



**SABİT SIRT UZAKLIKLI YÜZEYLER  
ÜZERİNE**

**Semra YURTTANÇIKMAZ**

**Doktora Tezi  
Matematik Anabilim Dalı  
Geometri Bilim Dalı  
Doç. Dr. Ömer TARAKCI  
2016  
Her Hakkı Saklıdır**

**ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DOKTORA TEZİ**

**SABİT SIRT UZAKLIKLI YÜZEYLER ÜZERİNE**

**Semra YURTTANÇIKMAZ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI  
Geometri Bilim Dalı**

**ERZURUM  
2016**

**Her Hakkı Saklıdır**



T.C.  
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



TEZ ONAY FORMU

SABİT SIRT UZAKLIKLI YÜZEYLER ÜZERİNE

Doç. Dr. Ömer TARAKCI danışmanlığında, Semra YURTTANÇIKMAZ tarafından hazırlanan bu çalışma 18/01/2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı – Geometri Bilim Dalı'nda Doktora Tezi olarak **oybirliği** ile kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Yusuf YAYLI

İmza :

Üye : Prof. Dr. Abdullah MAĞDEN

İmza :

Üye : Prof. Dr. Kazım İLARSLAN

İmza :

Üye : Prof. Dr. Abdullah KAPLAN

İmza :

Üye : Doç. Dr. Ömer TARAKCI

İmza :

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu 27.10.2016 tarih ve 41/8 nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Ertan YILDIRIM  
Enstitü Müdürü

Prof. Dr. Cavit KAZAZ  
Enstitü Müdürü

**Not:** Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

## ÖZET

Doktora Tezi

### SABİT SIRT UZAKLIKLIL YÜZEYLER ÜZERİNE

Semra YURTTANÇIKMAZ

Atatürk Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı  
Geometri Bilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ömer TARAKCI

Bu doktora tez çalışmasında, ilk olarak bazı özel yüzeylerin sabit sırt uzaklıklı yüzeylerinin parametrik denklemleri bulunarak Maple programı yardımıyla grafikleri elde edilmiştir. İkinci olarak  $M$  yüzeyi üzerinde yatan bir  $\alpha$  eğrisi ile, bu eğrinin  $M^f$  sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntüsü olan  $\beta$  eğrisinin Darboux çatıları ve eğrilikleri kıyaslanmıştır. Üçüncü olarak bir  $M$  yüzeyinin fokal yüzeyleri, bu yüzeyin  $M^f$  sabit sırt uzaklıklı yüzeyleri vasıtasıyla elde edilmiş, ayrıca  $M$  ve  $M^f$  yüzeylerinin Meusnier kürelerinin merkezlerinin çakışma koşulları verilmiştir. Ve son olarak da bir regle yüzeyin sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin regle yüzey olabilmesi için sağlaması gereken koşullar araştırılmıştır.

**2016, 100 sayfa**

**Anahtar Kelimeler:** Sabit sırt uzaklıklı yüzey, fokal yüzey, regle yüzey, paralel yüzey, Darboux çatısı, normal eğrilik, geodezik eğrilik, geodezik burulma, Meusnier teoremi.

## ABSTRACT

Ph. D. Thesis

### ON THE PARALLEL-LIKE SURFACES

Semra YURTTANÇIKMAZ

Atatürk University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Mathematics  
Geometry Science

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ömer TARAKCI

In this thesis, firstly parametric equations of parallel-like surfaces of some special surfaces are calculated and it's obtained graphics of these surfaces with the help of Maple program. Second, Darboux frame and curvatures of the curve  $\alpha$  lying on the surface  $M$  and the image curve  $\beta$  lying on the surface  $M^f$  are compared. Third, focal surfaces of a surface  $M$  have been found by means of parallel-like surfaces  $M^f$ , as well as it's given when centers of Meusnier sphere of the surfaces  $M$  and  $M^f$  intersect. And finally, requirements in order parallel-like surface of a ruled surface is also ruled surface are investigated.

**2016, 100 pages**

**Keywords:** Parallel-like surfaces, focal surface, ruled surface, parallel surface, Darboux frame, normal curvature, geodesic curvature, geodesic torsion, Meusnier sphere.

## TEŞEKKÜR

Doktora tezi olarak sunduğum bu alıŐma, Atatürk Üniversitesi Fen Fakóltesi Matematik Bölümü'nde yapılmıŐtır.

Bu tezi hazırlarken karŐılaŐtıđım engelleri aŐmamı sağlayan, beni her adımda bilgilendiren ve destek veren kıymetli hocam Sayın Doç. Dr. Ömer TARAKCI'ya saygı ve minnet duyar, teşekkür ederim.

Bilgilerine her zaman ihtiyaç duyacağım ve hiçbir konuda yardımlarını esirgemeyen değerli hocalarım Sayın Prof. Dr. Arif SALİMOV, Sayın Prof. Dr. Yusuf YAYLI, Sayın Prof. Dr. Abdullah MAĞDEN, Sayın Prof. Dr. Abdullah KAPLAN, Sayın Prof. Dr. Kazım İlarıslan, Sayın Prof. Dr. Necmi CENGİZ, Sayın Doç. Dr. KürŐat AKBULUT, Sayın Doç. Dr. Murat İŐCAN ve Sayın Doç. Dr. Aydın GEZER'e çok teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Doktora süresince ilgi ve yardımlarını esirgemeyen, bana her noktada destek olan dostlarım Sayın Yrd. Doç. Dr. Sezai KIZILTUĐ ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Ali ÇAKMAK'a çok teşekkür ederim.

Her zaman baŐarılı olacağıma yürekten inanarak bütün sıkıntılarımı paylaŐan ve daima yanımda olan sevgili aileme Őükranlarımı sunarım.

**Semra YURTTANÇIKMAZ**

**Aralık 2015**

## İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ.....	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	viii
<b>1. GİRİŞ.....</b>	<b>1</b>
<b>2. KURAMSAL TEMELLER.....</b>	<b>4</b>
2.1. Diferensiyellenebilir Manifoldlar.....	4
2.2. Riemann Manifoldu ve Kovaryant Türev.....	7
2.3. Öklid Uzayında Eğriler.....	8
2.4. Öklid Uzayında Yüzeyleer.....	10
2.4.1. Yüzeyleer parametrisasyonu.....	10
2.4.2. Yüzeyleer teğet düzlemi.....	12
2.4.3. Yüzeyleer birinci esas formu.....	12
2.4.4. Gauss dönüşümü ve yüzeyleer eğriliği.....	15
2.4.5. Normal eğrilik ve yüzeyleer ikinci esas formu.....	20
2.4.6. Yüzeyleer noktalarının sınıflandırılması.....	21
<b>3. MATERYAL ve YÖNTEM.....</b>	<b>22</b>
3.1. Eğri-Yüzeyleer İkilişinin Eğrilikleri.....	22
3.2. Sabit Sırt Uzaklıklı Eğriler.....	24
3.3. Paralel Yüzeyleer.....	25
3.4. Sabit Sırt Uzaklıklı Yüzeyleer.....	29
3.4.1. Sabit sırt uzaklıklı yüzeyleer parametrik ifadesi.....	32
3.4.2. Sabit sırt uzaklıklı yüzeyleer şekil operatörü.....	35
3.5. Fokal Eğriler ve Yüzeyleer.....	39
3.6. Regle Yüzeyleer.....	41
<b>4. ARAŞTIRMA BULGULARI.....</b>	<b>42</b>
4.1. Sabit Sırt Uzaklıklı Yüzeyleer Örnekleri.....	42

4.2. Yüzey Üzerindeki $\alpha$ Parametre Eğrisinin Sabit Sırt Uzaklıklı Yüzey	
Üzerindeki Görüntüsü .....	51
4.3. Sabit Sırt Uzaklıklı Yüzeyler ile Fokal Yüzeyler Arasındaki İlişki .....	64
4.3.1. $M$ ve $M^f$ yüzeylerinin Meusnier kürelerinin merkezlerinin incelenmesi .....	72
4.4. Regle Yüzeyin Sabit Sırt Uzaklıklı Yüzeyi.....	80
<b>5. SONUÇ .....</b>	<b>86</b>
KAYNAKLAR .....	99
ÖZGEÇMİŞ .....	101





## SİMGELER DİZİNİ

$C^\infty(M, \mathbb{R})$	$M$ den $\mathbb{R}$ ye diferensiyellenebilir fonksiyonların kümesi
$D$	Yönlü türev
$F_1, F_2$	Yüzeyin fokal yüzeyleri
$F_*$	$F$ dönüşümünün diferensiyel dönüşümü
$g$	Metrik tensör
$H$	Yüzeyin ortalama eğriliği
$I$	Yüzeyin birinci esas formu
$II$	Yüzeyin ikinci esas formu
$III$	Yüzeyin üçüncü esas formu
$K$	Yüzeyin Gauss eğriliği
$k_i$	Eğrinin $i$ . eğriliği
$\kappa_1, \kappa_2$	Yüzeyin asli eğrilikleri
$\kappa_n$	Eğri-yüzey ikilisinin normal eğriliği
$\kappa_g$	Eğri-yüzey ikilisinin geodezik eğriliği
$M$	Manifold, yüzey
$M_r$	$M$ yüzeyinin paralel yüzeyi
$M^f$	$M$ yüzeyinin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi
$N$	Yüzeyin birim normal vektör alanı ve Gauss dönüşümü
$\vec{r}$	Parametrelendirilmiş yüzey
$R$	Eğrilik tensörü
$S$	Şekil operatörü, atlas
$\{\vec{T}, \vec{X}, \vec{N}\}$	Eğri-yüzey ikilisinin Darboux çatısı
$T_P M$	$M$ nin $P$ noktasındaki tanjant uzayı
$t_r$	Eğri-yüzey ikilisinin geodezik burulması
$\chi(M)$	$M$ manifoldu üzerindeki vektör alanlarının kümesi
$V_P$	$P$ noktasındaki tanjant vektör
$\nabla$	Öklid uzayındaki afin konneksiyon
$\nabla_X$	$X$ vektör alanına göre kovaryant türev

$[, ]$	Lie parantez operatörü
$\alpha$	Eğri
$\phi$	Yüzeyin parametrizasyonu
$\psi$	Sabit sırt uzaklıklı yüzeyin parametrizasyonu



## ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1.	Diferensiyellenebilir yapı.....	5
Şekil 2.2.	M yüzeyi üzerindeki koordinat şebekesi .....	10
Şekil 2.3.	M yüzeyi üzerinde tanımlanan yönlü türev ve kovaryant türevin geometrik gösterimi .....	16
Şekil 3.1.	Sabit sırt uzaklıklı eğri .....	24
Şekil 3.2.	Sabit sırt uzaklıklı yüzey .....	29
Şekil 4.1.	Dik dairesel silindir ve onun sabit sırt uzaklıklı yüzeyi .....	42
Şekil 4.2.	Küre ve onun sabit sırt uzaklıklı yüzeyi.....	43
Şekil 4.3.	Helikoid ve onun sabit sırt uzaklıklı yüzeyi.....	44
Şekil 4.4.	Elipsoid ve onun sabit sırt uzaklıklı yüzeyi .....	45
Şekil 4.5.	Paraboloid ve onun sabit sırt uzaklıklı yüzeyi .....	46
Şekil 4.6.	Eliptik paraboloid ve onun sabit sırt uzaklıklı yüzeyi.....	47
Şekil 4.7.	Tek kanatlı hiperboloid ve onun sabit sırt uzaklıklı yüzeyi .....	48
Şekil 4.8.	İki kanatlı hiperboloid ve onun sabit sırt uzaklıklı yüzeyi .....	49
Şekil 4.9.	Eyer yüzeyi ve onun sabit sırt uzaklıklı yüzeyi.....	50
Şekil 4.10.	$Sp\{\phi_u, N_p\}$ düzlemindeki $E_p$ vektörleri boyunca oluşan farklı sabit sırt uzaklıklı yüzeylerin normal doğrultuları ve bu doğrultuların kesişim noktası .....	66
Şekil 4.11.	Helikoid ve onun sabit sırt uzaklıklı yüzeyi.....	82
Şekil 4.12.	$\lambda_1 = \lambda_3 = 0$ alındığında helikoid yüzeyinin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi .....	83

## 1. GİRİŞ

Bu doktora tez çalışmasında incelenen sabit sırt uzaklıklı yüzey kavramı ilk olarak Tarakcı ve Hacısalihoğlu tarafından tanımlanmış olup bu tanımlama sabit sırt uzaklıklı eğrinin tanımından ilham alınarak gerçekleştirilmiştir (Tarakcı 2002).

Bir eğri için sabit sırt uzaklıklı eğri kavramı Hans Vogler tarafından ortaya atılmış ve Vogler (1963), makalesinde bir uzay eğrisinin tors yüzeyi üzerine çizilmiş sabit sırt uzaklıklı eğrilerin Frenet çatısı tarafından teşkil edilen geometrik özellikleri incelemiştir.

Hacısalihoğlu (1968), bir uzay eğrisinin Frenet çatısının eğri boyunca hareketi esnasında, *rektifiyan* düzlemine sıkı suretle bağlı bir doğrunun oluşturduğu açılmayan bir yüzey üzerine çizilmiş parametre eğrilerinin (sabit sırt uzaklıklı eğrilerden daha genel) özelliklerini incelemiştir.

Tarakcı (2002) ise Vogler'in ileri sürdüğü problemde bir eğri yerine bir yüzey almış ve ortaya çıkan yeni yüzeye ilk yüzeyin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi olarak bakmıştır. Söz konusu yüzeyler arasındaki geometrik ve diferensiyel geometrik özellikleri incelemiştir.

Tarakcı ve Hacısalihoğlu (2004), sabit sırt uzaklıklı yüzeyin özel bir hali olan, paralel yüzeylerin bazı teorem ve özelliklerini, sabit sırt uzaklıklı yüzeyler için elde etmiştir.

Daha sonraki yıllarda ise Aktan, Görgülü, Özusağlam ve Ekici (2006), sabit sırt uzaklıklı yüzeylerin eşlenik tanjant vektörlerini ve asimptotik yönlerini ele almış, Sağlam ve Kalkan (2010),  $E_1^3$  Minkowski uzayında alınan bir yüzeyin sabit sırt uzaklıklı yüzeyini incelemiştir.

Bu çalışmada ise özetle, sabit sırt uzaklıklı yüzeyler örneklerle analiz edilmiş, bu yüzeylerin üzerinde yatan eğriler incelenmiş ve fokal yüzeyler ile olan bağlantısı araştırılmıştır. İlaveten, bir regle yüzeyin sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin de regle yüzey olabilmesi için gereken koşullar verilmiştir.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm “Giriş” bölümüdür. İkinci bölüm “Kuramsal Temeller” başlığı adı altında tezimizde kullandığımız temel tanım ve teoremleri içermektedir. Üçüncü bölüm “Materyal ve Yöntem” olarak isimlendirilmiş olup, bu çalışmada elde ettiğimiz teorem ve sonuçlara ulaşabilmek için kullandığımız kavramlardan oluşmaktadır.

Dördüncü bölüm “Araştırma Bulguları” adıyla ifade edilerek tezimizin orijinal kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde ilk olarak  $E^3$  te alınan özel bir  $M$  yüzeyinin sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin parametrik ifadesi hesaplanmış ve elde edilen yeni yüzeyin grafiği Maple programı yardımıyla çizilerek söz konusu yüzeyler arasındaki farklar ve benzerlikler incelenmiştir. İkinci olarak, bir  $M$  yüzeyi üzerinde alınan birim hızlı  $\alpha(s)$  parametre eğrisi ile bu eğrinin  $M^f$  sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntüsü olan  $\beta(s)$  eğrisi ele alınmış, bu iki eğrinin normal eğrilikleri, geodezik eğrilikleri ve geodezik burulmaları, hem genel hem de bazı özel şartlar altında kıyaslanmış ve özel durumların meydana getirdiği sonuçlar verilmiştir. İlaveten,  $\alpha(s)$  ve  $\beta(s)$  eğrilerinin birinci eğrilikleri hesaplanarak karşılaştırılmıştır. Üçüncü olarak, bir yüzeyin sabit sırt uzaklıklı yüzeyleri ile aynı yüzeyin fokal yüzeyleri arasındaki ilişki araştırılmıştır.

Fokal yüzeyler özel doğru kongrüansları (eşleşim) olarak bilinen yüzeylerdir. Doğru kongrüansları ilk defa Hagen, Pottmann ve Divivier tarafından 1991 yılında görüntüleme alanında tanımlanmıştır (Hagen *et al.* 1991). Doğru kongrüansları bir uçaktaki basınç ve ısı dağılımını, sıcaklık, yağmur ve ozon tabakasını görüntülemek için kullanılabilir.

Fokal yüzeyler ayrıca yüzeylerin niteliğini analiz etmek için de kullanılmış olup, bunun için geliştirilmiş fokal yüzey kavramı gündeme gelmiştir. Geliştirilmiş fokal yüzeyler Hagen ve Hahmann (1992) tarafından yeni bir yüzey sorgulama aracı olarak sunulmuştur. Yazarlar bu çalışmada bir yüzeyin konveksliğini test etmek, bükülme noktalarının yerini saptamak, düzlenme noktaları ile yüzeyin teknik düzgünlüğünü görselleştirebilmek için geliştirilmiş fokal yüzeyleri kullanmışlardır.

Bu tez çalışmasında ise, herhangi bir  $M$  yüzeyinin  $F_1$  ve  $F_2$  fokal yüzeyleri, bu yüzeyin sabit sırt uzaklıklı yüzeyleri vasıtasıyla elde edilmiştir. Ayrıca  $M$  yüzeyi ve onun sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin Meusnier kürelerinin merkezlerinin çakışma koşulları incelenmiştir.

Ve son olarak da bir regle yüzeyin sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin parametrik ifadesi elde edilmiş ve bulunan bu yeni yüzeyin regle yüzey olabilmesi için sağlaması gereken koşullar araştırılmıştır.

## 2. KURAMSAL TEMELLER

### 2.1. Diferensiyellenebilir Manifoldlar

**Tanım 2.1.1:** Bir  $M$  topolojik uzayı için aşağıdaki önermeler doğru ise,  $M$  ye  $n$ -boyutlu topolojik manifold denir.

- (1)  $M$  bir Hausdorff uzayıdır.
- (2)  $M$  nin her bir açık alt kümesi  $E^n$  ye veya  $E^n$  nin bir açık alt kümesine homeomorftur.
- (3)  $M$  sayılabilir çoklukta açık alt kümelerle örtülebilir.

**Tanım 2.1.2:**  $M$  bir  $n$ -boyutlu topolojik manifold ve  $U$  da  $E^n$  nin bir açık alt kümesi olsun. Bu durumda Tanım 2.1.1 gereğince  $W \subset M$  olmak üzere,

$$\psi: U \subset E^n \rightarrow W \subset M$$

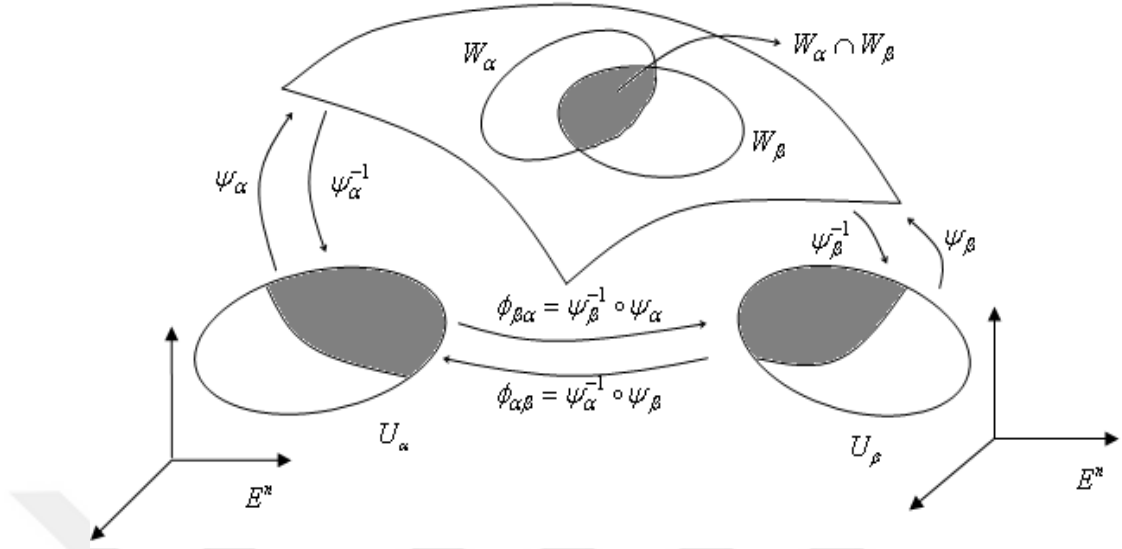
homeomorfizmi vardır.  $(\psi, W)$  ikilisine  $M$  de bir koordinat komşuluğu veya harita denir.

$u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in U$  için  $\psi(u) \in M$  dir ve

$$\psi(u) = (x_1(u), x_2(u), \dots, x_n(u)), \quad x_i(u) \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq i \leq n$$

dir. Burada  $x_i(u)$  reel sayısına  $\psi(u) \in M$  noktasının  $i$ -yinci koordinatı denir ve  $u_i: U \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonuna da  $u$  nun  $i$ -yinci Öklid koordinat fonksiyonu denir.

**Tanım 2.1.3:**  $M$  bir topolojik  $n$ -manifold ve  $\alpha$  indislerinin kümesi  $A$  olmak üzere,  $M$  nin bir açık örtüsü  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  olsun.  $E^n$  de  $U_\alpha$  ya bir  $\psi_\alpha$  homeomorfizmi altında homeomorf olan  $M$  deki açık küme  $W_\alpha$  olsun. Bu şekildeki  $(\psi_\alpha, W_\alpha)$  haritalarının  $S = \{\psi_\alpha, W_\alpha\}_{\alpha \in A}$  koleksiyonuna bir atlas denir.



**Şekil 2.1.** Diferensiyellenebilir yapı

$(\psi_\alpha, W_\alpha)$  ve  $(\psi_\beta, W_\beta)$  haritaları için  $W_\alpha \cap W_\beta \neq \emptyset$  ise

$$\phi_{\beta\alpha}: \psi_\alpha^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta) \rightarrow \psi_\beta^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta)$$

$$\phi_{\alpha\beta}: \psi_\beta^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta) \rightarrow \psi_\alpha^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta)$$

homeomorfizmlerini tanımlayabiliriz.

**Tanım 2.1.4:**  $M$  bir topolojik  $n$ -manifold ve  $M$  nin bir atlası  $S = \{\psi_\alpha, W_\alpha\}_{\alpha \in A}$  olsun.  $S$  atlası için  $W_\alpha \cap W_\beta \neq \emptyset$  olmak üzere  $\forall \alpha, \beta \in A$  ya karşılık  $\phi_{\alpha\beta}$  ve  $\phi_{\beta\alpha}$  fonksiyonları  $C^k$  sınıftan diferensiyellenebilir ise  $S$  ye  $C^k$  sınıftan bir diferensiyellenebilir yapı denir ve  $M$  üzerinde  $C^k$  sınıftan bir diferensiyellenebilir yapı tanımlanabilirse  $M$  ye  $C^k$  sınıftan diferensiyellenebilir manifold denir.

Bir  $M$  manifoldu üzerindeki bütün reel değerli diferensiyellenebilir fonksiyonların kümesi  $C^\infty(M, \mathbb{R})$  ile gösterilsin.

$$C^\infty(M, \mathbb{R}) = \{f \mid f: M \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ fonksiyonu diferensiyellenebilir}\}$$

Eğer  $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  ise  $f + g$  toplama ve  $f \cdot g$  çarpma işlemlerine göre,  $C^\infty(M, \mathbb{R})$  değişimli bir halkadır.



**Tanım 2.1.5:**  $M$  manifoldunun bir  $P$  noktası için,

$$V_P: C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu aşağıdaki iki özelliği sağlıyorsa  $V_P$  ye  $M$  nin  $P$  noktasında bir tanjant vektörü denir.

$$(1) V_P(af + bg) = a.V_P(f) + b.V_P(g), \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \text{ ve } \forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$$

$$(2) V_P(f \cdot g) = V_P(f)g(P) + f(P)V_P(g), \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \text{ ve } \forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$$

**Tanım 2.1.6:**  $M$  nin bir  $P$  noktasındaki iki tanjant vektör  $V_P$  ve  $W_P$  olsun.  $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  ve  $a \in \mathbb{R}$  için,

$$(V_P + W_P)(f) = V_P(f) + W_P(f)$$

$$(a.V_P)(f) = a.V_P(f)$$

işlemleri ile,  $M$  nin  $P$  noktasındaki tanjant vektörlerinin kümesi  $\mathbb{R}$  reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı olur. Bu vektör uzayına  $M$  nin  $P$  noktasındaki tanjant uzayı denir ve  $T_P(M)$  ile gösterilir (O'Neill 1983).

**Tanım 2.1.7:** Bir  $M$  manifoldunun her bir  $P$  noktasına,  $P$  de bir  $V_P$  tanjant vektörü karşılık getiren

$$V: M \rightarrow \bigcup_{P \in M} T_P(M)$$

fonksiyonu için  $\pi \circ V: M \rightarrow M$  özdeşlik dönüşümü olacak şekilde

$$\pi: \bigcup_{P \in M} T_P(M) \rightarrow M$$

projeksiyonu var ise  $V$  ye  $M$  üzerinde bir vektör alanı denir (O'Neill 1983).

**Tanım 2.1.8:**  $M$  ve  $N$  iki manifold,  $F: M \rightarrow N$  diferensiyellenebilir bir dönüşüm ve  $P$ ,  $M$  nin bir noktası olsun.  $g \in C^\infty(N, \mathbb{R})$  için,

$$F_*(P): T_P(M) \rightarrow T_{F(P)}(N)$$

$$\left( (F_*(P))(V_P) \right) (g) = V_P(g \circ F), \quad \forall V_P \in T_P(M)$$

ile tanımlanan  $F_*(P)$  dönüşümüne  $F$  dönüşümünün diferensiyel dönüşümü denir (O'Neill 1983).

## 2.2. Riemann Manifoldu ve Kovaryant Türev

**Tanım 2.2.1:**  $M$  bir diferensiyellenebilir manifold olsun.  $M$  üzerindeki vektör alanlarının kümesi  $\chi(M)$  ve reel değerli diferensiyellenebilir fonksiyonların halkası  $C^\infty(M, \mathbb{R})$  olmak üzere,

$$g: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

şeklinde bir iç çarpım tanımlı ise  $M$  ye bir Riemann manifoldu denir. Burada  $g$  işlemine,  $M$  üzerinde metrik tensör veya Riemann metriği denir (Hicks 1971).

**Tanım 2.2.2:**  $M$  bir diferensiyellenebilir manifold olsun.  $M$  üzerindeki vektör alanlarının kümesi  $\chi(M)$  olmak üzere,

$$\begin{aligned} \nabla: \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow \chi(M) \\ (X, Y) &\rightarrow \nabla(X, Y) = \nabla_X Y \end{aligned}$$

fonksiyonu için,

$$(1) \nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z, \quad \forall X, Y, Z \in \chi(M), \quad \forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$$

$$(2) \nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y, \quad \forall X, Y \in \chi(M), \quad \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$$

özellikleri sağlanıyorsa  $\nabla$  ya  $M$  manifoldu üzerinde bir afin konneksiyon ve  $\nabla_X$  e de,  $X$  e göre kovaryant türev operatörü denir (Hicks 1971).

Özel olarak  $M$  manifoldu bir Riemann manifoldu olarak alınırsa, konneksiyonun iç çarpımla ilgisi düşünülebilir. Bu ise bizi Riemann konneksiyonu (Levi-Civita konneksiyonu) kavramına götürür.

**Tanım 2.2.3:**  $M$  bir diferensiyellenebilir manifold olsun.

$$\begin{aligned} [, ]: \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow \chi(M), \\ [X, Y](f) &= X(Y(f)) - Y(X(f)), \quad \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R}) \end{aligned}$$

olarak tanımlanan  $[, ]$  dönüşümüne  $\chi(M)$  üzerinde Lie parantez operatörü denir (Hicks 1971).

**Tanım 2.2.4:**  $M$  bir Riemann manifoldu ve  $\nabla$ ,  $M$  üzerinde bir afin konneksiyon olsun.

Eğer,

(1)  $\nabla$ ,  $C^\infty$  sınıfından,

(2)  $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ ,  $\forall X, Y \in \chi(M)$ ,

(3)  $X(\langle Y, Z \rangle) = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$ ,  $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$

özellikleri sağlanıyorsa,  $\nabla$  ya Riemann konneksiyonu (Levi-Civita konneksiyonu) denir (Hicks 1971).

### 2.3. Öklid Uzayında Eğriler

**Tanım 2.3.1:**  $I$ ,  $\mathbb{R}$  nin açık bir aralığı olmak üzere,  $\alpha: I \rightarrow E^n$  diferensiyellenebilir fonksiyonuna  $E^n$  de bir eğri denir.

**Tanım 2.3.2:**  $E^n$  de bir  $C$  eğrisi  $(I, \alpha)$  koordinat komşuluğu ile verilsin.

$$\alpha: I \rightarrow E^n, \quad \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$$

olmak üzere

$$\alpha'(t) = \left( \frac{d\alpha_1}{dt}(t), \dots, \frac{d\alpha_n}{dt}(t) \right)$$

dir.  $\alpha'(t)|_{\alpha(t)} \in T_{\alpha(t)}E^n$  tanjant vektörüne  $C$  nin  $\alpha(t)$  noktasındaki  $(I, \alpha)$  koordinat komşuluğuna göre hız vektörü denir. Ayrıca,  $\forall t \in I$  için  $\|\alpha'(t)\| \neq 0$  ise  $C$  ye *regüler* eğri,  $\|\alpha'(t)\| = 1$  ise  $C$  ye birim hızlı eğri denir. Bu durumda eğrinin  $t \in I$  parametresine yay parametresi adı verilir.

**Tanım 2.3.3:**  $C \subset E^n$  eğrisi  $(I, \alpha)$  koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu durumda,  $\varphi = \{\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(r)}\}$  sistemi lineer bağımsız ve  $\forall \alpha^{(k)}$ ,  $k > r$  için,  $\alpha^{(k)} \in Sp\{\varphi\}$  olmak üzere,  $\varphi$  den elde edilen  $\{\vec{V}_1, \vec{V}_2, \dots, \vec{V}_r\}$  ortonormal sistemine  $C$  eğrisinin Serret-Frenet  $r$ -ayaklı alanı ve  $P \in C$  için  $\{\vec{V}_1(P), \vec{V}_2(P), \dots, \vec{V}_r(P)\}$  ye  $P \in C$  noktasındaki Serret-Frenet  $r$ -ayaklısı denir.

**Tanım 2.3.4:**  $C \subset E^3$  eğrisi  $(I, \alpha)$  koordinat komşuluğu ile verilsin.  $s \in I$  için,  $C$  nin Frenet 3- ayaklısı  $\{\vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s)\}$  ise,

(1)  $Sp\{\vec{t}(s), \vec{n}(s)\}$  vektör uzayı ile birleşen,  $\alpha(s)$  noktasındaki afin alt uzaya *oskulator* düzlem,

(2)  $Sp\{\vec{n}(s), \vec{b}(s)\}$  vektör uzayı ile birleşen,  $\alpha(s)$  noktasındaki afin alt uzaya normal düzlem,

(3)  $Sp\{\vec{t}(s), \vec{b}(s)\}$  vektör uzayı ile birleşen,  $\alpha(s)$  noktasındaki afin alt uzaya *rektifiyan* düzlem denir.

**Tanım 2.3.5:**  $C \subset E^n$  eğrisi  $(I, \alpha)$  koordinat komşuluğu ile verilsin.  $s \in I$  bu eğrinin yay parametresi olmak üzere,  $C$  nin  $\alpha(s)$  noktasındaki Frenet  $r$ -ayaklısı  $\{\vec{V}_1(P), \vec{V}_2(P), \dots, \vec{V}_r(P)\}$  olsun. Buna göre  $1 \leq i \leq r$  için,

$$k_i: I \rightarrow \mathbb{R}, \quad k_i(s) = \langle \vec{V}'_i(s), \vec{V}_{i+1}(s) \rangle$$

şeklinde tanımlı  $k_i$  fonksiyonuna  $C$  eğrisinin  $i$ -yinci eğrilik fonksiyonu ve  $s \in I$  için  $k_i(s)$  reel sayısına da  $\alpha(s)$  noktasında  $C$  nin  $i$ -yinci eğriliği denir (Hacısalihoglu 1983).

**Teorem 2.3.1:**  $C \subset E^n$  eğrisi  $(I, \alpha)$  koordinat komşuluğu ile verilsin.  $s \in I$  bu eğrinin yay parametresi olmak üzere,  $\alpha(s)$  noktasında  $i$ -yinci eğrilik  $k_i(s)$  ve Frenet  $r$ -ayaklısı  $\{\vec{V}_1(P), \vec{V}_2(P), \dots, \vec{V}_r(P)\}$  ise,

$$(1) \vec{V}'_1(s) = k_1(s)\vec{V}_2(s)$$

$$(2) \vec{V}'_i(s) = -k_{i-1}(s)\vec{V}_{i-1}(s) + k_i(s)\vec{V}_{i+1}(s), \quad 1 < i < r,$$

$$(3) \vec{V}'_r(s) = -k_{r-1}(s)\vec{V}_{r-1}(s)$$

dir (Hacısalihoglu 1983).

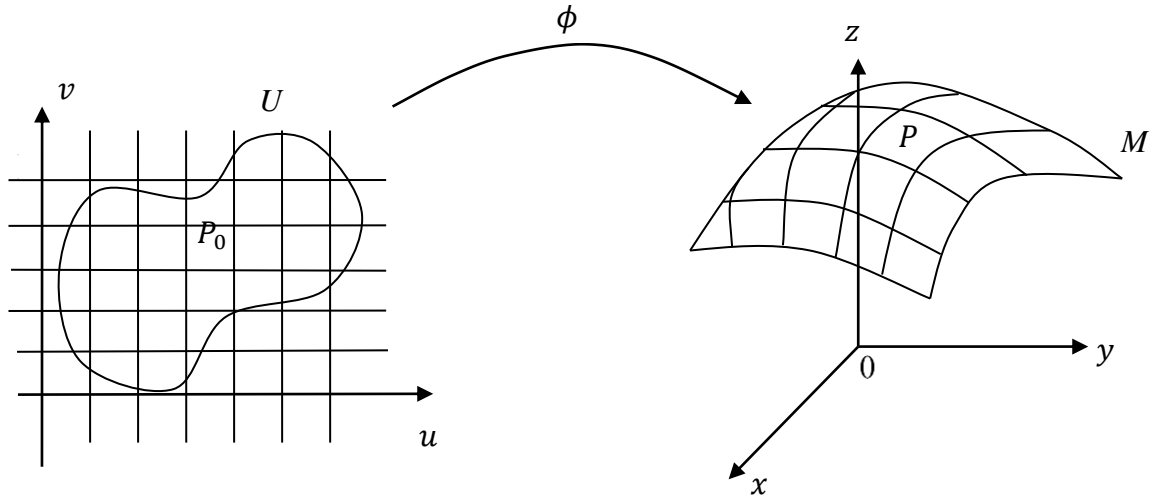
## 2.4. Öklid Uzayında Yüzeyler

### 2.4.1. Yüzeylerin parametrizasyonu

**Tanım 2.4.1:**  $U$ ,  $E^2$  düzleminin bağlantılı bir açık alt kümesi olsun.  $U$  ile homeomorf olan  $E^3$  Öklid uzayının alt kümesine sade yüzey denir.

**Tanım 2.4.2:**  $M$  yüzeyi verilmiş olsun.  $E^2$  düzleminin  $U \subset E^2$  bölgesinin homeomorf  $\phi: U \rightarrow M$  dönüşümünde, yüzeyin  $P \in M$  noktasının  $E^2$  düzleminin  $P_0 \in E^2$  noktasına dönüştüğü açıktır.  $P_0$  noktasının kartezyen koordinatlarını  $u$  ve  $v$  ile gösterelim.  $u$  ve  $v$  ye yüzeyin  $P$  noktasının eğrisel koordinatları denir.  $\phi$  ye ise  $M$  yüzeyinin parametrizasyonu denir (Salimov ve Mağden 2008).

