RIEMANNIAN VE SEMI-RIEMANNIAN MANİFOLDLARINDA LIFT PROBLEMLERİ

Serkan DOĞAN

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalı
Prof. Dr. Arif SALİMOV
2016

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

RİEMANN VE SEMİ-RİEMANN MANİFOLDLARINDA LİFT PROBLEMLERİ

Serkan DOĞAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI
Geometri Bilim Dalı

ERZURUM
2016

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAY FORMU

RİEMANN VE SEMİ-RİEMANN MANİFOLDLARINDA LİFT PROBLEMLERİ

Prof. Dr. Arif SALİMOV danışmanlığında, Serkan DOĞAN tarafından hazırlanan bu çalışma 11/10/2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı – Geometri Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak **oybirliği/~~oy çokluğu~~ (3./3.)** ile kabul edilmiştir.

Başkan	: Prof. Dr. Arif SALİMOV	*İmza*	:
Üye	: Prof. Dr. Nejmi CENGİZ	*İmza*	:
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Sibel TURANLI	*İmza*	:

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu 20.../10.../2016. tarih ve .40. . / . 26. . . . . nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Cavit KAZAZ
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

RİEMANN VE SEMİ-RİEMANN MANİFOLDLARINDA LİFT PROBLEMLERİ

Serkan DOĞAN

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Arif SALİMOV

Sunulan tezde Riemann ve Semi-Riemann Manifoldlarında Lift problemleri incelendi. Manifold, Diferensiyellenebilir Manifold tanımları verilip konu ile ilğili kavramlar tanımlanmıştır. Lie Türevi, Kovaryant Türev, Tanjant ve Kotanjant Demet kavramları verilip (1,1) ve (0,2) tipli Tensörlerin Dikey, Yatay, Tam Liftleri incelenmiştir. Levi-Civita Konneksiyonunun katsayıları ve Tam Lifti hakkında bilgi verilmiştir. Eğer $\nabla g = 0$ ise, ${}^{H}g$ ve ${}^{C}g$ metriklerinin Levi-Civita Konneksiyonunun aynı olduğu gösterildi. Ayrıca Tam Liftin Geodezikliği, Diagonal Lift, Ricci Tensörünün Tam Lifti, Tanjant ve Kotanjant Demetde Sasaki Metriği kavramları incelenmiştir. Ayrıca Kotanjant demetde Riemann genişlemesi formüllerine değinilmiştir.

2016, 94 sayfa

Anahtar Kelimeler: Dikey Lift, Tam Lift, Yatay lift, Levi-Civita Konneksiyonu, Diagonal Lift, Tanjant Demet, Kotanjant Demet, Sasaki Metriği.

ABSTRACT

Master Thesis

RIEMANNIAN AND SEMI-RIEMANNIAN MANIFOLDS LIFT PROBLEMS

Serkan DOĞAN

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Deparment of Mathematics
Discipline of Geometry

Supervisor: Prof. Dr. Arif SALİMOV

Lift problems in Rıemannıan and Semı-Rıemannıan Manıfolds were researched in presented thesis. Firstly, explanations of Manıfold, Differential form Manıfold were given; then concepts about the subject were described. Lie Derivate, Covariant Derivative, Tangent and Cotangent as Bundle concepts were given, then (1,1) and (0,2) type Tensors of Vertical and Horizontal Lifts were researched. Information about Levi-Civita Connection multiples and Complete Lift. If $\nabla_g = 0$, it shows that ${}^H g$ and C_g Metrics are the same with Levi-Civita Connections. Furthermore, definite lift's Geodesic, Diagonal Lift, Complete Lift of Ricci Tensor, Tangent, Cotangent and conceptions of Sasaki Metrics at Bundle. Were researched. Moreover, it was mentioned about extension of Rıemannıan at Cotangent Bundle.

2016, 94 pages

Keywords: Vector field, Complete Lift, Horizontal Lift, Levi-Civita Connection, Diagonal Lift, Tangent Bundle, Cotangent Bundle, Sasaki Metrics.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans tezim Atatürk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde sunulmuştur.

Bu tez konusunu çalışmamda ve ilerlememi sağlamada bilgilerini esirgemeyen, Hocam Sayın Prof. Dr. Arif SALİMOV'a teşekkür ederim. Çalışmalarımda ve tezin hazırlanışında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen Hocam Sayın Prof. Dr. Nejmi CENGİZ, Doç. Dr. Ömer TARAKÇI, Yrd. Doç. Dr. Sibel TURANLI, Yrd. Doç. Dr. Furkan YILDIRIM hocalarıma saygı ve şükranlarımı sunarım.

Serkan DOĞAN
Ekim, 2016

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

Γ	Christoffel Sembolü
R	Eğrilik Tensörü
S	Burulma Tensörü
π	Tabii İzdüşüm
L_X	X vektör Alanına Göre Lie Türevi
∇_X	X vektör Alanına Göre Kovaryant Türev
$\mathrm{T}(M_n)$	M_n manifoldunun Tanjant Demeti
$\mathrm{T}_x(M_n)$	$x \in M_n$ noktasındaki Tanjant Uzay
$\mathrm{T}^*(M_n)$	M_n manifoldunun Kotanjant Demeti
$\mathrm{T}_q^p(M_n)$	M_n manifoldu üzerinde (p,q) Tipli Tensör Demeti
C	Complete (Tam) Lift
V	Vertikal (Dikey) Lift
H	Horizontal (Yatay) Lift
∇^R	Afin Konneksiyonunun Riemann Genişlemesinin Tensör Alanı

1. GİRİŞ

Geometrinin bir bölümü olan Diferensiyel Geometri Yüzey ve Eğrilerin Matematik Analizinin metodlarının incelenme yolunun seçilmesi ile ortaya çıkmaya başlamıştır. Bu tür incelemede önemli rolü, XVII. yüzyılda Descartes ve Fermat tarafından keşfedilen koordinat metodu oynamaktadır. Leibniz'in çalışmalarında ise Eğrilerin Teğeti, Eğrilerin kuşatan eğrisi gibi Diferensiyel Geometri anlamları ortaya çıkmıştır.

1827 yılında Gauss, "Yüzeylerin Eğrilği Hakkında Genel İncelemeler" adlı eserinde Yüzeylerin Geometrisi fikrini geliştirmiş ve Yüzeylerin tam eğriliğinin bir dahili Geometri problemi olduğunu göstermiştir. Lobachevski, Euclidean Geometrisinden başka diğer Geometrilerin olduğunu ispatlamıştır. Riemann, 1854 yılında Riemann Geometrisi denilen Geometriyi tanımlamıştır. Bu Geometriler XIX. yüzyılın ikinci yarısında yoğun olarak gelişmiş, Mekanik ve Relativite teorisinde önemli uygulama alanları bulmuştur.

Diferensiyel Geometride önemli bir kısım ise Grup Teorisidir. 1872 yılında Klein, Erlang projesinde Geometriyi sürekli dönüşümler grubunun invaryantları teorisi olarak tanımlamıştır. Lie ise bu dönüşümler grubunun teorisini Lie Grubu teorisi denecek seviyeye kadar geliştirmiştir.

XX. yüzyılda Diferensiyel Geometride gelişen metodlardan biri, Geometride lokal incelemeleden global incelemelere geçiş olmuştur. Bununla ilgili olarak, Topoloji ve Lie Grubu teorisinin metodları Diferensiyel Geometride önemli rol oynamıştır. Modern Diferensiyel Geometride, Klasik Diferensiyel Geometrinin esas inceleme konuları olan Eğri ve Yüzeyler üzerinde çeşitli Geometrik yapıların verildiği $n-$ boyutlu Diferensiyellenebilen Manifold tarafından ikinci plana atılmıştır. Diferensiyel Geometride önemli rolü ise E. Cartan oynamıştır.

Diferensiyel Geometride önemli bir konu olan Riemann Manifoldda Tanjant demetlerin Diferensiyel Geometrisinin incelenmesi ilk olarak 1958 yılında Sasaki tarafından yapılmıştır. Daha sonra 1962 yılında Dombrowski, Tanjant Demet'deki Geometrilerin gelişmesinde katkıda bulunmuştur. 1965 yılında Yano ve Ledger, simetrik uzaylarda Tanjant Demeti tanımlamışlar ve Tanjant Demetle ilgili çalışmalarda bulunmuşlardır. 1966 yılında da Kandatu, Lineer olmayan Konneksiyona sahip bir Manifoldda Tanjant Demet'i tanımlamıştır.

1965 yılında Tanjant Demet'te Liftler çalışılmaya başlanmıştır. İlk çalışma 1965 yılında Kobayashi ve Yano tarafından Tanjant Demet'te Tensör Alanlarının ve Konneksiyonların Tam ve Dikey Liftleri olmuştur. 1967 yılında Yano and Ishihara Tanjant Demet'te Konneksiyonların ve Tensör Alanlarının Yatay Liftleriyle ilgili çalışmalarda bulunmuşturlar. 1970 yılında Moritimo Tanjant Demet'te Tensör Alanlarının ve Konneksiyonların Liftleri hakkında çalışmalarda bulunmuştur.

Sunulan bu tezde Manifold, Tensör, Riemann Manifoldu, Semİ-Riemann Manifoldu, Afin Konneksiyon, Ricci Tensörü, Christoffel sembolü, Tanjant Demet, Kotanjant Demet tanımlanmıştır. Fonksiyonun, 1-Formun, Vektör Alanının, Tensör Alanlarının ve Konneksiyonun Tam, Dikey ve Yatay Lifti ayrıntılı olarak incelenmiştir. İkinci kısımda buna bağlı olarak konuyla ilgili bazı kavramların tanımları verilmiştir. Tam Lift, Dikey Lift, Yatay Lift ile ilğili tanımlar kuramsal temeller adı altında verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise Tam Lift, Dikey Lift ve Yatay Lift ile ilgili bazı özellikler ispatlanmıştır. Ayrıca Tensör Alanlarının, Vektör Alanının ve Afin Konneksiyonun Tam Lifti, Dikey Lifti ve Yatay Lifti incelenmiştir.

Dördüncü bölümde ise Tanjant Demetin Geodezikliği, Levi-Civita Konneksiyonu ve Ricci Tensörünün Tam Lifti, Sasaki Metriği, Diagonal Lift, simetrik Afin Konneksiyonun Tam Lifti ve Riemann genişlemesi incelenmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Diferensiyellenebilir Manifoldlar

Tanım 2.1.1: X Hausdorff topolojik uzay olmak üzere herhangi $U \subset X$ açık kümesinin $V \subset R^n$ bölgesinde

$$\varphi : U \to V$$

homeomorfizmine X de $n-$ boyutlu koordinat sistemi veya harita, U ’ya ise φ haritasının koordinat komşuluğu veya koordinat bölgesi denir. Bazen harita (U, φ) şeklinde de gösterilir. Eğer $x \in U$ ise

$$\varphi(x) = \left(x^1, ..., x^n\right) \in R^n$$

olur. $x^1, ..., x^n$ reel sayılarına φ haritasında x noktasının koordinatları denir.

Eğer X Hausdorff topolojik uzayın $n-$ boyutlu φ_α haritalarının U_α bölgeleri bu uzayı örterse, yani

$$X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \quad (A - \text{indisler kümesi})$$

ise X ' e $n-$ boyutlu topolojik manifold veya sadece $n-$ boyutlu manifold denir (Salimov and Mağden 1999).

Tanım 2.1.2: M topolojik uzayın her p noktasının bir komşuluğu R^n (veya açık alt kümesine) homeomorfik ise M ’ye manifold denir.

Diferensiyellenebilir manifold kavramı en genel anlamda yerel olarak öklidyen uzaya denk olan topolojik bir uzaydır (Şahin 2015).

Tanım 2.1.3: X Hausdorff topolojik uzay ve $k \in N$ ($N-$doğal sayılar kümesi) olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $\left\{(U_\alpha \varphi_\alpha): \alpha \in A, U_\alpha \subset X\right\}$ lokal haritalalar ailesine X üzerinde C^k sınıfından $n-$boyutlu atlas denir.

i. Lokal haritaların U_α bölgesi X'i örter, yani X, $n-$boyutlu manifolddur.
ii. Keyfi $\alpha, \beta \in A$ için $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$ ise

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha\left(U_\alpha \cap U_\beta\right) \to \varphi_\beta\left(U_\alpha \cap U_\beta\right)$$

dönüşümü C^k sınıfındandır. $U_\alpha \cap U_\beta = \phi$ ise bu durumda $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümü C^k sınıfından olduğu kabul edilir. M Hausdorff sayılabilir baza sahip olan topolojik uzay olsun. Eğer , M üzerinde $n-$boyutlu C^∞ yapısı verilmiş ise M uzayına $n-$boyutlu C^∞ sınıfından olan diferensiyellenebilir veya düzgün manifold denir ve M_n ile gösterilir (Salimov and Mağden 2008).

Tanım 2.1.4: B , M topolojik uzayı içindeki m boyutlu koordinat sistemlerinin kümesinin bir alt kümesi olsun. B kümesi aşağıdaki iki önermeyi doğrularsa B kümesine,” M topolojik uzayı üstünde m boyutlu bir atlas” adı verilir.

1) M'nin her bir noktası, B kümesinin en az bir elemanının tanım bölgesinde bulunur.
2) B içindeki her iki koordinat sistemi düzgün olarak örtüşür (Sabuncuoğlu 2010).

Tanım 2.1.5: B, M topolojik uzayı üstünde bir atlas olsun. B ’nin elemanlarıyla düzgün örtüşen her koordinat sistemi yine B ’nin elemanı oluyorsa B ’ye M üstünde bir tam atlas, denir.

M Hausdorff uzayı üstünde bir tam atlas varsa bu tam atlasla birlikte M 'ye bir düzgün (diferensiyellenebilir) manifold, denir. M bir manifold ise bu manifold üstündeki tam atlasın boyutuna, M manifoldunun boyutu adı verilir. (Sabuncuoğlu 2010).

Tanım 2.1.6: M_n, C^∞ sınıfından olan bir manifoldun $p \in M_n$ noktasındaki tanjant uzay $T_p\left(M_n\right)$ ve bu uzayların birleşimi de $\bigcup_{p \in M_n} T_p\left(M_n\right)$ olsun.

$$x : M_n \to \bigcup_{p \in M_n} T_p\left(M_n\right)$$

dönüşümü ve $\pi : \bigcup_{p \in M_n} T_p\left(M_n\right) \to M_n$ doğal izdüşümü için

$$\pi \circ x : I_{M_n} : M_n \to M_n$$

özdeşlik dönüşümü olacak şekilde

$\pi \circ x$ dönüşümü varsa x 'e M_n üzerinde vektör alanı denir. Vektör alanı tanjant uzaylarının birleşimi yardımıyla tanımlanır (Hacısalihoğlu 1993).

Tanım 2.1.7: M_n manifoldu üzerinde $T_0^1\left(M_n\right)$ vektör alanlarının modülü olmak üzere,

$$\nabla_X Y = \nabla\left(X, Y\right) : T_0^1\left(M_n\right) \times T_0^1\left(M_n\right) \to T_0^1\left(M_n\right)$$

dönüşümü

i. $\nabla_{fX+gY} Z = f \nabla_X Z + g \nabla_Y Z, \ \forall f, g \in F\left(M_n\right)$

ii. $\nabla_Z\left(fX + gY\right) = \left(Zf\right) X + f \nabla_Z X + \left(Zg\right) Y + g \nabla_Z Y$

şartlarnı sağlıyorsa ∇ ’ya afin konneksiyon denir. Burada

$$\nabla_X : T_0^1(M_n) \to T_0^1(M_n)$$

dönüşümüne kovaryant differensiyellenme denir.

Lokal koordinatlarda $x \in U \subset M_n$ olmak üzere $\varphi(x) = (x^1, ..., x^n)$ olsun.

$\nabla_X = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} = \nabla_i$ olmak üzere,

$$\nabla_i \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k \left(x^1, ..., x^n \right) \tag{2.1}$$

yazılır. Diğer taraftan $x \in U'$ olacak şekilde $\psi(x) = \left(x^{1'}, ..., x^{n'} \right)$ koordinat komşuluğunu alalım. Burada

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^{i}}} = \nabla_{i'}, \quad \nabla_{i'} \left(\frac{\partial}{\partial_{x^{j'}}} \right) = \Gamma_{i'j'}^{k'} \frac{\partial}{\partial_{x^{k'}}} \tag{2.2}$$

olur. $\frac{\partial}{\partial x^{i'}} = A_{i'}^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ olduğundan ve kovaryant türevin özelliğinden dolayı

$$\nabla_{A_{i'}^i \frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\frac{\partial}{\partial x^{j'}} \right) = A_{i'}^i \nabla_i \left(\frac{\partial}{\partial x^{j'}} \right) \tag{2.3}$$

yazılır. Ayrıca

$$\frac{\partial}{\partial x^{j'}} = A_{j'}^j \frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

olduğundan bu ifade (2.3) denkleminde kullanılırsa;

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\nabla_i\left(\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\left(\frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{j'}\partial x^{i'}}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial}{\partial x^j}+\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\Gamma_{ij}^k\frac{\partial}{\partial x^k}\right)$$

$$=\left(\frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{j'}\partial x^{i'}}A_j^{k'}\frac{\partial}{\partial x^{k'}}+A_{i'}^iA_{j'}^j\Gamma_{ij}^kA_k^{k'}\frac{\partial}{\partial x^{k'}}\right)$$

bulunur. (2.3) eşitliğinden

$$\Gamma_{i'j'}^{k'}=A_k^{k'}A_{i'}^iA_{j'}^j\Gamma_{ij}^k+A_k^{k'}\frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{j'}\partial x^{i'}} \tag{2.4}$$

yazılır.

Bu kurala göre dönüşen n^3 sayıdaki Γ_{ij}^k sayılarına afin konneksiyon katsayıları denir.

Bazen afin konneksiyon yerine bu katsayılar kullanılır.

$$\nabla_x y=\nabla_{x^i\partial_i}\left(y^j\partial_j\right)=x^i\nabla_i\left(y^j\partial_j\right)$$

$$=x^i\partial_i y^k\partial_k+x^iy^j\Gamma_{ij}^k\partial_k$$

$$=x^i\left(\partial_i y^k+\Gamma_{ij}^k y^j\right)\partial_k$$

şeklinde lokal koordinatlarda yazarız. Buradan

$$\nabla_i y^k=\partial_i y^k+\Gamma_{ij}^k y^j \tag{2.5}$$

olur. Buradan yukarıdaki eşitlik du^i ile çarpılırsa,

$$du^i \nabla_i y^k = dy^k + \Gamma^k_{ij} du^i y^j \tag{2.6}$$

olarak yazılır. Buradan $\delta y^k = du^i \nabla_i y^k$ ve $w^k_j = \Gamma^k_{ij} du^i$ ile gösterilirse,

$$\delta y^k = dy^k + w^k_j y^j \tag{2.7}$$

olur. (2.7) denklemine du yönünde kovaryant türev denir. Bu kovaryant türev vektör alanını öteler. Eğer $\delta y^k = 0$ ise vektör alanına paralel vektör alanı denir. $f = w_k y^k$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Eğer $df = 0$ ise w_k vektör alanı paralel olur. $df = 0$ eşitliği kullanılarak f 'nin türevi alınırsa;

$$df = \delta\omega_k y^k + \omega_k \delta y^k$$

$$0 = \delta\omega_k y^k + \omega_k \left(dy^k + \omega^k_j y^j \right)$$

$$= \delta\omega_k y^k + \left(-d\omega_k y^k + \omega_k \omega^k_j y^j \right)$$

olur. Buradan

$$\delta\omega_k = d\omega_k + \omega_j \omega^j_k$$

olarak bulunur. Böylece

$$\nabla_i \omega_k = \partial_i \omega_k - \Gamma^j_{ik} \omega_j \tag{2.8}$$

elde edilir.

$$\nabla_i y^k = \partial_i y^k + \Gamma^k_{ij} y^j \text{ ve } \nabla_j \omega_k = \partial_i \omega_k - \Gamma^j_{ik} \omega_j$$

(2.5) ve (2.8) eşitlikleri yardımıyla tensörlerin kovaryant türevi

$$\nabla_k t^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q} = \partial_k t^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q} + \sum_{\lambda=1}^{p} \Gamma^{i_\lambda}_{km} t^{i_1,\dots,m,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q} - \sum_{\mu=1}^{q} \Gamma^{m}_{kj_\mu} t^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,m,\dots,j_q} \tag{2.9}$$

denklemleriyle verilir (Kobayashi and Nomızu 1963).

Tanım 2.1.8: M_n n boyutlu diferensiyellenebilir manifold olsun. $p \in M_n$ noktasındaki kotanjant uzay $T^*_p(M_n)$ ve bu uzayların birleşimi de $\bigcup_{p \in M_n} T^*_p(M_n)$ olsun.

$$\omega : M_n \to \bigcup_{p \in M_n} T^*_p(M_n)$$

dönüşümü ve $\pi : \bigcup_{p \in M_n} T^*_p(M_n) \to M_n$ doğal izdüşümü için

$$\pi \circ \omega : I_{M_n} : M_n \to M_n$$

özdeşlik dönüşümü olacak şekilde

$\pi \circ \omega$ dönüşümü varsa ω dönüşümüne M_n üzerinde 1-form denir (Hacısalihoğlu 1993).

Tanım 2.1.9: M_n diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde X vektör alanı olmak üzere X vektör alanı için aşağıdaki şartları sağlayan L_X operatörüne Lie türevi denir (Kobayashi and Nomızu 1963).

i. $L_X\left(K\otimes K^{'}\right)=L_X K\otimes K^{'}+K\otimes L_X K^{'},\ \forall K,K^{'}\in T\left(M_n\right)$

ii. $L_X f=Xf,\ f\in T_0^0\left(M_n\right)=F\left(M_n\right)$

iii. $L_X df=dL_X f$

iv. $L_X Y=\left[X,Y\right]$

Tanım 2.1.10: B_n vektör uzayında tayin edilmiş $z=\alpha\left(\vec{x}\right)$ vektör değişkenli reel değerli fonksiyonunu göz önüne alalım. Eğer $\forall\vec{x},\vec{y}\in B_n$ ve $\forall\lambda,\mu\in R$ için

$$\alpha\left(\lambda\vec{x}+\mu\vec{y}\right)=\lambda\alpha\left(\vec{x}\right)+\mu\alpha\left(\vec{y}\right)$$

şartı sağlanırsa $z=\alpha\left(\vec{x}\right)$ fonksiyonuna lineer fonksiyon denir. Bu durumda $\alpha:B_n\to R$ dönüşümüne lineer operatör de denir. $z=\alpha\left(\vec{x}\right)$ değerine α operatörünün $\vec{x}$ vektörü üzerindeki izi denir. B_n vektör uzayının bütün lineer operatörlerinin oluşturduğu B_n^* vektör uzayına B_n uzayının dual uzayı denir (Bishop and Goldberg 1968).

2.2. Tensör Alanları

Tanım 2.2.1: $\tilde{x}_j\in B_n,\ j=1,...,q$ vektör ve $\overset{i}{\xi}\in B_n^*, i=1,...,p$ kovektör değişkenlerinin

$$\omega=t\left(\vec{x}_1,\vec{x}_2,...,\vec{x}_q,\overset{1}{\xi},\overset{2}{\xi},...,\overset{p}{\xi}\right)$$

reel değerli fonksiyonunu göz önüne alalım. $\forall \lambda, \mu \in R$ olmak üzere birinci vektör değişkenlerine göre lineerlik şartı

$$t\left(\lambda\vec{x}+\mu\vec{y},\vec{x}_2,...,\vec{x}_q,\overset{1}{\xi},\overset{2}{\xi},...,\overset{p}{\xi}\right)=\lambda t\left(\vec{x},\vec{x}_2,...,\vec{x}_q,\overset{1}{\xi},\overset{2}{\xi},...,\overset{p}{\xi}\right)+\mu t\left(\vec{y},\vec{x}_2,...,\vec{x}_q,\overset{1}{\xi},\overset{2}{\xi},...,\overset{p}{\xi}\right)$$

olmak üzere bu fonksiyon her bir değişkene göre lineerlik şartını sağlarsa, bu fonksiyona multilineer fonksiyon denir.

B_n bir vektör uzay olsun. $\omega = t\left(\vec{x}_1,\vec{x}_2,...,\vec{x}_q,\overset{1}{\xi},\overset{2}{\xi},...,\overset{p}{\xi}\right)$ multilineer fonksiyona karşılık gelen

$$t : B_n \times ... \times B_n \times B_n^* \times ... \times B_n^* \to R$$

reel değerli operatörüne B_n uzayında p dereceden kontravaryant, q dereceden kovaryant tensör adı verilir (Bishop and Goldberg 1968).

Tanım 2.2.2: $E \subset M_n$ olmak üzere $T : E \to T_s^r\left(M_n\right)$ şeklindeki fonksiyona $\left(r,s\right)$ tipli bir T tensör alanı denir. Burada her $m \in E$ için $T\left(m\right) \in T_s^r\left(M_n\right)$ şeklindedir (Bishop and Goldberg 1968).

