n deki g Riemann metriği için,

$$g_{ik} g_{jh} - g_{jk} g_{ih} = 0$$

olmasıdır.

4.4. Tanjant Demette Semi-Simetrik Metrik Konneksiyonun Ricci Tensörü

$$\overline{R}_{\varepsilon\beta\gamma}{}^{\varepsilon} = \overline{R}_{\beta\gamma}$$

olmak üzere Ricci tensörünün bileşenleri,

$$\begin{aligned}
\overline{R}_{jk} &= \overline{R}_{\varepsilon jk}{}^{\varepsilon} \\
&= \overline{R}_{hjk}{}^{h} + \overline{R}_{\bar{h}jk}{}^{\bar{h}} \\
&= R_{hjk}{}^{h} + R_{hjk}{}^{h} + g_{hk}\delta_j^h - \delta_h^h g_{jk} \\
&= R_{jk} + R_{jk} + g_{jk} - n.g_{jk} \\
&= 2R_{jk} + (1-n) g_{jk}
\end{aligned}$$

ve benzer şekilde

1) $\overline{R}_{jk} = 2R_{jk} + (1-n) g_{jk}$

2) $\overline{R}_{\bar{j}k} = 0$

3) $\overline{R}_{j\bar{k}} = 0$

4) $\overline{R}_{\bar{j}\bar{k}} = 0$

olarak bulunur.

Teorem 4.4.1: (M_n, g) Riemann manifold ve $(T(M_n), \tilde{g})$ de M_n nin tanjant demeti olsun. $(T(M_n), \tilde{g})$ de tanımlı $\overline{\nabla}$ semi-simetrik metrik konneksiyonun Ricci tensörü simetriktir.

Şimdi de $(T(M_n), \tilde{g})$ tanjant demetin semi-simetrik metrik konneksiyona göre lokal Ricci simetrik olup olmadığına bakalım.

$$\overline{\nabla}_i \overline{R}_{jk} = E_i \overline{R}_{jk} - \overline{\Gamma}_{ij}^{\varepsilon} \overline{R}_{\varepsilon k} - \overline{\Gamma}_{ik}^{\varepsilon} \overline{R}_{j\varepsilon}$$

$$= E_i \overline{R}_{jk} - \overline{\Gamma}_{ij}^{h} \overline{R}_{hk} - \overline{\Gamma}_{ij}^{\bar{h}} \underbrace{\overline{R}_{\bar{h}k}}_{0} - \overline{\Gamma}_{ik}^{h} \overline{R}_{jh} - \overline{\Gamma}_{ik}^{\bar{h}} \underbrace{\overline{R}_{j\bar{h}}}_{0}$$

$$= \left(\partial_i - y^s \Gamma_{si}^{p} \partial_{\bar{p}}\right)\left[2R_{jk} + (1-n) g_{jk}\right] - \Gamma_{ij}^{h}\left[2R_{hk} + (1-n) g_{hk}\right]$$

$$-\Gamma_{ik}^{h}\left[2R_{jh} + (1-n) g_{jh}\right]$$

$$= 2\left[\partial_i R_{jk} - \Gamma_{ij}^{h} R_{hk} - \Gamma_{ik}^{h} R_{jh}\right] + (1-n)\underbrace{\left(\partial_i g_{jk} - \Gamma_{ij}^{h} g_{hk} - \Gamma_{ik}^{h} g_{jh}\right)}_{\nabla_i g_{jk}}$$

$$= 2\nabla_i R_{jk} + (1-n)\underbrace{\nabla_i g_{jk}}_{0}$$

$$\overline{\nabla}_i \overline{R}_{jk} = 2\nabla_i R_{jk}$$

ve benzer olarak

1) $\overline{\nabla}_i \overline{R}_{jk} = 2\nabla_i R_{jk}$

2) $\overline{\nabla}_i \overline{R}_{j\bar{k}} = 0$

3) $\overline{\nabla}_i \overline{R}_{\bar{j}k} = 0$

4) $\overline{\nabla}_i \overline{R}_{\bar{j}\bar{k}} = 0$

5) $\overline{\nabla}_{\bar{i}} \overline{R}_{jk} = 0$

6) $\overline{\nabla}_{\bar{i}} \overline{R}_{j\bar{k}} = 0$

7) $\overline{\nabla}_{\bar{i}} \overline{R}_{\bar{j}k} = 0$

8) $\overline{\nabla}_{\bar{i}} \overline{R}_{\bar{j}\bar{k}} = 0$

elde edilir.

