



**DİFERANSİYEL CEBİRSEL DENKLEMLER
VE KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL-
CEBİRSEL DENKLEMLERİN HOMOTOPI
PERTÜRBE DÖNÜŞÜM METODU VE
YENİ İTERATİF DÖNÜŞÜM METODU İLE ÇÖZÜMÜ**

Ramin NAJAFİ BAGHCHEH JOUGHİ

**Doktora Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalı
Prof. Dr. Ercan ÇELİK
2016
Her hakkı saklıdır**

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

DİFERANSİYEL CEBİRSEL DENKLEMLER VE KESİRLİ
MERTEBEDEN DİFERANSİYEL-CEBİRSEL DENKLEMLERİN
HOMOTOPI PERTÜRBE DÖNÜŞÜM METODU VE YENİ
İTERATİF DÖNÜŞÜM METODU İLE ÇÖZÜMÜ

Ramin NAJAFİ BAGHCHEH JOUGHİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
Uygulamalı Matematik Bilim Dalı

ERZURUM
2016

Her hakkı saklıdır



T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü



TEZ ONAY FORMU

DİFERANSİYEL CEBİRSEL DENKLEMLER VE KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL-CEBİRSEL DENKLEMLERİN HOMOTOPİ PERTÜRBE DÖNÜŞÜM METODU VE YENİ İTERATİF DÖNÜŞÜM METODU İLE ÇÖZÜMÜ

Prof. Dr. Ercan ÇELİK danışmanlığında, Ramin Najafi Banghchen Joughi tarafından hazırlanan bu çalışma, 05/12/2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik Bilim Dalı'nda Doktora tezi olarak **oybirliği (5/5)** ile kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Cengiz ÇINAR

İmza :

Üye : Prof. Dr. Ercan ÇELİK

İmza :

Üye : Prof. Dr. Murat SUBAŞI

İmza :

Üye : Prof. Dr. Şakir AYDOĞAN

İmza :

Üye : Doç. Dr. Devrim ÇAKMAK

İmza :

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu'nun 08/12/2016 tarih ve 47/16 nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Cavit KAZAZ
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildiriş, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Doktora Tezi

DİFERANSİYEL CEBİRSEL DENKLEMLER VE KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL-CEBİRSEL DENKLEMLERİN HOMOTOPİ PERTÜRBE DÖNÜŞÜM METODU VE YENİ İTERATİF DÖNÜŞÜM METODU İLE ÇÖZÜMÜ

Ramin NAJAFİ BAGHCHEH JOUGHİ

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ercan ÇELİK

Beş bölümden oluşan bu çalışmanın birinci bölümünde literatür özetinden bahsedildi, ikinci bölümde bazı özel fonksiyonlar tanıtıldı ve tezde kullanılacak olan çeşitli tanım ve teoremler verildi, üçüncü bölümde tamsayı mertebeden ve kesirli mertebeden diferansiyel denklemler için Homotopi pertürbasyon metodu (HPM), Homotopi pertürbasyon dönüşüm metodu (HPTM), Yeni iteratif metod (NIM) ve Yeni iteratif dönüşüm metodu (NITM) tanıtıldı ve analiz edildi. Tezin esas kısmı olan dördüncü bölümde, HPTM ve NITM tamsayı ve kesirli mertebeden diferansiyel cebirsel denklemler üzerine uygulanarak çözümler elde edildi. Son bölümde ise metotlar karşılaştırıldı ve elde edilen sonuçlar değerlendirildi.

2016, 102 sayfa

Anahtar Kelimeler: Homotopi pertürbasyon dönüşüm metodu (HPTM), Yeni iteratif Sumudu dönüşüm metodu (NITM), Diferansiyel-cebirsel denklemler, Kesirli mertebeden diferansiyel- cebirsel denklemler.

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

SOLUTION OF FRACTIONAL DIFFERENTIAL ALGEBRAIC EQUATIONS BY NEW ITERATIVE TRANSFORM METHOD AND HOMOTOPY PERTURBATION TRANSFORM METHODS

Ramin NAJAFI BAGHCHEH JOUGHİ

Ataturk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Department of Applied Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Ercan ÇELİK

This study consists of five parts. Part I deals with the literature summary, in part II some particular functions are introduced and various definitions and theorems to be used in the thesis are given. In part III, Homotopy perturbation method (HPM), Homotopy perturbation transform method (HPTM), New iterative method (NIM), New iterative transform method (NITM) are introduced and analyzed for differential equations which are integer and fractional order. In part IV, which is the main part of the thesis, by applying HPTM, NITM into the differential-algebraic equations of integer and fractional order, solutions are obtained. In the last part, applied methods are compared within themselves and obtained results are evaluated.

2016, 102 pages

Keywords: Homotopy perturbation transform method, New iterative transform method, Differential- algebraic equation, Fractional differential- algebraic equation,

TEŞEKKÜR

Doktora tezi olarak sunduğum bu alıőma, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü'nde hazırlanmıştır.

Bu alıőmada bana her türlü kolaylığı sağlayan, tezin her aőamasında beni destekleyen çok değerli hocam Sayın Prof. Dr. Ercan ÇELİK'e en içten dileklerle teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Tezimin hazırlanması sürecinde benden yardımlarını esirgemeyen Iğdır Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Sayın Yrd. Doç.Dr. Gökçe Dilek KÜÇÜK ve Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Aktüerya Bölümünde görev yapan Sayın Yrd. Doç. Dr. Mesut KARABACAK'a teőekkürlerimi ve őükranlarımı sunarım.

Ramin NAJAFİ

Ekim, 2016

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ.....	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	ix
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	4
2.1. Kesirli Analiz.....	11
2.1.1. Riemann-Liouville kesirli türev.....	12
2.1.2. Caputo kesirli türev.....	13
2.1.3. Kesirli operatörlerin Laplace ve Sumudu dönüşümü.....	14
2.2. Mittag-Leffler Fonksiyonu.....	16
2.3. Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemler.....	18
2.4. Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemlerle Integral Denklemler Arasındaki İlişkiler.....	20
2.5. Kesirli Mertebeli Diferansiyel-Cebirsel Denklemler.....	21
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	23
3.1. Homotopi Kavramı.....	23
3.2. Homotopi Pertürbasyon Metodu (HPM).....	25
3.3. Homotopi Pertürbasyon Dönüşüm Metodu (HPTM).....	34
3.4. Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemler İçin Homotopi Pertürbasyon Sumudu Dönüşüm Metodu (HPSTM).....	38
3.5. Yeni İteratif Metodu (NIM).....	46
3.6. Yeni İteratif Laplace Dönüşüm Metodu (NILTM).....	49
4. ARAŞTIRMA BULGULARI.....	55
4.1. Diferansiyel-Cebirsel Denklemlerin Homotopi Pertürbasyon Dönüşüm Metodu ve Yeni İteratif Dönüşüm Metoduyla Çözümü.....	55

4.2. Kesirli Mertebeden Diferansiyel-Cebirsel Denklemlerin Homotopi Pertürbasyon Dönüşüm Metodu ve Yeni Iteratif Dönüşüm Metoduyla Çözümü	67
5. TARTIŞMA ve SONUÇ.....	98
KAYNAKLAR	99
ÖZGEÇMİŞ	103



SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$\Gamma(z)$	Euler's gamma fonksiyonu
$B(z, w)$	Beta fonksiyonu
L	Laplace dönüşümü
\mathcal{S}	Sumudu dönüşümü
I_0^α	Riemann-Liouville kesirli integral
D_0^α	Riemann-Liouville kesirli türev
D_*^α	Caputo kesirli türev
E_α	Bir parametrelili Mittag-leffler fonksiyonu
$E_{\alpha,\beta}$	İki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu
$E_{\alpha,\beta}^\gamma$	Üç parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu
HPM	Homotopi pertürbasyon metodu
HPTM	Homotopi pertürbasyon dönüşüm metodu
HPSTM	Homotopi pertürbasyon Sumudu dönüşüm metodu
NIM	Yeni iteratif metodu
NILTM	Yeni iteratif Laplace dönüşüm metodu

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1. Sürekli deformasyon $H(x; q): \sin\pi x \sim 8x(1-x)$ homotopisinden	24
Şekil 4.1. (4.22)'de NILTM ile elde edilen $x(t)$ yaklaşık çözümüne ve tam çözüme ait grafik	66
Şekil 4.2. (4.22)'de NILTM ile elde edilen $y(t)$ yaklaşık çözümüne ve tam çözüme ait grafik	67
Şekil 4.3. $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ için (4.44)'te HPSTM ile elde edilen $x(t)$ yaklaşık çözümüne ve tam çözüme ait grafik	79
Şekil 4.4. $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ için (4.44)'te HPSTM ile elde edilen $y(t)$ yaklaşık çözümüne ve tam çözüme ait grafik	80
Şekil 4.5. $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ için (4.44)'te HPSTM ile elde edilen $z(t)$ yaklaşık çözümüne ve tam çözüme ait grafik	81
Şekil 4.6. (4.44)'te HPSTM ile elde edilen $x(t)$ yaklaşık çözüm fonksiyonunun farklı α değerlerine ait grafik.....	82
Şekil 4.7. (4.44)'te HPSTM ile elde edilen $y(t)$ yaklaşık çözüm fonksiyonunun farklı α değerlerine ait grafik.....	82
Şekil 4.8. (4.44)'te HPSTM ile elde edilen $z(t)$ yaklaşık çözüm fonksiyonunun farklı α değerlerine ait grafik.....	83
Şekil 4.9. $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ için (4.64)'te NILTM ile elde edilen $x(t)$ yaklaşık çözümüne ve tam çözüme ait grafik	93
Şekil 4.10. $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ için (4.64)'te NILTM ile elde edilen $y(t)$ yaklaşık çözümüne ve tam çözüme ait grafik.....	94
Şekil 4.11. $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ için (4.64)'te NILTM ile elde edilen $z(t)$ yaklaşık çözümüne ve tam çözüme ait grafik.....	95
Şekil 4.12. (4.64)'te NILTM ile elde edilen $x(t)$ yaklaşık çözüm fonksiyonunun farklı α değerlerine ait grafik	96
Şekil 4.13. (4.64)'te NILTM ile elde edilen $y(t)$ yaklaşık çözüm fonksiyonunun farklı α değerlerine ait grafik	97

Şekil 4.14. (4.64)'te NILTM ile elde edilen $z(t)$ yaklaşık çözüm fonksiyonunun farklı α değerlerine ait grafik97



ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 4.1. (4.22) diferansiyel cebirsel denklem sistemindeki $x(t)$ fonksiyonu için mutlak hata tablosu	66
Çizelge 4.2. (4.22) diferansiyel cebirsel denklem sistemindeki $y(t)$ fonksiyonu için mutlak hata tablosu	67
Çizelge 4.3. $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ için (4.44) kesirli mertebeye sahip diferansiyel cebirsel denklem sistemindeki $x(t)$ fonksiyonu için mutlak hata tablosu	79
Çizelge 4.4. $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ için (4.44) kesirli mertebeye sahip diferansiyel cebirsel denklem sistemindeki $y(t)$ fonksiyonu için mutlak hata tablosu	80
Çizelge 4.5. $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ için (4.44) kesirli mertebeye sahip diferansiyel cebirsel denklem sistemindeki $z(t)$ fonksiyonu için mutlak hata tablosu	81
Çizelge 4.6. $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ için (4.64) kesirli mertebeye sahip diferansiyel cebirsel denklem sistemindeki $x(t)$ fonksiyonu için mutlak hata tablosu	94
Çizelge 4.7. $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ için (4.64) kesirli mertebeye sahip diferansiyel cebirsel denklem sistemindeki $y(t)$ fonksiyonu için mutlak hata tablosu	95
Çizelge 4.8. $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ için (4.64) kesirli mertebeye sahip diferansiyel cebirsel denklem sistemindeki $z(t)$ fonksiyonu için mutlak hata tablosu	96

1. GİRİŞ

Diferansiyel cebirsel denklemler (DAEs) ilk kez Petzold (1982) tarafından kullanılmıştır. Bu denklemler son yıllarda güçlü potansiyel uygulamalarından dolayı büyük ölçüde önem ve popülerlik kazanmıştır. DAEs uygulamaları elektrik ağları, devre analizi, kontrol teorisi, robot teknolojisi, güç sistemleri, diferensiyel ve cebirsel denklemlerle ilgili modellenen kimyasal süreçlerin gösterimleri gibi bilim ve mühendislik alanlarında karşımıza çıkar (Brenan *et al.* 1989; Çelik *et al.* 2003; Çelik and Bayram 2004; Çelik and Bayram 2005; Kunkel and Mehrmann 2006). Runge-Kutta metodu (Hairer *et al.* 1989; Ascher and Petzold 1991; Higuera and Carcia-Celayta 1999), Pade yaklaşım metodu (Çelik and Bayram 2003; Çelik 2004; Güzel and Bayram 2006), Adomian ayrıştırma metodu (Çelik *et al.* 2003; Hosseini 2006), varyasyonel iterasyon metodu (Soltanian *et al.* 2009), diferansiyel dönüşüm yöntemi (Ayaz 2004) gibi metodlar bu tür denklemlerin çözümünü bulmak için kullanılmıştır.

Tam sayı mertebeli olmayan diferansiyel denklemler fizik (Barkari *et al.* 2000), kimya ve biokimya (Yuste *et al.* 2004), kontrol (Wang and Zhou 2011; Wang *et al.* 2012; Haghghi *et al.* 2014), tıp (Hall and Barrick 2008) ve diğer bilim alanlarında birçok sistemin matematik modellemesinde temel bir öneme sahiptir (Hilfer 2000; Kilbas *et al.* 2006; Diethelm 2010). Kesirli diferansiyel denklemler hafızanın tanımı ve birçok materyal ve fiziksel işlemin kalıtsal özellikleri için mükemmel bir araç sağlamaktadır. Klasik tam sayı mertebeli modellerine nazaran kesirli operatör içeren modellerin esas avantajı budur. Kesirli diferansiyel denklemlerin çözümü çok zordur. Genelde Kesirli diferansiyel denklemler için gerçek sonucu elde eden bir metot yoktur. Çoğu kesirli diferansiyel denklem analitik çözüme sahip değildir, bu yüzden nümerik teknikler kullanılmaktadır. Bu amaçla son dönemde yapılan çalışmalarda varyasyonel iterasyon metodu (Odibat and Momani 2006; Abbasbandy 2007), homotopi analiz metodu (Song and Zhang 2007; Jafari and Seifi 2009; Liao 2014a, 2012b, 2004c), Adomian ayrıştırma metodu (Ray and Bera 2005; Jafari and Daftardar-Gejji 2006a, 2006b), Laplace ayrıştırma metodu (Khan and Austin 2010) gibi yaklaşık çözüm yöntemlerine sıklıkla yer verilmiştir.

Son yıllarda, önemli matematiksel modeller kesirli mertebeden diferansiyel cebirsel denklem sistemleri ile açıklanmaktadır. Kesirli mertebeye sahip diferansiyel-cebirselle denklemlerin çözümlerini bulmak için varyasyonel iterasyon metodu (küçük 2014, İbiş and Bayram, 2011), Homotopi analiz metodu (Zurigat *et al.* 2010; Küçük 2014) ve Adomian Ayrışım Metodu (İbiş and Bayram 2011; Küçük 2014) gibi metodlar kullanılmıştır.

İlk kez Daftardar-Gejji ve Jafari (2006) tarafından önerilen yeni iteratif metodu (NIM), lineer ve lineer olmayan fonksiyonel diferansiyel denklemlerin çözümü için bir tekniktir (Daftardar-Gejji and Jafari 2006). Bu metod, cebirsel denklemleri, integral denklemleri, tam sayı ve kesirli mertebeli adi ve kısmi diferansiyel denklemleri ve denklemler sistemi gibi lineer olmayan denklemlerin çözümü için yararlı olduğu İspatlanmıştır. NIM lineer ve lineer olmayan denklemler için etkili bir yöntemdir. Araştırmacılar bu metodu kullanarak diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleriyle ilgili çalışmalar yapmışlardır (Bhalekar and Daftardar-Gejji 2008; Noor *et al.* 2015). İlk kez bu tezde önerilen yeni iteratif dönüşüm metodu (NITM), yeni iteratif metodu ve Laplace dönüşümünün birleşimidir.

Homotopi pertürbasyon metodu (HPM), 1998 yılında Ji-Huan He tarafından verilmiştir (He 1999). He, metodu oluştururken pertürbasyon tekniği ile homotopi kavramını birleştirmiş ve nonlinear problemleri, çözümü kolay lineer problemlere dönüştürmüştür. Çözümlerin seri şeklinde olması ve bazı durumlarda çözümlerin kapalı formlarının elde edilebilmesi, bu yöntemleri farklı dallarda çalışan bilim adamları arasında popüler kılmış ve çözümlerin farklı yorumlarının yapılabilmesini sağlamıştır. Birçok araştırmacı homotopi pertürbasyon metodunu çeşitli problemlere uygulamıştır (Odibat and Momani 2006; Abbasbandy 2006; Momani and Odibat 2007; Ozis and Agirseven 2008). Homotopi pertürbasyon dönüşüm metodu, Sumudu dönüşümü, homotopi pertürbasyon metodu ve He polinomlarının bir kombinasyonudur. Önerilen algoritma kapalı bir biçimde çözüme yol açabilecek bir hızla yakınsak seri çözüm sağlar. Bu yöntemin avantajı, lineer ve lineer olmayan, kesirli ve kesirli olmayan, adi ve kısmi diferansiyel

denklemlerin çözümlerini elde etmek için iki güçlü metodun birleştirmesidir (Singh *et al.* 2011, 2013).

Bu tezde, kesirli mertebeden diferansiyel-cebirsal denklemlerin analitik ve nümerik çözümleri incelenecektir. Önce kesirli mertebeden diferansiyel denklemler, diferansiyel-cebirsal denklemler ve kesirli mertebeden diferansiyel-cebirsal denklemler tanıtılacak ve daha sonra kesirli mertebeden diferansiyel-cebirsal denklemlerin analitik ve nümerik çözümlerine geçilecektir.

Yeni iteratif dönüşüm yöntemi ise diferansiyel denklemler ve diferansiyel cebirsal denklemlere ilk kez tarafımızdan uygulanmaktadır.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde tezde kullanılan bazı temel kavramlar verilecektir.

Tanım 2.1: Bir bağımsız değişken ile bir bağımlı değişken ve bağımlı değişkenin bağımsız değişkene göre türevlerini ihtiva eden denkleme diferansiyel denklem denir. Genel olarak;

$$F(t, u, u', u'', \dots, u^{(n)}) = 0, \quad (2.1)$$

şeklinde gösterilir. Burada $u^{(n)}$, u 'nun t 'ye göre n inci mertebeden türevidir. (2.1) denklemini $u^{(n)}$ ye göre çözülebilirse;

$$u^{(n)} = f(t, u, u', u'', \dots, u^{(n-1)}), \quad (2.2)$$

formu elde edilir. Bu ise (2.1)'in açık formda yazılmış şeklidir.

Tanım 2.2: t bir reel değişken olmak üzere

$$p_n(t)u^{(n)} + p_{(n-1)}(t)u^{(n-1)} + \dots + p_1(t)u' + p_0(t)u = r(t)$$

şeklindeki denklemlere lineer diferansiyel denklem denir. Burada, eşitliğin sağ tarafındaki r ve sol tarafta ki $p_0, p_1, p_2, \dots, p_{(n-1)}, p_n$ katsayıları t değişkenine bağlıdır.

Tanım 2.2: Bir bağımlı değişken (bilinmeyen fonksiyon) ile iki veya daha çok bağımsız değişken ve bağımlı değişkenin bağımsız değişkenlere göre kısmi türevlerini ihtiva eden bir bağıntıya kısmi diferansiyel denklem denir. Buna göre u bağımlı x_1, x_2, \dots, x_n bağımsız değişkenler olmak üzere

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n}, u_{x_1x_1}, u_{x_1x_2}, \dots) = 0, \quad (2.3)$$

bağıntısı bir bağımlı ve n –bağımsız değişkenli kısmi diferansiyel denklemdir. Örneğin,

$$u_{xx} + u_{yy} + \lambda u = 0, \quad (\text{Helmholtz's denklemi})$$

$$u_{tt} + au_t - u_{xx} = 0, \quad (\text{Telegraph denklemi})$$

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0, \quad (\text{KdV denklemi})$$

birer kısmi diferansiyel denklemdir.

Tanım 2.3: k . dereceden bir

$$g(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

polinomunu göz önüne alalım. Bu polinomun sıfıra eşitlenmesiyle elde edilen

$$a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0,$$

şeklindeki denkleme cebirsel denklem denir. Pozitif k tamsayısına $g(x) = 0$ denkleminin derecesi denir. $g(x) = 0$ polinomunda $g(x_i) = 0$ denklemini sağlayan x_i ye denklemin kökü denir.

Tanım 2.4: Diferansiyel-cebirselsel denklem genel halde $F \in \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$F(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0, \quad (2.4)$$

ve

$$F(t, x(t), \dot{x}(t)) = \begin{pmatrix} F_1(t, x(t), \dot{x}(t)) \\ F_2(t, x(t), \dot{x}(t)) \\ \vdots \\ F_n(t, x(t), \dot{x}(t)) \end{pmatrix},$$

formundadır. (2.4) denkleminde genel lineer olmayan kapalı diferansiyel-cebirselleştirilmiş denklemdir. Diferansiyel-cebirselleştirilmiş denklemin yarı açık formda,

$$\dot{x} = f(t, x, y), \quad (2.5)$$

$$0 = g(t, x, y), \quad (2.6)$$

şeklinde yazılabilir. Dikkat edilirse y değişkeninin türevi yukarıda bulunmamaktadır işte böyle bir y değişkeni cebirsel değişken, x değişkeni ise diferansiyel değişken olarak adlandırılır. (2.6) denkleminde ise cebirsel denklemdir. Diferansiyel cebirsel denklemler $\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}$ Jakobiyen matrisinin singüler olmasıyla açıklanır (Kunkel and Mehrmann 2006).

Örnek 2.5: Van der Pol denklemi

$$\dot{x} = y,$$

$$\varepsilon \dot{y} = (1 - x^2)y - x,$$

limit $\varepsilon \rightarrow 0$ durumu aşağıdaki gibi diferansiyel-cebirselleştirilmiş denkleme sahiptir,

$$\dot{x} = y,$$

$$0 = (1 - x^2)y - x.$$

Tanım 2.6: (Gamma Fonksiyonu) Euler gamma fonksiyonu kesirli analizin temel fonksiyonlardan birisi olup aşağıdaki şekilde tanımlanır. $z > 0$ için

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Gamma fonksiyonunun en belirgin özelliklerinden birkaçı aşağıdaki gibi verilebilir:

I) $\Gamma(1) = 1,$

II) $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z),$

III) $\Gamma(z + 1) = z!, \quad z \in \mathbb{N},$

IV) $\Gamma(z)\Gamma(1 - z) = \frac{\pi}{\sin\pi z}.$

Gamma fonksiyonu pozitif bölgede her noktada tanımlı olmasına karşın, negatif tamsayı değerlerinde sonsuza gitmektedir (Diethelm, 2010).