Tanım 2.2.3: A_n afin konneksiyonlu uzayda $f = f\left(u^1,u^2,...,u^n\right)$ diferensiyellenebilir fonksiyonların oluşturduğu alana (skaler alan) bakalım. Bu fonksiyonun tam diferensiyeli, yani $df = \partial_i f du^i$ ifadesi, koordinatların dönüşümü halinde invaryant kalır ve df fonksiyonun du^i vektörünün lineer fonksiyonu olur. Bu lineer fonksiyona karşılık gelen kovektörün koordinatları

$$V_i = \partial_i f \tag{2.10}$$

olur. Bu vektöre f alanının gradienti denir. f fonksiyonuna ise bu kovektör alanının potansiyel fonksiyonu denir. Keyfi V_i vektörünün skaler alanın gradienti olması için gerek ve yeter şart

$$\partial_{[j} V_{i]} = 0 \tag{2.11}$$

olmasıdır. V_i gradient kovektörünün kovaryant türevini alırsak;

$$\nabla_j V_i = \partial_j V_i - \Gamma^k_{ji} V_k \tag{2.12}$$

olur. (2.12) denkleminden j ve i indislerine göre alterneleştirme işlemi yapılır ve (2.11) eşitliği kullanılırsa;

$$\nabla_{[j} V_{i]} = S^k_{ij} V_k \tag{2.13}$$

yazılır. Burada

$$S^k_{ij} = \Gamma^k_{[ij]} \tag{2.14}$$

biçimindedir. (2.13) denkleminin sağ tarafındaki V_k keyfi kovektör, sol tarafındaki kovaryant türev ise (0,2) tipli tensör olduğuna göre S^k_{ij} aşağı indislerine göre antisimetrik olan (1,2) tipli tensör tayin eder. (2.14) tensörüne A_n uzayının burulma tensörü denir. A_n manifoldundan alınmış keyfi X, Y vektör alanları için burulma tensörünün invaryant formda yazılışı ise

$$S(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \tag{2.15}$$

biçimindedir.

(M,g) bir Riemann manifoldu, ∇'de M üzerinde Levi-Civita konneksiyonu olsun.

$$R:\ T(M_n)\times T(M_n)\times T(M_n)\to T(M_n)$$

$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$$

ile tanımlanan R fonksiyonu M üzerinde (1,3) tipinde tensör alanıdır. Bu tensör M'nin Riemann eğrilik tensörü olarak adlandırılır.

$$R^i_{rsk} = \partial_r\Gamma^i_{sk} - \partial_s\Gamma^i_{rk} + \Gamma^i_{rm}\Gamma^m_{sk} - \Gamma^i_{sm}\Gamma^m_{rk}$$

$$= 2\left(\partial_{[r}\Gamma^i_{s]k} + \Gamma^i_{[r|m|}\Gamma^m_{s]k}\right)$$

şeklinde ifade edilir.

$\forall\ \omega \in T(M_n)$ için $K(X,Y,Z,\omega) = g(R(X,Y)Z,\omega)$ tensörüne de M' nin Riemann-Christoffel eğrilik tensörü adı verilir.

$\forall X,Y,Z,\omega \in T(M_n)$ için Riemann eğrilik tensörü aşağıdaki özelliklere sahiptir (O'Neill 1983).

i. $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z,$

ii. $g\left(R(X,Y)V,\omega\right)=-g\left(R(X,Y)\omega,V\right)$,

iii. $R(X,Y)Z+R(Y,Z)X+R(Z,X)Y=0$,

iv. $g\left(R(X,Y)V,\omega\right)=g\left(R(V,\omega)X,Y\right)$,

Keyfi v vektörünün kovaryant türevi $\nabla_s v^i=\partial_s v^i+\Gamma^i_{sm}v^m$ biçimindedir. (1,1) tipli tensörün kovaryant türevini hesaplayalım:

$$\nabla_r\nabla_s v^i=\partial_r\nabla_s v^i+\Gamma^i_{rm}\nabla_s v^m-\Gamma^m_{rs}\nabla_m v^i$$

$$=\partial_r\left(\partial_s v^i+\Gamma^i_{sk}v^k\right)+\Gamma^i_{rm}\left(\partial_s v^m+\Gamma^m_{sk}v^k\right)-\Gamma^m_{rs}\nabla_m v^i$$

$$=\partial^2_{rs}v^i+\partial_r\Gamma^i_{sk}v^k+\Gamma^i_{sk}\partial_r v^k+\Gamma^i_{rm}\Gamma^m_{sk}v^k-\Gamma^m_{rs}\nabla_m v^i$$

son eşitliğin her iki tarafını r,s indislerine göre alterneleştirme işlemi yaparsak;

$$2\nabla_{[r}\nabla_{s]}v^i=R^i_{rsk}v^k-2S^k_{rs}\nabla_k v^i \tag{2.16}$$

denklemini elde ederiz. (2.16) denkleminin sol tarafındaki terim ve sağ tarafındaki ikinci terim tensör olduklarından ve v^i keyfi vektör olduğundan R^i_{rsk} ifadesi (1,3) tipli tensördür. Bu tensöre A_n uzayının eğrilik tensörü veya Riemann –Christoffel tensörü denir.

(2.16) formülüne benzer olarak aşağıdaki formülleri yazarız.

$$2\nabla_{[r}\nabla_{s]}w_k=-R^m_{rsk}w_m-2S^m_{rs}\nabla_m w_k \tag{2.17}$$

$$2\nabla_{[r}\nabla_{s]}\varphi_i^j = R_{rsm}^j\varphi_i^m - R_{rsi}^m\varphi_m^j - 2S_{rs}^k\nabla_k\varphi_i^j \tag{2.18}$$

$$2\nabla_{[r}\nabla_{s]}t_{j_1,\dots,j_q}^{i_1,\dots,i_p} = R_{rsm}^{i_1}t_{j_1,\dots,j_q}^{m,i_2,\dots,i_p} + \dots + R_{rsm}^{i_p}t_{j_1,\dots,j_q}^{i_1,\dots,m} - R_{rsj_1}^m t_{m,j_2,\dots,j_q}^{i_1,\dots,i_p} - \dots - R_{rsj_q}^m t_{j_1,\dots,m}^{i_1,\dots,i_p} - 2S_{rs}^k t_{j_1,\dots,j_q}^{i_1,\dots,i_p} \tag{2.19}$$

(2.18) formülüne bazen φ_i^j afinorunun Ricci özdeşliği de denir (Salimov 2013).

Tanım 2.2.4: Riemann manifoldu üzerinde $\nabla_k g_{ij} = 0$ şartını sağlayan burulmasız lineer konneksiyona Riemann konneksiyonu denir. Riemann konneksiyon

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{ks}(\partial_i g_{sj} + \partial_j g_{is} - \partial_s g_{ij})$$

şeklinde ifade edilir (Salimov and Mağden 2008).

Tanım 2.2.5: R_{lks}^i eğrilik tensöründe i ile l aynı alınarak (kontraksiyon yapılarak) elde edilen

$$R_{ks} = R_{lks}^l$$

tensörüne Ricci tensörü denir (Kobayashi and Nomızu 1963).

2.3. Riemann ve Semi-Riemann Manifoldu

Tanım 2.3.1: M_n diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde $(0,2)$ tipli, simetrik ve regüler g_{ij} esas tensör alanı verilmişse (M_n, g)'ye Riemann manifoldu denir.Riemann metriği pozitif tanımlıdır. Yani $detg_{ij}\rangle 0$' dır. Eğer $detg_{ij} \neq 0$ ise manifolda Semi-Riemann (Pseudo Riemann) manifoldu denir.

Riemann manifoldu üzerinde ∇ konneksiyonu verilmiş olsun. Eğer $\nabla g = 0$ şartını sağlarsa ∇'ya Riemann konneksiyonu (veya Levi-Civita) denir. Bu şartı sağlayan burulmasız konneksiyon tektir. Γ_{ij}^{k} sembolüne Christoffel sembolü denir ve $\Gamma_{ij}^{k} = \left\{ \begin{smallmatrix} k \\ ij \end{smallmatrix} \right\}$' dır. Riemann konneksiyonuyla Christoffel sembolü çakışıktır (Salimov and Mağden 2008).

Tanım 2.3.2: M_n bir Riemann manifoldu ve M_n üzerinde bir Riemann konneksiyonu ∇ olsun.

$\forall X, Y, Z \in T(M_n)$ ve $\forall f \in C^{\infty}(M, R)$ için ∇ Riemann konneksiyonu

i. $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z,$

ii. $\nabla_{X+Z} (Y) = \nabla_X Y + \nabla_Z Y,$

iii. $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y,$

iv. $\nabla_X (fY) = X[f] Y + f \nabla_X Y,$

v. $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y],$

vi . $Z[\langle X, Y \rangle] = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle,$

özelliklerini sağlar (Hacısalihoğlu 2003).

Tanım 2.3.3: i. $g(X,Y) = g(Y,X), \ \forall X, Y \in T_0^1(M_n)$

ii. $g(X,X) \geq 0, \ \forall X \in T_0^1(M_n)$ ve $g(X,X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$

şartlarını sağlayan (0,2) tipli g tensör alanına Riemann metriği denir.

g Riemann metriğine sahip M_n manifolduna Riemann manifoldu denir. M_n ' de $\left\{x^1, x^2, ..., x^n\right\}$ lokal koordinat sistemi verilmiş olsun. Bu lokal koordinatlara göre, g'nin g_{ij} bileşenleri

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial_{x^i}}, \frac{\partial}{\partial_{x^j}}\right), \; i, j = 1, ..., n$$

ile verilir. g_{ij} 'ye g'nin kovaryant bileşenleri denir. g'nin g^{ij} kontravaryant bileşenleri

$$g^{ij} = g\left(dx^i, dx^j\right), \; i, j = 1, ..., n$$

ile tanımlanır (Kobayashi and Nomızu 1963).

Tanım 2.3.4: Burulmasız M_n uzayında $V_1, V_2, ..., V_n$ vektörlerinin paralel taşınması durumunda V hacmi korunuyorsa bu tür uzaylara eş-afin uzay denir. Bu uzayın konneksiyonuna da eş-afin konneksiyon denir (Yano ve Ishihara 1973).

Tanım 2.3.5: Bir metrik uzayda g_{ij} esas tensörü regüler ise yani $Det(g_{ij}) \neq 0$ ise bu tür uzaylara weyl uzayı denir (Yano and Ishihara 1973).

$Det(g_{ij}) \neq 0$ ise $\tilde{g}^{ij}$ tersi de vardır. Bu matrislerin tersi özelliğine göre

$$\tilde{g}^{ij} g_{jk} = \delta_k^i$$

şartı verilmiş olur. Böylece weyl uzayı, burulmasız uzayda esas tensörün simetrik ve regüler verilmesi ile karakterize olunur. Weyl uzayındaki weyl konneksiyonu

$$\Gamma_{ij}^k = \left\{ {k \atop ij} \right\} - \left(w_i \delta_j^r + w_j \delta_i^r - w_k \tilde{g}^{rk} g_{ij}\right)$$

şeklindedir. Burada ω_i uzayın ek kovektörüdür. Weyl uzayı aslında bir Riemann uzayıdır sadece konneksiyonları farklıdır.

Tanım 2.3.6: Eş-afin weyl uzayına Riemann uzay denir (Yano and Ishihara 1973).

Riemann uzayı bir metrik uzaydır. M_n manifoldu üzerinde g_{ij} tensörü verilmiş olsun. Bu uzayda $\nabla_k g_{ij} = 0$ şartını sağlayan burulmasız tek bir $\Gamma_{ij}^k = \left\{ {k \atop ij} \right\}_g$ konneksiyonu vardır ve

$$\Gamma_{ij}^k = \left\{ {k \atop ij} \right\}_g = \frac{1}{2} \tilde{g}^{kr} \left(\partial_i g_{rj} + \partial_j g_{ri} - \partial_r g_{ij} \right)$$

ile gösterilir.

2.4. Tanjant Demet

M_n, C^∞ sınıfından $n-$boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold ve M_n manifoldunun p noktasındaki tanjant uzay $T_p(M_n)$ olmak üzere

$$T(M_n) = \bigcup_{p \in M_n} T_p(M_n) \tag{2.20}$$

ile tanımlanan $T(M_n)$ kümesine tanjant demet denir.

$T(M_n)$'nin herhangi bir $\tilde{p} \in T_p(M_n)$ noktası için M_n manifoldu üzerindeki $T(M_n)$ tabii demet yapısını tanımlayalım $\pi : T(M_n) \to M_n$ demet izdüşümü $\tilde{p} \to p$ karşılık getirir. Yani $\pi(\tilde{p}) = p$ olur. $\pi^{-1}(p) = \tilde{p} \in T_p(M_n)$ kümesine M_n temel uzayının p noktasındaki fibre denir. Doğal olarak burada $f : M_n \to T(M_n)$ kesiti bulunur. M_n manifoldunun keyfi p noktasındaki $f(p)$, $T_p(M_n)$ 'nin sıfır vektörüdür. Bu f

kesitine veya $f\left(M_n\right)$' nin görüntüsüne sıfır kesit denir. $f\left(M_n\right)$ sıfır kesiti M_n temel uzayı ile aynıdır ve bu nedenle M_n manifoldunun kendisi $T\left(M_n\right)$' de differensiyellenebilir imbedding olmuş (içine daldırılmış) altmanifolddur.

$\left(x^h\right), U$ koordinat komşuluğunda lokal koordinatlar olmak üzere M_n baz uzayı $\left\{U; x^h\right\}$ koordinat komşuluk sistemiyle örtülmüş olsun. $\pi^{-1}\left(U\right) \subset T\left(M_n\right)$ açık kümesi için $\pi^{-1}: U \subset M_n \rightarrow U \times R^n$ dönüşümünü diferensiyellenebilir bir homeomorfizm olur. Burada R^n , R üzerindeki n-boyutlu vektör uzayıdır. $\tilde{p} \in T_p\left(M_n\right)(p \in U)$ noktası $\left(p, X\right)$ sıralı çifti ile gösterilir ve $X \in R^n$ vektörünün bileşenleri $T_p\left(M_n\right)$ tanjant uzayında $\left\{\partial_h\right\}\left(\partial_h = \dfrac{\partial}{\partial x^h}\right)$ doğal bazına $\tilde{p}$' nin $\left(y^h\right) = \left(x^{\bar{h}}\right), \bar{h} = n+1, \ldots, 2n$ kartezyen koordinatları ile verilir. U komşuluğunda $p = \pi\left(\tilde{p}\right)$' nin koordinatları $\left(x^h\right)$ $h = 1, \ldots, n$ ile gösterilirse $\tilde{p}$ noktası uygun $\left(x^h, x^{\bar{h}}\right) \rightarrow \tilde{p} \in \pi^{-1}\left(U\right)$ ile verilmiş olur. Biz $\pi^{-1}\left(U\right) \subset T\left(M_n\right)$ açık kümesinde $\left(x^h, x^{\bar{h}}\right)$ lokal koordinatlar sistemi elde ederiz. Buradan $\left(x^h, x^{\bar{h}}\right)$ ‘ya $\left(x^h\right)$ ‘dan indirgenmiş (elde edilmiş) $\pi^{-1}\left(U\right)$' da koordinatlar denir.

M_n manifoldunun $p = \pi\left(\tilde{p}\right)$ noktasını ihtiva eden diğer bir koordinat komşuluğu $\left\{U', x^{h'}\right\}$ ise $\pi^{-1}\left(U'\right)$ koordinat komşuluğu $\tilde{p}$ noktasını ihtiva eder. $\pi^{-1}\left(U\right)$' ya göre $\tilde{p}$' nin indirgenmiş koordinatları $\left(x^{h'}, y^{h'}\right)$ ile verilecektir. Burada

$$\begin{cases} x^{h'} = x^{h'}\left(x^h\right), \\ y^{h'} = \dfrac{\partial}{\partial x^h} y^h, \end{cases} \qquad (2.21)$$

olarak verilir. $x^{h'}\left(x^{h}\right), p$ noktasındaki $x^1, x^2, ..., x^n$ değişkenlerinin C^{∞} sınıfından olan diferensiyellenebilir fonksiyonlarıdır. $x^{\bar{h}} = y^h, x^{\bar{h}'} = y^{h'}$ ile gösterirsek (2.21) denklemi

$$x^{p'} = x^{p'}\left(x^{p}\right), \tag{2.22}$$

olarak yazılır. (2.21) denkleminin Jacobiyeni

$$\frac{\partial x^{p'}}{\partial x^{p}} = \begin{pmatrix} \partial x^{h'} & 0 \\ \dfrac{\partial^2 x^{h'}}{\partial x^h \partial x^j} & \dfrac{\partial x^{h'}}{\partial x^h} \end{pmatrix} \tag{2.23}$$

matrisi ile verilir. (2.21) denkleminin tersi ise

$$\begin{cases} x^h = x^h\left(x^{h'}\right), \\ y^h = \dfrac{\partial x^h}{\partial x^{h'}} y^{h'}, \end{cases} \tag{2.24}$$

veya

$$x^p = x^p\left(x^{p'}\right) \tag{2.25}$$

olarak yazılır. (2.24) denkleminin Jacobiyeni

$$\left(\frac{\partial x^{p}}{\partial x^{p'}}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x^{h}}{\partial x^{h'}} & 0 \\ \dfrac{\partial^2 x^{h}}{\partial x^{h'} \partial x^{i'}} & \dfrac{\partial x^{h}}{\partial x^{h'}} \end{pmatrix} \tag{2.26}$$

matrisi ile verilir. M_n manifoldu üzerindeki C^{∞} sınıfından (r, s) tipli tüm tensör alanlarının kümesinin $T_s^r\left(M_n\right)$ ve M_n ‘deki tüm tensör alanlarının kümesini ise

$T(M_n)=\sum_{r,s=0}^{\infty} T_s^r(M_n)$ ile göstereceğiz. Benzer olarak $T(M_n)$ tanjant demetindeki tensör alanlarının kümelerini ise sırasıyla $T_s^r(T(M_n))$ ve $T(T(M_n))$ olarak göstereceğiz (Yano and Ishihara 1973).

2.4.1. Fonksiyonun dikey lifti

f, M_n 'de bir fonksiyon olsun. $T(M_n)$ tanjant demette ${}^V f : \mathrm{T}(M_n) \to R$ fonksiyonuna bakalım.

$f : M_n \to R$ ve $\pi : T(M_n) \to M_n$ olmak üzere,

${}^V f = f \circ \pi,\ \ {}^V f : \mathrm{T}(M_n) \to R$ fonksiyonuna f fonksiyonunun dikey lifti denir.

$$\tilde{p} \in \pi^{-1}(U),\ \tilde{p} = (x^i, y^i) = (x^i, x^{\bar{i}})$$

koordinatlarına sahiptir.

$${}^V f(\tilde{p}) = {}^V f(x,y) = f \circ \pi(\tilde{p}) = f(p) = f(x)$$

olduğundan ${}^V f(\tilde{p})$ değeri fibre boyunca sabittir denir ve $p = \pi^{-1}(\tilde{p}) \in M_n$ noktasındaki $f(p)$ değerine eşit olur (Yano and Ishihara 1973).

2.4.2. Vektör alanının dikey lifti

$\tilde{X} \in T_0^1(T(M_n))$ alalım. $\forall f \in T_0^0(M_n)$ için $\tilde{X}\,{}^v f = 0$ ise buradaki $\tilde{X}$ 'e dikey vektör alanı denir. $\tilde{X}$ 'nin lokal koordinatlarda bileşenleri $\begin{pmatrix} \tilde{X}^h \\ \tilde{X}^{\bar{h}} \end{pmatrix}$ olsun.

$$\tilde{X}^{v} f = \tilde{X}^{i}\partial_i f + \tilde{X}^{\bar{i}}\partial_{\bar{i}} f = 0$$

buradanda

$$\tilde{X}^{i} = 0 \quad \tilde{X}^{\bar{i}} \neq 0$$

bulunur.

X, M_n' de bir vektör alanı olsun. $T(M_n)$' de $\iota w = w_i dx^i$ olmak üzere ${}^{V}X(\iota\omega) = {}^{V}(\omega(X))$ ile ${}^{V}X$ bir vektör alanıdır. Bu vektör alanına M_n'den $T(M_n)$'ye X vektör alanının dikey lifti denir. Şimdi ${}^{V}X$ dikey liftinin bileşenlerini bulalım:

$$\tilde{X}^{\bar{j}}\omega_j = \omega_i X^i$$

$$\iota\omega = \omega_i y^i$$

olduğundan dolayı

$${}^{V}X^{j}\partial_j\left(\omega_i y^i\right) + {}^{V}X^{\bar{j}}\partial_{\bar{j}}\left(\omega_i y^i\right) = \omega_j X^j$$

$${}^{V}X^{i}\omega_i + {}^{V}X^{\bar{j}}\omega_j = \omega_j X^j, \; {}^{V}X^{j} = 0$$

eşitliklerinden

$$\tilde{X}^{\bar{j}}\omega_j = \omega_i X^i$$

elde edilir.

Buradanda

$$\tilde{X}^{\bar{j}} = X^{j}$$

eşitliğinden

$$^{V}X = \begin{pmatrix} 0 \\ X^{j} \end{pmatrix} \qquad (2.27)$$

şeklinde bulunur. (Yano and Ishihara 1973).

2.4.3. Dikey vektör alanı

$X = X^{i}\partial_{i}$, $\{\partial_{i}\}$ M_{n} üzerinde doğal çatı olmak üzere,

$$Xf = X^{i}\partial_{i}f \ , \ \tilde{X}^{i}\partial_{i} \ \ \tilde{X} = \tilde{X}^{i}\partial_{i} + \tilde{X}^{\bar{i}}\partial_{\bar{i}}$$

olup

$$\tilde{X}\,^{v}f = 0 \Rightarrow \tilde{X}^{i}\partial_{i}\,^{v}f + \tilde{X}^{\bar{i}}\partial_{\bar{i}}\,^{v}f = 0$$

elde edilir.

$\tilde{X} = \begin{pmatrix} \tilde{X}^{i} \\ \tilde{X}^{\bar{i}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{X}^{i} \end{pmatrix}$ vektörleri dik olup bu tip vektör alanlarına dikey vektör alanı denir.

$X \in T_{0}^{1}(M_{n})$ olmak üzere X vektör alanının tanjant demette dikey lifti

$$^{V}X(\iota\omega) = {}^{V}(\omega(X))$$

şeklinde tanımlanır (Yano and Ishihara 1973).

2.4.4. 1-Formun dikey lifti

$\tilde{\omega} \in T_1^0\left(T\left(M_n\right)\right)$ olmak üzere $\forall X \in T_0^1\left(M_n\right)$, $\tilde{\omega}\left({}^V X\right)=0$ eşitliğini sağlayan $\tilde{w}$ 1-formuna $T\left(M_n\right)$'de dikey 1-form denir. $\tilde{\omega}$ lokal koordinatları $\left(\tilde{\omega}_i, \tilde{\omega}_{\bar{i}}\right)$ olsun.

$\tilde{\omega}\left({}^V X\right)=0$ eşitliğinden

$$\tilde{\omega}_i\, {}^V X^i+\tilde{\omega}_{\bar{i}}\, {}^V X^{\bar{i}}=0$$

$${}^V X^i=0, \quad {}^V X^{\bar{i}}=X^i$$

olduğundan dolayı

$$\tilde{\omega}_{\bar{i}} X^i=0$$

$$\tilde{\omega}_{\bar{i}}=0$$

$$\left(\tilde{\omega}_i, \tilde{\omega}_{\bar{i}}\right)=\left(\tilde{\omega}_i, 0\right)$$

olur.

$\omega \in T_1^0\left(M_n\right)$ 1-formunun ${}^V\omega$ dikey liftini tanımlayalım.

$${}^V\omega={}^V\left(\omega_i\right)^V\left(dx^i\right)=\omega_i dx^i \tag{2.28}$$

$$ {}^V\omega = {}^V\tilde{\omega}_i dx^i + {}^V\tilde{\omega}_{\bar{i}}\, {}^V dx^{\bar{i}} \tag{2.29} $$

(2.28) ve (2.29)’dan

$$ {}^V\tilde{\omega}_i\, {}^V dx^i + {}^V\tilde{\omega}_{\bar{i}}\, {}^V dx^{\bar{i}} = \omega_i dx^i $$

elde edilir.Buradan

$$ \left({}^V\tilde{\omega}_i - \omega_i\right)^V dx^i + {}^V\tilde{\omega}_{\bar{i}}\, {}^V dx^{\bar{i}} = 0 $$

$$ {}^V\tilde{\omega}_i = \omega_i\,, \quad {}^V\tilde{\omega}_{\bar{i}} = 0 $$

$$ {}^V\omega = \left(\omega_i, 0\right) \tag{2.30} $$

elde edilir. Sonuç olarak;

$$ {}^V\omega\left({}^V X\right) = 0 $$

olur (Yano and Ishihara 1973).

2.4.5. Tensör alanlarının dikey lifti

${}^V : T_0^0\left(M_n\right) \to T_0^0\left(T\left(M_n\right)\right)$ dönüşümü

$a, b \in T_0^0\left(M_n\right)$ olmak üzere, ${}^V\left(af + bg\right) = a^V f + b^V g$ ve ${}^V\left(fg\right) = {}^V f\, {}^V g$ işlemleri ile bir izomorfizmdir.