Sürekliliğe göre,  $U$  bölgesindeki her bir doğruya, yüzeyde herhangi bir eğri karşılık gelecektir.  $u = sbt$ ,  $v = sbt$  doğrularına, yüzeyde karşılık gelen eğrilere yüzeyin koordinat eğrileri denir.  $u = sbt$ ,  $v = sbt$  aileleri yüzey üzerinde koordinat şebekesi adı verilen bir sistem oluşturur.



**Şekil 2.2.**  $M$  yüzeyi üzerindeki koordinat şebekesi

Yüzeyin  $P$  noktasının  $(u, v)$  eğrisel koordinatlarının verilmesi,  $P$  noktasını tayin eder. Bu ise,  $P$  noktasının  $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$  yer vektörünün tayin edilmesi demektir. Böylece  $\phi$  parametrizasyonu, yüzeyin noktalarının yer vektörü olan noktaların eğrisel koordinatlarının sürekli fonksiyonu olarak verilebilir. Bu yer vektörünü

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v)$$

ile göstereceğiz. Buna yüzeyin parametrik denklemi denir.  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$  ifadesi

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

koordinat denklemlerine denktir. Bu ifadeye yüzeyin parametrik denkleminin koordinatlarla ifadesi denir.

$$(A) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

matrisini göz önüne alalım. Eğer  $(u_0, v_0)$  noktasında  $A$  matrisinin rankı 2 ise böyle noktaya *regüler* nokta, bu şart bozulursa, *singüler* nokta denir (Salimov ve Mağden 2008). Ayrıca

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \left( \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) \quad \text{ve} \quad \vec{r}_2 = \vec{r}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \left( \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right)$$

vektörlerine koordinat vektörleri denir.

Yüzey, lokal olarak birbirine denk olan,

$$(1) \quad \vec{r} = \vec{r}(u, v), \quad [\vec{r}_u, \vec{r}_v]|_{(u_0, v_0)} \neq 0,$$

$$(2) \quad \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad \text{rank} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = 2,$$

$$(3) \quad F(x, y, z) = 0, \quad \text{grad}F|_{(x_0, y_0, z_0)} \neq 0,$$

$$(4) \quad z = f(x, y)$$

ifadelerinden biri ile verilebilir.

### 2.4.2. Yüzeyin teğet düzlemi

**Tanım 2.4.3:** Yüzey üzerindeki keyfi bir  $P$  noktasından geçen bir doğru, bu noktadan geçen herhangi bir eğriye teğetse, bu doğru yüzeye  $P$  noktasında teğettir denir.

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v)$$

yüzeyi üzerinde

$$u = u(t)$$

$$v = v(t)$$

denklemleri ile verilen eğriyi göz önüne alalım. Bu eğri yüzey üzerinde olduğundan,

$$\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t))$$

olarak yazabiliriz. Bu eğrinin teğet vektörünü bulmak için  $t$  değişkenine göre türev alırsak,

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \frac{dv}{dt} = \vec{r}_1 \frac{du}{dt} + \vec{r}_2 \frac{dv}{dt}$$

bulunur. Yüzey üzerinde olan ve  $P$  noktasından geçen keyfi eğrinin teğet vektörünün  $\vec{r}_1$  ve  $\vec{r}_2$  vektörlerinin lineer terkibi olarak yazılabildiği bu eşitlikten görülür. Buradan da  $\vec{r}_1$  ve  $\vec{r}_2$  vektörlerinin tayin ettiği düzlemin,  $P$  noktasında yüzeye teğet olan bütün doğruları ihtiva ettiği çıkar. Bu düzleme,  $P$  noktasında yüzeye teğet düzlem denir (Salimov ve Mağden 2008).

### 2.4.3. Yüzeyin birinci esas formu

$$\vec{r}: U \rightarrow E^3, \quad u \in U, \quad P = \vec{r}(u)$$

olmak üzere,  $\vec{r}$  parametrik gösterimi ile verilen yüzey için aşağıdaki notasyonları kullanacağız:

$$T_u U: U \text{ nun } u \text{ noktasındaki tanjant uzayı, } T_u U = \{u\} \times \mathbb{R}^2,$$

$$T_P E^3: E^3 \text{ ün } P \text{ noktasındaki tanjant uzayı, } T_P E^3 = \{P\} \times E^3,$$

$$T_u \vec{r}: \vec{r} \text{ dönüşümünün } P \text{ noktasındaki tanjant düzlemi (teğet düzlemi),}$$

$\perp_u \vec{r}$  :  $\vec{r}$  dönüşümünün  $P$  noktasındaki normal uzayı,  $T_u \vec{r} \oplus \perp_u \vec{r} = T_P E^3$ .

Burada  $T_u \vec{r}$  nin elemanlarına teğet vektörler,  $\perp_u \vec{r}$  nin elemanlarına normal vektörler denir (Kühnel 2005).

**Tanım 2.4.4:** Herhangi  $X, Y \in T_u \vec{r}$  tanjant vektörleri için birinci esas form,

$$I(X, Y) = \langle X, Y \rangle$$

şeklinde tanımlanır. Buna  $T_u U$  tanjant uzayındaki simetrik bilineer form olarak da bakılabilir.

$$\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

dönüşümünün birinci esas formu aşağıdaki simetrik, pozitif tanımlı matris ile tanımlanır.

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right) & I \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) \\ I \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right) & I \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left\langle \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\rangle \end{pmatrix}$$

$(g_{ij})$  matrisine metrik tensör de denir.

Birinci esas form quadratik diferensiyel olarak aşağıdaki gibi yazılır.

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

Burada  $ds$ , yay uzunluğunun diferensiyelidir.  $E, F, G$  fonksiyonları ise  $u$  ve  $v$  parametrelerine bağlıdır.

Şimdi,  $E^2$  düzleminin  $U$  ve  $U'$  açık bölgelerinin  $\varphi: U \rightarrow U'$  dönüşümüne bakalım.  $\varphi$  dönüşümü koordinatlarla,

$$\begin{cases} u' = u(u, v) \\ v' = v(u, v) \end{cases} \quad (2.1)$$

biçiminde yazılır.



(2.1) dönüşümü  $C^\infty$  sınıfından ise  $\varphi$  dönüşümü de  $C^\infty$  sınıfındandır denir. Ayrıca  $C^\infty$  sınıfından olan  $\varphi$  dönüşümü homeomorfizm ve  $\varphi^{-1}$  ters dönüşümü de  $C^\infty$  sınıfından ise  $\varphi$  dönüşümüne diffeomorfizm denir.

$$\vec{r}: U \rightarrow M \subset E^3 \quad \text{ve} \quad \tilde{\vec{r}}: U' \rightarrow M \subset E^3$$

dönüşümleri,  $M$  yüzeyinin iki parametrizasyonu olsun. Eğer  $\tilde{\vec{r}} = \vec{r} \circ \varphi$  olacak biçimde  $\varphi: U \rightarrow U'$  diffeomorfizmi varsa  $\varphi$ ,  $u$  ve  $v$  eğrisel koordinatlardan  $u'$  ve  $v'$  eğrisel koordinatlara geçişi tayin ediyor veya  $\vec{r}$  ve  $\tilde{\vec{r}}$  parametrizasyonları denktir denir.

**Teorem 2.4.1:**  $\tilde{\vec{r}} = \vec{r} \circ \varphi$  parametre dönüşümü altında birinci esas formun matrisi

$$(\tilde{g}_{ij}) = (D\varphi)^T(g_{ij})(D\varphi)$$

şeklinde olur. Burada  $D\varphi$ ,  $\varphi$  nin Jacobi matrisini gösterir (Kühnel 2005).

**Tanım 2.4.5:**  $\vec{r}: U \rightarrow E^3$  ve  $u = (u, v) \in U$  olsun.

$$X: U \rightarrow T_{f(u)}E^3, \quad X(u) = \alpha(u) \left. \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right|_u + \beta(u) \left. \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|_u$$

şeklinde tanımlanan  $X$  dönüşümüne tanjant vektör alanı denir. Normal vektör alanı ise,

$$X(u) = \gamma(u) \left. \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right|_u \times \left. \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|_u$$

olarak tanımlanır (Kühnel 2005).

**Tanım 2.4.6:**  $M$  yüzeyinin sade yüzeylerden oluşan bir örtüsü, bu sade yüzeylerin pozitif yönlü birim normal vektör alanları, sade yüzeylerin ortak noktalarında çakışacak biçimde bulunabiliyorsa  $M$  yüzeyi yönlendirilebilir yüzeydir denir (Sabuncuoğlu 2006).

#### 2.4.4. Gauss dönüşümü ve yüzeylerin eğriliği

Eğrilerin eğrilikleri, eğrinin teğetindeki değişim olarak ele alındığı gibi, yüzeylerin eğriliği de teğet düzlemlerdeki değişim olarak düşünülebilir. Her bir düzlem onun normal vektörü ile karakterize edilebileceğinden, düzlemlerdeki değişimi incelemek yerine onların normal vektörlerindeki değişimi inceleyebiliriz.

**Tanım 2.4.7:**  $\vec{r}: U \rightarrow E^3$  parametrik denklemi ile verilen bir yüzey  $M$  ve bu yüzeyden bağımsız olan birim küre  $S^2 = \{(x, y, z) \in E^3: x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  olsun.

$$N: M \rightarrow S^2, \quad N(u^1, u^2) = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u^1} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^2}}{\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^1} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^2} \right\|}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm,  $M$  yüzeyini  $E^3$  deki  $S^2$  birim küresine resmeder. Bu şekilde tanımlanmış olan diferensiyellenebilir  $N$  dönüşümüne Gauss dönüşümü denir.

Buradaki anlayış,  $\vec{N}(u)$  birim normal vektörünün artık  $\vec{r}(u)$  görüntü noktasına bağlanması değil, bir paralel taşıma ile uzayın orijinine bağlanmasıdır.

$$-\vec{N} = \frac{-\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u^1} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^2}\right)}{\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^1} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^2} \right\|}$$

şeklinde tanımlanan  $-\vec{N}$  vektörü ile  $\vec{N}$  vektörü yer değiştirebilir. Yani işaret seçimi keyfi olup yönlendirmenin seçimine bağlıdır. Bu durumda iki farklı Gauss dönüşümü vardır.

**Tanım 2.4.8:**  $\vec{Y}$ ,  $E^n$  nin açık bir alt kümesinde tanımlanan bir diferensiyellenebilir vektör alanı ve  $\vec{X}$ , bu açık kümenin sabit bir  $P$  noktasında yönlü bir vektör olsun yani,  $(P, \vec{X}) \in T_P E^n$  olsun. Bu durumda,

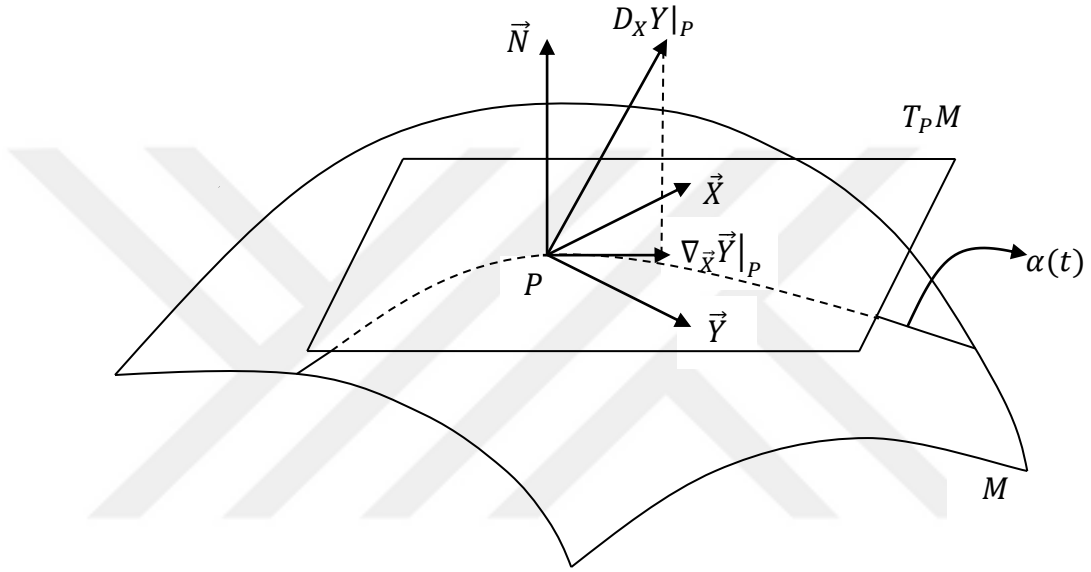
$$D_{\vec{X}} \vec{Y}|_P = D\vec{Y}|_P(\vec{X}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\vec{Y}(P + t\vec{X}) - \vec{Y}(P))$$

ifadesine  $\vec{Y}$  nin  $\vec{X}$  vektör alanı boyunca yönlü türevi denir (Kühnel 2005).

**Tanım 2.4.9:**  $\vec{r}$  parametrik denklemi ile verilen yüzeye teğet olan  $\vec{X}$  ve  $\vec{Y}$  vektör alanlarını alalım. Bu durumda

$$\nabla_{\vec{X}}\vec{Y} = (D_{\vec{X}}\vec{Y})^{Teğet} = D_{\vec{X}}\vec{Y} - \langle D_{\vec{X}}\vec{Y}, \vec{N} \rangle \vec{N}$$

ifadesine  $\vec{Y}$  nin  $\vec{X}$  yönündeki kovaryant türevi denir (Kühnel 2005).



**Şekil 2.3.**  $M$  yüzeyi üzerinde tanımlanan yönlü türev ve kovaryant türevin geometrik gösterimi

$D$  yönlü türev operatörü uzaydaki herhangi vektör alanlarıyla tanımlanırken,  $\nabla$  kovaryant türev operatörü sadece yüzey üzerindeki teğet vektör alanları ile tanımlanır. Kovaryant türev, bir yüzey üzerindeki paralellik kavramı ile ilgilidir. Eğer  $E^n$  uzayındaki farklı iki noktadaki tanjant vektörler birbirine eşit ise bu vektörlere Öklid anlamında paraleldirler denir.

**Tanım 2.4.10:**  $E^n$  de bir  $M$  yüzeyini ve bu yüzey üzerinde bir  $\alpha: I \rightarrow M$  parametrik eğrisini alalım.  $\alpha$  eğrisi boyunca  $M$  ye teğet olan  $\vec{X}$  ve  $\vec{Y}$  vektör alanları için,

$$\nabla_{\vec{X}}\vec{Y} = 0$$

oluyorsa  $\vec{Y}$  vektör alanına Levi-Civita anlamında paraleldir denir.

**Tanım 2.4.11 (Weingarten dönüşümü=Şekil operatörü):**  $\vec{N}$ ,  $E^n$  de bir  $M$  yüzeyinin birim normal vektör alanı ve  $\nabla$ , Riemann konneksiyonu olmak üzere,  $\forall \vec{X} \in \chi(M)$  için

$$S(\vec{X}) = \nabla_{\vec{X}} \vec{N}$$

şeklinde tanımlanan  $S$  dönüşümüne  $M$  üzerinde şekil operatörü veya Weingarten dönüşümü denir (Hacısalıhoğlu 1983).

**Tanım 2.4.12 (II. ve III. esas form):**  $E^n$  de bir  $M$  yüzeyi ve bu yüzey üzerinde tanımlı,  $\vec{N}$  birim normal vektör alanı verilsin.  $\vec{X}$  ve  $\vec{Y}$  tanjant vektörleri için;

(1) II. esas form,  $II(\vec{X}, \vec{Y}) = I(S(\vec{X}), \vec{Y}) = \langle S(\vec{X}), \vec{Y} \rangle$

(2) III. esas form,  $III(\vec{X}, \vec{Y}) = I(S^2(\vec{X}), \vec{Y}) = I(S(\vec{X}), S(\vec{Y})) = \langle S(\vec{X}), S(\vec{Y}) \rangle$

şeklinde tanımlanır. Bu eşitlikler,  $S$  nin self-adjoint olma özelliğinden yazıldı.

**Teorem 2.4.2:**  $M$ ,  $E^n$  de bir yüzey ve  $S$ ,  $M$  nin şekil operatörü olsun. Bu durumda,  $S: \chi(M) \rightarrow \chi(M)$  dönüşümü lineerdir.

I., II. ve III. esas formun katsayılarını aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz:

I:  $g_{ij} = \left\langle \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^i}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^j} \right\rangle$  (Birinci esas form)

II:  $h_{ij} = \left\langle \vec{N}, \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^i \partial u^j} \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial \vec{N}}{\partial u^i}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^j} \right\rangle$  (İkinci esas form)

III:  $e_{ij} = \left\langle \frac{\partial \vec{N}}{\partial u^i}, \frac{\partial \vec{N}}{\partial u^j} \right\rangle$  (Üçüncü esas form)

Diğer taraftan,

$$S \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^i} \right) = \sum_j h_i^j \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^j}$$

eşitliği ile verilen Weingarten dönüşümünün  $h_i^j$  matrisi,

$$\langle S \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^i} \right), \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^k} \rangle = h_{ik} = \sum_j h_i^j g_{jk}$$

$$h_i^j = \sum_k h_{ik} g^{kj}$$

eşitliklerini sağlar. Burada  $(g^{ij})$  matrisi  $(g_{ij})^{-1}$ , yani  $(g_{ij})$  matrisinin ters matrisidir (Kühnel 2005).

$(h_{ij})$ , her zaman simetrik bir matris olmasına rağmen,  $(h_i^j)$  matrisi her zaman simetrik olmak zorunda değildir. Bu durum  $S$  nin self-adjoint olma özelliğine bir çelişki teşkil etmez.

**Tanım 2.4.13:**  $E^n$  nin bir  $M$  yüzeyi üzerinde  $q$ -yuncu esas formu,  $1 \leq q \leq n$  olmak üzere,

$$I^q: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

$$I^q(\vec{X}, \vec{Y}) = \langle S^{q-1}(\vec{X}), \vec{Y} \rangle$$

şeklinde tanımlanan  $I^q$  fonksiyonudur (Hacısalihoglu 1983).

**Tanım 2.4.14:**  $M$ ,  $E^n$  de bir yüzey ve  $S$ ,  $M$  nin şekil operatörü olsun.  $M$  nin bir  $P$  noktasına karşılık gelen  $S(P)$  nin karakteristik değerleri  $M$  nin bu noktadaki asli eğrilikler olarak adlandırılır. Bu eğrilikler  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  ile gösterilir. Asli eğriliklere karşılık gelen ve karakteristik vektör denen vektörlerin belirttiği doğrultulara da  $M$  nin  $P$  noktasındaki asli eğrilik doğrultuları denir.

**Tanım 2.4.15:**  $M$ ,  $E^n$  de bir yüzey ve  $S(P)$ ,  $M$  nin  $P$  noktasındaki şekil operatörü olmak üzere,

$$K: M \rightarrow \mathbb{R}, \quad K(P) = \det S(P)$$

olarak tanımlanan fonksiyona  $M$  nin Gauss eğrilik fonksiyonu ve  $K(P)$  değerine de  $M$  nin  $P$  noktasındaki Gauss eğriliği denir.

**Tanım 2.4.16:**  $M, E^n$  de bir yüzey ve  $S(P)$ ,  $M$  nin  $P$  noktasındaki şekil operatörü olmak üzere,

$$H: M \rightarrow \mathbb{R}, \quad H(P) = \text{İz}(S(P))$$

olarak tanımlanan  $H$  fonksiyonuna  $M$  nin ortalama eğrilik fonksiyonu ve  $H(P)$  değerine de  $M$  nin  $P$  noktasındaki ortalama eğriliği denir.

**Tanım 2.4.17:**  $M, E^n$  de bir yüzey ve  $\alpha$ ,  $M$  üzerinde bir eğri olsun. Ayrıca  $\vec{T}$ ,  $\alpha$  nın teğet vektör alanı ve  $S, M$  nin şekil operatörü olsun.  $\vec{T}$  vektör alanı  $\alpha$  eğrisi boyunca  $S$  nin karakteristik vektörlerine karşılık geliyorsa  $\alpha$  eğrisine  $M$  üzerinde bir eğrilik çizgisidir denir.

**Tanım 2.4.18:**  $M, E^n$  de bir yüzey ve  $S(P)$ ,  $M$  nin  $P$  noktasındaki şekil operatörü olmak üzere,

(1)  $\exists \lambda \in \mathbb{R}$  için,  $S(P) = \lambda I^{n-1}$  ise  $P$  noktasına  $M$  nin umbilik noktası denir.

(2)  $S(P) = 0$  ise  $P$  noktasına  $M$  nin bir düzlenme noktasıdır denir.

**Tanım 2.4.19:**  $M, E^n$  de bir yüzey ve  $S(P)$ ,  $M$  nin  $P$  noktasındaki şekil operatörü olsun. Sıfırdan farklı  $\vec{X}_P, \vec{Y}_P \in T_P M$  için,

$$\langle S(\vec{X}_P), \vec{Y}_P \rangle = 0$$

oluyorsa bu iki tanjant vektöre eşlenik vektörler denir. Bir  $\vec{X}_P \neq 0$  tanjant vektörü için,

$$\langle S(\vec{X}_P), \vec{X}_P \rangle = 0$$

ise  $\vec{X}_P$  doğrultusuna,  $M$  nin  $P$  noktasındaki bir asimptotik doğrultusu ve  $\vec{X}_P$  yi  $\forall P \in \alpha$  noktasında teğet vektörü kabul eden  $\alpha$  eğrisine ise  $M$  üzerinde bir asimptotik çizgi denir.

**Tanım 2.4.20:**  $M, E^n$  de bir yüzey ve  $\alpha$ ,  $M$  üzerinde bir eğri olsun. Eğer  $\alpha$  eğrisinin her noktasındaki  $\alpha''$  ivme vektörü,  $M$  yüzeyine dik ise bu eğriye  $M$  üzerinde bir geodezik eğri denir.

**Tanım 2.4.21:**  $E^n$  n-boyutlu Öklid uzayındaki vektör alanlarının kümesi  $\chi(E^n)$  olmak üzere,

$$R: \chi(E^n) \times \chi(E^n) \times \chi(E^n) \rightarrow \chi(E^n)$$

$$R(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}) = R(\vec{X}, \vec{Y})\vec{Z} = D_{\vec{X}}(D_{\vec{Y}}\vec{Z}) - D_{\vec{Y}}(D_{\vec{X}}\vec{Z}) - D_{[\vec{X}, \vec{Y}]}\vec{Z}$$

olarak tanımlanan  $R$  fonksiyonu  $\chi(E^n)$  üzerinde üçüncü mertebeden bir kovaryant tensör alanıdır. Bu tensör alanına  $E^n$  nin eğrilik tensör alanı ve bunun bir  $P \in E^n$  noktasındaki değeri olan  $R(\vec{X}_P, \vec{Y}_P)\vec{Z}_P$  tensörüne de  $E^n$  nin  $P$  noktasındaki eğrilik tensörü veya  $E^n$  nin  $P$  noktasındaki eğriliği denir.

**Teorem 2.4.3:**  $E^n$  nin eğriliği  $E^n$  nin her noktasında sıfırdır (Hacısalıhoğlu 1983).

#### 2.4.5. Normal eğrilik ve yüzeyin ikinci esas formu

Tamamen yüzey üzerinde yatan bir eğrinin eğriliğinin ne kadarının sadece o yüzeyden kaynaklandığını sorgulamak doğaldır. Bu durumu sorgulamak için yüzey üzerinde yatan bir  $\alpha$  eğrisi alalım.  $\alpha$  eğrisinin herhangi bir  $P$  noktasındaki birim teğet vektörü  $\alpha'(P) = \vec{X}$  olsun (buradaki  $\alpha'$  vektörü, eğrinin doğal parametreye göre türevini göstermektedir).  $\alpha$  eğrisinin  $k_1$  eğriliği,  $\alpha''$  vektörünün uzunluğu olarak tanımlanır.  $\alpha''$  vektörünü onun teğet ve normal bölümlerine ayıralım.

$$\alpha'' = \underbrace{(\alpha'')^{Teğet}}_{teğet\ bölümü} + \underbrace{\langle \alpha'', \vec{N} \rangle \vec{N}}_{normal\ bölümü}$$

$\alpha''$  vektörünün normal bölümü

$$\langle \alpha'', \vec{N} \rangle \vec{N} = \left\langle \frac{d^2\alpha}{ds^2}, \vec{N} \right\rangle \vec{N} = -\left\langle \alpha', \frac{d\vec{N}}{ds} \right\rangle \vec{N} = \langle X, S(X) \rangle \vec{N} = II(X, X)\vec{N}$$

şeklindedir (Kühnel 2005).

Böylece normal bileşenin, eğrinin seçimine değil,  $P$  noktasındaki  $\alpha' = \vec{X}$  teğetine bağlı olduğunu gördük.

Bu ilişki Meusnier Teoremi olarak ifade edilir. Bu yüzden  $II(\vec{X}, \vec{X})$  ifadesine,  $\alpha$  eğrisinin  $\kappa_n$  normal eğriliği diyebiliriz. Şimdi normal eğriliğin tanımını verelim:

**Tanım 2.4.22:** Yüzeyin bir  $P$  noktasındaki  $\alpha''$  eğrilik vektörünün, bu noktadaki yüzey normali doğrultusundaki izdüşümüne, bu noktadaki yüzey eğrisinin normal eğriliği denir ve  $\kappa_n$  ile gösterilir (Salimov ve Magden 2008).

**Teorem 2.4.4 (Meusnier):**  $E^3$  te bir  $M$  yüzeyi üzerinde asimptotik olmayan ve  $P \in M$  noktasında aynı teğete sahip olan bütün eğrilerin  $P$  noktasındaki eğrilik çemberleri, yarıçapı  $R$  ve merkezi  $C = P + R\vec{N}_P$  noktası olan bir küre üzerinde bulunurlar (Hacısalıhoğlu 1983).

**Tanım 2.4.23:**  $M \subset E^3$  yüzeyinin bir  $P$  noktasında asimptotik olmayan ve ortak bir teğet doğrultusuna sahip olan eğrilerin eğrilik çemberlerini üzerinde bulunduran küreye,  $M$  nin  $P$  noktasındaki Meusnier küresi denir (Hacısalıhoğlu 1983).

#### 2.4.6. Yüzey noktalarının sınıflandırılması

$S$ , yüzey üzerinde alınan şekil operatörü ve  $\kappa_1, \kappa_2$  asli eğrilikler olsun. Bu durumda,

- (1)  $K = \kappa_1 \cdot \kappa_2$  değerine Gauss eğriliği ve
- (2)  $H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$  değerine ortalama eğrilik denir.
- (3) Yüzey üzerinde alınan bir  $P$  noktasına,  
 $K(P) > 0$  ise eliptik nokta,  
 $K(P) < 0$  ise hiperbolik nokta,



$K(P) = 0$  ve  $H(P) \neq 0$  ise parabolik nokta,

$\kappa_1(P) = \kappa_2(P)$  ise umbilik nokta ve,

$\kappa_1(P) = \kappa_2(P) = 0$  ise bir düzlenme noktası denir (Kühnel 2005).

### 3. MATERYAL ve YÖNTEM

#### 3.1. Eğri-Yüzey İkilişinin Eğrilikleri

**Tanım 3.1.1:**  $M, E^3$  uzayında bir yüzey ve  $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ , yay parametresi  $s \in I$  olan, bu yüzey üzerinde birim hızlı bir eğri olsun. Yüzeyin birim normal vektör alanı  $\vec{N}$  ve  $\alpha$  eğrisinin birim teğet vektör alanı  $\vec{T}$  olmak üzere

$$\vec{N} \times \vec{T} = \vec{X}$$

eşitliği ile tanımlanan  $\vec{X}$  vektör alanını göz önüne alalım. Vektörel çarpımın özelliklerinden dolayı  $\{\vec{T}, \vec{X}, \vec{N}\}$  kümesi,  $T_{\alpha(s)}E^3$  uzayının ortonormal bir tabanı olur. Bu tabana  $(\alpha, M)$  eğri-yüzey ikilişinin Darboux çatısı denir.

**Tanım 3.1.2:**  $\alpha: I \rightarrow M$ ,  $s \in I$  yay parametresi ile parametrelendirilmiş birim hızlı bir eğri olsun.

$$\kappa_n(s) = \langle \alpha''(s), \vec{N} \rangle$$

eşitliği ile belirli  $\kappa_n(s)$  sayısına,  $(\alpha, M)$  eğri-yüzey ikilişinin  $\alpha(s)$  noktasındaki normal eğriliği denir.

**Tanım 3.1.3:**  $\alpha: I \rightarrow M$  birim hızlı bir eğri olsun.

$$\kappa_g(s) = \langle \alpha''(s), \vec{X} \rangle$$

sayısına,  $(\alpha, M)$  eğri-yüzey ikilişinin  $\alpha(s)$  noktasındaki geodezik eğriliği denir.

**Tanım 3.1.4:**  $\alpha: I \rightarrow M$  birim hızlı bir eğri olsun.

$$t_r(s) = -\langle \vec{N}', \vec{X} \rangle$$

sayısına,  $(\alpha, M)$  eğri-yüzey ikilisinin  $\alpha(s)$  noktasındaki geodezik burulması denir.

**Teorem 3.1.1:**  $\alpha, M$  üzerinde birim hızlı bir eğri olsun.  $(\alpha, M)$  eğri-yüzey ikilisinin eğrilikleri  $\kappa_n, \kappa_g, t_r$  olduğuna göre

$$\begin{aligned}\vec{T}' &= \kappa_g \vec{X} + \kappa_n \vec{N} \\ \vec{X}' &= -\kappa_g \vec{T} + t_r \vec{N} \\ \vec{N}' &= -\kappa_n \vec{T} - t_r \vec{X}\end{aligned}$$

dir (Sabuncuoğlu 2006).

**Teorem 3.1.2:** Birim hızlı olmayan bir  $\alpha: I \rightarrow M$  eğrisini göz önüne alalım.  $\|\alpha'\| = l$  olmak üzere,  $(\alpha, M)$  eğri-yüzey ikilisinin  $\kappa_n, \kappa_g, t_r$  eğrilikleri,

$$\begin{aligned}\kappa_n &= \frac{1}{l^2} \langle \alpha'', \vec{N} \rangle \\ \kappa_g &= \frac{1}{l^2} \langle \alpha'', \vec{X} \rangle \\ t_r &= -\frac{1}{l} \langle \vec{N}', \vec{X} \rangle\end{aligned}$$

şeklindedir (Sabuncuoğlu 2006).

**Teorem 3.1.3:**  $\alpha: I \rightarrow M$  eğrisi verildiğinde  $(\alpha, M)$  eğri-yüzey ikilisi için

$$\begin{aligned}\vec{T}' &= l[\kappa_g \vec{X} + \kappa_n \vec{N}] \\ \vec{X}' &= l[-\kappa_g \vec{T} + t_r \vec{N}] \\ \vec{N}' &= l[-\kappa_n \vec{T} - t_r \vec{X}]\end{aligned}$$

dir (Sabuncuoğlu 2006).

**Teorem 3.1.4:**  $\alpha: I \rightarrow M$  regüler eğrisinin bir asimptotik eğri olması için gerek ve yeter şart  $\kappa_n = 0$  olmasıdır.

**Teorem 3.1.5:**  $\alpha: I \rightarrow M$  eğrisi bir geodezik eğri ise  $\kappa_g = 0$  dır. Tersine  $\alpha: I \rightarrow M$  eğrisinin hız vektörünün uzunluğu sabit ve  $\kappa_g = 0$  ise  $\alpha$  eğrisi bir geodezik eğridir.

**Teorem 3.1.6:**  $\alpha: I \rightarrow M$  regüler eğrisinin bir eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart  $t_r = 0$  olmasıdır.

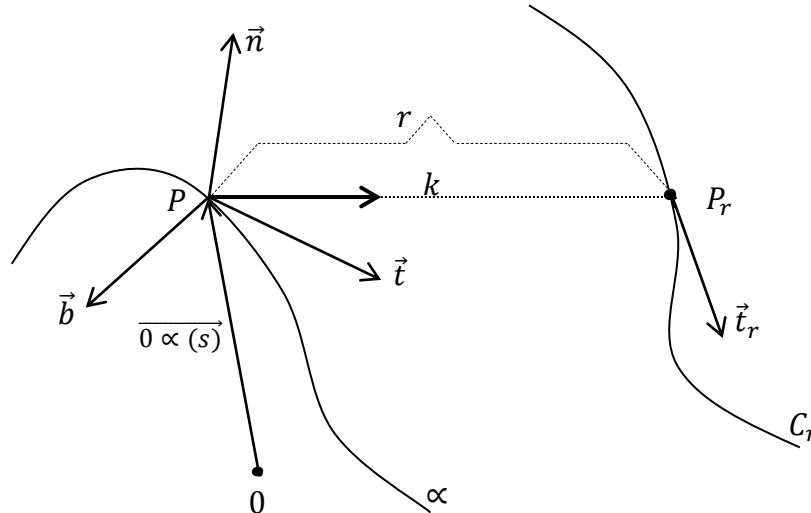
### 3.2. Sabit Sırt Uzaklıklı Eğriler

**Tanım 3.2.1:**  $\alpha, E^3$  de bir eğri ve  $\alpha$  nın bir  $P = \alpha(s)$  noktasındaki Frenet çatısı  $\{\vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s)\}$  olsun.  $d_1, d_2, d_3$  sabit sayılar ve  $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 1$  olmak üzere

$$\vec{d} = d_1 \vec{t} + d_2 \vec{n} + d_3 \vec{b}$$

vektörüne  $\{\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}\}$  ye sıkı suretle bağlı vektör,  $P$  noktasından geçen ve  $\vec{d}$  doğrultusundaki  $k$  doğrusuna  $\{\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}\}$  ye sıkı suretle bağlı doğru denir (Hacısalihoglu 1968).

**Tanım 3.2.2:**  $\alpha: I \rightarrow E^3$  bir eğri ve  $\alpha$  nın bir  $P$  noktasındaki Frenet çatısı  $\{\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}\}$  olsun.  $\{\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}\}$  ye sıkı suretle bağlı  $k$  doğrusu üzerindeki,  $P$  noktasından sabit bir  $r$  uzaklığındaki nokta  $P_r$  ile gösterilsin.  $\{\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}\}$  nin eğri boyunca hareketi esnasında  $P_r$  noktasının geometrik yeri olan  $C_r$  eğrisine  $\alpha$  eğrisinin sabit sırt uzaklıklı eğrisi denir (Hacısalihoglu 1968).



**Şekil 3.1.** Sabit sırt uzaklıklı eğri

### 3.3. Paralel Yüzeyler

**Tanım 3.3.1:**  $M_1$  ve  $M_2$ ,  $E^3$  de iki yüzey ve  $M_1$  in birim normal vektör alanı  $\vec{N}$  olsun.  $r$  sabit bir sayı olmak üzere,

$$f: M_1 \rightarrow M_2, \quad f(P) = P + r\vec{N}_P$$

olarak tanımlanan bir  $f$  fonksiyonu varsa  $M_1$  ve  $M_2$  yüzeylerine paralel yüzeyler denir (Hacısalıhoğlu 1983).

$M$  yüzeyi verildiğinde,

$$M_r = \{P + r\vec{N}_P: P \in M, r \in \mathbb{R} \text{ ve } r = \text{sbt}\}$$

eşitliği ile verilen  $M_r$  kümesi,  $M$  ye paralel bir yüzeydir.

Bundan sonra  $M$  yüzeyinin paralel yüzeyi olan  $M_r$  yüzeyinin birim normal vektör alanı  $\vec{N}_r$  ve şekil operatörü de  $S_r$  ile gösterilecektir. Burada

$$\vec{N} = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad a_i \in C^\infty(M, \mathbb{R})$$

için  $\bar{a}_i(f(P)) = a_i(P)$  olmak üzere  $\bar{N} = \sum_{i=1}^n \bar{a}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  ise  $\vec{N}_r = \bar{N}$  dir (Hacısalıhoğlu 1983).

**Teorem 3.3.1:**  $E^n$  de alınan bir  $M$  yüzeyinin paralel yüzeyi olan  $M_r$  yüzeyi verilsin.  $E^n$  nin  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  Öklid koordinat sistemine göre,  $X \in \chi(M)$ ,  $\bar{X} \in \chi(M_r)$  vektör alanları  $\forall P \in M$  için,  $b_i(P) = \bar{b}_i(f(P))$ ,  $1 \leq i \leq n$  olmak üzere

$$X = \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \bar{X} = \sum_{i=1}^n \bar{b}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

olarak verilsin. Bu durumda,

$$(1) f_*(X) = \bar{X} + r\overline{S(X)}$$

$$(2) S_r(f_*(X)) = \overline{S(X)}$$

dir (Hacısalıhoğlu 1983).