Tanım 2.7: (Beta Fonksiyonu) $z, w \in \mathbb{R}^+$ olsun. Bu takdirde Beta fonksiyonu

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1} (1 - t)^{w-1} dt$$

şeklinde tanımlanır. En belirgin özelliklerinden birisi ise

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z + w)},$$

dir (Diethelm 2010).

Tanım 2.8: (Laplace Dönüşümü) $t \geq 0$ için $f(t)$ fonksiyonu verilmiş olsun. f nin Laplace dönüşümü

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

genelleştirilmiş integralinin yakınsak olduğu tüm s değerleri için tanımlanan F fonksiyonudur. Bazı fonksiyonların Laplace dönüşümleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} f(t) = 1 & & F(s) = \frac{1}{s}, \\ f(t) = t^{\alpha-1} & & F(s) = \frac{\Gamma(\alpha)}{s^{\alpha}}, \quad \alpha > 0 \\ f(t) = e^{\alpha t} & & F(s) = \frac{1}{s - \alpha}, \quad \alpha > 0 \\ f(t) = t^{k-1} e^{\alpha t} & & F(s) = \frac{\Gamma(k)}{(s - \alpha)^k}, \quad k > 0, \alpha > 0. \end{aligned}$$

Laplace dönüşümünün bazı özellikleri aşağıdaki teoremlerle verilebilir (Belgacem *et al.* 2003; 2006; Dyke 2014).

Teorem 2.9: $F(s)$ ve $G(s)$ sırasıyla $f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonlarının Laplace dönüşümü olmak üzere

$$L[f(t) + g(t)] = L[f(t)] + L[g(t)] = F(s) + G(s)$$

dir.

Teorem 2.10: $F(s)$, $f(t)$ fonksiyonun Laplace dönüşümü ise $F(s - a)$, $e^{at} f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümüdür.

Teorem 2.11: $F(s) = L[f(t)]$ olmak üzere

$$L[f'(t)] = sL[f(t)] - f(0) = sF(s) - f(0)$$

dir.

Teorem 2.12: $F(s)$, $f(t)$ fonksiyonun Laplace dönüşümü olmak üzere

$$L\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{F(s)}{s}$$

dir.

Tanım 2.13: (Konvolüsyon)

$$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

integraline konvolüsyon integral veya f ve g fonksiyonlarının konvolüsyonu denir ve

$$(f * g)(x) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

ile gösterilir.

Teorem 2.14: $F(s)$ ve $G(s)$ sırasıyla $f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonların Laplace dönüşümü olmak üzere

$$L[(f * g)(t)] = L[f(t)] \times L[g(t)] = F(s) \times G(s)$$

dir.

Tanım 2.15: Laplace dönüşümünün tersi L^{-1} ile gösterilir ve

$$L^{-1} \circ L = I$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.16: Sumudu dönüşümü

$$A = \left\{ f(t) \mid \exists M, \tau_1, \tau_2 > 0, |f(t)| < M e^{\frac{|t|}{\tau_j}}, \quad t \in (-1)^j \times [0, \infty) \right\},$$

fonksiyonlar kümesi üzerinde

$$G(p) = \mathbb{S}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(pt) e^{-t} dt, \quad p \in (-\tau_1, \tau_2) \quad (2.7)$$

şeklinde tanımlanır (Watugala 1993; Belgacem *et al.* 2003, 2006).

Sumudu dönüşümüyle, Laplace dönüşümü arasında aşağıdaki gibi bir bağıntı vardır:

$$G\left(\frac{1}{s}\right) = sF(s) \quad F\left(\frac{1}{p}\right) = pG(p) \quad (2.8)$$

burada $F(s)$, $f(t)$ fonksiyonun Laplace dönüşümüdür.

Bazı fonksiyonların Sumudu dönüşümü aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\mathbb{S}[1] = 1$$

$$\mathbb{S}[e^{at}] = \frac{1}{1 - ap}$$

$$\mathbb{S}[t^\alpha] = \Gamma(1 + \alpha)p^{-\alpha}, \quad \alpha > 0$$

$$\mathbb{S}[\sin at] = \frac{ap}{1 + a^2p^2}$$

$$\mathbb{S}[\cos at] = \frac{1}{1 + a^2p^2}$$

$$\mathbb{S}[tf(t)] = p^2 \frac{dG(p)}{dp} + pG(p)$$

$$\mathbb{S}[f'(t)] = \frac{G(p) - f(0)}{p}$$

$$\mathbb{S}[tf'(t)] = p \frac{dG(p)}{dp}$$

ve Sumudu dönüşümünün tersi ise;

$$\mathbb{S}^{-1}[G(p)] = f(t) \tag{2.9}$$

ile verilir.

2.1. Kesirli Analiz

Kesirli mertebeden türevlerin birbirinden farklı ve görünürde birbiriyle uyuşmayan birçok tanımı literatürde mevcuttur. Kesirli analiz integral ve türevin tamsayı olmayan mertebeye genellemesidir. Son on yılda, kesirli analizin çeşitli olayları modellemede temel bir rol oynadığı görülmüştür. Kesirli mertebeden türevlerin farklı bir çok tanımı bulunmaktadır. Esasen bu tanımlar Riemann-Liouville türev tanımının varyantlarıdır. Çalışmamızda başlangıç koşullarını içeren kesirli diferansiyel-cebirselsel denklemlerin

analitik ve nümerik çözümünü esas alındığından, bu tip problemler için her ikisi de kullanılabilir durumda olan Riemann-Liouville ve Caputo türev tanımları birlikte verilmiştir (Samko et al 1987; Podlubny 1999; Diethelm 2010).

Tanım 2.1.1: $b > 0$ olmak üzere $f \in L_1[0, b]$ fonksiyonunun $\alpha \in (0, \infty)$ mertebeli Riemann-Liouville kesirli integrali

$$I_0^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \xi)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi \quad (2.10)$$

şeklinde tanımlanır. $\alpha = 0$ için $I_0^\alpha = I$ birim operatörü tanımlanır.

Kesirli integral için aşağıdaki özellikler yazılabilir:

$$I_0^\alpha I_0^\beta f(t) = I_0^\beta I_0^\alpha f(t) = I_0^{\alpha+\beta} f(t)$$

$$I_0^\alpha t^\beta = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} t^{\alpha+\beta}, \quad \beta > -1.$$

2.1.1. Riemann-Liouville kesirli türev

Tanım 2.1.1.1: $\alpha \in (0, \infty)$ ve $m = [\alpha] + 1$ olsun. $f \in L_1[0, b]$ fonksiyonunun Riemann-Liouville kesirli türevi

$$D_0^\alpha f(t) = D^m I_0^{m-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_0^t (t - \xi)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi$$

şeklinde tanımlanır. $\alpha = 0$ için $D_0^\alpha = I$ birim operatörü tanımlanır.

Kesirli türev için aşağıdaki özellikler geçerlidir:

$$D_0^\alpha = D^m I_0^{m-\alpha}, \quad m \in \mathbb{N}, m > \alpha.$$

$$D_0^\alpha I_0^\alpha f(t) = f(t), \quad f \in L_1[0, b], b > 0.$$

$$D_0^\alpha t^\beta = \begin{cases} 0 & , \quad m - \alpha + \beta \in \{0, 1, \dots, m - 1\}, \\ \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 - \alpha)} t^{\beta - \alpha} & , \quad \text{Aksi halde.} \end{cases}$$

2.1.2. Caputo kesirli türev

Tanım 2.1.2.1: $\alpha \in (0, \infty)$ ve $m = [\alpha] + 1$ olsun. $f(t)$ fonksiyonunu Caputo anlamında kesirli türevi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$D_*^\alpha f(t) = I_0^{m-\alpha} D^m f(t) = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_0^t (t - \xi)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\xi) d\xi$$

burada $D^m f \in L_1[0, b], b > 0$ dır.

Caputo kesirli türeve ait özellikler aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$D_*^\alpha t^\beta = \begin{cases} 0 & , \quad \beta \in \{0, 1, \dots, m - 1\} \\ \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 - \alpha)} t^{\beta - \alpha}, & \beta \in \mathbb{N} \text{ ve } \beta \geq m \text{ veya } \beta \notin \mathbb{N} \text{ ve } \beta > m - 1 \end{cases}$$

Teorem 2.1.2.2: $\alpha \in (0, \infty)$ ve $m = [\alpha] + 1$ olsun. $f(t)$ nin $(m - 1)$. türevi mutlak sürekli olmak üzere

$$I_0^\alpha D_*^\alpha f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} f^{(k)}(0+), \quad (2.11)$$

dır.

Teorem 2.1.2.3: $\alpha \in (0, \infty)$, $m = [\alpha] + 1$ olsun. O halde

$$D_*^\alpha f(t) = D_0^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} f^{(k)}(0+)$$

yazılabilir.

Teorem 2.1.2.4: $\alpha \in (0, \infty)$ olsun. $f(t)$ sürekli olmak üzere

$$D_*^\alpha I_0^\alpha f(t) = f(t)$$

dır.

2.1.3. Kesirli operatörlerin Laplace ve Sumudu dönüşümü

Teorem 2.1.3.1: I_0^α kesirli integral operatörünün Laplace dönüşümü

$$L[I_0^\alpha f(t)] = s^{-\alpha} L[f(t)] \quad (2.12)$$

dir.

İspat:

$$L[I_0^\alpha f(t)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} L \left[\int_0^t (t-\xi)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi \right] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} L[t^{\alpha-1} * f(t)]$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} L[t^{\alpha-1}] \times L[f(t)] = s^{-\alpha} L[f(t)].$$

Teorem 2.1.3.2: I_0^α kesirli integral operatörünün Sumudu dönüşümü

$$\mathbb{S}[I_0^\alpha f(t)] = p^\alpha \mathbb{S}[f(t)], \quad (2.13)$$

dir.

İspatı önceki teoremin ispatıyla aynıdır.

Teorem 2.1.3.3: $\alpha \in (0, \infty)$ ve $m = [\alpha] + 1$ olsun. Caputo kesirli türevinin Laplace dönüşümü

$$L[D_*^\alpha f(t)] = s^\alpha L[f(t)] - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0+) \quad (2.14)$$

şeklindedir.

İspat: (2.11) den

$$L[I_0^\alpha D_*^\alpha f(t)] = L[f(t)] - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{L[t^k]}{k!} f^{(k)}(0+)$$

yazılabilir. Teorem 2.2.4.1 den

$$s^{-\alpha} L[D_*^\alpha f(t)] = L[f(t)] - \sum_{k=0}^{m-1} s^{-k-1} f^{(k)}(0+)$$

elde edilir ve

$$L[D_*^\alpha f(t)] = s^\alpha L[f(t)] - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0+)$$

yazılabilir.

Teorem 2.1.3.4: $\alpha \in (0, \infty)$ ve $m = [\alpha] + 1$ olsun. Caputo kesirli türevinin Sumudu dönüşümü

$$\mathbb{S}[D_*^\alpha f(t)] = p^{-\alpha} \mathbb{S}[f(t)] - \sum_{k=0}^{m-1} p^{k-\alpha} f^{(k)}(0+) \quad (2.15)$$

olarak tanımlanır.

İspatı önceki teoremin ispatıyla aynıdır.

2.2. Mittag-Leffler Fonksiyonu

Mittag-Leffler fonksiyonu üstel fonksiyonunun genelleştirilmiş halidir ve kesirli analizde önemli bir rol oynar (Diethelm 2010; Gorenflo *et al.* 2014).

Tanım 2.2.1: $\alpha > 0$ olsun.

$$E_\alpha(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\alpha j + 1)} \quad (2.16)$$

serisinin yakınsak olması durumunda, $E_\alpha(z)$ fonksiyonu bir parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.2: $\alpha, \beta > 0$ olmak üzere

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\alpha j + \beta)}, \quad (2.17)$$

ile tanımlanan $E_{\alpha,\beta}(z)$ fonksiyonu iki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu olarak adlandırılır, burada $E_{\alpha,1}(z) = E_{\alpha}(z)$ dir. $\alpha, \beta > 0$ değerleri için $E_{\alpha,\beta}(z)$ ile tanımlı kuvvet serisi, bütün $z \in \mathbb{C}$ için yakınsaktır (Diethelm 2010).

Tanım 2.2.3: $\alpha, \beta, \gamma > 0$ olsun.

$$E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\gamma + j - 1}{j} \frac{z^j}{\Gamma(\alpha j + \beta)}, \quad (2.18)$$

ile tanımlanan $E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(z)$ fonksiyonu üç parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu olarak adlandırılır, $\gamma = 1$ için $E_{\alpha,\beta}^1(z) = E_{\alpha,\beta}(z)$ dir.

Teorem 2.2.4: Üç parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonunun Laplace ve Sumudu dönüşümü aşağıdaki gibidir:

$$L \left[t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(\lambda t^{\alpha}) \right] = \frac{s^{\alpha\gamma-\beta}}{(s^{\alpha} - \lambda)^{\gamma}},$$

$$\mathbb{S} \left[t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(\lambda t^{\alpha}) \right] = \frac{p^{\beta-1}}{(1 - \lambda p^{\alpha})^{\gamma}}.$$

İspat (Gorenflo *et al.* 2014)'de ayrıntılı bir şekilde verilmiştir.

2.3. Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemler

Bu bölümde kesirli mertebeden diferansiyel denklemlere ait bazı temel tanımlar verilecektir. Daha detaylı bilgi Podlubny tarafından verilmiştir (Podlubny 1999).

Tanım 2.3.1: Bir veya daha fazla değişkenin kesirli türevlerini içeren denklemlere kesirli diferansiyel denklem denir. Yani, kesirli diferansiyel denklemler, tam sayı türevleri yerine, kesirli türevlere sahip olan diferansiyel denklemlerdir (Samko *et al.* 1987; Podlubny 1999; Benghorbal 2004; Diethelm 2010).

Örnek 2.3.2: Aşağıdaki gibi verilen denklem, bir kesirli diferansiyel denklemdir;

$$xD^{\frac{1}{3}}y(x) - D^{\frac{2}{5}}y(x) - y(x) = \sin(x). \quad (2.19)$$

Kesirli diferansiyel denklemler aşağıdaki gibi sınıflandırılabilir:

I) Kesirli mertebeden adi diferansiyel denklemler.

$$D_*^2u(t) + D_*^{\frac{3}{2}}u(t) + 2u(t) = g(t) \quad (2.20)$$

kesirli mertebeden Bagley–Torvik adi diferansiyel denklemdir.

II) Kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemler.

$$D_t^{\frac{1}{2}}u(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad (2.21)$$

denklemini kesirli mertebeden yayılma (diffusion) kısmi diferansiyel denklemdir.

$$a_n(t)D_0^{\alpha_n}u(t) + a_{n-1}(t)D_0^{\alpha_{n-1}}u(t) + \dots + a_1(t)D_0^{\alpha_1}u(t) + a_0(t)u(t) = g(t) \quad (2.22)$$

formunda yazılmış denklem kesirli mertebeden lineer diferansiyel denklem olarak adlandırılır. Aksi takdirde denkleme lineer olmayan kesirli mertebeden diferansiyel denklem denir.

Örnek 2.3.3:

$$Du(t) + aD_*^\alpha u(t) + bu(t) = g(t), \quad 0 < \alpha < 1, \quad (\text{Kesirli Basset denklemi})$$

kesirli mertebeden lineer diferansiyel denklem dir.

$$D_0^\alpha u(t) + au^2(t) = bt^{-2\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (\text{Kesirli Riccati denklemi})$$

ve

$$D_0^{\alpha+1}u(t) + f(u)D_0^\alpha u(t) + g(u) = 0, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (\text{Kesirli Liénard denklemi})$$

lineer olmayan kesirli mertebeden diferansiyel denklemleridir, burada a ve b keyfi sabitlerdir.

Tanım 2.3.4: Kesirli diferansiyel denklemdeki en yüksek mertebeli türevin mertebesine kesirli diferansiyel denklemin mertebesi denir. Örneğin,

$$D_0^{\frac{3}{2}}u(t) = x + (xD_0^{\frac{1}{2}}u(t))^4$$

denklemi bir $\frac{3}{2}$.mertebeden lineer olmayan kesirli mertebeden diferansiyel denklemdir.

2.4. Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemlerle İntegral Denklemler Arasındaki İlişkiler

Teorem 2.4.1: $\alpha \in (0, \infty)$, $m = [\alpha] + 1$ ve farzedelimki $u_0^{(0)}, u_0^{(1)}, \dots, u_0^{(m-1)} \in \mathbb{R}$, $K > 0$ ve $h^* > 0$ olsun.

$$G := \left\{ (t, u) \mid t \in [0, h^*], \quad \left| u - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{u_0^{(k)}}{k!} t^k \right| \leq K \right\},$$

olmak üzere $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon, ayrıca $M := \sup_{(t,y) \in G} |f(t,y)|$ olmak üzere

$$h := \begin{cases} h^* & \text{eğer } M = 0 \\ \min \left\{ h^*, \left(\frac{K\Gamma(\alpha + 1)}{M} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right\} & \text{Aksi halde} \end{cases}$$

olarak tanımlasın. Bu taktirde öyle bir $u \in C[0, h]$ fonksiyonu vardır ki;

$$D_*^\alpha u(t) = f(t, u(t)), \quad (2.23)$$

$$D^k u(t) = u_0^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (2.24)$$

başlangıç değer probleminin çözümüdür.

Lemma 2.4.2: Kabul edelimki teorem 2.4.1 hipotezleri sağlansın $u \in C[0, h]$, (2.23)-(2.24) başlangıç değer probleminin bir çözümüdür ancak ve ancak u aşağıdaki ikinci tip Volterra integral denkleminin bir çözümüdür;

$$u(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{u_0^{(k)}}{k!} t^k + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\xi)^{\alpha-1} f(\xi, u(\xi)) d\xi.$$

(Diethelm 2010).

2.5. Kesirli Mertebeli Diferansiyel-Cebirsel Denklemler

Tanım 2.5.1: Kesirli mertebeden bir Diferansiyel-Cebirsel denklem başlangıç koşulları ile birlikte,

$$D_*^{\alpha_i} x_i(t) = f(t, x_1, x_2, \dots, x_n, x_1', x_2', \dots, x_n') \quad i = 1, 2, 3, \dots, n-1, \quad t \geq 0, \quad 0 < \alpha_i \leq 1$$

$$g(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad x_i(0) = a_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (2.25)$$

formundadır (Zurigat *et al.* 2010).

Bu forma göre bir sonraki bölümde üzerinde çalışacağımız denklemlere örnek olarak aşağıdaki denklemleri verebiliriz.

Örnek 2.5.2:

$$\begin{aligned} x(t) + y(t) &= e^{-t} + \sin t \\ D^\alpha x(t) + x(t) - y(t) &= -\sin(t) \quad 0 < \alpha \leq 1 \\ x(0) &= 1 \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

Örnek 2.5.3:

$$D^{\alpha_1} x(t) - x(t) + z(t)x(t) = 1$$

$$\begin{aligned} D^{\alpha_2} z(t) - y(t) + x^2(t) + z(t) &= 0 & 0 < \alpha_1, \alpha_2 \leq 1 \\ y(t) - x^2(t) &= 0 \\ x(0) = y(0) = z(0) &= 1 \end{aligned}$$

Bu örnekten de görüldüğü gibi kesirli diferansiyel-cebirsal denklemin içerisinde farklı kesirli mertebelerden türevler de bulunabilmektedir.



3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Homotopi Kavramı

Shijun Liao tarafından öne sürülen homotopi analiz metodu (HAM), topoloji ve diferansiyel geometrinin temel konusu olan homotopi kavramına dayanır. Matematikte homotopi, sürekli değişim veya deformasyonu tanımlar. Örneğin, bir daire, bir kare veya elipse sürekli olarak deforme olabilir. Yani, Matematikte homotopi aynı karakteristikler içeren farklı şeyler arasındaki ilişkiyi tanımlar.

Örnek olarak, $x \in [0,1]$ aralığında $\sin(\pi x)$ ve $8x(1-x)$ fonksiyonları $\mathcal{H}(x; q)$ şeklinde oluşturulan fonksiyonlar ailesi ile ilişkilendirilebilir:

$$\mathcal{H}(x; q) = (1 - q) \sin(\pi x) + q[8x(1 - x)],$$

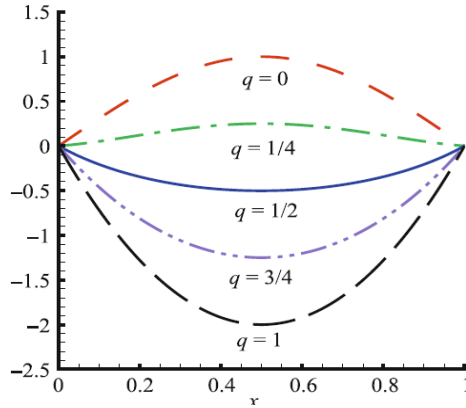
burada $q \in [0,1]$ olarak gömme parametresi olarak adlandırılır. Dikkat edilirse $\mathcal{H}(x; q)$ sadece $x \in [0,1]$ bağımsız değişkenine değil aynı zamanda $q \in [0,1]$ gömme parametresine de bağlıdır. $q = 0$ olduğunda

$$\mathcal{H}(x; 0) = \sin(\pi x), \quad x \in [0,1],$$

ve $q = 1$ olduğunda

$$\mathcal{H}(x; 1) = 8x(1 - x), \quad x \in [0,1].$$

elde edilir. Böylece şekil 4.1’de görüldüğü gibi $q \in [0,1]$, 0 dan 1’e arttıkça $\mathcal{H}(x; q)$ reel fonksiyonu $\sin(\pi x)$ trigonometrik fonksiyonundan, $8x(1 - x)$ polinomuna sürekli olarak değişir.



Şekil 3.1. Sürekli deformasyon $\mathcal{H}(x; q): \sin(\pi x) \sim 8x(1 - x)$ homotopisi

Topolojide, $\mathcal{H}(x; q)$ homotopi olarak adlandırılır, $\sin(\pi x)$ ile $8x(1 - x)$ 'e de homotopiktirler denir ve

$$\mathcal{H}: \sin(\pi x) \sim 8x(1 - x),$$

ile gösterilir.

Genelde, $f \in C[a, b]$ sürekli fonksiyonu başka bir $g \in C[a, b]$ sürekli fonksiyonuna deforme edilebilirse

$$\mathcal{H}(x; q) = (1 - q)f(x) + qg(x), \quad x \in [a, b], q \in [0, 1], \quad (3.1)$$

yoluyla

$$\mathcal{H}: f \sim g,$$

homotopisi kurulabilir. Burada q gömme parametresi veya homotopi parametresi olarak adlandırılır (Liao 2012).

Tanım 3.1.1: X topolojik uzayından Y topolojik uzayına $f(x)$ ve $g(x)$ sürekli fonksiyonları arasındaki homotopi

$$\mathcal{H}: X \times [0,1] \rightarrow Y$$

$$\mathcal{H}(x; q) = (1 - q)f(x) + qg(x) \quad x \in X, q \in [0,1]$$

$$\mathcal{H}(x; 0) = f(x) \quad x \in X$$

$$\mathcal{H}(x; 1) = g(x) \quad x \in X$$

şeklinde tanımlanır.