${}^V : T\left(M_n\right) \to T\left(T\left(M_n\right)\right)$ izomorfizmine bakalım.

$$^{V}\left(P\otimes Q\right)={}^{V}P\otimes{}^{V}Q$$

$$a,b\in R\,,\quad ^{V}\left(aP+bQ\right)=a^{V}P+b^{V}Q$$

işlemleriyle dikey lift tanımlanır.

$S\in T_{q+1}^{P}\left(M_n\right)$ tensörünü alalm. Bu tensörü koordinatlarla yazarsak;

$$S=S_{l,s_1,\ldots,s_q}^{i_1,\ldots,i_p}\partial_{i_1}\otimes\ldots\otimes\partial_{i_p}\otimes dx^I\otimes\ldots\otimes dx^{s_q}$$

şeklinde olur. X vektör alanı olmak üzere γ operatörü

$$\gamma_x S=X^I S_{l,s_1,\ldots,s_q}^{i_1,\ldots,i_p}\partial_{\bar{i}_1}\otimes\ldots\otimes\partial_{\bar{i}_p}\otimes dx^l\otimes\ldots\otimes dx^{s_q} \tag{2.31}$$

$$\gamma S=y^l S_{l,s_1,\ldots,s_q}^{i_1,\ldots,i_p}\partial_{\bar{i}_1}\otimes\ldots\otimes\partial_{\bar{i}_p}\otimes dx^l\otimes\ldots\otimes dx^{s_q} \tag{2.32}$$

olarak tanımlanır.

Buradan da $\gamma_x S={}^{V}\left(S_x\right)$ yazılabilir. (2.30) ve (2.31)'den $X\in T_0^1\left(M_n\right)$ ve $F\in T_1^1\left(M_n\right)$ olmak üzere lokal koordinatlarda

$$\gamma_x F=\begin{pmatrix}0\\ x^i F_i^h\end{pmatrix},\ \gamma F=\begin{pmatrix}0\\ y^i F_i^h\end{pmatrix} \tag{2.33}$$

şeklinde yazılır (Yano and Ishihara 1973).

2.4.5.a. (1,1) tipli tensörün dikey lifti

$f \in T_1^1(M_n)$ olmak üzere,

$$^V(p \otimes q) = {}^V p \otimes {}^V q \ , \ {}^V(p+q) = {}^V p + {}^V q$$

eşitliklerinden

$$f = f_j^i \partial_i \otimes dx^j \ , \ {}^V f = {}^V\left(f_j^i \otimes dx^j\right)$$

$$= {}^V\left(f_j^i \partial_i\right) \otimes {}^V\left(dx^j\right) = {}^V f_j^i \, {}^V \partial_i \otimes {}^V dx^j = f_j^i \partial_{\bar{i}} \otimes dx^j$$

olduğundan

$$^V f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ f_i^j & 0 \end{pmatrix} \tag{2.34}$$

elde edilir (Yano and Ishihara 1973).

2.4.5.b. (0,2) tipli tensörün dikey lifti

$G \in T_2^0(M_n)$, $G = G_{ij} dx^i \otimes dx^j$ olmak üzere,

$$^V G = {}^V\left(G_{ij} dx^i \otimes dx^j\right) = {}^V\left(G_{ij} dx^i\right) \otimes {}^V\left(dx^j\right) = {}^V\left(G_{ij}\right) {}^V\left(dx^i\right) \otimes dx^j$$

olarak bulunur.

$$ {}^{V}G = {}^{V}G_{ij}dx^{i} \otimes dx^{j} + {}^{V}G_{\bar{i}j}dx^{\bar{i}} \otimes dx^{j} + {}^{V}G_{i\bar{j}}dx^{i} \otimes dx^{\bar{j}} + {}^{V}G_{\bar{i}\bar{j}}dx^{\bar{i}} \otimes dx^{\bar{j}} $$

olduğundan

$$ {}^{V}G = \begin{pmatrix} {}^{V}G_{ij} & {}^{V}G_{i\bar{j}} \\ {}^{V}G_{\bar{i}j} & {}^{V}G_{\bar{i}\bar{j}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{ij} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.35} $$

elde edilir (Yano and Ishihara 1973).

Önerme 2.4.1: ${}^{V}X\,{}^{C}f = {}^{V}(Xf)'$ dir.

İspat : ${}^{V}X^{I}\partial_{I}\,{}^{C}f = {}^{V}X^{i}\partial_{i}\left(Y^{s}\partial_{s}f\right) + {}^{V}X^{\bar{i}}\partial_{\bar{i}}\left(Y^{s}\partial_{s}f\right)$

$$ = X^{i}\delta_{i}^{s}\partial_{s}f = X^{s}\partial_{s}f = \left(Xf\right) = {}^{V}\left(Xf\right) \tag{2.36} $$

2.4.6. Fonksiyonun tam lifti

$f \in T_{0}^{0}(M_{n})$ olmak üzere $T(M_{n})'$ de $\iota(df) = y^{s}\partial_{s}f = \partial f = {}^{c}f$ buradaki ${}^{c}f$ fonksiyonuna f fonksiyonunun tanjant demette tam lifti denir (Yano ve Ishihara 1973).

2.4.7. Vektör alanının tam lifti

$X \in T_{0}^{1}(M_{n})$ olsun. ${}^{C}X\,{}^{C}f = {}^{C}(Xf)$ ile tanımlanan ${}^{C}X$'ye, X vektör alanının tam lifti denir. Şimdi ${}^{C}X = \begin{pmatrix} {}^{C}X^{i} \\ {}^{C}X^{\bar{i}} \end{pmatrix}$ bileşenlerini bulalım:

$$ {}^{C}X^{i}\partial_{i}\,{}^{C}f + {}^{C}X^{\bar{i}}\partial_{\bar{i}}\,{}^{C}f = y^{s}\partial_{s}\left(X^{i}\partial_{i}f\right) $$

$$ {}^{C}X^{i}\partial_{i}\left(y^{s}\partial_{s}f\right)+{}^{C}X^{\bar{i}}\partial_{\bar{i}}\left(y^{s}\partial_{s}f\right)=y^{s}\left(\partial_{s}X^{i}\right)\partial_{i}f+y^{s}X^{i}\partial_{s}\partial_{i}f $$

$$ {}^{C}X^{i}=X^{i},\ {}^{C}X^{\bar{i}}=y^{s}\partial_{s}X^{i} $$

buradanda

$$ {}^{C}X=\begin{pmatrix} X^{i} \\ y^{s}\partial_{s}X^{i} \end{pmatrix} \tag{2.37} $$

olur (Yano and Ishihara 1973).

2.4.8. 1-Formun tam lifti

$\omega\in T_{1}^{0}\left(M_{n}\right)$ verilmiş olsun. ${}^{C}\omega\in T_{1}^{0}\left(T\left(M_{n}\right)\right)$ olmak üzere, ${}^{C}\omega\left({}^{C}X\right)={}^{C}\left(\omega\left(X\right)\right)$ şartını sağlıyorsa ${}^{C}\omega$ 'ye ω' nin tam lifti denir. Şimdi ${}^{C}\omega\in T_{1}^{0}\left(T\left(M_{n}\right)\right)$ 1-formunun bileşenlerini bulalım:

$$ {}^{C}\omega_{i}\,{}^{C}X^{i}+{}^{C}\omega_{\bar{i}}\,{}^{C}X^{\bar{i}}={}^{C}\left(\omega_{i}X^{i}\right)=y^{s}\partial_{s}\left(\omega_{i}X^{i}\right) $$

$$ {}^{C}\omega_{i}X^{i}+{}^{C}\omega_{\bar{i}}y^{s}\partial_{s}X^{i}=y^{s}\partial_{s}\omega_{i}X^{i}+y^{s}\omega_{i}\partial_{s}X^{i} $$

$$ {}^{C}\omega_{i}=y^{s}\partial_{s}\omega_{i},\ {}^{C}\omega_{\bar{i}}=\omega_{i} $$

olup

$$ {}^{C}\omega=\left(y^{s}\partial_{s}\omega_{i},\omega_{i}\right) \tag{2.38} $$

şeklinde olur (Yano and Ishihara 1973).

2.4.9. Tensör alanlarının tam lifti

$p \in T_q^p(M_n)$ keyfi tipli tensörleri inceleyelim.

$$\forall f,g \in T_0^0(M_n);\ {}^C(f+g) = {}^C f + {}^C g,\ \ {}^C(fg) = {}^V f\,{}^C g + {}^C f\,{}^V g$$

$$\forall X,Y \in T_0^1(M_n);\ {}^C(X+Y) = {}^C X + {}^C Y,\ {}^C(fX) = {}^C f\,{}^V X + {}^V f\,{}^C X$$

$$\forall \omega_1,\omega_2 \in T_1^0(M_n);\ {}^C(\omega_1+\omega_2) = {}^C\omega_1 + {}^C\omega_2,\ {}^C(fw) = {}^C f\,{}^V\omega + {}^V f\,{}^C\omega$$

eşitlikleri ile

$$\begin{aligned} {}^C &: T_0^0(M_n) \to T_0^0(T(M_n)) \\ {}^C &: T_0^1(M_n) \to T_0^1(T(M_n)) \\ {}^C &: T_1^0(M_n) \to T_1^0(T(M_n)) \end{aligned}$$

dönüşümlerinin her biri birer izomorfizmdir.

keyfi tipli tensörün tam lifti aşağıdaki özelliklere sahiptir.

$${}^C(P+Q) = {}^C P + {}^C Q$$

$${}^C(P \otimes Q) = {}^C P \otimes {}^V Q + {}^V P \otimes {}^C Q$$

2.4.9.a. (1,1) tipli tensörün tam lifti

$F \in T_1^1(M_n)$ tensör alanlarının tam lifti

$$F = F_i^{\,j}\partial_j \otimes dx^i$$

olmak üzere,

$${}^C F = {}^C\left(F_i^{\,j}\partial_j \otimes dx^i\right) = {}^C\left(F_i^{\,j}\partial_j\right)\otimes {}^V\left(dx^i\right) + {}^V\left(F_i^{\,j}d_j\right)\otimes {}^C dx^i$$

$$= \left[{}^C\left(F_i^{\,j}\right){}^V\partial_j + {}^V\left(F_i^{\,j}\right){}^C\partial_j\right]\otimes {}^V dx^i + {}^V\left(F_i^{\,j}\right){}^V\left(\partial_j\right)\otimes {}^C dx^i$$

$$= \left[y^s\partial_s F_i^{\,j}\partial_{\bar{j}} + F_i^{\,j}\partial_j\right]\otimes dx^i + F_i^{\,j}\partial_{\bar{j}} \otimes dx^{\bar{i}}$$

$$= y^s\partial_s F_i^{\,j}\partial_j \otimes dx^i + F_i^{\,j}\partial_j \otimes dx^i + F_i^{\,j}\partial_j \otimes dx^{\bar{i}}$$

$${}^C F = \begin{pmatrix} F_i^j & 0 \\ y^s\partial_s F_i^j & F_i^j \end{pmatrix} \tag{2.39}$$

elde edilir.

2.4.9.b. (0,2) tipli tensörün tam lifti

$G \in T_2^0\left(M_n\right)$, $G = G_{ij}dx^i \otimes dx^j$ olmak üzere,

$${}^C G = {}^C\left(G_{ij}dx^i \otimes dx^j\right)$$

$${}^C G = {}^C\left(G_{ij}dx^i\right)\otimes {}^V\left(dx^j\right) + {}^V\left(G_{ij}dx^i\right)\otimes {}^C\left(dx^j\right)$$

$$= \left({}^C G_{ij}\,{}^V dx^i + {}^V G_{ij}\,{}^C dx^i\right)\otimes {}^V dx^j + {}^V G_{ij}\,{}^V dx^i \otimes {}^C dx^j$$

$$= \left[y^s \partial_s G_{ij} dx^i + G_{ij} dx^{\bar{i}} \right] \otimes dx^j + \left[G_{ij} dx^i \right] \otimes dx^{\bar{j}}$$

$$= y^s \partial_s G_{ij} dx^i \otimes dx^j + G_{ij} dx^{\bar{i}} \otimes dx^j + G_{ij} dx^i \otimes dx^{\bar{j}}$$

$$^C G = \begin{pmatrix} y^s{}_s G_{ij} & G_{ij} \\ G_{ij} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.40}$$

şeklindedir (Yano and Ishihara 1973).

2.4.10. Kovaryant diferensiyellemenin dikey ve tam lifti

∇, M_n ' de bir afin konneksiyon ve ∇_x ' de $X \in T_0^1(M_n)$ elemanına göre M_n ' de kovaryant türev olsun. M_n 'de X ve ∇ 'nın lokal koordinatlarına göre bileşenleri

$$\nabla_X = \left(X^h, X^j \Gamma_{ji}^h \right)$$

şeklindedir. $^V\nabla_X$ ve $^C\nabla_X$ indirgenmiş koordinatlara göre bileşenleri

$$^V\nabla_X = \begin{pmatrix} 0 \\ X^h \end{pmatrix}, \; ^C\nabla_X = \begin{pmatrix} X^h \\ -X^j y^i \Gamma_{ji}^h \end{pmatrix} \tag{2.41}$$

şeklindedir (Yano and Ishihara 1973).

2.4.11. Afin konneksiyonun tam lifti

M_n, ∇ afin konneksiyonuna sahip $n-$boyutlu bir manifold olsun. $\forall X, Y \in T_0^1(M_n)$ için

$$ {}^{C}\nabla_{{}^{C}X}{}^{C}Y = {}^{C}\left(\nabla_X Y\right) \qquad (2.42)$$

şeklinde tanımlanan $T\left(M_n\right)$'de tek bir ${}^{C}\nabla$ afin konneksiyonu vardır. M_n'de $\left(x^h\right)$ lokal koordinatlarla ∇'nın koordinatları Γ_{JI}^{H}, $T\left(M_n\right)$'de $\left(x^h, y^h\right)$ lokal koordinatlarla ${}^{C}\nabla$'nın koordinatları ${}^{C}\Gamma_{JI}^{H}$ olsun. ${}^{C}\nabla$'nın katsayılarını bulalım:

$$ {}^{C}X^{j}\left(\partial_j {}^{C}Y^h + {}^{C}\Gamma_{ji}^{h}\,{}^{C}Y^{i} + {}^{C}\Gamma_{j\bar{i}}^{h}\,{}^{C}Y^{\bar{i}}\right) + {}^{C}X^{\bar{j}}\left(\partial_{\bar{j}} {}^{C}Y^h + {}^{C}\Gamma_{\bar{j}i}^{h}\,{}^{C}Y^{i} + {}^{C}\Gamma_{\bar{j}\bar{i}}^{h}\,{}^{C}Y^{\bar{i}}\right)$$

$$ = X^{j}\left(\partial_j Y^h + \Gamma_{ji}^{h} Y^{i}\right) \qquad (2.43)$$

olur. Diğer taraftan

$$ {}^{C}X^{j}\left(\partial_j {}^{C}Y^{\bar{h}} + {}^{C}\Gamma_{ji}^{\bar{h}}\,{}^{C}Y^{i} + {}^{C}\Gamma_{j\bar{i}}^{\bar{h}}\,{}^{C}Y^{\bar{i}}\right) + {}^{C}X^{\bar{j}}\left(\partial_{\bar{j}} {}^{C}Y^{\bar{h}} + {}^{C}\Gamma_{\bar{j}i}^{\bar{h}}\,{}^{C}Y^{i} + {}^{C}\Gamma_{\bar{j}\bar{i}}^{\bar{h}}\,{}^{C}Y^{\bar{i}}\right)$$

$$ = y^{s}\partial_s\left(X^{j}\left(\partial_j Y^h + \Gamma_{ji}^{h} Y^{i}\right)\right) \qquad (2.44)$$

elde edilir.

(2.43) ve (2.44) denklemlerinden

$$ {}^{C}\Gamma_{ji}^{h} = \Gamma_{ji}^{h},\ {}^{C}\Gamma_{j\bar{i}}^{h} = 0,\ {}^{C}\Gamma_{\bar{j}i}^{h} = 0,\ {}^{C}\Gamma_{\bar{j}\bar{i}}^{h} = 0,\ {}^{C}\Gamma_{ji}^{\bar{h}} = \partial\Gamma_{ji}^{h},\ {}^{C}\Gamma_{j\bar{i}}^{\bar{h}} = \Gamma_{ji}^{h},\ {}^{C}\Gamma_{\bar{j}i}^{\bar{h}} = \Gamma_{ji}^{h},\ {}^{C}\Gamma_{\bar{j}\bar{i}}^{\bar{h}} = 0 \qquad (2.45)$$

olur. (2.42) ve (2.45) eşitlikleri vasıtasıyla, ${}^{C}\Gamma_{JI}^{H}$'nın $T\left(M_n\right)$'de bir afin konneksiyon tanımladığını söyleyebiliriz. Bu afin konneksiyona ∇'nın tam lifti denir (Yano and Ishihara 1973).

2.4.12. Fonksiyonun ve vektör alanının yatay lifti

$f \in T_0^0(M_n)$ fonksiyonunu alalım. ∇, M_n' de bir afin konneksiyon ise f fonksiyonunun gradientini ∇f şeklinde yazabiliriz. Ayrıca (2.32)'de tanımlanan γ operatörü için

$$\nabla_\gamma f = \gamma(\nabla f) = y^s \partial_s f \tag{2.46}$$

eşitliği vardır. $f \in T_0^0(M_n)$ fonksiyonun yatay lifti,

$${}^H f = {}^C f - \gamma(\nabla f)$$

şeklinde tanımlanır (Yano ve Ishihara 1973).

${}^C f = y^s \partial_s f$ ve (2.41) eşitliklerinden

$${}^H f = {}^C f - \gamma(\nabla f)$$

$${}^H f = y^s \partial_s f - y^s \partial_s f$$

$${}^H f = 0 \tag{2.47}$$

olur. Benzer bir yolla $X \in T_0^1(M_n)$'nin yatay liftini bulabiliriz. X'in yatay liftini

$${}^H X = {}^C X - \gamma(\nabla X) \tag{2.48}$$

şeklinde tanımlanır. $T(M_n)$'de $\nabla_\gamma X = \gamma(\nabla X)$ eşitliği vardır. X'in ve ∇'nın M_n'deki lokal koordinatları sırasıyla X^h ve Γ_{ji}^h' dır. ${}^C X$ ve $\nabla_\gamma X$' in $T(M_n)$' de indirgenmiş koordinatlardaki koordinatları

$$\gamma(\nabla X) = \begin{pmatrix} 0 \\ y^s \nabla_s X^h \end{pmatrix} \text{ ve } {}^C X = \begin{pmatrix} X^h \\ y^s \partial_s X^h \end{pmatrix} \tag{2.49}$$

şeklindedir. Buradaki $\nabla_s X^h$, X^h'ın kovaryant türevidir ve

$$\nabla_s X^h = \partial_s X^h + \Gamma_{si}^h X^i$$

şeklindedir. Şimdi X vektör alanının yatay liftini bulalım. (2.44) ve (2.45)'den

$${}^H X = \begin{pmatrix} X^h \\ y^s \partial_s X^h \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ y^s \nabla_s X^h \end{pmatrix}$$

$${}^H X = \begin{pmatrix} {}^H X^h \\ {}^H X^{\bar{h}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^h \\ y^s \partial_s X^h - y^s \nabla_s X^h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^h \\ y^s \partial_s X^h - y^s \partial_s X^h - y^s \Gamma_{sm}^h X^m \end{pmatrix}$$

$${}^H X = \begin{pmatrix} X^h \\ -y^s \Gamma_{sm}^h X^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^h \\ -\Gamma_m^h X^m \end{pmatrix} \tag{2.50}$$

bulunur. X vektör alanının yatay lifti bir projectable (izdüşümsel) vektör alanıdır. $p \in T(M_n)$ noktasında ${}^H X$' in değeri yalnızca $p = \pi(\tilde{p}) \in M_n$ noktasında X vektör alanının değeri verilerek tanımlanabilir. (2.48) ile (2.50) karşılaştırırsak, herhangi bir $X \in T_0^1(M_n)$ için

$$^{H}X = {}^{C}\left(\tilde{\nabla}_x\right)$$

eşitliğini elde ederiz. Buradaki ${}^{C}\left(\tilde{\nabla}_x\right)$, $\tilde{\nabla}_x$ 'in tam liftidir ve $\forall X, Y \in T_0^1\left(M_n\right)$ için

$$\tilde{\nabla}_x Y = \nabla_y X + \left[X, Y\right] \tag{2.51}$$

şeklinde tanımlıdır.

(2.50)'den, herhangi bir $X \in T_0^1\left(M_n\right)$ vektör alanının ^{H}X yatay lifti

$$\delta y^h = dy^h + \tilde{\Gamma}_{ji}^h dx^j y^i$$

eşitliğiyle tanımlanan $T\left(M_n\right)$'de D dağılımına sahiptir, buradaki $\tilde{\Gamma}_{ji}^h = \Gamma_{ij}^h$ koordinatları (2.51) ile tanımlanan $\tilde{\nabla}$' nın koordinatlarıdır. D dağılımı yatay dağılım olarak adlandırılır. Eğer $T\left(M_n\right)$' deki $\tilde{X}$ vektör alanı bir D dağılımına sahip ise, X vektör alanına yatay vektör alanı denir (Yano and Ishihara 1973).

2.4.13. 1-Formun yatay lifti

ω, ∇ konneksiyonuna sahip M_n 'de 1-form olsun.

ω 'nin yatay lifti

$$^{H}\omega = {}^{C}\omega - \nabla_\gamma \omega \tag{2.52}$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$ {}^{C}\omega = \left(\partial\omega_i, \omega_i\right), \ \nabla_{\gamma}\omega = \left(y^s \nabla_s \omega_i, 0\right) \tag{2.53}$$

eşitlikleri vardır. $\nabla_s \omega_i$, ω_i 'nin kovaryant türevidir ve

$$\nabla_s \omega_i = \partial_s \omega_i - \Gamma_{ji}^h \omega_h \tag{2.54}$$

şeklindedir. (2.52), (2.53) ve (2.54) ifadelerini kullanarak, indirgenmiş koordinatlarda ${}^{H}\omega$' nin bileşenlerini bulalım:

$$\begin{aligned}
{}^{H}\omega = \left({}^{H}\omega_i, {}^{H}\omega_{\bar{i}}\right) &= {}^{C}\omega - \nabla_{\gamma}\omega = \left(y^s \partial_s \omega_i, \omega_i\right) - \left(y^s \nabla_s \omega_i, 0\right) \\
&= \left(y^s \partial_s \omega_i, \omega_i\right) - \left(y^s \partial_s \omega_i - y^s \Gamma_{si}^h \omega_h, 0\right) \\
&= \left(y^s \partial_s \omega_i - y^s \partial_s \omega_i + y^s \Gamma_{si}^h \omega_h, \omega_i\right) \\
&= \left(\Gamma_i^h \omega_h, \omega_i\right)
\end{aligned} \tag{2.55}$$

olur (Yano and Ishihara 1973).

2.4.14. Yatay 1-form alanı

$\tilde{\omega}$ 1-formunu ve $X \in T_0^1\left(M_n\right)$ vektör alanını alalım. Eğer $\tilde{\omega}\left({}^{H}X\right) = 0$ ise $\tilde{\omega}$ 'ya yatay 1-form alanı denir (Yano and Ishihara 1973).

2.4.15. Tensör alanlarının yatay lifti

$S \in T_q^P\left(M_n\right)$ tensörünü

$$S = S^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q} \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_p} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q} \tag{2.56}$$

biçiminde yazabiliriz. ∇, M_n 'de bir afin konneksiyon olsun. (2.32) eşitliğinden $T(M_n)$' de $(p, q+1)$ tipli $\nabla_\gamma S$ tensör alanını indirgenmiş koordinatlarda

$$\nabla_\gamma S = \left(y^I \nabla_I S^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q} \right) \frac{\partial}{\partial y^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial y^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q} \tag{2.57}$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Özel durumda $S \in T^0_0(M_n)$ fonksiyonu için bunu uygularsak

$${}^H f = {}^C f - \nabla_\gamma f = 0$$

şeklindeydi. Buradan da

$$\nabla_\gamma f = {}^C f$$

olur.

(2.56) ve (2.57) ifadelerini kullanarak, herhangi $P, Q \in T(M_n)$ tensör alanları için

$$\nabla_\gamma (P \otimes Q) = (\nabla_\gamma P) \otimes {}^V Q + {}^V P \otimes (\nabla_\gamma Q) \tag{2.58}$$

ifadesi tanımlanabilir.

Şimdi M_n 'de keyfi tipli bir S tensör alanı için yatay lifti tanımlayalım. Keyfi tipli bir S tensör alanının $T(M_n)$'deki yatay lifti

$${}^H S = {}^C S - \nabla_\gamma S \tag{2.59}$$

şeklinde tanımlanır (Yano and Ishihara 1973).