$M$  ve  $M_r$  yüzeyleri arasındaki özellikler diferensiyel geometri açısından aşağıdaki teorem ile verilebilir:

**Teorem 3.3.2:**  $E^n$  de  $f: M \rightarrow M_r$  olmak üzere,  $M$  nin bir paralel yüzeyi  $M_r$  olsun. Bu durumda,

- (1)  $f$ , üçüncü temel form olma özeliğini korur.
- (2)  $f$ , umbilik nokta olma özeliğini korur.
- (3)  $f$ , asli eğrilik doğrultusu olma özeliğini korur.
- (4)  $M$  nin temel formları, sırasıyla,  $I$ ,  $II$  ve  $III$  ile gösterilmek üzere,  $\forall X, Y \in \chi(M)$  ve  $\forall P \in M$  için,

$$\langle f_*(X), f_*(Y) \rangle|_{f(P)} = I(X_P, Y_P) + 2rII(X_P, Y_P) + r^2III(X_P, Y_P)$$

dir (Hacısalıhoğlu 1983).

**İspat:** (1)  $M$  nin üçüncü temel formu  $III$  ve  $M_r$  nin üçüncü temel formu  $III^r$  olmak üzere,  $\forall X, Y \in \chi(M)$  ve  $\forall P \in M$  için,

$$\begin{aligned} III^r \langle f_*(X_P), f_*(Y_P) \rangle &= \langle S_r(f_*(X_P)), S_r(f_*(Y_P)) \rangle \\ &= \langle \overline{S(X)}, \overline{S(Y)} \rangle|_{f(P)} \\ &= \langle S(X), S(Y) \rangle|_P \\ &= III(X_P, Y_P) \end{aligned}$$

elde edilir.

(2)  $P \in M$ ,  $M$  nin bir umbilik noktası olsun. O zaman,  $\forall X_P \in T_P M$  ve bir tek  $\lambda \in \mathbb{R}$  için  $S(X_P) = \lambda X_P$  dir. 3.3.1. Teorem gereğince,

$$f_*(X_P) = \bar{X}|_{f(P)} + r\overline{S(X)}|_{f(P)}$$

olacağından,

$$f_*(X_P) = (1 + r\lambda)\bar{X}|_{f(P)}$$

yazılabilir. Buna göre,  $\forall f_*(X_P) \in T_{f(P)}M$  için,

$$\begin{aligned} S_r(f_*(X_P)) &= \overline{S(X_P)} \\ &= \lambda\bar{X}|_{f(P)} \\ &= \lambda \frac{1}{1 + r\lambda} f_*(X_P) \end{aligned}$$

olur ve buradan

$$S_r(f_*(X_P)) = \frac{\lambda}{1 + r\lambda} f_*(X_P)$$

elde edilir. Bu ise,  $f(P) \in M_r$  noktasında  $S_r, M_r$  nin özdeşlik dönüşümünün bir katı demektir. Böylece  $P \in M$  umbilik nokta ise  $f(P) \in M_r$  de  $M_r$  nin bir umbilik noktasıdır.

(3)  $M$  nin bir  $P$  noktasındaki asli eğrilik doğrultu vektörü  $X_P$  ve bu  $X_P$  ye karşılık gelen asli eğrilik  $\kappa(P)$  olsun. Bu durumda  $S(X_P) = \kappa(P)X_P$  dir. İspat (2) deki benzer hesapların sonucunda

$$S_r(f_*(X_P)) = \frac{\kappa(P)}{1 + r\kappa(P)} f_*(X_P)$$

elde edilir. Bu da  $X_P \in T_P M$  asli eğrilik doğrultusuna karşılık  $f_*(X_P)$  nin  $M_r$  üzerinde bir asli eğrilik doğrultu vektörü olduğunu gösterir.

(4)  $\forall X, Y \in \chi(M)$  ve  $\forall P \in M$  için,

$$\begin{aligned} \langle f_*(X), f_*(Y) \rangle|_{f(P)} &= \langle \bar{X} + r\overline{S(X)}, \bar{Y} + r\overline{S(Y)} \rangle|_{f(P)} \\ &= \langle \bar{X}, \bar{Y} \rangle|_{f(P)} + 2r\langle \overline{S(X)}, \bar{Y} \rangle|_{f(P)} + r^2\langle \overline{S(X)}, \overline{S(Y)} \rangle|_{f(P)} \\ &= \langle X, Y \rangle|_P + 2r\langle S(X), Y \rangle|_P + r^2\langle S(X), S(Y) \rangle|_P \end{aligned}$$

olur ve buradan da

$$\langle f_*(X), f_*(Y) \rangle|_{f(P)} = I(X_P, Y_P) + 2rII(X_P, Y_P) + r^2III(X_P, Y_P)$$

elde edilir.

**Teorem 3.3.3:**  $E^3$  de bir  $M$  yüzeyinin bir paralel yüzeyi  $M_r$  olsun.  $P \in M$  noktasında  $M$  nin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla,  $K$  ve  $H$ ,  $f(P) \in M_r$  noktasında  $M_r$  nin Gauss ve ortalama eğrilikleri de  $K_r$  ve  $H_r$  olsun. Bu durumda ,

$$K_r = \frac{K}{1 + rH + r^2K}$$

$$H_r = \frac{H + 2rK}{1 + rH + r^2K}$$

dır (Hacısalıhoğlu 1983).

**İspat:**  $P \in M$  noktasında  $M$  nin asli eğrilikleri,  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  ve bunlara karşılık gelen asli eğrilik doğrultuları da sırasıyla,  $X_1$ ,  $X_2$  olsun. Bu durumda 3.3.2. Teorem gereğince,  $M_r$  nin  $f(P)$  noktasındaki asli eğrilik doğrultuları da  $f_*(X_1)$  ve  $f_*(X_2)$  olur ve

$$S_r(f_*(X_1)) = \frac{\kappa_1}{1 + r\kappa_1} f_*(X_1)$$

$$S_r(f_*(X_2)) = \frac{\kappa_2}{1 + r\kappa_2} f_*(X_2)$$

dır. Dolayısıyla  $\{f_*(X_1), f_*(X_2)\}$  bazına göre  $S_r$  nin matrisi

$$\begin{bmatrix} \frac{\kappa_1}{1 + r\kappa_1} & 0 \\ 0 & \frac{\kappa_2}{1 + r\kappa_2} \end{bmatrix}$$

olur ve buradan

$$\begin{aligned} H_r &= \text{İz}S_r \\ &= \frac{\kappa_1}{1 + r\kappa_1} + \frac{\kappa_2}{1 + r\kappa_2} \\ &= \frac{\kappa_1 + \kappa_2 + 2r(\kappa_1\kappa_2)}{1 + r(\kappa_1 + \kappa_2) + r^2(\kappa_1\kappa_2)} \\ &= \frac{H + 2rK}{1 + rH + r^2K} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
K_r &= \det S_r = \frac{\kappa_1}{1+r\kappa_1} \cdot \frac{\kappa_2}{1+r\kappa_2} \\
&= \frac{\kappa_1\kappa_2}{1+r(\kappa_1+\kappa_2)+r^2(\kappa_1\kappa_2)} \\
&= \frac{K}{1+rH+r^2K}
\end{aligned}$$

elde edilir.

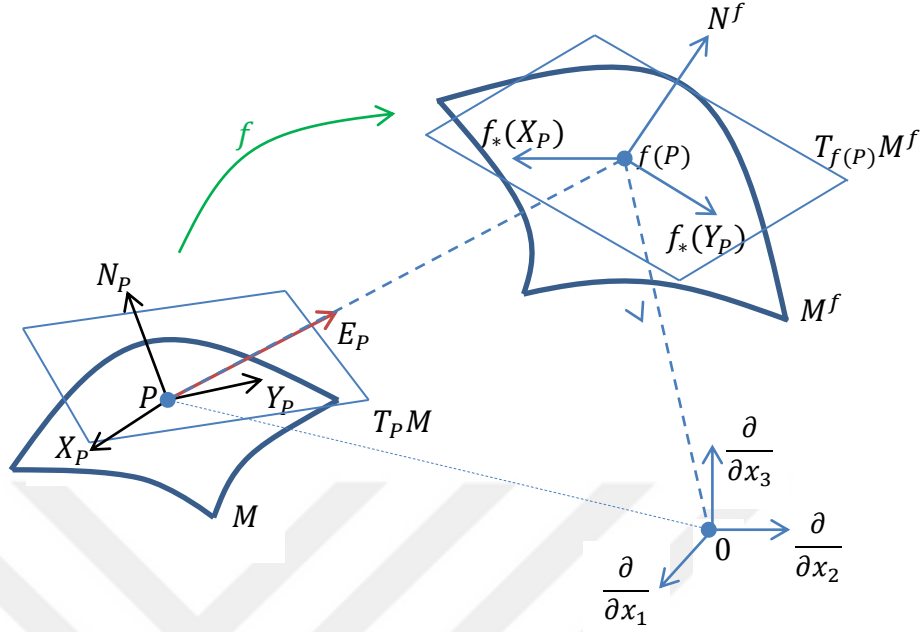
### 3.4. Sabit Sırt Uzaklıklı Yüzeyler

**Tanım 3.4.1:**  $M$  ve  $M_1$ ,  $E^3$  de iki yüzey,  $M$  nin bir  $P$  noktasındaki birim normal vektörü  $\vec{N}_P$  ve tanjant uzayı  $T_P(M)$ ,  $T_P(M)$  nin ortonormal bir bazı  $\{\vec{X}_P, \vec{Y}_P\}$  olsun.  $d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R}$  sabit sayılar ve  $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 1$  olmak üzere  $\vec{E}_P = d_1\vec{X}_P + d_2\vec{Y}_P + d_3\vec{N}_P$  şeklinde  $\vec{X}_P, \vec{Y}_P, \vec{N}_P$  ye sıkı suretle bağlı  $\vec{E}_P$  birim vektörünü alalım.  $r$  sabit bir sayı olmak üzere,

$$f: M \rightarrow M_1, \quad f(P) = P + r\vec{E}_P$$

olarak tanımlanan bir  $f$  fonksiyonu varsa  $M_1$  yüzeyine  $M$  yüzeyinin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi denir.  $M_1$  yüzeyi  $f$  fonksiyonu yardımı ile tanımlandığı için  $M^f$  ile gösterilecektir.  $(M, M^f)$  çifti ile  $M$  yüzeyi ve onun  $M^f$  sabit sırt uzaklıklı yüzeyi temsil edilecektir.





Şekil 3.2. Sabit sırt uzaklıklı yüzey

Özel olarak  $d_1 = d_2 = 0$  alınması halinde  $\vec{E}_P = \vec{N}_P$  ve  $f(P) = P + r\vec{N}_P$  elde edilir. Bu durumda  $M$  ve  $M^f$  paralel yüzeyler olur.

**Teorem 3.4.1:**  $E^3$  de  $M$  ve  $M^f$  yüzeyleri verilsin.  $E^3$  ün,  $\{x_1, x_2, x_3\}$  Öklid koordinat sistemine göre,  $\vec{W} \in \chi(M)$  için

$$f_*(\vec{W}) = \vec{W} + r\overline{D_W E}$$

dir. Burada  $\vec{W} = \sum_{i=1}^3 w_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ ,  $\vec{W} = \sum_{i=1}^3 \bar{w}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ , öyle ki  $\forall P \in M$  için  $w_i(P) = \bar{w}_i(f(P))$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , özeliği ile verilsin.

**İspat:**  $f: M \rightarrow M^f$  dönüşümü,  $E^3$  e,

$$f: E^3 \rightarrow E^3, \quad f(P) = (p_1 + re_1(P), p_2 + re_2(P), p_3 + re_3(P))$$

olarak genişletilsin. Burada,  $\vec{E} = \sum_{i=1}^3 e_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  vektör alanının bileşenleri de  $E^3$  e,

$$e_i(P) = \begin{cases} e_i(P), & P \in M \\ 0, & P \notin M \end{cases}$$

olarak genişletiliyor.  $E^3$  deki  $\{x_1, x_2, x_3\}$  Öklid koordinat sistemine göre  $f$  dönüşümünün koordinat fonksiyonları

$$f_i = x_i + r e_i: E^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad 1 \leq i \leq 3,$$

olacağından  $f_*$  dönüşümüne karşılık gelen matris

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial(x_i + r e_i)}{\partial x_j} \right] &= \left[ \frac{\partial x_i}{\partial x_j} + r \frac{\partial e_i}{\partial x_j} \right] \\ &= \left[ \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \right] + r \left[ \frac{\partial e_i}{\partial x_j} \right] \\ &= I_3 + r \left[ \frac{\partial e_i}{\partial x_j} \right] \end{aligned}$$

olur.  $\vec{W}_P = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}_P \in T_P M$  için

$$\begin{aligned} f_*|_P(\vec{W}_P) &= I_3 \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}_P + r \left[ \frac{\partial e_i}{\partial x_j} \right]_P \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}_P \\ &= \begin{bmatrix} w_1(P) \\ w_2(P) \\ w_3(P) \end{bmatrix} + r \left[ \sum_{j=1}^3 \frac{\partial e_i}{\partial x_j} \right]_P w_j(P) \end{aligned}$$

bulunur. Burada ikinci taraftaki matris formu,  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right\}$  bazı cinsinden yazılıp,

$$f_*|_P(\vec{W}_P) = \sum_{i=1}^3 w_i(P) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{f(P)} + r \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial e_i}{\partial x_j} \Big|_P w_j(P) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{f(P)}$$

ve  $w_i(P) = \bar{w}_i(f(P))$  eşitliği kullanılırsa,

$$f_*|_P(\vec{W}_P) = \underbrace{\sum_{i=1}^3 \bar{w}_i(f(P)) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{f(P)}}_{\bar{W}|_{f(P)}} + r \underbrace{\sum_{i=1}^3 \bar{W}_P[e_i] \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{f(P)}}_{r \bar{D}_W \bar{E}|_{f(P)}}$$

yazılır. Bu eşitliğin sağındaki ilk terim  $\bar{W}|_{f(P)}$  ve ikinci terim ise  $r \bar{D}_W \bar{E}|_{f(P)}$  dir. Çünkü,

$$D_{\vec{W}}\vec{E} = \sum_{i=1}^3 \vec{W}[e_i] \frac{\partial}{\partial x_i}$$

olduğundan

$$\overline{D_W E} = \sum_{i=1}^3 \overline{W[e_i]} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \vec{W}[e_i](P) = \overline{W[e_i]}(f(P))$$

$$\overline{D_W E}|_{f(P)} = \sum_{i=1}^3 \overline{W[e_i]}(f(P)) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{f(P)}$$

$$= \sum_{i=1}^3 \vec{W}[e_i](P) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{f(P)}$$

$$= \sum_{i=1}^3 \vec{W}_P[e_i] \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{f(P)}$$

olur. Buna göre,

$$f_*|_P(\vec{W}_P) = \vec{W}|_{f(P)} + r(\overline{D_W E})|_{f(P)}$$

elde edilir.

### 3.4.1. Sabit sırt uzaklıklı yüzeyin parametrik ifadesi

$M$  yüzeyi için bir parametrizasyon  $(\phi, U)$  ve

$$\phi: U \subset E^2 \rightarrow M$$

$$(u, v) \quad P = \phi(u, v)$$

olsun. Bu durumda  $T_P(M)$  nin bir bazı  $\{\phi_u(P), \phi_v(P)\}$ ,  $P \in M$  deki birim normal vektör alanı  $\vec{N}_P$ ,  $d_1, d_2, d_3$  sabit sayılar,  $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 1$  ve  $\vec{E}_P = d_1\phi_u(P) + d_2\phi_v(P) + d_3\vec{N}_P$  olmak üzere,

$$M^f = \{f(P): f(P) = P + r\vec{E}_P\}$$

olarak verildiğinden  $M^f$  yüzeyi için bir parametrizasyon,

$$\psi(u, v) = \phi(u, v) + r\vec{E}(u, v)$$

olur. Buna göre

$$M^f = \left\{ \begin{array}{l} \psi(u, v): \psi(u, v) = \phi(u, v) + r \left( d_1 \phi_u(u, v) + d_2 \phi_v(u, v) + d_3 \vec{N}(u, v) \right), \\ d_1 = sbt, d_2 = sbt, d_3 = sbt, d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 1, r = sbt \end{array} \right\}$$

olarak ifade edilir. Burada,  $rd_1 = \lambda_1$ ,  $rd_2 = \lambda_2$ ,  $rd_3 = \lambda_3$  olarak alınırsa,

$$M^f = \left\{ \begin{array}{l} \psi(u, v): \psi(u, v) = \phi(u, v) + \lambda_1 \phi_u(u, v) + \lambda_2 \phi_v(u, v) + \lambda_3 \vec{N}(u, v), \\ \lambda_1 = sbt, \lambda_2 = sbt, \lambda_3 = sbt, \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = r^2 \end{array} \right\}$$

olur ve böylece

$$\begin{aligned} \psi_u &= \phi_u + \lambda_1 \phi_{uu} + \lambda_2 \phi_{vu} + \lambda_3 \vec{N}_u \\ \psi_v &= \phi_v + \lambda_1 \phi_{uv} + \lambda_2 \phi_{vv} + \lambda_3 \vec{N}_v \end{aligned} \quad (3.1)$$

şeklinde bulunur. Bu eşitliklerdeki  $\phi_{uu}, \phi_{uv}, \phi_{vu}, \phi_{vv}, \vec{N}_u, \vec{N}_v$  değerleri aşağıdaki gibi hesaplanabilir (Hacısalıhoğlu 1983).

$$\begin{aligned} \phi_{uu} &= \frac{\langle \phi_{uu}, \phi_u \rangle}{\|\phi_u\|^2} \phi_u + \frac{\langle \phi_{uu}, \phi_v \rangle}{\|\phi_v\|^2} \phi_v + \frac{1}{\|\phi_u\| \|\phi_v\|} \det(\phi_{uu}, \phi_u, \phi_v) \vec{N} \\ \phi_{uv} &= \phi_{vu} = \frac{\langle \phi_{uv}, \phi_u \rangle}{\|\phi_u\|^2} \phi_u + \frac{\langle \phi_{uv}, \phi_v \rangle}{\|\phi_v\|^2} \phi_v + \frac{1}{\|\phi_u\| \|\phi_v\|} \det(\phi_{uv}, \phi_u, \phi_v) \vec{N} \\ \phi_{vv} &= \frac{\langle \phi_{vv}, \phi_u \rangle}{\|\phi_u\|^2} \phi_u + \frac{\langle \phi_{vv}, \phi_v \rangle}{\|\phi_v\|^2} \phi_v + \frac{1}{\|\phi_u\| \|\phi_v\|} \det(\phi_{vv}, \phi_u, \phi_v) \vec{N} \\ \vec{N}_u &= -\frac{1}{\|\phi_u\|^2 \|\phi_v\|^2} \det(\phi_{uu}, \phi_u, \phi_v) \phi_u - \frac{1}{\|\phi_u\|^2 \|\phi_v\|^2} \det(\phi_{uv}, \phi_u, \phi_v) \phi_v \\ \vec{N}_v &= -\frac{1}{\|\phi_u\|^2 \|\phi_v\|^2} \det(\phi_{uv}, \phi_u, \phi_v) \phi_u - \frac{1}{\|\phi_u\|^2 \|\phi_v\|^2} \det(\phi_{vv}, \phi_u, \phi_v) \phi_v \end{aligned}$$

$M$  nin parametre eğrileri eğrilik çizgileri ve  $u$  ile  $v$  de bu çizgilerin yay parametreleri olarak seçilmesi halinde  $\|\phi_u\| = 1$ ,  $\|\phi_v\| = 1$  olarak alınabilir. Bu durumda

$$\det(\phi_{uv}, \phi_u, \phi_v) = 0$$

olup  $\phi_u$  ve  $\phi_v$ ,  $M$  üzerinde asli eğrilik doğrultuları olduğundan

$$\langle \phi_u, \phi_v \rangle = 0$$

dir. Ayrıca  $M$  yüzeyinin asli eğrilik fonksiyonları  $\kappa_1$  ve  $\kappa_2$  kabullerimiz altında

$$\kappa_1 = -\det(\phi_{uu}, \phi_u, \phi_v)$$

$$\kappa_2 = -\det(\phi_{vv}, \phi_u, \phi_v)$$

dir (Hacısalihoğlu 1983). Yine bu kabullere göre,

$$\begin{aligned} \langle \phi_u, \phi_u \rangle = 1 &\Rightarrow \phi_u[\langle \phi_u, \phi_u \rangle] = \phi_u[1] \\ &\Rightarrow \langle \phi_{uu}, \phi_u \rangle + \langle \phi_u, \phi_{uu} \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle \phi_{uu}, \phi_u \rangle = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

ve benzer şekilde

$$\langle \phi_v, \phi_v \rangle = 1 \Rightarrow \langle \phi_{vv}, \phi_v \rangle = 0 \quad (3.3)$$

$$\langle \phi_u, \phi_u \rangle = 1 \Rightarrow \langle \phi_{uv}, \phi_u \rangle = 0 \quad (3.4)$$

$$\langle \phi_v, \phi_v \rangle = 1 \Rightarrow \langle \phi_{vu}, \phi_v \rangle = 0 \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \langle \phi_u, \phi_v \rangle = 0 &\Rightarrow \phi_u[\langle \phi_u, \phi_v \rangle] = \phi_u[0] \\ &\Rightarrow \langle \phi_{uu}, \phi_v \rangle + \langle \phi_u, \phi_{vu} \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle \phi_{uu}, \phi_v \rangle = -\langle \phi_u, \phi_{vu} \rangle \end{aligned} \quad (3.6)$$

eşitlikleri bulunur. Bu son eşitlikte  $\phi_{uv} = \phi_{vu}$  ve (3.3) eşitliği kullanılırsa

$$\langle \phi_{uu}, \phi_v \rangle = 0$$

olduğu görülür. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} \langle \phi_u, \phi_v \rangle = 0 &\Rightarrow \phi_v[\langle \phi_u, \phi_v \rangle] = \phi_v[0] \\ &\Rightarrow \langle \phi_{uv}, \phi_v \rangle + \langle \phi_u, \phi_{vv} \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle \phi_{uv}, \phi_v \rangle = -\langle \phi_u, \phi_{vv} \rangle \end{aligned} \quad (3.7)$$

olup burada  $\phi_{uv} = \phi_{vu}$  ve (3.4) eşitliği kullanılırsa

$$\langle \phi_{vv}, \phi_u \rangle = 0$$

bulunur. Bu hesaplamaların sonucunda

$$\begin{aligned} \phi_{uu} &= -\kappa_1 \vec{N} \\ \phi_{vv} &= -\kappa_2 \vec{N} \\ \phi_{uv} &= \phi_{vu} = 0 \\ \vec{N}_u &= \kappa_1 \phi_u \\ \vec{N}_v &= \kappa_2 \phi_v \end{aligned} \quad (3.8)$$

elde edilir (Tarakcı 2002).

Böylece (3.8) eşitlikleri (3.1) eşitliklerinde yerine yazılırsa,  $\chi(M^f)$  için bir baz olan  $\{\psi_u, \psi_v\}$  vektörlerinin ifadesi,

$$\psi_u = (1 + \lambda_3 \kappa_1) \phi_u - \lambda_1 \kappa_1 \vec{N} \quad (3.9)$$

$$\psi_v = (1 + \lambda_3 \kappa_2) \phi_v - \lambda_2 \kappa_2 \vec{N} \quad (3.10)$$

olarak bulunur. Ayrıca,  $M^f$  yüzeyinin birim normal vektör alanı  $N^f$  ile gösterilirse,

$$\begin{aligned} N^f &= \frac{\psi_u \times \psi_v}{\|\psi_u \times \psi_v\|} \\ &= \frac{\lambda_1 \kappa_1 (1 + \lambda_3 \kappa_2) \phi_u + \lambda_2 \kappa_2 (1 + \lambda_3 \kappa_1) \phi_v + (1 + \lambda_3 \kappa_1)(1 + \lambda_3 \kappa_2) \vec{N}}{\sqrt{\lambda_1^2 \kappa_1^2 (1 + \lambda_3 \kappa_2)^2 + \lambda_2^2 \kappa_2^2 (1 + \lambda_3 \kappa_1)^2 + (1 + \lambda_3 \kappa_1)^2 (1 + \lambda_3 \kappa_2)^2}} \end{aligned}$$

ve burada

$$A = \sqrt{\lambda_1^2 \kappa_1^2 (1 + \lambda_3 \kappa_2)^2 + \lambda_2^2 \kappa_2^2 (1 + \lambda_3 \kappa_1)^2 + (1 + \lambda_3 \kappa_1)^2 (1 + \lambda_3 \kappa_2)^2}$$

denilirse,

$$N^f = \frac{\lambda_1 \kappa_1 (1 + \lambda_3 \kappa_2)}{A} \phi_u + \frac{\lambda_2 \kappa_2 (1 + \lambda_3 \kappa_1)}{A} \phi_v + \frac{(1 + \lambda_3 \kappa_1)(1 + \lambda_3 \kappa_2)}{A} \vec{N}$$

olur (Tarakcı 2002).

### 3.4.2. Sabit sırt uzaklıklı yüzeyin şekil operatörü

$M$  yüzeyinin şekil operatörü  $S$  ve  $M^f$  yüzeyinin şekil operatörü  $S^f$  ile gösterilsin.  $S^f$  şekil operatörü  $\chi(M^f)$  in

$$\psi_u = (1 + \lambda_3 \kappa_1) \phi_u - \lambda_1 \kappa_1 \vec{N}$$

$$\psi_v = (1 + \lambda_3 \kappa_2) \phi_v - \lambda_2 \kappa_2 \vec{N}$$

bazına göre hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}
S^f(\psi_u) &= D_{\psi_u} N^f \\
&= \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\lambda_1 \kappa_1 (1 + \lambda_3 \kappa_2)}{A} \right) \phi_u + \frac{\lambda_1 \kappa_1 (1 + \lambda_3 \kappa_2)}{A} \phi_{uu} \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\lambda_2 \kappa_2 (1 + \lambda_3 \kappa_1)}{A} \right) \phi_v + \frac{\lambda_2 \kappa_2 (1 + \lambda_3 \kappa_1)}{A} \phi_{vu} \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{(1 + \lambda_3 \kappa_1)(1 + \lambda_3 \kappa_2)}{A} \right) \vec{N} + \frac{(1 + \lambda_3 \kappa_1)(1 + \lambda_3 \kappa_2)}{A} \vec{N}_u
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
S^f(\psi_v) &= D_{\psi_v} N^f \\
&= \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\lambda_1 \kappa_1 (1 + \lambda_3 \kappa_2)}{A} \right) \phi_u + \frac{\lambda_1 \kappa_1 (1 + \lambda_3 \kappa_2)}{A} \phi_{uv} \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\lambda_2 \kappa_2 (1 + \lambda_3 \kappa_1)}{A} \right) \phi_v + \frac{\lambda_2 \kappa_2 (1 + \lambda_3 \kappa_1)}{A} \phi_{vv} \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{(1 + \lambda_3 \kappa_1)(1 + \lambda_3 \kappa_2)}{A} \right) \vec{N} + \frac{(1 + \lambda_3 \kappa_1)(1 + \lambda_3 \kappa_2)}{A} \vec{N}_v
\end{aligned}$$

olur. Bu eşitliklerde (3.8) eşitlikleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
S^f(\psi_u) &= \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\lambda_1 \kappa_1 (1 + \lambda_3 \kappa_2)}{A} \right) + \frac{\kappa_1 (1 + \lambda_3 \kappa_1)(1 + \lambda_3 \kappa_2)}{A} \right\} \phi_u \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\lambda_2 \kappa_2 (1 + \lambda_3 \kappa_1)}{A} \right) \phi_v \\
&\quad + \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{(1 + \lambda_3 \kappa_1)(1 + \lambda_3 \kappa_2)}{A} \right) - \frac{\lambda_1 \kappa_1^2 (1 + \lambda_3 \kappa_2)}{A} \right\} \vec{N}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

---


$$\begin{aligned}
S^f(\psi_v) &= \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\lambda_1 \kappa_1 (1 + \lambda_3 \kappa_2)}{A} \right) \phi_u \\
&\quad + \left\{ \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\lambda_2 \kappa_2 (1 + \lambda_3 \kappa_1)}{A} \right) + \frac{\kappa_2 (1 + \lambda_3 \kappa_1)(1 + \lambda_3 \kappa_2)}{A} \right\} \phi_v \\
&\quad + \left\{ \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{(1 + \lambda_3 \kappa_1)(1 + \lambda_3 \kappa_2)}{A} \right) - \frac{\lambda_1 \kappa_2^2 (1 + \lambda_3 \kappa_1)}{A} \right\} \vec{N}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

ifadeleri elde edilir.

(3.11) ve (3.12) eşitliklerinin sağ tarafındaki  $\phi_u, \phi_v$  ve  $\vec{N}$  nin katsayıları sırasıyla  $u$  ve  $v$  ye göre kısmi türevler alınmak suretiyle 2002 yılında Tarancı tarafından hesaplanmıştır. Diğer taraftan,  $M$  yüzeyinin birim normal vektör alanı  $\vec{N}$ ,  $\chi(M)$  nin bazı  $\{\phi_u, \phi_v\}$  (ortonormal, asli eğrilik doğrultuları) ve  $M$  nin asli eğrilikleri  $\kappa_1, \kappa_2$  olarak alınmıştır. Bu durumda  $\{\phi_u, \phi_v, \vec{N}\}$ ,  $\chi(E^3)$  için bir baz oluşturur. Teorem 2.4.3'e göre  $E^3$  ün eğriliği sıfırdır. Buna göre,

$$\begin{aligned} R(\phi_u, \phi_v)\vec{N} &= 0 \\ D_{\phi_u}(D_{\phi_v}\vec{N}) - D_{\phi_v}(D_{\phi_u}\vec{N}) - D_{[\phi_u, \phi_v]}\vec{N} &= 0 \end{aligned}$$

dir. Burada (3.8) eşitlikleri kullanılırsa,

$$D_{\phi_u}(\kappa_2\phi_v) - D_{\phi_v}(\kappa_1\phi_u) - D_{(D_{\phi_u}\phi_v - D_{\phi_v}\phi_u)}\vec{N} = 0$$

ve  $D_{\phi_u}\phi_v - D_{\phi_v}\phi_u = \phi_{vu} - \phi_{uv} = 0$  olacağından,

$$\begin{aligned} D_{\phi_u}(\kappa_2\phi_v) - D_{\phi_v}(\kappa_1\phi_u) &= 0 \\ \frac{\partial \kappa_2}{\partial u} \phi_v + \kappa_2 \underbrace{\phi_{vu}}_0 - \frac{\partial \kappa_1}{\partial v} \phi_u - \kappa_1 \underbrace{\phi_{uv}}_0 &= 0 \\ -\frac{\partial \kappa_1}{\partial v} \phi_u + \frac{\partial \kappa_2}{\partial u} \phi_v &= 0 \end{aligned}$$

olur.  $\{\phi_u, \phi_v\}$  lineer bağımsız olduğundan

$$\frac{\partial \kappa_1}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial \kappa_2}{\partial u} = 0 \quad (3.13)$$

bulunur.

(3.11) ve (3.12) eşitliklerinde (3.13) ifadeleri yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned} S^f(\psi_u) &= \frac{(1 + \lambda_3\kappa_1)(1 + \lambda_3\kappa_2)}{A^3} \left\{ \lambda_1 \frac{\partial \kappa_1}{\partial u} (\lambda_2^2\kappa_2^2 + (1 + \lambda_3\kappa_2)^2) + \kappa_1 A^2 \right\} \phi_u \\ &\quad - \frac{\lambda_1^2 \lambda_2}{A^3} \frac{\partial \kappa_1}{\partial u} \kappa_1 \kappa_2 (1 + \lambda_3\kappa_2)^2 \phi_v \\ &\quad - \frac{\lambda_1 \kappa_1 (1 + \lambda_3\kappa_2)}{A^3} \left\{ \lambda_1 \frac{\partial \kappa_1}{\partial u} (1 + \lambda_3\kappa_2)^2 + \kappa_1 A^2 \right\} \vec{N} \end{aligned} \quad (3.14)$$



$$\begin{aligned}
S^f(\psi_v) = & -\frac{1}{A^3} \frac{\partial \kappa_2}{\partial v} \lambda_1 \lambda_2^2 \kappa_1 \kappa_2 (1 + \lambda_3 \kappa_1)^2 \phi_u \\
& + \frac{(1 + \lambda_3 \kappa_1)(1 + \lambda_3 \kappa_2)}{A^3} \left\{ \lambda_2 \frac{\partial \kappa_2}{\partial v} (\lambda_1^2 \kappa_1^2 + (1 + \lambda_3 \kappa_1)^2) \right. \\
& \left. + \kappa_2 A^2 \right\} \phi_v \\
& - \frac{\lambda_2 \kappa_2 (1 + \lambda_3 \kappa_1)}{A^3} \left\{ \lambda_2 \frac{\partial \kappa_2}{\partial v} (1 + \lambda_3 \kappa_1)^2 + \kappa_2 A^2 \right\} \vec{N}
\end{aligned} \tag{3.15}$$

ifadeleri elde edilir (Tarakcı 2002).

Bu eşitliklerde  $S^f(\psi_u)$  ve  $S^f(\psi_v)$  değerleri  $\phi_u$ ,  $\phi_v$  ve  $\vec{N}$  cinsinden ifade edilmiştir.  $\psi_u$  ve  $\psi_v$  cinsinden ifadeleri ise

$$S^f(\psi_u) = \mu_1 \psi_u + \mu_2 \psi_v \tag{3.16}$$

$$S^f(\psi_v) = \mu_3 \psi_u + \mu_4 \psi_v \tag{3.17}$$

şeklinde olup (3.9) ve (3.10) eşitliklerinden  $\psi_u$  ve  $\psi_v$  nin değerleri (3.16) ve (3.17) eşitliklerinde yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$S^f(\psi_u) = \mu_1 (1 + \lambda_3 \kappa_1) \phi_u + \mu_2 (1 + \lambda_3 \kappa_2) \phi_v - (\mu_1 \lambda_1 \kappa_1 + \mu_2 \lambda_2 \kappa_2) \vec{N} \tag{3.18}$$

$$S^f(\psi_v) = \mu_3 (1 + \lambda_3 \kappa_1) \phi_u + \mu_4 (1 + \lambda_3 \kappa_2) \phi_v - (\mu_3 \lambda_1 \kappa_1 + \mu_4 \lambda_2 \kappa_2) \vec{N} \tag{3.19}$$

olarak bulunur. Burada (3.14) ile (3.18) eşitlikleri karşılaştırılırsa

$$\mu_1 = \frac{(1 + \lambda_3 \kappa_2)}{A^3} \left\{ \lambda_1 \frac{\partial \kappa_1}{\partial u} (\lambda_2^2 \kappa_2^2 + (1 + \lambda_3 \kappa_2)^2) + \kappa_1 A^2 \right\} \tag{3.20}$$

$$\mu_2 = -\frac{1}{A^3} \frac{\partial \kappa_1}{\partial u} \lambda_1^2 \lambda_2 \kappa_1 \kappa_2 (1 + \lambda_3 \kappa_2) \tag{3.21}$$

ve (3.15) ile (3.19) eşitlikleri karşılaştırılırsa

$$\mu_3 = -\frac{1}{A^3} \frac{\partial \kappa_2}{\partial v} \lambda_1 \lambda_2^2 \kappa_1 \kappa_2 (1 + \lambda_3 \kappa_1) \tag{3.22}$$

$$\mu_4 = \frac{1 + \lambda_3 \kappa_1}{A^3} \left\{ \lambda_2 \frac{\partial \kappa_2}{\partial v} (\lambda_1^2 \kappa_1^2 + (1 + \lambda_3 \kappa_1)^2) + \kappa_2 A^2 \right\} \quad (3.23)$$

ifadeleri elde edilir. Bu sonuçlar (3.16) ve (3.17) eşitliklerinde yerine yazılırsa

$$S^f(\psi_u) = \frac{(1 + \lambda_3 \kappa_2)}{A^3} \left\{ \lambda_1 \frac{\partial \kappa_1}{\partial u} (\lambda_2^2 \kappa_2^2 + (1 + \lambda_3 \kappa_2)^2) + \kappa_1 A^2 \right\} \psi_u - \frac{1}{A^3} \frac{\partial \kappa_1}{\partial u} \lambda_1^2 \lambda_2 \kappa_1 \kappa_2 (1 + \lambda_3 \kappa_2) \psi_v \quad (3.24)$$

$$S^f(\psi_v) = -\frac{1}{A^3} \frac{\partial \kappa_2}{\partial v} \lambda_1 \lambda_2^2 \kappa_1 \kappa_2 (1 + \lambda_3 \kappa_1) \psi_u + \frac{(1 + \lambda_3 \kappa_1)}{A^3} \left\{ \lambda_2 \frac{\partial \kappa_2}{\partial v} (\lambda_1^2 \kappa_1^2 + (1 + \lambda_3 \kappa_1)^2) + \kappa_2 A^2 \right\} \psi_v \quad (3.25)$$

olur ve böylece  $M^f$  yüzeyinin şekil operatörünün matrisi,

$$S^f = \frac{1}{A^3} \begin{bmatrix} (1 + \lambda_3 \kappa_2) \left\{ \lambda_1 \frac{\partial \kappa_1}{\partial u} \left( \frac{\lambda_2^2 \kappa_2^2 + (1 + \lambda_3 \kappa_2)^2}{+ \kappa_1 A^2} \right) \right\} & -\frac{\partial \kappa_1}{\partial u} \lambda_1^2 \lambda_2 \kappa_1 \kappa_2 (1 + \lambda_3 \kappa_2) \\ -\frac{\partial \kappa_2}{\partial v} \lambda_1 \lambda_2^2 \kappa_1 \kappa_2 (1 + \lambda_3 \kappa_1) & (1 + \lambda_3 \kappa_1) \left\{ \lambda_2 \frac{\partial \kappa_2}{\partial v} \left( \frac{\lambda_1^2 \kappa_1^2 + (1 + \lambda_3 \kappa_1)^2}{+ \kappa_2 A^2} \right) \right\} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

şeklinde bulunur. Burada

$$A = \sqrt{\lambda_1^2 \kappa_1^2 (1 + \lambda_3 \kappa_2)^2 + \lambda_2^2 \kappa_2^2 (1 + \lambda_3 \kappa_1)^2 + (1 + \lambda_3 \kappa_1)^2 (1 + \lambda_3 \kappa_2)^2}$$

dir (Tarakcı 2002).