3.2. Homotopi Pertürbasyon Metodu (HPM)

$f(x) \in C^\infty[a, b]$ sürekli reel bir fonksiyon olmak üzere:

$$f(x) = 0, \tag{3.2}$$

cebirsel denklemini göz önüne alalım. Varsayalımki (3.2) nin $x \in [a, b]$ aralığında en az bir kökü olsun ve $x_0 \in [a, b]$, x 'in bir başlangıç tahmini olsun. $f(x) - f(x_0) \in C^\infty[a, b]$, $f(x) \in C^\infty[a, b]$ fonksiyonuna sürekli deforme olabilir, yani bunlar homotopiktirler. Böylece aşağıdaki gibi bir Homotopi kurulabilir:

$$\mathcal{H}(x; q) = (1 - q)[f(x) - f(x_0)] + qf(x),$$

burada $q \in [0,1]$ homotopi parametresidir. $q = 0$ ve $q = 1$ için sırasıyla aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$\mathcal{H}(x; 0) = f(x) - f(x_0), \quad \mathcal{H}(x; 1) = f(x).$$

Yani q parametresi 0 ile 1 arasında arttıkça, $\mathcal{H}(x; q)$ sürekli olarak $f(x) - f(x_0)$ dan $f(x)$ 'e değişir. $\mathcal{H}(x; q) = 0$ alınarak,

$$(1 - q)[f(x) - f(x_0)] + qf(x) = 0, \quad q \in [0,1], \quad (3.3)$$

veya

$$f(x) - f(x_0) + qf(x_0) = 0, \quad q \in [0,1],$$

elde edilir. Böylece cebirsel denklemlerin bir parametre ailesi elde edilmiş olur. Cebirsel denklemlerin parametre ailesinin çözümleri homotopi parametresi olan q 'ya bağlıdır. (3.3) denkleminde x 'i $\varphi(q)$ olarak değiştirirsek:

$$f[\varphi(q)] - f(x_0) + qf(x_0) = 0, \quad (3.4)$$

yazılabilir. $q = 0$ olduğunda

$$f[\varphi(0)] - f(x_0) = 0,$$

denklemini elde ederiz, ki onun çözümleri

$$\varphi(0) = x_0,$$

dir. $q = 1$ olduğunda

$$f[\varphi(1)] = 0,$$

elde edilirki bu da $f(x) = 0$ cebirsel denkleminin kendisidir. Yani;

$$\varphi(1) = x,$$

olur. Bu nedenle, q homotopi parametresi 0'dan 1'e değiştikçe, $\varphi(q)$, x_0 başlangıç tahmininden $f(x) = 0$ denkleminin çözümleri olan x 'e deforme olur. (3.4) sıfırncı derece deformasyon denklemleri olarak adlandırılır.

$\varphi(q)$ 'nin $q = 0$ da analitik olduğunu varsayalım. Böylece $\varphi(0) = x_0$ olmak üzere bu homotopi parametresine göre bir Maclaurin serisine genişletilebilir, yani:

$$z = \varphi(q) = x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} x_k q^k, \quad (3.5)$$

Burada

$$x_k = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k \varphi(q)}{dq^k} \right|_{q=0} = \mathcal{D}_k(\varphi), \quad (3.6)$$

dir. Böylece (3.5) serisi homotopi-Maclaurin serisi, \mathcal{D}_k homotopi türev operatörü ve $\mathcal{D}_k(\varphi)$, φ 'nin k . mertebeden homotopi türevi olarak adlandırılır. (3.5) homotopi serisi $q = 1$ 'de yakınsaksa, $\varphi(1) = x$ olduğu kullanılarak

$$x = \lim_{q \rightarrow 1} z = x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} x_k,$$

homotopi seri çözümleri elde edilir.

Pertürbasyon tekniği uygulanarak, (3.3) denkleminin yaklaşık çözümünü elde etmek için $f(z)$ fonksiyonu, x_0 noktası civarında Taylor serisine açılırsa:

$$f(z) = f(x_0) + f'(x_0)[x_1q + x_2q^2 + \dots] + \frac{1}{2!}f''(x_0)[x_1q + x_2q^2 + \dots]^2 + \dots \quad (3.7)$$

elde edilir. (3.7) eşitliği, (3.3) eşitliğinde yerine yazılıp, q 'nun kuvvetlerine göre katsayılar eşitlenirse:

$$q^1: x_1f'(x_0) + f(x_0) = 0, \quad (3.8)$$

$$q^2: x_2f'(x_0) + \frac{1}{2!}x_1^2f''(x_0) = 0, \quad (3.9)$$

$$q^3: x_3f'(x_0) + x_1x_2f''(x_0) + \frac{1}{3!}x_1^3f'''(x_0) = 0, \quad (3.10)$$

...

denklemleri elde edilir. (3.8) denkleminde yola çıkarak x_1

$$x_1 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

bulunur. Örneğin, birinci dereceden yaklaşık çözüm,

$$x = x_0 + qx_1 = x_0 - \frac{qf(x_0)}{f'(x_0)},$$

dir. $q = 1$ iken,

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

biçiminde elde edilir. Bu çözümden,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad (3.11)$$

elde edilir. Dikkat edilirse (3.11) Newton iterasyon formülüdür. Benzer olarak ikinci dereceden yaklaşık çözüm,

$$x = x_0 + x_1 + x_2,$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f''(x_n)}{2f'(x_n)} \left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right)^2,$$

2. dereceden Newton iterasyon formülü olarak düşünülebilir. Homotopi pertürbasyon yönteminin kullanıldığı en geniş alan diferansiyel denklemlerdir. Homotopi pertürbasyon yöntemi, çeşitli lineer ve lineer olmayan denklemlerin çözümü için alışılmamış ve etkin bir yöntemdir. Genel lineer olmayan bir denklem üzerinde yöntemin diferansiyel denklemlere uygulanışını gösterelim.

Aşağıdaki genel lineer olmayan fonksiyonel denklemi düşünelim;

$$u = f + N(u), \quad (3.12)$$

burada N bir lineer olmayan operatör, u bilinmeyen fonksiyon ve f bilinen fonksiyondur.

Homotopi pertürbasyon yöntemini (HPM) göstermek için, u çözüm olmak üzere (3.12) denklemini aşağıdaki gibi göz önüne alalım:

$$L(v) = v - f - N(v) = 0, \quad (3.13)$$

$\mathcal{H}(r, q)$, homotopi tanımlayabiliriz:

$$\mathcal{H}(v, 0) = F(v), \quad \mathcal{H}(v, 1) = L(v).$$

Böylece $F(v)$ bir operatör, v_0 çözüme, ki bu çözüm kolayca elde edilebilir. Homotopi tekniği ile, $\mathcal{H}(r, q): \Omega \times [0,1] \rightarrow R$ homotopisini kurabiliriz. Genelde,

$$\mathcal{H}(v, q) = (1 - q)F(v) + qL(v) = 0, \quad (3.14)$$

şekilde bir homotopi seçebiliriz. Burada $q \in [0,1]$ gömme parametresidir, bu nedenle monoton olarak q parametresi 0 ile 1 arasında arttıkça, $\mathcal{H}(x; q)$ sürekli olarak $F(v) = 0$ dan $L(v) = 0$ 'a değişir. Topolojide bu konu, deformasyon olarak adlandırılır, $F(v) = 0$ ve $L(v) = 0$ homotopi diye isimlendirilmektedir.

q gömme parametresi yeteri kadar küçük kabul edilirse, klasik pertürbasyon tekniği uygulanarak, (3.14)'ün çözümü olarak q 'nun kuvvet serisini alarak

$$v = v_0 + qv_1 + q^2v_2 + q^3v_3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} q^k v_k, \quad (3.15)$$

şeklinde yazılır. (3.15)'te $q \rightarrow 1$ alınır,

$$u = \lim_{q \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \dots \quad (3.16)$$

elde edilir. Pertürbasyon ve Homotopi yöntemlerinin kombinasyonu tüm avantajlarını muhafaza ederken, geleneksel pertürbasyon yönteminin dezavantajlarını ortadan kaldıran yönteme Homotopi pertürbasyon metodu adı verilir. Seri (3.16) bir çok durumda yakınsaktır. Bununla birlikte, yakınsama hızı lineer olmayan $N(v)$ operatörüne bağlıdır.

Teorem 3.2.1: Kabul edelimki $N(v)$ lineer olmayan bir fonksiyon ve $v = \sum_{k=0}^{\infty} q^k v_k$ olsun. Bu taktirde

$$\frac{\partial^n}{\partial q^n} N(v)_{q=0} = \frac{\partial^n}{\partial q^n} N \left(\sum_{k=0}^n q^k v_k \right)_{q=0}$$

olur.

Bu teoremin İspatı Ghorbani 2009 da ayrıntılı bir şekilde verilmiştir.

$F(v(x)) = v(x) - f(x)$ olarak ve (3.13)'ü (3.14) te yerine yazarak;

$$\mathcal{H}(v, q) = v(x) - f(x) - qN(v) = 0, \quad (3.17)$$

elde ederiz. q 'ya göre $N(v)$ 'nin Maclauren açılımına göre;

$$\begin{aligned} N(v) &= N(v)_{q=0} + \left(\frac{\partial}{\partial q} N(v)_{q=0} \right) q + \left(\frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial q^2} N(v)_{q=0} \right) q^2 + \dots \\ &\quad + \left(\frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial q^n} N(v)_{q=0} \right) q^n + \dots \end{aligned}$$

yazabiliriz. (3.15)'i yukarıdaki denklemde yerine yazarsak;

$$\begin{aligned}
N(v) &= N\left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k v_k\right)_{q=0} + \left(\frac{\partial}{\partial q} N\left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k v_k\right)_{q=0}\right) q \\
&\quad + \left(\frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial q^2} N\left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k v_k\right)_{q=0}\right) q^2 + \dots + \left(\frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial q^n} N\left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k v_k\right)_{q=0}\right) q^n \\
&\quad + \dots
\end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 3.2.1'e göre;

$$\begin{aligned}
N(v) &= N(v_0) + \left(\frac{\partial}{\partial q} N(v_0 + qv_1)_{q=0}\right) q + \left(\frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial q^2} N(v_0 + qv_1 + q^2v_2)_{q=0}\right) q^2 + \dots \\
&\quad + \left(\frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial q^n} N\left(\sum_{k=0}^n q^k v_k\right)_{q=0}\right) q^n \\
&\quad + \dots
\end{aligned} \tag{3.18}$$

yazılır. (3.15) ve (3.18)'i (3.17) de yerine yazarsak ve q 'nun özdeş kuvvetleri cinsinden terimleri eşitlersek;

$$q^0: v_0(x) = f(x),$$

$$q^1: v_1(x) = N(v_0),$$

$$q^2: v_2(x) = \left\{ \frac{\partial}{\partial q} N(v_0 + qv_1) \right\}_{q=0},$$

$$q^3: v_3(x) = \frac{1}{2!} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial q^2} N(v_0 + qv_1 + q^2v_2) \right\}_{q=0},$$

...

$$q^{n+1}: v_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \left\{ \frac{\partial^n}{\partial q^n} N\left(\sum_{k=0}^n q^k v_k\right) \right\}_{q=0},$$

...

elde ederiz.

Tanım 3.2.2: He polinomları

$$H_n(v_0, v_1, v_2, \dots, v_n) = \frac{1}{n!} \left\{ \frac{\partial^n}{\partial q^n} N \left(\sum_{k=0}^n q^k v_k \right) \right\}_{q=0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

şeklinde tanımlanır. Dolayısıyla, homotopi pertürbasyon yöntemi ile elde edilen yaklaşık çözüm He polinomları ile

$$u(x) = f(x) + \sum_{n=0}^{\infty} H_n(v_0, v_1, v_2, \dots, v_n)$$

olur.

Örnek 3.2.3: Aşağıdaki Lineer olmayan diferansiyel denklemini başlangıç koşulu ile birlikte düşünelim:

$$u' + uu' = 1 + x, \quad u(0) = 0.$$

buna göre, denklem (3.14);

$$\mathcal{H}(v, q) = v'(x) + qv(x)v'(x) - 1 - x = 0$$

veya

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(v, q) &= (v'_0 + qv'_1 + q^2v'_2 + q^3v'_3 + \dots) \\ &+ q(v_0 + qv_1 + q^2v_2 + q^3v_3 + \dots)(v'_0 + qv'_1 + q^2v'_2 + q^3v'_3 + \dots) \\ &- 1 - x = 0 \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde;

$$(v'_0 - 1 - x) + q \left(v'_1 + \underbrace{v_0 v'_0}_{H_0} \right) + q^2 \left(v'_2 + \underbrace{v_0 v'_1 + v_1 v'_0}_{H_1} \right) + q^2 \left(v'_3 + \underbrace{v_0 v'_2 + v_1 v'_1 + v_2 v'_0}_{H_2} \right) + \dots = 0$$

elde edilmiş olur. He polinomları:

$$\begin{aligned} H_0 &= v_0 v'_0 \\ H_1 &= v_0 v'_1 + v_1 v'_0 \\ H_2 &= v_0 v'_2 + v_1 v'_1 + v_2 v'_0 \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır ve denklemin çözümü,

$$u(x) = x + \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x^2 \right) + \left(\frac{1}{2} x^3 - \frac{1}{2} x^3 \right) + \dots = x$$

olarak bulunur (Ghorbani 2009).

3.3. Homotopi Pertürbasyon Dönüşüm Metodu (HPTM)

Metodun temel mantığını anlamak için, başlangıç koşullarıyla birlikte aşağıdaki denklemleri ele alalım;

$$Du(x, t) + Ru(x, t) + Nu(x, t) = g(x, t), \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k} u(x, t)|_{t=0} = f_k(x), \quad k = 0, 1, \dots, m - 1, \quad (3.20)$$

burada $D = \frac{\partial^m}{\partial t^m}$ en yüksek mertebeden lineer diferansiyel operatörü, R derecesi D operatöründen küçük olan lineer diferansiyel operatör, N genel lineer olmayan

diferansiyel operatörü ve $g(x, t)$ kaynak terimi temsil eder. Denklem (3.19)'un her iki tarafına Sumudu dönüşümü uygulanırsa;

$$\mathbb{S}[Du(x, t)] + \mathbb{S}[Ru(x, t)] + \mathbb{S}[Nu(x, t)] = \mathbb{S}[g(x, t)], \quad (3.21)$$

elde edilir. Sumudu dönüşümünün t 'ye göre diferansiyel özelliğini kullanarak;

$$p^{-m}\mathbb{S}[u(x, t)] - \sum_{k=0}^{m-1} p^{k-m} \frac{\partial^k}{\partial t^k} u(x, t)|_{t=0} + \mathbb{S}[Ru(x, t)] + \mathbb{S}[Nu(x, t)] = \mathbb{S}[g(x, t)],$$

elde ederiz. Daha sade olarak;

$$\mathbb{S}[u(x, t)] = \sum_{k=0}^{m-1} p^k f_k(x) - p^m \{\mathbb{S}[Ru(x, t)] + \mathbb{S}[Nu(x, t)]\} + p^m \mathbb{S}[g(x, t)], \quad (3.22)$$

yazılabilir. Denklem (3.22)'nin her iki tarafına Sumudu dönüşümünün tersini uygularsak;

$$u(x, t) = G(x, t) - \mathbb{S}^{-1}[p^m \mathbb{S}[Ru(x, t) + Nu(x, t)]], \quad (3.23)$$

elde ederiz. Burada $G(x, t)$, kaynak terimden kaynaklanan terimi ve başlangıç koşullarını temsil eder. Standart Homotopi pertürbasyon yöntemine göre, u çözümü,

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n u_n(x, t), \quad (3.24)$$

şeklindedir. Burada $q \in [0,1]$ gömme parametresidir ve lineer olmayan terim aşağıdaki gibi ayrışabilir:

$$Nu(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} q^m H_m(x, t), \quad (3.25)$$

burada H_n 'ler He polinomlarıdır ve aşağıdaki şekilde verilir;

$$H_n(u_0, u_1, u_2, \dots, u_n) = \frac{1}{n!} \left\{ \frac{\partial^n}{\partial q^n} \left[N \left(\sum_{i=0}^n q^i u_i \right) \right] \right\}_{q=0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Denklem (3.24) ve (3.25), denklem (3.23) te yerine yazılırsa:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} q^n u_n(x, t) &= G(x, t) \\ &- q \left\{ \mathbb{S}^{-1} \left[p^m \mathbb{S} \left[R \sum_{n=0}^{\infty} q^n u_n(x, t) + \sum_{n=0}^{\infty} q^n H_n(u) \right] \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

elde edilir. q 'nun kuvvetlerine göre katsayılar eşitlenirse aşağıdaki yaklaşımlar elde edilir;

$$\begin{aligned} q^0: u_0(x, t) &= G(x, t), \\ q^1: u_1(x, t) &= -\mathbb{S}^{-1} [p^m \mathbb{S} [R u_0(x, t) + H_0(u)]], \\ q^2: u_2(x, t) &= -\mathbb{S}^{-1} [p^m \mathbb{S} [R u_1(x, t) + H_1(u)]], \\ q^3: u_3(x, t) &= -\mathbb{S}^{-1} [p^m \mathbb{S} [R u_2(x, t) + H_2(u)]], \\ &\dots \end{aligned}$$

sonuç olarak

$$u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t) + \dots$$

çözümü elde edilir (Singh *et al.* 2011).

Örnek 3.3.1: Aşağıdaki homojen olmayan problemi dikkate alalım;

$$u_t(x, t) + u(x, t)u_x(x, t) = 2t + x + t^3 + xt^2, \quad (3.27)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad (3.28)$$

Denklem (3.27) de t 'ye göre Sumudu dönüşümü uygulanır ve başlangıç koşulu kullanılırsa;

$$\mathbb{S}(u) = 2p^2 + xp + 6p^4 + 2xp^3 - p\mathbb{S}(uu_x),$$

elde edilir. Şimdi Sumudu dönüşümünün tersi uygulanırsa;

$$u(x, t) = t^2 + xt + \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{3}xt^3 - \mathbb{S}^{-1}[p\mathbb{S}(uu_x)], \quad (3.29)$$

elde edilir. Homotopi pertürbasyon yöntemini kullanırsak:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n u_n(x, t) = t^2 + xt + \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{3}xt^3 - q\mathbb{S}^{-1} \left[p\mathbb{S} \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n H_n(u) \right) \right],$$

ifadesini elde ederiz. Burada $H_n(u)$ He polinomlarıdır ve lineer olmayan terimleri temsil etmektedir. He polinomlarının ilk birkaç bileşeni aşağıdaki gibidir;

$$H_0(u_0) = u_0 u_{0x},$$

$$H_1(u_0, u_1) = \frac{1}{1!} \left\{ \frac{\partial}{\partial q} [(u_0 + qu_1)(u_0 + qu_1)_x] \right\}_{q=0} = u_0 u_{1x} + u_1 u_{0x},$$

$$H_2(u_0, u_1, u_2) = \frac{1}{2!} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial q^2} [(u_0 + qu_1 + q^2 u_2)(u_0 + qu_1 + q^2 u_2)_x] \right\}_{q=0}$$

$$= u_0 u_{2x} + u_1 u_{1x} + u_2 u_{0x},$$

...

q 'nun kuvvetlerine göre katsayılar eşitlenirse, aşağıdaki yaklaşımlar elde edilir;

$$q^0: u_0(x, t) = t^2 + xt + \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{3}xt^3,$$

$$q^1: u_1(x, t) = -\mathbb{S}^{-1}[p\mathbb{S}[H_0(u)]] = -\frac{1}{4}t^4 - \frac{7}{72}t^6 - \frac{1}{96}t^8 - x \left(\frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 + \frac{1}{63}t^7 \right),$$

$$q^2: u_2(x, t) = -LS^{-1}[p\mathbb{S}[H_1(u)]] = \frac{7}{72}t^6 + \frac{143}{2880}t^8 + \frac{2783}{302400}t^{10} + \frac{5}{8064}t^{12}$$

$$+ x \left(\frac{2}{15}t^5 + \frac{22}{315}t^7 + \frac{38}{2835}t^9 + \frac{2}{2079}t^{11} \right),$$

...

Sonuç olarak;

$$u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t) + \dots = t^2 + xt$$

3.4. Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemler İçin Homotopi Pertürbasyon Sumudu Dönüşüm Metodu (HPSTM)

Bu yöntemin temel fikrini göstermek için, aşağıdaki genel lineer ve homojen olmayan kesirli mertebedan kısmi diferansiyel denklemi başlangıç koşulları ile birlikte göz önüne alalım:

$$D_*^\alpha u(x, t) + Ru(x, t) + Nu(x, t) = g(x, t), \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k} u(x, t)|_{t=0} = f_k(x), \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (3.31)$$

D_*^α kesirli Caputo türevi, $m = [\alpha] + 1$, R lineer diferansiyel operatörü, N genel lineer olmayan diferansiyel operatörü ve $g(x, t)$ kaynak terimi temsil eder. Denklem (3.30)'un her iki tarafına Sumudu dönüşümü uygulanırsa;

$$\mathbb{S}[D_*^\alpha u(x, t)] + \mathbb{S}[Ru(x, t) + Nu(x, t)] = \mathbb{S}[g(x, t)], \quad (3.32)$$

elde edilir. Teorem 2.2.4.4 ve Sumudu dönüşümünün diferansiyel özelliği kullanılarak;

$$p^{-\alpha} \mathbb{S}[u(x, t)] - \sum_{k=0}^{m-1} p^{k-\alpha} \frac{\partial^k}{\partial t^k} u(x, t)|_{t=0} + \mathbb{S}[Ru(x, t) + Nu(x, t)] = \mathbb{S}[g(x, t)],$$

veya

$$\mathbb{S}[u(x, t)] = p^\alpha \sum_{k=0}^{m-1} p^{k-\alpha} f_k(x) + p^\alpha \mathbb{S}[g(x, t)] - p^\alpha \mathbb{S}[Ru(x, t) + Nu(x, t)], \quad (3.33)$$

elde edilir. Denklem (3.33)'ün her iki tarafına Sumudu dönüşümünün tersini uygularsak;

$$u(x, t) = G(x, t) - \mathbb{S}^{-1}[p^\alpha \mathbb{S}[Ru(x, t) + Nu(x, t)]], \quad (3.34)$$

bulunur. Burada $G(x, t)$, kaynak terimden kaynaklanan terimi ve başlangıç koşullarını temsil eder. Şimdi, Homotopi pertürbasyon yöntemini uygulayabiliriz;

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n u_n(x, t), \quad (3.35)$$

olmak üzere, lineer olmayan terim aşağıdaki gibi ayrışabilir:

$$Nu(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n H_n u(x, t), \quad (3.36)$$

burada H_n 'ler He polinomlarıdır ve

$$H_n(u_0, u_1, u_2, \dots, u_n) = \frac{1}{n!} \left\{ \frac{\partial^n}{\partial q^n} \left[N \left(\sum_{i=0}^n q^i u_i \right) \right] \right\}_{q=0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

şeklinindedir. Denklem (3.35) ve (3.36), (3.34)'te yerine yazılırsa:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n u_n(x, t) = G(x, t) - q \left\{ \mathbb{S}^{-1} \left[p^\alpha \mathbb{S} \left[R \sum_{n=0}^{\infty} q^n u_n(x, t) + \sum_{n=0}^{\infty} q^n H_n(x, t) \right] \right] \right\}, \quad (3.37)$$

elde edilir. q 'nun kuvvetlerine göre katsayılar eşitlenirse aşağıdaki yaklaşımlar elde edilir;

$$\begin{aligned} q^0: u_0(x, t) &= G(x, t), \\ q^1: u_1(x, t) &= -\mathbb{S}^{-1} [p^\alpha \mathbb{S} [Ru_0(x, t) + H_0(u)]], \\ q^2: u_2(x, t) &= -\mathbb{S}^{-1} [p^\alpha \mathbb{S} [Ru_1(x, t) + H_1(u)]], \\ q^3: u_3(x, t) &= -\mathbb{S}^{-1} [p^\alpha \mathbb{S} [Ru_2(x, t) + H_2(u)]], \\ &\dots \end{aligned}$$

Bu metodla denklemin çözümü

$$u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t) + \dots$$

olarak elde edilir (Singh *et al.* 2013).