2.4.15.a. (1,1) tipli tensörün yatay lifti

$F_i^{\,j}$ fonksiyon olmak üzere,

$${}^{H}F = {}^{H}\left(F_j^i \partial_i \otimes dx^j\right) = {}^{H}F_j^i \; {}^{V}\left(\partial_i \otimes dx^j\right) + {}^{V}F_j^i \; {}^{H}\left(\partial_i \otimes dx^j\right)$$

$$= {}^{H}F_j^i \left({}^{V}\left(\partial_i\right) \otimes {}^{V}\left(dx^j\right)\right) + {}^{V}F_j^i \left({}^{H}\left(\partial_i\right) \otimes {}^{V}\left(dx^j\right) + {}^{V}\left(\partial_i\right) \otimes {}^{H}\left(dx^j\right)\right)$$

elde edilir.

$${}^{H}F_j^i = 0, \; {}^{V}F_j^i = F_j^i, \; {}^{V}\left(\partial_i\right) = \partial_{\bar{i}}, \; {}^{H}\left(\partial_i\right) = \partial_i - \Gamma_{si}^{\,h} y^s \partial_{\bar{h}}$$

$${}^{V}\left(dx^i\right) = dx^i, \; {}^{H}\left(dx^i\right) = y^s \Gamma_{sh}^{\,i} dx^h + dx^{\bar{i}}$$

olduğundan

$$F_j^i \left(\left(\partial_i - \Gamma_{si}^{\,h} y^s \partial^{\bar{h}} \right) \otimes dx^j \right) + \partial_{\bar{i}} \otimes \left(y^s \Gamma_{sh}^{\,j} dx^h + dx^j \right)$$

$$= F_j^i \left(\partial_i \otimes dx^j\right) - \Gamma_{si}^{\,h} y^s F_j^i \left(\partial_{\bar{h}} \otimes dx^j\right) + F_j^i y^s \Gamma_{sh}^{\,j} \left(\partial_{\bar{i}} \otimes dx^j\right) + F_j^i \left(\partial_{\bar{i}} \otimes dx^{\bar{j}}\right)$$

$$= F_j^i \left(\partial_i \otimes dx^j\right) + \left(y^s \Gamma_{sj}^{\,h} - y^s \Gamma_{sh}^{\,i} F_j^h \right) \left(\partial_{\bar{i}} \otimes dx^j\right) + F_j^i \left(\partial_{\bar{i}} \otimes dx^{\bar{j}}\right)$$

elde edilir.

Buradan $^{H}F=\begin{pmatrix} ^{H}F_{j}^{i} & ^{H}F_{\bar{j}}^{i} \\ ^{H}F_{j}^{\bar{i}} & ^{H}F_{\bar{j}}^{\bar{i}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} F_{j}^{i} & 0 \\ y^{s}\Gamma_{sj}^{h}F_{h}^{i}-y^{s}\Gamma_{sh}^{i}F_{j}^{h} & F_{j}^{i} \end{pmatrix}$ (2.60)

olur (Yano and Ishihara 1973).

2.4.15.b. (0,2) tipli G_{ij} tensörün yatay lifti

G_{ij} fonksiyon olmak üzere,

$$^{H}G={}^{H}\left(G_{ij}dx^{i}\otimes dx^{j}\right)={}^{H}G_{ij}\,{}^{V}\left(dx^{i}\otimes dx^{j}\right)+{}^{V}G_{ij}\,{}^{H}\left(\left(dx^{i}\otimes dx^{j}\right)\right)$$

$$={}^{H}G_{ij}\left({}^{V}\left(dx^{i}\right)\otimes{}^{V}\left(dx^{j}\right)\right)+{}^{V}G_{ij}\left({}^{H}\left(dx^{i}\right)\otimes{}^{V}\left(dx^{j}\right)+{}^{V}\left(dx^{i}\right)\otimes{}^{H}\left(dx^{j}\right)\right)$$

olur.

$$^{V}G_{ij}=G_{ij},\ {}^{H}G_{ij}=0,$$

$$^{V}\left(dx^{i}\right)=dx^{i},\ {}^{H}\left(dx^{i}\right)=\left(y^{s}\Gamma_{sh}^{i}dx^{h}+dx^{\bar{i}}\right)$$

olduğundan

$$G_{ij}\left(\left(y^{s}\Gamma_{sh}^{\ i}dx^{h}+dx^{\bar{i}}\right)\otimes dx^{j}\right)+G_{ij}\left(dx^{i}\otimes\left(y^{s}\Gamma_{sh}^{\ j}dx^{h}\otimes dx^{j}\right)\right)$$

$$=y^{s}\Gamma_{sh}^{\ i}G_{ij}\left(dx^{h}\otimes dx^{j}\right)+G_{ij}\left(dx^{\bar{i}}\otimes dx^{j}\right)+y^{s}\Gamma_{sh}^{ij}G_{ij}\left(dx^{i}\otimes dx^{h}\right)+G_{ij}\left(dx^{i}\otimes dx^{\bar{j}}\right)$$

$$=\left(y^{s}\Gamma_{si}^{\ h}G_{hj}+y^{s}\Gamma_{sj}^{\ h}G_{ih}\right)\left(dx^{i}\otimes dx^{j}\right)+G_{ij}\left(dx^{\bar{i}}\otimes dx^{j}\right)+G_{ij}\left(dx^{i}\otimes dx^{\bar{j}}\right)$$

elde edilir.

Buradan $^{H}G_{ij}=\begin{pmatrix} y^{s}\Gamma_{si}^{h}G_{hj}+y^{s}\Gamma_{sj}^{h} & G_{ij} \\ G_{ij} & 0 \end{pmatrix}$ (2.61)

olur (Yano and Ishihara 1973).

2.5. Kotanjant demet

M_n, C^{∞} sınıfından $n-$boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold ve M_n manifoldunun P noktasındaki kotanjant uzayı $T_P^{*}(M_n)$ olmak üzere

$$T^{*}(M_n)=\bigcup_{p\in M_n}T_P^{*}(M_n) \tag{2.62}$$

İle tanımlanan $T^{*}(M_n)$ kümesine kotanjant demet denir (Yano ve Ishihara 1973).

$T^{*}(M_n)$'nin herhangi bir $\tilde{p}\in T_P^{*}(M_n)$ noktası için M_n manifoldu üzerindeki $T^{*}(M_n)$ tabii demet yapısını doğuran $\pi:T^{*}(M_n)\to M_n$, $\pi(\tilde{p})=p$ doğal demet izdüşümünü tanımlar. $\pi^{-1}(p)=\tilde{p}\in T_p^{*}(M_n)$ kümesine M_n baz uzayının p noktasındaki fibresi denir (Yano and Ishihara 1973)

2.5.1. Kovektör alanının dikey lifti

$\omega\in\Im_1^0(M_n)$ üzerindeki $\tilde{\omega}^{A}=\tilde{\omega}B\xi^{BA}$ lokal bileşenlerine sahip ve koordinatlarla ifadesi $\omega=\omega_i dx^i$ şeklindeki 1-form olmak üzere ω 1-formunun dikey lifti olan $^{V}\omega$ vektör alanı $T^{*}(M_n)$ kotanjant demetinde indirgenmiş koordinatlara göre

$$^{V}\omega = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_i \end{pmatrix} \tag{2.63}$$

bileşenlerine sahiptir (Yano and Ishihara 1973).

2.5.2 Afinor alanının tam lifti

M_n manifoldu üzerinde $F \in \Im_1^1(M_n)$ afinor alanı verilmiş olsun. $T^*(M_n)$ kotanjant demetinde F afinor alanının tam lifti olan ${}^cF \in \Im_1^1(T^*(M_n))$ afinor alanı indirgenmiş koordinatlara göre

$$^{c}F = \begin{pmatrix} F_i^h & 0 \\ p_s\left(\partial_i F_h^s - \partial_h F_i^s\right) & F_h^i \end{pmatrix} \tag{2.64}$$

bileşenlerine sahiptir (Yano and Ishihara 1973).

2.5.3. Afinor alanının yatay lifti

$F \in \Im_1^1(M_n)$'in $T^*(M_n)$ kotanjant demeti üzerindeki ${}^HF$ yatay lifti

$$^{H}F = {}^{C}F + \gamma[\nabla F] \tag{2.65}$$

ile tanımlıdır. Burada $[\nabla F]$, keyfi $X, Y \in \Im_0^1(M_n)$ vektör alanları için

$$[\nabla F](X,Y) = -\nabla_X(FY) + \nabla_Y(FX) \tag{2.66}$$

ile tanımlı (1,2) tipli bir tensör alanıdır. F 'nin ${}^HF$ yatay lifti, $T^*(M_n)$ kotanjant demeti üzerindeki indirgenmiş koordinatlara göre

$$ {}^{H}F = \begin{pmatrix} F_i^h & 0 \\ -\Gamma_{is} F_h^s + \Gamma_{hs} F_i^s & F_h^i \end{pmatrix} \tag{2.67} $$

bileşenlerine sahiptir (Yano and Ishihara 1973).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Riemann Konneksiyonu Eğriliğinin Özellikleri

i. $R_{(ij)k}{}^{s}=0$, **ii.** $R_{ij(k\ell)}=0$, **iii.** $R_{ijk\ell}=R_{k\ell ji}$,

iv. $R_{[ijk]}{}^{s}=0$, **v.** $\nabla_{[\ell}R_{ij]}{}^{s}{}_{k}=0$,

İspat i . $R_{ijk}^{\,s}=\partial_i\Gamma_{jk}^{\,s}-\partial_j\Gamma_{ik}^{\,s}+\Gamma_{im}^{\,s}\Gamma_{jk}^{\,m}-\Gamma_{jm}^{\,s}\Gamma_{ik}^{\,m}$

$$=\left(\partial_j\Gamma_{ik}^{\,s}-\partial_i\Gamma_{jk}^{\,s}+\Gamma_{jm}^{\,s}\Gamma_{ik}^{\,m}-\Gamma_{im}^{\,s}\Gamma_{jk}^{\,m}\right)=-R_{jik}^{\,s}$$

olur. Buradan $R_{ijk}^{\,s}+R_{jik}^{\,s}=0$ olduğundan $R_{(ij)k}^{\,s}=0$ elde edilir.

ii . $2\nabla_{[k}\nabla_{\ell]}g_{ij}=-R_{k\ell i}{}^{s}g_{sj}-R_{k\ell j}{}^{s}g_{is}-2S_{k\ell}{}^{s}\nabla_s g_{ij}$ ise

$$R_{k\ell i}{}^{s}g_{sj}+R_{k\ell j}{}^{s}g_{is}=0$$

elde edilir. Buradan $R_{k\ell ij}+R_{k\ell ji}=0$ ise $2R_{k\ell(ij)}=0$ elde edilir. $R_{k\ell(ij)}=0$ olarak bulunur.

iii . $R_{ijk}{}^{\ell}+R_{jki}{}^{\ell}+R_{kij}{}^{\ell}=0$ her iki tarafı $g_{s\ell}$ ile çarparsak;

① $R_{ijks}+R_{jkis}+R_{kijs}=0$,

② $R_{sjki}+R_{jksi}+R_{ksji}=0$ $_{\text{i}}$ ile $_{\text{s}}$ yer değişirse,

③ $R_{iskj}+R_{skij}+R_{kisj}=0$ $_{\text{j}}$ ile $_{\text{s}}$ yer değişirse, ④ $R_{ijks}+R_{jsik}+R_{sijk}=0$ k ile s yer değişirse,

①+②−③−④ işlemi yapılırsa;

$R_{ijks}+R_{jkis}+R_{kijs}+R_{sjki}+R_{jksi}+R_{ksji}-R_{iskj}-R_{skij}-R_{kisj}-R_{ijks}-R_{jsik}-R_{sijk}=0$ olur.

Buradan $2R_{ijks}+2R_{kijs}-2R_{iskj}=0$ ise

$$R_{ijks}+R_{kijs}-R_{iskj}=0$$

elde edilir.

①'den $R_{ijks}+R_{kijs}=-R_{jkis}$

olup

$$-R_{jkis}-R_{iskj}=0 \quad \text{ise} \quad -R_{jkis}+R_{isjk}=0$$

eşitliğinden

$$R_{isjk}=R_{jkis}$$

elde edilir (Salimov and Mağden 2008).

iv. $R_{[ijk]}{}^{s}=\frac{1}{3!}\left(R_{ijk}{}^{s}+R_{jki}{}^{s}+R_{kij}{}^{s}-R_{jik}{}^{s}-R_{ikj}{}^{s}-R_{kji}{}^{s}\right)$

burada $R_{ijk}^{\ \ \ s} = -R_{jik}^{\ \ \ s}$, $R_{jki}^{\ \ \ s} = R_{kji}^{\ \ \ s}$, $R_{kij}^{\ \ \ s} = -R_{ikj}^{\ \ \ s}$ olduğundan

$$R_{[ijk]}^{\ \ \ \ \ s} = \frac{1}{3!}\left(2R_{ijk}^{\ \ \ s} - 2R_{jki}^{\ \ \ s} + 2R_{kij}^{\ \ \ s}\right) = \frac{1}{3}\left(R_{ijk}^{\ \ \ s} + R_{jki}^{\ \ \ s} + R_{kij}^{\ \ \ s}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\partial_i \Gamma_{jk}^{\ \ s} - \partial_j \Gamma_{ik}^{\ \ s} + \partial_j \Gamma_{ki}^{\ \ s} - \partial_k \Gamma_{ji}^{\ \ s} + \partial_k \Gamma_{ij}^{\ \ s} - \partial_i \Gamma_{kj}^{\ \ s}\right)$$

eşitliğinden

$$R_{[ijk]}^{\ \ \ \ \ s} = 0$$

elde edilir.

v. $\nabla_{[\ell} R_{ij]k}^{\ \ \ \ \ s} = \frac{1}{3!}\left(\nabla_\ell R_{ijk}^{\ \ \ s} + \nabla_i R_{j\ell k}^{\ \ \ s} + \nabla_j R_{\ell ik}^{\ \ \ s} - \nabla_i R_{\ell jk}^{\ \ \ s} - \nabla_\ell R_{jik}^{\ \ \ s} - \nabla_j R_{i\ell k}^{\ \ \ s}\right)$

olup

$$\nabla_\ell R_{ijk}^{\ \ \ s} = -\nabla_\ell R_{jik}^{\ \ \ s}$$

olduğundan

$$\nabla_{[\ell} R_{ij]k}^{\ \ \ \ \ s} = \frac{1}{3!}\left(2\nabla_\ell R_{ijk}^{\ \ \ s} + 2\nabla_i R_{j\ell k}^{\ \ \ s} + 2\nabla_j R_{\ell ik}^{\ \ \ s}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\nabla_\ell\left(\partial_i \Gamma_{jk}^{\ \ s} - \partial_j \Gamma_{ik}^{\ \ s}\right) + \nabla_i\left(\partial_j \Gamma_{\ell k}^{\ \ s} - \partial_\ell \Gamma_{jk}^{\ \ s}\right) + \nabla_j\left(\partial_\ell \Gamma_{ik}^{\ \ s} - \partial_i \Gamma_{\ell k}^{\ \ s}\right)\right)$$

olur. Burada $\nabla_X = Xf$ özelliğinden

$$\nabla_{[\ell} R_{ij]k}^{\ s} = \frac{1}{3}\left(\partial_\ell \partial_i \Gamma_{jk}^{\ s} - \partial_\ell \partial_j \Gamma_{ik}^{\ s} + \partial_i \partial_j \Gamma_{\ell k}^{\ s} - \partial_i \partial_\ell \Gamma_{jk}^{\ s} + \partial_j \partial_\ell \Gamma_{ik}^{\ s} - \partial_j \partial_i \Gamma_{\ell k}^{\ s}\right)$$

elde edilir. Γ_{ij}^{k} ‘lar fonksiyon olup Shwartz teoreminden $\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$, $\nabla_{[\ell} R_{ij]k}^{\ s} = 0$ olur. Buradan Bianchi−Padov özdeşliği ispatlanmş olur (Salimov and Mağden 2008).

3.2. Tam Lift

Önerme 3.2.1: $\tilde{X}, \tilde{Y} \in T_0^1\left(T\left(M_n\right)\right)$ olmak üzere,

$\tilde{X}^C f = \tilde{Y}^C f \Rightarrow \tilde{X} = \tilde{Y}$' dir.

İspat: $\tilde{X}^C f = \tilde{Y}^C f \Rightarrow \left(\tilde{X} - \tilde{Y}\right)^C f = 0 \Rightarrow \tilde{Z}^C f = 0$’dır.

Burada amacımız $\tilde{Z} = 0$ olduğunu göstermektir.

$\bar{Z}^I \partial_I^C f = 0$ olduğunu göstermeliyiz. Bu ifadeden

$$Z^i \partial_i^C f + Z^{\bar{i}} \partial_{\bar{i}}^C f = 0$$

yazılabilir.

Buradan $Z^i \partial_i \left(Y^s \partial_s f\right) + Z^{\bar{i}} \partial_{\bar{i}} \left(Y^s \partial_s f\right) = 0$

elde edilir.

Böylece $Y^{s}Z^{i}\left(\partial_{i}\partial_{s}f\right)+Z^{i}\delta_{i}^{s}\partial_{s}f=0$

yazılabilir.

Buradanda $Z^{i}=0,\ Z^{\bar{i}}=0$ olur ve $\tilde{Z}=0$ olduğu gösterilmiş olur. (3.1)

Teorem 3.2.1 : Almost kompleks yapının tam lifti yine almost kompleks yapıdır.

İspat : Almost kompleks yapıda $F^{2}=-I$ olduğundan $F^{2}=-I$ ise $\left({}^{C}F\right)^{2}=-I$ olduğunu gösterilmelidir.

$$\left({}^{C}F\right)^{2}\left({}^{C}X\right)={}^{C}F\left({}^{C}F\left({}^{C}X\right)\right)={}^{C}F\left({}^{C}\left(FX\right)\right)$$

$$={}^{C}\left(F\left(FX\right)\right)={}^{C}\left(F^{2}\left(X\right)\right)$$

olarak bulunur.

$\left(M_{n},F\right)$ almost kompleks yapı olduğundan $F^{2}=-I$ ' dır.

Buradan $\left({}^{C}F\right)^{2}\left({}^{C}X\right)={}^{C}\left(-I\left(X\right)\right)=-I\left({}^{C}X\right)$ eşitliğinden

$\left({}^{C}F\right)^{2}=-I$ elde edilir.

Teorem 3.2.2 : Nijenhuis Tensörünün tam lifti demetdeki almost kompleks yapının Nijenhuis tensörüne eşittir.

İspat : $N \in T_2^1(M_n)$ (Nijenhuis Tensörü) olmak üzere,

$N_\varphi(X,Y) = [\varphi X, \varphi Y] + \varphi[\varphi X, Y] + \varphi[X, \varphi Y] + \varphi^2[X,Y]$ şeklindedir.Buradan

$$N_{C_F}\left({}^C X, {}^C Y\right) = \left[{}^C F\, {}^C X, {}^C F\, {}^C Y\right] + {}^C F\left[{}^C F\, {}^C X, {}^C Y\right] + {}^C F\left[{}^C X, {}^C F\, {}^C Y\right] - \left[{}^C X, {}^C Y\right]$$

$$= \left[{}^C(FX), {}^C(FY)\right] + {}^C F\left[{}^C(FX), {}^C Y\right] + {}^C F\left[{}^C X, {}^C(FY)\right] - \left[{}^C X, {}^C Y\right]$$

$$= {}^C([FX,FY]) + {}^C F\, {}^C([FX,Y]) + {}^C F\, {}^C([X,FY]) - {}^C[X,Y]$$

$$= {}^C([FX,FY]) + {}^C(F[FX,Y]) + {}^C(F[X,FY]) - {}^C([X,Y])$$

$$= {}^C([FX,FY] + F[FX,Y] + F[X,FY] - [X,Y])$$

$$= {}^C(N_F(X,Y)) \tag{3.2}$$

olur (Yano and Ishihara 1973).

3.3. Yatay Lift

(M_n, ∇) afin konneksiyonlu uzay olsun. $f \in T_0^0(M_n)$,∇f gradientine γ operatörünü uygularsak;

$$\nabla_\gamma f = \gamma(\nabla f) = y^s \partial_s f$$

olur.

$f \in T_0^0(M_n)$ fonksiyonunun tanjant demete yatay lifti ${}^H f = {}^C f - \nabla_\gamma f$ şeklinde tanımlanır.

$$ {}^H f = y^s \partial_s f - y^s \partial_s = 0 $$

yani fonksiyonun tanjant demete horizontal lifti sıfırdır (Yano and Ishihara 1973).

3.3.1. Afin konneksiyonunun yatay lifti

∇, M_n manifoldu üzerinde bir afin konneksiyon olsun. Bu afin konneksiyonun tam lifti

$$ {}^C\nabla_{{}^H X}\,{}^H Y = {}^H(\nabla_X Y) + \gamma\big(R(\,,X)Y\big) \tag{3.3} $$

eşitliği ile tanımlanır (Yano and Ishihara 1973).

(M_n,∇) afin konneksiyonlu uzay olsun. ∇'nın yatay lifti $X,Y \in T_0^1(M_n)$ olmak üzere aşağıdaki özellikleri sağlar.

i. ${}^H\nabla_{V_X}{}^V Y = 0$ **ii.** ${}^H\nabla_{V_X}{}^H Y = 0$ **iii.** ${}^H\nabla_{H_X}{}^V Y = {}^V(\nabla_X Y)$ **iv.** ${}^H\nabla_{H_X}{}^H Y = {}^H(\nabla_X Y)$
yatay liftin sağladığı özellikleri ispatlayacak olursak;

İspat i. ${}^H\nabla_{V_X}\,{}^V Y = 0$ olduğu gösterilmeli.

$$ {}^H\nabla_{V_X}\,{}^V Y = {}^V X^i\,{}^H\nabla_i\,{}^V\nabla^{\bar J} + {}^V X^{\bar i}\,{}^H\nabla_{\bar i}\,{}^V Y^J = 0 $$

eşitliğinde $\bar J = j$ alınırsa;

$$ {}^{V}X^{i}\,{}^{H}\nabla_{i}\,{}^{V}Y^{j} + {}^{V}X^{\bar{i}}\,{}^{H}\nabla_{\bar{i}}\,{}^{V}Y^{j} = 0 $$

elde edilir.

$J = \bar{j}$ alınırsa;

$$ {}^{V}X^{i}\,{}^{H}\nabla_{i}\,{}^{V}Y^{\bar{J}} + {}^{V}X^{\bar{i}}\,{}^{H}\nabla_{\bar{i}}\,{}^{V}Y^{\bar{J}} = X^{i}\,{}^{H}\nabla_{\bar{i}}Y^{j} = 0 $$

elde edilir. Buradan

$$ {}^{H}\Gamma_{\bar{i}M}^{j} = 0 $$

$$ {}^{H}\Gamma_{\bar{i}M}^{j} = 0,\ {}^{H}\Gamma_{\bar{i}\bar{M}}^{j} = 0 $$

$$ {}^{H}\Gamma_{ij}^{M} = \Gamma_{ij}^{M},\ {}^{H}\Gamma_{i\bar{j}}^{\bar{M}} = \Gamma_{ij}^{M},\ {}^{H}\Gamma_{\bar{i}j}^{\bar{M}} = \Gamma_{ij}^{M} $$

$$ {}^{H}\Gamma_{ij}^{\bar{M}} = y^{s}\partial_{s}\Gamma_{ij}^{M} - y^{k}R_{kij}^{M},\ {}^{H}\Gamma_{\bar{i}\bar{j}}^{\bar{M}} = 0,\ {}^{H}\Gamma_{\bar{i}j}^{M} = 0,\ {}^{H}\Gamma_{i\bar{j}}^{M} = 0 \tag{3.4} $$

elde edilir.

ii. ${}^{H}\nabla_{V_X}\,{}^{H}Y = 0$ olduğu gösterilmeli.

$$ {}^{H}\nabla_{V_X}\,{}^{H}Y = {}^{V}X^{i}\,{}^{H}\nabla_{i}\,{}^{H}Y^{J} + {}^{V}X^{\bar{i}}\,{}^{H}\nabla_{\bar{i}}\,{}^{H}Y^{J} = 0\text{'dır.} $$

Burada $\bar{J} = j$ alınırsa;

$$ X^{i}\left({}^{H}\nabla_{\bar{i}}\,{}^{H}Y^{j}\right) = 0 \Rightarrow X^{i}\left(\partial_{\bar{i}}\,{}^{H}Y^{j} + \Gamma_{\bar{i}k}^{j}\,{}^{H}Y^{k}\right) = 0 $$

$$\Gamma_{\bar{i}k}^{j}=0,\ \ \Gamma_{\bar{i}\bar{k}}^{j}=0,\ \ \Gamma_{\bar{i}\bar{k}}^{\bar{j}}=0$$

elde edilir.

$J=j$ alınırsa;

$$X^i\left({}^H\nabla_{\bar{i}}\,{}^HY^{\bar{j}}\right)=0\Rightarrow X^i\left(\partial_{\bar{i}}\,{}^HY^{\bar{j}}+\Gamma_{\bar{i}k}^{\bar{j}}\,{}^HY^k\right)=0 \tag{3.5}$$

elde edilir.

iii. ${}^H\nabla_{{}^HX}\,{}^VY={}^V\left(\nabla_XY\right)$ olduğu gösterilmeli.

$${}^V\left(\nabla_XY\right)=\begin{pmatrix}0\\ X^i\left(\partial_iY^j+\Gamma_{iM}^{j}Y^M\right)\end{pmatrix}$$

$${}^H\nabla_{{}^HX}\,{}^VY={}^HX^i\,{}^H\nabla_i\,{}^VY^I+{}^HX^{\bar{i}}\,{}^H\nabla_{\bar{i}}\,{}^VY^I \text{ olduğundan}$$

$J=j$ ise 0=0 olur.