### 3.5. Fokal Eğriler ve Yüzeyler

**Tanım 3.5.1:**  $E^n$  de bir  $(I, \infty)$  koordinat komşuluğu ile verilen

$$\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^n, \quad \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$$

parametrik uzay eğrisini göz önüne alalım. Bu durumda

$$F(t) = \alpha(t) + \frac{1}{k_1(t)} \vec{n}(t)$$

fonksiyonu ile tanımlanan yeni eğriye  $\alpha(t)$  eğrisinin fokal eğrisi denir. Burada  $k_1(t) \neq 0$ ,  $\alpha(t)$  eğrisinin birinci eğriliği ve  $\vec{n}(t)$  ise,  $\alpha(t)$  eğrisinin asli normal vektör alanıdır (Patrikalakis *et al.* 2001).

Tanımdan da görüldüğü gibi bir eğrinin fokal eğrisi, o eğrinin her noktasındaki eğrilik çemberlerinin merkezlerinin birleşiminden oluşur. Bir yüzeyin fokal yüzeyinin tanımı da, söz konusu yüzeyin birim normal vektör alanı ve asli eğrilik fonksiyonları kullanılarak, benzer bir yöntemle teşkil edilecektir.

Fokal yüzeyler özel doğru kongrüansları (eşleşim) olarak bilinen yüzeylerdir. Doğru kongrüansları ilk defa Hagen, Pottmann ve Divivier tarafından 1991 yılında görüntüleme alanında tanımlanmıştır (Hagen *et al.* 1991).

İki parametrelili diferensiyellenebilir bir doğru ailesine  $E^3$  de bir doğru kongrüansı denir.  $\phi(u, v)$  parametrizasyonu ile verilen bir  $M$  yüzeyini ele alalım. Bu yüzeyin herbir noktasına bu noktadan geçen bir doğru atandığını ve bu doğrunun yönünün  $\vec{E}(u, v)$  birim vektörü ile verildiğini göz önüne alırsak doğru kongrüansı parametrik olarak

$$C(u, v, r) = \phi(u, v) + r\vec{E}(u, v)$$

şeklinde tanımlanır ve  $C$  ile gösterilir. Bu denklem her bir  $(u, v)$  için kongrüansın bir doğrusunu belirtir ve ureteç olarak adlandırılır. Burada  $r$  parametresi, doğru kongrüansının noktalarının bir parametresi olup, doğru kongrüansı ile  $M$  yüzeyi üzerindeki söz konusu noktaların birbirine olan uzaklığını ifade eder.

$C$  ile üretilen her bir doğru üzerinde iki özel nokta vardır. Bu noktalar fokal noktalar olarak adlandırılır. Fokal yüzey ise fokal noktaların geometrik yeri olarak düşünülür. Genel olarak iki adet fokal yüzey vardır.

$\vec{N}(u, v)$  vektörü  $M$  yüzeyinin birim normal vektör alanı olmak üzere, eğer üreteçte  $\vec{E}(u, v) = \vec{N}(u, v)$  olarak alınırsa doğru kongrüansına normal kongrüans denir ve  $C_N$  ile gösterilir. Normal kongrüans parametrik olarak

$$C_N(u, v, r) = \phi(u, v) + r\vec{N}(u, v)$$

şeklinde tanımlanır. Bu durumda  $C_N$  ile verilen fokal yüzeyin parametrik gösterimi,

$$F_i(u, v) = \phi(u, v) - \frac{1}{\kappa_i(u, v)}\vec{N}(u, v)$$

şeklinde olur. Burada  $\kappa_1$  ve  $\kappa_2$  fonksiyonları  $\phi(u, v)$  yüzeyinin asli eğrilik fonksiyonlarıdır (Hagen *et al.* 1992).

$M$  yüzeyi üzerindeki bir  $P$  noktasındaki normal kesit eğrisinin eğrilik merkezi bu noktadaki normal vektörünün belli bir katına karşılık gelir. Bu parçanın ekstrem değerleri iki asli doğrultunun eğriliklerinin merkezidir. Bu iki nokta fokal noktalara karşılık gelir. Bu nedenle doğru kongrüansı iki yüzeye değen doğruların kümesi olarak düşünülür. Bu iki yüzey ise doğru kongrüansının fokal yüzeyidir. Böylece normal kongrüansının fokal noktaları iki asli yönün eğrilik merkezleridir (Hoschek 1971).

Fokal yüzeyler ayrıca yüzeylerin niteliğini analiz etmek için de kullanılmış olup, bunun için genelleştirilmiş fokal yüzey kavramı gündeme gelmiştir. Genelleştirilmiş fokal yüzeyler, 1992 yılında Hagen ve Hahmann tarafından yeni bir yüzey sorgulama aracı olarak sunulmuş ve parametrik olarak

$$F(u, v) = \phi(u, v) + af(\kappa_1, \kappa_2)\vec{N}(u, v), \quad a \in \mathbb{R},$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada  $\kappa_1(u, v)$ ,  $\kappa_2(u, v)$  asli eğriliklerine bağlı bir fonksiyon olan  $f$  fonksiyonu, farklı uygulamalar için farklı şekilde tanımlanmıştır.

Örneğin bir yüzeyin konveksliğini test etmek için  $f = \kappa_1 \cdot \kappa_2$ , bükülme noktalarının yerini saptamak ve düzlenme noktalarını gözümüzde canlandırabilmek için  $f = \kappa_1^2 + \kappa_2^2$ , yüzeyin teknik düzgünlüğünü gözlemleyebilmek için ise  $f = \frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}{\kappa_1 + \kappa_2}$  olarak alınmıştır (Hagen *et al.* 1992).

### 3.6. Regle Yüzey

**Tanım 3.6.1:** Uzayda bir  $\alpha(u)$  eğrisine dayanarak ve  $\vec{X} = \vec{X}(u)$  vektörüne paralel kalarak hareket eden bir doğrunun oluşturduğu yüzeye regle yüzey denir. Hareket eden bu doğruya regle yüzeyin doğrultmanı, söz konusu eğriye ise dayanak eğrisi denir.

Bu şekilde tanımlanan bir regle yüzeyin  $(\phi, U)$  parametrizasyonu ile verildiği ve

$$\begin{array}{ccc} \phi: U \subset E^2 & \rightarrow & M \subset E^3 \\ (u, v) & & \phi(u, v) \end{array}$$

olduğu göz önüne alınırsa parametrik denklemi,

$$\phi(u, v) = \alpha(u) + v\vec{X}(u)$$

şeklinde olur.

## 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

### 4.1. Sabit Sırt Uzaklıklı Yüzey Örnekleri

Bu bölümde bazı özel yüzeylerin sabit sırt uzaklıklı yüzeylerinin parametrik ifadeleri hesaplanmış ve elde edilen bu yeni yüzeylerin grafikleri Maple programı yardımıyla çizilerek söz konusu yüzeyler arasındaki farklılıklar incelenmiştir.

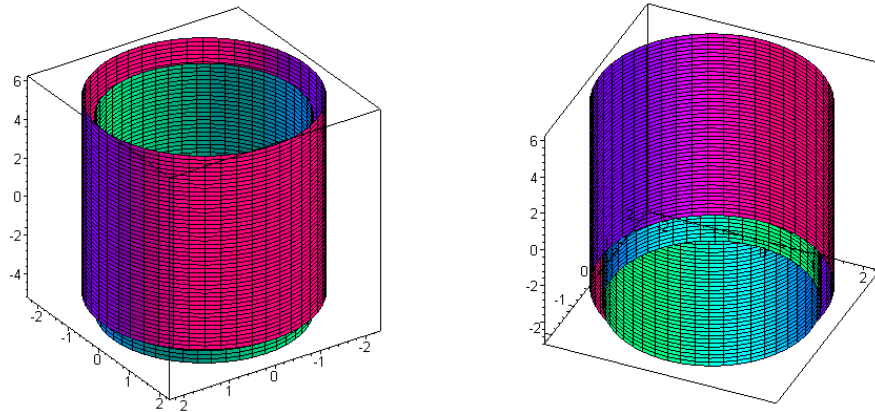
**Örnek 4.1.1:** (Dik Dairesel Silindir)

$$\phi(u, v) = (R \cos v, R \sin v, u)$$

şeklinde parametrik olarak verilen silindir yüzeyinin sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin parametrik ifadesi

$$\psi(u, v) = ((R - \lambda_3) \cos v - \lambda_2 \sin v, (R - \lambda_3) \sin v + \lambda_2 \cos v, u + \lambda_1)$$

olarak hesaplanır. Burada özel olarak  $R = 2, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$  olarak alındığında bu yüzeylerin grafikleri aşağıdaki gibi olur.



**Şekil 4.1.** Dik dairesel silindir ve onun sabit sırt uzaklıklı yüzeyi

Şekilden de görüldüğü gibi silindir yüzeyinin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi de yine silindirdir. Burada dıştaki silindir içteki silindirin sabit sırt uzaklıklı yüzeyidir.

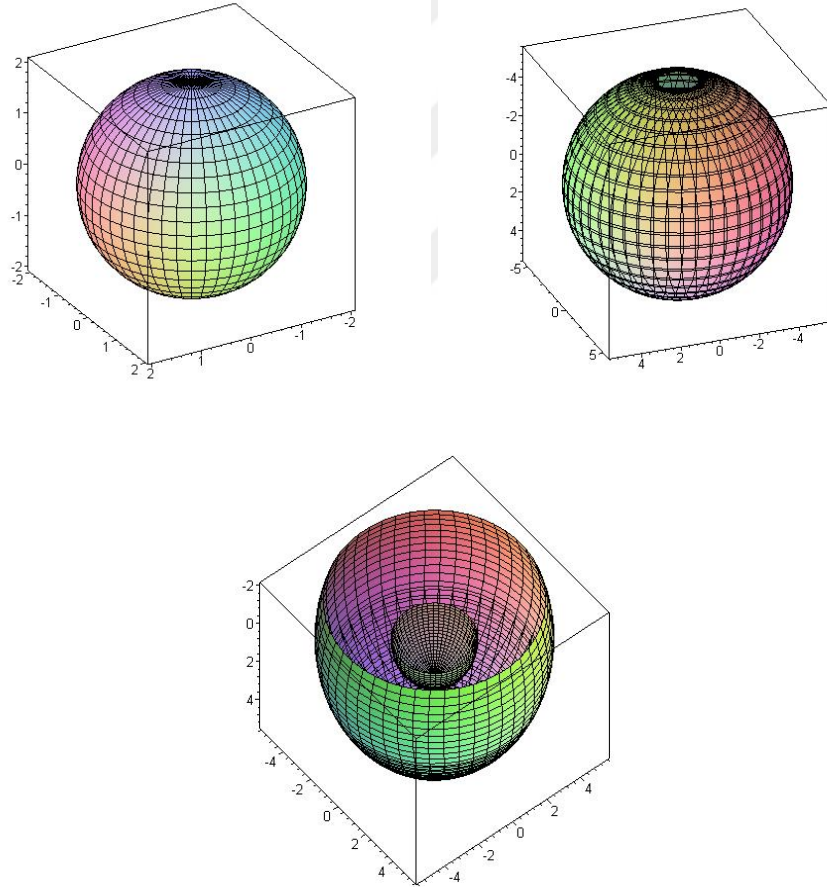
**Örnek 4.1.2:** (Küre) Parametrik olarak

$$\phi(u, v) = (R\cos u\cos v, R\sin u\cos v, R\sin v)$$

şeklinde verilen küre yüzeyinin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi

$$\psi(u, v) = ((R + \lambda_3)\cos u\cos v - \lambda_1\sin u - \lambda_2\cos u\sin v, (R + \lambda_3)\sin u\cos v + \lambda_1\cos u - \lambda_2\sin u\sin v, (R + \lambda_3)\sin v + \lambda_2\cos v)$$

olarak hesaplanır. Burada özel olarak  $R = 1, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$  olarak alınırsa bu yüzeylerin grafikleri aşağıdaki gibi olur.



**Şekil 4.2.** Küre ve onun sabit sırt uzaklıklı yüzeyi

Şekil 4.2’de görüldüğü gibi küre yüzeyinin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi de küre olup silindir örneğinde olduğu gibi herhangi bir değişikliğe uğramamıştır. Burada dıştaki küre içteki kürenin sabit sırt uzaklıklı yüzeyidir.

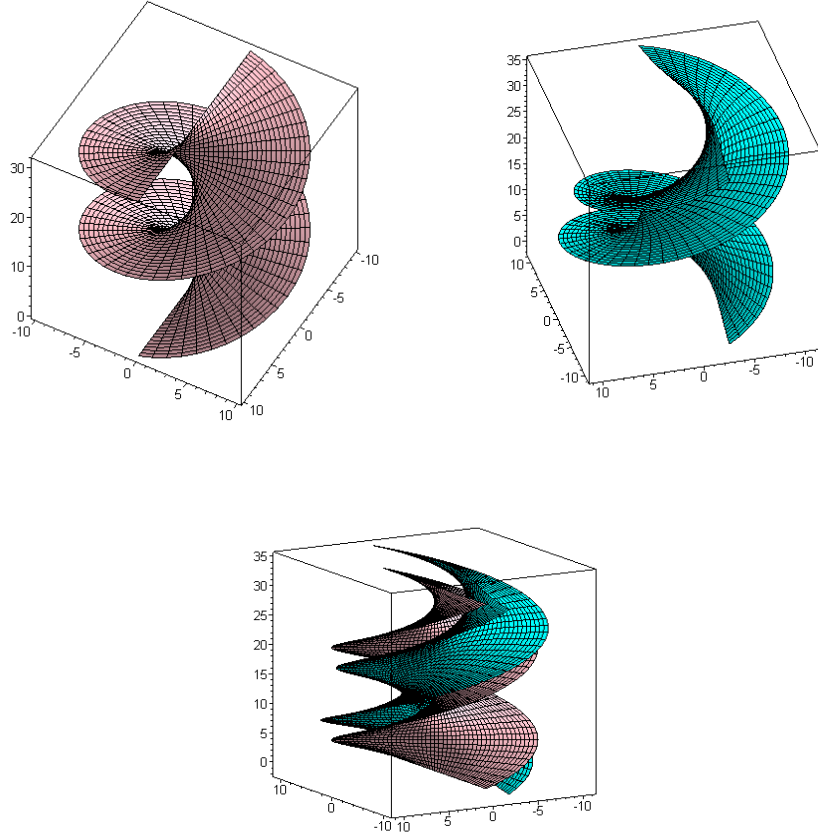
**Örnek 4.1.3:** (Helikoid) Parametrik ifadesi

$$\phi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, av)$$

olan helikoid yüzeyinin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi

$$\psi(u, v) = \left( (u + \lambda_1) \cos v + \left( \frac{a\lambda_3 - u\lambda_2}{\sqrt{u^2 + a^2}} \right) \sin v, (u + \lambda_1) \sin v + \left( \frac{u\lambda_2 - a\lambda_3}{\sqrt{u^2 + a^2}} \right) \cos v, \frac{a\lambda_2 + u\lambda_3}{\sqrt{u^2 + a^2}} + av \right)$$

şeklinde olup  $a = 2$ ,  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$ ,  $\lambda_3 = 3$  olarak alındığında bu yüzeylerin grafikleri aşağıdaki gibi olur.



**Şekil 4.3.** Helikoid ve onun sabit sırt uzaklıklı yüzeyi

Şekil 4.3’de görülen iç kısımdaki yeşil renkli grafik helikoid yüzeyinin sabit sırt uzaklıklı yüzeyidir.



**Örnek 4.1.4:** (Elipsoid)

$$\phi(u, v) = (a \sin v \cos u, b \sin v \sin u, c \cos v)$$

şeklinde verilen elipsoid yüzeyinin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi

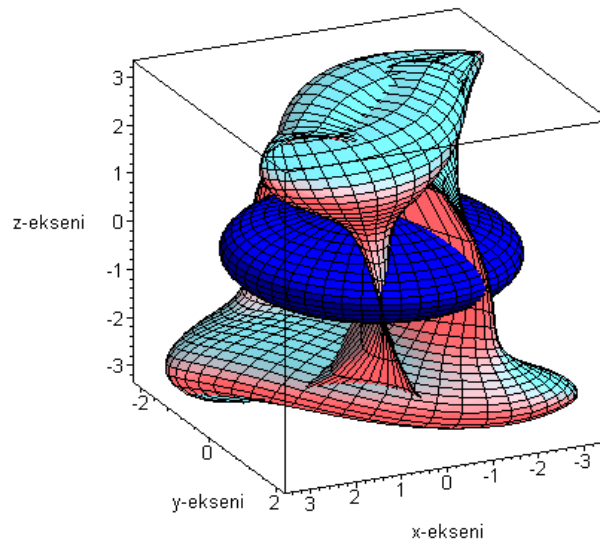
$$\psi(u, v) =$$

$$\left( \left( a - \frac{\lambda_3 bc}{\sqrt{b^2 c^2 \sin^2 v \cos^2 u + a^2 c^2 \sin^2 v \sin^2 u + a^2 b^2 \cos^2 v}} \right) \sin v \cos u - \frac{a \lambda_1}{\sqrt{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u}} \sin u + \frac{a \lambda_2}{\sqrt{a^2 \cos^2 v \cos^2 u + b^2 \cos^2 v \sin^2 u + c^2 \sin^2 v}} \cos v \cos u, \right.$$

$$\left( b - \frac{\lambda_3 ac}{\sqrt{b^2 c^2 \sin^2 v \cos^2 u + a^2 c^2 \sin^2 v \sin^2 u + a^2 b^2 \cos^2 v}} \right) \sin v \sin u + \frac{b \lambda_1}{\sqrt{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u}} \cos u + \frac{b \lambda_2}{\sqrt{a^2 \cos^2 v \cos^2 u + b^2 \cos^2 v \sin^2 u + c^2 \sin^2 v}} \cos v \sin u, \right.$$

$$\left( c - \frac{\lambda_3 ab}{\sqrt{b^2 c^2 \sin^2 v \cos^2 u + a^2 c^2 \sin^2 v \sin^2 u + a^2 b^2 \cos^2 v}} \right) \cos v - \frac{c \lambda_2}{\sqrt{a^2 \cos^2 v \cos^2 u + b^2 \cos^2 v \sin^2 u + c^2 \sin^2 v}} \sin v \Big)$$

olarak hesaplanır. Burada özel olarak  $a = 3$ ,  $b = 2$ ,  $c = 1$ ,  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$ ,  $\lambda_3 = 3$  değerleri yerine yazıldığında bu yüzeylerin grafikleri aynı dik koordinat sisteminde aşağıdaki gibi olur.



**Şekil 4.4.** Elipsoid ve onun sabit sırt uzaklıklı yüzeyi

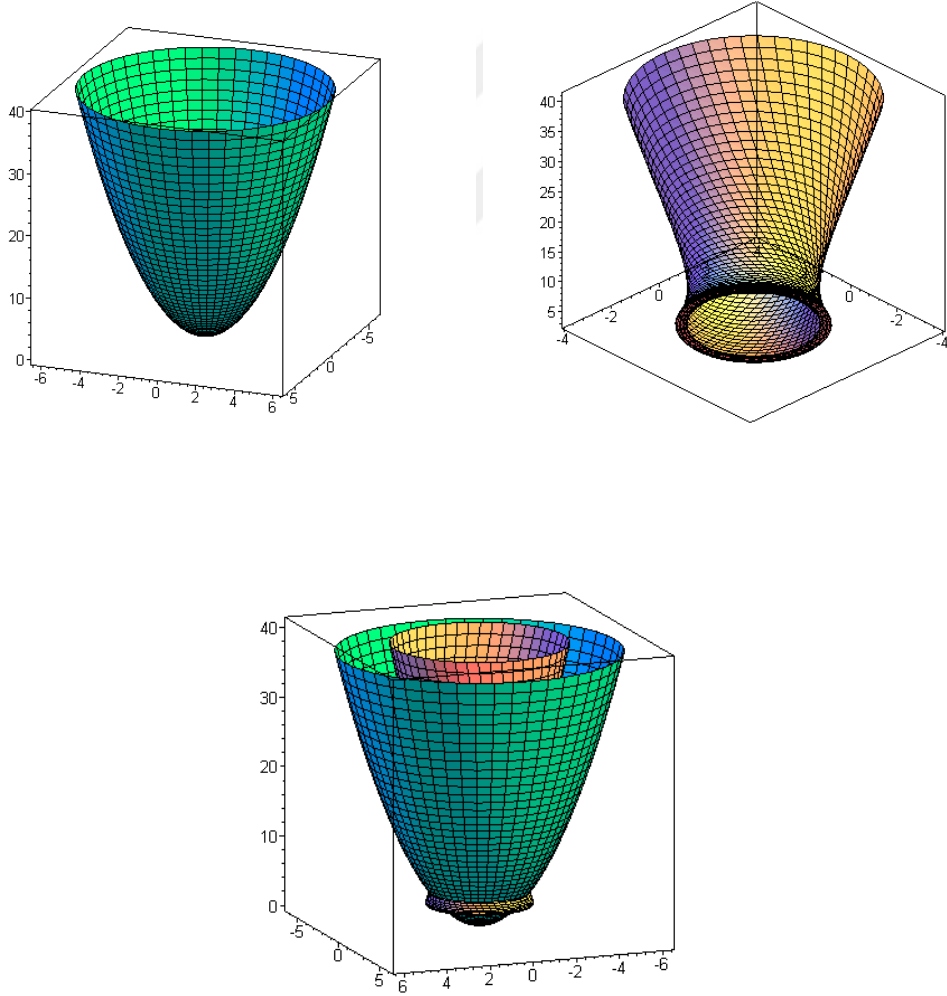
**Örnek 4.1.5:** (Paraboloid)

$$\phi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u^2)$$

şeklinde verilen paraboloid yüzeyinin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi

$$\psi(u, v) = \left( \left( u + \frac{\lambda_1 - 2\lambda_3 u}{\sqrt{1 + 4u^2}} \right) \cos v - \lambda_2 \sin v, \left( u + \frac{\lambda_1 - 2\lambda_3 u}{\sqrt{1 + 4u^2}} \right) \sin v + \lambda_2 \cos v, u^2 + \frac{2\lambda_1 u + \lambda_3}{\sqrt{1 + 4u^2}} \right)$$

olup bu yüzeyin grafiği  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$  için aşağıdaki gibi bulunur.



**Şekil 4.5.** Paraboloid ve onun sabit sırt uzaklıklı yüzeyi

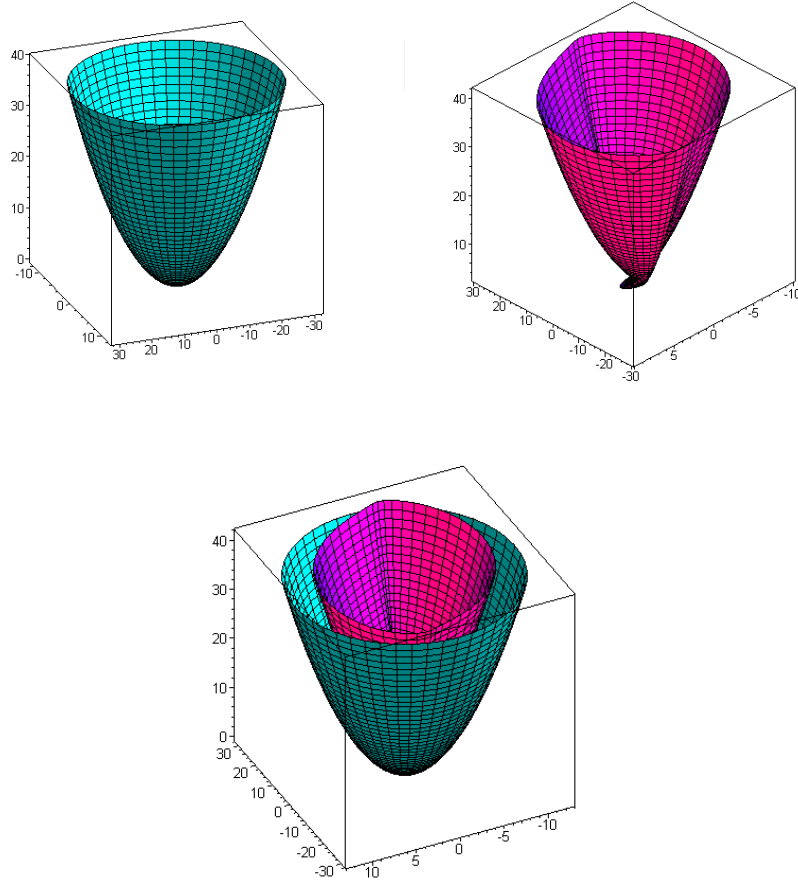
**Örnek 4.1.6:** (Eliptik Paraboloid)

$$\phi(u, v) = (aucosv, businv, u^2)$$

parametrik denklemi ile verilen eliptik paraboloidin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi

$$\psi(u, v) = \left( \cos v \left( au + \frac{a\lambda_1}{\sqrt{a^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v + 4u^2}} - \frac{2ub\lambda_3}{\sqrt{4u^2(a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v) + a^2 b^2}} \right) - \frac{a\lambda_2}{\sqrt{a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v}} \sin v, \sin v \left( bu + \frac{b\lambda_1}{\sqrt{a^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v + 4u^2}} - \frac{2ua\lambda_3}{\sqrt{4u^2(a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v) + a^2 b^2}} \right) + \frac{b\lambda_2}{\sqrt{a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v}} \cos v, u^2 + \frac{2\lambda_1 u}{\sqrt{a^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v + 4u^2}} + \frac{ab\lambda_3}{\sqrt{4u^2(a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v) + a^2 b^2}} \right)$$

şeklinde olup grafiği  $a = 5$ ,  $b = 2$ ,  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$ ,  $\lambda_3 = 3$  için aşağıdaki gibidir.



**Şekil 4.6.** Eliptik paraboloid ve onun sabit sırt uzaklıklı yüzeyi

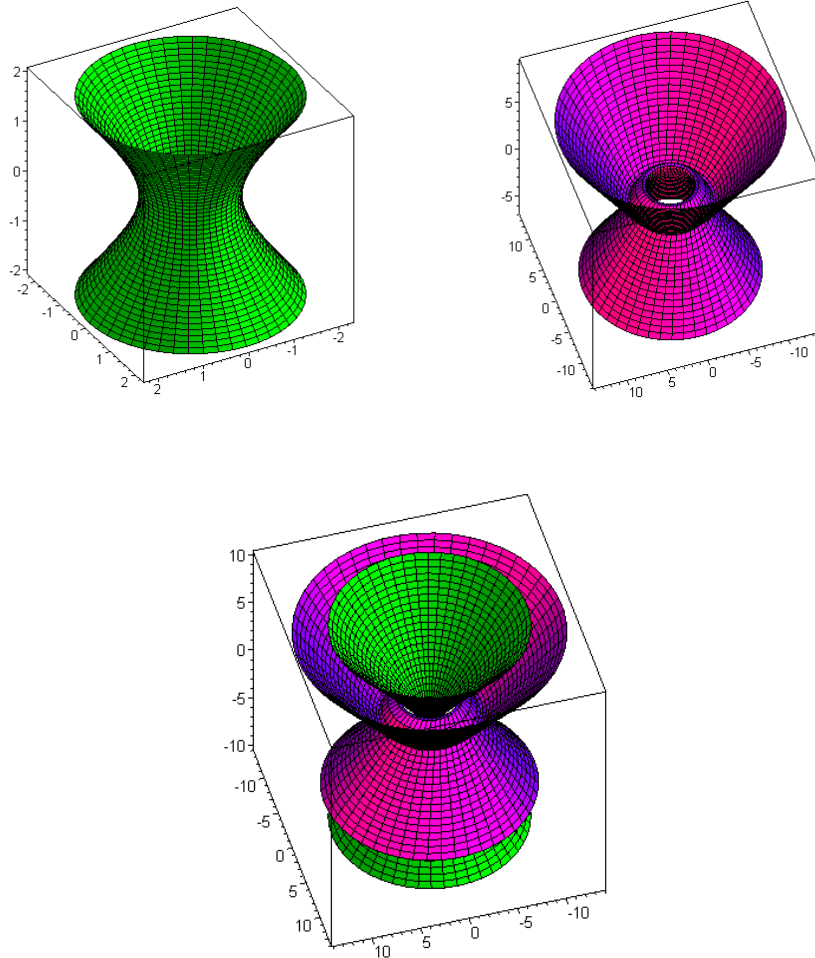
**Örnek 4.1.7:** (Tek Kanatlı Hiperboloid) Parametrik olarak

$$\phi(u, v) = (\cos u \sqrt{1 + v^2}, \sin u \sqrt{1 + v^2}, v)$$

şeklinde verilen tek kanatlı hiperboloidin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi

$$\begin{aligned} \psi(u, v) = & \left( \cos u \sqrt{1 + v^2} \left( 1 + \frac{\lambda_3}{\sqrt{1 + 2v^2}} \right) - \lambda_1 \sin u \right. \\ & + \frac{v \lambda_2 \cos u}{\sqrt{1 + 2v^2}}, \sin u \sqrt{1 + v^2} \left( 1 + \frac{\lambda_3}{\sqrt{1 + 2v^2}} \right) + \lambda_1 \cos u + \frac{v \lambda_2 \sin u}{\sqrt{1 + 2v^2}}, v \\ & \left. + \lambda_2 \frac{\sqrt{1 + v^2}}{\sqrt{1 + 2v^2}} - \lambda_3 \frac{v}{\sqrt{1 + 2v^2}} \right) \end{aligned}$$

olup bu yüzeylerin grafikleri  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$ ,  $\lambda_3 = 3$  için aşağıdaki gibidir.



**Şekil 4.7.** Tek kanatlı hiperboloid ve onun sabit sırt uzaklıklı yüzeyi

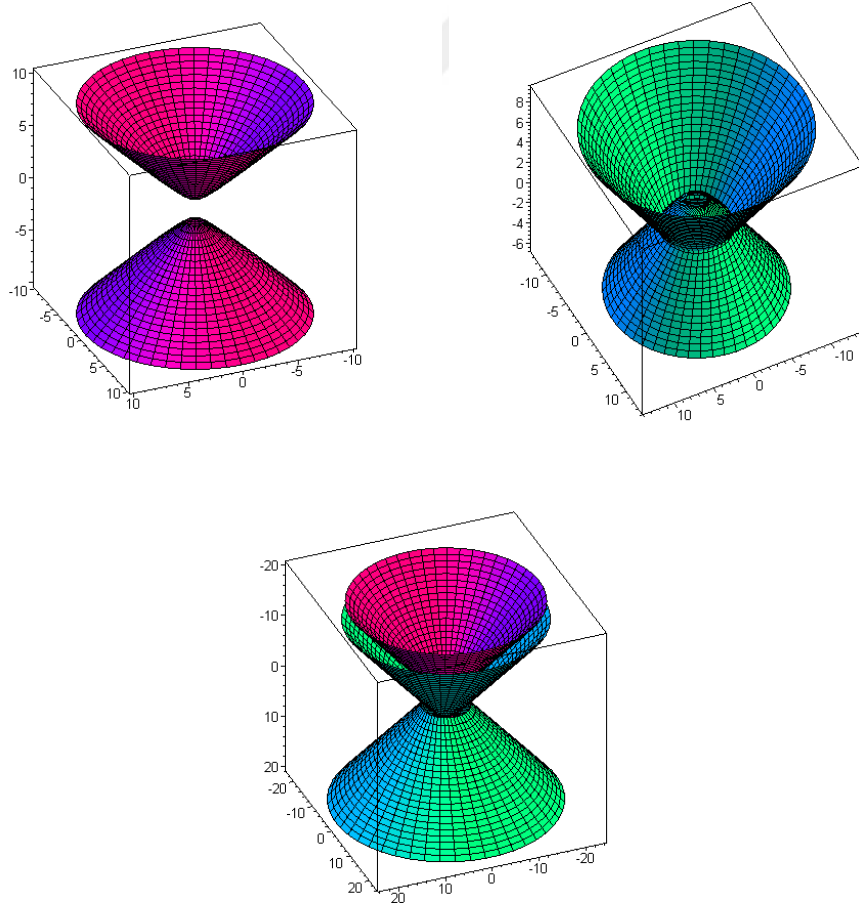
**Örnek 4.1.8:** (İki Kanatlı Hiperboloid) Parametrik ifadesi

$$\phi(u, v) = \left( \cos u \sqrt{v^2 - 1}, \sin u \sqrt{v^2 - 1}, v \right)$$

olan iki kanatlı hiperboloidin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi

$$\begin{aligned} \psi(u, v) = & \left( \cos u \sqrt{v^2 - 1} \left( 1 + \frac{\lambda_3}{\sqrt{2v^2 - 1}} \right) - \lambda_1 \sin u + \frac{v \lambda_2 \cos u}{\sqrt{2v^2 - 1}}, \right. \\ & \sin u \sqrt{v^2 - 1} \left( 1 + \frac{\lambda_3}{\sqrt{2v^2 - 1}} \right) + \lambda_1 \cos u + \frac{v \lambda_2 \sin u}{\sqrt{2v^2 - 1}}, \\ & \left. v + \lambda_2 \frac{\sqrt{v^2 - 1}}{\sqrt{2v^2 - 1}} - \lambda_3 \frac{v}{\sqrt{2v^2 - 1}} \right) \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanmış olup bu yüzeylerin grafikleri yine  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$  alınarak aşağıdaki gibi bulunur.