Örnek 3.4.1: Başlangıç koşulu ile birlikte aşağıdaki lineer olmayan zaman-kesirli gaz dinamik denklemini düşünelim:

$$D_*^\alpha u(x, t) + \frac{1}{2} [u^2(x, t)]_x - u(x, t)[1 - u(x, t)] = 0, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (3.38)$$

$$u(x, 0) = e^{-x}. \quad (3.39)$$

(3.38)'un her iki tarafına Sumudu dönüşümü uygulanır ve başlangıç koşulunu kullanılırsa;

$$\mathbb{S}[u(x, t)] = e^{-x} - p^\alpha \mathbb{S} \left\{ \frac{1}{2} [u^2(x, t)]_x - u(x, t)[1 - u(x, t)] \right\}, \quad (3.40)$$

elde edilir. (3.40)'in her iki tarafına Sumudu dönüşümünün tersi uygulanırsa;

$$u(x, t) = e^{-x} - \mathbb{S}^{-1} \left\{ p^\alpha \mathbb{S} \left\{ \frac{1}{2} [u^2(x, t)]_x - u(x, t)[1 - u(x, t)] \right\} \right\},$$

elde edilir. Şimdi homotopi pertürbasyon yöntemi kullanılarak;

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n u_n(x, t) = e^{-x}$$

$$- q \left\{ \mathbb{S}^{-1} \left\{ p^\alpha \mathbb{S} \left\{ \frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} q^n H_n(u) \right] - \left[\sum_{n=0}^{\infty} q^n u_n \right] + \left[\sum_{n=0}^{\infty} q^n H'_n(u) \right] \right\} \right\} \right\},$$

$$q^3: u_3(x, t) = -S^{-1} \left[p^\alpha S \left[\frac{1}{2} H_2(u) - u_2 + H_2'(u) \right] \right] = \frac{t^{3\alpha} e^{-x}}{\Gamma(3\alpha + 1)},$$

...

elde edilir ve $u(x, t)$ seri çözümü

$$u(x, t) = \left[1 + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} + \dots \right] e^{-x} = E_\alpha(t^\alpha) e^{-x}, \quad (3.41)$$

olarak bulunur. (3.38) ve (3.41) de $\alpha = 1$ alınarak;

$$u(x, t) = \left[1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots \right] e^{-x}$$

çözümü elde edilir. Bu çözüm ise

$$u(x, t) = e^{t-x}$$

dır. (Singh *et al.* 2013).

Örnek 3.4.2: Zaman kesirli kısmi diferansiyel KdV denklemini dikkate alalım:

$$D_*^\alpha u + u_{xxx} - 3(u^2)_x = 0, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (3.42)$$

$$u(x, 0) = x, \quad (3.43)$$

Denklem (3.42)'nin her iki tarafına t 'ye göre Sumudu dönüşümünü uygulırsa;

$$S[D_*^\alpha u] + S[u_{xxx} - 3(u^2)_x] = 0, \quad (3.44)$$

elde edilir. Sumudu dönüşümünün türev özelliğini kullanarak denklem (3.44);

$$\mathbb{S}[u] = x - p^\alpha \mathbb{S}[u_{xxx} - 3(u^2)_x], \quad (3.45)$$

şeklinde yazılır. Denklem (3.45)'nin her iki tarafına Sumudu dönüşümünün tersini uygularsak;

$$u(x, t) = x - \mathbb{S}^{-1}\{p^\alpha \mathbb{S}[u_{xxx} - 3(u^2)_x]\}, \quad (3.46)$$

elde edilir. Şimdi, homotopi pertürbasyon yöntemini uygulayabiliriz:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n u_n(x, t), \quad (3.47)$$

olmak üzere lineer olmayan terim aşağıdaki gibi ayrışabilir:

$$Nu(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n H_n(u), \quad (3.48)$$

Bu durumda (3.47) ve (3.48) denklemlerini, (3.46) denklemine yerine yazılırsa;

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n u_n(x, t) = x - q \mathbb{S}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^\alpha} \mathbb{S} \left[\sum_{n=0}^{\infty} q^n u_{nxxx} - 3 \sum_{n=0}^{\infty} q^n H_n(u) \right] \right\}, \quad (3.49)$$

elde edilir.

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n H_n(u) = (u^2)_x,$$

3.5. Yeni İteratif Metodu (NIM)

Söz konusu yöntemi açıklamak için

$$u(x) = f(x) + N(u(x)), \quad (3.50)$$

genel fonksiyonel denklemini ele alalım. Burada $N: B \rightarrow B$ lineer olmayan bir operatör, B Banach uzay ve f bilinen bir fonksiyondur. $u(x)$ 'i

$$u(x) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i(x), \quad (3.51)$$

gibi seri çözüm olarak elde etmek istiyoruz. Lineer olmayan N operatörü aşağıdaki gibi ayrıştırılabilir;

$$N\left(\sum_{i=0}^{\infty} u_i\right) = N(u_0) + \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ N\left(\sum_{j=0}^i u_j\right) - N\left(\sum_{j=0}^{i-1} u_j\right) \right\}, \quad (3.52)$$

Denklem (3.51) ve (3.52)'den, denklem (3.50)

$$\sum_{i=0}^{\infty} u_i = f + N(u_0) + \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ N\left(\sum_{j=0}^i u_j\right) - N\left(\sum_{j=0}^{i-1} u_j\right) \right\}, \quad (3.53)$$

şeklinde yazılır ve aşağıdaki rekürans bağıntısı elde edilir;

$$\begin{aligned} u_0 &= f, \\ u_1 &= N(u_0), \\ u_{n+1} &= N(u_0 + u_1 + \dots + u_n) - N(u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}), \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (3.54)$$

Buradan ise;

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_{n+1} = N(u_0 + u_1 + \cdots + u_n), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} u_i = f + N\left(\sum_{i=0}^{\infty} u_i\right), \quad (3.55)$$

elde edilir. Eğer N daraltma operatörü ise, yani,

$$\|N(x) - N(y)\| \leq k \|x - y\|,$$

ise bu taktirde;

$$\begin{aligned} \|u_{n+1}\| &= \|N(u_0 + u_1 + \cdots + u_n) - N(u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1})\| \leq k \|u_n\| \leq \cdots \\ &\leq k^n \|u_0\|, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.56)$$

yazılabilir ve $\sum_{i=0}^{\infty} u_i$ serisi mutlak ve düzgün şekilde (3.50) denkleminin çözümüne yakınsaktır, bu çözüm Banach sabit nokta teoremi açısından tektir. (3.50) ve (3.51)'nin k -terim yaklaşık çözümü $\sum_{i=0}^{k-1} u_i$ ile açıklanır. (Daftardar-Gejji and Jafari 2006)

Örnek 3.5.1: Aşağıdaki lineer olmayan cebirsel denklemi düşünelim;

$$x^6 - 5x^5 + 3x^4 + x^3 + 2x^2 - 8x - \frac{1}{2} = 0,$$

Bu denklemi aşağıdaki gibi yeniden yazalım;

$$x = -\frac{1}{16} + \frac{1}{8}x^6 - \frac{5}{8}x^5 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{4}x^2 = x_0 + N(x),$$

$$x_0 = -\frac{1}{16}. N'(x_0) < 1 \text{ olmak üzere}$$

$$x_0 = -\frac{1}{16},$$

$$x_1 = N(x_0) = \frac{1}{8}x_0^6 - \frac{5}{8}x_0^5 + \frac{3}{8}x_0^4 + \frac{1}{8}x_0^3 + \frac{1}{4}x_0^2$$

$$x_{n+1} = N(x_0 + x_1 + \dots + x_n) - N(x_0 + x_1 + \dots + x_{n-1}) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

yazılabilir. ilk beş terimi aşağıdaki gibi hesaplayabiliriz:

$$x_1 = N(x_0) = \frac{1}{8}x_0^6 - \frac{5}{8}x_0^5 + \frac{3}{8}x_0^4 + \frac{1}{8}x_0^3 + \frac{1}{4}x_0^2 = 0.0009523704648,$$

$$x_2 = N(x_0 + x_1) - N(x_0) = -0.00002854648344,$$

$$x_3 = N(x_0 + x_1 + x_2) - N(x_0 + x_1) = 8.4940820811044 \times 10^{-7},$$

$$x_4 = N(x_0 + x_1 + x_2 + x_3) - N(x_0 + x_1 + x_2) = -2.527994113539 \times 10^{-8},$$

$$x_5 = N(x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4) - N(x_0 + x_1 + x_2 + x_3) = 7.5237232810 \times 10^{-10}.$$

Buradan;

$$x \approx x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = -0.06157535114,$$

dir. Bu sonuç ise Ouedraogo ve arkadaşları ile elde edilen çözümle aynıdır (Daftardar-Gejji and Jafari 2006).

Örnek 3.5.2: Aşağıdaki lineer Volterra integral denklemini göz önüne alalım;

$$u(x) = \int_0^x \frac{1 + u(t)}{1 + t} dt,$$

Buradan yola çıkarak;

$$u_0(x) = 0,$$

$$u_1(x) = N[u_0(x)] = \int_0^x \frac{1 + u_0(t)}{1 + t} dt = \ln(1 + x),$$

$$u_2(x) = N[u_0(x) + u_1(x)] - N[u_0(x)] = \int_0^x \frac{\ln(1 + t)}{1 + t} dt = \frac{[\ln(1 + x)]^2}{2!}$$

$$u_3(x) = N[u_0(x) + u_1(x) + u_2(x)] - N[u_0(x) + u_1(x)] = \frac{[\ln(1 + x)]^3}{3!}$$

$$u_{n+1}(x) = N[u_0(x) + u_1(x) + \dots + u_n(x)] - N[u_0(x) + u_1(x) + \dots + u_{n-1}(x)] \\ = \frac{[\ln(1 + x)]^{n+1}}{(n + 1)!} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

yazılabilir. Buradan;

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = \exp[\ln(1 + x)] - 1 = x.$$

olur (Daftardar-Gejji and Jafari 2006).

3.6. Yeni İteratif Laplace Dönüşüm Metodu (NILTM)

Bu yöntemin temel fikrini göstermek için, genel lineer ve homojen olmayan kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemi başlangıç koşulları ile birlikte göz önüne alalım;

$$D_*^\alpha u(x, t) + Nu(x, t) = f(x, t), \quad m - 1 < \alpha \leq m, \quad (3.57)$$

$$\left. \frac{\partial^k u(x, t)}{\partial t^k} \right|_{t=0} = h_k(x), \quad k = 0, 1, \dots, m - 1, \quad (3.58)$$

D_*^α Caputo anlamında türev olmak üzere, $m = [\alpha] + 1$, N genel lineer olmayan diferansiyel operatörü ve $f(x, t)$ kaynak terimi temsil eder. Denklem (3.57)'nin her iki tarafına Laplace dönüşümü uygulanırsa;

$$L[D_*^\alpha u(x, t)] + L[Nu(x, t)] = L[f(x, t)], \quad (3.59)$$

elde edilir. Laplace dönüşümünün diferansiyel özelliği kullanılarak;

$$s^\alpha L[u(x, t)] - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k} \frac{\partial^k}{\partial t^k} u(x, t)|_{t=0} + L[Nu(x, t)] = L[f(x, t)],$$

veya

$$s^\alpha L[u(x, t)] = \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k} h_k(x) + L[Nu(x, t)] - L[f(x, t)], \quad (3.60)$$

elde edilir. Denklem (3.60)'ın her iki tarafını s^α 'ya bölüp ve sonra Laplace dönüşümünün tersini uygularsak;

$$u(x, t) = G(x, t) - L^{-1} \left[\frac{1}{s^\alpha} L[Nu(x, t)] \right], \quad (3.61)$$

elde ederiz. Burada $G(x, t)$, kaynak terimden kaynaklanan terimi ve başlangıç koşullarını temsil eder. Şimdi, yeni iteratif metodunu uygulayabiliriz. Burada $u(x, t)$

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i(x, t). \quad (3.62)$$

şeklindedir. Lineer olmayan terim aşağıdaki gibi ayrışabilir:

$$L^{-1} \left[\frac{1}{s^\alpha} L \left[N \left(\sum_{i=0}^{\infty} u_i \right) \right] \right] = L^{-1} \left[\frac{1}{s^\alpha} L[Nu_0] \right] +$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left\{ L^{-1} \left[\frac{1}{s^{\alpha}} L \left[N \left(\sum_{j=0}^i u_j \right) \right] \right] - L^{-1} \left[\frac{1}{s^{\alpha}} L \left[N \left(\sum_{j=0}^{i-1} u_j \right) \right] \right] \right\}, \quad (3.63)$$

Denklem (3.62) ve (3.63), denklem (3.61)'de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} u_i &= G(x, t) - L^{-1} \left[\frac{1}{s^{\alpha}} L [Nu_0] \right] - \\ &\quad \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ L^{-1} \left[\frac{1}{s^{\alpha}} L \left[N \left(\sum_{j=0}^i u_j \right) \right] \right] - L^{-1} \left[\frac{1}{s^{\alpha}} L \left[N \left(\sum_{j=0}^{i-1} u_j \right) \right] \right] \right\} \\ &= G(x, t) - L^{-1} \left[\frac{1}{s^{\alpha}} L [Nu_0] \right] \\ &\quad - \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ L^{-1} \left[\frac{1}{s^{\alpha}} L \left[N \left(\sum_{j=0}^i u_j \right) - N \left(\sum_{j=0}^{i-1} u_j \right) \right] \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.64)$$

elde edilir. Aşağıdaki rekürans bağıntısı yazılabilir;

$$u_0(x, t) = G(x, t),$$

$$u_1(x, t) = -L^{-1} \left[\frac{1}{s^{\alpha}} L [Nu_0] \right],$$

$$\begin{aligned} u_2(x, t) &= -L^{-1} \left[\frac{1}{s^{\alpha}} L [N(u_0 + u_1)] \right] + L^{-1} \left[\frac{1}{s^{\alpha}} L [Nu_0] \right] \\ &= -L^{-1} \left[\frac{1}{s^{\alpha}} L [N(u_0 + u_1) - Nu_0] \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_3(x, t) &= -L^{-1} \left[\frac{1}{s^{\alpha}} L [N(u_0 + u_1 + u_2)] \right] + L^{-1} \left[\frac{1}{s^{\alpha}} L [N(u_0 + u_1)] \right] \\ &= -L^{-1} \left[\frac{1}{s^{\alpha}} L [N(u_0 + u_1 + u_2) - N(u_0 + u_1)] \right], \end{aligned}$$

...

$$\begin{aligned}
u_{n+1}(x, t) &= -L^{-1} \left[\frac{1}{s^\alpha} L[N(u_0 + u_1 + \dots + u_n)] \right] + L^{-1} \left[\frac{1}{s^\alpha} L[N(u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1})] \right] \\
&= -L^{-1} \left[\frac{1}{s^\alpha} L[N(u_0 + u_1 + \dots + u_n) - N(u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1})] \right].
\end{aligned}$$

...

Örnek 3.6.1: Aşağıdaki lineer olmayan zaman-kesirli gaz dinamik denklemini başlangıç koşulu ile birlikte düşünelim;

$$D_t^\alpha u + uu_x - u(1 - u) = 0, \quad t > 0, 0 < \alpha \leq 1, \quad (3.65)$$

$$u(x, 0) = e^{-x}, \quad (3.66)$$

(3.65) denkleminin her iki tarafına Laplace dönüşümü uygularsak;

$$L[u(x, t)] = \frac{1}{s} u(x, 0) + s^{-\alpha} L[u - uu_x - u^2], \quad (3.67)$$

elde edilir. Daha sonra, (3.67)'nin her iki tarafına ters Laplace dönüşümü uygulanarak ve (3.66) başlangıç koşulunu kullanılarak aşağıdaki denklem edilmiş olur;

$$u(x, t) = e^{-x} + L^{-1}\{s^{-\alpha} L[u - uu_x - u^2]\}. \quad (3.68)$$

Bu durumda, $N(u)$

$$N(u) = L^{-1}\{s^{-\alpha} L[u - uu_x - u^2]\}, \quad (3.69)$$

şeklindedir. Rekürans bağıntısı ise

$$u_0(x, t) = e^{-x},$$

$$\begin{aligned}
u_1(x, t) &= e^{-x} \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}, \\
u_2(x, t) &= e^{-x} \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)}, \\
&\dots \\
u_n(x, t) &= e^{-x} \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)}, \\
&\dots
\end{aligned}$$

şeklindedir. Dolayısıyla;

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-x} t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} = e^{-x} E_\alpha(t^\alpha), \quad (3.70)$$

elde edilir (Najafi *et al.* 2016).

Örnek 3.6.2: Şimdi, aşağıdaki uzay-kesirli telgraf denklemini

$$D_x^\alpha u(x, t) = u_{tt}(x, t) + u_t(x, t) + u(x, t), \quad t \geq 0, \quad 1 < \alpha \leq 2, \quad (3.71)$$

sınır koşulları ile birlikte düşünelim;

$$u(x, t)|_{x=0} = e^{-t}, \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = e^{-t}, \quad (3.72)$$

(3.71)'in her iki tarafına x 'e göre Laplace dönüşümü uygulanırsa;

$$s^\alpha L[u(x, t)] - s^{\alpha-1} u(x, t)|_{x=0} - s^{\alpha-2} \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = L[u_{tt}(x, t) + u_t(x, t) + u(x, t)]$$

elde edilir ve sınır koşullarını da kullanılırsa;

$$L[u(x, t)] = \frac{e^{-t}}{s} + \frac{e^{-t}}{s^2} + \frac{1}{s^\alpha} L[u_{tt}(x, t) + u_t(x, t) + u(x, t)], \quad (3.73)$$

bulunur. (3.73) denkleminin her iki tarafına ters Laplace dönüşümü uygulanarak

$$u(x, t) = e^{-t}(1 + x) + L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^\alpha} L[u_{tt}(x, t) + u_t(x, t) + u(x, t)] \right\}, \quad (3.74)$$

denklemini elde edilir. (3.74) de $N(u)$

$$N(u) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^\alpha} L[u_{tt}(x, t) + u_t(x, t) + u(x, t)] \right\},$$

şeklindedir. Rekürans bağıntısı

$$u_0(x, t) = e^{-t}(1 + x),$$

$$u_1(x, t) = e^{-t} \left[\frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{x^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha + 2)} \right],$$

$$u_2(x, t) = e^{-t} \left[\frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \frac{x^{2\alpha+1}}{\Gamma(2\alpha + 2)} \right],$$

...

$$u_n(x, t) = e^{-t} \left[\frac{x^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} + \frac{x^{n\alpha+1}}{\Gamma(n\alpha + 2)} \right],$$

...

olarak bulunur. Dolayısıyla;

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = e^{-t} [E_{\alpha,1}(x^\alpha) + xE_{\alpha,2}(x^\alpha)], \quad (3.75)$$

elde edilir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Diferansiyel-Cebirsel Denklemlerin Homotopi Pertürbasyon Dönüşüm Metodu ve Yeni İteratif Dönüşüm Metoduyla Çözümü

Örnek 4.1.1: Aşağıdaki diferansiyel-cebirsel denklem sistemini başlangıç koşulları ile birlikte düşünelim:

$$\begin{aligned} x'(t) - ty'(t) + t^2z'(t) + x(t) - (t+1)y(t) + (t^2 + 2t)z(t) &= 0, \\ y'(t) - tz'(t) - y(t) + (t-1)z(t) &= 0, \\ z(t) &= sint, \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$x(0) = y(0) = 1, \quad z(0) = 0. \quad (4.2)$$

(4.1) denkleminin her iki tarafına t 'e göre Sumudu dönüşümünü uygular ve başlangıç koşullarını kullanılırsa;

$$\begin{aligned} \mathbb{S}[x(t)] &= \frac{1}{1+p} + \frac{p^2}{1+p} \frac{d}{dp} \mathbb{S}[y(t) - tz(t)] + \frac{p}{1+p} \mathbb{S}[(t+1)y(t) - (t^2 + t)z(t)], \\ \mathbb{S}[y(t)] &= \frac{1}{1-p} + \frac{p^2}{1-p} \frac{d}{dp} \mathbb{S}[z(t)] - \frac{p}{1-p} \mathbb{S}[(t-1)z(t)], \\ z(t) &= sint, \end{aligned} \quad (4.3)$$

elde edilir. (4.3) sisteminin her iki tarafına ters Sumudu dönüşümü uygulanırsa;

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-t} + \mathbb{S}^{-1} \left\{ \frac{p^2}{1+p} \frac{d}{dp} \mathbb{S}[y(t) - tz(t)] + \frac{p}{1+p} \mathbb{S}[(t+1)y(t) - (t^2 + t)z(t)] \right\}, \\ y(t) &= e^t + \mathbb{S}^{-1} \left\{ \frac{p^2}{1-p} \frac{d}{dp} \mathbb{S}[z(t)] - \frac{p}{1-p} \mathbb{S}[(t-1)z(t)] \right\}, \\ z(t) &= sint, \end{aligned} \quad (4.4)$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
(1-q)[x(t) - x(0)] + q \left[x(t) - e^{-t} - \mathbb{S}^{-1} \left\{ \frac{p^2}{1+p} \frac{d}{dp} \mathbb{S}[y(t) - tz(t)] + \frac{p}{1+p} \times \right. \right. \\
\left. \left. \mathbb{S}[(t+1)y(t) - (t^2+t)z(t)] \right\} \right] &= 0, \\
(1-q)[y(t) - y(0)] + q \left[y(t) - e^t - \mathbb{S}^{-1} \left\{ \frac{p^2}{1-p} \frac{d}{dp} \mathbb{S}[z(t)] - \frac{p}{1-p} \mathbb{S}[(t-1)z(t)] \right\} \right] &= 0, \\
(1-q)[z(t) - z(0)] + q[z(t) - sint] &= 0,
\end{aligned} \tag{4.5}$$

olacak şekilde homotopi kurulabilir.

$$\begin{aligned}
x(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} q^n x_n(t), \\
y(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} q^n y_n(t), \\
z(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} q^n z_n(t),
\end{aligned} \tag{4.6}$$

olmak üzere (4.6) denklemleri (4.5) denklemlerinde yerine koyulursa ve q 'nin kuvvetlerine göre katsayılar eşitlenirse aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$q^0: \begin{cases} x_0(t) = 1, \\ y_0(t) = 1, \\ z_0(t) = 0. \end{cases}$$

$$q^1: \begin{cases} x_1(t) = e^{-t} - 1 + \mathbb{S}^{-1} \left\{ \frac{p^2}{1+p} \frac{d}{dp} \mathbb{S}[y_0(t) - tz_0(t)] + \frac{p}{1+p} \mathbb{S}[(t+1)y_0(t) - (t^2+t)z_0(t)] \right\} \\ \quad \quad \quad = e^{-t} - 1 + \mathbb{S}^{-1}[p] = e^{-t} - 1 + t, \\ y_1(t) = e^t - 1 + \mathbb{S}^{-1} \left\{ \frac{p^2}{1-p} \frac{d}{dp} \mathbb{S}[z_0(t)] - \frac{p}{1-p} \mathbb{S}[(t-1)z_0(t)] \right\} = e^t - 1, \\ z_1(t) = sint. \end{cases}$$

$$q^2: \begin{cases} x_2(t) = \mathbb{S}^{-1} \left\{ \frac{p^2}{1+p} \frac{d}{dp} \mathbb{S}[y_1(t) - tz_1(t)] + \frac{p}{1+p} \mathbb{S}[(t+1)y_1(t) - (t^2+t)z_1(t)] \right\} \\ \quad = te^t - t - t^2 \text{sint}, \\ y_2(t) = \mathbb{S}^{-1} \left\{ \frac{p^2}{1-p} \frac{d}{dp} \mathbb{S}[z_1(t)] - \frac{p}{1-p} \mathbb{S}[(t-1)z_1(t)] \right\} = t \text{sint}, \\ z_2(t) = 0. \end{cases}$$

$$q^3: \begin{cases} x_3(t) = \mathbb{S}^{-1} \left\{ \frac{p^2}{1+p} \frac{d}{dp} \mathbb{S}[y_2(t) - tz_2(t)] + \frac{p}{1+p} \mathbb{S}[(t+1)y_2(t) - (t^2+t)z_2(t)] \right\} \\ \quad = t^2 \text{sint}, \\ y_3(t) = \mathbb{S}^{-1} \left\{ \frac{p^2}{1-p} \frac{d}{dp} \mathbb{S}[z_2(t)] - \frac{p}{1-p} \mathbb{S}[(t-1)z_2(t)] \right\} = 0, \\ z_3(t) = 0. \end{cases}$$

$$q^4: \begin{cases} x_4(t) = \mathbb{S}^{-1} \left\{ \frac{p^2}{1+p} \frac{d}{dp} \mathbb{S}[y_3(t) - tz_3(t)] + \frac{p}{1+p} \mathbb{S}[(t+1)y_3(t) - (t^2+t)z_3(t)] \right\} \\ \quad = 0, \\ y_4(t) = \mathbb{S}^{-1} \left\{ \frac{p^2}{1-p} \frac{d}{dp} \mathbb{S}[z_3(t)] - \frac{p}{1-p} \mathbb{S}[(t-1)z_3(t)] \right\} = 0, \\ z_4(t) = 0. \end{cases}$$

...