$J=\bar{j}$ ise

$$X^i\left({}^H\nabla_i\,{}^VY^{\bar{j}}\right)-\Gamma_{st}^{i}Y^sX^t\left({}^H\nabla_{\bar{i}}\,{}^VY^{\bar{j}}\right)=X^i\left(\partial_iY^j+\Gamma_{iM}^{j}Y^M\right)$$

$$=X^i\left(\partial_iY^j+{}^H\Gamma_{iM}^{\bar{j}}\,{}^VY^M\right)-\Gamma_{st}^{i}Y^sX^t\left(\partial_{\bar{i}}Y^j+{}^H\Gamma_{iM}^{\bar{j}}\,{}^VY^M\right)$$

$$=X^i\left(\partial_iY^j+\Gamma_{iM}^{\bar{j}}\,{}^VY^M\right)-\Gamma_{st}^{i}Y^sX^t\left({}^H\Gamma_{\bar{i}M}^{\bar{j}}\,{}^VY^M+{}^H\Gamma_{\bar{i}\bar{M}}^{\bar{j}}\,{}^VY^{\bar{M}}\right)$$

$$= X^i\left(\partial_i Y^j + \Gamma_{i\bar{M}}^{\bar{J}} Y^M\right) - \Gamma_{st}^{i} Y^s X^t\, {}^H\Gamma_{\bar{i}\bar{M}}^{\bar{J}} Y^M = X^i\left(\partial_i Y^j + \Gamma_{iM}^{j} Y^M\right)$$

$${}^H\Gamma_{i\bar{M}}^{\bar{J}} = \Gamma_{iM}^{j},\ {}^H\Gamma_{\bar{i}\bar{M}}^{\bar{J}} = 0 \tag{3.6}$$

elde edilir.

iv. ${}^H\nabla_{{}^H X}{}^H Y = {}^H\left(\nabla_X Y\right)$ olduğu gösterilmeli.

$${}^H\left(\nabla_X Y\right) = \left(X^i\left(\partial_i Y^j + \Gamma_{ik}^{j} Y^k\right) - \Gamma_{sM}^{j} Y^s X^k\left(\partial_k Y^M + \Gamma_{kt}^{M} Y^t\right)\right)$$

olduğundan

$${}^H\nabla_{{}^H X}{}^H Y = {}^H X^i\, {}^H\nabla_i {}^H Y^J + {}^H X^{\bar{i}} \nabla_{\bar{i}} {}^H Y^I$$

$$= X^i\left(\partial_i {}^H Y^I + {}^H\Gamma_{iM}^{I}\, {}^H Y^M\right) - \Gamma_{sM}^{i} Y^s X^M\left(\partial_{\bar{i}} {}^H Y^I + {}^H\Gamma_{\bar{i}M}^{I}\, {}^H Y^M\right)$$

yazılabilir. Buradan $I = j$ ise

$$X^i\left(\partial_i {}^H Y^j + {}^H\Gamma_{iM}^{j}\, {}^H Y^M\right) - \Gamma_{sM}^{i} Y^s X^M\left(\partial_i {}^H Y^j + {}^H\Gamma_{\bar{i}M}^{j}\, {}^H Y^M\right)$$

$$= X^i\left(\partial_i {}^H Y^j + \Gamma_{ik}^{j} Y^k\right)$$

$$= X^i\left(\partial_i Y^j + {}^H\Gamma_{iM}^{j} Y^M + {}^H\Gamma_{i\bar{M}}^{j}\, {}^H Y^{\bar{M}}\right) - \Gamma_{sM}^{i} Y^s X^M\left(\partial_{\bar{i}} Y^j + {}^H\Gamma_{\bar{i}M}^{j} Y^M + {}^H\Gamma_{\bar{i}\bar{M}}^{j}\, {}^H Y^{\bar{M}}\right)$$

olarak bulunur.

Afin konneksiyonun yatay liftinin eğrilik tensörünü hesaplayalım:

i. ${}^{H}\nabla_{V_X}{}^{V}Y=0$ **ii.** ${}^{H}\nabla_{V_X}{}^{H}Y=0$ **iii.** ${}^{H}\nabla_{H_X}{}^{V}Y={}^{V}\left(\nabla_X Y\right)$ **iv.** ${}^{H}\nabla_{H_X}{}^{H}Y={}^{H}\left(\nabla_X Y\right)$

eşitlikleri kullanılırsa;

${}^{H}\nabla$ 'nın eğrilik tensörü

$\tilde{R}\left(\tilde{X},\tilde{Y}\right)\tilde{Z}={}^{H}\nabla_{\tilde{X}}{}^{H}\nabla_{\tilde{Y}}\tilde{Z}-{}^{H}\nabla_{\tilde{Y}}{}^{H}\nabla_{\tilde{X}}\tilde{Z}-{}^{H}\nabla_{\left[\tilde{X},\tilde{Y}\right]}\tilde{Z}$ şeklindedir.

Eğrilik tensörünün dikey ve yatay lifti için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

1) $\tilde{R}\left({}^{V}x,{}^{V}y\right){}^{V}z={}^{H}\nabla_{V_x}{}^{H}\nabla_{V_y}{}^{V}z-{}^{H}\nabla_{V_y}{}^{H}\nabla_{V_x}{}^{V}z-{}^{H}\nabla_{\left[V_x,V_y\right]}{}^{V}z=0$,

2) $\tilde{R}\left({}^{V}x,{}^{V}y\right){}^{H}z={}^{H}\nabla_{V_x}{}^{H}\nabla_{V_y}{}^{H}z-{}^{H}\nabla_{V_y}{}^{H}\nabla_{V_x}{}^{H}z-{}^{H}\nabla_{\left[V_x,V_y\right]}{}^{H}z=0$,

3) $\tilde{R}\left({}^{V}X,{}^{H}Y\right){}^{H}Z={}^{H}\nabla_{V_X}{}^{H}\nabla_{H_Y}{}^{H}Z-{}^{H}\nabla_{H_Y}{}^{H}\nabla_{V_X}{}^{H}Z-{}^{H}\nabla_{[V_X,H_Y]}{}^{H}Z$

$$={}^{H}\nabla_{V_X}{}^{H}\left(\nabla_Y Z\right)-{}^{H}\nabla_{V_{([X,Y]-\nabla_X Y)}}{}^{H}Z=0,$$

4) $\tilde{R}\left({}^{H}X,{}^{V}Y\right){}^{H}Z={}^{H}\nabla_{H_X}{}^{H}\nabla_{V_Y}{}^{H}Z-{}^{H}\nabla_{V_Y}{}^{H}\nabla_{H_X}{}^{H}Z-{}^{H}\nabla_{[H_X,V_Y]}{}^{H}Z$

$$=-{}^{H}\nabla_{V_Y}{}^{H}\left(\nabla_X Z\right)+{}^{H}\nabla_{([Y,X]-\nabla_Y X)}{}^{H}Z=0,$$

5) $\tilde{R}\left({}^{V}X,{}^{V}Y\right){}^{V}Z={}^{H}\nabla_{V_X}{}^{H}\nabla_{H_Y}{}^{V}Z-{}^{H}\nabla_{H_Y}{}^{H}\nabla_{V_X}{}^{V}Z-{}^{H}\nabla_{[V_X,H_Y]}{}^{V}Z$

$$= {}^{H}\nabla_{V_X} {}^{V}\left(\nabla_Y Z\right) - {}^{H}\nabla_{V_{([X,Y]-\nabla_X Y)}} {}^{V}Z = 0,$$

6) $\tilde{R}\left({}^{H}x, {}^{V}y\right){}^{V}z = {}^{H}\nabla_{H_X} {}^{H}\nabla_{V_Y} {}^{V}Z - {}^{H}\nabla_{V_Y} {}^{H}\nabla_{H_X} {}^{V}Z - {}^{H}\nabla_{[H_X, V_Y]} {}^{V}Z$

$$= {}^{H}\nabla_{V_Y} {}^{V}\left(\nabla_X Z\right) + {}^{H}\nabla_{V_{([Y,X]-\nabla_Y X)}} {}^{V}Z = 0,$$

7) $\tilde{R}\left({}^{H}x, {}^{H}y\right){}^{V}z = {}^{H}\nabla_{H_X} {}^{H}\nabla_{H_Y} {}^{V}Z - {}^{H}\nabla_{H_Y} {}^{H}\nabla_{H_X} {}^{V}Z - {}^{H}\nabla_{[H_X, H_Y]} {}^{V}Z$

$$= {}^{H}\nabla_{H_X} {}^{V}\left(\nabla_Y Z\right) - {}^{H}\nabla_{H_Y} {}^{V}\left(\nabla_X Z\right) - {}^{H}\nabla_{\left(H_{[X,Y]} - \gamma\left(R(X,Y)\right)\right)} {}^{V}Z$$

$$= {}^{V}\left(\nabla_X \nabla_Y Z\right) - {}^{V}\left(\nabla_Y \nabla_X Z\right) - {}^{H}\nabla_{H_{[X,Y]}} {}^{V}Z + {}^{H}\nabla_{\gamma\left(R(X,Y)\right)} {}^{V}Z$$

$$= {}^{V}\left(\nabla_X \nabla_Y Z\right) - {}^{V}\left(\nabla_Y \nabla_X Z\right) - {}^{V}\left(\nabla_{[X,Y]} Z\right)$$

$$= {}^{V}\left(R(X,Y)Z\right),$$

8) $\tilde{R}\left({}^{H}X, {}^{H}Y\right){}^{H}Z = {}^{H}\nabla_{H_X} {}^{H}\nabla_{H_Y} {}^{H}Z - {}^{H}\nabla_{H_Y} {}^{H}\nabla_{H_X} {}^{H}Z - {}^{H}\nabla_{[H_X, H_Y]} {}^{H}Z$

$$= {}^{H}\nabla_{H_X} {}^{H}\left(\nabla_Y Z\right) - {}^{H}\nabla_{H_Y} {}^{H}\left(\nabla_X Z\right) - {}^{H}\nabla_{H_{[X,Y]}} {}^{H}Z + {}^{H}\nabla_{\gamma\left(R(X,Y)\right)} {}^{H}Z$$

$$= {}^{H}\left(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z\right)$$

$$= {}^{H}\left(R(X,Y)Z\right) \tag{3.7}$$

olarak bulunur.

(M_n,∇,g) Riemann uzayı olsun. ${}^H\nabla$ ifadesinin ${}^H\Gamma_{IJ}^K$ konneksiyon katsayılarını hesaplayalım:

${}^H\nabla_{H_X}{}^HY={}^H(\nabla_XY)$ ve ${}^HX^M\,{}^H\nabla_M\,{}^HY^I={}^H\left(X^m\nabla_mY^i\right)$ eşitliğinden

$$\begin{pmatrix} {}^HX^M\,{}^H\nabla_M\,{}^HY^i \\ {}^HX^M\,{}^H\nabla_M\,{}^HY^{\bar{i}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X^m\nabla_mY^i \\ -Y^s\Gamma_{sk}^i\left(X^m\nabla_mY^k\right) \end{pmatrix}$$

elde edilir.

Buradan ${}^HX^m\,{}^H\nabla_m\,{}^HY^i+{}^HX^{\bar{m}}\,{}^H\nabla_{\bar{m}}\,{}^HY^i=X^m\nabla_mY^i$

olarak bulunur. Yukarıdaki eşitliği açarsak;

$${}^HX^m\left(\partial_m\,{}^HY^i+{}^H\Gamma_{mK}^i\,{}^HY^K\right)+{}^HX^{\bar{m}}\left(\partial_{\bar{m}}\,{}^HY^i+{}^H\Gamma_{\bar{m}K}^iY^K\right)=X^m\left(\partial_mY^i+\Gamma_{mk}^iY^k\right)$$

$$\Rightarrow {}^HX^m\left(\partial_m\,{}^HY^i+{}^H\Gamma_{mk}^i\,{}^HY^k+{}^H\Gamma_{m\bar{k}}^i\,{}^HY^{\bar{k}}\right)+{}^HX^{\bar{m}}\left(\partial_{\bar{m}}\,{}^HY^i+{}^H\Gamma_{\bar{m}K}^i\,{}^HY^K\right)=X^m\left(\partial_mY^i+\Gamma_{mk}^iY^k\right)$$

$$\Rightarrow {}^HX^m\left(\partial_m\,{}^HY^i+{}^H\Gamma_{mk}^i\,{}^HY^k+{}^H\Gamma_{m\bar{k}}^i\,{}^HY^{\bar{k}}\right)+{}^HX^{\bar{m}}\left(\partial_{\bar{m}}\,{}^HY^i+{}^H\Gamma_{\bar{m}K}^i\,{}^HY^k+{}^H\Gamma_{\bar{m}\bar{k}}^i\,{}^HY^{\bar{k}}\right)$$

$$=X^m\left(\partial_mY^i+\Gamma_{mk}^iY^k\right)$$

elde edilir.

Buradan $X^m\left(\partial_m Y^i + {}^H\Gamma_{mk}^{\,i} Y^k + {}^H\Gamma_{m\bar{k}}^{\,i}\left(-y^s\Gamma_{st}^{\,i} Y^t\right)\right) + \left(-y^s\Gamma_{sk}^{\,m} X^k\right)\left(\partial_{\bar{m}} Y^i + {}^H\Gamma_{\bar{m}\bar{k}}^{\,i}\left(-y^s\Gamma_{st}^{\,i} Y^t\right) + {}^H\Gamma_{\bar{m}k}^{\,i} Y^k\right)$

$$= X^m \partial_m Y^i + X^m \Gamma_{mk}^{\,i} Y^k$$

yazılabilir. Buradanda

$$ {}^H\Gamma_{mk}^{\,i} = \Gamma_{mk}^{\,i},\ {}^H\Gamma_{m\bar{k}}^{\,i} = 0,\ {}^H\Gamma_{\bar{m}k}^{\,i} = 0,\ {}^H\Gamma_{\bar{m}\bar{k}}^{\,i} = 0 \tag{3.8}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$ {}^H X^m\, {}^H\nabla_m\, {}^H Y^{\bar{i}} + {}^H X^{\bar{m}}\, {}^H\nabla_{\bar{m}}\, {}^H Y^{\bar{i}} = y^s \partial_s\left(X^m \nabla_m Y^i\right) - y^s \nabla_s\left(X^m \nabla_m Y^i\right)$$

eşitliğini açarsak;

$$ {}^H X^m\left(\partial_m\, {}^H Y^{\bar{i}} + {}^H\Gamma_{mK}^{\,i}\, {}^H Y^K\right) + {}^H X^{\bar{m}}\left(\partial_{\bar{m}}\, {}^H Y^{\bar{i}} + {}^H\Gamma_{mK}^{\,\bar{i}}\, {}^H Y^K\right)$$

$$= y^s \partial_s\left(X^m\left(\partial_m Y^i + \Gamma_{mk}^{\,i} Y^k\right)\right) - y^s \nabla_s\left(X^m\left(\partial_m Y^i + \Gamma_{mk}^{\,i} Y^k\right)\right)$$

elde edilir. Buradan

$$ {}^H X^m\left(\partial_m\, {}^H Y^{\bar{i}} + {}^H\Gamma_{mk}^{\,\bar{i}}\, {}^H Y^k + {}^H\Gamma_{m\bar{k}}^{\,\bar{i}} Y^{\bar{k}}\right) + {}^H X^{\bar{m}}\left(\partial_{\bar{m}}\, {}^H Y^{\bar{i}} + {}^H\Gamma_{\bar{m}k}^{\,\bar{i}}\, {}^H Y^k + {}^H\Gamma_{\bar{m}\bar{k}}^{\,\bar{i}}\, {}^H Y^{\bar{k}}\right)$$

$$= y^s\left(\partial_s X^m\right)\left(\partial_m Y^i + \Gamma_{mk}^{\,i} Y^k\right) + y^s X^m\left(\partial_s \partial_m Y^i + \partial_s \Gamma_{mk}^{\,i} Y^k + \Gamma_{mk}^{\,i} \partial_s Y^k\right) -$$

$$y^s\left(\nabla_s X^m\right)\left(\partial_m Y^i + \Gamma_{mk}^{i} Y^k\right) - y^s X^m\left(\nabla_s\left(\partial_m Y^i\right) + \nabla_s \Gamma_{mk}^{\,i} Y^k + \Gamma_{mk}^{\,i} \nabla_s Y^k\right)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$X^m\left(\partial_m Y^i + {}^H\Gamma^{\bar{i}}_{mk}Y^k + {}^H\Gamma^{\bar{i}}_{m\bar{k}}\left(-y^s\Gamma^k_{st}Y^t\right)\right)$$

$$+\left(y^s\Gamma^m_{st}X^t\right)\cdot\left(\partial_{\bar{m}}\left(-y^s\Gamma^i_{sk}Y^k\right)+{}^H\Gamma^{\bar{i}}_{\bar{m}k}Y^k + {}^H\Gamma^{\bar{i}}_{\bar{m}\bar{k}}\left(-y^s\Gamma^k_{st}Y^m\right)\right)$$

$$= y^s\left(\partial_s X^m\right)\left(\partial_m Y^i + \Gamma^i_{mk}Y^k\right) + y^s X^m\left(\partial_s\partial_m Y^i + \partial_s\Gamma^i_{mk}Y^k + \Gamma^i_{mk}\partial_s Y^k\right)$$

$$-y^s\left(\partial_s X^m + \Gamma^m_{sk}X^k\right)\left(\partial_m Y^i + \Gamma^i_{mk}Y^k\right) - y^s X^m\left(\partial_s\partial_m Y^i + \partial_s\Gamma^i_{mk}Y^k + \Gamma^i_{mk}\partial_s Y^k + \Gamma^i_{mk}\Gamma^k_{st}Y^t\right)$$

$$\Rightarrow {}^H\Gamma^{\bar{i}}_{mk} = \partial_s\Gamma^i_{mk} - y^s R_{smk}{}^i,\ {}^H\Gamma^{\bar{i}}_{m\bar{k}} = \Gamma^i_{mk},\ {}^H\Gamma^{\bar{i}}_{\bar{m}k} = \Gamma^i_{mk},\ {}^H\Gamma^{\bar{i}}_{\bar{m}\bar{k}} = 0 \tag{3.9}$$

benzer biçimde diğer katsayılarda sıfır olarak bulunur.

(M_n,∇) afin konneksiyonlu uzay olsun. g Riemann metriğinin, ∇ afin konneksiyonuna göre ${}^H g$ ‘nın Levi-Civita konneksiyon katsayılarını hesaplayalım:

Buradan ${}^H g^{IH}$ matrisinin koordinatlarını ${}^H g^{IH}$, ${}^H g_{IH}$ matrisinin tersi olmak üzere, ${}^H g_{JI}\,{}^H g^{IH} = \delta^H_J$ formülünü kullanarak hesaplayabiliriz.

$${}^H g = \begin{pmatrix} y^s\Gamma^t_{si}g_{kj} + y^s\Gamma^t_{sj}g_{it} & g_{Ji} \\ g_{Ji} & 0 \end{pmatrix}$$

eşitliğinde

$J = j, H = h$ alınırsa;

$$ {}^{H}g_{\bar{j}I}\,{}^{H}g^{Ih} = \delta_{\bar{j}}^{h} $$

olarak bulunur.

Buradan ${}^{H}g_{\bar{j}i}\,{}^{H}g^{ih} + {}^{H}g_{\bar{i}\bar{j}}\,{}^{H}g^{\bar{i}h} = 0 \Rightarrow {}^{H}g_{\bar{j}i}\,{}^{H}g^{ih} = 0 \Rightarrow {}^{H}g^{ih} = 0$

elde edilir.

$J = j, H = h$ alınırsa;

$$ {}^{H}g_{ji}\,{}^{H}g^{ih} + {}^{H}g_{j\bar{i}}\,{}^{H}g^{\bar{i}h} = \delta_{j}^{h} $$

eşitliğinden $g_{ji}\,{}^{H}g^{\bar{i}h} = \delta_{j}^{h}$ elde edilir. Her iki tarafı g^{js} ile iki tarafı çarparsak,

$$ g^{js}g_{ji}\,{}^{H}g^{\bar{i}h} = \delta_{j}^{h}g^{js} $$

olur. Buradan $\delta_{i}^{s}\,{}^{H}g^{\bar{i}h} = g^{sh}$ ve $(s = i)$ için ${}^{H}g^{\bar{i}h} = g^{ih}$ elde edilir.

$J = j, H = \bar{h}$ alınırsa;

$$ {}^{H}g_{ji}\,{}^{H}g^{i\bar{h}} + {}^{H}g^{j\bar{i}}\,{}^{H}g^{\bar{i}\bar{h}} = \delta_{j}^{\bar{h}} = 0 $$

olur.

Buradan $\left(y^{s}\Gamma_{sj}^{t}g_{ti} + Y^{s}\Gamma_{si}^{t}g_{jt}\right)g^{ih} + g_{ji}\,{}^{H}g^{\bar{i}\bar{h}} = 0$

$\Rightarrow g_{ji}\,{}^{H}g^{\bar{i}\bar{h}} = -y^{s}\left(\Gamma_{sj}^{t} g_{ki} + \Gamma_{si}^{t} g_{jt}\right) g^{ih}$ eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafı g^{jl} ile çarpılırsa,

$$g^{jl} g_{ji}\,{}^{H}g^{\bar{i}\bar{h}} = -y^{s}\left(\Gamma_{sj}^{t} g_{ti} + \Gamma_{si}^{t} g_{jt}\right) g^{ih} g^{jl}$$

olarak bulunur.

$$\delta_{i}^{l}\,{}^{H}g^{\bar{i}\bar{h}} = -y^{s}\left(\Gamma_{sj}^{t} \delta_{t}^{h} g^{jl} + \Gamma_{si}^{t} \delta_{t}^{l} g^{ih}\right)$$

eşitliğinden

$${}^{H}g^{\bar{l}\bar{h}} = -y^{s}\left(\Gamma_{sj}^{h} g^{ji} + \Gamma_{sl}^{i} g^{lh}\right)$$

elde edilir.

$J = j, H = \bar{h}$ alınırsa;

$${}^{H}g_{\bar{j}i}\,{}^{H}g^{i\bar{h}} + {}^{H}g_{ji}\,{}^{H}g^{\bar{i}\bar{h}} = \delta_{\bar{j}}^{\bar{h}} = \delta_{j}^{h}$$

olur.nBuradan $g_{ji}\,{}^{H}g^{i\bar{h}} = \delta_{j}^{h}$ elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafı g^{js} ile çarpılırsa,

$$g^{js} g_{ji}\,{}^{H}g^{i\bar{h}} = \delta_{j}^{h} g^{js}$$

olur.

$$\delta_{i}^{s}\,{}^{H}g^{i\bar{h}} = g^{sh}$$

eşitliğnde

$$ {}^{H}g^{s\bar{h}} = g^{sh} \text{ ve s=i için} $$

$$ {}^{H}g^{i\bar{h}} = g^{ih} $$

olur. Böylece

$$ {}^{H}g^{IH} = \begin{pmatrix} 0 & g^{ih} \\ g^{ih} & -y^{s}\left(\Gamma_{sj}^{h} g^{Ji} + \Gamma_{sl}^{i} g^{lh}\right) \end{pmatrix} = -\Gamma_{st}^{j} y^{s} g^{it} X^{k}\left(\partial_{k} Y^{M} + \Gamma_{ks}^{M} y^{s}\right) \qquad (3.10) $$

olarak bulunur (Yano and Ishihara 1973).

Önerme 3.3.1: $X \in T_0^1(M_n), F \in T_1^1(M_n)$ olmak üzere,

$$ \left[{}^{H}X, \gamma F\right] = \gamma\left(L_X F\right) + \gamma\left(\nabla XF - F\nabla X\right)' \text{dir.} $$

İspat: $\left[{}^{H}X, \gamma F\right] = \left[{}^{C}X - \gamma(\nabla X), \gamma F\right]$

$$ = \left[{}^{C}X, \gamma F\right] - \left[\gamma(\nabla X), \gamma F\right] $$

$$ = \gamma\left(L_X F\right) + \gamma\left(\nabla XF - F\nabla X\right) \qquad (3.11) $$

elde edilir

Önerme 3.3.2: $X \in T_0^1(M_n), F \in T_1^1(M_n)$ olmak üzere,

$$\left[{}^{H}X,\gamma_{Y}F\right]=\gamma_{Y}\left(L_{X}F\right)+\gamma_{[X,Y]}F+\gamma_{Y}\left(F\nabla X\right)\text{' dir.}$$

İspat: $\left[{}^{H}X,\gamma_{Y}F\right]=\left[{}^{C}X-\gamma\left(\nabla X\right),\gamma_{Y}F\right]$

$$=\left[{}^{C}X,\gamma_{Y}F\right]-\left[\gamma\left(\nabla X\right),\gamma_{Y}F\right]$$

$$=\gamma_{Y}\left(L_{X}F\right)+\gamma_{[X,Y]}F+\gamma_{Y}\left(F\nabla X\right) \qquad (3.12)$$

elde edilir

Önerme 3.3.3: $X,Y\in T_{0}^{1}\left(M_{n}\right)$ olmak üzere,

$\left[{}^{V}X,{}^{H}Y\right]={}^{V}\left[X,Y\right]-{}^{V}\left(\nabla_{X}Y\right)=-{}^{V}\left(\nabla_{Y}X\right)$' dir.