**Şekil 4.8.** İki kanatlı hiperboloid ve onun sabit sırt uzaklıklı yüzeyi

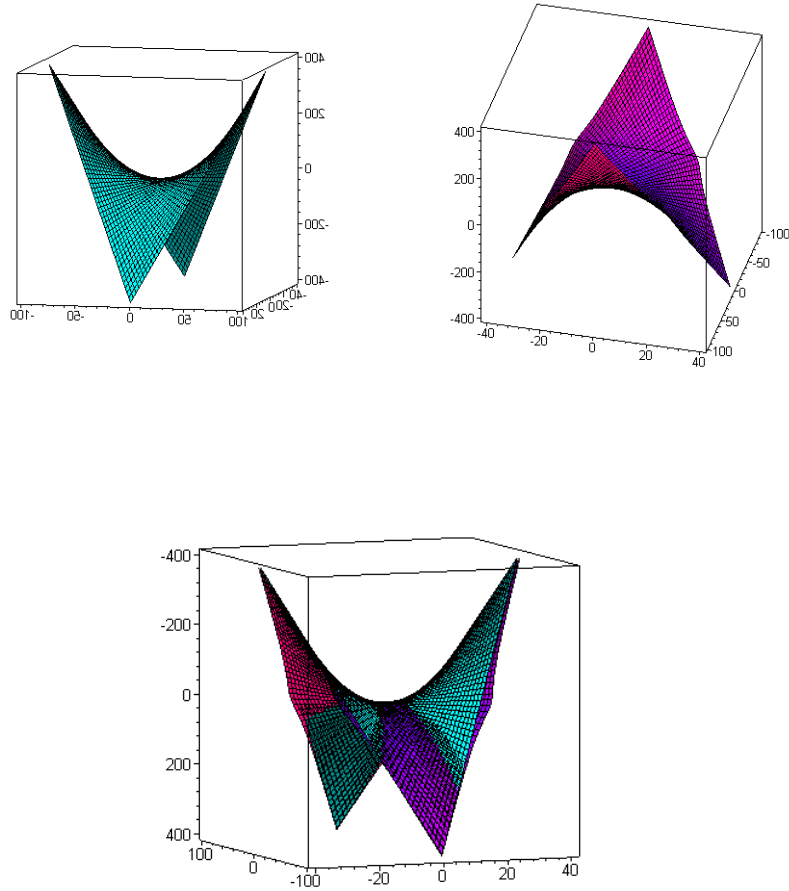
**Örnek 4.1.9:** (Hiperbolik Paraboloid) Eyer yüzeyi olarak da bilinen bu yüzeyin parametrik ifadesi

$$\phi(u, v) = (a(u + v), b(u - v), 4uv)$$

şeklinde olup bu yüzeyin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi

$$\begin{aligned} \phi(u, v) = & \left( a(u + v) + \frac{a\lambda_1}{\sqrt{a^2+b^2+16v^2}} + \frac{a\lambda_2}{\sqrt{a^2+b^2+16u^2}} + \frac{4b\lambda_3(u+v)}{\sqrt{a^2+b^2+16u^2}\sqrt{a^2+b^2+16v^2}}, \right. \\ & b(u - v) + \frac{b\lambda_1}{\sqrt{a^2+b^2+16v^2}} - \frac{b\lambda_2}{\sqrt{a^2+b^2+16u^2}} - \frac{4a\lambda_3(u-v)}{\sqrt{a^2+b^2+16u^2}\sqrt{a^2+b^2+16v^2}}, 4uv + \\ & \left. \frac{4v\lambda_1}{\sqrt{a^2+b^2+16v^2}} + \frac{4u\lambda_2}{\sqrt{a^2+b^2+16u^2}} - \frac{2ab\lambda_3}{\sqrt{a^2+b^2+16u^2}\sqrt{a^2+b^2+16v^2}} \right) \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Bu yüzeylerin grafikleri de  $a = 5$ ,  $b = 2$ ,  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$ ,  $\lambda_3 = 3$  şartları dahilinde Maple programı yardımıyla aşağıdaki gibi bulunur.



**Şekil 4.9.** Eyer yüzeyi ve onun sabit sırt uzaklıklı yüzeyi

## 4.2. Yüzey Üzerindeki $\alpha$ Parametre Eğrisinin Sabit Sırt Uzaklıklı Yüzey Üzerindeki Görüntüsü

$M$  yüzeyi için bir parametrizasyon  $(\phi, U)$  ve

$$\begin{aligned} \phi: U \subset E^2 &\rightarrow M \subset E^3 \\ (u, v) & \quad P = \phi(u, v) \end{aligned}$$

olsun.  $M$  yüzeyinin parametre eğrileri asli eğrilik çizgileri ve  $u$  ile  $v$  de bu çizgilerin yay parametreleri olarak seçilirse  $\|\phi_u\| = 1$ ,  $\|\phi_v\| = 1$  olarak alınabilir. Parametre eğrilerinden birinin  $\alpha$  birim hızlı eğrisi olduğunu kabul edip,  $\alpha$  eğrisinin yay parametresini  $s$  ile gösterirsek,

$$\phi_u = \alpha'(s) = \vec{T}$$

olur. Yüzeyin birim normal vektör alanı  $\vec{N}$  olmak üzere,  $\vec{N} \times \vec{T} = \vec{X}$  eşitliği ile tanımlanan  $\vec{X}$  vektör alanını göz önüne alalım.  $\{\vec{T}, \vec{X}, \vec{N}\}$  kümesinin  $T_{\alpha(s)}E^3$  uzayı için ortonormal bir taban olduğunu söylemiştik. Ayrıca,  $M$  yüzeyinin herhangi bir noktasındaki farklı asli eğrilik çizgilerine ait asli yönler birbirine dik olacağından,

$$\phi_v = \vec{X}$$

olarak alınabilir.

Şimdi  $\alpha$  parametre eğrisinin  $M^f$  sabit sırt uzaklıklı yüzeyi üzerindeki görüntüsünü bulalım ve  $\alpha^f = \beta$  ile göstereceğimiz bu yeni eğri için  $(\beta, M^f)$  eğri-yüzey ikilisinin eğriliklerini hesaplayalım:

Yukardaki kabuller altında sabit sırt uzaklıklı yüzeyin tanımını; bir  $M \subset E^3$  yüzeyinin  $P$  noktasındaki tanjant uzayı olan  $T_P(M)$  nin bir bazı  $\{\vec{T}, \vec{X}\}$ ,  $P \in M$  deki birim normal vektör alanı  $\vec{N}_P$ ,  $d_1, d_2, d_3$  sabit sayılar,  $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 1$  ve  $\vec{E}_P = d_1\vec{T} + d_2\vec{X} + d_3\vec{N}$  olmak üzere,

$$M^f = \{f(P): f(P) = P + r\vec{E}_P\}$$

şeklinde verebiliriz.

Böylece  $\alpha(s)$  eğrisinin sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntüsü,

$$f(\alpha(s)) = \beta(s) = \alpha(s) + r(d_1\vec{T} + d_2\vec{X} + d_3\vec{N})$$

ve  $rd_1 = \lambda_1$ ,  $rd_2 = \lambda_2$ ,  $rd_3 = \lambda_3$  olarak alınırsa,

$$\beta(s) = \alpha(s) + \lambda_1\vec{T} + \lambda_2\vec{X} + \lambda_3\vec{N}$$

olarak bulunur. Şimdi  $M^f$  yüzeyi üzerindeki  $\beta$  eğrisinin  $f(P)$  noktasındaki ortonormal  $\{\vec{T}^f, \vec{X}^f, \vec{N}^f\}$  çatisını bulalım.  $\beta$  eğrisinin  $f(P)$  noktasındaki tanjant vektörünün

$$\vec{T}^f = \frac{\beta'(s)}{\|\beta'(s)\|}$$

olacağı açıktır.

$$\beta'(s) = \frac{d\beta}{ds} = \alpha'(s) + \lambda_1\vec{T}' + \lambda_2\vec{X}' + \lambda_3\vec{N}'$$

şeklinde olup burada,  $M$  yüzeyi üzerindeki  $\alpha(s)$  eğrisi eğrilik çizgisi olarak kabul edildiğinden Teorem 3.1.6'dan  $t_r = 0$  alındığında,

$$\vec{T}' = \kappa_g\vec{X} + \kappa_n\vec{N}$$

$$\vec{X}' = -\kappa_g\vec{T}$$

$$\vec{N}' = -\kappa_n\vec{T}$$

olur. Bu değerler yukarda yerine yazılırsa,

$$\beta'(s) = (1 - \kappa_g\lambda_2 - \kappa_n\lambda_3)\vec{T} + \kappa_g\lambda_1\vec{X} + \kappa_n\lambda_1\vec{N}$$

bulunur. Buradan,

$$\|\beta'(s)\| = \sqrt{(1 - \kappa_g\lambda_2 - \kappa_n\lambda_3)^2 + \lambda_1^2(\kappa_n^2 + \kappa_g^2)}$$

olup  $\|\beta'(s)\| = l$  denirse,

$$\vec{T}^f = \frac{(1 - \kappa_g\lambda_2 - \kappa_n\lambda_3)}{l}\vec{T} + \frac{\kappa_g\lambda_1}{l}\vec{X} + \frac{\kappa_n\lambda_1}{l}\vec{N}$$

olarak bulunur. Daha önce  $M^f$  yüzeyinin birim normal vektör alanı olan  $\vec{N}^f$  nin,

$$\vec{N}^f = \frac{\lambda_1(\kappa_1 + \lambda_3K)}{A}\vec{T} + \frac{\lambda_2(\kappa_2 + \lambda_3K)}{A}\vec{X} + \frac{1 + \lambda_3H + \lambda_3^2K}{A}\vec{N}$$

şeklinde olduğunu söylemiştik (Tarakcı 2002). Burada,



$$A = \sqrt{\lambda_1^2 \kappa_1^2 + \lambda_2^2 \kappa_2^2 + 2\lambda_3(\lambda_1^2 \kappa_1 + \lambda_2^2 \kappa_2)K + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\lambda_3^2 K^2 + (1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K)^2}$$

olup  $\kappa_1, \kappa_2, M$  yüzeyinin asli eğrilikleri,  $K$  ve  $H$  ise sırasıyla yüzeyin Gauss ve Ortalama eğrilikleridir.

$\{\vec{T}^f, \vec{X}^f, \vec{N}^f\}$  ortonormal sistemi için,

$$\vec{X}^f = \vec{N}^f \times \vec{T}^f$$

olacağından,

$$\begin{aligned} \vec{X}^f = & \left[ \frac{\kappa_n \lambda_1 \lambda_2 (\kappa_2 + \lambda_3 K) - \kappa_g \lambda_1 (1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K)}{lA} \right] \vec{T} \\ & + \left[ \frac{(1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K)(1 - \kappa_g \lambda_2 - \kappa_n \lambda_3) - \kappa_n \lambda_1^2 (\kappa_1 + \lambda_3 K)}{lA} \right] \vec{X} \\ & + \left[ \frac{\kappa_g \lambda_1^2 (\kappa_1 + \lambda_3 K) - \lambda_2 (\kappa_1 + \lambda_3 K)(1 - \kappa_g \lambda_2 - \kappa_n \lambda_3)}{lA} \right] \vec{N} \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz:

**Teorem 4.2.1:**  $M, E^3$  de bir yüzey ve  $M^f$  de bu yüzeyin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi olsun.  $M$  yüzeyi üzerinde yatan  $\alpha(s)$  parametre eğrisinin, sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntüsü  $\beta(s)$  eğrisi olduğuna göre,  $(\alpha, M)$  ve  $(\beta, M^f)$  eğri-yüzey ikililerinin  $\alpha(s)$  ve  $\beta(s)$  noktalarındaki Darboux çatıları arasındaki ilişki,

$$\vec{T}^f = \frac{(1 - \kappa_g \lambda_2 - \kappa_n \lambda_3)}{l} \vec{T} + \frac{\kappa_g \lambda_1}{l} \vec{X} + \frac{\kappa_n \lambda_1}{l} \vec{N}$$

$$\begin{aligned} \vec{X}^f = & \left[ \frac{\kappa_n \lambda_1 \lambda_2 (\kappa_2 + \lambda_3 K) - \kappa_g \lambda_1 (1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K)}{lA} \right] \vec{T} \\ & + \left[ \frac{(1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K)(1 - \kappa_g \lambda_2 - \kappa_n \lambda_3) - \kappa_n \lambda_1^2 (\kappa_1 + \lambda_3 K)}{lA} \right] \vec{X} \\ & + \left[ \frac{\kappa_g \lambda_1^2 (\kappa_1 + \lambda_3 K) - \lambda_2 (\kappa_1 + \lambda_3 K)(1 - \kappa_g \lambda_2 - \kappa_n \lambda_3)}{lA} \right] \vec{N} \end{aligned}$$

$$\vec{N}^f = \frac{\lambda_1(\kappa_1 + \lambda_3 K)}{A} \vec{T} + \frac{\lambda_2(\kappa_2 + \lambda_3 K)}{A} \vec{X} + \frac{1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K}{A} \vec{N}$$

şeklinde olur.

Şimdi birim hızlı olmayan  $\beta$  eğrisi verildiğinde  $(\beta, M^f)$  eğri-yüzey ikilisinin  $\kappa_n^f, \kappa_g^f, t_r^f$  eğriliklerini hesaplayalım. Bunun için Teorem 3.1.2'den,

$$\kappa_n^f = \frac{1}{l^2} \langle \beta'', \vec{N}^f \rangle$$

$$\kappa_g^f = \frac{1}{l^2} \langle \beta'', \vec{X}^f \rangle$$

$$t_r^f = -\frac{1}{l} \left\langle \frac{\partial \vec{N}^f}{\partial s}, \vec{X}^f \right\rangle$$

formüllerini kullanacağız. Daha önce  $\beta''(s)$  ve  $\frac{\partial \vec{N}^f}{\partial s}$  değerlerini hesaplayalım:

$$\beta'(s) = (1 - \kappa_g \lambda_2 - \kappa_n \lambda_3) \vec{T} + \kappa_g \lambda_1 \vec{X} + \kappa_n \lambda_1 \vec{N}$$

olduğunu göstermiştik. Bu eşitliğin  $s$  parametresine göre bir kere daha türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} \beta''(s) &= (1 - \kappa_g \lambda_2 - \kappa_n \lambda_3)' \vec{T} + (1 - \kappa_g \lambda_2 - \kappa_n \lambda_3) \vec{T}' + \lambda_1 \kappa_g' \vec{X} + \kappa_g \lambda_1 \vec{X}' + \lambda_1 \kappa_n' \vec{N} \\ &\quad + \kappa_n \lambda_1 \vec{N}' \end{aligned}$$

ve  $\vec{T}', \vec{X}', \vec{N}'$  değerleri yerine yazılır ve ifadeler düzenlenirse,

$$\begin{aligned} \beta''(s) &= (-\lambda_2 \kappa_g' - \lambda_3 \kappa_n' - \lambda_1 \kappa_g^2 - \lambda_1 \kappa_n^2) \vec{T} + (\lambda_1 \kappa_g' + \kappa_g (1 - \kappa_g \lambda_2 - \kappa_n \lambda_3)) \vec{X} \\ &\quad + (\lambda_1 \kappa_n' + \kappa_n (1 - \kappa_g \lambda_2 - \kappa_n \lambda_3)) \vec{N} \end{aligned}$$

olur. Şimdi de  $(\vec{N}^f)'$  değerini hesaplayalım.

$$\vec{N}^f = \frac{\lambda_1(\kappa_1 + \lambda_3 K)}{A} \vec{T} + \frac{\lambda_2(\kappa_2 + \lambda_3 K)}{A} \vec{X} + \frac{(1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K)}{A} \vec{N}$$

eşitliğinin  $s$  ye göre türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{N}^f}{\partial s} = (\vec{N}^f)' &= \left( \frac{\lambda_1(\kappa_1 + \lambda_3 K)}{A} \right)' \vec{T} + \frac{\lambda_1(\kappa_1 + \lambda_3 K)}{A} \vec{T}' + \left( \frac{\lambda_2(\kappa_2 + \lambda_3 K)}{A} \right)' \vec{X} \\ &+ \frac{\lambda_2(\kappa_2 + \lambda_3 K)}{A} \vec{X}' + \left( \frac{1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K}{A} \right)' \vec{N} + \frac{1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K}{A} \vec{N}', \end{aligned}$$

ve yine gerekli işlemler yapıлып,  $\vec{T}'$ ,  $\vec{X}'$ ,  $\vec{N}'$  değerleri yerlerine yazılır ve kısalık adına  $A' = B$  olarak alınırsa,

$$\begin{aligned} A' = B &= \frac{1}{A} (\lambda_1^2 \kappa_1 \kappa_1' + \lambda_2^2 \kappa_2 \kappa_2' + \lambda_3 (\lambda_1^2 \kappa_1' + \lambda_2^2 \kappa_2') K + \lambda_3 (\lambda_1^2 \kappa_1 + \lambda_2^2 \kappa_2) K' \\ &+ (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \lambda_3^2 K K' + (1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K) (\lambda_3 H' + \lambda_3^2 K')) \end{aligned}$$

olup,

$$\begin{aligned} (\vec{N}^f)' &= \left[ \frac{\lambda_1(\kappa_1' + \lambda_3 K') A - B \lambda_1(\kappa_1 + \lambda_3 K)}{A^2} - \frac{\kappa_g \lambda_2(\kappa_2 + \lambda_3 K)}{A} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\kappa_n(1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K)}{A} \right] \vec{T} \\ &+ \left[ \frac{\lambda_2(\kappa_2' + \lambda_3 K') A - B \lambda_2(\kappa_2 + \lambda_3 K)}{A^2} + \frac{\kappa_g \lambda_1(\kappa_1 + \lambda_3 K)}{A} \right] \vec{X} \\ &+ \left[ \frac{(\lambda_3 H' + \lambda_3^2 K') A - B(1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K)}{A^2} + \frac{\kappa_n \lambda_1(\kappa_1 + \lambda_3 K)}{A} \right] \vec{N} \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır.

**Teorem 4.2.2:**  $M$ ,  $E^3$  de bir yüzey ve  $M^f$  de bu yüzeyin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi olsun.  $M$  yüzeyi üzerinde yatan  $\alpha(s)$  parametre eğrisinin sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntüsü  $\beta(s)$  eğrisi olduğuna göre,  $(\beta, M^f)$  eğri-yüzey ikilisinin  $\kappa_n^f$ ,  $\kappa_g^f$ ,  $t_r^f$  eğrilikleri,

$$\begin{aligned} \kappa_n^f &= \frac{1}{l^2} \langle \beta'', \vec{N}^f \rangle = \frac{1}{l^2 A} \left[ \lambda_1(\kappa_1 + \lambda_3 K) (-\lambda_2 \kappa_g' - \lambda_3 \kappa_n' - \lambda_1 \kappa_g^2 - \lambda_1 \kappa_n^2) + \lambda_2(\kappa_2 + \right. \\ &\lambda_3 K) (\lambda_1 \kappa_g' + \kappa_g(1 - \kappa_g \lambda_2 - \kappa_n \lambda_3)) + (1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K) (\lambda_1 \kappa_n' + \kappa_n(1 - \kappa_g \lambda_2 - \\ &\left. \kappa_n \lambda_3)) \right] \end{aligned}$$

$$\kappa_g^f = \frac{1}{l^2} \langle \beta'', \vec{X}^f \rangle = \frac{1}{l^3 A} \left[ (-\lambda_2 \kappa'_g - \lambda_3 \kappa'_n - \lambda_1 \kappa_g^2 - \lambda_1 \kappa_n^2) (\lambda_1 \lambda_2 \kappa_n (\kappa_2 + \lambda_3 K) - \kappa_g \lambda_1 (1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K)) + (\lambda_1 \kappa'_g + \kappa_g (1 - \kappa_g \lambda_2 - \kappa_n \lambda_3)) ((1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K) (1 - \kappa_g \lambda_2 - \kappa_n \lambda_3) - \kappa_n \lambda_1^2 (\kappa_1 + \lambda_3 K)) + (\lambda_1 \kappa'_n + \kappa_n (1 - \kappa_g \lambda_2 - \kappa_n \lambda_3)) (\kappa_g \lambda_1^2 (\kappa_1 + \lambda_3 K) - \lambda_2 (\kappa_2 + \lambda_3 K) (1 - \kappa_g \lambda_2 - \kappa_n \lambda_3)) \right]$$

$$t_r^f = -\frac{1}{l} \langle (\vec{N}^f)', \vec{X}^f \rangle = -\frac{1}{l^2 A^3} \left[ (\lambda_1 (\kappa'_1 + \lambda_3 K') A - B \lambda_1 (\kappa_1 + \lambda_3 K) - \kappa_g \lambda_2 A (\kappa_2 + \lambda_3 K) - \kappa_n A (1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K)) (\kappa_n \lambda_1 \lambda_2 (\kappa_2 + \lambda_3 K) - \kappa_g \lambda_1 (1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K)) + (\lambda_2 (\kappa'_2 + \lambda_3 K') A - B \lambda_2 (\kappa_2 + \lambda_3 K) + \kappa_g \lambda_1 A (\kappa_1 + \lambda_3 K)) ((1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K) (1 - \kappa_g \lambda_2 - \kappa_n \lambda_3) - \kappa_n \lambda_1^2 (\kappa_1 + \lambda_3 K)) + ((\lambda_3 H' + \lambda_3^2 K') A - B (1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K) + \kappa_n \lambda_1 A (\kappa_1 + \lambda_3 K)) (\kappa_g \lambda_1^2 (\kappa_1 + \lambda_3 K) - \lambda_2 (\kappa_2 + \lambda_3 K) (1 - \kappa_g \lambda_2 - \kappa_n \lambda_3)) \right]$$

şeklindedir.

$(\beta, M^f)$  ikilisinin  $\kappa_n^f, \kappa_g^f, t_r^f$  eğrilikleri ile  $(\alpha, M)$  ikilisinin  $\kappa_n, \kappa_g, t_r$  eğrilikleri arasındaki ilişkileri bazı özel şartlar dahilinde inceleyelim:

**Teorem 4.2.3:**  $M, E^3$  de bir yüzey ve  $M^f$  de bu yüzeyin  $Sp\{\vec{X}, \vec{N}\}$  düzleminde yatan vektörleri boyunca oluşan sabit sırt uzaklıklı yüzeyi, yani  $\lambda_1 = 0$ , olsun.  $M$  yüzeyi üzerinde yatan  $\alpha(s)$  parametre eğrisinin sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntüsü  $\beta(s)$  eğrisi olduğuna göre,  $(\beta, M^f)$  eğri-yüzey ikilisinin  $\kappa_n^f, \kappa_g^f, t_r^f$  eğrilikleri,

$$\kappa_n^f = \frac{1}{lA} [\kappa_g \lambda_2 (\kappa_2 + \lambda_3 K) + \kappa_n (1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K)]$$

$$\kappa_g^f = \frac{1}{lA} [-\kappa_n \lambda_2 (\kappa_2 + \lambda_3 K) + \kappa_g (1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K)]$$

$$t_r^f = -\frac{\lambda_2}{lA^3} [(A(\kappa'_2 + \lambda_3 K') - B(\kappa_2 + \lambda_3 K))(1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K) - (A(\lambda_3 H' + \lambda_3^2 K') - B(1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K))(\kappa_2 + \lambda_3 K)]$$

olarak hesaplanır.

**Sonuç 4.2.1:**  $M$  yüzeyi üzerinde yatan  $\alpha(s)$  parametre eğrisi geodezik eğri olsun.  $\lambda_1 = 0$  şartı dahilinde,  $\alpha(s)$  eğrisinin sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntüsü olan  $\beta(s)$  eğrisinin asimptotik eğri olması için gerek ve yeter şart  $\alpha(s)$  eğrisinin asimptotik olmasıdır.

**Sonuç 4.2.2:**  $M$  yüzeyi üzerinde yatan  $\alpha(s)$  parametre eğrisi asimptotik eğri olsun.  $\lambda_1 = 0$  şartı dahilinde,  $\alpha(s)$  eğrisinin sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntüsü olan  $\beta(s)$  eğrisinin geodezik eğri olması için gerek ve yeter şart  $\alpha(s)$  eğrisinin geodezik olmasıdır.

**Teorem 4.2.4:**  $M, E^3$  de bir yüzey ve  $M^f$  de bu yüzeyin  $Sp\{\vec{T}, \vec{N}\}$  düzleminde yatan vektörleri boyunca oluşan sabit sırt uzaklıklı yüzeyi, yani  $\lambda_2 = 0$ , olsun.  $M$  yüzeyi üzerinde yatan  $\alpha(s)$  parametre eğrisinin sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntüsü  $\beta(s)$  eğrisi olduğuna göre,  $(\beta, M^f)$  eğri-yüzey ikilisinin  $\kappa_n^f, \kappa_g^f, t_r^f$  eğrilikleri,

$$\kappa_n^f = \frac{1}{l^2_A} \left[ \lambda_1(\kappa_1 + \lambda_3 K)(-\lambda_3 \kappa'_n - \lambda_1 \kappa_g^2 - \lambda_1 \kappa_n^2) + (1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K)(\lambda_1 \kappa'_n + \kappa_n(1 - \kappa_n \lambda_3)) \right]$$

$$\kappa_g^f = \frac{1}{l^3_A} \left[ \kappa_g \lambda_1 (1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K)(\lambda_3 \kappa'_n + \lambda_1 \kappa_g^2 + \lambda_1 \kappa_n^2) + (\lambda_1 \kappa'_g + \kappa_g(1 - \kappa_n \lambda_3)) \left( (1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K)(1 - \kappa_n \lambda_3) - \kappa_n \lambda_1^2 (\kappa_1 + \lambda_3 K) \right) + \kappa_g \lambda_1^2 (\kappa_1 + \lambda_3 K)(\lambda_1 \kappa'_n + \kappa_n(1 - \kappa_n \lambda_3)) \right]$$

$$t_r^f = -\frac{\kappa_g \lambda_1}{l^2_A} \left[ (1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K)(-A \lambda_1 (\kappa'_1 + \lambda_3 K') + B \lambda_1 (\kappa_1 + \lambda_3 K) - A \kappa_n (1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K)) + A(\kappa_1 + \lambda_3 K) \left( (1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K)(1 - \kappa_n \lambda_3) - \kappa_n \lambda_1^2 (\kappa_1 + \lambda_3 K) \right) + \lambda_1 (\kappa_1 + \lambda_3 K) \left( A(\lambda_3 H' + \lambda_3^2 K') - B(1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K) + A \kappa_n \lambda_1 (\kappa_1 + \lambda_3 K) \right) \right]$$

şeklinde bulunur.

**Sonuç 4.2.3:**  $M$  yüzeyi üzerinde yatan  $\alpha(s)$  eğrisinin geodezik eğri olması için gerek ve yeter şart,  $\alpha(s)$  eğrisinin  $\lambda_2 = 0$  şartı dahilinde bulunan sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntüsü olan  $\beta(s)$  eğrisinin asli eğrilik çizgisi olmasıdır.

**Sonuç 4.2.4:**  $M$  yüzeyi üzerinde yatan  $\alpha(s)$  parametre eğrisi geodezik eğri olsun.  $\lambda_2 = 0$  şartı dahilinde,  $\alpha(s)$  eğrisinin sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntüsü olan  $\beta(s)$  eğrisinin asimptotik eğri olması için gerek ve yeter şart  $\alpha(s)$  eğrisinin asimptotik olmasıdır.

**Sonuç 4.2.5:**  $M$  yüzeyi üzerinde yatan  $\alpha(s)$  parametre eğrisi asimptotik eğri olsun.  $\lambda_2 = 0$  şartı dahilinde,  $\alpha(s)$  eğrisinin sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntüsü olan  $\beta(s)$  eğrisinin geodezik eğri olması için gerek ve yeter şart  $\alpha(s)$  eğrisinin geodezik olmasıdır.

**Teorem 4.2.5:**  $M, E^3$  de bir yüzey ve  $M^f$  de bu yüzeyin  $Sp\{\vec{T}, \vec{X}\}$  düzleminde yatan vektörleri boyunca oluşan sabit sırt uzaklıklı yüzeyi, yani  $\lambda_3 = 0$ , olsun.  $M$  yüzeyi üzerinde yatan  $\alpha(s)$  parametre eğrisinin sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntüsü  $\beta(s)$  eğrisi olduğuna göre,  $(\beta, M^f)$  eğri-yüzey ikilisinin  $\kappa_n^f, \kappa_g^f, t_r^f$  eğrilikleri,

$$\kappa_n^f = \frac{1}{l^2_A} \left[ \lambda_1 \kappa_1 (-\lambda_2 \kappa'_g - \lambda_1 \kappa_g^2 - \lambda_1 \kappa_n^2) + \lambda_2 \kappa_2 (\lambda_1 \kappa'_g + \kappa_g (1 - \kappa_g \lambda_2)) + \lambda_1 \kappa'_n + \kappa_n (1 - \kappa_g \lambda_2) \right]$$

$$\kappa_g^f = \frac{1}{l^3_A} \left[ (-\lambda_2 \kappa'_g - \lambda_1 \kappa_g^2 - \lambda_1 \kappa_n^2) (\lambda_1 \lambda_2 \kappa_2 \kappa_n - \kappa_g \lambda_1) + (\lambda_1 \kappa'_g + \kappa_g (1 - \kappa_g \lambda_2)) \left( (1 - \kappa_g \lambda_2) - \kappa_n \kappa_1 \lambda_1^2 \right) + (\lambda_1 \kappa'_n + \kappa_n (1 - \kappa_g \lambda_2)) \left( \kappa_g \kappa_1 \lambda_1^2 - \lambda_2 \kappa_2 (1 - \kappa_g \lambda_2) \right) \right]$$

$$t_r^f = -\frac{1}{l^2 A^3} \left[ \left( \lambda_1 \kappa_1' A - B \lambda_1 \kappa_1 - A (\kappa_g \lambda_2 \kappa_2 + \kappa_n) \right) (\kappa_n \lambda_1 \lambda_2 \kappa_2 - \kappa_g \lambda_1) + (\lambda_2 \kappa_2' A - B \lambda_2 \kappa_2 + A \kappa_g \lambda_1 \kappa_1) (1 - \kappa_g \lambda_2 - \kappa_n \lambda_1^2 \kappa_1) + (A \kappa_n \lambda_1 \kappa_1 - B) (\kappa_g \lambda_1^2 \kappa_1 - \lambda_2 \kappa_2 (1 - \kappa_g \lambda_2)) \right]$$

olarak bulunur.

**Sonuç 4.2.6:**  $M$  yüzeyi üzerinde yatan  $\alpha(s)$  parametre eğrisi geodezik eğri olsun.  $\lambda_3 = 0$  şartı dahilinde,  $\alpha(s)$  eğrisinin sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntüsü olan  $\beta(s)$  eğrisinin asimptotik eğri olması için gerek ve yeter şart  $\alpha(s)$  eğrisinin asimptotik olmasıdır.

**Sonuç 4.2.7:**  $M$  yüzeyi üzerinde yatan  $\alpha(s)$  parametre eğrisi asimptotik eğri olsun.  $\lambda_3 = 0$  şartı dahilinde,  $\alpha(s)$  eğrisinin sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntüsü olan  $\beta(s)$  eğrisinin geodezik eğri olması için gerek ve yeter şart  $\alpha(s)$  eğrisinin geodezik olmasıdır.

**Teorem 4.2.6:**  $M, E^3$  de bir yüzey ve  $M^f$  de bu yüzeyin  $\vec{N}$  vektör alanı boyunca oluşan sabit sırt uzaklıklı yüzeyi olsun. Yani  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  olarak alalım.  $M$  yüzeyi üzerinde yatan  $\alpha(s)$  parametre eğrisinin sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntüsü  $\beta(s)$  eğrisi olduğuna göre,  $(\beta, M^f)$  eğri-yüzey ikilisinin  $\kappa_n^f, \kappa_g^f, t_r^f$  eğriliklerinin,

$$\kappa_n^f = \frac{\kappa_n}{1 - \kappa_n \lambda_3}$$

$$\kappa_g^f = \frac{\kappa_g}{1 - \kappa_n \lambda_3}$$

$$t_r^f = 0$$

olduğu görülür.

Teorem 4.2.6'da bahsi geçen  $(M, M^f)$  sabit sırt uzaklıklı yüzey çiftinin paralel yüzey çifti olduğu açıktır.

**Sonuç 4.2.8:**  $M, E^3$  de bir yüzey ve  $M^f$  de bu yüzeyin  $\vec{N}$  vektör alanı boyunca oluşan sabit sırt uzaklıklı yüzeyi, yani paralel yüzeyi olsun.  $M$  de yatan  $\alpha(s)$  eğrisinin, sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntüsü olan  $\beta(s)$  eğrisinin asimptotik eğri olması için gerek ve yeter şart  $\alpha(s)$  eğrisinin asimptotik olmasıdır.

**Sonuç 4.2.9:**  $M, E^3$  de bir yüzey ve  $M^f$  de bu yüzeyin  $\vec{N}$  vektör alanı boyunca oluşan sabit sırt uzaklıklı yüzeyi, yani paralel yüzeyi olsun.  $M$  de yatan  $\alpha(s)$  eğrisinin, sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntüsü olan  $\beta(s)$  eğrisinin geodezik eğri olması için gerek ve yeter şart  $\alpha(s)$  eğrisinin geodezik olmasıdır.

**Sonuç 4.2.10:**  $M, E^3$  de bir yüzey ve  $M^f$  de bu yüzeyin  $\vec{N}$  vektör alanı boyunca oluşan sabit sırt uzaklıklı yüzeyi, yani paralel yüzeyi olsun.  $M$  de yatan  $\alpha(s)$  eğrisinin, sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntüsü olan  $\beta(s)$  eğrisinin bir eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart  $\alpha(s)$  eğrisinin eğrilik çizgisi olmasıdır.

**Teorem 4.2.7:**  $M, E^3$  de bir yüzey ve  $M^f$  de bu yüzeyin  $\vec{X}$  vektör alanı boyunca oluşan sabit sırt uzaklıklı yüzeyi olsun. Yani  $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$  olarak alalım.  $M$  yüzeyi üzerinde yatan  $\alpha(s)$  parametre eğrisinin sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntüsü  $\beta(s)$  eğrisi olduğuna göre,  $(\beta, M^f)$  eğri-yüzey ikilisinin  $\kappa_n^f, \kappa_g^f, t_r^f$  eğrilikleri,

$$\kappa_n^f = \frac{1}{lA} (\kappa_g \kappa_2 \lambda_2 + \kappa_n)$$

$$\kappa_g^f = \frac{1}{lA} (-\kappa_n \kappa_2 \lambda_2 + \kappa_g)$$



$$t_r^f = -\frac{\lambda_2 \kappa_2'}{lA^2}$$

şeklinde hesaplanır.

**Sonuç 4.2.11:**  $M$  yüzeyi üzerinde yatan  $\alpha(s)$  parametre eğrisi geodezik eğri olsun.  $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$  şartı dahilinde,  $\alpha(s)$  eğrisinin sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntüsü olan  $\beta(s)$  eğrisinin asimptotik eğri olması için gerek ve yeter şart  $\alpha(s)$  eğrisinin asimptotik olmasıdır.

**Sonuç 4.2.12:**  $M$  yüzeyi üzerinde yatan  $\alpha(s)$  parametre eğrisi asimptotik eğri olsun.  $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$  şartı dahilinde,  $\alpha(s)$  eğrisinin sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntüsü olan  $\beta(s)$  eğrisinin geodezik eğri olması için gerek ve yeter şart  $\alpha(s)$  eğrisinin geodezik olmasıdır.

**Teorem 4.2.8:**  $M, E^3$  de bir yüzey ve  $M^f$  de bu yüzeyin  $\vec{T}$  vektör alanı boyunca oluşan sabit sırt uzaklıklı yüzeyi olsun. Yani  $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$  olarak alalım.  $M$  yüzeyi üzerinde yatan  $\alpha(s)$  parametre eğrisinin sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntüsü  $\beta(s)$  eğrisi olduğuna göre,  $(\beta, M^f)$  eğri-yüzey ikilisinin  $\kappa_n^f, \kappa_g^f, t_r^f$  eğrilikleri,

$$\kappa_n^f = \frac{1}{l^2 A} (\kappa_n + \lambda_1 \kappa_n' - \lambda_1^2 \kappa_1 (\kappa_n^2 + \kappa_g^2))$$

$$\kappa_g^f = \frac{1}{l^3 A} [\kappa_g \lambda_1^2 (\kappa_g^2 + \kappa_n^2) + (\lambda_1 \kappa_g' + \kappa_g) (1 - \kappa_n \kappa_1 \lambda_1^2) + \kappa_g \kappa_1 \lambda_1^2 (\lambda_1 \kappa_n' + \kappa_n)]$$

$$t_r^f = -\frac{1}{l^2 A^3} [\kappa_g \lambda_1 (-A \kappa_n - A \lambda_1 \kappa_1' + B \lambda_1 \kappa_1) + \kappa_g \kappa_1 \lambda_1 A (1 - \kappa_n \kappa_1 \lambda_1^2) + \kappa_g \kappa_1 \lambda_1^2 (A \kappa_n \kappa_1 \lambda_1 - B)]$$

olarak bulunur.