Bu durumda, (4.1) ve (4.2) probleminin çözümleri;

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} x_n(t) = e^{-t} + te^t, \\ y(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} y_n(t) = e^t + t \text{sint}, \\ z(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} z_n(t) = \text{sint}. \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Örnek 4.1.2: Aşağıdaki lineer olmayan diferansiyel-cebirselsel denklem sistemini başlangıç koşulları ile birlikte ele alalım;

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t)y(t) - 2tx^2(t) - 1, \\ y(t) &= x(t)y(t) + t^2, \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$x(0) = y(0) = 1. \quad (4.8)$$

(4.7) nin ilk denkleminin her iki tarafına Sumudu dönüşümünü uygular ve başlangıç koşulunu kullanırsak;

$$S[x(t)] = 1 - p + pS[x(t)y(t) - 2tx^2(t)], \quad (4.9)$$

elde edilir. (4.9)'un her iki tarafına ters Sumudu dönüşümü uygularsak;

$$x(t) = 1 - t + S^{-1}\{pS[x(t)y(t) - 2tx^2(t)]\}. \quad (4.10)$$

bulunur. Şimdi, homotopi pertürbasyon yöntemi uygulanabilir;

$$\begin{aligned} (1 - q)[x(t) - x(0)] - q\{x(t) - 1 + t - S^{-1}\{pS[x(t)y(t) - 2tx^2(t)]\}\} &= 0, \\ (1 - q)[y(t) - y(0)] - q[y(t) - x(t)y(t) - t^2] &= 0, \end{aligned} \quad (4.11)$$

olacak şekilde homotopi kurulabilir.

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} q^n x_n(t), \\ y(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} q^n y_n(t), \end{aligned} \quad (4.12)$$

olmak üzere (4.12), (4.11)'de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
q^0: & \begin{cases} x_0(t) = 1, \\ y_0(t) = 1, \end{cases} \\
q^1: & \begin{cases} x_1(t) = -t + \mathbb{S}^{-1}\{p\mathbb{S}[H_0 - 2tH'_0]\} = -t + \mathbb{S}^{-1}\{p\mathbb{S}[x_0y_0 - 2tx_0^2]\} = -t^2, \\ y_1(t) = t^2 - 1 + H_0 = t^2 - 1 + x_0y_0 = t^2, \end{cases} \\
q^2: & \begin{cases} x_2(t) = \mathbb{S}^{-1}\{p\mathbb{S}[H_1 - 2tH'_1]\} = \mathbb{S}^{-1}\{p\mathbb{S}[x_0y_1 + x_1y_0 - 4tx_0x_1]\} = t^4, \\ y_2(t) = H_1 = x_0y_1 + x_1y_0 = 0, \end{cases} \\
q^3: & \begin{cases} x_3(t) = \mathbb{S}^{-1}\{p\mathbb{S}[H_2 - 2tH'_2]\} = \mathbb{S}^{-1}\{p\mathbb{S}[x_0y_2 + x_1y_1 + x_2y_0 - 2tx_1^2 - 4tx_0x_2]\} = -t^6, \\ y_3(t) = H_2 = x_0y_2 + x_1y_1 + x_2y_0 = 0, \end{cases} \\
& \dots
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
x(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} x_n(t) = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots = \frac{1}{1 + t^2}, \\
y(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} y_n(t) = 1 + t^2,
\end{aligned}$$

seri çözümleri bulunur.

Örnek 4.1.3: Aşağıdaki diferansiyel-cebirselsel denklem sistemini başlangıç koşulları ile birlikte ele alalım;

$$\begin{aligned}
x'(t) - ty'(t) + t^2z'(t) + x(t) - (t+1)y(t) + (t^2+2t)z(t) &= 0, \\
y'(t) - tz'(t) - y(t) + (t-1)z(t) &= 0, \\
z(t) &= \sin t,
\end{aligned} \tag{4.16}$$

$$x(0) = y(0) = 1, \quad z(0) = 0. \tag{4.17}$$

(4.16)'in ilk iki denkleminin her iki tarafına Laplace dönüşümünü uygularsak ve başlangıç koşullarını kullanırsak;

$$\begin{aligned}
L[x(t)] &= \frac{1}{s+1} - \frac{s}{s+1} \frac{d}{ds} L[y(t) - tz(t)] + \frac{1}{s+1} L[ty(t) - t^2z(t)], \\
L[y(t)] &= \frac{1}{s-1} - \frac{s}{s-1} \frac{d}{ds} L[z(t)] - \frac{1}{s-1} L[tz(t)], \\
z(t) &= \text{sint},
\end{aligned} \tag{4.18}$$

elde ederiz. (4.18)'in her iki tarafına Laplace dönüşümünün tersini uygularsak, aşağıdaki denklem sistemi oluşur:

$$\begin{aligned}
x(t) &= e^{-t} - L^{-1} \left\{ \frac{s}{s+1} \frac{d}{ds} L[y(t) - tz(t)] - \frac{1}{s+1} L[ty(t) - t^2z(t)] \right\}, \\
y(t) &= e^t - L^{-1} \left\{ \frac{s}{s-1} \frac{d}{ds} L[z(t)] + \frac{1}{s-1} L[tz(t)] \right\}, \\
z(t) &= \text{sint},
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Şimdi, yeni iteratif yöntemi uygulayabiliriz;

$$\begin{aligned}
x(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} x_n(t), \\
y(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} y_n(t), \\
z(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} z_n(t),
\end{aligned} \tag{4.20}$$

olmak üzere (4.19) denklemlerini göz önüne aldığımızda $N(u)$ 'lar aşağıdaki gibi olur:

$$\begin{aligned}
N_1(x, y, z) &= -L^{-1} \left\{ \frac{s}{s+1} \frac{d}{ds} L[y(t) - tz(t)] - \frac{1}{s+1} L[ty(t) - t^2z(t)] \right\}, \\
N_2(x, y, z) &= -L^{-1} \left\{ \frac{s}{s-1} \frac{d}{ds} L[z(t)] + \frac{1}{s-1} L[tz(t)] \right\}, \\
N_3(x, y, z) &= 0.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Yeni iteratif yöntemi kullanılarak aşağıdaki adımlar hesaplanır;

$$\begin{cases} x_0(t) = e^{-t}, \\ y_0(t) = e^t, \\ z_0(t) = \text{sint}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(t) = N_1(x_0, y_0, z_0) = -L^{-1} \left\{ \frac{s}{s+1} \frac{d}{ds} L[y_0(t) - tz_0(t)] - \frac{1}{s+1} L[ty_0(t) - t^2 z_0(t)] \right\} \\ \quad = te^t - t^2 \text{sint}, \\ y_1(t) = N_2(x_0, y_0, z_0) = -L^{-1} \left\{ \frac{s}{s-1} \frac{d}{ds} L[z_0(t)] + \frac{1}{s-1} L[tz_0(t)] \right\} = tsint, \\ z_1(t) = N_3(x_0, y_0, z_0) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2(t) = N_1(x_0 + x_1, y_0 + y_1, z_0 + z_1) - N_1(x_0, y_0, z_0) = t^2 \text{sint}, \\ y_2(t) = N_2(x_0 + x_1, y_0 + y_1, z_0 + z_1) - N_2(x_0, y_0, z_0) = 0, \\ z_2(t) = N_3(x_0 + x_1, y_0 + y_1, z_0 + z_1) - N_3(x_0, y_0, z_0) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3(t) = N_1(x_0 + x_1 + x_2, y_0 + y_1 + y_2, z_0 + z_1 + z_2) - N_1(x_0 + x_1, y_0 + y_1, z_0 + z_1) = 0, \\ y_3(t) = N_2(x_0 + x_1 + x_2, y_0 + y_1 + y_2, z_0 + z_1 + z_2) - N_2(x_0 + x_1, y_0 + y_1, z_0 + z_1) = 0, \\ z_3(t) = N_3(x_0 + x_1 + x_2, y_0 + y_1 + y_2, z_0 + z_1 + z_2) - N_3(x_0 + x_1, y_0 + y_1, z_0 + z_1) = 0. \end{cases}$$

...

Dolayısıyla, (4.16)-(4.17) nin çözümü aşağıdaki gibi elde edilir;

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} x_n(t) = e^{-t} + te^t, \\ y(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} y_n(t) = e^t + tsint, \\ z(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} z_n(t) = \text{sint}. \end{aligned}$$

Örnek 4.1.4: Aşağıdaki lineer olmayan diferansiyel-cebirsell denklemler sistemini başlangıç koşulları ile birlikte düşünelim;

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t)y(t) - 2tx^2(t) - 1, \\ y(t) &= x(t)y(t) + t^2, \end{aligned} \tag{4.22}$$

$$x(0) = y(0) = 1. \tag{4.23}$$

(4.22)'nin ilk denkleminin her iki tarafına Laplace dönüşümünü uygularsak ve başlangıç koşulunu kullanırsak

$$L[x(t)] = \frac{1}{s} + \frac{1}{s}L[x(t)y(t) - 2tx^2(t) - 1], \quad (4.24)$$

elde edilir. (4.24)'ün her iki tarafına Laplace dönüşümünün tersini uygulayarak aşağıdaki sistem oluşur:

$$\begin{cases} x(t) = 1 + L^{-1}\left\{\frac{1}{s}L[x(t)y(t) - 2tx^2(t) - 1]\right\}, \\ y(t) = x(t)y(t) + t^2, \end{cases} \quad (4.25)$$

Şimdi, yeni iteratif yöntemi uygulayabiliriz

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} x_n(t), \\ y(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} y_n(t), \end{aligned} \quad (4.26)$$

olmak üzere (4.25) denklemlerini göz önüne aldığımızda $N(u)$ 'lar aşağıdaki gibi olur:

$$\begin{aligned} N_1(x, y) &= L^{-1}\left\{\frac{1}{s}L[x(t)y(t) - 2tx^2(t) - 1]\right\}, \\ N_2(x, y) &= x(t)y(t) + t^2 - 1. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Yeni iteratif yöntemi kullanılarak aşağıdaki sonuçlar elde edilir

$$\begin{cases} x_0(t) = 1, \\ y_0(t) = 1, \\ x_1(t) = N_1(x_0, y_0) = N_1(1, 1) = -t^2, \\ y_1(t) = N_2(x_0, y_0) = N_2(1, 1) = t^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases}
x_2(t) = N_1(x_0 + x_1, y_0 + y_1) - N_1(x_0, y_0) = N_1(1 - t^2, 1 + t^2) - N_1(1, 1) = t^4 - \frac{t^5}{5} - \frac{t^6}{3}, \\
y_2(t) = N_2(x_0 + x_1, y_0 + y_1) - N_2(x_0, y_0) = N_2(1 - t^2, 1 + t^2) - N_2(1, 1) = -t^4, \\
x_3(t) = N_1(x_0 + x_1 + x_2, y_0 + y_1 + y_2) - N_1(x_0 + x_1, y_0 + y_1) = \\
N_1\left(1 - t^2 + t^4 - \frac{t^5}{5} - \frac{t^6}{3}, 1 + t^2 - t^4\right) - N_1(1 - t^2, 1 + t^2) = \\
-\frac{7t^6}{10} + \frac{37t^7}{105} + \frac{77t^8}{120} - \frac{32t^9}{135} - \frac{47t^{10}}{150} + \frac{17t^{11}}{165} + \frac{47t^{12}}{450} - \frac{4t^{13}}{195} - \frac{t^{14}}{63}, \\
y_3(t) = N_2(x_0 + x_1 + x_2, y_0 + y_1 + y_2) - N_2(x_0 + x_1, y_0 + y_1) = \\
N_2\left(1 - t^2 + t^4 - \frac{t^5}{5} - \frac{t^6}{3}, 1 + t^2 - t^4\right) - N_2(1 - t^2, 1 + t^2) = \\
-\frac{t^5}{5} + \frac{5t^6}{3} - \frac{t^7}{5} - \frac{4t^8}{3} + \frac{t^9}{5} + \frac{t^{10}}{3}, \\
x_4(t) = N_1(x_0 + x_1 + x_2 + x_3, y_0 + y_1 + y_2 + y_3) - N_1(x_0 + x_1 + x_2, y_0 + y_1 + y_2) = \\
-\frac{t^6}{30} + \frac{29t^7}{210} + \frac{331t^8}{840} - \frac{3753t^9}{7560} - \frac{9547t^{10}}{18900} + \frac{255503t^{11}}{415800} + \frac{291421t^{12}}{623700} - \frac{451423t^{13}}{772200} \\
-\frac{4775509t^{14}}{15135120} + \frac{1307617}{3003000}t^{15} + \frac{1487822957}{9081072000}t^{16} - \frac{88668131}{344594250}t^{17} - \frac{222217}{2882880}t^{18} \\
+\frac{194530681}{1540539000}t^{19} + \frac{253382299}{7297290000}t^{20} - \frac{304541}{6081075}t^{21} - \frac{64394417}{4459455000}t^{22} \\
+\frac{151139981}{9790530750}t^{23} + \frac{134845619}{26756730000}t^{24} - \frac{2708941}{760134375}t^{25} - \frac{3370709}{2635132500}t^{26} \\
+\frac{51052}{91216125}t^{27} + \frac{1387}{6707610}t^{28} - \frac{16}{356265}t^{29} - \frac{1}{59535}t^{30}, \\
y_4(t) = N_2(x_0 + x_1 + x_2 + x_3, y_0 + y_1 + y_2 + y_3) - N_2(x_0 + x_1 + x_2, y_0 + y_1 + y_2) = \\
-\frac{t^5}{5} + \frac{29t^6}{30} + \frac{37t^7}{105} - \frac{367t^8}{120} + \frac{298t^9}{945} + \frac{2641t^{10}}{600} - \frac{105307t^{11}}{103950} - \frac{53801t^{12}}{12600} + \frac{7847863t^{13}}{5405400} \\
+\frac{117913t^{14}}{37800} - \frac{107630659t^{15}}{81081000} - \frac{18142t^{16}}{10395} + \frac{64528379t^{17}}{81081000} + \frac{1365229t^{18}}{1801800} - \frac{3354271t^{19}}{10135125} \\
-\frac{110563t^{20}}{450450} + \frac{193147t^{21}}{2252250} + \frac{6373t^{22}}{122850} - \frac{41t^{23}}{4095} - \frac{t^{24}}{189}.
\end{cases}$$

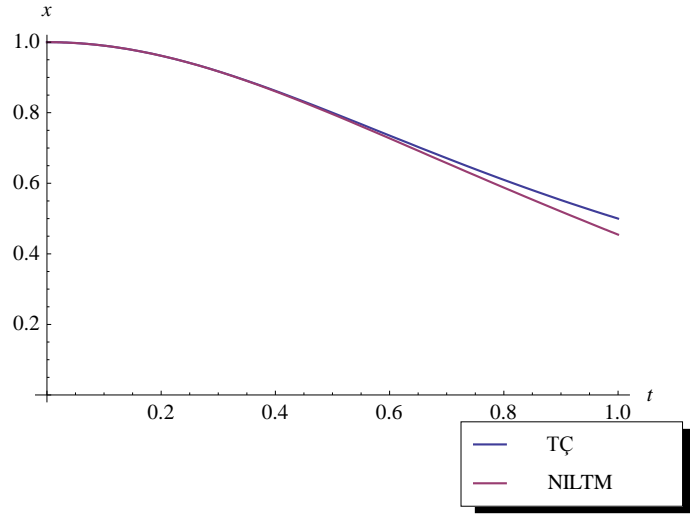
...

Dolayısıyla, (4.22)-(4.23) ün seri çözümü

$$\begin{aligned}
x(t) = & 1 - t^2 + t^4 - \frac{1}{5}t^5 - \frac{16}{15}t^6 + \frac{103}{210}t^7 + \frac{29}{28}t^8 - \frac{1109}{1512}t^9 - \frac{15469}{18900}t^{10} \\
& + \frac{298343}{415800}t^{11} + \frac{356563}{623700}t^{12} - \frac{467263}{772200}t^{13} - \frac{5015749}{15135120}t^{14} \\
& + \frac{1307617}{3003000}t^{15} + \frac{1487822957}{9081072000}t^{16} - \frac{88668131}{344594250}t^{17} - \frac{222217}{2882880}t^{18} \\
& + \frac{194530681}{1540539000}t^{19} + \frac{253382299}{7297290000}t^{20} - \frac{304541}{6081075}t^{21} \\
& - \frac{64394417}{4459455000}t^{22} + \frac{151139981}{9790530750}t^{23} + \frac{134845619}{26756730000}t^{24} \\
& - \frac{2708941}{760134375}t^{25} - \frac{3370709}{2635132500}t^{26} + \frac{51052}{91216125}t^{27} + \frac{1387}{6707610}t^{28} \\
& - \frac{16}{356265}t^{29} - \frac{1}{59535}t^{30} + \dots,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y(t) = & 1 + t^2 - t^4 - \frac{2t^5}{5} + \frac{79t^6}{30} + \frac{16t^7}{105} - \frac{527t^8}{120} + \frac{487t^9}{945} + \frac{947t^{10}}{200} - \frac{105307t^{11}}{103950} \\
& - \frac{53801t^{12}}{12600} + \frac{7847863t^{13}}{5405400} + \frac{117913t^{14}}{37800} - \frac{107630659t^{15}}{81081000} \\
& - \frac{18142t^{16}}{10395} + \frac{64528379t^{17}}{81081000} + \frac{1365229t^{18}}{1801800} - \frac{3354271t^{19}}{10135125} \\
& - \frac{110563t^{20}}{450450} + \frac{193147t^{21}}{2252250} + \frac{6373t^{22}}{122850} - \frac{41t^{23}}{4095} - \frac{t^{24}}{189} + \dots,
\end{aligned}$$

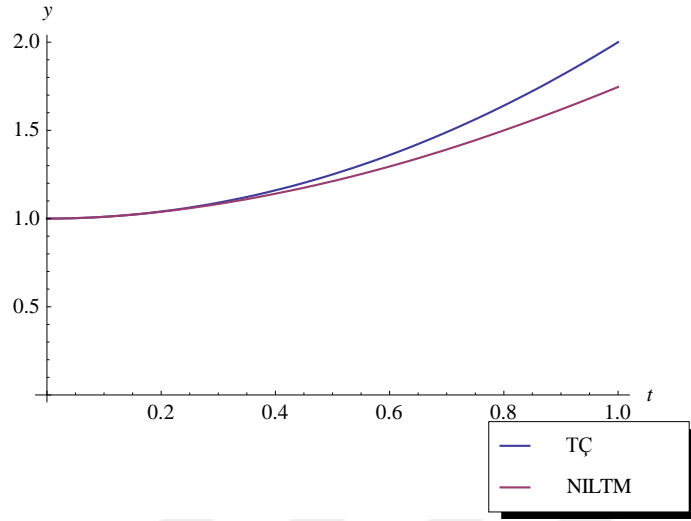
olarak elde edilir.