İspat: $\left[{}^{V}X,{}^{H}Y\right]=\left[{}^{V}X,{}^{C}Y-\gamma\left(\nabla Y\right)\right]$

$$=\left[{}^{V}X,{}^{C}Y\right]-\left[{}^{V}X,\gamma\left(\nabla Y\right)\right]$$

$$={}^{V}\left[X,Y\right]-{}^{V}\left(\nabla_{X}Y\right)=-{}^{V}\left(\nabla_{Y}X\right) \qquad (3.13)$$

elde edilir.

Önerme 3.3.4: $\left(M_{n},\nabla\right)$ afin konneksiyonlu uzayda F almost kompleks yapı ise yatay liftininde$\left({}^{H}F\right)$ tanjant demette almost kompleks yapıdır.

İspat: ${}^{H}F\,{}^{H}X = {}^{H}(FX),\ {}^{H}F\,{}^{V}X = {}^{V}(FX)$ eşitliklerinden

$$ {}^{H}F\,{}^{H}X = \left({}^{C}F - \nabla_{\gamma}F\right){}^{H}X = {}^{C}F\,{}^{H}X - \left(\nabla_{\gamma}F\right){}^{H}X $$

yazılabilir.

Buradan $\left(\nabla_{\gamma}F\right)_{J}^{I}\,{}^{H}X^{J} = \begin{pmatrix} \left(\nabla_{\gamma}F\right)_{J}^{i}\,{}^{H}X^{J} \\ \left(\nabla_{\gamma}F\right)_{J}^{\bar{i}}\,{}^{H}X^{J} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\nabla_{\gamma}F\right)_{j}^{i}\,{}^{H}X^{J} + \left(\nabla_{\gamma}F\right)_{\bar{j}}^{i}\,{}^{H}X^{\bar{j}} \\ \left(\nabla_{\gamma}F\right)_{j}^{\bar{i}}\,{}^{H}X^{J} + \left(\nabla_{\gamma}F\right)_{\bar{j}}^{\bar{i}}\,{}^{H}X^{\bar{j}} \end{pmatrix}$

elde edilir.

$\left(\nabla_{\gamma}F\right) = \gamma\left(\nabla F\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Y^{m}\left(\nabla_{m}F_{j}^{i}\right) & 0 \end{pmatrix}$ eşitliği yukarıdaki eşitlikte kullanılırsa;

$$ \left(\nabla_{\gamma}F\right)_{J}^{I}\,{}^{H}X^{J} = \begin{pmatrix} 0 \\ Y^{m}\left(\nabla_{m}F_{j}^{i}\right)X^{j} \end{pmatrix} = \gamma\left(\nabla F \circ X\right) $$

elde edilir.

$$ {}^{C}F_{J}^{i}\,{}^{H}X^{J} = \begin{pmatrix} {}^{C}F_{J}^{i}\,{}^{H}X^{J} \\ {}^{C}F_{J}^{\bar{i}}\,{}^{H}X^{J} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{C}F_{j}^{i}\,{}^{H}X^{j} + {}^{C}F_{\bar{j}}^{i}\,{}^{H}X^{\bar{j}} \\ {}^{C}F_{j}^{\bar{i}}\,{}^{H}X^{j} + {}^{C}F_{\bar{j}}^{\bar{i}}\,{}^{H}X^{\bar{j}} \end{pmatrix} $$

$$ = \begin{pmatrix} F_{j}^{i}X^{j} \\ Y^{m}\partial_{m}F_{j}^{i}X^{j} + F_{j}^{i}\left(-Y^{s}\Gamma_{sm}^{\ j}X^{m}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{j}^{i} \\ Y^{m}\partial_{m}F_{j}^{i}X^{j} - F_{j}^{i}Y^{s}\Gamma_{sm}^{\ j}X^{m} \end{pmatrix} $$

$$ = {}^{H}(FX) + \gamma\left(\nabla F \circ X\right) $$

elde edilir.

Buradan ${}^{H}F\,{}^{H}X = {}^{C}F\,{}^{H}X - \left(\nabla_{\gamma}F\right){}^{H}X = {}^{H}\left(FX\right) + \gamma\left(\nabla F \circ X\right) - \gamma\left(\nabla F \circ X\right) = {}^{H}\left(FX\right)$

olarak bulunur. (3.14)

Teorem 3.3.1 : ∇, M_n'de afin konneksiyon olsun. ${}^{C}\nabla$ tam lifti ile ${}^{H}\nabla$ yatay liftinin eşit olması için gerek ve yeter şart ∇'ya göre eğriliğin sıfır olmasıdır.

Teorem 3.3.2 : ∇, M_n'de bir afin konneksiyon olsun. ${}^{H}\nabla$ yatay liftine göre eğriliğin sıfır olması için gerek ve yeter şart ∇'ya göre eğriliğin sıfır olmasıdır (Yano and Ishihara 1967).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Tanjant Demetde Geodeziklik

$\tilde{C}:[0,1]\rightarrow T(M)$ dönüşümü $T(M)'$ de bir eğri olmak üzere $\tilde{C}$ eğrisi lokal koordinatlarda

$$x^A = x^A(t) \text{ veya } x^h = x^h(t), y^h = y^h(t) \qquad (4.1)$$

bileşenlerine sahiptir.

Burada $T(M)$'in t parametresine göre indirgenmiş koordinatları (x^h, y^h) şeklindedir.

Bu eğrinin izdüşüm eğrisi $C = \pi \circ \tilde{C}$ şeklinde ifade edilir.

M üzerinde C lokal olarak $x^h = x^h(t)$ şeklinde verilir. Bu ifade $\pi\tilde{C}$ ile gösterilir. Buradan $\tilde{C}$ lokal koordinatları $T(M)$'de $x^h = x^h(t), y^h = \dfrac{dx^h}{dt}$ şeklindedir.

Bu eğri doğal lift eğrisi olarak adlandırılır ve C^* şeklinde gösterilir.

$T(M)$' de ${}^C\nabla$'nın geodezik eğrisi

$$\frac{d^2x^A}{dt^2} + \tilde{\Gamma}^A_{CB}\frac{dx^C}{dt}\frac{dx^B}{dt} = 0 \qquad (4.2)$$

şeklindedir.

Bu eğrinin izdüşüm eğrisi lokal olarak $C=\pi\circ\tilde{C}$ şeklinde ifade edilir.

$A=h$ olduğunda (4,2)'deki eşitlikten sade bir ifade olan

$$\frac{d^2x^h}{dt^2}+\Gamma_{ji}^{\ h}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^i}{dt}=0 \tag{4.3}$$

elde edilir.

$A=\overline{h}$ olduğunda $\frac{d^2y^h}{dt^2}+\left(\partial_k\Gamma_{ji}^{\ h}\right)y^k\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^i}{dt}+2\Gamma_{ji}^{\ h}\frac{dy^j}{dt}\frac{dx^i}{dt}=0$ (4.4)

olarak bulunur.

(4,4) ifadesi aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(\frac{dy^h}{dt}+\Gamma_{ji}^{\ h}\frac{dx^j}{dt}y^i\right)+\Gamma_{ka}^{\ h}\frac{dx^k}{dt}\left(\frac{dy^a}{dt}+\Gamma_{ji}^{\ a}\frac{dx^j}{dt}y^i\right)+\\&\left(\partial_k\Gamma_{ji}^{h}-\partial_j\Gamma_{ki}^{\ h}+\Gamma_{ka}^{\ h}\Gamma_{ji}^{\ a}-\Gamma_{ja}^{\ h}\Gamma_{ki}^{\ a}\right)y^k\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^i}{dt}=0\end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\frac{\delta y^h}{dt}=\frac{dy^h}{dt}+\Gamma_{ji}^{\ h}\frac{dx^j}{dt}y^i \tag{4.6}$$

olup (4,6) ifadesini (4,5)' de yerine yazarsak;

$$\frac{\delta^2y^h}{dt^2}+R_{kji}^{\ \ \ h}y^k\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^i}{dt}=0 \tag{4.7}$$

elde edilir (Yano and Ishihara 1973).

Önerme 4.1.1: (4.1) ile verilmiş olan geodezik eğriye bakalım. Burada konneksiyonun tam liftine bakılır. Bu geodezik eğrinin izdüşümüde geodezik eğridir ve tanjant demetdeki geodezikliği baz manifoldunun üzerindeki geodezik eğrinin üzerindeki Jacobi alanıdır.

4.2. Dikey, Tam ve Yatay Lift İle İlgili Özellikler

i. ${}^{H}\nabla^{C}X\,{}^{V}Y = {}^{V}\left(\nabla_X Y\right)$

ii. ${}^{H}\nabla^{C}X\,{}^{H}Y = {}^{H}\left(\nabla_X Y\right)$

iii. ${}^{H}\nabla^{C}X\,{}^{V}\omega = {}^{V}\left(\nabla_X \omega\right)$

iv. ${}^{H}\nabla^{C}X\,{}^{H}\omega = {}^{H}\left(\nabla_X \omega\right)$

v. $X, Y \in T_0^1\left(M_n\right),\ \omega \in T_1^0\left(M_n\right)$ olsun. ${}^{H}\nabla^{V}X\,{}^{V}Y = 0$'dır.

vi. ${}^{H}\nabla^{V}X\,{}^{H}Y = 0$

vii. ${}^{H}\nabla^{V}X\,{}^{V}\omega = 0$

viii. ${}^{H}\nabla^{V}X\,{}^{H}\omega = 0$

İspat i. ${}^{C}X = \begin{pmatrix} 0 \\ y^s \partial_s X^i \end{pmatrix},\ {}^{V}Y = \begin{pmatrix} 0 \\ Y^i \end{pmatrix},\ {}^{V}\left(\nabla_X Y\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ X^i\left(\partial_i Y^j + \Gamma_{iM}^{j} Y^M\right) \end{pmatrix}$ dir.

Buradan ${}^{H}\nabla^{C}X^{V}Y = {}^{C}X^{i}\,{}^{H}\nabla_i{}^{V}Y^j + {}^{C}X^{\bar{i}}\,{}^{H}\nabla_{\bar{i}}{}^{V}Y^{\bar{j}}$ ifadesi koordinatlara göre açılırsa;

$J = j$ ise

$$X^i\left({}^{H}\nabla_i{}^{V}Y^j\right) + y^s \partial_s X^i\left({}^{H}\nabla_{\bar{i}}{}^{V}Y^j\right) = 0$$

elde edilir.

$J=\bar{j}$ ise

$$X^i\left({}^H\nabla_i{}^VY^{\bar{j}}\right)+y^s\partial_s X^i\left({}^H\nabla_{\bar{i}}{}^VY^{\bar{j}}\right)$$

$$=X^i\left(\partial_i{}^VY^{\bar{j}}+{}^H\Gamma_{iM}^{\bar{j}}\,{}^VY^M\right)+y^s\partial_s X^i\left(\partial_{\bar{i}}Y^{\bar{j}}+{}^H\Gamma_{\bar{i}M}^{\bar{j}}\,{}^VY^M\right)$$

$$=X^i\left(\partial_iY^j+\Gamma_{iM}^{j}Y^M\right)={}^V\left(\nabla_XY\right) \tag{4.8}$$

elde edilir.

ii. ${}^HY=\begin{pmatrix} Y^i \\ -\Gamma_{sM}^{\,i}y^sX^M \end{pmatrix}$, ${}^H\left(\nabla_XY\right)=\begin{pmatrix} X^i\left(\partial_iY^j+\Gamma_{ik}^{\,j}Y^k\right) \\ -\Gamma_{sM}^{\,j}y^sX^k\left(\partial_kY^M+\Gamma_{kt}^{\,M}Y^t\right) \end{pmatrix}$

olduğundan

$${}^H\nabla^CX\,{}^HY={}^CX^i\,{}^H\nabla_i\,{}^HY^J+{}^CX^{\bar{i}}\,{}^H\nabla_{\bar{i}}\,{}^HY^J$$

şeklindedir. Bu ifade koordinatlara göre açılırsa;

J=j ise

$${}^CX^i\,{}^H\nabla_i\,{}^HY^j+{}^CX^{\bar{i}}\,{}^H\nabla_{\bar{i}}\,{}^HY^j$$

$$=X^i\left({}^H\nabla_i\,{}^HY^j\right)+y^s\partial_sX^i\,{}^H\nabla_{\bar{i}}\,{}^HY^j$$

$$\Rightarrow X^i\left(\partial_i\,{}^HY^j+{}^H\Gamma_{iM}^{\,j}\,{}^HY^M+{}^H\Gamma_{i\bar{M}}^{\,j}\,{}^HY^{\bar{M}}\right)+y^s\partial_sX^i\left(\partial_{\bar{i}}Y^j+{}^H\Gamma_{\bar{i}M}^{\,J}\,{}^HY^M+{}^H\Gamma_{\bar{i}\bar{M}}^{\,j}\,{}^HY^M\right)$$

$$\Rightarrow X^i\partial_i Y^j + X^i\Gamma^j_{iM}Y^M = X^i\left(\partial_i Y^j + \Gamma^j_{iM}Y^M\right)$$

elde edilir.

$J = \bar{j}$ ise

$${}^C X^i\, {}^H\nabla_i {}^H Y^{\bar{j}} + {}^C X^{\bar{i}}\, {}^H\nabla_{\bar{i}} {}^H Y^{\bar{j}}$$

$$= X^i\left(\partial_i {}^H Y^{\bar{j}} + \Gamma^{\bar{j}}_{iM}\, {}^H y^M + \Gamma^{\bar{j}}_{i\bar{M}}\, {}^H y^{\bar{M}}\right) + y^s\partial_s X^i\left(\partial_{\bar{i}} {}^H Y^{\bar{j}} + \Gamma^{\bar{j}}_{\bar{i}M}\, {}^H y^M + \Gamma^{\bar{j}}_{\bar{i}\bar{M}}\, {}^H y^M\right)$$

$$= X^i\partial_i\left(-\Gamma^j_{st}y^sY^t\right) + X^i\left(y^s\partial_s\Gamma^j_{iM} - Y^kR_{kiM}^{\;\;\;j}\right){}^H Y^M +$$

$$X^i\Gamma^j_{iM}\, {}^H Y^{\bar{M}} + y^s\partial_s X^i\left(\partial_{\bar{i}}\left(-\Gamma^j_{st}y^sY^t\right)\right) + y^s\partial_s X^i\Gamma^j_{iM}Y^M$$

$$= -X^i\partial_i\Gamma^j_{sM}y^sY^M - X^i\partial_i y^s\Gamma^j_{sM}Y^M - X^i\Gamma^j_{sM}y^s\partial_i Y^M +$$

$$X^i y^s\partial_s\Gamma^j_{iM}Y^M - X^iY^k\partial_k\Gamma^j_{iM}Y^M + X^iY^k\partial_i\Gamma^j_{kM}Y^M -$$

$$X^iY^k\Gamma^j_{kt}\Gamma^t_{iM}Y^M + X^iY^k\Gamma^j_{it}\Gamma^t_{kM}Y^M - X^i\Gamma^j_{iM}\Gamma^M_{st}y^sY^t -$$

$$y^s\partial_s X^i\Gamma^j_{iM}Y^M + y^s\partial_s X^i\Gamma^j_{iM}Y^M$$

$$= -\Gamma^j_{sM}y^sX^i\partial_i Y^M - \Gamma^j_{kt}\Gamma^t_{iM}X^iY^ky^M$$

elde edilir. Buradan

$$ {}^H\nabla^C X\, {}^H Y = {}^H\left(\nabla_X Y\right) \tag{4.9} $$

olur.

iii. ${}^H\nabla^C X\, {}^V\omega = {}^C X^i \left({}^H\nabla_i^V \omega_J\right) + {}^C X^{\bar{i}}\left({}^H\nabla_{\bar{i}}{}^V \omega_J\right)$ ifadesi koordinatlara göre açılırsa;

$J = \bar{j}$ ise bu ifade 0 olur.

$J = j$ ise

$$ {}^H\nabla^C X\, {}^V\omega = {}^C X^i \left(\partial_i {}^V\omega_j - {}^H\Gamma_{ij}^M\, {}^V\omega_M - {}^H\Gamma_{ij}^{\bar{M}}\, {}^V\omega_{\bar{M}}\right) + $$

$$ y^s \partial_s X^i \left(\partial_{\bar{i}} {}^V\omega_j - {}^H\Gamma_{\bar{i}j}^M\, {}^V\omega_M - {}^H\Gamma_{\bar{i}j}^M\, {}^V\omega_{\bar{M}}\right) $$

$$ = X^i \partial_i \omega_j - X^i \Gamma_{ij}^M \omega_M $$

$$ = {}^V\left(\nabla_X \omega\right) . \tag{4.10} $$

elde edilir.

iv. ${}^H\left(\nabla_X \omega\right) = \left(y^s \Gamma_{si}^M X^t\left(\partial_t \omega_M - \Gamma_{tM}^j \omega_j\right), X^j\left(\partial_j \omega_i - \Gamma_{ji}^s \omega_s\right)\right)$ ve

$$ {}^H\nabla^C X\, {}^H\omega = {}^C X^i \left(\nabla_i {}^H\omega_J\right) + {}^C X^{\bar{i}}\left({}^H\nabla_{\bar{i}}{}^H\omega_J\right) $$

eşitlikleri koordinatlara göre açılırsa;

$J=j$ ise

$$X^i\left(\partial_i{}^H\omega_j-{}^H\Gamma_{ij}^s{}^H\omega_s\right)+y^s\partial_sX^i\left(\partial_{\bar{i}}{}^H\omega_j-{}^H\Gamma_{\bar{i}j}^s{}^H\omega_s\right)$$

$$=X^i\left(\partial_i{}^H\omega_j-{}^H\Gamma_{ij}^s{}^H\omega_s-{}^H\Gamma_{ij}^{\bar{s}}{}^H\omega_{\bar{s}}\right)+y^s\partial_sX^i\left(\partial_{\bar{i}}{}^H\omega_j-{}^H\Gamma_{\bar{i}j}^s{}^H\omega_s-{}^H\Gamma_{\bar{i}j}^s{}^H\omega_{\bar{s}}\right)$$

$$=X^i\partial_i\left(Y^t\Gamma_{ts}^M\omega_M\right)-X^i\Gamma_{ij}^s\left(Y^t\Gamma_{ts}^M\omega_M\right)-X^iy^sY^t\partial_t\Gamma_{ij}^s\omega_s+X^iY^tR_{tij}^s\omega_s+$$

$$y^s\partial_sX^i\partial_{\bar{i}}\left(Y^t\Gamma_{tj}^M\omega_M\right)-y^s\partial_sX^i\Gamma_{ij}^s\omega_s$$

$$=X^iY^t\partial_i\Gamma_{ts}^M\omega_M+X^iY^t\Gamma_{ts}^M\partial_i\omega_M-X^iY^t\Gamma_{ij}^s\Gamma_{ts}^M\omega_M-X^iY^t\partial_t\Gamma_{ij}^s\omega_s+$$

$$X^iY^t\partial_t\Gamma_{ij}^s\omega_s-X^iY^t\partial_i\Gamma_{tj}^s\omega_s+X^iY^t\Gamma_{tk}^s\Gamma_{ij}^k\omega_s-X^iY^t\Gamma_{ik}^s\Gamma_{tj}^k\omega_s+$$

$$y^s\partial_sX^i\Gamma_{ij}^M\omega_M-y^s\partial_sX^i\Gamma_{ij}^s\omega_s$$

$$=X^iY^t\Gamma_{ts}^M\partial_i\omega_M-X^iY^t\Gamma_{ik}^s\Gamma_{tj}^k\omega_s$$

$$=Y^t\Gamma_{ts}^MX^i\left(\partial_i\omega_M-\Gamma_{iM}^j\omega_j\right)$$

elde edilir.

$J=\bar{j}$ ise

$$X^i\left(\partial_i{}^H\omega_{\bar{j}}-{}^H\Gamma_{i\bar{j}}^M{}^H\omega_M-{}^H\Gamma_{i\bar{j}}^{\bar{M}}{}^H\omega_{\bar{M}}\right)+y^s\partial_sX^i\left(\partial_{\bar{i}}{}^H\omega_{\bar{j}}-{}^H\Gamma_{\bar{i}\bar{j}}^M{}^H\omega_M-{}^H\Gamma_{\bar{i}\bar{j}}^{\bar{M}}{}^H\omega_{\bar{M}}\right)$$

$$= X^i\left(\partial_i \omega_j - \Gamma_{ij}^{M}\omega_M\right) + y^s \partial_s X^i$$

$$= X^i\left(\partial_i \omega_j - \Gamma_{ij}^{M}\omega_M\right)$$

Buradan

$$^H\left(\nabla_X \omega\right) = {}^H\nabla^C X\, {}^H\omega$$

elde edilir.

v. $X, Y \in T_0^1\left(M_n\right), \omega \in T_1^0\left(M_n\right)$ olmak üzere,

$$^H\nabla^V X\, {}^V Y = {}^V X^i\, {}^H\nabla_i\, {}^V Y^{\bar{j}} + {}^V X^{\bar{i}}\, {}^H\nabla_{\bar{i}}\, {}^V Y^J$$

şeklindedir. Bu ifade koordinatlara göre açılırsa;

$J = \bar{j}$ ise

$$X^i\, {}^H\nabla_{\bar{i}}\, {}^V Y^{\bar{j}} = X^i\left(\partial_{\bar{i}}\, {}^V Y^{\bar{j}} + {}^H\Gamma_{\bar{i}M}^{\bar{j}}\, {}^V Y^M + {}^H\Gamma_{\bar{i}\bar{M}}^{\bar{j}}\, {}^V Y^{\bar{M}}\right) = 0$$

elde edilir.

vi. $^H\nabla^V X\, {}^H Y = {}^V X^i\, {}^H\nabla_i\, {}^H Y^J + {}^V X^{\bar{i}}\, {}^H\nabla_{\bar{i}}\, {}^H Y^J$

bu ifade koordinatlara göre açılırsa;

$J = j$ ise

$$X^{i}\left(\partial_{\bar{i}}\ {}^{H}Y^{j}+{}^{H}\Gamma_{\bar{i}M}^{j}\ {}^{H}Y^{M}+{}^{H}\Gamma_{\bar{i}\bar{M}}^{j}\ {}^{H}Y^{\bar{M}}\right)=0$$

olur. Buradan

$${}^{H}\nabla^{V}X\,{}^{H}Y=X^{i}\left(\partial_{\bar{i}}\ {}^{H}Y^{\bar{j}}+{}^{H}\Gamma_{\bar{i}M}^{\bar{j}}\ {}^{H}Y^{M}+{}^{H}\Gamma_{\bar{i}\bar{M}}^{\bar{j}}\ {}^{H}Y^{\bar{M}}\right)$$

$$=X^{i}\left(\partial_{\bar{i}}\left(-\Gamma_{sM}^{j}Y^{s}Y^{M}\right)\right)+X^{i}\Gamma_{iM}^{j}Y^{M}$$

$$=-X^{i}\Gamma_{iM}^{j}y^{M}+X^{i}\Gamma_{iM}^{j}y^{M}=0 \qquad (4.11)$$

elde edilir.

Vii. ${}^{H}\nabla^{V}X\,{}^{V}\omega={}^{V}X^{\bar{i}}\left({}^{H}\nabla_{\bar{i}}\ {}^{V}\omega_{j}\right)=X^{i}\left(\partial_{\bar{i}}\omega_{j}-{}^{H}\Gamma_{\bar{i}\bar{j}}^{M}\ {}^{V}\omega_{M}-{}^{H}\Gamma_{\bar{i}\bar{j}}^{\bar{M}}\ {}^{V}\omega_{\bar{M}}\right)=0 \qquad (4.12)$

elde edilir.

viii. ${}^{H}\nabla^{V}X\,{}^{H}\omega={}^{V}X^{\bar{i}}\left({}^{H}\nabla_{\bar{i}}\ {}^{H}\omega_{J}\right)$

bu ifade koordinatlara göre açılırsa;

$J=j$ ise

$$X^{i}\left(\partial_{\bar{i}}\ {}^{H}\omega_{j}-{}^{H}\Gamma_{\bar{i}\bar{j}}^{M}\ {}^{H}\omega_{M}-{}^{H}\Gamma_{\bar{i}\bar{j}}^{\bar{M}}\ {}^{H}\omega_{\bar{M}}\right)$$

$$=X^{i}\left(\partial_{\bar{i}}\left(y^{s}\Gamma_{sj}^{M}\omega_{M}\right)-\Gamma_{ij}^{M}\omega_{M}\right)$$

$$= X^i \Gamma_{ij}^M \omega_M - X^i \Gamma_{ij}^M \omega_M = 0$$

olur. Buradan

$${}^H\nabla^V X^H \omega = X^i \left(\partial_{\bar{i}} {}^H\omega_{\bar{j}} - {}^H\Gamma_{\bar{i}\bar{j}}^M {}^H\omega_M - {}^H\Gamma_{\bar{i}\bar{j}}^{\bar{M}} {}^H\omega^{\bar{M}} \right)$$

$$= X^i \partial_{\bar{i}} \omega_j = 0 \tag{4.13}$$

elde edilir.