**Sonuç 4.2.13:**  $M$  yüzeyi üzerinde yatan  $\alpha(s)$  parametre eğrisi geodezik eğri olsun.  $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$  şartı dahilinde,  $\alpha(s)$  eğrisinin sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntüsü olan  $\beta(s)$  eğrisinin asimptotik eğri olması için gerek ve yeter şart  $\alpha(s)$  eğrisinin asimptotik olmasıdır.

**Sonuç 4.2.14:**  $M$  yüzeyi üzerinde yatan  $\alpha(s)$  parametre eğrisi asimptotik eğri olsun.  $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$  şartı dahilinde,  $\alpha(s)$  eğrisinin sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntüsü olan  $\beta(s)$  eğrisinin geodezik eğri olması için gerek ve yeter şart  $\alpha(s)$  eğrisinin geodezik olmasıdır.

**Sonuç 4.2.15:** Eğer  $M$  yüzeyi üzerinde yatan  $\alpha(s)$  eğrisi geodezik ise,  $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$  şartı dahilinde,  $\alpha(s)$  eğrisinin sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntüsü olan  $\beta(s)$  eğrisi eğrilik çizgisi olur.

Böylece  $M$  yüzeyi üzerinde yatan  $\alpha(s)$  parametre eğrisi ile bu eğrinin  $M^f$  sabit sırt uzaklıklı yüzeyi üzerindeki görüntüsü olan  $\beta$  eğrisi göz önüne alındığında,  $(\alpha, M)$  ve  $(\beta, M^f)$  eğri-yüzey ikililerinin Darboux eğrilikleri arasındaki ilişkiler incelenmiş oldu. Şimdi,  $\alpha$  ve  $\beta$  eğrilerinin  $P = \alpha(s)$  ve  $f(P) = \beta(s)$  noktalarındaki birinci eğriliklerini hesaplayarak bu iki eğriyi karşılaştıralım:

$M$  ve  $M^f$  yüzeyleri üzerinde yatan  $\alpha(s)$  ve  $\beta(s)$  eğrilerinin birinci eğrilikleri sırasıyla,  $k_1$  ve  $k_1^f$  ile gösterilsin. Burada  $M^f$  yüzeyi üzerinde yatan  $\beta(s)$  eğrisinin  $k_1^f$  birinci eğriliğini hesaplamak için;  $\beta' = \frac{d\beta}{ds}$ ,  $\beta'' = \frac{d^2\beta}{ds^2}$  olmak üzere,

$$k_1^f = \frac{|\beta' \times \beta''|}{|\beta'|^3} \quad (4.1)$$

formülünü kullanacağız (Salimov ve Mağden 2008).

$M^f$  yüzeyi üzerinde yatan  $\beta(s)$  eğrisinin parametrik ifadesinin

$$\beta(s) = \alpha(s) + \lambda_1 \vec{T} + \lambda_2 \vec{X} + \lambda_3 \vec{N}$$

şeklinde olduğunu biliyoruz. Bu eşitliğin  $s$  parametresine göre türevlerinin ise,

$$\beta'(s) = (1 - \kappa_g \lambda_2 - \kappa_n \lambda_3) \vec{T} + \kappa_g \lambda_1 \vec{X} + \kappa_n \lambda_1 \vec{N}$$

$$\begin{aligned} \beta''(s) = & (-\lambda_2 \kappa'_g - \lambda_3 \kappa'_n - \lambda_1 \kappa_g^2 - \lambda_1 \kappa_n^2) \vec{T} + (\lambda_1 \kappa'_g + \kappa_g (1 - \kappa_g \lambda_2 - \kappa_n \lambda_3)) \vec{X} \\ & + (\lambda_1 \kappa'_n + \kappa_n (1 - \kappa_g \lambda_2 - \kappa_n \lambda_3)) \vec{N} \end{aligned}$$

olduğunu görmüştük. Bu eşitlikler (4.1) formülünde yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa,

$$k_1^f = \frac{\left[ \begin{aligned} & \lambda_1^2 (\kappa'_n \kappa_g - \kappa_n \kappa'_g)^2 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) + \lambda_1^4 k_1^6 + (1 - \kappa_g \lambda_2 - \kappa_n \lambda_3)^4 k_1^2 \\ & + \lambda_1^2 ((\kappa'_n)^2 + (\kappa'_g)^2) + 2\lambda_1^3 k_1^2 (\kappa'_n \kappa_g - \kappa_n \kappa'_g) (\kappa_g \lambda_3 - \kappa_n \lambda_2) \\ & + 2\lambda_1 (\kappa'_n \kappa_g - \kappa_n \kappa'_g) (1 - \kappa_g \lambda_2 - \kappa_n \lambda_3)^2 (\kappa_g \lambda_3 - \kappa_n \lambda_2) \\ & + 2\lambda_1^2 (\kappa'_n \kappa_g - \kappa_n \kappa'_g) (\kappa'_g \lambda_3 - \kappa'_n \lambda_2) + 2\lambda_1^2 k_1^4 (1 - \kappa_g \lambda_2 - \kappa_n \lambda_3)^2 \\ & + 2\lambda_1^3 k_1^2 (\kappa'_n \kappa_n + \kappa_g \kappa'_g) + 2\lambda_1 (1 - \kappa_g \lambda_2 - \kappa_n \lambda_3)^2 (\kappa'_n \kappa_n + \kappa_g \kappa'_g) \end{aligned} \right]^{1/2}}{\left[ (1 - \kappa_g \lambda_2 - \kappa_n \lambda_3)^2 + \lambda_1^2 k_1^2 \right]^{3/2}} \quad (4.2)$$

elde edilir.

**Teorem 4.2.9:**  $M, E^3$  de bir yüzey ve  $M^f$  de bu yüzeyin  $Sp\{\vec{X}, \vec{N}\}$  düzleminde yatan vektörleri boyunca oluşan sabit sırt uzaklıklı yüzeyi, yani  $\lambda_1 = 0$ , olsun.  $M$  yüzeyi üzerinde yatan  $\alpha(s)$  parametre eğrisinin sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntüsü  $\beta(s)$  eğrisi olduğuna göre,  $\alpha(s)$  ve  $\beta(s)$  eğrilerinin birinci eğrilikleri arasındaki ilişki,

$$k_1^f = \frac{k_1}{1 - \kappa_g \lambda_2 - \kappa_n \lambda_3} \quad (4.3)$$

şeklindedir.

**İspat:**  $\lambda_1 = 0$  değeri (4.2) denkleminde yerine yazılırsa (4.3) denklemi elde edilir.

**Sonuç 4.2.16:**  $\lambda_1 = 0$  şartı dahilinde,  $M^f$  yüzeyi üzerinde yatan  $\beta(s)$  eğrisinin doğru olması için gerek ve yeter şart  $\alpha(s)$  eğrisinin doğru olmasıdır.

**Teorem 4.2.10:**  $M, E^3$  de bir yüzey ve  $M^f$  de bu yüzeyin  $\vec{N}$  vektör alanı boyunca oluşan sabit sırt uzaklıklı yüzeyi olsun. Yani  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  olarak alalım.  $M$  yüzeyi üzerinde yatan  $\alpha(s)$  parametre eğrisinin sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntüsü  $\beta(s)$  eğrisi olduğuna göre,  $\alpha(s)$  ve  $\beta(s)$  eğrilerinin birinci eğrilikleri arasındaki ilişki,

$$k_1^f = \frac{k_1}{1 - \kappa_n \lambda_3} \quad (4.4)$$

şeklindedir.

**İspat:**  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  değeri (4.2) denkleminde yerine yazılırsa (4.4) denklemi elde edilir.

**Sonuç 4.2.17:** Eğer  $M$  yüzeyi üzerindeki  $\alpha$  eğrisi asimptotik ise bu eğrinin,  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  şartı dahilinde oluşan,  $M^f$  yüzeyi üzerindeki görüntüsü olan  $\beta$  eğrisi göz önüne alındığında,  $\alpha$  ve  $\beta$  eğrilerinin birinci eğrilikleri birbirine eşittir.

### 4.3. Sabit Sırt Uzaklıklı Yüzeyler ile Fokal Yüzeyler Arasındaki İlişki

Bu bölümde sabit sırt uzaklıklı yüzeyler ile fokal yüzeyler arasındaki ilişki araştırılmış ve herhangi bir  $M$  yüzeyinin  $F_1$  ve  $F_2$  fokal yüzeylerinin, bu yüzeyin sırasıyla  $Sp\{\phi_u, \vec{N}_p\}$  ve  $Sp\{\phi_v, \vec{N}_p\}$  düzlemlerinde yatan  $\vec{E}_p$  vektörleri boyunca oluşan sabit sırt uzaklıklı yüzeyleri ile ifade edilebileceği gösterilmiştir.

**Teorem 4.3.1:**  $E^3$  de  $\phi = \phi(u, v)$  parametrik ifadesiyle verilen bir  $M$  yüzeyinin  $Sp\{\phi_u, \vec{N}\}$  düzleminde yatan  $\vec{E}$  doğrultuları boyunca oluşan bütün sabit sırt uzaklıklı yüzeylerinin, bir  $P \in M$  noktasına karşılık gelen  $f(P)$  noktalarındaki normalleri, tepesi  $P$  deki birinci asli eğrilik merkezi  $(C_1 = P - \frac{1}{\kappa_1(P)} \vec{N}_p)$  olan uzaysal bir doğru demeti oluşturur (Yurttañıkımaz 2015).

**İspat:**  $M$  yüzeyi için,  $i = 1, 2, \dots$  olmak üzere,

$$f_i: M \rightarrow M^{f_i}$$

$$f_i(P) = P + \lambda_{1_i} \phi_u(P) + \lambda_{3_i} \vec{N}_P$$

olarak tanımlanan  $M^{f_i}$  yüzeyleri ve bu yüzeylere ait  $\vec{N}^{f_i}|_{f_i(P)}$  birim normal vektör alanları göz önüne alınsın.  $f_i(P)$  noktasından geçen ve  $\vec{N}^{f_i}|_{f_i(P)}$  doğrultusundaki doğruların arakesit noktasının  $C_1 = P - \frac{1}{\kappa_1(P)} \vec{N}_P$  olduğunu göstereceğiz.

$$M^{f_i} = \{f_i(P) = P + \lambda_{1_i} \phi_u(P) + \lambda_{3_i} \vec{N}_P: P \in M\}$$

yüzeyinin  $f_i(P)$  noktasındaki normal vektörü

$$\vec{N}^{f_i}|_{f_i(P)} = \lambda_{1_i} \kappa_1(P) \phi_u(P) + (1 + \lambda_{3_i} \kappa_1(P)) \vec{N}_P$$

dir. Yani  $\phi_u(P)$  ve  $\vec{N}_P$  nin düzleminde dir.  $f_i(P)$  noktasından geçen ve  $\vec{N}^{f_i}|_{f_i(P)}$  doğrultusundaki doğru  $d_i$  ve temsilci bir noktası  $Q = (x, y) = x \phi_u(P) + y \vec{N}_P$  ise  $d_i$  nin denklemi

$$d_i \dots \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{Pf_i(P)} + \mu_1 \vec{N}^{f_i}|_{f_i(P)}$$

olur. Ayrıca  $j = 1, 2, \dots$  olmak üzere

$$M^{f_j} = \{f_j(P) = P + \lambda_{1_j} \phi_u(P) + \lambda_{3_j} \vec{N}_P: P \in M\}$$

yüzeyinin  $f_j(P)$  noktasından geçen ve  $\vec{N}^{f_j}|_{f_j(P)}$  doğrultusundaki doğru  $d_j$  ve temsilci bir noktası  $R = (x, y)$  ise  $d_j$  nin denklemi

$$d_j \dots \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{Pf_j(P)} + \mu_2 \vec{N}^{f_j}|_{f_j(P)}$$

dir. Şimdi bu iki doğrunun arakesit noktasını arayalım.  $\{\phi_u(P), \vec{N}_P\}$  vektörlerinin düzleminde çalışıldığı için  $P$  noktası başlangıç noktası alınsın.

$$d_i \dots (x, y) = (\lambda_{1_i}, \lambda_{3_i}) + \mu_1 (\lambda_{1_i} \kappa_1, 1 + \lambda_{3_i} \kappa_1)$$

ve düzenlenirse

$$d_i \dots y = \frac{1 + \lambda_{3_i} \kappa_1}{\lambda_{1_i} \kappa_1} x - \frac{1}{\kappa_1}$$

bulunur.

$$d_j \dots (x, y) = (\lambda_{1j}, \lambda_{3j}) + \mu_2 (\lambda_{1j}\kappa_1, 1 + \lambda_{3j}\kappa_1)$$

ve düzenlenirse

$$d_j \dots y = \frac{1 + \lambda_{3j}\kappa_1}{\lambda_{1j}\kappa_1} x - \frac{1}{\kappa_1}$$

olur.

$d_i$  ve  $d_j$  nin arakesit noktası arandığında  $x = 0$  için  $y = -\frac{1}{\kappa_1}$  bulunur. Yani  $d_i$  ve  $d_j$  doğrularının arakesit noktası  $\{\phi_u(P), \vec{N}_P\}$  düzleminde  $C_1 = P - \frac{1}{\kappa_1(P)} \vec{N}_P$  noktasıdır.

**Sonuç 4.3.1:** Bu teoremde bahsi geçen  $C_1 = P - \frac{1}{\kappa_1(P)} \vec{N}_P$  noktası, bir yüzeyin fokal yüzeyinin tanımı göz önüne alındığında,  $F_1$  fokal yüzeyi üzerindedir (Yurttaçkalmaz 2015).



eşitliklerinin geçerli olduğu görülür. Bu eşitlikler bize,  $M$  yüzeyinin  $F_1$  fokal yüzeyinin, bu yüzeyin  $Sp\{\phi_u, \vec{N}_p\}$  düzlemindeki  $\vec{E}_p$  vektörleri boyunca oluşan sabit sırt uzaklıklı yüzeyleri ile ifade edilebileceğini gösterir. Eğer bu eşitliklerde

$$\mu_i = \frac{1}{\kappa_1^{f_i}}, \quad \mu_j = \frac{1}{\kappa_1^{f_j}}$$

olarak alınırsa, bu durumda  $M, M^{f_i}$  ve  $M^{f_j}$  yüzeylerinin  $F_1$  fokal yüzeyleri çakışır. Burada  $\kappa_1^{f_i}$  ve  $\kappa_1^{f_j}$  değerleri sırasıyla  $M^{f_i}$  ve  $M^{f_j}$  yüzeylerinin birinci asli eğrilikleridir. Şimdi hangi şartlar dahilinde bu durumun gerçekleşebileceğini araştıralım:

**Teorem 4.3.2:**  $M$  yüzeyi ve bu yüzeyin  $Sp\{\phi_u, \vec{N}_p\}$  düzlemindeki  $\vec{E}_p$  vektörleri boyunca oluşan sabit sırt uzaklıklı yüzeylerinin  $F_1$  fokal yüzeylerinin çakışması için gerek ve yeter şart  $M$  yüzeyinin  $\kappa_1$  birinci asli eğriliğinin sabit olmasıdır (Yurttaçkalmaz 2015).

**İspat:** İlk olarak  $M$  yüzeyi ve bu yüzeyin  $Sp\{\phi_u, \vec{N}_p\}$  düzlemindeki  $\vec{E}_p$  vektörleri boyunca oluşan sabit sırt uzaklıklı yüzeylerinin  $F_1$  fokal yüzeylerinin çakıştığını kabul edelim. Böylece (4.2) eşitliğindeki  $\mu_i = \frac{1}{\kappa_1^{f_i}}$  olur. Burada adı geçen  $\kappa_1^{f_i}$  değeri,  $Sp\{\phi_u, \vec{N}_p\}$  düzlemindeki  $\vec{E}_p$  vektörleri boyunca oluşan  $M^f$  sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin birinci asli eğriliği olup, 2002 yılında Tarakcı tarafından

$$\kappa_1^f = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1^2 \kappa_1^2 + (1 + \lambda_3 \kappa_1)^2}} \left( \frac{\lambda_1 \frac{\partial \kappa_1}{\partial u}}{\lambda_1^2 \kappa_1^2 + (1 + \lambda_3 \kappa_1)^2} + \kappa_1 \right) \quad (4.9)$$

olarak hesaplanmıştır.

Ayrıca Şekil 4.10. göz önüne alınırsa  $\mu_i = \left| C_1 f_i(P) \right|$  değeri,  $C_1 = \left( 0, -\frac{1}{\kappa_1} \right)$  ve  $f_i(P) = (\lambda_1, \lambda_3)$  noktaları arasındaki uzaklık olduğundan

$$\mu_i = \sqrt{\lambda_1^2 + \left( \lambda_3 + \frac{1}{\kappa_1} \right)^2} \quad (4.10)$$



olacağı açıktır. (4.9) ve (4.10) denklemleri  $\mu_i = \frac{1}{\kappa_1^{f_i}}$  eşitliğinde yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{\partial \kappa_1}{\partial u} = 0$$

olduğu ve böylece  $M$  yüzeyinin  $\kappa_1$  birinci asli eğriliğinin sabit olduğu görülür.

Tersine;  $M$  yüzeyinin  $\kappa_1$  birinci asli eğriliğinin sabit olduğu kabul edilirse,  $\frac{\partial \kappa_1}{\partial v} = 0$  olacağından (4.9) eşitliği

$$\kappa_1^f = \frac{\kappa_1}{\sqrt{\lambda_1^2 \kappa_1^2 + (1 + \lambda_3 \kappa_1)^2}}$$

şeklinde olup  $\mu_i = \frac{1}{\kappa_1^{f_i}}$  olacaktır. Böylece  $M$  yüzeyi ve onun  $Sp\{\phi_u, \vec{N}_P\}$  düzlemindeki  $E_P$  vektörleri boyunca oluşan sabit sırt uzaklıklı yüzeylerinin  $F_1$  fokal yüzeyleri çıkarılır.

**Teorem 4.3.3:**  $E^3$  de  $\phi = \phi(u, v)$  parametrik ifadesiyle verilen bir  $M$  yüzeyinin  $Sp\{\phi_v, \vec{N}\}$  düzleminde yatan  $E$  doğrultuları boyunca oluşan bütün sabit sırt uzaklıklı yüzeylerinin, bir  $P \in M$  noktasına karşılık gelen  $f(P)$  noktalarındaki normalleri, tepesi  $P$  deki birinci asli eğrilik merkezi  $(C_2 = P - \frac{1}{\kappa_2(P)} \vec{N}_P)$  olan uzaysal bir doğru demeti oluşturur (Yurttançıkmaç 2015).

**İspat:**  $M$  yüzeyi için,  $i = 1, 2, \dots$  olmak üzere,

$$f_i: M \rightarrow M^{f_i}$$

$$P = \phi(u, v) \quad f_i(P) = P + \lambda_{2_i} \phi_v(P) + \lambda_{3_i} \vec{N}_P$$

olarak tanımlanan  $M^{f_i}$  yüzeyleri ve bu yüzeylere ait  $\vec{N}^{f_i}|_{f_i(P)}$  birim normal vektör alanları göz önüne alınsın.  $f_i(P)$  noktasından geçen ve  $\vec{N}^{f_i}|_{f_i(P)}$  doğrultusundaki doğruların arakesit noktasının  $C_2 = P - \frac{1}{\kappa_2(P)} \vec{N}_P$  olduğunu göstereceğiz.

$$M^{f_i} = \{f_i(P) = P + \lambda_{2_i}\phi_v(P) + \lambda_{3_i}\vec{N}_P : P \in M\}$$

yüzeyinin  $f_i(P)$  noktasındaki normal vektörü

$$\vec{N}^{f_i}|_{f_i(P)} = \lambda_{2_i}\kappa_2(P)\phi_v(P) + (1 + \lambda_{3_i}\kappa_2(P))\vec{N}_P$$

dir. Yani  $\phi_v(P)$  ve  $\vec{N}_P$  nin düzleminde.  $f_i(P)$  noktasından geçen ve  $\vec{N}^{f_i}|_{f_i(P)}$  doğrultusundaki doğru  $d_i$  ve temsilci bir noktası  $Q = (x, y) = x\phi_v(P) + y\vec{N}_P$  ise  $d_i$  nin denklemi

$$d_i \dots \vec{PQ} = \vec{Pf_i(P)} + \mu_1\vec{N}^{f_i}|_{f_i(P)}$$

olur. Ayrıca  $j = 1, 2, \dots$  olmak üzere

$$M^{f_j} = \{f_j(P) = P + \lambda_{2_j}\phi_v(P) + \lambda_{3_j}\vec{N}_P : P \in M\}$$

yüzeyinin  $f_j(P)$  noktasından geçen ve  $\vec{N}^{f_j}|_{f_j(P)}$  doğrultusundaki doğru  $d_j$  ve temsilci bir noktası  $R = (x, y)$  ise  $d_j$  nin denklemi

$$d_j \dots \vec{PR} = \vec{Pf_j(P)} + \mu_2\vec{N}^{f_j}|_{f_j(P)}$$

dir. Şimdi bu iki doğrunun arakesit noktasını arayalım.  $\{\phi_v(P), \vec{N}_P\}$  vektörlerinin düzleminde çalışıldığı için  $P$  noktası başlangıç noktası alınsın.

$$d_i \dots (x, y) = (\lambda_{2_i}, \lambda_{3_i}) + \mu_1(\lambda_{2_i}\kappa_2, 1 + \lambda_{3_i}\kappa_2)$$

ve düzenlenirse

$$d_i \dots y = \frac{1 + \lambda_{3_i}\kappa_2}{\lambda_{2_i}\kappa_2}x - \frac{1}{\kappa_2}$$

bulunur.

$$d_j \dots (x, y) = (\lambda_{2_j}, \lambda_{3_j}) + \mu_2(\lambda_{2_j}\kappa_2, 1 + \lambda_{3_j}\kappa_2)$$

ve düzenlenirse

$$d_j \dots y = \frac{1 + \lambda_{3_j}\kappa_2}{\lambda_{2_j}\kappa_2}x - \frac{1}{\kappa_2}$$

olur.  $d_i$  ve  $d_j$  nin arakesit noktası arandığında  $x = 0$  için  $y = -\frac{1}{\kappa_2}$  bulunur. Yani  $d_i$  ve  $d_j$  doğrularının arakesit noktası  $\{\phi_v(P), N_P\}$  düzleminde  $C_2 = P - \frac{1}{\kappa_2(P)} \vec{N}_P$  noktasıdır.

**Sonuç 4.3.2:** Bu teoremde bahsi geçen  $C_2 = P - \frac{1}{\kappa_2(P)} \vec{N}_P$  noktası, bir yüzeyin fokal yüzeyinin tanımı göz önüne alındığında,  $F_2$  fokal yüzeyi üzerindedir (Yurttançıkılmaz 2015).

Fokal yüzeylerin tanımından

$$F_2(P) = P - \frac{1}{\kappa_2} \vec{N}_P \quad (4.11)$$

olur. Ayrıca

$$F_2(P) = f_i(P) - \mu_i \vec{N}_{f_i(P)}^{f_i} \quad (4.12)$$

veya

$$F_2(P) = f_j(P) - \mu_j \vec{N}_{f_j(P)}^{f_j} \quad (4.13)$$

eşitliklerinin geçerli olacağı Şekil 4.11'de benzer olarak görülebilir. Bu eşitlikler bize,  $M$  yüzeyinin  $F_2$  fokal yüzeyinin, bu yüzeyin  $Sp\{\phi_v, \vec{N}_P\}$  düzlemindeki  $E_P$  vektörleri boyunca oluşan sabit sırt uzaklıklı yüzeyleri ile ifade edilebileceğini gösterir. Eğer bu eşitliklerde

$$\mu_i = \frac{1}{\kappa_2^{f_i}}, \quad \mu_j = \frac{1}{\kappa_2^{f_j}}$$

olarak alınırsa, bu durumda  $M, M^{f_i}$  ve  $M^{f_j}$  yüzeylerinin  $F_2$  fokal yüzeyleri çakışır.

Burada  $\kappa_2^{f_i}$  ve  $\kappa_2^{f_j}$  değerleri sırasıyla  $M^{f_i}$  ve  $M^{f_j}$  yüzeylerinin ikinci asli eğrilikleridir. Şimdi hangi şartlar dahilinde bu durumun gerçekleşebileceğini araştıralım:

**Teorem 4.3.4:**  $M$  yüzeyi ve bu yüzeyin  $Sp\{\phi_v, \vec{N}_p\}$  düzlemindeki  $E_p$  vektörleri boyunca oluşan sabit sırt uzaklıklı yüzeylerinin  $F_2$  fokal yüzeylerinin çakışması için gerek ve yeter şart  $M$  yüzeyinin  $\kappa_2$  ikinci asli eğriliğinin sabit olmasıdır (YurttañıkmaZ 2015).

**İspat:** İlk olarak  $M$  yüzeyi ve bu yüzeyin  $Sp\{\phi_v, \vec{N}_p\}$  düzlemindeki  $E_p$  vektörleri boyunca oluşan sabit sırt uzaklıklı yüzeylerinin  $F_2$  fokal yüzeylerinin çakıştığını kabul edelim. Böylece (4.12) eşitliğindeki  $\mu_i = \frac{1}{\kappa_2^{f_i}}$  olur. Burada adı geçen  $\kappa_2^{f_i}$  değeri,  $Sp\{\phi_v, N_p\}$  düzlemindeki  $E_p$  vektörleri boyunca oluşan  $M^f$  sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin ikinci asli eğriliği olup, 2002 yılında Tarakcı tarafından

$$\kappa_2^f = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2^2 \kappa_2^2 + (1 + \lambda_3 \kappa_2)^2}} \left( \frac{\lambda_2 \frac{\partial \kappa_2}{\partial v}}{\lambda_2^2 \kappa_2^2 + (1 + \lambda_3 \kappa_2)^2} + \kappa_2 \right) \quad (4.14)$$

olarak hesaplanmıştır. Ayrıca yine Şekil 4.11'e benzer şekilde  $\mu_i = \left| \overline{C_2 f_i(P)} \right|$  değeri,  $C_2 = \left( 0, -\frac{1}{\kappa_2} \right)$  ve  $f_i(P) = (\lambda_2, \lambda_3)$  noktaları arasındaki uzaklık olduğundan

$$\mu_i = \sqrt{\lambda_2^2 + \left( \lambda_3 + \frac{1}{\kappa_2} \right)^2} \quad (4.15)$$

olacağı açıktır. (4.14) ve (4.15) denklemleri  $\mu_i = \frac{1}{\kappa_2^{f_i}}$  eşitliğinde yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{\partial \kappa_2}{\partial v} = 0$$

olduğu ve böylece  $M$  yüzeyinin  $\kappa_2$  ikinci asli eğriliğinin sabit olduğu görülür. Tersine;  $M$  yüzeyinin  $\kappa_2$  ikinci asli eğriliğinin sabit olduğu kabul edilirse,  $\frac{\partial \kappa_2}{\partial v} = 0$  olacağından (4.14) eşitliği

$$\kappa_2^f = \frac{\kappa_2}{\sqrt{\lambda_2^2 \kappa_2^2 + (1 + \lambda_3 \kappa_2)^2}}$$

şeklini alacaktır.

Bu durumda  $\mu_i = \frac{1}{\kappa_2^{f_i}}$  olacağı açıktır. Böylece  $M$  yüzeyi ve onun  $Sp\{\phi_v, \vec{N}_P\}$  düzlemindeki  $E_P$  vektörleri boyunca oluşan sabit sırt uzaklıklı yüzeylerinin  $F_2$  fokal yüzeyleri çakışır.

**Örnek 4.3.1:** Bir yüzey, üzerindeki bütün noktalarda aynı eğriliğe sahip olabilir. Bu tür noktalar umbilik nokta olup buna en iyi örnek küre yüzeyidir. Küre yüzeyinin her noktasındaki yüzey normallerinin doğrultuları tek bir noktada(kürenin merkezi) kesişeceği için, bu yüzeyin fokali de fokal yüzeylerin tanımı gereği kürenin merkez noktası olacaktır.

#### 4.3.1. $M$ ve $M^f$ yüzeylerinin Meusnier kürelerinin merkezlerinin incelenmesi:

Bu başlık altında, bir  $M$  yüzeyi ve bu yüzeyin  $Sp\{\phi_u, N_P\}$  ve  $Sp\{\phi_v, N_P\}$  düzlemlerinde yatan  $E_P$  vektörleri boyunca oluşan  $M^f$  sabit sırt uzaklıklı yüzeylerinin, sırasıyla  $P$  ve  $f(P)$  noktalarındaki Meusnier kürelerinin merkezleri incelenecektir. Teorem 4.3.1 ve Teorem 4.3.3'de bahsi geçen  $C_1$  ve  $C_2$  noktaları  $M$  ve  $M^f$  yüzeylerinin Meusnier kürelerinin merkez noktaları olmaya aday noktalardır. Ancak bu durumun hangi şartlar altında gerçekleşebileceği araştırılacaktır.

$E^3$  de alınan bir  $M$  yüzeyinin  $P \in M$  noktasındaki Meusnier küresinin merkezi,  $P$  noktasından geçen, aynı teğet yönüne sahip ve asimptotik olmayan bütün eğriler göz önüne alındığında, asli normal vektörü yüzey normali ile aynı doğrultuda olan ve eğrilik yarıçapı maksimum olan eğrinin eğrilik merkezidir. Bu eğri ise  $M$  yüzeyi üzerinde  $P$  noktasından geçen ve minimum normal eğriliğe sahip olan asli eğrilik çizgisidir.

Bu sebeple  $M$  ve  $M^f$  yüzeylerinin sırasıyla  $P$  ve  $f(P)$  noktalarındaki Meusnier kürelerinin merkezlerini  $M$  yüzeyinin  $\kappa_1, \kappa_2$  asli eğriliklerini kıyaslayarak inceleyeceğiz:

**1)  $\kappa_1 > \kappa_2$  olması durumu:**

Bu durumda  $M$  yüzeyi üzerindeki  $\alpha$  ikinci asli eğrilik çizgisinin herhangi bir  $P$  noktasındaki eğrilik çemberinin yarıçapı maksimumdur. Bu eğrinin  $P$  noktasındaki eğrilik çemberinin merkezi ise  $C_2 = \left(0, -\frac{1}{\kappa_2}\right)$  noktası olup,  $M$  yüzeyinin asli eğrilikleri arasında  $\kappa_1 > \kappa_2$  ilişkisi olduğundan, bu nokta aynı zamanda Meusnier küresinin de merkezi olacaktır.

Buna ilaveten eğer  $\alpha^f = \beta$  eğrisi için  $k_1^f = \kappa_2^f$  şartı sağlanırsa yani,  $\beta$  eğrisi de  $M^f$  yüzeyi üzerinde bir asli eğrilik çizgisi olursa ve yine  $M^f$  yüzeyi için  $\kappa_1^f > \kappa_2^f$  şartı sağlanırsa, bu durumda  $M$  yüzeyi ve bu yüzeyin  $Sp\{\phi_v, \vec{N}_P\}$  düzlemindeki  $E_P$  vektörleri boyunca oluşan sabit sırt uzaklıklı yüzeylerinin sırasıyla  $P$  ve  $f(P)$  noktalarındaki Meusnier kürelerinin merkezleri çakışacaktır. Şimdi bu durumun gerçekleşmesi için gerekli koşulları araştıralım:

$\alpha$  ve  $\alpha^f = \beta$  eğrilerinin  $P = \alpha(s)$  ve  $f(P) = \beta(s)$  noktalarındaki birinci eğriliklerini kıyaslamak amacıyla,  $\alpha^f = \beta$  eğrisinin birinci eğriliği daha önce

$$k_1^f = \frac{\left[ \lambda_1^2 (\kappa'_n \kappa_g - \kappa_n \kappa'_g)^2 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) + \lambda_1^4 k_1^6 + (1 - \kappa_g \lambda_2 - \kappa_n \lambda_3)^4 k_1^2 \right]^{1/2} + \lambda_1^2 \left( (\kappa'_n)^2 + (\kappa'_g)^2 \right) + 2\lambda_1^3 k_1^2 (\kappa'_n \kappa_g - \kappa_n \kappa'_g) (\kappa_g \lambda_3 - \kappa_n \lambda_2) + 2\lambda_1 (\kappa'_n \kappa_g - \kappa_n \kappa'_g) (1 - \kappa_g \lambda_2 - \kappa_n \lambda_3)^2 (\kappa_g \lambda_3 - \kappa_n \lambda_2) + 2\lambda_1^2 (\kappa'_n \kappa_g - \kappa_n \kappa'_g) (\kappa'_g \lambda_3 - \kappa'_n \lambda_2) + 2\lambda_1^2 k_1^4 (1 - \kappa_g \lambda_2 - \kappa_n \lambda_3)^2 + 2\lambda_1^3 k_1^2 (\kappa'_n \kappa_n + \kappa_g \kappa'_g) + 2\lambda_1 (1 - \kappa_g \lambda_2 - \kappa_n \lambda_3)^2 (\kappa'_n \kappa_n + \kappa_g \kappa'_g) \right]}{\left[ (1 - \kappa_g \lambda_2 - \kappa_n \lambda_3)^2 + \lambda_1^2 k_1^2 \right]^{3/2}}$$

şeklinde hesaplamıştı. Bu hesaplama  $\alpha$  eğrisinin  $P$  noktasındaki  $\{\vec{T}, \vec{X}, \vec{N}\}$  Darboux çatısına göre yapılmış olup, burada  $\kappa_n$  ve  $\kappa_g$  sırasıyla normal ve geodezik eğriliktir.  $\alpha$  eğrisi asli eğrilik çizgisi olarak kabul edildiğinden  $t_r$  geodezik burulma sıfır alınmıştır.

$\alpha$  ve  $\alpha^f = \beta$  eğrilerinin  $P = \alpha(s)$  ve  $f(P) = \beta(s)$  noktalarındaki birinci eğrilikleri  $\lambda_1 = 0$  şartı dahilinde (4.3) eşitliği ile

$$\kappa_1^f = \frac{\kappa_1}{1 - \kappa_g \lambda_2 - \kappa_n \lambda_3}$$

şeklinde bulunmuştu. Diğer taraftan,  $M$  yüzeyinin  $\lambda_1 = 0$  şartı dahilinde elde edilen  $M^f$  sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin  $\kappa_1^f$  ve  $\kappa_2^f$  asli eğrilikleri Tarakcı tarafından

$$\kappa_1^f = \frac{(1 + \lambda_3 \kappa_2) \kappa_1}{(1 + \lambda_3 \kappa_1) \sqrt{\lambda_2^2 \kappa_2^2 + (1 + \lambda_3 \kappa_2)^2}} \quad (4.16)$$

ve

$$\kappa_2^f = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2^2 \kappa_2^2 + (1 + \lambda_3 \kappa_2)^2}} \left( \frac{\lambda_2 \frac{\partial \kappa_2}{\partial v}}{\lambda_2^2 \kappa_2^2 + (1 + \lambda_3 \kappa_2)^2} + \kappa_2 \right) \quad (4.17)$$

olarak hesaplanmıştır (Tarakcı 2002).

$M$  yüzeyinin  $\kappa_1, \kappa_2$  asli eğrilikleri sabit ve  $\kappa_1 > \kappa_2$  olmak şartıyla, (4.16) ve (4.17) eşitlikleri kıyaslandığı takdirde  $\kappa_1^f > \kappa_2^f$  olacağı kolaylıkla görülebilir.

Böylece,  $M$  yüzeyi ve bu yüzeyin  $Sp\{\phi_v, \vec{N}_P\}$  düzlemindeki  $\vec{E}_P$  vektörleri boyunca oluşan sabit sırt uzaklıklı yüzeylerinin, sırasıyla  $P$  ve  $f(P)$  noktalarındaki Meusnier kürelerinin merkezleri çakışma durumunu aşağıdaki teoremle ifade edebiliriz.

**Teorem 4.3.5:**  $\kappa_1 > \kappa_2$  şartını sağlayan sabit asli eğriliklere sahip  $M$  yüzeyi ve onun  $\lambda_1 = 0$  şartı dahilinde elde edilen  $M^f$  sabit sırt uzaklıklı yüzeylerinin, sırasıyla  $P$  ve  $f(P)$  noktalarındaki Meusnier kürelerinin merkezlerinin çakışması için gerek ve yeter şart

$$(1 - \kappa_g \lambda_2 - \kappa_n \lambda_3)^2 = (1 + \kappa_2 \lambda_3)^2 + \kappa_2^2 \lambda_2^2$$

olmasıdır.