Şekil 4.1. (4.22)'de NILTM ile elde edilen $x(t)$ yaklaşık çözümüne ve tam çözüme ait grafik

Çizelge 4.1. (4.22) diferansiyel cebirsel denklem sistemindeki $x(t)$ fonksiyonu için mutlak hata tablosu

t	TÇ	NILTM	TÇ-NILTM
0	1.000000000000000	1.000000000000000	0.000000000000000
0.1	0.990099009900999	0.99009695287677	$2.05702422029219 \times 10^{-6}$
0.2	0.96153846153846	0.96147541150148	0.00006305003698
0.3	0.91743119266055	0.91699958178710	0.00043161087345
0.4	0.86206896551724	0.86050673071946	0.00156223479778
0.5	0.800000000000000	0.79604516529895	0.00395483470105



Şekil 4.2. (4.22)'de NILTM ile elde edilen $y(t)$ yaklaşık çözümüne ve tam çözüme ait grafik

Çizelge 4.2. (4.22) diferansiyel cebirsel denklem sistemindeki $y(t)$ fonksiyonu için mutlak hata tablosu

t	TÇ	NILTM	TÇ-NILTM
0	1.0000000000000000	1.0000000000000000	0.0000000000000000
0.1	1.0100000000000000	1.00989652814327	0.00010347185673
0.2	1.0400000000000000	1.03842304966537	0.00157695033463
0.3	1.0900000000000000	1.08288947570570	0.00711052429430
0.4	1.1600000000000000	1.14094144026743	0.01905855973257
0.5	1.2500000000000000	1.21168269571375	0.03831730428625

4.2. Kesirli Mertebeden Diferansiyel-Cebirsel Denklemlerin Homotopi Pertürbasyon Dönüşüm Metodu ve Yeni İteratif Dönüşüm Metoduyla Çözümü

Örnek 4.2.1: Aşağıdaki kesirli mertebeden diferansiyel-cebirsel denklemleri düşünelim:

$$\begin{aligned} D_*^\alpha x(t) + x(t) - y(t) &= -sint, \\ x(t) + y(t) &= e^{-t} + sint, \end{aligned} \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (4.28)$$

$$x(0) = 1, y(0) = 1. \quad (4.29)$$

(4.28)'in birinci denkleminin her iki tarafına Sumudu dönüşümünü uygulananak

$$\mathbb{S}[D_*^\alpha x(t)] + \mathbb{S}[x(t)] = \mathbb{S}[y(t)] - \mathbb{S}[sint],$$

elde edilir. Sumudu dönüşümünün diferansiyel özelliğini kullanarak

$$p^{-\alpha} \mathbb{S}[x(t)] - p^{-\alpha} + \mathbb{S}[x(t)] = \mathbb{S}[y(t)] - \mathbb{S}[sint],$$

veya;

$$\mathbb{S}[x(t)] = \frac{1}{1+p^\alpha} + \frac{p^\alpha}{1+p^\alpha} \mathbb{S}[y(t)] - \frac{p^\alpha}{1+p^\alpha} \mathbb{S}[sint], \quad (4.30)$$

denklemini elde edilir. Yukarıdaki denklemin her iki tarafına Sumudu dönüşümünün tersini uygularsak

$$x(t) = E_\alpha(-t^\alpha) + \mathbb{S}^{-1} \left\{ \frac{p^\alpha}{1+p^\alpha} \mathbb{S}[y(t)] \right\} - \mathbb{S}^{-1} \left\{ \frac{p^\alpha}{1+p^\alpha} \mathbb{S}[sint] \right\}, \quad (4.31)$$

denklemini bulunur. Dolayısıyla (4.28) denklem sistemini

$$\begin{aligned} x(t) &= E_\alpha(-t^\alpha) + \mathbb{S}^{-1} \left\{ \frac{p^\alpha}{1+p^\alpha} \mathbb{S}[y(t)] \right\} - \mathbb{S}^{-1} \left\{ \frac{p^\alpha}{1+p^\alpha} \mathbb{S}[sint] \right\}, \\ y(t) &= e^{-t} + sint - x(t), \end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz. Şimdi, Homotopi pertürbasyon yöntemini uygulayabiliriz

$$\begin{aligned} (1-q)[x(t) - x(0)] + q \left\{ x(t) - E_\alpha(-t^\alpha) - \mathbb{S}^{-1} \left\{ \frac{p^\alpha}{1+p^\alpha} \mathbb{S}[y(t)] \right\} + \mathbb{S}^{-1} \left\{ \frac{p^\alpha}{1+p^\alpha} \mathbb{S}[sint] \right\} \right\} &= 0, \\ (1-q)[y(t) - y(0)] + q\{y(t) - e^{-t} - sint + x(t)\} &= 0, \end{aligned} \quad (4.32)$$

veya

$$\begin{aligned} x(t) &= 1 + q[E_\alpha(-t^\alpha) - 1] + q\mathbb{S}^{-1} \left\{ \frac{p^\alpha}{1+p^\alpha} \mathbb{S}[y(t)] \right\} - q\mathbb{S}^{-1} \left\{ \frac{p^\alpha}{1+p^\alpha} \mathbb{S}[sint] \right\}, \\ y(t) &= 1 + q[e^{-t} + sint - 1] - qx(t), \end{aligned} \quad (4.33)$$

olur.

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} q^n x_n(t), \\ y(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} q^n y_n(t), \end{aligned} \quad (4.34)$$

olmak üzere (4.34) denklemlerini, (4.33) denklemlerinde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} q^n x_n(t) &= 1 + q \left[E_\alpha(-t^\alpha) - 1 - \mathbb{S}^{-1} \left\{ \frac{p^\alpha}{1+p^\alpha} \mathbb{S}[sint] \right\} \right] + q\mathbb{S}^{-1} \left\{ \frac{p^\alpha}{1+p^\alpha} \mathbb{S} \left[\sum_{n=0}^{\infty} q^n y_n(t) \right] \right\}, \\ \sum_{n=0}^{\infty} q^n y_n(t) &= 1 + q[e^{-t} + sint - 1] - \sum_{n=0}^{\infty} q^{n+1} x_n(t), \end{aligned} \quad (4.35)$$

denklemleri bulunmuş olur. q 'nun kuvvetlerine göre katsayılar eşitlenirse aşağıdaki yaklaşımlar elde edilir:

$$\begin{aligned} q^0: &\begin{cases} x_0(t) = 1, \\ y_0(t) = 1, \end{cases} \\ q^1: &\begin{cases} x_1(t) = E_\alpha(-t^\alpha) - 1 - \mathbb{S}^{-1} \left\{ \frac{p^\alpha}{1+p^\alpha} \mathbb{S}[sint] \right\} + \mathbb{S}^{-1} \left\{ \frac{p^\alpha}{1+p^\alpha} \mathbb{S}[y_0(t)] \right\}, \\ y_1(t) = e^{-t} + sint - 1 - x_0(t), \end{cases} \end{aligned}$$

$$q^2: \begin{cases} x_2(t) = \mathbb{S}^{-1} \left\{ \frac{p^\alpha}{1+p^\alpha} \mathbb{S}[y_1(t)] \right\}, \\ y_2(t) = -x_1(t), \end{cases}$$

$$q^3: \begin{cases} x_3(t) = \mathbb{S}^{-1} \left\{ \frac{p^\alpha}{1+p^\alpha} \mathbb{S}[y_2(t)] \right\}, \\ y_3(t) = -x_2(t), \end{cases}$$

...

$$q^n: \begin{cases} x_n(t) = \mathbb{S}^{-1} \left\{ \frac{p^\alpha}{1+p^\alpha} \mathbb{S}[y_{n-1}(t)] \right\}, \\ y_n(t) = -x_{n-1}(t), \end{cases}$$

...

böylece

$$\begin{cases} x_0(t) = 1, \\ y_0(t) = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(t) = -\mathbb{S}^{-1} \left\{ \frac{p^\alpha}{1+p^\alpha} \mathbb{S}[sint] \right\}, \\ y_1(t) = e^{-t} + sint - 2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2(t) = \mathbb{S}^{-1} \left\{ \frac{p^\alpha}{1+p^\alpha} \mathbb{S}[e^{-t}] \right\} + \mathbb{S}^{-1} \left\{ \frac{p^\alpha}{1+p^\alpha} \mathbb{S}[sint] \right\} - 2\mathbb{S}^{-1} \left\{ \frac{p^\alpha}{1+p^\alpha} \right\}, \\ y_2(t) = \mathbb{S}^{-1} \left\{ \frac{p^\alpha}{1+p^\alpha} \mathbb{S}[sint] \right\}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3(t) = \mathbb{S}^{-1} \left\{ \frac{p^{2\alpha}}{(1+p^\alpha)^2} \mathbb{S}[sint] \right\}, \\ y_3(t) = -\mathbb{S}^{-1} \left\{ \frac{p^\alpha}{1+p^\alpha} \mathbb{S}[e^{-t}] \right\} - \mathbb{S}^{-1} \left\{ \frac{p^\alpha}{1+p^\alpha} \mathbb{S}[sint] \right\} + 2\mathbb{S}^{-1} \left\{ \frac{p^\alpha}{1+p^\alpha} \right\}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4(t) = -\mathbb{S}^{-1} \left\{ \frac{p^{2\alpha}}{(1+p^\alpha)^2} \mathbb{S}[e^{-t}] \right\} - \mathbb{S}^{-1} \left\{ \frac{p^{2\alpha}}{(1+p^\alpha)^2} \mathbb{S}[sint] \right\} + 2\mathbb{S}^{-1} \left\{ \frac{p^{2\alpha}}{(1+p^\alpha)^2} \right\}, \\ y_4(t) = -\mathbb{S}^{-1} \left\{ \frac{p^{2\alpha}}{(1+p^\alpha)^2} \mathbb{S}[sint] \right\}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_5(t) = -\mathbb{S}^{-1} \left\{ \frac{p^{3\alpha}}{(1+p^\alpha)^3} \mathbb{S}[sint] \right\}, \\ y_5(t) = \mathbb{S}^{-1} \left\{ \frac{p^{2\alpha}}{(1+p^\alpha)^2} \mathbb{S}[e^{-t}] \right\} + \mathbb{S}^{-1} \left\{ \frac{p^{2\alpha}}{(1+p^\alpha)^2} \mathbb{S}[sint] \right\} - 2\mathbb{S}^{-1} \left\{ \frac{p^{2\alpha}}{(1+p^\alpha)^2} \right\}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_6(t) = \mathbb{S}^{-1} \left\{ \frac{p^{3\alpha}}{(1+p^\alpha)^3} \mathbb{S}[e^{-t}] \right\} + \mathbb{S}^{-1} \left\{ \frac{p^{3\alpha}}{(1+p^\alpha)^3} \mathbb{S}[sint] \right\} - 2\mathbb{S}^{-1} \left\{ \frac{p^{3\alpha}}{(1+p^\alpha)^3} \right\}, \\ y_6(t) = \mathbb{S}^{-1} \left\{ \frac{p^{3\alpha}}{(1+p^\alpha)^3} \mathbb{S}[sint] \right\}, \end{cases}$$

...

yazarak hesap edilir. Bu durumda, (4.28)-(4.29) probleminin çözümü

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} x_n(t) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \mathbb{S}^{-1} \left\{ \frac{p^{n\alpha}}{(1+p^\alpha)^n} \right\} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \mathbb{S}^{-1} \left\{ \frac{p^{n\alpha}}{(1+p^\alpha)^n} \mathbb{S}[e^{-t}] \right\} \\ &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n t^{n\alpha} E_{\alpha, n\alpha+1}^n(-t^\alpha) - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{n+k} \binom{n+k-1}{k} t^{-k\alpha} E_{1, 1-k\alpha}(-t). \\ y(t) &= e^{-t} + sint - 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \mathbb{S}^{-1} \left\{ \frac{p^{n\alpha}}{(1+p^\alpha)^n} \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \mathbb{S}^{-1} \left\{ \frac{p^{n\alpha}}{(1+p^\alpha)^n} \mathbb{S}[e^{-t}] \right\} \\ &= e^{-t} + sint - 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n t^{n\alpha} E_{\alpha, n\alpha+1}^n(-t^\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{n+k} \binom{n+k-1}{k} t^{-k\alpha} E_{1, 1-k\alpha}(-t). \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Örnek 4.2.2: Aşağıdaki kesirli mertebeden diferansiyel-cebirselsel denklemleri düşünelim:

$$\begin{aligned} D_*^\alpha x(t) - ty'(t) + x(t) - (1+t)y(t) &= 0, \\ y(t) - sint &= 0, \end{aligned} \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (4.36)$$

$$x(0) = 1, y(0) = 0. \quad (4.37)$$

(4.36)'in birinci denkleminin her iki tarafına Sumudu dönüşümünü uygulanarak ve Sumudu dönüşümünün diferansiyel özelliğini kullanarak

$$\mathbb{S}[x(t)] = \frac{1}{1+p^\alpha} + \frac{p^\alpha}{1+p^\alpha} \mathbb{S}[ty'(t) + (1+t)y(t)], \quad (4.38)$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemin her iki tarafına Sumudu dönüşümünün tersini uygularsak

$$x(t) = E_\alpha(-t^\alpha) + \mathbb{S}^{-1} \left\{ \frac{p^\alpha}{1+p^\alpha} \mathbb{S}[ty'(t) + (1+t)y(t)] \right\}, \quad (4.39)$$

denklemini bulunur. Dolayısıyla (4.36) denklem sistemini

$$\begin{aligned} x(t) &= E_\alpha(-t^\alpha) + \mathbb{S}^{-1} \left\{ \frac{p^\alpha}{1+p^\alpha} \mathbb{S}[ty'(t) + (1+t)y(t)] \right\}, \\ y(t) &= sint, \end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz. Şimdi, Homotopi pertürbasyon yöntemini uygulayabiliriz

$$\begin{aligned} (1-q)[x(t) - x(0)] + q \left\{ x(t) - E_\alpha(-t^\alpha) - \mathbb{S}^{-1} \left\{ \frac{p^\alpha}{1+p^\alpha} \mathbb{S}[ty'(t) + (1+t)y(t)] \right\} \right\} &= 0, \\ (1-q)[y(t) - y(0)] + q\{y(t) - sint\} &= 0, \end{aligned} \quad (4.40)$$

veya

$$\begin{aligned} x(t) &= 1 + q[E_\alpha(-t^\alpha) - 1] + q\mathbb{S}^{-1} \left\{ \frac{p^\alpha}{1+p^\alpha} \mathbb{S}[ty'(t) + (1+t)y(t)] \right\}, \\ y(t) &= qsint, \end{aligned} \quad (4.41)$$

yazılır.

$$\begin{aligned}
x(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} q^n x_n(t), \\
y(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} q^n y_n(t),
\end{aligned} \tag{4.42}$$

olmak üzere (4.42) denklemlerini, (4.41) denklemlerinde yerine yazarsak

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} q^n x_n(t) &= 1 + q[E_{\alpha}(-t^{\alpha}) - 1] + q\mathbb{S}^{-1} \left\{ \frac{p^{\alpha}}{1+p^{\alpha}} \mathbb{S} \left[t \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n y_n(t) \right)' + (1+t) \sum_{n=0}^{\infty} q^n y_n(t) \right] \right\}, \\ \sum_{n=0}^{\infty} q^n y_n(t) &= qsint, \end{aligned} \right\} \tag{4.43}$$

denklemleri bulunmuş olur. q 'nun kuvvetlerine göre katsayılar eşitlenirse aşağıdaki yaklaşımlar elde edilir:

$$\begin{aligned}
q^0: & \begin{cases} x_0(t) = 1, \\ y_0(t) = 0, \end{cases} \\
q^1: & \begin{cases} x_1(t) = E_{\alpha}(-t^{\alpha}) - 1 + \mathbb{S}^{-1} \left\{ \frac{p^{\alpha}}{1+p^{\alpha}} \mathbb{S} [ty_0'(t) + (1+t)y_0(t)] \right\} = E_{\alpha}(-t^{\alpha}) - 1, \\ y_1(t) = sint, \end{cases} \\
q^2: & \begin{cases} x_2(t) = \mathbb{S}^{-1} \left\{ \frac{p^{\alpha}}{1+p^{\alpha}} \mathbb{S} [ty_1'(t) + (1+t)y_1(t)] \right\} = 1 + \\ 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} [t^{n\alpha+1} E_{2,n\alpha+2}^2(-t^2) + t^{n\alpha+2} E_{2,n\alpha+3}^2(-t^2)], \\ y_2(t) = 0, \end{cases} \\
q^3: & \begin{cases} x_3(t) = \mathbb{S}^{-1} \left\{ \frac{p^{\alpha}}{1+p^{\alpha}} \mathbb{S} [ty_2'(t) + (1+t)y_2(t)] \right\} = 0, \\ y_3(t) = 0. \end{cases} \\
& \dots
\end{aligned}$$

Bu durumda, (4.36)-(4.37) probleminin çözümü

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n(t) = E_{\alpha}(-t^{\alpha}) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} [t^{n\alpha+1} E_{2,n\alpha+2}^2(-t^2) + t^{n\alpha+2} E_{2,n\alpha+3}^2(-t^2)],$$

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(t) = \text{sint}.$$

olarak bulunur. (4.36) da $\alpha = 1$ olmak üzere, çözüm

$$\begin{aligned} x(t) &= E_1(-t) + 2t^2 E_{2,3}^2(-t^2) = e^{-t} + \text{tsint}, \\ y(t) &= \text{sint}. \end{aligned}$$

şeklinde olur.

Örnek 4.2.3: Aşağıdaki kesirli mertebeden diferansiyel-cebirsal denklem sistemini başlangıç koşulları ile birlikte düşünelim:

$$\begin{aligned} D_*^{\alpha_1} x(t) - x(t) + z(t)x(t) &= 1, \\ D_*^{\alpha_2} z(t) - y(t) + x^2(t) + z(t) &= 0, \\ y(t) - x^2(t) &= 0, \end{aligned} \quad 0 < \alpha_1, \alpha_2 \leq 1, \quad (4.44)$$

$$x(0) = 1, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 1. \quad (4.45)$$

(4.44)'ün her iki tarafına Sumudu dönüşümü uygulanır ve başlangıç koşulunu kullanırsak

$$\begin{aligned} \mathbb{S}[x(t)] &= 1 + p^{\alpha_1} + p^{\alpha_1} \mathbb{S}[x(t) - z(t)x(t)], \\ \mathbb{S}[z(t)] &= 1 + p^{\alpha_2} \mathbb{S}[y(t) - x^2(t) - z(t)], \\ y(t) &= x^2(t), \end{aligned} \quad (4.46)$$

elde edilir. (4.46)'in her iki tarafına Sumudu dönüşümünün tersini uygularsak, aşağıdaki denklem sistemi oluşur:

$$\begin{aligned}
x(t) &= 1 + \frac{t^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1 + 1)} + \mathbb{S}^{-1}\{p^{\alpha_1}\mathbb{S}[x(t) - z(t)x(t)]\}, \\
z(t) &= 1 + \mathbb{S}^{-1}\{p^{\alpha_2}\mathbb{S}[y(t) - x^2(t) - z(t)]\}, \\
y(t) &= x^2(t),
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Şimdi homotopi pertürbasyon yöntemini uygularsak

$$\begin{aligned}
x(t) &= 1 + q \frac{t^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1 + 1)} + q\mathbb{S}^{-1}\{p^{\alpha_1}\mathbb{S}[x(t) - z(t)x(t)]\}, \\
z(t) &= 1 + q\mathbb{S}^{-1}\{p^{\alpha_2}\mathbb{S}[y(t) - x^2(t) - z(t)]\}, \\
y(t) &= 1 - q + qx^2(t),
\end{aligned} \tag{4.48}$$

elde ederiz.

$$\begin{aligned}
x(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} q^n x_n(t), \\
y(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} q^n y_n(t), \\
z(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} q^n z_n(t),
\end{aligned} \tag{4.49}$$

olmak üzere (4.49) denklemlerini, (4.48) denklemlerinde yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} q^n x_n(t) &= 1 + q \frac{t^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1 + 1)} + q\mathbb{S}^{-1}\left\{p^{\alpha_1}\mathbb{S}\left[\sum_{n=0}^{\infty} q^n x_n(t) - \sum_{n=0}^{\infty} q^n H_n\right]\right\}, \\
\sum_{n=0}^{\infty} q^n z_n(t) &= 1 + q\mathbb{S}^{-1}\left\{p^{\alpha_2}\mathbb{S}\left[\sum_{n=0}^{\infty} q^n y_n(t) - \sum_{n=0}^{\infty} q^n H'_n - \sum_{n=0}^{\infty} q^n z_n(t)\right]\right\}, \\
\sum_{n=0}^{\infty} q^n y_n(t) &= 1 - q + q \sum_{n=0}^{\infty} q^n H'_n,
\end{aligned} \tag{4.50}$$

elde edilir. Bu durumda H_n ve H'_n He polinomlarıdır ve lineer olmayan terimleri temsil etmektedir

$$\begin{aligned}
q^2: \left\{ \begin{aligned} x_2(t) &= \mathbb{S}^{-1}\{p^{\alpha_1}\mathbb{S}[x_1(t) - H_1]\} = \frac{t^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)}, \\ z_2(t) &= \mathbb{S}^{-1}\{p^{\alpha_2}\mathbb{S}[y_1(t) - H'_1 - z_1(t)]\} = \frac{-2t^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)} + \frac{t^{2\alpha_2}}{\Gamma(2\alpha_2 + 1)}, \\ y_2(t) &= H'_1 = \frac{2t^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1 + 1)}, \end{aligned} \right. \\
q^3: \left\{ \begin{aligned} x_3(t) &= \mathbb{S}^{-1}\{p^{\alpha_1}\mathbb{S}[x_2(t) - H_2]\} = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)t^{2\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1 + 1)\Gamma(\alpha_2 + 1)\Gamma(2\alpha_1 + \alpha_2 + 1)} \\ &\quad + \frac{2t^{2\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(2\alpha_1 + \alpha_2 + 1)} - \frac{t^{\alpha_1+2\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 1)}, \\ z_3(t) &= \mathbb{S}^{-1}\{p^{\alpha_2}\mathbb{S}[y_2(t) - H'_2 - z_2(t)]\} = \frac{2t^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)} \\ &\quad - \frac{\Gamma(2\alpha_1 + 1)t^{2\alpha_1+\alpha_2}}{[\Gamma(\alpha_1 + 1)]^2\Gamma(2\alpha_1 + \alpha_2 + 1)} - \frac{t^{3\alpha_2}}{\Gamma(3\alpha_2 + 1)}, \\ y_3(t) &= H'_2 = \frac{t^{2\alpha_1}}{[\Gamma(\alpha_1 + 1)]^2} + \frac{2t^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)}, \end{aligned} \right. \\
q^4: \left\{ \begin{aligned} x_4(t) &= \mathbb{S}^{-1}\{p^{\alpha_1}\mathbb{S}[x_3(t) - H_3]\} = \frac{-2t^{2\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(2\alpha_1 + \alpha_2 + 1)} - \frac{\Gamma(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 1)t^{2\alpha_1+2\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1 + 1)\Gamma(2\alpha_2 + 1)\Gamma(2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 1)} \\ &\quad + \frac{\Gamma(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 1)t^{2\alpha_1+2\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2 + 1)\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)\Gamma(2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 1)} + \frac{2\Gamma(2\alpha_1 + \alpha_2 + 1)t^{3\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1 + 1)\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)\Gamma(3\alpha_1 + \alpha_2 + 1)} \\ &\quad + \frac{\Gamma(2\alpha_1 + 1)t^{3\alpha_1+\alpha_2}}{[\Gamma(\alpha_1 + 1)]^2\Gamma(3\alpha_1 + \alpha_2 + 1)} + \frac{t^{\alpha_1+3\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1 + 3\alpha_2 + 1)}, \\ z_4(t) &= \mathbb{S}^{-1}\{p^{\alpha_2}\mathbb{S}[y_3(t) - H'_3 - z_3(t)]\} = \frac{\Gamma(2\alpha_1 + 1)t^{2\alpha_1+\alpha_2}}{[\Gamma(\alpha_1 + 1)]^2\Gamma(2\alpha_1 + \alpha_2 + 1)} \\ &\quad - \frac{2\Gamma(2\alpha_1 + \alpha_2 + 1)t^{2\alpha_1+2\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1 + 1)\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)\Gamma(2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 1)} - \frac{\Gamma(2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 1)}{4t^{2\alpha_1+2\alpha_2}} \\ &\quad - \frac{2\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)t^{2\alpha_1+2\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1 + 1)\Gamma(\alpha_2 + 1)\Gamma(2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 1)} + \frac{\Gamma(2\alpha_1 + 1)t^{2\alpha_1+2\alpha_2}}{[\Gamma(\alpha_1 + 1)]^2\Gamma(2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 1)} \\ &\quad + \frac{t^{\alpha_1+3\alpha_2}}{2\Gamma(\alpha_1 + 3\alpha_2 + 1)} + \frac{t^{4\alpha_2}}{\Gamma(4\alpha_2 + 1)}, \\ y_4(t) &= H'_3 = \frac{2t^{2\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1 + 1)\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)} + \frac{2\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)t^{2\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1 + 1)\Gamma(\alpha_2 + 1)\Gamma(2\alpha_1 + \alpha_2 + 1)} \\ &\quad + \frac{4t^{2\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(2\alpha_1 + \alpha_2 + 1)} - \frac{2t^{\alpha_1+2\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 1)}, \end{aligned} \right. \\
\dots
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Bu nedenle, seri çözümü

$$\begin{aligned}
x(t) = 1 &+ \frac{t^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1 + 1)} + \frac{t^{\alpha_1 + \alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)} + \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)t^{2\alpha_1 + \alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1 + 1)\Gamma(\alpha_2 + 1)\Gamma(2\alpha_1 + \alpha_2 + 1)} \\
&- \frac{t^{2\alpha_1 + \alpha_2}}{\Gamma(2\alpha_1 + \alpha_2 + 1)} + \frac{t^{2\alpha_1 + 2\alpha_2}}{\Gamma(2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 1)} \\
&- \frac{\Gamma(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 1)t^{2\alpha_1 + 2\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1 + 1)\Gamma(2\alpha_2 + 1)\Gamma(2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 1)} \\
&+ \frac{\Gamma(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 1)t^{2\alpha_1 + 2\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2 + 1)\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)\Gamma(2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 1)} + \dots,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y(t) = 1 &+ \frac{2t^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1 + 1)} + \frac{t^{2\alpha_1}}{[\Gamma(\alpha_1 + 1)]^2} + \frac{2t^{\alpha_1 + \alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)} + \frac{2t^{2\alpha_1 + \alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1 + 1)\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)} \\
&- \frac{2t^{\alpha_1 + 2\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 1)} + \frac{2\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)t^{2\alpha_1 + \alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1 + 1)\Gamma(\alpha_2 + 1)\Gamma(2\alpha_1 + \alpha_2 + 1)} + \dots,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z(t) = 1 &- \frac{t^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2 + 1)} + \frac{t^{2\alpha_2}}{\Gamma(2\alpha_2 + 1)} - \frac{t^{\alpha_1 + 2\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 1)} + \frac{4t^{2\alpha_1 + 2\alpha_2}}{\Gamma(2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 1)} \\
&+ \frac{t^{\alpha_1 + 3\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1 + 3\alpha_2 + 1)} \\
&+ \dots,
\end{aligned} \tag{4.51}$$