Teorem 4.4.2: (M_n, g) Riemann manifold ve $(T(M_n), \tilde{g})$ de M_n nin tanjant demeti olsun. $(T(M_n), \tilde{g})$ tanjant demeti $\overline{\nabla}$ semi-simetrik metrik konneksiyonun lokal Ricci simetrik olması için gerek ve yeter şart (M_n, g) baz manifoldunun lokal Ricci simetrik olmasıdır.

4.5. Tanjant Demette Semi-Simetrik Metrik Konneksiyonun Skaler Eğriliği

$\bar{\tau}$, $\overline{\nabla}$ semi-simetrik metrik konneksiyonunun skaler eğriliğini göstersin. Bu taktirde,

$$\bar{\tau} = \overline{R}_{\beta\gamma} \tilde{g}^{\beta\gamma}$$

olmak üzere skaler eğrilik,

$$\begin{aligned}
\bar{\tau} &= \overline{R}_{j\gamma} \tilde{g}^{j\gamma} + \overline{R}_{\bar{j}\gamma} \tilde{g}^{\bar{j}\gamma} \\
&= \overline{R}_{jk} \underbrace{\tilde{g}^{jk}}_{0} + \overline{R}_{\underbrace{j\bar{k}}_{0}} \tilde{g}^{j\bar{k}} + \underbrace{\overline{R}_{\bar{j}k}}_{0} \tilde{g}^{\bar{j}k} + \overline{R}_{\bar{j}\bar{k}} \underbrace{\tilde{g}^{\bar{j}\bar{k}}}_{0} \\
&= 0
\end{aligned}$$

dır.

Teorem 4.5.1: (M_n, g) Riemann manifold ve $(T(M_n), \tilde{g})$ de M_n nin tanjant demeti olsun. $(T(M_n), \tilde{g})$ de tanımlı $\overline{\nabla}$ semi-simetrik metrik konneksiyonun skaler eğriliği sıfırdır.

5. SONUÇ

Sunulan bu tezde ilk olarak, $T(M_n)$ tanjant demette adapte olmuş çatıya göre kovaryant ve kontravaryant bileşenleri sırasıyla,

$$(\tilde{g}_{CB}) = \begin{pmatrix} 0 & g_{ij} \\ g_{ij} & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } (\tilde{g}^{CB}) = \begin{pmatrix} 0 & g^{ij} \\ g^{ij} & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde olan $\tilde{g}$ tam lift (II) metriği ve

$$\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\gamma\beta} = \frac{1}{2}\tilde{g}^{\alpha\varepsilon}(E_\gamma \tilde{g}_{\varepsilon\beta} + E_\beta \tilde{g}_{\gamma\varepsilon} - E_\varepsilon \tilde{g}_{\gamma\beta}) + \frac{1}{2}(\Omega_{\gamma\beta}{}^{\alpha} + \Omega^{\alpha}{}_{\gamma\beta} + \Omega^{\alpha}{}_{\beta\gamma})$$

eşitliği kullanılarak $\tilde{\nabla}$ Riemann konneksiyonuna ait konneksiyon katsayıları hesaplanmıştır.

İkinci olarak, hesaplanan bu konneksiyon katsayıları $\left(\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma}\right)$ vasıtasıyla,

$$\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma} = \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma} + U_{\alpha\beta}^{\gamma}$$

şartını sağlayan, $\bar{\nabla}$ semi-simetrik metrik konneksiyonunun katsayılarını $\left(\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma}\right)$ elde etmek için $(1,2)$ tipli $U_{\alpha\beta}^{\gamma}$ tensörleri belirlenmiştir. Bu yapılırken $\bar{\nabla}$ konneksiyonunun,

$$\bar{\nabla}_k \tilde{g}_{\alpha\beta} = 0$$

metrik olma özelliğinden, $(1,2)$ tipli $U_{\alpha\beta}^{\gamma}$ tensörlerinin,

$$U_{k\alpha\beta} + U_{k\beta\alpha} = 0$$

alttaki son iki indise göre antisimetrik olması gerektiği gösterilmiştir.