**İspat:**  $M$  yüzeyi ve onun  $\lambda_1 = 0$  şartı dahilinde elde edilen  $M^f$  sabit sırt uzaklıklı yüzeylerinin, sırasıyla  $P$  ve  $f(P)$  noktalarındaki Meusnier kürelerinin merkezleri,  $\kappa_1 > \kappa_2$  için,  $M$  üzerindeki  $\alpha$  ikinci asli eğrilik çizgisinin eğrilik merkezi ve  $M^f$  üzerindeki  $\alpha^f = \beta$  ikinci asli eğrilik çizgisinin eğrilik çemberinin merkezidir. Bu iki noktanın çakıştığı Teorem 4.3.3'te verilmiştir.  $\alpha$  eğrisi başlangıçta asli eğrilik çizgisi olarak kabul edilmişti ancak  $\alpha^f = \beta$  eğrisi henüz asli eğrilik çizgisi değildir.  $\beta$  eğrisinin ikinci asli eğrilik çizgisi olması için bu eğrinin birinci eğriliği ile  $M^f$  yüzeyinin ikinci asli eğriliğinin çakışması gerekir. Yani  $k_1^f = \kappa_2^f$  eşitliği sağlanmalıdır. (4.3) ve (4.17) eşitlikleri ve  $M$  yüzeyinin asli eğriliklerinin sabit olduğu göz önüne alınırsa,

$$\frac{k_1}{1 - \kappa_g \lambda_2 - \kappa_n \lambda_3} = \frac{\kappa_2}{\sqrt{\lambda_2^2 \kappa_2^2 + (1 + \lambda_3 \kappa_2)^2}}$$

olur. Burada  $\alpha$  ikinci asli eğrilik çizgisi olduğundan  $k_1 = \kappa_2$  olup

$$(1 - \kappa_g \lambda_2 - \kappa_n \lambda_3)^2 = (1 + \kappa_2 \lambda_3)^2 + \kappa_2^2 \lambda_2^2$$

eşitliğinin sağlandığı görülür. Teoremin tersinin ispatı aşıkardır.

## 2) $\kappa_1 < \kappa_2$ olması durumu:

Bu durumda  $M$  yüzeyi üzerindeki  $\alpha$  birinci asli eğrilik çizgisinin herhangi bir  $P$  noktasındaki eğrilik çemberinin yarıçapı maksimumdur. Bu eğrinin  $P$  noktasındaki eğrilik çemberinin merkezi ise  $C_1 = \left(0, -\frac{1}{\kappa_1}\right)$  noktası olup,  $M$  yüzeyinin asli eğrilikleri arasında  $\kappa_1 < \kappa_2$  ilişkisi olduğundan, bu nokta aynı zamanda Meusnier küresinin de merkezi olacaktır.

Ayrıca,  $\alpha^f = \beta$  eğrisi için  $k_1^f = \kappa_1^f$  şartı sağlanırsa yani,  $\beta$  eğrisi  $M^f$  yüzeyi üzerinde birinci asli eğrilik çizgisi olursa ve ilaveten  $M^f$  yüzeyi için  $\kappa_1^f < \kappa_2^f$  şartı sağlanırsa, bu durumda  $M$  yüzeyi ve bu yüzeyin  $Sp\{\phi_w, N_P\}$  düzlemindeki  $E_P$  vektörleri boyunca oluşan sabit sırt uzaklıklı yüzeylerinin sırasıyla  $P$  ve  $f(P)$  noktalarındaki Meusnier



kürelerinin merkezleri çakışacaktır. Şimdi bu durumun gerçekleşmesi için gerekli koşulları araştıralım:

(4.2) eşitliğinde  $\lambda_2 = 0$  alındığı takdirde  $\beta$  eğrisinin birinci eğriliği

$$k_1^f = \frac{\left[ \begin{aligned} &\lambda_1^2(\kappa'_n\kappa_g - \kappa_n\kappa'_g)^2(\lambda_1^2 + \lambda_3^2) + \lambda_1^4k_1^6 + (1 - \kappa_n\lambda_3)^4k_1^2 \\ &+ \lambda_1^2((\kappa'_n)^2 + (\kappa'_g)^2) + 2\kappa_g\lambda_3\lambda_1^3k_1^2(\kappa'_n\kappa_g - \kappa_n\kappa'_g) \\ &+ 2\kappa_g\lambda_1\lambda_3(\kappa'_n\kappa_g - \kappa_n\kappa'_g)(1 - \kappa_n\lambda_3)^2 \\ &+ 2\kappa'_g\lambda_3\lambda_1^2(\kappa'_n\kappa_g - \kappa_n\kappa'_g) + 2\lambda_1^2k_1^4(1 - \kappa_n\lambda_3)^2 \\ &+ 2\lambda_1^3k_1^2(\kappa'_n\kappa_n + \kappa_g\kappa'_g) + 2\lambda_1(1 - \kappa_n\lambda_3)^2(\kappa'_n\kappa_n + \kappa_g\kappa'_g) \end{aligned} \right]^{1/2}}{[(1 - \kappa_n\lambda_3)^2 + \lambda_1^2k_1^2]^{3/2}} \quad (4.18)$$

şeklinde bulunur. Diğer taraftan,  $M$  yüzeyinin  $\lambda_2 = 0$  şartı dahilinde elde edilen  $M^f$  sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin  $\kappa_1^f$  ve  $\kappa_2^f$  asli eğrilikleri Taracı tarafından

$$\kappa_1^f = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1^2\kappa_1^2 + (1 + \lambda_3\kappa_1)^2}} \left( \frac{\lambda_1 \frac{\partial \kappa_1}{\partial u}}{\lambda_1^2\kappa_1^2 + (1 + \lambda_3\kappa_1)^2} + \kappa_1 \right) \quad (4.19)$$

ve

$$\kappa_2^f = \frac{(1 + \lambda_3\kappa_1)\kappa_2}{(1 + \lambda_3\kappa_2)\sqrt{\lambda_1^2\kappa_1^2 + (1 + \lambda_3\kappa_1)^2}} \quad (4.20)$$

olarak hesaplanmıştır (Taracı 2002).

$M$  yüzeyinin  $\kappa_1, \kappa_2$  asli eğrilikleri sabit ve  $\kappa_1 < \kappa_2$  olmak şartıyla, (4.19) ve (4.20) eşitlikleri kıyaslandığı takdirde  $\kappa_1^f < \kappa_2^f$  olacağı kolaylıkla görülebilir.

Böylece,  $M$  yüzeyi ve bu yüzeyin  $Sp\{\phi_u, N_P\}$  düzlemindeki  $E_P$  vektörleri boyunca oluşan sabit sırt uzaklıklı yüzeylerinin, sırasıyla  $P$  ve  $f(P)$  noktalarındaki Meusnier kürelerinin merkezleri çakışma durumunu aşağıdaki teoremle ifade edebiliriz.

**Teorem 4.3.6:**  $\kappa_1 < \kappa_2$  şartını sağlayan sabit asli eğriliklere sahip  $M$  yüzeyi ve onun  $\lambda_2 = 0$  şartı dahilinde elde edilen  $M^f$  sabit sırt uzaklıklı yüzeylerinin, sırasıyla  $P$  ve  $f(P)$  noktalarındaki Meusnier kürelerinin merkezlerinin çakışması için gerek ve yeter şart

$$[\kappa_1^2(I)^2 + \lambda_1^2(\kappa'_n)^2 + 2\lambda_1\kappa_n\kappa'_n(I)](\lambda_1^2\kappa_1^2 + (1 + \lambda_3\kappa_1)^2) = \lambda_1^2(I)^3$$

olmasıdır. Burada  $I = (1 - \kappa_n\lambda_3)^2 + \lambda_1^2\kappa_1^2$  dir.

**İspat:**  $M$  yüzeyi ve onun  $\lambda_2 = 0$  şartı dahilinde elde edilen  $M^f$  sabit sırt uzaklıklı yüzeylerinin, sırasıyla  $P$  ve  $f(P)$  noktalarındaki Meusnier kürelerinin merkezleri,  $\kappa_1 < \kappa_2$  için,  $M$  üzerindeki  $\alpha$  birinci asli eğrilik çizgisinin eğrilik merkezi ve  $M^f$  üzerindeki  $\alpha^f = \beta$  birinci asli eğrilik çizgisinin eğrilik çemberinin merkezidir. Bu iki noktanın çakıştığı Teorem 4.3.1'de verilmiştir.  $\alpha$  eğrisi başlangıçta asli eğrilik çizgisi olarak kabul edilmişti ancak  $\alpha^f = \beta$  eğrisi henüz asli eğrilik çizgisi değildir.  $\beta$  eğrisinin birinci asli eğrilik çizgisi olması için bu eğrinin birinci eğriliği ile  $M^f$  yüzeyinin birinci asli eğriliğinin çakışması gerekir. Yani  $k_1^f = \kappa_1^f$  eşitliği sağlanmalıdır. (4.18) ve (4.19) eşitlikleri ve  $M$  yüzeyinin asli eğriliklerinin sabit olduğu göz önüne alınırsa,

$$\frac{\left[ \begin{aligned} &\lambda_1^2(\kappa'_n\kappa_g - \kappa_n\kappa'_g)^2(\lambda_1^2 + \lambda_3^2) + \lambda_1^4\kappa_1^6 + (1 - \kappa_n\lambda_3)^4\kappa_1^2 \\ &+ \lambda_1^2((\kappa'_n)^2 + (\kappa'_g)^2) + 2\kappa_g\lambda_3\lambda_1^3\kappa_1^2(\kappa'_n\kappa_g - \kappa_n\kappa'_g) \\ &+ 2\kappa_g\lambda_1\lambda_3(\kappa'_n\kappa_g - \kappa_n\kappa'_g)(1 - \kappa_n\lambda_3)^2 \\ &+ 2\kappa'_g\lambda_3\lambda_1^2(\kappa'_n\kappa_g - \kappa_n\kappa'_g) + 2\lambda_1^2\kappa_1^4(1 - \kappa_n\lambda_3)^2 \\ &+ 2\lambda_1^3\kappa_1^2(\kappa'_n\kappa_n + \kappa_g\kappa'_g) + 2\lambda_1(1 - \kappa_n\lambda_3)^2(\kappa'_n\kappa_n + \kappa_g\kappa'_g) \end{aligned} \right]^{1/2}}{[(1 - \kappa_n\lambda_3)^2 + \lambda_1^2\kappa_1^2]^{3/2}} = \frac{\kappa_1}{\sqrt{\lambda_1^2\kappa_1^2 + (1 + \lambda_3\kappa_1)^2}} \quad (4.21)$$

eşitliği elde edilir. (4.21) eşitliği  $\beta$  eğrisinin  $M^f$  yüzeyi üzerinde birinci asli eğrilik çizgisi olması koşuludur. Eğer  $\beta$  birinci asli eğrilik çizgisi ise Sonuç 4.2.3 gereği  $\alpha$  eğrisi geodezik eğri olacağından  $\kappa_g = 0$  olacaktır. Ayrıca  $\alpha$  eğrisi de birinci asli eğrilik çizgisi olduğundan  $k_1 = \kappa_1$  olup (4.21) denklemi

$$\frac{\left[ \begin{aligned} &\lambda_1^4\kappa_1^6 + (1 - \kappa_n\lambda_3)^4\kappa_1^2 + \lambda_1^2(\kappa'_n)^2 + 2\lambda_1^2\kappa_1^4(1 - \kappa_n\lambda_3)^2 \\ &+ 2\lambda_1^3\kappa_1^2\kappa_n\kappa'_n + 2\lambda_1\kappa_n\kappa'_n(1 - \kappa_n\lambda_3)^2 \end{aligned} \right]^{1/2}}{[(1 - \kappa_n\lambda_3)^2 + \lambda_1^2\kappa_1^2]^{3/2}} = \frac{\kappa_1}{\sqrt{\lambda_1^2\kappa_1^2 + (1 + \lambda_3\kappa_1)^2}}$$

şeklini alacaktır.

Bu denklem düzenlenirse ve kısalık adına  $I = (1 - \kappa_n \lambda_3)^2 + \lambda_1^2 \kappa_1^2$  olarak adlandırılırsa

$$[\kappa_1^2(I)^2 + \lambda_1^2(\kappa_n')^2 + 2\lambda_1 \kappa_n \kappa_n'(I)](\lambda_1^2 \kappa_1^2 + (1 + \lambda_3 \kappa_1)^2) = \lambda_1^2(I)^3$$

eşitliği elde edilir. Teoremin tersinin ispatı aşıkardır.

### 3) $\kappa_1 = \kappa_2$ olması durumu:

Bu tür noktaların umbilik noktalar olarak adlandırıldığını biliyoruz. Umbilik noktalarda  $\kappa_1 = \kappa_2$  olduğundan  $C_1$  ve  $C_2$  noktaları çakışacaktır. Teorem 4.3.1 ve Teorem 4.3.3'te,  $M$  ve  $M^f$  yüzeylerinin  $P$  ve  $f(P)$  noktalarındaki normal doğrultularının sırasıyla  $\lambda_2 = 0$  ve  $\lambda_1 = 0$  şartları dahilinde kesiştiğini ve bu kesişim noktalarının  $C_1 = \left(0, -\frac{1}{\kappa_1}\right)$  ve  $C_2 = \left(0, -\frac{1}{\kappa_2}\right)$  noktaları olduğunu gördük.  $\kappa_1 = \kappa_2$  iken  $C_1$  ve  $C_2$  noktaları çakıştığı için, hem  $\lambda_1 = 0$  hem de  $\lambda_2 = 0$  şartı gerçekleşmiştir. Ayrıca, (4.2) eşitliğinde  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  alındığı takdirde  $\beta$  eğrisinin birinci eğriliği

$$k_1^f = \frac{\kappa_1}{1 - \kappa_n \lambda_3} \quad (4.22)$$

şeklinde bulunur. Teorem 4.3.2. ve Teorem 4.3.4'te  $|\overrightarrow{C_1 f(P)}| = \frac{1}{\kappa_1^f}$  ve  $|\overrightarrow{C_2 f(P)}| = \frac{1}{\kappa_2^f}$  olması için sırasıyla  $\kappa_1 = \text{sabit}$  ve  $\kappa_2 = \text{sabit}$  olması gerektiğini ispat ettik. Tüm bu koşullar altında  $M^f$  yüzeyinin şekil operatörünün matrisi (3.26) eşitliğinden

$$S^f = \begin{bmatrix} \kappa_1 / (1 + \lambda_3 \kappa_1) & 0 \\ 0 & \kappa_2 / (1 + \lambda_3 \kappa_2) \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur. Buradan  $\kappa_1 = \kappa_2$  iken

$$\kappa_1^f = \kappa_2^f = \frac{\kappa_1}{1 + \lambda_3 \kappa_1} = \frac{\kappa_2}{1 + \lambda_3 \kappa_2} \quad (4.23)$$

olacağı açıktır.

Böylece,  $M$  yüzeyi üzerindeki  $\alpha$  asli eğrilik çizgisinin herhangi bir  $P$  noktasındaki eğrilik çemberinin merkezi  $C_1 = C_2 = \left(0, -\frac{1}{\kappa_1}\right) = \left(0, -\frac{1}{\kappa_2}\right)$  noktası olup,  $M$  yüzeyinin asli eğrilikleri arasında  $\kappa_1 = \kappa_2$  ilişkisi olduğundan, bu nokta aynı zamanda Meusnier küresinin de merkezi olacaktır.

Buna ilaveten eğer  $\alpha^f = \beta$  eğrisi için  $k_1^f = \kappa_1^f = \kappa_2^f$  şartı sağlanırsa yani,  $\beta$  eğrisi de  $M^f$  yüzeyi üzerinde bir asli eğrilik çizgisi olursa bu durumda  $M$  ve  $M^f$  yüzeylerinin sırasıyla  $P$  ve  $f(P)$  noktalarındaki Meusnier kürelerinin merkezleri çakışacaktır. Şimdi bu durumun gerçekleşmesi için gerekli koşulları araştıralım:

**Teorem 4.3.7:**  $\kappa_1 = \kappa_2$  şartını sağlayan sabit asli eğriliklere sahip  $M$  yüzeyi ve onun  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  şartı dahilinde elde edilen  $M^f$  sabit sırt uzaklıklı yüzeylerinin, sırasıyla  $P$  ve  $f(P)$  noktalarındaki Meusnier kürelerinin merkezleri çakışır.

**İspat:**  $\kappa_1 = \kappa_2$  şartını sağlayan sabit asli eğriliklere sahip  $M$  yüzeyi ve onun  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  şartı dahilinde elde edilen  $M^f$  sabit sırt uzaklıklı yüzeylerinin, sırasıyla  $P$  ve  $f(P)$  noktalarındaki Meusnier kürelerinin merkezlerinin çakışması için,  $\alpha^f = \beta$  eğrisinin  $M^f$  yüzeyi üzerinde bir asli eğrilik çizgisi olması gerekir.  $\beta$  asli eğrilik çizgisi ise

$$k_1^f = \kappa_1^f = \kappa_2^f$$

eşitliği sağlanır. (4.22) ve (4.23) eşitlikleri bu denklemde yerine yazılırsa ve  $\alpha$  eğrisinin de asli eğrilik çizgisi olduğu ( $k_1 = \kappa_1 = \kappa_2$ ) göz önüne alınırsa

$$\kappa_n = \kappa_1 = \kappa_2$$

bulunur. Bir yüzeyin asli eğrilikleri o yüzeyin normal eğriliklerinin ekstramum değerleri olup bu özdeşlik bize başlangıçtaki kabullerimizin doğru olduğunu yani,  $M$  ve  $M^f$  yüzeylerinin sırasıyla  $P$  ve  $f(P)$  noktalarındaki Meusnier kürelerinin merkezlerinin çakıştığını ifade eder.

#### 4.4. Regle Yüzeyin Sabit Sırt Uzaklıklı Yüzeyi

Dayanak eğrisi  $\alpha(u)$  olan ve anadoğru (üreteç) boyunca doğrultu vektörü de  $\vec{X}(u)$  olan regle yüzeyin denkleminin,

$$\phi(u, v) = \alpha(u) + v\vec{X}(u)$$

şeklinde olduğunu biliyoruz. Bu yüzeyin sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin denklemi  $\{\phi_u, \phi_v, \vec{N}_P\}$  bazına göre,

$$\psi(u, v) = \phi(u, v) + \lambda_1 \phi_u(u, v) + \lambda_2 \phi_v(u, v) + \lambda_3 \vec{N}_P(u, v)$$

$$\psi(u, v) = \alpha(u) + v\vec{X}(u) + \lambda_1(\alpha'(u) + v\vec{X}'(u)) + \lambda_2 \vec{X}(u) + \lambda_3 \frac{\phi_u \times \phi_v}{\|\phi_u \times \phi_v\|}$$

olur. Burada  $\vec{N}_P$  vektörü regle yüzeyin herhangi bir  $P$  noktasındaki birim normal vektör alanı olup,

$$\vec{N}_P = \frac{\phi_u \times \phi_v}{\|\phi_u \times \phi_v\|} = \frac{[\alpha'(u), \vec{X}(u)] + v[\vec{X}'(u), \vec{X}(u)]}{\|[\alpha'(u), \vec{X}(u)] + v[\vec{X}'(u), \vec{X}(u)]\|}$$

şeklindedir. Regle yüzeyin bir  $P$  noktasında, ortonormal olacak şekilde bir  $\{\vec{T}, \vec{X}, \vec{N}\}$  bazı teşkil edelim.  $\alpha$  dayanak eğrisinin yay parametresi ile verildiğini ve doğrultman üzerindeki  $\vec{X}$  tanjant vektörünün de her  $u \in I$  için birim vektör olduğunu kabul edelim.  $\alpha$  eğrisinin birim teğet vektör alanı,

$$\vec{T} = \frac{d\alpha}{du} = \alpha'(u)$$

ve yüzeyin birim normali  $\vec{N}$  olmak üzere,  $\alpha$  eğrisi  $\langle \vec{T}, \vec{X} \rangle = 0$  olacak şekilde seçilmiş ise,  $\{\vec{T}, \vec{X}, \vec{N}\}$  sistemi  $\alpha$  boyunca bir ortonormal sistem oluşturur.

Şimdi  $\{\vec{T}, \vec{X}, \vec{N}\}$  sisteminin  $\alpha$  boyunca değişimini yani,  $\vec{T}$  ye göre her birinin kovaryant türevlerini bulalım.  $\alpha$  boyunca,

$$\langle \vec{T}, \vec{T} \rangle = \langle \vec{X}, \vec{X} \rangle = \langle \vec{N}, \vec{N} \rangle = 1$$

olduğundan bu eşitliklerin  $\vec{T}$  ye göre kovaryant türevleri alınırsa,

$$\langle D_{\vec{T}}\vec{T}, \vec{T} \rangle = 0, \quad \langle D_{\vec{T}}\vec{X}, \vec{X} \rangle = 0, \quad \langle D_{\vec{T}}\vec{N}, \vec{N} \rangle = 0$$

bulunur.  $a, b, c \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  fonksiyonları,

$$a = \langle D_{\vec{T}}\vec{T}, \vec{X} \rangle$$

$$b = \langle D_{\vec{T}}\vec{T}, \vec{N} \rangle$$

$$c = \langle D_{\vec{T}}\vec{X}, \vec{N} \rangle$$

şeklinde tanımlanırsa bu değerler matris formunda

$$\begin{bmatrix} D_{\vec{T}}\vec{T} \\ D_{\vec{T}}\vec{X} \\ D_{\vec{T}}\vec{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{X} \\ \vec{N} \end{bmatrix}$$

olur (Hacısalihoglu 1983). Bu eşitlikler,

$$\psi(u, v) = \alpha(u) + v\vec{X}(u) + \lambda_1(\alpha'(u) + v\vec{X}'(u)) + \lambda_2\vec{X}(u) + \lambda_3 \frac{\phi_u \times \phi_v}{\|\phi_u \times \phi_v\|}$$

denkleminde kullanılırsa regle yüzeyin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi

$$\begin{aligned} \psi(u, v) = & \alpha(u) + \left( \lambda_1 - av\lambda_1 - \frac{cv\lambda_3}{\sqrt{(1-av)^2 + c^2v^2}} \right) \vec{T} + (v + \lambda_2)\vec{X} \\ & + \left( cv\lambda_1 + \frac{\lambda_3(1-av)}{\sqrt{(1-av)^2 + c^2v^2}} \right) \vec{N} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

**Teorem 4.4.1:** Bir regle yüzeyin,  $\vec{X}(u)$  doğrultmanı boyunca oluşan sabit sırt uzaklıklı yüzeyi de bir regle yüzeydir.

**İspat:** Regle yüzeyin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi  $X(u)$  doğrultmanı boyunca oluştuğundan, sabit sırt uzaklıklı yüzey tanımında  $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$  olarak alınır. Bu değerler regle yüzeyin sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin parametrik denkleminde yerine yazılırsa,

$$\psi(u, v) = \alpha(u) + (v + \lambda_2)\vec{X}$$

elde edilir. Burada  $\lambda_2$  sabit bir sayı olduğundan elde edilen yüzey bir regle yüzeydir.

Bu teoreme bir örnekle açıklık getirelim:

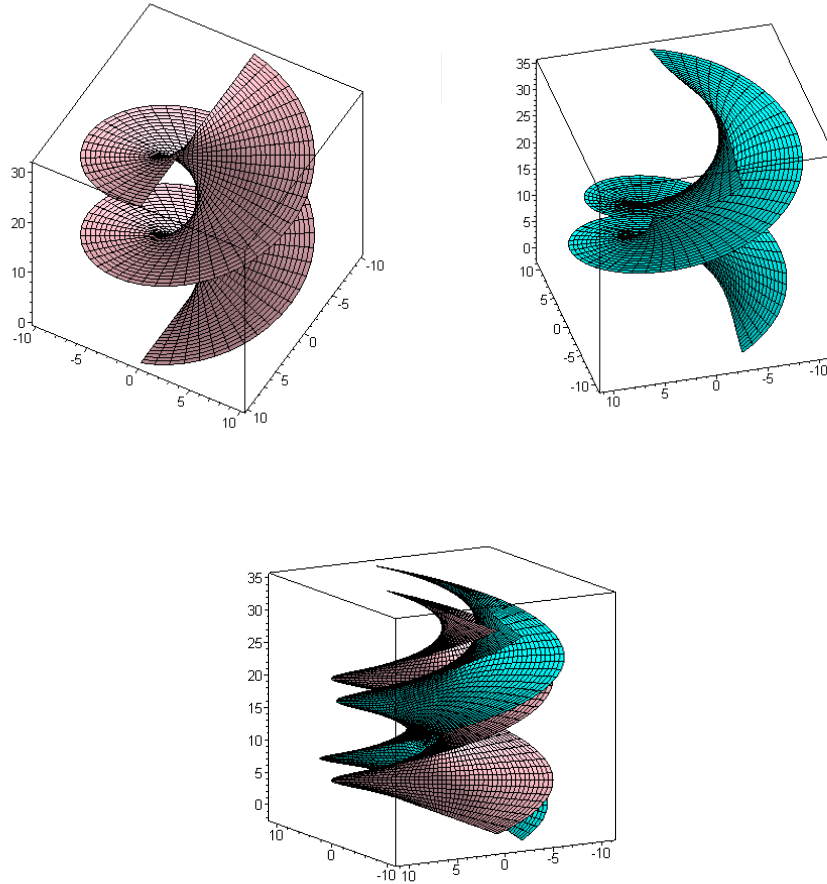
**Örnek 4.4.1:** Parametrik ifadesi

$$\phi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, av)$$

olan helikoid yüzeyinin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi

$$\psi(u, v) = \left( (u + \lambda_1) \cos v - \left( \frac{u\lambda_2 - a\lambda_3}{\sqrt{u^2 + a^2}} \right) \sin v, (u + \lambda_1) \sin v + \left( \frac{u\lambda_2 - a\lambda_3}{\sqrt{u^2 + a^2}} \right) \cos v, \frac{a\lambda_2 + u\lambda_3}{\sqrt{u^2 + a^2}} + av \right)$$

olup  $a = 5, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$  olarak alındığında bu yüzeylerin grafikleri aşağıdaki gibi olur.

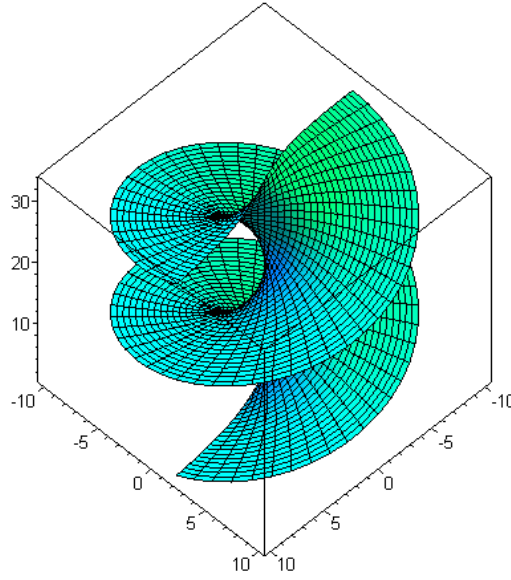


**Şekil 4.11.** Helikoid ve onun sabit sırt uzaklıklı yüzeyi

Diğer taraftan bu örnekte helikoid yüzeyinin sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin denklemi  $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$  şartı dahilinde bulunursa,

$$\psi(u, v) = \left( u \cos v - \frac{u \lambda_2}{\sqrt{u^2 + a^2}} \sin v, u \sin v + \frac{u \lambda_2}{\sqrt{u^2 + a^2}} \cos v, \frac{a \lambda_2}{\sqrt{u^2 + a^2}} + av \right)$$

ifadesi elde edilir. Bu yüzeyin grafiği  $a = 5$ ,  $\lambda_2 = 2$  değerleri için aşağıdaki gibi bulunur.



**Şekil 4.12.**  $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$  alındığında helikoid yüzeyinin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi

Helikoidin sabit sırt uzaklıklı yüzeylerinin grafikleri incelendiğinde, genel halde regle yüzey olma özelliğinin korunmadığı fakat,  $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$  alınması halinde bir regle yüzey örneği olan helikoid yüzeyinin sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin de regle olduğu görülmüştür.

**Teorem 4.4.2:** Bir regle yüzeyin, bir doğrultmanı boyunca teğet düzlemlerinin aynı olması için gerek ve yeter şart  $c = 0$  olmasıdır (Hacısalıhoğlu 1983).



**Tanım 4.4.1:** Bir regle yüzeyin anadoğruları boyunca teğet düzlemleri aynı ise regle yüzeye açılabilir denir.

Eğer regle yüzey açılabilir ise  $c = 0$  olacağından, bu yüzeyin sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin denklemi,

$$\psi(u, v) = \alpha(u) + (\vec{X} - a\lambda_1\vec{T})v + \lambda_1\vec{T} + \lambda_2\vec{X} + \lambda_3\vec{N}$$

şeklindedir.

**Teorem 4.4.3:** Eğer bir regle yüzeyin dayanak eğrisi asli eğrilik çizgisi olarak seçilirse, bu yüzeyin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi yine bir regle yüzey olur.

**İspat:** Dayanak eğrisi  $\alpha(u)$  olan ve anadoğru (üreteç) boyunca doğrultu vektörü de  $X(u)$  olan regle yüzeyin denklemi,

$$\phi(u, v) = \alpha(u) + v\vec{X}(u)$$

şeklinde verilmişti. Bu yüzeyin dayanak eğrisi birinci parametre eğrisi olarak seçildiği takdirde

$$\phi_u = \alpha'(u) = \vec{T}$$

eşitliği geçerlidir. Burada

$$\phi_u = \alpha'(u) + vX'(u) = (1 - av)\vec{T} + cv\vec{N}$$

olarak hesaplanır.  $\phi_u = \alpha'(u) = \vec{T}$  olduğu göz önüne alınırsa,

$$1 - av = 1 \quad ve \quad cv = 0$$

eşitlikleri elde edilir. Burada  $v$ , regle yüzeyin ikinci parametre eğrisinin yay parametresi olduğundan,

$$a = 0 \quad ve \quad c = 0$$

değerleri elde edilir. Daha önce regle yüzeyin sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin parametrik denklemi

$$\begin{aligned}\psi(u, v) = \alpha(u) + \left( \lambda_1 - av\lambda_1 - \frac{cv\lambda_3}{\sqrt{(1-av)^2 + c^2v^2}} \right) \vec{T} + (v + \lambda_2) \vec{X} \\ + \left( cv\lambda_1 + \frac{\lambda_3(1-av)}{\sqrt{(1-av)^2 + c^2v^2}} \right) \vec{N}\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanmıştı. Bu eşitlikte  $a = c = 0$  olduğu göz önüne alınırsa,

$$\psi(u, v) = \alpha(u) + \lambda_1 \vec{T} + \lambda_2 \vec{X} + \lambda_3 \vec{N} + v \vec{X}$$

eşitliği bulunur. Burada  $\alpha$  eğrisinin sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntüsü

$$\alpha^f = \beta(u) = \alpha(u) + \lambda_1 \vec{T} + \lambda_2 \vec{X} + \lambda_3 \vec{N}$$

olduğundan

$$\psi(u, v) = \beta(u) + v \vec{X}(u)$$

bulunur. Elde edilen bu yüzey bir regle yüzeydir.

## 5. SONUÇ

Bu doktora tez çalışmasında  $E^3$  te alınan bir  $M$  yüzeyinin  $M^f$  sabit sırt uzaklıklı yüzeyi incelenmiştir.

İlk olarak, verilen bir yüzeyin sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin parametrik ifadesi bulunmuş ve Maple programı yardımıyla elde edilen yeni yüzeylerin grafikleri çizilmiştir. Böylece söz konusu yüzey ve onun sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin değişimi incelenmiş, silindir ve küre gibi sabit eğriliklere sahip yüzeylerin sabit sırt uzaklıklı yüzeylerinin değişmediği, sadece uzaydaki konumlarının değiştiği gözlemlenmiştir.

İkinci olarak,  $M$  yüzeyi üzerinde alınan  $\alpha$  parametre eğrisinin  $M^f$  sabit sırt uzaklıklı yüzeyi üzerindeki görüntüsü bulunmuş ve bu eğri  $\alpha^f = \beta$  ile gösterilmiştir.  $M^f$  yüzeyi üzerinde yatan  $\beta$  eğrisi göz önüne alındığında,  $(\beta, M^f)$  eğri-yüzey ikilisinin  $\{\vec{T}^f, \vec{X}^f, \vec{N}^f\}$  Darboux çatısı bulunmuş ve  $\kappa_n^f$  normal eğriliği,  $\kappa_g^f$  geodezik eğriliği ve  $t_r^f$  geodezik burulması hesaplanmıştır. Bu hesaplamalar sonucunda elde edilen teorem ve sonuçlar aşağıda verilmiştir:

**Teorem 5.1:**  $M, E^3$  de bir yüzey ve  $M^f$  de bu yüzeyin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi olsun.  $M$  yüzeyi üzerinde yatan  $\alpha(s)$  parametre eğrisinin, sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntüsü  $\beta(s)$  eğrisi olduğuna göre,  $(\alpha, M)$  ve  $(\beta, M^f)$  eğri-yüzey ikililerinin  $\alpha(s)$  ve  $\beta(s)$  noktalarındaki Darboux çatıları arasındaki ilişki,

$$\vec{T}^f = \frac{(1 - \kappa_g \lambda_2 - \kappa_n \lambda_3)}{l} \vec{T} + \frac{\kappa_g \lambda_1}{l} \vec{X} + \frac{\kappa_n \lambda_1}{l} \vec{N}$$

$$\begin{aligned}\vec{X}^f &= \left[ \frac{\kappa_n \lambda_1 \lambda_2 (\kappa_2 + \lambda_3 K) - \kappa_g \lambda_1 (1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K)}{lA} \right] \vec{T} \\ &\quad + \left[ \frac{(1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K)(1 - \kappa_g \lambda_2 - \kappa_n \lambda_3) - \kappa_n \lambda_1^2 (\kappa_1 + \lambda_3 K)}{lA} \right] \vec{X} \\ &\quad + \left[ \frac{\kappa_g \lambda_1^2 (\kappa_1 + \lambda_3 K) - \lambda_2 (\kappa_1 + \lambda_3 K)(1 - \kappa_g \lambda_2 - \kappa_n \lambda_3)}{lA} \right] \vec{N} \\ \vec{N}^f &= \frac{\lambda_1 (\kappa_1 + \lambda_3 K)}{A} \vec{T} + \frac{\lambda_2 (\kappa_2 + \lambda_3 K)}{A} \vec{X} + \frac{1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K}{A} \vec{N}\end{aligned}$$

şeklinde olur.