4.3. Levi-Civita Konneksiyonunun Katsayıları

Riemann manifoldunda Kozsul formülünden yararlanarak Levi-Civita konneksiyon katsayılarını elde eden formülü bulalım:

$$2g(\nabla_X Y, Z) = X\left(g(Y,Z)\right) + Y\left(g(Z,X)\right) - Z\left(g(X,Y)\right) -$$

$$g\left(X,[Y,Z]\right) - g\left(Y,[Z,X]\right) + g\left(Z,[X,Y]\right)$$

olduğundan bu ifadede

$X = \partial_i,\ Y = \partial_j,\ Z = \partial_k$ alındığında

$$[Y,Z] = 0 \text{ ve } [Z,X] = 0$$

eşitliklerinden

$$2g\left(\Gamma_{ij}^{t}\partial_{t},\partial_{k}\right)=\partial_{i}\left(g_{jk}\right)+\partial_{j}\left(g_{ki}\right)+\partial_{k}\left(g_{ij}\right)$$

$$2\Gamma_{ij}^{t}g\left(\partial_{t},\partial_{k}\right)=\partial_{i}\left(g_{jk}\right)+\partial_{j}\left(g_{ki}\right)-\partial_{k}\left(g_{ij}\right)$$

$$\Gamma_{ij}^{t}g\left(\partial_{t},\partial_{k}\right)=\frac{1}{2}\left(\partial_{i}\left(g_{jk}\right)+\partial_{j}\left(g_{ki}\right)-\partial_{k}\left(g_{ij}\right)\right)$$

elde edilir. Son eşitliğin her iki tarafı $\tilde{g}^{tk}$ ile çarpılırsa;

$$\Gamma_{ij}^{t}=\frac{1}{2}\tilde{g}^{tk}\left(\partial_{i}\left(g_{jk}\right)+\partial_{j}\left(g_{ki}\right)-\partial_{k}\left(g_{ij}\right)\right) \tag{4.14}$$

elde edilir (Yano and Ishihara 1973).

4.3.1. Levi-Civita konneksiyonun tam lifti

$\left(M_n,\nabla,g\right)$ Riemann uzayında $\nabla g=0$ olup Levi-Civita konneksiyonudur. $\left(T\left(M_n\right),{}^{C}\nabla,{}^{C}g\right)$ içinde ${}^{C}\nabla{}^{C}g=0$ olmalı $\nabla_k g_{ij}=\partial_k g_{ij}-\Gamma_{ki}^{s}g_{sj}-\Gamma_{kj}^{s}g_{is}$ eşitliğinden Tam lift için $I=i,\bar{i}$ $J=j,\bar{j}$ ve $K=k,\bar{k}$ olmak üzere,

$${}^{C}\nabla_K{}^{C}g_{IJ}=\partial_K{}^{C}g_{IJ}-{}^{C}\Gamma_{KI}^{S}{}^{C}g_{SJ}-{}^{C}\Gamma_{KJ}^{S}{}^{C}g_{IS}$$

eşitliğinden

$${}^{C}\nabla_k{}^{C}g_{ij}=g^{t}\partial_t\nabla_k g_{ij}=0 \tag{4.15}$$

elde edilir. Dolayısıyla ∇g ‘nin Levi-Civita konneksiyonu ise ${}^{C}\nabla$ ’de ${}^{C}g$ ’nin Levi-Civita konneksiyonudur (Yano and Ishihara 1973).

4.4. Ricci Tensörünün Tam Lifti

Ricci tensörü $R_{ijk}^{\;\;\;i} = R_{jk}$ biçiminde tanımlıdır. Ricci Tensörünün tam lifti $\tilde{R}^{I}_{IJK} = \tilde{R}_{JK}$ olmak üzere,

$$\tilde{R}_{JK} = \tilde{R}^{I}_{IJK} = \tilde{R}^{i}_{ijk} + \tilde{R}^{\bar{i}}_{\bar{i}jk} = R^{i}_{ijk} + R^{i}_{ijk} = 2R^{i}_{ijk}$$

olduğundan dolayı

$$\tilde{R}_{\bar{j}k} = \tilde{R}^{I}_{\bar{I}\bar{j}k} = \tilde{R}^{i}_{i\bar{j}k} + R^{\bar{i}}_{\bar{i}\bar{j}k} = 0$$

$$\tilde{R}_{j\bar{k}} = \tilde{R}^{l}_{lj\bar{k}} = \tilde{R}^{i}_{ij\bar{k}} + \tilde{R}^{\bar{i}}_{\bar{i}j\bar{k}} = 0$$

$$\tilde{R}_{\bar{j}\bar{k}} = \tilde{R}^{l}_{\bar{l}\bar{j}\bar{k}} = \tilde{R}^{i}_{i\bar{j}\bar{k}} + \tilde{R}^{\bar{i}}_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}} = 0 \qquad (4.16)$$

elde edilir (Yano and Ishihara 1973).

4.5. Diagonal Lift

(0,2) tipli tensör üzerinde; $G \in T_2^0(M_n)$

Buradan G'nin diagonal lifti

$${}^{D}G = {}^{V}(G_{ij})\,{}^{V}(dx^i) \otimes {}^{V}(dx^j) + {}^{V}(G_{ij})\,{}^{H}(dx^i) \otimes {}^{H}(dx^j)$$

olmak üzere,

$\left\{{}^{H}\left(\partial_i\right), {}^{V}\left(\partial_i\right)\right\}$ çatı, $\left\{{}^{V}\left(dx^i\right), {}^{H}\left(dx^i\right)\right\}$ koçatı belirtir.

Çatının koçatı üzerindeki izi Kronecker δ' dır. Diagonal liftin koordinatlarla ifadesi ${}^{D}G = \begin{pmatrix} G_{ij} & 0 \\ 0 & G_{ij} \end{pmatrix}$ şeklindedir. Bu koordinatlarla belirtilen ifadede G_{ij}'nin determinantı negatif olsada ikisinin çarpımı pozitif olur. G_{ij}'ler Riemann metriği ise pozitif tanımlı olur. Buradan ${}^{D}G$' de pozitif tanımlı olup Sasaki metriği olur. Sasaki metriği I+III metriği ya da diagonal olarakta adlandırılır. G_{ij} Semi Riemann ise Det$\neq 0$'dır. ${}^{D}G$' de Semi Riemann olur. $\left(M_n, g\right)$, Riemann manifold olsun.

$$
{}^{S}g\left({}^{V}X, {}^{V}Y\right) = {}^{V}\left(g\left(X,Y\right)\right)
$$

$$
{}^{S}g\left({}^{V}X, {}^{H}Y\right) = 0
$$

$$
{}^{S}g\left({}^{H}X, {}^{H}Y\right) = {}^{V}\left(g\left(X,Y\right)\right) \tag{4.17}
$$

şeklinde tanımlanan ${}^{S}g$ Riemann metriğine Sasaki metriği denir. Sasaki metriği için ortogonallik şartı ${}^{S}g({}^{V}X, {}^{H}Y) = {}^{S}g({}^{H}X, {}^{V}Y) = 0$ şeklindedir. $\left\{\partial_i\right\}$ dual çatıya göre ${}^{S}g$' nin koordinatları ${}^{V}X = \begin{pmatrix} 0 \\ X^i \end{pmatrix}$, ${}^{H}X = \begin{pmatrix} X^i \\ -y^s\Gamma^i_{sm}X^m \end{pmatrix}$ olmak üzere,

${}^{S}g_{IJ}\,{}^{V}X^{I}\,{}^{V}Y^{J} = g_{ij}X^iY^j$ şeklindedir. Bu ifadeyi açacak olursak;

$$
{}^{S}g_{ij}\,{}^{V}X^{i}\,{}^{V}Y^{j} + {}^{S}g_{\bar{i}j}\,{}^{V}X^{\bar{i}}\,{}^{V}Y^{j} + {}^{S}g_{i\bar{j}}\,{}^{V}X^{i}\,{}^{V}Y^{j} + {}^{S}g_{\bar{i}\bar{j}}\,{}^{V}X^{\bar{i}}\,{}^{V}Y^{\bar{j}} = g_{ij}X^iY^j
$$

olarak bulunur.

Buradan ${}^{S}g_{\bar{i}\bar{j}}X^{i}Y^{j}=g_{ij}X^{i}Y^{j}$ elde edilir. Bu eşitlikten

$$ {}^{S}g_{\bar{i}\bar{j}}=g_{ij} $$

yazılabilir. Sasaki metriğinin ortogonallik şartından ${}^{S}g_{IJ}\,{}^{V}x^{I}\,{}^{H}y^{J}=0'$ dır. Bu ifade açılırsa;

$$ {}^{S}g_{ij}\,{}^{V}X^{i}\,{}^{H}Y^{j}+{}^{S}g_{i\bar{j}}\,{}^{V}X^{i}\,{}^{H}Y^{\bar{j}}+{}^{S}g_{\bar{i}j}\,{}^{V}X^{\bar{i}}\,{}^{H}Y^{j}+{}^{S}g_{\bar{i}\bar{j}}\,{}^{V}X^{\bar{i}}\,{}^{H}Y^{\bar{j}}=0 $$

olup

$$ {}^{S}g_{\bar{i}j}X^{i}Y^{j}=-g_{ij}X^{i}\left(-y^{s}\Gamma^{j}_{sm}Y^{m}\right) $$

$$ {}^{S}g_{\bar{i}j}X^{i}Y^{j}=y^{s}g_{im}\Gamma^{m}_{sj}X^{i}Y^{j} $$

elde edilir. Buradan ${}^{S}g_{\bar{i}j}=y^{s}g_{im}\Gamma^{m}_{sj}$

olarak bulunur. Bu son ifadeyi açarsak;

$$ {}^{S}g_{ij}\,{}^{H}X^{i}\,{}^{H}Y^{j}+{}^{S}g_{\bar{i}j}\,{}^{H}X^{\bar{i}}\,{}^{H}Y^{j}+{}^{S}g_{i\bar{j}}\,{}^{H}X^{i}\,{}^{H}Y^{\bar{j}}+{}^{S}g_{\bar{i}\bar{j}}\,{}^{H}X^{\bar{i}}\,{}^{H}Y^{\bar{j}}=g_{ij}X^{i}Y^{j} $$

olur. Buradan

$$ {}^{S}g_{ij}X^{i}Y^{j}+\left(y^{s}g_{im}\Gamma^{m}_{sj}\right)\left(-Y^{t}\Gamma^{i}_{tk}X^{k}\right)Y^{j}+y^{s}g_{mj}\Gamma^{m}_{si}X^{i}\left(-Y^{s}\Gamma^{j}_{sk}Y^{k}\right)+g_{ij}\left(-y^{s}\Gamma^{i}_{sk}X^{k}\right)\left(-Y^{t}\Gamma^{j}_{tl}Y^{l}\right)=g_{ij}X^{i}Y^{j} $$

$$ {}^{S}g_{ij}X^{i}Y^{j}-y^{s}Y^{t}g_{im}\Gamma^{m}_{sj}\Gamma^{i}_{tk}X^{k}Y^{j}-y^{s}Y^{t}g_{mj}\Gamma^{m}_{si}\Gamma^{j}_{tk}X^{i}Y^{k}+ $$

$$y^s Y^t g_{ij}\Gamma^i_{sk}\Gamma^j_{tl} X^k Y^l = g_{ij} X^i Y^j$$

$$^S g_{ij} X^i Y^j = g_{ij} X^i Y^j + y^s Y^t g_{mj}\Gamma^m_{si}\Gamma^j_{tk} X^i Y^k$$

$$^S g_{ij} = g_{ij} + y^s Y^t g_{mk}\Gamma^m_{si}\Gamma^k_{tj}$$

olarak bulunur. O halde Sasaki metriğinin doğal çatıya göre koordinatları;

$$^S g = \begin{pmatrix} g_{ij} + y^s Y^t g_{mk}\Gamma^m_{si}\Gamma^k_{tj} & y^s g_{mj}\Gamma^m_{si} \\ y^s g_{im}\Gamma^m_{sj} & g_{ij} \end{pmatrix} \tag{4.18}$$

şeklindedir. Burada g, riemann metriği ise $^S g$' de riemann metrik olur (Yano and Ishihara 1973).

4.6. Tanjant Demetde Sasaki Metriği

Tanjant demette Sasaki metriği için aşağıdaki özellikler geçerlidir:

i. $^S\nabla_{^H X}{}^H Y = {}^H(\nabla_X Y) - \frac{1}{2}{}^V(R(X,Y)U)$,

ii. $^S\nabla_{^H X}{}^V Y = {}^V(\nabla_X Y) + \frac{1}{2}{}^H(R(U,Y)X)$,

iii. $^S\nabla_{^V X}{}^H Y = \frac{1}{2}{}^H(R(U,X)Y)$,

iv. $^S\nabla_{^V X}{}^V Y = 0$, .

$X = \partial_i$, $Y = \partial_j$, $e_i = {}^H(\partial_i)$, $e_{\bar{i}} = {}^V(\partial_i)$ ve $U = y^i\partial_i$ şeklinde özel bir vektör alanı olmak üzere,

İspat i. ${}^{S}\nabla_{{}^{H}\partial_i} {}^{H}\left(\partial_j\right) = {}^{H}\left(\nabla_{\partial_i}\partial_j\right) - \frac{1}{2}{}^{V}\left(R\left(\partial_i,\partial_j\right)U\right)$ ve ${}^{S}\Gamma_{ij}^{\alpha} e_{\alpha} = \Gamma_{ij}^{k} e_k - \frac{1}{2} y^s R_{ijs}^{k} e_{\bar{k}}$

olduğundan

$$ {}^{S}\Gamma_{ij}^{k} e_k + {}^{S}\Gamma_{ij}^{\bar{k}} e_{\bar{k}} = \Gamma_{ij}^{k} e_k - \frac{1}{2} y^s R_{ijs}^{k} e_{\bar{k}} $$

olarak bulunur. Buradan

$$ {}^{S}\Gamma_{ij}^{k} = \Gamma_{ij}^{k},\ {}^{S}\Gamma_{ij}^{\bar{k}} = -\frac{1}{2} y^s R_{ijs}^{k} \tag{4.19} $$

elde edilir.

ii. ${}^{S}\nabla_{{}^{H}\partial_i} {}^{V}\left(\partial_j\right) = {}^{V}\left(\nabla_{\partial_i}\partial_j\right) + \frac{1}{2}{}^{H}\left(R\left(U,\partial_j\right)\partial_i\right)$ ve

$$ {}^{S}\Gamma_{i\bar{j}}^{k} e_k + {}^{S}\Gamma_{i\bar{j}}^{\bar{k}} e_{\bar{k}} = {}^{V}\left(\Gamma_{ij}^{k}\partial_k\right) + \frac{1}{2}{}^{H}\left(y^s R_{sji}^{k}\partial_k\right) $$

olduğundan

$$ {}^{S}\Gamma_{i\bar{j}}^{k} e_k + {}^{S}\Gamma_{i\bar{j}}^{\bar{k}} e_{\bar{k}} = \Gamma_{ij}^{k}\partial_{\bar{k}} + \frac{1}{2} y^s R_{sji}^{k} e_k \tag{4.20} $$

olarak bulunur.

Burada ${}^{S}\Gamma_{i\bar{j}}^{h} = \frac{1}{2} y^s R_{sji}^{h},\ {}^{S}\Gamma_{i\bar{j}}^{\bar{h}} = \Gamma_{ij}^{h}$ eşitlikleri geçerlidir.

iii. ${}^{S}\nabla_{{}^{H}\partial_i} {}^{H}\left(\partial_j\right) = \frac{1}{2}{}^{H}\left(R\left(U,\partial_j\right),\partial_j\right)$ ve ${}^{S}\Gamma_{\bar{i}\bar{j}}^{h} e_h + {}^{S}\Gamma_{\bar{i}\bar{j}}^{\bar{h}} e_{\bar{h}} = \frac{1}{2}{}^{H}\left(y^s R_{sij}^{h}\partial_h\right) = \frac{1}{2} y^s R_{sij}^{h} e_h$

olduğundan

$$ {}^S\Gamma_{\bar{i}\bar{j}}^{h} = \frac{1}{2} y^s R_{sij}^{h}, \ {}^S\Gamma_{\bar{i}\bar{j}}^{\bar{h}} = 0 \tag{4.21} $$

elde edilir.

iv. ${}^S\nabla_{{}^V\partial_i}{}^V\partial_j = 0 \Rightarrow {}^S\Gamma_{\bar{i}\bar{j}}\, e_H = 0$ olduğundan

$$ {}^S\Gamma_{\bar{i}\bar{j}}^{h} e_h + {}^S\Gamma_{\bar{i}\bar{j}}^{\bar{h}} e_{\bar{h}} = 0 \Rightarrow {}^S\Gamma_{\bar{i}\bar{j}}^{h} = 0, \ {}^S\Gamma_{\bar{i}\bar{j}}^{\bar{h}} = 0 \tag{4.22} $$

elde edilir.

Sonuç olarak Sasaki metriğinin konneksiyon katsayıları

$$ {}^S\Gamma_{\bar{i}\bar{j}}^{h} = {}^S\Gamma_{\bar{i}\bar{j}}^{\bar{h}} = {}^S\Gamma_{i\bar{j}}^{\bar{h}} = 0, \ {}^S\Gamma_{\bar{i}\bar{j}}^{\bar{h}} = \Gamma_{ij}^{h} $$

$$ {}^S\Gamma_{\bar{i}\bar{j}}^{h} = \frac{1}{2} y^s R_{sij}^{h}, \ {}^S\Gamma_{ij}^{\bar{h}} = -\frac{1}{2} y^s R_{ijs}^{k} $$

$$ {}^S\Gamma_{i\bar{j}}^{h} = \frac{1}{2} y^s R_{sji}^{h}, \ {}^S\Gamma_{ij}^{h} = \Gamma_{ij}^{h} \tag{4.23} $$

olarak bulunur (Cengiz and Salimov 2002).

Kotanjant demetde ise

$$ {}^S\nabla_{{}^H X}{}^H Y = {}^S\Gamma_{ji}^{h} e_h + {}^S\Gamma_{ji}^{h} e_{\bar{h}} = \Gamma_{ji}^{h} e_h + \sum_h \frac{1}{2} P_n R_{jih}^{m} e_{\bar{h}} $$

olduğundan

$$ {}^{S}\nabla_{{}^{H}X}{}^{H}Y = {}^{H}\left(\Gamma_{ji}^{h}\partial_h\right)+\frac{1}{2}\gamma\left(R\left(\partial_j,\partial_i\right)\right)e_{\bar{h}} $$

$$ = {}^{H}\left(\nabla_{\partial_j}\partial_i\right)+\frac{1}{2}\gamma\left(R\left(\partial_j,\partial_i\right)\right) $$

$$ = {}^{H}\left(\nabla_X Y\right)+\frac{1}{2}\gamma\left(R\left(X,Y\right)\right) $$

elde edilir.

$$ {}^{S}\nabla_{{}^{V}\omega}{}^{V}Q = {}^{V}\omega^{\alpha}\left(e_{\alpha}{}^{V}Q^{\beta} + {}^{S}\Gamma_{\alpha\gamma}^{\beta}\,{}^{V}Q^{\gamma}\right) $$

eşitliğinde Q kovektör alanı olmak üzere,

$$ {}^{S}\nabla_{{}^{V}\omega}{}^{V}Q = {}^{V}\omega^{i}\left(e_{i}{}^{V}Q^{\beta} + {}^{S}\Gamma_{ik}^{\beta}\,{}^{V}Q^{k} + {}^{S}\Gamma_{i\bar{k}}^{\beta}\,{}^{V}Q^{\bar{k}}\right) + {}^{V}\omega^{\bar{i}}\left(e_{\bar{i}}{}^{V}Q^{\beta} + {}^{S}\Gamma_{\bar{i}k}^{\beta}\,{}^{V}Q^{k} + {}^{S}\Gamma_{\bar{i}\bar{k}}^{\beta}\,{}^{V}Q^{\bar{k}}\right) $$

olarak bulunur.

Kotanjant demetde ${}^{V}\omega = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_i \end{pmatrix}$ olup

$$ \beta = j \Rightarrow {}^{V}\omega^{\bar{i}}\left(e_{\bar{i}}{}^{V}Q^{j} + {}^{S}\Gamma_{\bar{i}k}^{\beta}\,{}^{V}Q^{j} + {}^{S}\Gamma_{\bar{i}\bar{k}}^{j}\,{}^{V}Q^{\bar{j}}\right) = 0 $$

$$ \beta = \bar{j} \Rightarrow {}^{V}\omega^{\bar{i}}\left(e_{\bar{i}}{}^{V}Q^{\bar{j}} + {}^{S}\Gamma_{\bar{i}k}^{\bar{j}}\,{}^{V}Q^{\bar{j}} + {}^{S}\Gamma_{\bar{i}\bar{k}}^{\bar{j}}\,{}^{V}Q^{\bar{j}}\right) \Rightarrow \omega_i\partial_{\bar{i}}Q_j = 0 $$

koordinatları elde edilir.

Buradan ${}^{S}\nabla^{V}\omega^{V}Q=0$ olarak bulunur. (4.24)

Adapte olunmuş çatıya göre ${}^{V}\omega=\begin{pmatrix}0\\ \omega_i\end{pmatrix}, {}^{H}X=\begin{pmatrix}X^i\\ 0\end{pmatrix}$

eşitliklerinden

$$ {}^{S}\nabla^{V}\omega^{H}Y={}^{V}\omega^{\alpha}\left(e_{\alpha}{}^{H}Y^{\beta}+{}^{S}\Gamma^{\beta}_{\alpha\gamma}{}^{H}Y^{\gamma}\right) $$

$$ ={}^{V}\omega^{i}\left(e_{i}{}^{H}Y^{\beta}+{}^{S}\Gamma^{\beta}_{ik}{}^{H}Y^{k}+{}^{S}\Gamma^{\beta}_{i\bar{k}}{}^{H}Y^{\bar{k}}\right)+{}^{V}\omega^{\bar{i}}\left(e_{\bar{i}}{}^{H}Y^{\beta}+{}^{S}\Gamma^{\beta}_{\bar{i}k}{}^{H}Y^{k}+{}^{S}\Gamma^{\beta}_{\bar{i}\bar{k}}{}^{H}Y^{\bar{k}}\right) $$

elde edilir.

$\tilde{\omega}=\left(\tilde{g}^{ij}\omega_j\right)\in T^1_0\left(M_n\right),\ \tilde{g}\circ R\left(,Y\right)\tilde{\omega}=\left(g^{js}R^{m}_{skl}Y^{k}\tilde{\omega}^{l}\right)\in T^2_0\left(M_n\right)$ olmak üzere,

$\beta=j$ ise

$$ {}^{s}\nabla^{V}\omega^{H}Y=\omega_i\left(e_{\bar{i}}{}^{H}Y^{j}+{}^{S}\Gamma^{j}_{\bar{i}k}{}^{H}Y^{k}+{}^{S}\Gamma^{j}_{\bar{i}\bar{k}}{}^{H}Y^{\bar{k}}\right) $$

$$ =\omega_i\left(e_{\bar{i}}Y^{j}+\frac{1}{2}P_mR^{j}_{\bullet k\bullet}{}^{im}Y^{k}\right) $$

$$ \frac{1}{2}P_mR^{j}_{\bullet k\bullet}{}^{im}Y^{k}=\frac{1}{2}P_mg^{il}g^{js}R^{m}_{skl}Y^{k}\omega_i $$

$$=\frac{1}{2}P_m g^{js}R^m_{skl}Y^k\omega^l$$

$$=\frac{1}{2}{}^H\left(P\left(\tilde{g}\circ R\left(,Y\right)\tilde{\omega}\right)\right)$$

olarak bulunur.

$\tilde{\omega}=\left(\tilde{g}^{ij}\omega_j\right)\in T^1_0\left(M_n\right)$, $\tilde{g}\circ R\left(,Y\right)\tilde{\omega}=\left(g^{js}R^m_{skl}Y^k\tilde{\omega}^l\right)\in T^2_0\left(M_n\right)$ olmak üzere,

$\beta=\bar{j}$ ise

$${}^s\nabla^V\omega^HY=\omega_i\left(e_{\bar{i}}\,{}^HY^{\bar{j}}+{}^S\Gamma^{\bar{j}}_{\bar{i}k}\,{}^HY^k+{}^S\Gamma^{\bar{j}}_{\bar{i}\bar{k}}\,{}^HY^{\bar{k}}\right)=0$$

$${}^S\nabla^V\omega^HY=\frac{1}{2}{}^H\left(P\left(\tilde{g}\circ R\left(,Y\right)\tilde{\omega}\right)\right)$$

olarak bulunur. Buradan

$${}^S\nabla^HX^V\omega={}^HX^i\left(e_i\,{}^V\omega^\beta+{}^S\Gamma^\beta_{ik}\,{}^V\omega^k+{}^S\Gamma^\beta_{i\bar{k}}\,{}^V\omega^{\bar{k}}\right)+{}^HX^{\bar{i}}\left(e_{\bar{i}}\,{}^V\omega^\beta+{}^S\Gamma^\beta_{\bar{i}k}\,{}^V\omega^k+{}^S\Gamma^\beta_{i\bar{k}}\,{}^V\omega^{\bar{k}}\right)$$

şeklindedir.