Üçüncü olarak, $\tilde{\nabla}$ ve $\overline{\nabla}$ konneksiyonlarına ait burulma tensörleri ve konneksiyon katsayıları arasındaki

$$\overline{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma} = \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma} + U_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma}$$

şart dikkate alınarak

$$\overline{T}_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma} = \underbrace{\tilde{T}_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma}}_{=0} + U_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma} - U_{\beta\alpha}^{\ \ \gamma}$$

$$\overline{T}_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma} = U_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma} - U_{\beta\alpha}^{\ \ \gamma}$$

olduğu ve buradan da $\overline{\nabla}$ konneksiyonun burulma tensörü ile $(0,3)$ tipli $U_{\alpha\beta\gamma}$ tensörleri arasında

$$\overline{T}_{\alpha\beta\gamma} + \overline{T}_{\gamma\alpha\beta} + \overline{T}_{\gamma\beta\alpha} = 2.U_{\alpha\beta\gamma}$$

şeklinde bir ilişkinin mevcut olduğu gösterilmiştir. $\overline{\nabla}$ konneksiyonunun semi-simetrik olması için burulma tensörü,

$$\overline{T}_{ij}^{\overline{k}} = y_j \delta_i^k - y_i \delta_j^k$$

olarak alınmış ve sırasıyla önce $(0,3)$ tipli $\overline{T}_{\alpha\beta\gamma}$ burulma tensörleri ile akabinde bu tensörlere bağlı olarak $(1,2)$ tipli $U_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma}$ tensörleri hesaplanmıştır. Hesaplanan $U_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma}$ tensörleri de kullanılarak $\overline{\nabla}$ semi-simetrik metrik konneksiyonunun katsayıları elde edilmiştir.

Dördüncü olarak,

$$\overline{R}_{\alpha\beta\gamma}{}^{\sigma} = E_{\alpha}\overline{\Gamma}_{\beta\gamma}{}^{\sigma} - E_{\beta}\overline{\Gamma}_{\alpha\gamma}{}^{\sigma} + \overline{\Gamma}_{\alpha\varepsilon}{}^{\sigma}\overline{\Gamma}_{\beta\gamma}{}^{\varepsilon} - \overline{\Gamma}_{\beta\varepsilon}{}^{\sigma}\overline{\Gamma}_{\alpha\gamma}{}^{\varepsilon} - \Omega_{\alpha\beta}{}^{\varepsilon}\overline{\Gamma}_{\varepsilon\gamma}{}^{\sigma}$$

eşitliği kullanılarak $T(M_n)$ de $\overline{\nabla}$ semi-simetrik metrik konneksiyonunun $\overline{R}$ eğrilik tensörünün bileşenleri bulunmuş ve $(0,4)$ tipli $\overline{R}$ eğrilik tensörünün ilk iki ve son iki indise göre antisimetrik olduğu; ilk iki ve son iki indisin yer değişiminin ise M_n deki g Riemann metriğinin

$$g_{ik}g_{jh} - g_{jk}g_{ih} = 0$$

şartını sağlamasıyla mümkün olduğu gösterilmiştir.

Beşinci olarak, $T(M_n)$ de $\overline{\nabla}$ semi-simetrik metrik konneksiyonunun Ricci tensörünün bileşenleri bulunarak konneksiyonun Ricci tensörünün simetrik olduğu ifade edilmiştir. Ayrıca, $(T(M_n), \tilde{g})$ tanjant demetin $\overline{\nabla}$ semi-simetrik metrik konneksiyona göre ancak ve ancak (M_n, g) baz manifoldu lokal Ricci simetrik ise lokal Ricci simetrik olacağı gösterilmiştir.