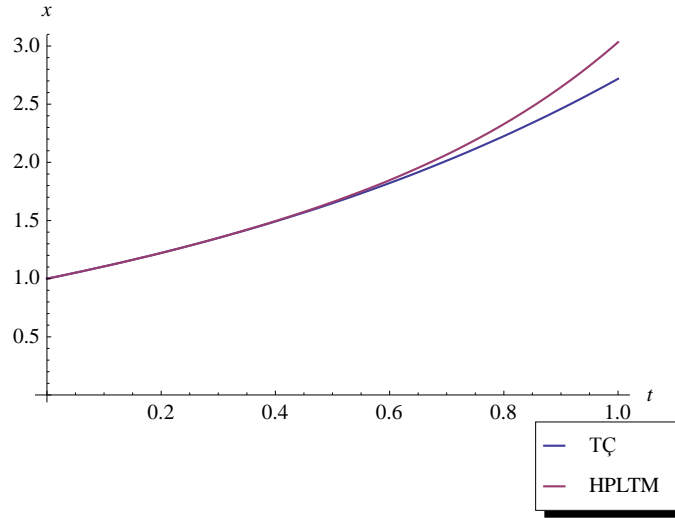
olarak bulunur. (4.44) ve (4.51) de $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ dersek, çözüm

$$x(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{13t^5}{40} + \dots,$$

$$y(t) = 1 + 2t + 2t^2 + \frac{8t^3}{3!} + 2t^4 + \dots,$$

$$z(t) = 1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{5t^4}{24} - \frac{13t^5}{40} + \dots$$

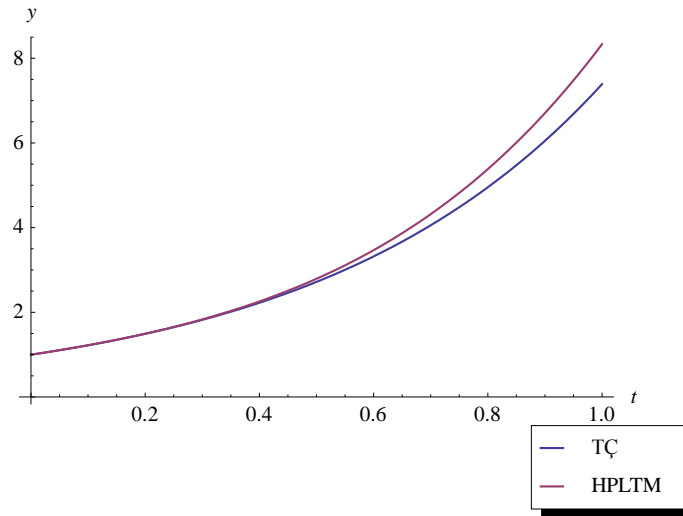
şeklinde olur.



Şekil 4.3. $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ için (4.44)'te HPSTM ile elde edilen $x(t)$ yaklaşık çözümüne ve tam çözüme ait grafik

Çizelge 4.3. $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ için (4.44) kesirli mertebeye sahip diferansiyel cebirsel denklem sistemindeki $x(t)$ fonksiyonu için mutlak hata tablosu

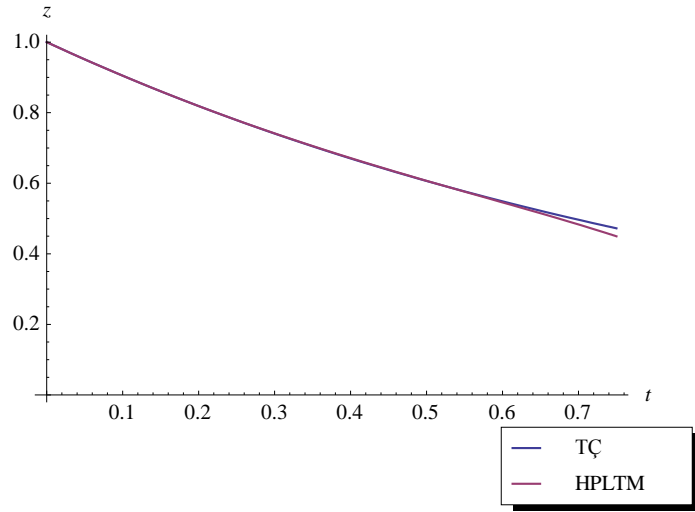
t	TÇ	HPSTM	TÇ-NILTM
0	1.0000000000000000	1.0000000000000000	0.0000000000000000
0.1	1.10517091807565	1.105174083333333	$3.16525768551124 \times 10^{-6}$
0.2	1.22140275816017	1.221504000000000	0.00010124183983
0.3	1.34985880757600	1.350627250000000	0.00076844242400
0.4	1.49182469764127	1.495061333333333	0.00323663569206
0.5	1.64872127070013	1.658593750000000	0.00987247929987



Şekil 4.4. $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ için (4.44)'te HPSTM ile elde edilen $y(t)$ yaklaşık çözümüne ve tam çözüme ait grafik

Çizelge 4.4. $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ için (4.44) kesirli mertebeye sahip diferansiyel cebirsel denklem sistemindeki $y(t)$ fonksiyonu için mutlak hata tablosu

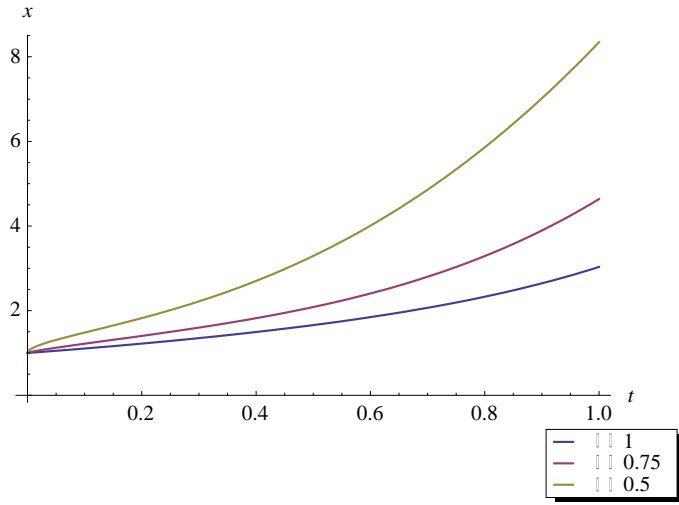
t	TÇ	HPSTM	TÇ-HPSTM
0	1.0000000000000000	1.0000000000000000	0.0000000000000000
0.1	1.22140275816017	1.2215333333333333	0.00013057517316
0.2	1.49182469764127	1.4938666666666667	0.00204196902540
0.3	1.82211880039051	1.8322000000000000	0.01008119960949
0.4	2.22554092849247	2.2565333333333333	0.03099240484087
0.5	2.71828182845905	2.7916666666666667	0.07338483820762



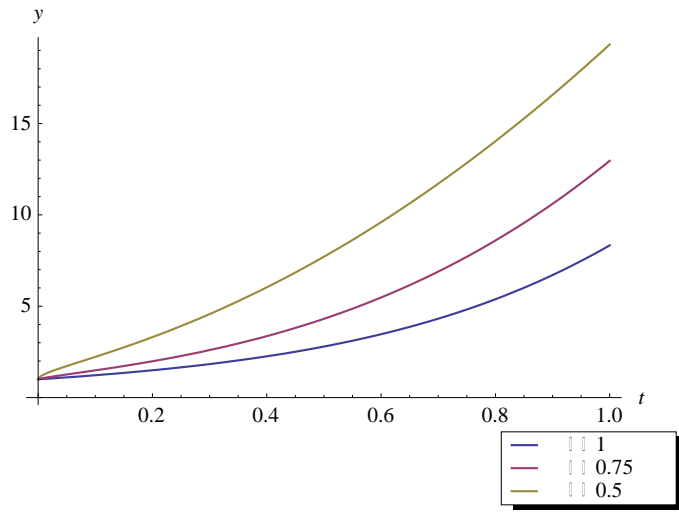
Şekil 4.5. $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ için (4.44)'te HPSTM ile elde edilen $z(t)$ yaklaşık çözümüne ve tam çözüme ait grafik

Çizelge 4.5. $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ için (4.44) kesirli mertebeye sahip diferansiyel cebirsel denklem sistemindeki $z(t)$ fonksiyonu için mutlak hata tablosu

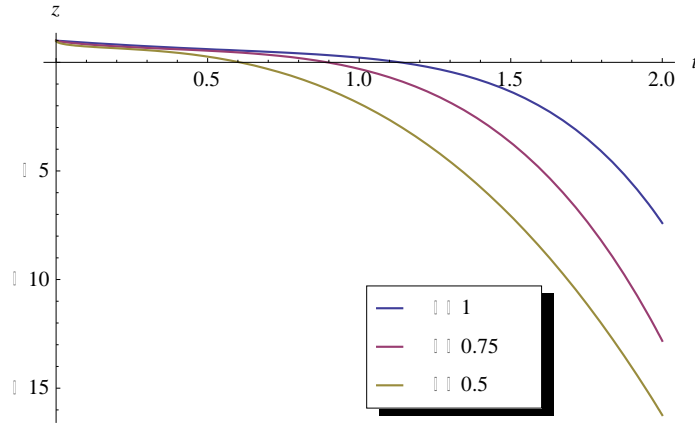
t	TÇ	HPSTM	TÇ-HPSTM
0	1.0000000000000000	1.0000000000000000	0.0000000000000000
0.1	0.90483741803596	0.90485091666667	0.00001349863071
0.2	0.81873075307798	0.8188960000000000	0.00016524692202
0.3	0.74081822068172	0.7413977500000000	0.00057952931828
0.4	0.67032004603564	0.67133866666667	0.00101862063103
0.5	0.60653065971263	0.6070312500000000	0.00050059028737



Şekil 4.6. (4.44)'te HPSTM ile elde edilen $x(t)$ yaklaşık çözüm fonksiyonunun farklı α değerlerine ait grafiği



Şekil 4.7. (4.44)'te HPSTM ile elde edilen $y(t)$ yaklaşık çözüm fonksiyonunun farklı α değerlerine ait grafiği



Şekil 4.8. (4.44)'te HPSTM ile elde edilen $z(t)$ yaklaşık çözüm fonksiyonunun farklı α değerlerine ait grafiği

Örnek 4.2.4: Aşağıdaki kesirli mertebeden diferansiyel-cebirsal denklemi başlangıç şartıyla birlikte ele alalım;

$$\begin{aligned} D_*^\alpha x(t) + x(t) - y(t) &= -sint, \\ x(t) + y(t) &= e^{-t} + sint, \end{aligned} \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (4.52)$$

$$x(0) = 1, y(0) = 1. \quad (4.53)$$

(4.52) de birinci denklemin her iki tarafına Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$L[D_*^\alpha x(t)] + L[x(t)] = L[y(t) - sint],$$

elde edilir. Laplace dönüşümünün diferansiyel özelliği kullanılarak

$$s^\alpha L[x(t)] - s^{\alpha-1} + L[x(t)] = L[y(t) - sint],$$

elde edilir. Bu denklemin her iki tarafını $s^{-\alpha}$ ile çarparsak

$$L[x(t)] = \frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} + 1} + \frac{1}{s^{\alpha} + 1} L[y(t) - sint],$$

denklemini yazabiliriz, söz konusu denklemin her iki tarafına Laplace dönüşünün tersini uygularsak

$$x(t) = L^{-1} \left\{ \frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} + 1} \right\} + L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{\alpha} + 1} L[y(t) - sint] \right\}, \quad (4.54)$$

elde edilir. (4.52) sistemi aşağıdaki gibi yazılır

$$\begin{aligned} x(t) &= L^{-1} \left\{ \frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} + 1} \right\} + L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{\alpha} + 1} L[y(t) - sint] \right\}, \\ y(t) &= e^{-t} + sint - x(t), \end{aligned} \quad (4.55)$$

Şimdi, yeni iteratif yöntemini uygulayabiliriz

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} x_n(t), \\ y(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} y_n(t), \end{aligned} \quad (4.56)$$

olmak üzere. (4.55) de $N(u)$ 'lar aşağıdaki gibi yazılır

$$\begin{aligned} N_1(x, y) &= L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{\alpha} + 1} L[y(t) - sint] \right\}, \\ N_2(x, y) &= -x(t), \end{aligned} \quad (4.57)$$

ve aşağıdaki rekürans bağıntısı elde edilir

$$\begin{cases}
x_0(t) = L^{-1} \left\{ \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + 1} \right\} \\
y_0(t) = e^{-t} + \sin t, \\
x_1(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^\alpha + 1} L[y_0(t) - \sin t] \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^\alpha + 1} L[e^{-t}] \right\}, \\
y_1(t) = -x_0(t) = -L^{-1} \left\{ \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + 1} \right\}, \\
x_2(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^\alpha + 1} L[y_1(t)] \right\} = -L^{-1} \left\{ \frac{s^{\alpha-1}}{(s^\alpha + 1)^2} \right\}, \\
y_2(t) = -x_1(t) = -L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^\alpha + 1} L[e^{-t}] \right\}, \\
x_3(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^\alpha + 1} L[y_2(t)] \right\} = -L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^\alpha + 1)^2} L[e^{-t}] \right\}, \\
y_3(t) = -x_2(t) = L^{-1} \left\{ \frac{s^{\alpha-1}}{(s^\alpha + 1)^2} \right\}, \\
x_4(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^\alpha + 1} L[y_3(t)] \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{s^{\alpha-1}}{(s^\alpha + 1)^3} \right\}, \\
y_4(t) = -x_3(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^\alpha + 1)^2} L[e^{-t}] \right\}, \\
x_5(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^\alpha + 1} L[y_4(t)] \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^\alpha + 1)^3} L[e^{-t}] \right\}, \\
y_5(t) = -x_4(t) = -L^{-1} \left\{ \frac{s^{\alpha-1}}{(s^\alpha + 1)^3} \right\}, \\
x_6(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^\alpha + 1} L[y_5(t)] \right\} = -L^{-1} \left\{ \frac{s^{\alpha-1}}{(s^\alpha + 1)^4} \right\}, \\
y_6(t) = -x_5(t) = -L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^\alpha + 1)^3} L[e^{-t}] \right\}. \\
\dots
\end{cases}$$

Bu durumda, (4.52)-(4.53) problemin çözümleri

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n(t) = - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n L^{-1} \left\{ \frac{s^{\alpha-1}}{(s^\alpha + 1)^n} \right\} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^\alpha + 1)^n} L[e^{-t}] \right\}$$

$$= E_{\alpha}(-t^{\alpha}) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n t^{n\alpha} E_{\alpha, n\alpha+1}^n(-t^{\alpha}) - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k \binom{k-1}{k-n} t^{k\alpha} E_{1, 1+k\alpha}(-t).$$

$$y(t) = e^{-t} + \text{sint} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n L^{-1} \left\{ \frac{s^{\alpha-1}}{(s^{\alpha} + 1)^n} \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^{\alpha} + 1)^n} L[e^{-t}] \right\}$$

$$= e^{-t} + \text{sint} - E_{\alpha}(-t^{\alpha}) - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n t^{n\alpha} E_{\alpha, n\alpha+1}^n(-t^{\alpha}) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k \binom{k-1}{k-n} t^{k\alpha} E_{1, 1+k\alpha}(-t).$$

olarak bulunur.

Örnek 4.2.5: Aşağıdaki kesirli mertebeden diferansiyel-cebirsal denklemi başlangıç şartıyla birlikte ele alalım:

$$\begin{aligned} D_*^{\alpha} x(t) - ty'(t) + x(t) - (1+t)y(t) &= 0, \\ y(t) - \text{sint} &= 0, \end{aligned} \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (4.58)$$

$$x(0) = 1, y(0) = 0. \quad (4.59)$$

(4.58) de birinci denklemin her iki tarafına Laplace dönüşümü uygulanırsa ve Laplace dönüşümünün diferansiyel özelliği kullanılarak

$$L[x(t)] = \frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} + 1} + \frac{s+1}{s^{\alpha} + 1} L[ty(t)],$$

elde edilir. Bu denklemin her iki tarafına Laplace dönüşümünün tersini uygularsak

$$x(t) = E_{\alpha}(-t^{\alpha}) + L^{-1} \left\{ \frac{s+1}{s^{\alpha} + 1} L[ty(t)] \right\}, \quad (4.60)$$

elde edilir. Şimdi, yeni iteratif yöntemini uygulayabiliriz

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} x_n(t), \\ y(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} y_n(t), \end{aligned} \quad (4.61)$$

olmak üzere (4.60) ve (4.58) den $N(u)$ 'lar aşağıdaki gibi yazılır

$$\begin{aligned} N_1(x, y) &= L^{-1} \left\{ \frac{s+1}{s^\alpha + 1} L[ty(t)] \right\}, \\ N_2(x, y) &= 0, \end{aligned} \quad (4.62)$$

ve aşağıdaki rekürans bağıntısı elde edilir

$$\begin{cases} x_0(t) = E_\alpha(-t^\alpha) \\ y_0(t) = \sin t, \\ x_1(t) = L^{-1} \left\{ \frac{s+1}{s^\alpha + 1} L[ty_0(t)] \right\} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} [t^{n\alpha+1} E_{2, n\alpha+2}^2(-t^2) + t^{n\alpha+2} E_{2, n\alpha+3}^2(-t^2)], \\ y_1(t) = 0, \\ x_2(t) = L^{-1} \left\{ \frac{s+1}{s^\alpha + 1} L[y_1(t)] \right\} = 0, \\ y_2(t) = 0, \end{cases}$$

...

Bu durumda, (4.58)-(4.59) probleminin çözümü

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n(t) = E_\alpha(-t^\alpha) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} [t^{n\alpha+1} E_{2, n\alpha+2}^2(-t^2) + t^{n\alpha+2} E_{2, n\alpha+3}^2(-t^2)],$$

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(t) = sint, \quad (4.63)$$

olarak bulunur. (4.58) ve (4.63) te $\alpha = 1$ olmak üzere, çözüm

$$\begin{aligned} x(t) &= E_1(-t) + 2t^2 E_{2,3}^2(-t^2) = e^{-t} + tsint, \\ y(t) &= sint. \end{aligned}$$

şeklinde olur.