**Teorem 5.2:**  $M$ ,  $E^3$  de bir yüzey ve  $M^f$  de bu yüzeyin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi olsun.  $M$  yüzeyi üzerinde yatan  $\alpha(s)$  parametre eğrisinin sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntüsü  $\beta(s)$  eğrisi olduğuna göre,  $(\beta, M^f)$  eğri-yüzey ikilisinin  $\kappa_n^f$ ,  $\kappa_g^f$ ,  $t_r^f$  eğrilikleri,

$$\begin{aligned}\kappa_n^f &= \frac{1}{l^2} \langle \beta'', \vec{N}^f \rangle = \frac{1}{l^2 A} \left[ \lambda_1 (\kappa_1 + \lambda_3 K) (-\lambda_2 \kappa_g' - \lambda_3 \kappa_n' - \lambda_1 \kappa_g^2 - \lambda_1 \kappa_n^2) + \lambda_2 (\kappa_2 + \lambda_3 K) (\lambda_1 \kappa_g' + \kappa_g (1 - \kappa_g \lambda_2 - \kappa_n \lambda_3)) + (1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K) (\lambda_1 \kappa_n' + \kappa_n (1 - \kappa_g \lambda_2 - \kappa_n \lambda_3)) \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\kappa_g^f &= \frac{1}{l^2} \langle \beta'', \vec{X}^f \rangle = \frac{1}{l^3 A} \left[ (-\lambda_2 \kappa_g' - \lambda_3 \kappa_n' - \lambda_1 \kappa_g^2 - \lambda_1 \kappa_n^2) (\lambda_1 \lambda_2 \kappa_n (\kappa_2 + \lambda_3 K) - \kappa_g \lambda_1 (1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K)) + (\lambda_1 \kappa_g' + \kappa_g (1 - \kappa_g \lambda_2 - \kappa_n \lambda_3)) ((1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K)(1 - \kappa_g \lambda_2 - \kappa_n \lambda_3) - \kappa_n \lambda_1^2 (\kappa_1 + \lambda_3 K)) + (\lambda_1 \kappa_n' + \kappa_n (1 - \kappa_g \lambda_2 - \kappa_n \lambda_3)) (\kappa_g \lambda_1^2 (\kappa_1 + \lambda_3 K) - \lambda_2 (\kappa_2 + \lambda_3 K)(1 - \kappa_g \lambda_2 - \kappa_n \lambda_3)) \right]\end{aligned}$$

$$t_r^f = -\frac{1}{l} \langle (\vec{N}^f)', \vec{X}^f \rangle = -\frac{1}{l^2 A^3} \left[ \left( \lambda_1 (\kappa_1' + \lambda_3 K') A - B \lambda_1 (\kappa_1 + \lambda_3 K) - \kappa_g \lambda_2 A (\kappa_2 + \lambda_3 K) - \kappa_n A (1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K) \right) \left( \kappa_n \lambda_1 \lambda_2 (\kappa_2 + \lambda_3 K) - \kappa_g \lambda_1 (1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K) \right) + \left( \lambda_2 (\kappa_2' + \lambda_3 K') A - B \lambda_2 (\kappa_2 + \lambda_3 K) + \kappa_g \lambda_1 A (\kappa_1 + \lambda_3 K) \right) \left( (1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K) (1 - \kappa_g \lambda_2 - \kappa_n \lambda_3) - \kappa_n \lambda_1^2 (\kappa_1 + \lambda_3 K) \right) + \left( (\lambda_3 H' + \lambda_3^2 K') A - B (1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K) + \kappa_n \lambda_1 A (\kappa_1 + \lambda_3 K) \right) \left( \kappa_g \lambda_1^2 (\kappa_1 + \lambda_3 K) - \lambda_2 (\kappa_2 + \lambda_3 K) (1 - \kappa_g \lambda_2 - \kappa_n \lambda_3) \right) \right]$$

şeklindedir.

**Teorem 5.3:**  $M$ ,  $E^3$  de bir yüzey ve  $M^f$  de bu yüzeyin  $Sp\{\vec{X}, \vec{N}\}$  düzleminde yatan vektörleri boyunca oluşan sabit sırt uzaklıklı yüzeyi, yani  $\lambda_1 = 0$ , olsun.  $M$  yüzeyi üzerinde yatan  $\alpha(s)$  parametre eğrisinin sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntüsü  $\beta(s)$  eğrisi olduğuna göre,  $(\beta, M^f)$  eğri-yüzey ikilisinin  $\kappa_n^f, \kappa_g^f, t_r^f$  eğrilikleri,

$$\kappa_n^f = \frac{1}{lA} [\kappa_g \lambda_2 (\kappa_2 + \lambda_3 K) + \kappa_n (1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K)]$$

$$\kappa_g^f = \frac{1}{lA} [-\kappa_n \lambda_2 (\kappa_2 + \lambda_3 K) + \kappa_g (1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K)]$$

$$t_r^f = -\frac{\lambda_2}{lA^3} \left[ (A(\kappa_2' + \lambda_3 K') - B(\kappa_2 + \lambda_3 K))(1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K) - (A(\lambda_3 H' + \lambda_3^2 K') - B(1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K))(\kappa_2 + \lambda_3 K) \right]$$

olarak hesaplanır.

**Sonuç 5.1:**  $M$  yüzeyi üzerinde yatan  $\alpha(s)$  parametre eğrisi geodezik eğri olsun.  $\lambda_1 = 0$  şartı dahilinde,  $\alpha(s)$  eğrisinin sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntüsü olan  $\beta(s)$  eğrisinin asimptotik eğri olması için gerek ve yeter şart  $\alpha(s)$  eğrisinin asimptotik olmasıdır.

**Sonuç 5.2:**  $M$  yüzeyi üzerinde yatan  $\alpha(s)$  parametre eğrisi asimptotik eğri olsun.  $\lambda_1 = 0$  şartı dahilinde,  $\alpha(s)$  eğrisinin sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntüsü olan  $\beta(s)$  eğrisinin geodezik eğri olması için gerek ve yeter şart  $\alpha(s)$  eğrisinin geodezik olmasıdır.

**Teorem 5.4:**  $M, E^3$  de bir yüzey ve  $M^f$  de bu yüzeyin  $Sp\{\vec{T}, \vec{N}\}$  düzleminde yatan vektörleri boyunca oluşan sabit sırt uzaklıklı yüzeyi, yani  $\lambda_2 = 0$ , olsun.  $M$  yüzeyi üzerinde yatan  $\alpha(s)$  parametre eğrisinin sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntüsü  $\beta(s)$  eğrisi olduğuna göre,  $(\beta, M^f)$  eğri-yüzey ikilisinin  $\kappa_n^f, \kappa_g^f, t_r^f$  eğrilikleri,

$$\kappa_n^f = \frac{1}{l^2 A} \left[ \lambda_1 (\kappa_1 + \lambda_3 K) (-\lambda_3 \kappa_n' - \lambda_1 \kappa_g^2 - \lambda_1 \kappa_n^2) + (1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K) (\lambda_1 \kappa_n' + \kappa_n (1 - \kappa_n \lambda_3)) \right]$$

$$\kappa_g^f = \frac{1}{l^3 A} \left[ \kappa_g \lambda_1 (1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K) (\lambda_3 \kappa_n' + \lambda_1 \kappa_g^2 + \lambda_1 \kappa_n^2) + (\lambda_1 \kappa_g' + \kappa_g (1 - \kappa_n \lambda_3)) \left( (1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K) (1 - \kappa_n \lambda_3) - \kappa_n \lambda_1^2 (\kappa_1 + \lambda_3 K) \right) + \kappa_g \lambda_1^2 (\kappa_1 + \lambda_3 K) (\lambda_1 \kappa_n' + \kappa_n (1 - \kappa_n \lambda_3)) \right]$$

$$t_r^f = -\frac{\kappa_g \lambda_1}{l^2 A^3} \left[ (1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K) (-A \lambda_1 (\kappa_1' + \lambda_3 K') + B \lambda_1 (\kappa_1 + \lambda_3 K)) \right. \\ \left. - A \kappa_n (1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K) \right. \\ \left. + A (\kappa_1 + \lambda_3 K) \left( (1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K) (1 - \kappa_n \lambda_3) - \kappa_n \lambda_1^2 (\kappa_1 + \lambda_3 K) \right) \right. \\ \left. + \lambda_1 (\kappa_1 + \lambda_3 K) (A (\lambda_3 H' + \lambda_3^2 K') - B (1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K)) \right. \\ \left. + A \kappa_n \lambda_1 (\kappa_1 + \lambda_3 K) \right]$$

şeklinde bulunur.

**Sonuç 5.3:**  $M$  yüzeyi üzerinde yatan  $\alpha(s)$  eğrisinin geodezik eğri olması için gerek ve yeter şart,  $\alpha(s)$  eğrisinin  $\lambda_2 = 0$  şartı dahilinde bulunan sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntüsü olan  $\beta(s)$  eğrisinin asli eğrilik çizgisi olmasıdır.

**Sonuç 5.4:**  $M$  yüzeyi üzerinde yatan  $\alpha(s)$  parametre eğrisi geodezik eğri olsun.  $\lambda_2 = 0$  şartı dahilinde,  $\alpha(s)$  eğrisinin sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntüsü olan  $\beta(s)$  eğrisinin asimptotik eğri olması için gerek ve yeter şart  $\alpha(s)$  eğrisinin asimptotik olmasıdır.

**Sonuç 5.5:**  $M$  yüzeyi üzerinde yatan  $\alpha(s)$  parametre eğrisi asimptotik eğri olsun.  $\lambda_2 = 0$  şartı dahilinde,  $\alpha(s)$  eğrisinin sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntüsü olan  $\beta(s)$  eğrisinin geodezik eğri olması için gerek ve yeter şart  $\alpha(s)$  eğrisinin geodezik olmasıdır.

**Teorem 5.5:**  $M, E^3$  de bir yüzey ve  $M^f$  de bu yüzeyin  $Sp\{\vec{T}, \vec{X}\}$  düzleminde yatan vektörleri boyunca oluşan sabit sırt uzaklıklı yüzeyi, yani  $\lambda_3 = 0$ , olsun.  $M$  yüzeyi üzerinde yatan  $\alpha(s)$  parametre eğrisinin sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntüsü  $\beta(s)$  eğrisi olduğuna göre,  $(\beta, M^f)$  eğri-yüzey ikilisinin  $\kappa_n^f, \kappa_g^f, t_r^f$  eğrilikleri,

$$\kappa_n^f = \frac{1}{l^2 A} \left[ \lambda_1 \kappa_1 (-\lambda_2 \kappa_g' - \lambda_1 \kappa_g^2 - \lambda_1 \kappa_n^2) + \lambda_2 \kappa_2 (\lambda_1 \kappa_g' + \kappa_g (1 - \kappa_g \lambda_2)) + \lambda_1 \kappa_n' + \kappa_n (1 - \kappa_g \lambda_2) \right]$$

$$\kappa_g^f = \frac{1}{l^3 A} \left[ (-\lambda_2 \kappa_g' - \lambda_1 \kappa_g^2 - \lambda_1 \kappa_n^2) (\lambda_1 \lambda_2 \kappa_2 \kappa_n - \kappa_g \lambda_1) + (\lambda_1 \kappa_g' + \kappa_g (1 - \kappa_g \lambda_2)) \left( (1 - \kappa_g \lambda_2) - \kappa_n \kappa_1 \lambda_1^2 \right) + (\lambda_1 \kappa_n' + \kappa_n (1 - \kappa_g \lambda_2)) (\kappa_g \kappa_1 \lambda_1^2 - \lambda_2 \kappa_2 (1 - \kappa_g \lambda_2)) \right]$$

$$t_r^f = -\frac{1}{l^2 A^3} \left[ (\lambda_1 \kappa_1' A - B \lambda_1 \kappa_1 - A (\kappa_g \lambda_2 \kappa_2 + \kappa_n)) (\kappa_n \lambda_1 \lambda_2 \kappa_2 - \kappa_g \lambda_1) + (\lambda_2 \kappa_2' A - B \lambda_2 \kappa_2 + A \kappa_g \lambda_1 \kappa_1) (1 - \kappa_g \lambda_2 - \kappa_n \lambda_1^2 \kappa_1) + (A \kappa_n \lambda_1 \kappa_1 - B) (\kappa_g \lambda_1^2 \kappa_1 - \lambda_2 \kappa_2 (1 - \kappa_g \lambda_2)) \right]$$

olarak bulunur.

**Sonuç 5.6:**  $M$  yüzeyi üzerinde yatan  $\alpha(s)$  parametre eğrisi geodezik eğri olsun.  $\lambda_3 = 0$  şartı dahilinde,  $\alpha(s)$  eğrisinin sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntüsü olan  $\beta(s)$  eğrisinin asimptotik eğri olması için gerek ve yeter şart  $\alpha(s)$  eğrisinin asimptotik olmasıdır.

**Sonuç 5.7:**  $M$  yüzeyi üzerinde yatan  $\alpha(s)$  parametre eğrisi asimptotik eğri olsun.  $\lambda_3 = 0$  şartı dahilinde,  $\alpha(s)$  eğrisinin sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntüsü olan  $\beta(s)$  eğrisinin geodezik eğri olması için gerek ve yeter şart  $\alpha(s)$  eğrisinin geodezik olmasıdır.

**Teorem 5.6:**  $M, E^3$  de bir yüzey ve  $M^f$  de bu yüzeyin  $\vec{N}$  vektör alanı boyunca oluşan sabit sırt uzaklıklı yüzeyi olsun. Yani  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  olarak alalım.  $M$  yüzeyi üzerinde yatan  $\alpha(s)$  parametre eğrisinin sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntüsü  $\beta(s)$  eğrisi olduğuna göre,  $(\beta, M^f)$  eğri-yüzey ikilisinin  $\kappa_n^f, \kappa_g^f, t_r^f$  eğriliklerinin,

$$\kappa_n^f = \frac{\kappa_n}{1 - \kappa_n \lambda_3}$$

$$\kappa_g^f = \frac{\kappa_g}{1 - \kappa_n \lambda_3}$$

$$t_r^f = 0$$

olduğu görülür.

**Sonuç 5.8:**  $M, E^3$  de bir yüzey ve  $M^f$  de bu yüzeyin  $\vec{N}$  vektör alanı boyunca oluşan sabit sırt uzaklıklı yüzeyi, yani paralel yüzeyi olsun.  $M$  de yatan  $\alpha(s)$  eğrisinin, sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntüsü olan  $\beta(s)$  eğrisinin asimptotik eğri olması için gerek ve yeter şart  $\alpha(s)$  eğrisinin asimptotik olmasıdır.

**Sonuç 5.9:**  $M, E^3$  de bir yüzey ve  $M^f$  de bu yüzeyin  $\vec{N}$  vektör alanı boyunca oluşan sabit sırt uzaklıklı yüzeyi, yani paralel yüzeyi olsun.  $M$  de yatan  $\alpha(s)$  eğrisinin, sabit



sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntüsü olan  $\beta(s)$  eğrisinin geodezik eğri olması için gerek ve yeter şart  $\alpha(s)$  eğrisinin geodezik olmasıdır.

**Sonuç 5.10:**  $M, E^3$  de bir yüzey ve  $M^f$  de bu yüzeyin  $\vec{N}$  vektör alanı boyunca oluşan sabit sırt uzaklıklı yüzeyi, yani paralel yüzeyi olsun.  $M$  de yatan  $\alpha(s)$  eğrisinin, sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntüsü olan  $\beta(s)$  eğrisinin bir eğrilik çizgisi olması için gerek ve yeter şart  $\alpha(s)$  eğrisinin eğrilik çizgisi olmasıdır.

**Teorem 5.7:**  $M, E^3$  de bir yüzey ve  $M^f$  de bu yüzeyin  $\vec{X}$  vektör alanı boyunca oluşan sabit sırt uzaklıklı yüzeyi olsun. Yani  $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$  olarak alalım.  $M$  yüzeyi üzerinde yatan  $\alpha(s)$  parametre eğrisinin sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntüsü  $\beta(s)$  eğrisi olduğuna göre,  $(\beta, M^f)$  eğri-yüzey ikilisinin  $\kappa_n^f, \kappa_g^f, t_r^f$  eğrilikleri,

$$\kappa_n^f = \frac{1}{lA} (\kappa_g \kappa_2 \lambda_2 + \kappa_n)$$

$$\kappa_g^f = \frac{1}{lA} (-\kappa_n \kappa_2 \lambda_2 + \kappa_g)$$

$$t_r^f = -\frac{\lambda_2 \kappa_2'}{lA^2}$$

şeklinde hesaplanır.

**Sonuç 5.11:**  $M$  yüzeyi üzerinde yatan  $\alpha(s)$  parametre eğrisi geodezik eğri olsun.  $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$  şartı dahilinde,  $\alpha(s)$  eğrisinin sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntüsü olan  $\beta(s)$  eğrisinin asimptotik eğri olması için gerek ve yeter şart  $\alpha(s)$  eğrisinin asimptotik olmasıdır.

**Sonuç 5.12:**  $M$  yüzeyi üzerinde yatan  $\alpha(s)$  parametre eğrisi asimptotik eğri olsun.  $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$  şartı dahilinde,  $\alpha(s)$  eğrisinin sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki

görüntüsü olan  $\beta(s)$  eğrisinin geodezik eğri olması için gerek ve yeter şart  $\alpha(s)$  eğrisinin geodezik olmasıdır.

**Teorem 5.8:**  $M, E^3$  de bir yüzey ve  $M^f$  de bu yüzeyin  $\vec{T}$  vektör alanı boyunca oluşan sabit sırt uzaklıklı yüzeyi olsun. Yani  $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$  olarak alalım.  $M$  yüzeyi üzerinde yatan  $\alpha(s)$  parametre eğrisinin sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntüsü  $\beta(s)$  eğrisi olduğuna göre,  $(\beta, M^f)$  eğri-yüzey ikilisinin  $\kappa_n^f, \kappa_g^f, t_r^f$  eğrilikleri,

$$\begin{aligned}\kappa_n^f &= \frac{1}{l^2 A} (\kappa_n + \lambda_1 \kappa_n' - \lambda_1^2 \kappa_1 (\kappa_n^2 + \kappa_g^2)) \\ \kappa_g^f &= \frac{1}{l^3 A} [\kappa_g \lambda_1^2 (\kappa_g^2 + \kappa_n^2) + (\lambda_1 \kappa_g' + \kappa_g)(1 - \kappa_n \kappa_1 \lambda_1^2) + \kappa_g \kappa_1 \lambda_1^2 (\lambda_1 \kappa_n' + \kappa_n)] \\ t_r^f &= -\frac{1}{l^2 A^3} [\kappa_g \lambda_1 (-A \kappa_n - A \lambda_1 \kappa_1' + B \lambda_1 \kappa_1) + \kappa_g \kappa_1 \lambda_1 A (1 - \kappa_n \kappa_1 \lambda_1^2) \\ &\quad + \kappa_g \kappa_1 \lambda_1^2 (A \kappa_n \kappa_1 \lambda_1 - B)]\end{aligned}$$

olarak bulunur.

**Sonuç 5.13:**  $M$  yüzeyi üzerinde yatan  $\alpha(s)$  parametre eğrisi geodezik eğri olsun.  $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$  şartı dahilinde,  $\alpha(s)$  eğrisinin sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntüsü olan  $\beta(s)$  eğrisinin asimptotik eğri olması için gerek ve yeter şart  $\alpha(s)$  eğrisinin asimptotik olmasıdır.

**Sonuç 5.14:**  $M$  yüzeyi üzerinde yatan  $\alpha(s)$  parametre eğrisi asimptotik eğri olsun.  $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$  şartı dahilinde,  $\alpha(s)$  eğrisinin sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntüsü olan  $\beta(s)$  eğrisinin geodezik eğri olması için gerek ve yeter şart  $\alpha(s)$  eğrisinin geodezik olmasıdır.

**Sonuç 5.15:** Eğer  $M$  yüzeyi üzerinde yatan  $\alpha(s)$  eğrisi geodezik ise,  $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$  şartı dahilinde,  $\alpha(s)$  eğrisinin sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntüsü olan  $\beta(s)$  eğrisi eğrilik çizgisi olur.

Böylece  $M$  yüzeyi üzerinde yatan  $\alpha(s)$  parametre eğrisi ile bu eğrinin  $M^f$  sabit sırt uzaklıklı yüzeyi üzerindeki görüntüsü olan  $\beta$  eğrisi göz önüne alındığında,  $(\alpha, M)$  ve  $(\beta, M^f)$  eğri-yüzey ikililerinin Darboux eğrilikleri arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Bunun haricinde,  $\alpha$  ve  $\beta$  eğrilerinin  $P = \alpha(s)$  ve  $f(P) = \beta(s)$  noktalarındaki birinci eğrilikleri hesaplanmış ve bu hususla alakalı olarak aşağıdaki teorem ve sonuçlar verilmiştir:

**Teorem 5.9:**  $M, E^3$  de bir yüzey ve  $M^f$  de bu yüzeyin  $Sp\{\vec{X}, \vec{N}\}$  düzleminde yatan vektörleri boyunca oluşan sabit sırt uzaklıklı yüzeyi, yani  $\lambda_1 = 0$ , olsun.  $M$  yüzeyi üzerinde yatan  $\alpha(s)$  parametre eğrisinin sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntüsü  $\beta(s)$  eğrisi olduğuna göre,  $\alpha(s)$  ve  $\beta(s)$  eğrilerinin birinci eğrilikleri arasındaki ilişki,

$$k_1^f = \frac{k_1}{1 - \kappa_g \lambda_2 - \kappa_n \lambda_3}$$

şeklindedir.

**Sonuç 5.16:**  $\lambda_1 = 0$  şartı dahilinde,  $M^f$  yüzeyi üzerinde yatan  $\beta(s)$  eğrisinin doğru olması için gerek ve yeter şart  $\alpha(s)$  eğrisinin doğru olmasıdır.

**Teorem 5.10:**  $M, E^3$  de bir yüzey ve  $M^f$  de bu yüzeyin  $\vec{N}$  vektör alanı boyunca oluşan sabit sırt uzaklıklı yüzeyi olsun. Yani  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  olarak alalım.  $M$  yüzeyi üzerinde yatan  $\alpha(s)$  parametre eğrisinin sabit sırt uzaklıklı yüzey üzerindeki görüntüsü  $\beta(s)$  eğrisi olduğuna göre,  $\alpha(s)$  ve  $\beta(s)$  eğrilerinin birinci eğrilikleri arasındaki ilişki,

$$k_1^f = \frac{k_1}{1 - \kappa_n \lambda_3} \quad (4.4)$$

şeklindedir.

**Sonuç 5.17:** Eğer  $M$  yüzeyi üzerindeki  $\alpha$  eğrisi asimptotik ise bu eğrinin,  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  şartı dahilinde oluşan,  $M^f$  yüzeyi üzerindeki görüntüsü olan  $\beta$  eğrisi göz önüne alındığında,  $\alpha$  ve  $\beta$  eğrilerinin birinci eğrilikleri birbirine eşittir.

Üçüncü olarak, bir yüzeyin fokal yüzeyleri ile sabit sırt uzaklıklı yüzeyleri arasındaki ilişki incelenmiş ve herhangi bir  $M$  yüzeyinin  $F_1$  ve  $F_2$  fokal yüzeylerinin, bu yüzeyin sırasıyla  $Sp\{\phi_u, \vec{N}_P\}$  ve  $Sp\{\phi_v, \vec{N}_P\}$  düzlemlerinde yatan  $E_P$  vektörleri boyunca oluşan sabit sırt uzaklıklı yüzeyleri ile ifade edilebileceği gösterilmiştir. Bu sonuca ulaşabilmek için verilen teorem ve sonuçlar şöyledir:

**Teorem 5.11:**  $E^3$  de  $\phi = \phi(u, v)$  parametrik ifadesiyle verilen bir  $M$  yüzeyinin  $Sp\{\phi_u, \vec{N}\}$  düzleminde yatan  $E$  doğrultuları boyunca oluşan bütün sabit sırt uzaklıklı yüzeylerinin, bir  $P \in M$  noktasına karşılık gelen  $f(P)$  noktalarındaki normalleri, tepesi  $P$  deki birinci asli eğrilik merkezi  $(C_1 = P - \frac{1}{\kappa_1(P)} \vec{N}_P)$  olan uzaysal bir doğru demeti oluşturur (Yurttançıkılmaz 2015).

**Sonuç 5.18:** Bu teoremde bahsi geçen  $C_1 = P - \frac{1}{\kappa_1(P)} \vec{N}_P$  noktası, bir yüzeyin fokal yüzeyinin tanımı göz önüne alındığında,  $F_1$  fokal yüzeyi üzerindedir (Yurttançıkılmaz 2015).

Fokal yüzeylerin tanımından

$$F_1(P) = P - \frac{1}{\kappa_1} \vec{N}_P$$

olur. Ayrıca Şekil 4.11'den

$$F_1(P) = f_i(P) - \mu_i \vec{N}_{f_i(P)}^{f_i}$$

veya

$$F_1(P) = f_j(P) - \mu_j \vec{N}_{f_j(P)}^{f_j}$$

eşitliklerinin geçerli olduğu görülür. Bu eşitlikler bize,  $M$  yüzeyinin  $F_1$  fokal yüzeyinin, bu yüzeyin  $Sp\{\phi_u, \vec{N}_P\}$  düzlemindeki  $E_P$  vektörleri boyunca oluşan sabit sırt uzaklıklı yüzeyleri ile ifade edilebileceğini gösterir. Eğer bu eşitliklerde

$$\mu_i = \frac{1}{\kappa_1^{f_i}}, \quad \mu_j = \frac{1}{\kappa_1^{f_j}}$$

olarak alınırsa, bu durumda  $M, M^{f_i}$  ve  $M^{f_j}$  yüzeylerinin  $F_1$  fokal yüzeyleri çıkarılır.

**Teorem 5.12:**  $M$  yüzeyi ve bu yüzeyin  $Sp\{\phi_u, \vec{N}_P\}$  düzlemindeki  $E_P$  vektörleri boyunca oluşan sabit sırt uzaklıklı yüzeylerinin  $F_1$  fokal yüzeylerinin çakışması için gerek ve yeter şart  $M$  yüzeyinin  $\kappa_1$  birinci asli eğriliğinin sabit olmasıdır (YurttañıkmaZ 2015).

**Teorem 5.13:**  $E^3$  de  $\phi = \phi(u, v)$  parametrik ifadesiyle verilen bir  $M$  yüzeyinin  $Sp\{\phi_v, \vec{N}\}$  düzleminde yatan  $E$  doğrultuları boyunca oluşan bütün sabit sırt uzaklıklı yüzeylerinin, bir  $P \in M$  noktasına karşılık gelen  $f(P)$  noktalarındaki normalleri, tepesi  $P$  deki birinci asli eğrilik merkezi  $(C_2 = P - \frac{1}{\kappa_2(P)} \vec{N}_P)$  olan uzaysal bir doğru demeti oluşturur (YurttañıkmaZ 2015).

**Sonuç 5.19:** Bu teoremde bahsi geçen  $C_2 = P - \frac{1}{\kappa_2(P)} \vec{N}_P$  noktası, bir yüzeyin fokal yüzeyinin tanımı göz önüne alındığında,  $F_2$  fokal yüzeyi üzerindedir (YurttañıkmaZ 2015).

Fokal yüzeylerin tanımından

$$F_2(P) = P - \frac{1}{\kappa_2} \vec{N}_P$$

olur. Ayrıca

$$F_2(P) = f_i(P) - \mu_i \vec{N}_{f_i(P)}^{f_i}$$

veya

$$F_2(P) = f_j(P) - \mu_j \vec{N}_{f_j(P)}^{f_j}$$

eşitliklerinin geçerli olacağı Şekil 4.11'de benzer olarak görülebilir. Bu eşitlikler bize,  $M$  yüzeyinin  $F_2$  fokal yüzeyinin, bu yüzeyin  $Sp\{\phi_v, \vec{N}_P\}$  düzlemindeki  $E_P$  vektörleri boyunca oluşan sabit sırt uzaklıklı yüzeyleri ile ifade edilebileceğini gösterir. Eğer bu eşitliklerde

$$\mu_i = \frac{1}{\kappa_2^{f_i}}, \quad \mu_j = \frac{1}{\kappa_2^{f_j}}$$

olarak alınırsa, bu durumda  $M, M^{f_i}$  ve  $M^{f_j}$  yüzeylerinin  $F_2$  fokal yüzeyleri çakışır.

**Teorem 5.14:**  $M$  yüzeyi ve bu yüzeyin  $Sp\{\phi_v, N_P\}$  düzlemindeki  $E_P$  vektörleri boyunca oluşan sabit sırt uzaklıklı yüzeylerinin  $F_2$  fokal yüzeylerinin çakışması için gerek ve yeter şart  $M$  yüzeyinin  $\kappa_2$  ikinci asli eğriliğinin sabit olmasıdır (Yurttançıkılmaz 2015).

Bu sonuçlar verildikten sonra  $M$  ve  $M^f$  yüzeylerinin Meusnier kürelerinin merkez noktaları incelenmiştir. Bir  $M$  yüzeyi ve bu yüzeyin  $Sp\{\phi_u, N_P\}$  ve  $Sp\{\phi_v, N_P\}$  düzlemlerinde yatan  $E_P$  vektörleri boyunca oluşan  $M^f$  sabit sırt uzaklıklı yüzeylerinin, sırasıyla  $P$  ve  $f(P)$  noktalarındaki Meusnier kürelerinin merkezleri araştırılmış ve bu noktaların hangi şartlar altında çakışacağı aşağıdaki teoremlerle ifade edilmiştir:

**Teorem 5.15:**  $\kappa_1 > \kappa_2$  şartını sağlayan sabit asli eğriliklere sahip  $M$  yüzeyi ve onun  $\lambda_1 = 0$  şartı dahilinde elde edilen  $M^f$  sabit sırt uzaklıklı yüzeylerinin, sırasıyla  $P$  ve  $f(P)$  noktalarındaki Meusnier kürelerinin merkezlerinin çakışması için gerek ve yeter şart

$$(1 - \kappa_g \lambda_2 - \kappa_n \lambda_3)^2 = (1 + \kappa_2 \lambda_3)^2 + \kappa_2^2 \lambda_2^2$$

olmasıdır.

**Teorem 5.16:**  $\kappa_1 < \kappa_2$  şartını sağlayan sabit asli eğriliklere sahip  $M$  yüzeyi ve onun  $\lambda_2 = 0$  şartı dahilinde elde edilen  $M^f$  sabit sırt uzaklıklı yüzeylerinin, sırasıyla  $P$  ve

$f(P)$  noktalarındaki Meusnier kürelerinin merkezlerinin çakışması için gerek ve yeter şart

$$[\kappa_1^2(I)^2 + \lambda_1^2(\kappa_n')^2 + 2\lambda_1\kappa_n\kappa_n'(I)](\lambda_1^2\kappa_1^2 + (1 + \lambda_3\kappa_1)^2) = \lambda_1^2(I)^3$$

olmasıdır. Burada  $I = (1 - \kappa_n\lambda_3)^2 + \lambda_1^2\kappa_1^2$  dir.

**Teorem 5.17:**  $\kappa_1 = \kappa_2$  şartını sağlayan sabit asli eğriliklere sahip  $M$  yüzeyi ve onun  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  şartı dahilinde elde edilen  $M^f$  sabit sırt uzaklıklı yüzeylerinin, sırasıyla  $P$  ve  $f(P)$  noktalarındaki Meusnier kürelerinin merkezleri çakışır.

Bu tez çalışmasında dördüncü ve son olarak, regle yüzeylerin sabit sırt uzaklıklı yüzeyleri incelenmiştir.

Dayanak eğrisi  $\alpha(u)$  olan ve anadoğru (üreteç) boyunca doğrultu vektörü de  $\vec{X}(u)$  olan regle yüzeyin denkleminin,

$$\phi(u, v) = \alpha(u) + v\vec{X}(u)$$

şeklinde olduğu göz önüne alınarak bu yüzeyin sabit sırt uzaklıklı yüzeyinin denklemi,

$$\begin{aligned} \psi(u, v) = \alpha(u) + \left( \lambda_1 - av\lambda_1 - \frac{cv\lambda_3}{\sqrt{(1-av)^2 + c^2v^2}} \right) \vec{T} + (v + \lambda_2)\vec{X} \\ + \left( cv\lambda_1 + \frac{\lambda_3(1-av)}{\sqrt{(1-av)^2 + c^2v^2}} \right) \vec{N} \end{aligned}$$

olarak bulunmuştur. Bu denklemle birlikte aşağıdaki teoremler elde edilmiştir:

**Teorem 5.18:** Bir regle yüzeyin,  $X(u)$  doğrultmanı boyunca oluşan sabit sırt uzaklıklı yüzeyi de bir regle yüzeydir.

**Teorem 5.19:** Eğer bir regle yüzeyin dayanak eğrisi birinci parametre eğrisi olarak seçilirse, bu yüzeyin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi yine bir regle yüzey olur.

**KAYNAKLAR**

- Aktan, N., Görgülü, A., Özusağlam, E. and Ekici, C., 2006. Conjugate Tangent Vectors and Asymptotic Directions for Surfaces at a Constant Distance From Edge of Regression on a Surface. *IJPAM*, 33(1), 127-133.
- Bishop, R. L. and Goldberg, S. I., 1968. *Tensör Analysis on Manifolds*. The Macmillan Company, 280 p, Newyork.
- Gray, A., 1998. *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*. Second ed. CrcPress, 1053 p., USA.
- Hacısalihoğlu, H. H. 1968. On The Motion of The Frenet Thrihedron of a Space Curve. *Comm. Fac. Sci. Univ. Ankara*. pp: 33-55.
- Hacısalihoğlu, H. H., 1983. *Diferensiyel Geometri*. İnönü Üniv. Fen Ed. Fak. Yayınları, 340 s, Ankara.
- Hagen, H., Pottman, H. and Divivier, A., 1991. Visualizing Functions on a Surface, *Journal of Visualization and Animation*, Vol. 2, 52-58.
- Hagen, H. and Hahmann, S. 1992. Generalized Focal Surfaces: A New Method for Surface Interrogation. *Proceedings of the IEEE Conference on Visualization*, 70-76.
- Hagen, H. and Hahmann, S. 1995. Visualization of Curvature Behaviour of Free-form Curves and Surfaces. *Computer-Aided Design*, 27(7), 545-552.
- Hagen, H., Hahmann, S., Schreiber, T., Nakajima, Y., Wördenweber, B. and Hollemann-Grundstedt, P., 1992. Surface Interrogation Algorithms, *IEEE Computer Graphics and Applications*, 12(5), 53-60.
- Hicks, N. J., 1971. *Nots on Differential Geometry*. Van Nostrand Reinhold Company, 183 p, London.
- Hoschek, J., 1971. *Linien-Geometrie*, BI, Wissensehaffs, Zürich, Switzerland.
- Kühnel, W., 2005. *Differential Geometry Curves-Surfaces-Manifolds*. American Mathematical Society, 380 p, USA.
- O'Neil, B. 1983. *Semi Riemannian Geometry*. Academic Press, 457 p, New York, London.
- Özdemir, B., 2008.  $E^n$  de Fokal Eğriler ve Fokal Yüzeylerin Bir Karakterizasyonu. Doktora tezi, Uludağ Üni. Fen Bil. Enst., Bursa.



- Patrikalakis, N. M. and Maekawa, T., 2001. Shape Interrogation for Computer Aided Design and Manufacturing. Springer-Verlag, 423 p, USA.
- Sabuncuoğlu, A., 2006. Diferensiyel Geometri. Nobel Basımevi, 440 s, Ankara.
- Sağlam, D. and Kalkan, Ö., 2010. Surfaces at a Constant Distance From the Edge of Regression on a Surface in  $E_1^3$ . Differential Geometry-Dynamical Systems, Vol.12, pp. 187-200.
- Salimov, A. ve Mağden, A., 2008. Diferensiyel Geometri. Aktif Yayinevi, 326 s, Erzurum.
- Strubecker, K., 1959. Differentialgeometrie III, De Gruyter, Berlin, Germany.
- Tarakcı, Ö., 2002. Sabit Sirt Uzaklıklı Hiperyüzeyler. Doktora tezi, Ankara Üniv. Fen Bilimleri Ens., Ankara.
- Tarakcı, Ö. and Hacısalihoğlu, H. H., 2004. Surfaces at a Constant Distance from the Edge of Regression on a Surface. Applied Mathematics and Computation, 155, 81-93.
- Vogler, H., 1963. Die auf einer Torse Verlaufenden Linien konstanten Gratabstandes als duale Seitenstücke zu den pseudorektifizieren den Torsen einer Raumkurve, Vorgelegt in der Sitzung, Wien.
- Yurttançıkımaz, S., Tarakcı, Ö., 2015. The Relationship between Focal Surfaces and Surfaces at a Constant Distance from the Edge of Regression on a Surface. Advances in Mathematical Physics, Vol. 2015, Article ID 397126, 6 pages.
- Yu, J., Yin, X., Gu, X., McMillan, L. and Gortler, S., 2007. Focal Surfaces of Discrete Geometry, Eurographics Symposium on Geometry Processing.

## ÖZGEÇMİŞ

Semra YURTTANÇIKMAZ 1985 yılında Erzurum’da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini yine bu ilde tamamladı. 2002 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü’nü kazanıp 2006 yılında mezun oldu. Aynı yıl Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Geometri Bilim Dalı’nda yüksek lisans eğitimi almaya hak kazandı ve bir yıl İngilizce eğitimi aldıktan sonra 2007-2009 yılları arasında yüksek lisans eğitimini tamamladı ve 2009 yılında Geometri Bilim Dalı’nda doktora eğitimine başladı. Aralık 2007 tarihi itibariyle Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda araştırma görevlisi olarak atanıp halen bu görevini sürdürmekte olan Semra Yurttançıkılmaz, evli ve bir çocuk annesidir.