Altıncı olarak, $T(M_n)$ de $\overline{\nabla}$ semi-simetrik metrik konneksiyonun skaler eğriliğinin sıfır olduğu gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

Abbassi, M.T.K and Sarih, M., 2005a. On Riemannian g-natural metrics of the form $a^{S}g+b^{H}g+c^{V}g$ on the tangent bundle of a Riemannian manifold (M,g). Mediterr. J. Math., 2 (1), 19-43.

Abbassi, M. T. K. and Sarih, M., 2005b. On some hereditary properties of Riemannian g natural metrics on tangent bundles of Riemannian manifolds. Dif. Geo. and its App., 22, 19-47.

Agashe, N.S. and Chafle, M.R.,1992. A semi-symmetric non-metric connection on a Riemannian manifold. Indian J. Pure Appl. Math., 23, 399-409.

Altunbaş, M., 2014. Keyfi Tipli Tensör Demetlerinin Geometrisi. Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Bilen, L., 2014. $G=a^{S}g+b^{H}g+c^{V}g$ Formundaki Riemann Metriğine Sahip Tanjant Demette Bazı Geometrik Vektör Alanları ve G Metriği ile İlgili Bazı Sonuçlar. Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Çağlar, F. Ö., 2011. Kompleks Uzay Formlarında Mekanik Sistemler. Yüksek Lisans Tezi, Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Denizli.

Dombrowski, P., 1962. On the geometry of the tangent bundle. J. Reine Angew, 210, 73–88.

Duggal, K.L. and Sharma, R., 1986. Semi-symmetric metric connection in a semi-Riemannian manifold. Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 17, 1276-1283.

Friedmann, A. and Schouten, J. A., 1924. Über die geometrie der halbsymmetrischen übertragung. Math. Zeitschr., 21, 211-223.

Gezer, A. and Bilen, L., 2012. On infinitesimal conformal transformations with respect to the Cheeger-Gromoll metric. An. Şt. Univ. Ovidius Constanta, 20(1), 113-128.

Gezer, A., Bilen, L., Karaman, Ç. and Altunbaş M., 2015. Curvature properties of Riemannian metric of the form ${}^{S}gf+{}^{H}g$ on the Tangent Bundle over a Riemannian manifold (M,g). IECG, 8(2), 181-194.

Gudmundsson, S. and Kappos, E., 2002. On the geometry of tangent bundles. Exp. Math., 20, 1-41.

Gürler, F.,2012. Katlı Çarpım Manifoldları. Yüksek Lisans Tezi, Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Balıkesir.

Hacısalihoğlu, H. H.,1998. Diferensiyel Geometri. Hacısalihoğlu Yayıncılık, 269 s, Ankara.

Hayden, H.A.,1932. Subspace of space with torsion, Proc. London Math. Soc., 34, 27-50.

Hicks, N.J., 1971. Notes on Differential Geometry. Van Nostrand Reinhold Company, 183 p, New York.

Imai, T.,1972. Notes on semi-symmetric metric connections. Tensor (N.S.), 24, 293-296.

Kandatu, A., 1966. Tangent bundle of a manifold with a non-linear connection. Kodai Mathematical Seminar Reports, 18(4), 259-270.

Karaman, Ç., 2015. Riemann Manifoldları Üzerindeki Bazı Özel Yapılar ve F-Konneksiyonlar. Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Kobayashi, S. and Nomizu K., 1963. Foundations of Differential Geometry I. John Wiley&Sons, 329 p, New York, London.

Konar, A. and Biswas, B., 2001. Lorentzian Manifold that admits a type of semi-symmetric metric connection. Bulletin of the Calcutta Mathematical Society, 93(5), 427-434.

Kowalski, O., 1971. Curvature of the induced Riemannian metric on the tangent bundle of a Riemannian manifold. J. Reine Angew. Math., 250, 124-129.

Kühnel, W., 2005. Differential Geometry curves-surfaces-manifolds. American Mathematical Society, 380 p, New York.

Liang, Y., 1994. On semi-symmetric recurrent-metric connection, N. S., 55, 107-112.

Musso, E. and Tricceri, F., 1988. Riemannian metrics on tangent bundles. Ann. Mat. Pura. Appl., 150 (4), 1-19.