$\tilde{g}\circ R=\tilde{g}\left(R\Im,\delta\right)$ $\Im,\delta\in T^0_1\left(M_n\right)$, $\tilde{g}\circ R\left(,X\right)\tilde{\omega}=g^{ls}R^m_{skl}X^k\tilde{\omega}^l$ olmak üzere,

$\beta=j$ ise

$$ {}^{S}\nabla_{{}^{H}X}{}^{V}\omega = X^{i}\left(e_{i}{}^{V}\omega^{j} + {}^{S}\Gamma_{ik}^{j}\,{}^{V}\omega^{k} + {}^{S}\Gamma_{i\bar{k}}^{j}\,{}^{V}\omega^{\bar{k}}\right) $$

$$ = X^{i}\left(\frac{1}{2}P_{m}R_{\bullet i \bullet}^{j\ \ km}\omega_{k}\right) = X^{i}\left(\frac{1}{2}P_{m}g^{kt}g^{jl}R_{lit}^{m}\omega_{k}\right) $$

$$ = \frac{1}{2}\,{}^{H}\left(P\left(\tilde{g}\circ R\left(\,,X\right)\tilde{\omega}\right)\right) $$

olarak bulunur.

$\beta = \bar{j}$ ise

$$ {}^{S}\nabla_{{}^{H}X}{}^{V}\omega = {}^{H}X^{i}\left(e_{i}{}^{V}\omega^{j} + {}^{S}\Gamma_{ik}^{\bar{j}}\,{}^{V}\omega^{k} + {}^{S}\Gamma_{i\bar{k}}^{\bar{j}}\,{}^{V}\omega^{\bar{k}}\right) = X^{i}\left(e_{i}\omega_{j} - \Gamma_{ij}^{k}\omega_{k}\right) = {}^{V}\left(\nabla_{X}\omega\right) $$

eşitliği elde edilir. Buradan

$$ {}^{S}\nabla_{{}^{H}X}{}^{V}\omega = {}^{V}\left(\nabla_{X}\omega\right) + \frac{1}{2}\,{}^{H}\left(P\left(\tilde{g}\circ R\left(\,,X\right)\tilde{\omega}\right)\right) \tag{4.25} $$

olarak bulunur. Bu ifadede

$$ \tilde{g}\circ R\left(\,,X\right)\tilde{\omega} = \left(g^{js}R_{skl}^{m}X^{k}\tilde{\omega}^{l}\right) $$

şeklindedir (Cengiz and Salimov 2003).

Kotanjant demetde Sasaki metriğini kullanarak elde edilen eğrilik tensörü

$$ R\left(X,Y\right)Z = \nabla_{X}\nabla_{Y}Z - \nabla_{Y}\nabla_{X}Z - \nabla_{[X,Y]}Z $$

şeklindedir. Buradan eğrilik tensörünü Sasaki metriği kullanarak ifade edecek olursak;

1) $R\left({}^{V}\omega,{}^{V}Q\right){}^{V}\mathfrak{I}={}^{S}\nabla^{V}\omega{}^{S}\nabla^{V}Q{}^{V}\mathfrak{I}-{}^{S}\nabla^{V}Q{}^{S}\nabla^{V}\omega{}^{V}\mathfrak{I}-{}^{S}\nabla_{\left[{}^{V}\omega,{}^{V}Q\right]}{}^{V}\mathfrak{I}$

şeklindedir. Bu ifadede $\left[{}^{V}\omega,{}^{V}Q\right]=0$ şeklindedir.

Buradan

$$R\left({}^{V}\omega,{}^{V}Q\right){}^{V}\mathfrak{I}=0 \tag{4.26}$$

elde edilir.

2) $R\left({}^{V}\omega{}^{V}Q\right){}^{H}Y={}^{S}\nabla^{V}\omega{}^{S}\nabla^{V}Q{}^{H}Y-{}^{S}\nabla^{V}Q{}^{S}\nabla^{V}\omega{}^{H}Y-\nabla_{\left[{}^{V}\omega,{}^{V}Q\right]}{}^{H}Y$

şeklindedir.

Burada $\left[{}^{V}\omega,{}^{V}Q\right]=0$ olduğundan

$$ {}^{S}\nabla^{V}\omega{}^{H}Y=\frac{1}{2}{}^{H}\left(P\left(\tilde{g}\circ R\left(,Y\right)\tilde{\omega}\right)\right)$$

$$R\left({}^{V}\omega,{}^{V}Q\right){}^{H}Y={}^{S}\nabla^{V}\omega\left(\frac{1}{2}{}^{H}\left(P\left(\tilde{g}\circ R\left(,Y\right)\tilde{Q}\right)\right)\right)-{}^{S}\nabla^{V}Q\left(\frac{1}{2}{}^{H}\left(P\left(\tilde{g}\circ R\left(,Y\right)\tilde{\omega}\right)\right)\right)$$

$$=\frac{1}{4}{}^{H}\left(P\left(\tilde{g}\circ R\left(,P\left(\tilde{g}\circ R\left(,Y\right)\tilde{Q}\right)\right)\tilde{\omega}\right)\right)-\frac{1}{4}{}^{H}\left(P\left(\tilde{g}\circ R\left(,P\left(\tilde{g}\circ R\left(,Y\right)\tilde{\omega}\right)\right)\tilde{Q}\right)\right)$$

elde edilir.

3) $R\left({}^{H}X,{}^{V}\omega\right){}^{V}Q={}^{S}\nabla{}^{H}X\,{}^{S}\nabla{}^{V}\omega{}^{V}Q-{}^{S}\nabla{}^{V}\omega{}^{S}\nabla{}^{H}X\,{}^{V}Q-{}^{S}\nabla_{\left[{}^{H}X,{}^{V}\omega\right]}{}^{V}Q$

şeklindedir. Buradan ${}^{S}\nabla{}^{V}\omega{}^{V}Q=0$, $\left[{}^{H}X,{}^{V}\omega\right]={}^{V}\left(\nabla_{X}\omega\right)$ ve

$${}^{S}\nabla{}^{H}X\,{}^{V}\omega={}^{V}\left(\nabla_{X}\omega\right)+\frac{1}{2}{}^{H}\left(P\left(\tilde{g}\circ R\left(,X\right)\tilde{\omega}\right)\right)$$

eşitliklerinden

$$R\left({}^{H}X,{}^{V}\omega\right){}^{V}Q=-{}^{S}\nabla{}^{V}\omega\left({}^{V}\left(\nabla_{X}Q\right)+\frac{1}{2}{}^{H}\left(P\left(\tilde{g}\circ R\left(,X\right)\tilde{Q}\right)\right)\right)$$

$$=-\frac{1}{4}{}^{H}\left(P\left(\tilde{g}\circ R\left(,P\left(\tilde{g}\circ R\left(,X\right)\tilde{Q}\right)\right)\tilde{\omega}\right)\right) \qquad (4.27)$$

elde edilir (Yano and Ishihara 1973).

4.7. Kotanjant Demetde Sasaki Metriği

Kotanjant demetde Sasaki metriği

$${}^{S}g\left({}^{H}X,{}^{H}Y\right)={}^{V}\left(g\left(X,Y\right)\right)$$
$${}^{S}g\left({}^{V}\omega,{}^{H}Y\right)=0$$
$${}^{S}g\left({}^{V}\omega,{}^{V}Q\right)={}^{V}\left(g^{-1}\left(\omega,Q\right)\right)$$

eşitlikleri ile ifade edilir.

4.8. Simetrik Afin Konneksiyonunun Tam Lifti ve Riemann Genişlemesi

M de ∇ simetrik afin konneksiyonu ve M'nin koordinat komşuluğu $\{U, X^h\}$ olmak üzere U ile birlikte ∇'nın bileşenleri Γ_{ji}^h şeklindedir. Kotanjant demetde $T^*(M)$' de g $(0,2)$ tipli tensör alanı için, $\tilde{g}_{CB}$ 'nin $\pi^{-1}(U)$ ya indirgenmiş koordinatlara göre

$$\tilde{g}_{ji} = -2p_\alpha \Gamma_{ji}^\alpha,\ \tilde{g}_{\bar{j}i} = \delta_j^i,\ \tilde{g}_{j\bar{i}} = \delta_j^i,\ \tilde{g}_{\bar{j}\bar{i}} = 0 \tag{4.29}$$

bileşenlerine sahiptir.

$\tilde{g}$ tarafından verilen Pseudo Riemann metriğin ifadesi $ds^2 = 2dx^i \delta p_i$ şeklindedir. Bu formülün içindeki $\delta p_i = dp_i - p_\alpha \Gamma_{ji}^\alpha dx^j$ ifadesine ∇ simetrik afin konneksiyonunun Riemann genişlemesinin tensör alanı denir ve ∇^R olarak gösterilir. Her $X, Y \in T_0^1(M)$ ve $\omega, Q \in T_1^0(M)$ için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

$$\nabla^R\left(\omega^V, Q^V\right) = 0,\ \nabla^R\left(\omega^V, X^C\right) = \left(\omega(X)\right)^V,\ \nabla^R\left(X^C, Y^C\right) = -Y\left(\nabla_X Y + \nabla_Y X\right) \tag{4.30}$$

$\left(\tilde{g}^{BA}\right)$ matrisi $\left(\tilde{g}_{CB}\right)$ matrisinin tersi olmak üzere;

$$\left(g^{CB}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \delta_j^i \\ \delta_i^j & 2p_\alpha \Gamma_{ji}^\alpha \end{pmatrix}$$

ile tanımlıdır. $\pi^{-1}(U)$ ' da ${}^C\nabla$ 'nın $\tilde{\Gamma}_{CB}^A$ bileşenleri

$$\tilde{\Gamma}_{ji}^h = \Gamma_{ji}^h,\ \tilde{\Gamma}_{j\bar{i}}^h = 0,\ \tilde{\Gamma}_{\bar{j}i}^h = 0,\ \tilde{\Gamma}_{\bar{j}\bar{i}}^h = 0,$$

$$\tilde{\Gamma}_{ji}^{\bar{h}} = p_\alpha \left(a_h \Gamma_{ji}^{\alpha} - \alpha_j \Gamma_{ih}^{\alpha} - \alpha_i \Gamma_{jh}^{\alpha} + 2\Gamma_{ht}^{\alpha} \Gamma_{ji}^{t} \right)$$

$$\tilde{\Gamma}_{j\bar{i}}^{\bar{h}} = -\Gamma_{jh}^{i}, \quad \tilde{\Gamma}_{\bar{j}i}^{\bar{h}} = -\Gamma_{hi}^{j}, \quad \tilde{\Gamma}_{\bar{j}\bar{i}}^{\bar{h}} = 0 \tag{4.31}$$

şeklindedir (Yano and Ishihara 1973).

Önerme 4.8.1: $T^*(M)$'de M'nin ∇ afin simetrik konneksiyonu için, ${}^C\nabla$ tam liftinin kovaryant diferensiyellenmesine göre $X, Y \in T_0^1(M)$, ω, $Q \in T_1^0(M)$, $P \in T_1^1(M)$ için

$${}^C\nabla_{{}^V\omega}{}^V Q = 0, \quad {}^C\nabla_{{}^V\omega}{}^C Y = -\gamma\left(\omega \circ (\nabla Y)\right), \quad {}^C\nabla_{{}^C X}{}^V Q = {}^V(\nabla_X Q)$$

$${}^C\nabla_{{}^C X}{}^C Y = {}^C(\nabla_X Y) + \gamma\left\{(\nabla X)(\nabla Y) + (\nabla Y)(\nabla X) + R(\,,X)Y + R(\,,Y)X\right\}$$

$${}^C\nabla_{{}^V\omega}\gamma^F = \gamma(\omega \circ F), \quad {}^C\nabla_{{}^C X}\gamma^F = \gamma\left(\nabla X^F - (\nabla X)F\right)$$

$$\tag{4.32}$$

eşitlikleri geçerlidir.

Her $Z \in T_0^1(M)$ için R eğrilik tensörü

$$R(\,,X)Y)Z = R(Z,X)Y$$

şeklindedir. Buradan

$$\nabla\nabla X^Y - \nabla X\nabla Y = (\nabla Y)(\nabla X) + R(\,,X)Y$$

şeklinde ifade edilir. (4.32)'nin dördüncü denklemi

$$ {}^{C}\nabla^{C}X\,{}^{C}Y = {}^{C}\left(\nabla_X Y\right) + \gamma\left(\nabla\left(\nabla X^{Y} + \nabla_Y X\right)\right) - \gamma\left(\nabla X \nabla Y + \nabla Y \nabla X\right) \qquad (4.33) $$

olarak bulunur. $\left(4.32\right)$ kullanılarak $\pi^{-1}\left(U\right)$ üzerinde üzerinde eğrilik tensörünün $\tilde{R}_{DCB}^{A}$ bileşenlerini hesaplarsak;

$$ \tilde{R}_{kji}{}^{h} = R_{kji}{}^{h} $$

eşitliğinden

$$ \tilde{R}_{kji}{}^{\bar{h}} = p_\alpha\left(\nabla_h R_{kji}{}^{\alpha} - \nabla_i R_{kjh}{}^{\alpha} + \Gamma_{ht}{}^{\alpha} R_{kji}{}^{t} + \Gamma_{kt}{}^{\alpha} R_{ihj}{}^{t} + \Gamma_{jt}{}^{\alpha} R_{hik}{}^{t} + \Gamma_{it}{}^{\alpha} R_{kjh}{}^{t}\right) \quad (4.34) $$

olarak bulunur. Buradan

$$ \tilde{R}_{kj\bar{i}}{}^{\bar{h}} = -R_{kjh}{}^{i},\;\; \tilde{R}_{k\bar{j}i}{}^{\bar{h}} = -R_{hik}{}^{j},\;\; \tilde{R}_{\bar{k}ji}{}^{\bar{h}} = R_{hij}{}^{k} $$

elde edilir.

Önerme 4.8.2: $X,Y,Z \in T_0^1\left(M\right)$ ve $\omega,Q,\psi \in T_1^0\left(M\right)$ olmak üzere,

$$ \tilde{R}\left({}^{V}Q,{}^{V}\psi\right){}^{V}\omega = 0,\;\; \tilde{R}\left({}^{V}Q,{}^{V}\psi\right){}^{C}Z = 0,\;\; \tilde{R}\left({}^{V}Q,{}^{C}Y\right){}^{V}\omega = 0, $$

$$ \tilde{R}\left({}^{V}Q,{}^{C}Y\right){}^{C}Z = -Q\circ\left(R\left(,Z\right)Y\right),\;\; \tilde{R}\left({}^{C}X,{}^{C}Y\right){}^{V}\omega = -{}^{V}\left(\omega\circ R\left(X,Y\right)\right) \qquad (4.35) $$

eşitlikleri elde edilir. Ayrıca (4.35)'den $\tilde{R}\left({}^{C}X,{}^{C}Y\right) = \left(R\left(X,Y\right)\right)^{D} + \gamma S\left(X,Y\right)$ (4.36) elde edilir. $X,Y \in T_0^1(M)$ için (4.36) ’daki eşitlikte $R(X,Y)'$ nin diagonal lifti $R(X,Y)^D$ ile gösterilir.

S, $(1,3)$ tipli tensör alanı olmak üzere, $S(X,Y)_{ih}^{l} = \left(\nabla_h R_{kji}^l - \nabla_i R_{kjh}^l\right) X^k Y^j$ ile tanımlıdır. Burada X^h ve Y^h, X ve Y ’nin sırasıyla parçalarıdır. (4.34) ve (4.36) ’dan

$$\left(\tilde{R}\left({}^C X, {}^C Y\right)_B^A\right) = \begin{pmatrix} R(X,Y)_i^h & 0 \\ * & -R(X,Y)_h^i \end{pmatrix} \tag{4.37}$$

elde edilir. Burada $X,Y \in T_0^1(M)$ için $R(X,Y)'$ nin lokal koordinatları $R(X,Y)_i^h$ ile gösterilmiştir.

$\tilde{R}$ eğrilik tensörünün ${}^C\nabla\tilde{R}$ kovaryant türevinin $\tilde{\nabla}_E \tilde{R}_{DCB}^A$ bileşenleri

$$\begin{aligned}
\nabla_l \tilde{R}_{khi}^h &= \nabla_l R_{kji}^h \\
\tilde{\nabla}_l \tilde{R}_{kji}{}^{\bar{h}} &= p_\alpha \left\{\nabla_l \left(\nabla_h R_{kji}^\alpha - \nabla_i R_{kjh}^\alpha\right) - \Gamma_{lt}^\alpha \left(\nabla_h R_{kji}^t - \nabla_i R_{kjh}^t\right)\right. \\
&\quad + \Gamma_{ht}^\alpha \nabla_l R_{kji}^t + \Gamma_{kt}^\alpha \nabla_l R_{ihj}^t + \Gamma_{jt}^\alpha \nabla_l R_{hik}^t + \Gamma_{it}^\alpha \nabla_l R_{kjh}^\alpha \\
&\quad \left. + R_{htl}^\alpha R_{kji}^t + R_{ktl}^\alpha R_{hij}^t + R_{tjl}^\alpha R_{hik}^t + R_{til}^\alpha R_{kjh}^t \right\}, \\
\tilde{\nabla}_l R_{kj\bar{i}}^{\bar{h}} &= -\nabla_l R_{kjh}^i, \quad \tilde{\nabla}_l \tilde{R}_{k\bar{j}i}^{\bar{h}} = -\nabla_l R_{hik}^j, \\
\tilde{\nabla}_l \tilde{R}_{\bar{k}jl}^{\bar{h}} &= \nabla_l R_{hij}^k, \quad \nabla_{\bar{l}} \tilde{R}_{kji}^{\bar{h}} = \nabla_h R_{kji}^l - \nabla_i R_{kjh}^l
\end{aligned} \tag{4.38}$$

şeklindedir. Burada diğer koordinatlarda sıfıra eşittir.

∇, M üzerinde simetrik afin konneksiyon olmak üzere $\nabla_l R_{kji}^h = 0$

olup

$$\nabla_k \nabla_j R^{\alpha}_{hil} - \nabla_j \nabla_k R^{\alpha}_{hil} = -R^{t}_{kjh} R^{\alpha}_{til} - R^{t}_{kji} R^{\alpha}_{htl} - R^{t}_{kjl} R^{\alpha}_{hit} + R^{\alpha}_{kjt} R^{t}_{hil} = 0$$

$$\nabla_h \nabla_i R^{\alpha}_{jkl} - \nabla_i \nabla_h R^{\alpha}_{jkl} = -R_{hij}{}^{t} R^{\alpha}_{tkl} - R^{t}_{hik} R^{\alpha}_{jtl} - R^{t}_{hil} R^{\alpha}_{jkt} + R^{\alpha}_{hit} R^{t}_{jkl} = 0$$

elde edilir. Buradan

$$R^{\alpha}_{htl} R^{t}_{kji} + R^{\alpha}_{ktl} R^{t}_{hij} + R^{\alpha}_{tjl} R^{t}_{hik} + R^{\alpha}_{til} R^{t}_{kjh} = 0$$

olur. $(4,38)$ ’ den $\nabla_l R^{h}_{kji} = 0$ ise $\tilde{\nabla}_E \tilde{R}^{A}_{DCB} = 0$ olarak bulunur.

Önerme 4.8.3: ∇ simetrik afin konneksiyon ile birlikte M lokal olarak simetrik ise ∇'nın ${}^{C}\nabla$ tam liftle $T^*(M)$ kotanjant demetide ayrıca lokal olarak simetriktir. Burada $T^*(M)$'de ${}^{C}\nabla^{C}Z\tilde{R}\left({}^{C}X, {}^{C}Y\right)$'nin indirgenmiş koordinatlara göre bileşenleri

$$\left({}^{C}\nabla^{C}Z\tilde{R}\left({}^{C}X, {}^{C}Y\right)^{B}_{A}\right) = \begin{pmatrix} \nabla_Z R(X,Y)^{h}_{i} & 0 \\ * & -\nabla_Z R(X,Y)^{i}_{h} \end{pmatrix} \tag{4.39}$$

şeklindedir. Burada $X, Y, Z \in T^{1}_{0}(M)$ olmak üzere, $\nabla_Z R(X,Y)^{h}_{i}$ M üzerinde $\nabla_Z R(X,Y)$ ’nin lokal bileşenleridir.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu tezde Riemann ve Semi-Riemann manifoldlarında lift problemleri ayrıntılı olarak verilmiştir. Ayrıca Levi-Civita konneksiyonun tam liftinin katsayıları hesaplanmıştır. Fonksiyonun, Vektör alanının, Tensör alanlarının, 1-formun, dikey, horizontal ve tam liftleri ayrıntılı olarak incelenmiştir.

Bu tezde ilk olarak Manifold, Atlas, Diferensiyellenebilir Manifold, Tensör, Afin konneksiyon, Vektör alanı, 1-Form, Lie türevi, Dual uzay, Tensör alanı, Eğrilik ve Burulma tensörleri, Ricci tensörü, Kozsul formülü, Riemann ve Semi-Riemann manifoldu, Riemann metriği, Riemann konneksiyon, Eş afin konneksiyon, Riemann uzayı, Weyl uzayı, Tanjant demet, Kotanjant demet, Fonksiyonun vertikal lifti, Vektör alanının vertikal lifti, Dikey vektör alanı, 1-Formun vertikal lifti, Tensör alanlarının vertikal lifti, Fonksiyonun tam lifti, Vektör alanının tam lifti, 1-Formun tam lifti, Tensör alanlarının tam lifti, Kovaryant diferensiyellemenin dikey ve tam lifti, Afin konneksiyonunun tam lifti, Fonksiyonun ve Vektör alanının yatay lifti, 1-Formun yatay lifti, Yatay 1-Form alanı, Tensör alanlarının yatay lifti, Afin konneksiyonunun yatay lifti tanımlanmıştır.

İkinci olarak Eğrilik tensörünün özellikleri ispatlanmıştır. $(0,2)$ ve $(1,1)$ tipli tensörlerin vertikal lifti, tam lifti ve horizontal lifti incelenmiştir. 1-Formun, Vektör alanının, Tensör alanlarının, Afin konneksiyonunun vertikal, tam, horizontal lifti ile ilgili açıklamalar yapılıp bu konular ile ilgili teoremler ispatlanmıştır.

Üçüncü olarak Levi-Civita konneksiyonunun katsayıları hesaplanıp, tam lifti incelenmiştir. Ricci tensörünün tam lifti incelenip, vertikal lift, tam lift ve horizontal lift ile ilgili özellikler verilip ispat edilmişrir. Diagonal lift hakkında bilgi verilip, Tanjant ve Kotanjant demetde Sasaki metriği incelenmiştir. Simetrik afin konneksiyonunun tam lifti ve Riemann genişlemesi hakkında bilgi verilmiştir.

KAYNAKLAR

Bishop, R.L. and Goldberg S.I., 1968. Tensor Analysis on Manifolds. The Macmillan Company, p.19-135, New York. Interscience Publishers, New York-London.

Cengiz N., Salimov A.A., 2003. Diagonal lift in the tensor bundle and its applications. Appl. Math. Comput. 142, no. 2-3, 309-319 (SCI-Exp., USA).

Cengiz N., Salimov A.A. Geodesics in the tensor bundle of diagonal lifts. Hacet. J. Math. Stat. 31 (2002), 1-11 (Turkey).

Kobayashi, S. and Nomizu K., 1963. Foundations of differential geometry. Vol. I,New York.

O'Neill, B., 1983. Semi-Riemann Geometry With Applications to Relativity, Pure and Applied Mathematics,103. Acedemic Press,Inc. Newyork.

Sabuncuoğlu, A. 2010. Diferensiyel Geometri, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi.

Salihoğlu, H.H., 2003. Diferensiyel Geometri, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi.

Salimov A., 2013. Tensor operators and their applications. Nova Science Publishers, New York.

Salimov, A.A. and Mağden A., 2008. Diferensiyel Geometriye Giriş. Atatürk Üniversitesi.

Şahin, B., 2012. Manifoldların Diferensiyel Geometrisi, İnönü Üniversitesi Fen Fakültesi.

Yano, K and Ishihara S., 1973. Tangent and Cotangent Bundles-Differential Geometry, Marcel Dekker, Inc. Newyork,.

Yano, K. and Kon, M., 1984. Structures on Manifolds, Series in Pure Mathematics, 3. World Scientific Publishing Co., Singapore.

ÖZGEÇMİŞ

1982 yılında Ankara'da doğdu. İlköğrenimine Altındağ'da başlayıp, orta 2'ye kadar Altındağ'da öğrenimine devam edip orta 3 ve lise öğrenimini Sincan'da tamamladı. 2001 yılında Osmangazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümüne girip 3. yıl Ankara Üniversitesine yatay geçiş yaparak 2005'de mezun oldu. Daha sonra 2005 yılında Gazi Üniversitesinde tezsiz yüksek lisansına başlayıp 2007 yılında mezun oldu. 2013 yılında Bayburt merkez Bayburt Anadolu Lisesine Matematik öğretmeni olarak atandı ve görevine devam etmektedir. Erzurum Atatürk Üniversitesine 2014 yılında yüksek lisans öğrencisi olarak yerleşip öğrenimine halen devam etmektedir.