Nakao, Z., 1976. Submanifolds of a Riemannian Manifold with Semi-Symmetric Metric Connections. American Mathematical Society, 54, 261-266.

O' Neill B., 1983. Semi-Riemanian Geometry. Academic Press, 468 p, London.

Özkan, M., 2006. Hiperyüzeylerin Vektör Demetlerine Taşınması. Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Pak, E.,1969. On the pseudo-Riemannian spaces. J. Korean Math. Soc., **6**, 23-31.

Pandey, S.K., Pandey G.,Tiwari K. and Singh R.N.,2014. On a Semi-Symmetric Non-Metric Connection in an Indefinite Para Sasakian Manifold. LMCS, 12, 159-172.

Prvanovic, M.,1975. On pseudo metric semi-symmetric connections, Publ. De L. Institute Math., N.S., 18(32), 157-164.

Salimov, A.A. ve Mağden, A., 2008. Diferensiyel Geometri. Aktif Yayınevi, 326 s, Erzurum.

Salimov, A.A. and Kazimova, S., 2009. Geodesics of the Cheeger-Gromoll metric. Turk. J. Math., **33**, 99-105.

Sasaki, S., 1958. On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds. Tohoku Math. J., 10, 338-358.

Sekizawa, M., 1991. Curvatures of tangent bundles with Cheeger-Gromoll metric. Tokyo J. Math., 14 (2), 407-417.

Sengupta, J., De, U.C. and Binh, T.Q., 2000. On a type of semi-symmetric non-metric connection on a Riemannian manifold. Indian J. Pure Appl. Math., 31, 1659-1670.

Sular, S. and Özgür, C., 2011. Warped products with a semi-symmetric metric connection. Taiwanese J. of Math., 15(4), 1701–1719.

Şahin, B., 2012. Manifoldların Diferensiyel Geomerisi. Nobel Yayıncılık, 294 s, Ankara.

Şahin, B., 2015. Manifoldlar Teorisi. 13.Geometri Sempozyumu, İstanbul.

Şimşir, F.M.,2005. Conformal vector fields with respect to the Sasaki metric tensor field. Doktora Tezi, ODTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Şuhubi, E. S., 2008. Dış Form Analizi. TÜBA, 646 s, Ankara.

Yano, K., 1970. On Semi-symmetric Metric Connections. Rev.Roumanie Math. Pures Appl., 15, p. 134-138.

Yano, K. and Ishihara S., 1967. Horizontal Lifts of Tensor Fields and Connections to Tangent Bundles. Jour. Math. and Mech., 16, 1015-1030.

Yano, K. and Ishihara S., 1973. Tangent and Cotangent Bundles. Marcel Dekker, Inc., New York.

Yano, K. and Kobayashi S., 1966, Prolongations of Tensor Fields and Connections to Tangent Bundles I - General Theory-. J. Math. Soc. Japan, 18, 194-210.

Yano, K. and Kon M., 1984. Structures on Manifolds. World Scientific Publishing, 508 p, Singapore.

Yano, K. and Ledger A.J., 1965. The tangent bundle of a locally symmetric space. J. London Math. Soc., 40, 487-492.

Yücesan, A., 2008. On Semi-Riemannian Submanifolds of a Semi-Riemannian Manifold with a Semi-Symmetric Metric Connection. Kuwait Journal of Science and Engineering,35(1A), 53-69.

Wilkins, D.R., 2005. A Course in Riemanian Geometry. 72 p.

ÖZGEÇMİŞ

1983 yılında Erzurum'un Tortum ilçesinde doğan Erkan KARAKAŞ, ilk, orta ve lise öğrenimini Erzurum'da tamamladı. Lisans eğitimini 2003-2007 yılları arasında Atatürk Üniversitesi K. Karabekir Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü'nde aldı. MEB'de ilk ataması 2008 yılında yapılan Erkan KARAKAŞ, Çat ve Yakutiye ilçelerindeki çeşitli okullarda görev yaptı. Halen Ziyâeddin Fahri Fındıkoğlu Ortaokulu'nda (Yakutiye) ilköğretim matematik öğretmeni olarak görevini sürdürmektedir.