Örnek 4.2.6: Aşağıdaki kesirli mertebeden diferansiyel-cebirsal denklem sistemini başlangıç koşulları ile birlikte düşünelim:

$$\begin{aligned} D_*^{\alpha_1} x(t) - x(t) + z(t)x(t) &= 1, \\ D_*^{\alpha_2} z(t) - y(t) + x^2(t) + z(t) &= 0, \\ y(t) - x^2(t) &= 0, \end{aligned} \quad 0 < \alpha_1, \alpha_2 \leq 1, \quad (4.64)$$

$$x(0) = 1, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 1. \quad (4.65)$$

(4.64)'ün her iki tarafına Laplace dönüşümünü uygularsak ve başlangıç koşulunu kullanırsak

$$\begin{aligned} L[x(t)] &= \frac{1}{s} + \frac{1}{s^{\alpha_1}} L[1 + x(t) - z(t)x(t)], \\ L[z(t)] &= \frac{1}{s} + \frac{1}{s^{\alpha_2}} L[y(t) - x^2(t) - z(t)], \\ y(t) &= x^2(t), \end{aligned} \quad (4.66)$$

elde edilir. (4.66)'nın her iki tarafına Laplace dönüşümünün tersini uygularsak

$$\begin{aligned}
x(t) &= 1 + L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{\alpha_1}} L[1 + x(t) - z(t)x(t)] \right\}, \\
z(t) &= 1 + L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{\alpha_2}} L[y(t) - x^2(t) - z(t)] \right\}, \\
y(t) &= x^2(t)
\end{aligned} \tag{4.67}$$

denklemini elde edilir. Şimdi, yeni iteratif yöntemini uygulayabiliriz

$$\begin{aligned}
x(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} q^n x_n(t), \\
y(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} q^n y_n(t), \\
z(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} q^n z_n(t),
\end{aligned} \tag{4.68}$$

olmak üzere (4.67) de $N(u)$ 'lar aşağıdaki gibi yazılır

$$\begin{aligned}
N_1(x, y, z) &= L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{\alpha_1}} L[1 + x(t) - z(t)x(t)] \right\}, \\
N_2(x, y, z) &= L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{\alpha_2}} L[y(t) - x^2(t) - z(t)] \right\}, \\
N_3(x, y, z) &= x^2(t) - 1,
\end{aligned} \tag{4.69}$$

ve aşağıdaki rekürans bağıntısı elde edilir

$$\begin{cases} x_0(t) = 1, \\ z_0(t) = 1, \\ y_0(t) = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(t) = N_1(x_0, y_0, z_0) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{\alpha_1}} L[1 + x_0 - z_0 x_0] \right\} = \frac{t^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1 + 1)}, \\ z_1(t) = N_2(x_0, y_0, z_0) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{\alpha_2}} L[y_0 - x_0^2 - z_0] \right\} = -\frac{t^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2 + 1)}, \\ y_1(t) = N_3(x_0, y_0, z_0) = x_0^2 - 1 = 0, \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2(t) = N_1(x_0 + x_1, y_0 + y_1, z_0 + z_1) - N_1(x_0, y_0, z_0) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{\alpha_1}} L[x_1 - z_0 x_1 - z_1 x_0 - z_1 x_1] \right\} \\ \quad = \frac{t^{\alpha_1 + \alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)} + \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + 1) t^{2\alpha_1 + \alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1 + 1) \Gamma(\alpha_2 + 1) \Gamma(2\alpha_1 + \alpha_2 + 1)}, \\ z_2(t) = N_2(x_0 + x_1, y_0 + y_1, z_0 + z_1) - N_2(x_0, y_0, z_0) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{\alpha_2}} L[y_1 - 2x_0 x_1 - x_1^2 - z_1] \right\} \\ \quad = \frac{t^{2\alpha_2}}{\Gamma(2\alpha_2 + 1)} - \frac{2t^{\alpha_1 + \alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)} - \frac{\Gamma(2\alpha_1 + 1) t^{2\alpha_1 + \alpha_2}}{[\Gamma(\alpha_1 + 1)]^2 \Gamma(2\alpha_1 + \alpha_2 + 1)}, \\ y_2(t) = N_3(x_0 + x_1, y_0 + y_1, z_0 + z_1) - N_3(x_0, y_0, z_0) = 2x_0 x_1 + x_1^2 = \frac{2t^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1 + 1)} + \frac{t^{2\alpha_1}}{[\Gamma(\alpha_1 + 1)]^2}, \end{array} \right.$$

$$x_3(t) = N_1(x_0 + x_1 + x_2, y_0 + y_1 + y_2, z_0 + z_1 + z_2) - N_1(x_0 + x_1, y_0 + y_1, z_0 + z_1) =$$

$$\frac{2t^{2\alpha_1 + \alpha_2}}{\Gamma(2\alpha_1 + \alpha_2 + 1)} - \frac{t^{\alpha_1 + 2\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 1)} + \frac{\Gamma(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 1) t^{2\alpha_1 + 2\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2 + 1) \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + 1) \Gamma(2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 1)}$$

$$+ \frac{\Gamma(2\alpha_1 + 1) t^{3\alpha_1 + \alpha_2}}{[\Gamma(\alpha_1 + 1)]^2 \Gamma(3\alpha_1 + \alpha_2 + 1)} + \frac{2\Gamma(2\alpha_1 + \alpha_2 + 1) t^{3\alpha_1 + \alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1 + 1) \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + 1) \Gamma(3\alpha_1 + \alpha_2 + 1)}$$

$$- \frac{\Gamma(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 1) t^{2\alpha_1 + 2\alpha_2}}{\Gamma(2\alpha_2 + 1) \Gamma(\alpha_1 + 1) \Gamma(2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 1)} + \frac{\Gamma(2\alpha_1 + 1) \Gamma(3\alpha_1 + \alpha_2 + 1) t^{4\alpha_1 + \alpha_2}}{[\Gamma(\alpha_1 + 1)]^3 \Gamma(2\alpha_1 + \alpha_2 + 1) \Gamma(4\alpha_1 + \alpha_2 + 1)}$$

$$+ \frac{2\Gamma(2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 1) t^{3\alpha_1 + 2\alpha_2}}{[\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)]^2 \Gamma(3\alpha_1 + 2\alpha_2 + 1)} - \frac{\Gamma(\alpha_1 + 3\alpha_2 + 1) t^{2\alpha_1 + 3\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + 1) \Gamma(2\alpha_2 + 1) \Gamma(2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 1)}$$

$$+ \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + 1) \Gamma(2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 1) t^{3\alpha_1 + 2\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1 + 1) [\Gamma(\alpha_2 + 1)]^2 \Gamma(2\alpha_1 + \alpha_2 + 1) \Gamma(3\alpha_1 + 2\alpha_2 + 1)}$$

$$- \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + 1) \Gamma(2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 1) t^{3\alpha_1 + 3\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1 + 1) \Gamma(\alpha_2 + 1) \Gamma(2\alpha_1 + \alpha_2 + 1) \Gamma(2\alpha_2 + 1) \Gamma(3\alpha_1 + 3\alpha_2 + 1)}$$

$$+ \frac{\Gamma(2\alpha_1 + 1) \Gamma(3\alpha_1 + 2\alpha_2 + 1) t^{4\alpha_1 + 2\alpha_2}}{[\Gamma(\alpha_1 + 1)]^2 \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + 1) \Gamma(2\alpha_1 + \alpha_2 + 1) \Gamma(4\alpha_1 + 2\alpha_2 + 1)}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2\Gamma(3\alpha_1 + 2\alpha_2 + 1)t^{4\alpha_1 + 2\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1 + 1)\Gamma(\alpha_2 + 1)\Gamma(2\alpha_1 + \alpha_2 + 1)\Gamma(4\alpha_1 + 2\alpha_2 + 1)} \\
& + \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)\Gamma(2\alpha_1 + 1)\Gamma(4\alpha_1 + 2\alpha_2 + 1)t^{5\alpha_1 + 2\alpha_2}}{[\Gamma(\alpha_1 + 1)]^3\Gamma(\alpha_2 + 1)[\Gamma(2\alpha_1 + \alpha_2 + 1)]^2\Gamma(5\alpha_1 + 2\alpha_2 + 1)},
\end{aligned}$$

$$z_3(t) = N_2(x_0 + x_1 + x_2, y_0 + y_1 + y_2, z_0 + z_1 + z_2) - N_2(x_0 + x_1, y_0 + y_1, z_0 + z_1) =$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2t^{\alpha_1 + \alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)} + \frac{\Gamma(2\alpha_1 + 1)t^{2\alpha_1 + \alpha_2}}{[\Gamma(\alpha_1 + 1)]^2\Gamma(2\alpha_1 + \alpha_2 + 1)} - \frac{t^{3\alpha_2}}{\Gamma(3\alpha_2 + 1)} \\
& + \frac{\Gamma(2\alpha_1 + 1)t^{2\alpha_1 + 2\alpha_2}}{[\Gamma(\alpha_1 + 1)]^2\Gamma(2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 1)} - \frac{2\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)t^{2\alpha_1 + 2\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1 + 1)\Gamma(\alpha_2 + 1)\Gamma(2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 1)} \\
& - \frac{2\Gamma(2\alpha_1 + \alpha_2 + 1)t^{2\alpha_1 + 2\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1 + 1)\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)\Gamma(2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 1)} - \frac{\Gamma(2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 1)t^{2\alpha_1 + 3\alpha_2}}{[\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)]^2\Gamma(2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 1)} \\
& - \frac{2\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)\Gamma(3\alpha_1 + \alpha_2 + 1)t^{3\alpha_1 + 2\alpha_2}}{[\Gamma(\alpha_1 + 1)]^2\Gamma(\alpha_2 + 1)\Gamma(2\alpha_1 + \alpha_2 + 1)\Gamma(3\alpha_1 + 2\alpha_2 + 1)} \\
& - \frac{2\Gamma(3\alpha_1 + 2\alpha_2 + 1)t^{3\alpha_1 + 3\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1 + 1)\Gamma(\alpha_2 + 1)\Gamma(2\alpha_1 + \alpha_2 + 1)\Gamma(3\alpha_1 + 3\alpha_2 + 1)} \\
& - \frac{[\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)]^2\Gamma(4\alpha_1 + 2\alpha_2 + 1)t^{4\alpha_1 + 3\alpha_2}}{[\Gamma(\alpha_1 + 1)]^2[\Gamma(\alpha_2 + 1)]^2[\Gamma(2\alpha_1 + \alpha_2 + 1)]^2\Gamma(4\alpha_1 + 3\alpha_2 + 1)},
\end{aligned}$$

$$y_3(t) = N_3(x_0 + x_1 + x_2, y_0 + y_1 + y_2, z_0 + z_1 + z_2) - N_3(x_0 + x_1, y_0 + y_1, z_0 + z_1) =$$

$$\begin{aligned}
& = \frac{2t^{\alpha_1 + \alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)} + \frac{2\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)t^{2\alpha_1 + \alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1 + 1)\Gamma(\alpha_2 + 1)\Gamma(2\alpha_1 + \alpha_2 + 1)} \\
& + \frac{2t^{2\alpha_1 + \alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1 + 1)\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)t^{3\alpha_1 + \alpha_2}}{[\Gamma(\alpha_1 + 1)]^2\Gamma(\alpha_2 + 1)\Gamma(2\alpha_1 + \alpha_2 + 1)} + \frac{t^{2\alpha_1 + 2\alpha_2}}{[\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)]^2} \\
& + \frac{2t^{3\alpha_1 + 2\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1 + 1)\Gamma(\alpha_2 + 1)\Gamma(2\alpha_1 + \alpha_2 + 1)} + \frac{[\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)]^2 t^{4\alpha_1 + 2\alpha_2}}{[\Gamma(\alpha_1 + 1)]^2[\Gamma(\alpha_2 + 1)]^2[\Gamma(2\alpha_1 + \alpha_2 + 1)]^2}
\end{aligned}$$

...

$$\begin{aligned}
x_{n+1}(t) &= N_1(x_0 + x_1 + \dots + x_n, y_0 + y_1 + \dots + y_n, z_0 + z_1 + \dots + z_n) \\
&\quad - N_1(x_0 + x_1 + \dots + x_{n-1}, y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}, z_0 + z_1 + \dots + z_{n-1}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_{n+1}(t) &= N_2(x_0 + x_1 + \dots + x_n, y_0 + y_1 + \dots + y_n, z_0 + z_1 + \dots + z_n) \\
&\quad - N_2(x_0 + x_1 + \dots + x_{n-1}, y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}, z_0 + z_1 + \dots + z_{n-1}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_{n+1}(t) &= N_3(x_0 + x_1 + \dots + x_n, y_0 + y_1 + \dots + y_n, z_0 + z_1 + \dots + z_n) \\
&\quad - N_3(x_0 + x_1 + \dots + x_{n-1}, y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}, z_0 + z_1 + \dots + z_{n-1}).
\end{aligned}$$

Bu durumda, (4.64)-(4.65) probleminin çözümleri

$$\begin{aligned}
x(t) &= 1 + \frac{t^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1 + 1)} + \frac{t^{\alpha_1 + \alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)} + \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)t^{2\alpha_1 + \alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1 + 1)\Gamma(\alpha_2 + 1)\Gamma(2\alpha_1 + \alpha_2 + 1)} \\
&\quad - \frac{t^{2\alpha_1 + \alpha_2}}{\Gamma(2\alpha_1 + \alpha_2 + 1)} - \frac{\Gamma(2\alpha_1 + 1)t^{3\alpha_1 + \alpha_2}}{[\Gamma(\alpha_1 + 1)]^2\Gamma(3\alpha_1 + \alpha_2 + 1)} \\
&\quad + \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)t^{3\alpha_1 + \alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1 + 1)\Gamma(\alpha_2 + 1)\Gamma(3\alpha_1 + \alpha_2 + 1)} + \frac{t^{2\alpha_1 + 2\alpha_2}}{\Gamma(2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 1)} + \dots,
\end{aligned}$$

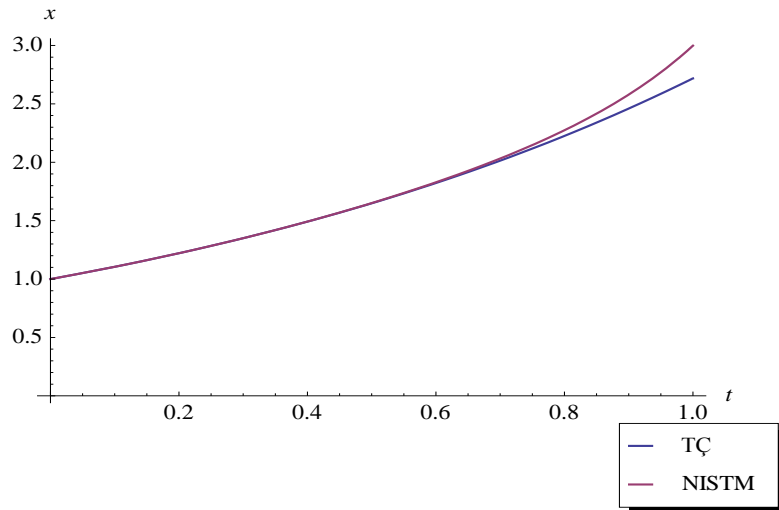
$$\begin{aligned}
y(t) &= 1 + \frac{2t^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1 + 1)} + \frac{t^{2\alpha_1}}{[\Gamma(\alpha_1 + 1)]^2} + \frac{2t^{\alpha_1 + \alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)} + \frac{2t^{2\alpha_1 + \alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1 + 1)\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)} \\
&\quad + \frac{2t^{2\alpha_1 + \alpha_2}}{\Gamma(2\alpha_1 + \alpha_2 + 1)} + \frac{2t^{2\alpha_1 + \alpha_2}\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)}{\Gamma(\alpha_1 + 1)\Gamma(\alpha_2 + 1)\Gamma(2\alpha_1 + \alpha_2 + 1)} + \dots,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z(t) = & 1 - \frac{t^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2 + 1)} + \frac{t^{2\alpha_2}}{\Gamma(2\alpha_2 + 1)} - \frac{t^{\alpha_1 + 2\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 1)} - \frac{2t^{2\alpha_1 + 2\alpha_2}}{\Gamma(2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 1)} \\
& - \frac{\Gamma(2\alpha_1 + 1)t^{2\alpha_1 + 2\alpha_2}}{[\Gamma(\alpha_1 + 1)]^2\Gamma(2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 1)} \\
& + \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)t^{2\alpha_1 + 2\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1 + 1)\Gamma(\alpha_2 + 1)\Gamma(2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 1)} + \frac{t^{\alpha_1 + 3\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1 + 3\alpha_2 + 1)} \\
& + \dots,
\end{aligned} \tag{4.70}$$

olarak bulunur. (4.64) ve (4.70) de $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ dersek, çözüm

$$\begin{aligned}
x(t) &= 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{40} + \dots, \\
y(t) &= 1 + 2t + 2t^2 + \frac{4t^3}{3} + \frac{2t^4}{3} + \frac{11t^5}{20} + \dots, \\
z(t) &= 1 - t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} + \frac{5t^4}{24} + \frac{31t^5}{120} + \dots.
\end{aligned}$$

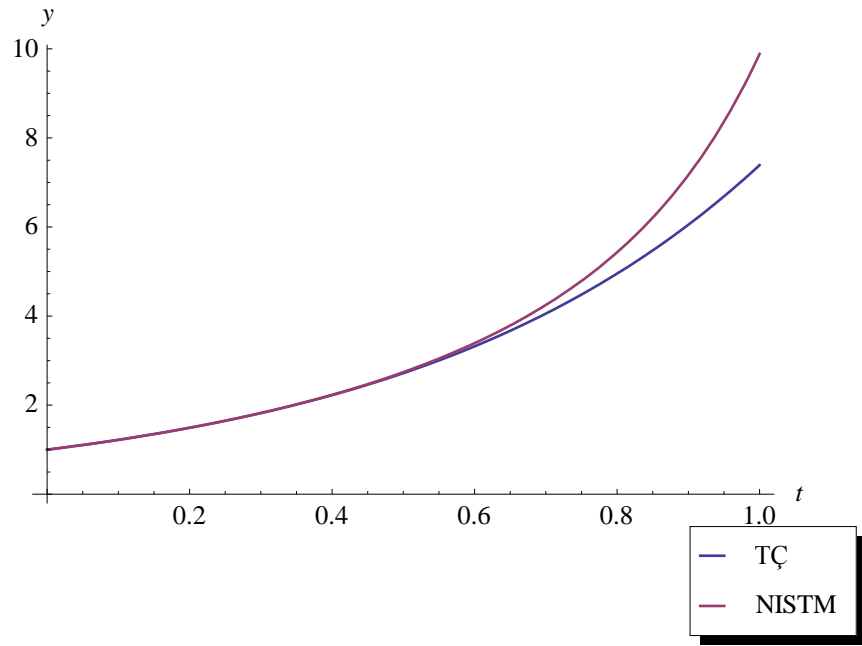
şeklinde olur.



Şekil 4.9. $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ için (4.64)'te NILTM ile elde edilen $x(t)$ yaklaşık çözümüne ve tam çözüme ait grafik

Çizelge 4.6. $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ için (4.64) kesirli mertebeye sahip diferansiyel cebirsel denklem sistemindeki $x(t)$ fonksiyonu için mutlak hata tablosu

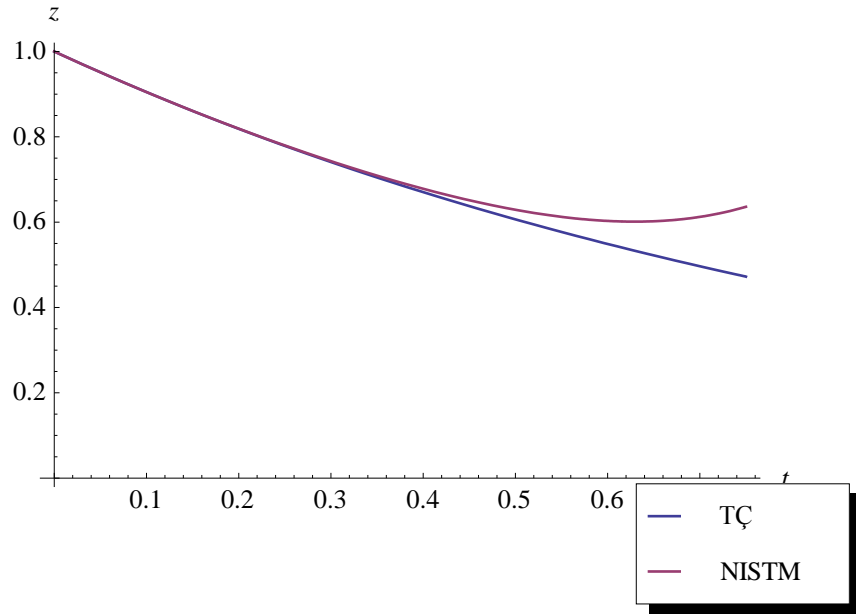
t	TÇ	NILTM	TÇ-NILTM
0	1.0000000000000000	1.0000000000000000	0.0000000000000000
0.1	1.10517091807565	1.10517112687275	$2.08797100498259 \times 10^{-7}$
0.2	1.22140275816017	1.22141134646123	$8.58830105698871 \times 10^{-6}$
0.3	1.34985880757600	1.34994397160475	0.00008516402875
0.4	1.49182469764127	1.49229780789296	0.00047311025169
0.5	1.64872127070013	1.65063638888346	0.00191511818333



Şekil 4.10. $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ için (4.64)'te NILTM ile elde edilen $y(t)$ yaklaşık çözümüne ve tam çözüme ait grafik

Çizelge 4.7. $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ için (4.64) kesirli mertebeye sahip diferansiyel cebirsel denklem sistemindeki $y(t)$ fonksiyonu için mutlak hata tablosu

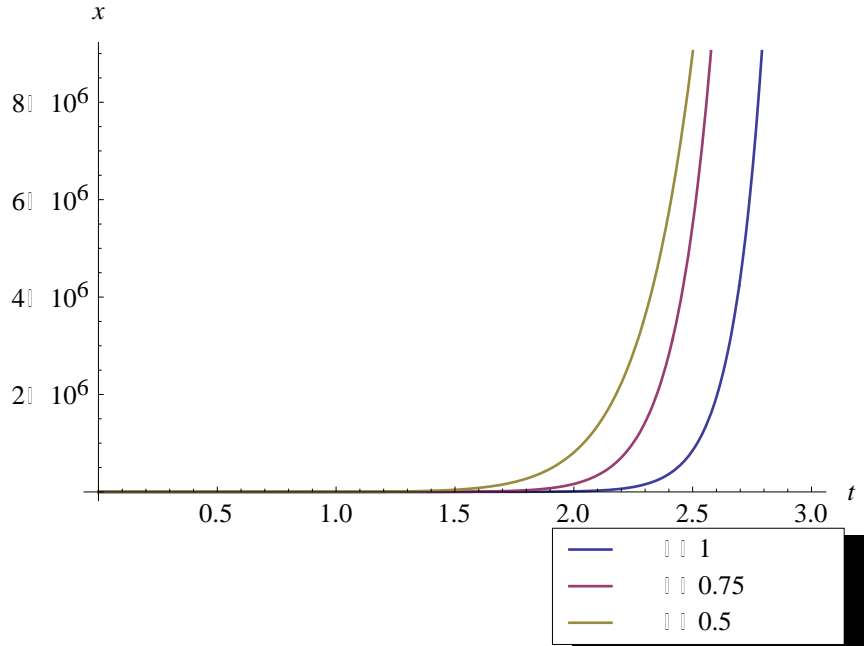
t	TÇ	NILTM	TÇ-NILTM
0	1.0000000000000000	1.0000000000000000	0.0000000000000000
0.1	1.22140275816017	1.22140615509638	$3.39693621209669 \times 10^{-6}$
0.2	1.49182469764127	1.49195559529631	0.00013089765504
0.3	1.82211880039051	1.82332189776053	0.00120309737002
0.4	2.22554092849247	2.23171482248607	0.00617389399360
0.5	2.71828182845905	2.74139768066176	0.02311585220271



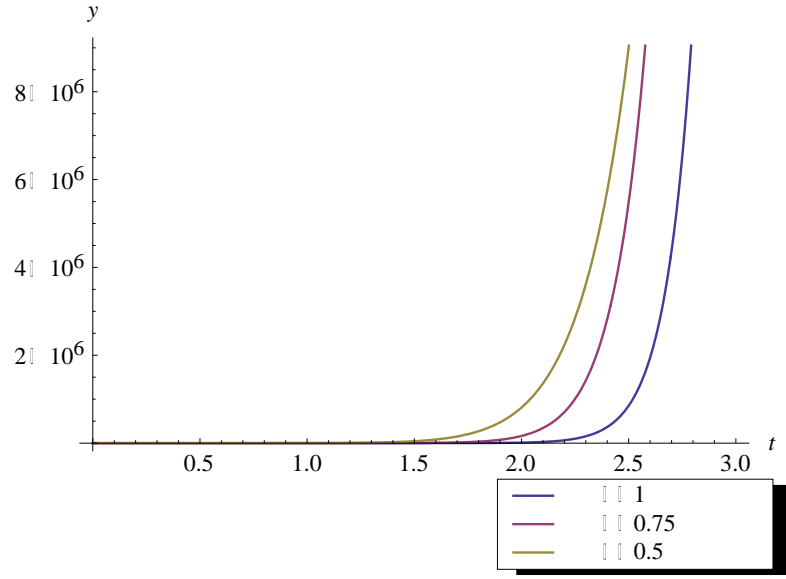
Şekil 4.11. $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ için (4.64)'te NILTM ile elde edilen $z(t)$ yaklaşık çözümüne ve tam çözüme ait grafik

Çizelge 4.8. $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ için (4.64) kesirli mertebeye sahip diferansiyel cebirsel denklem sistemindeki $z(t)$ fonksiyonu için mutlak hata tablosu

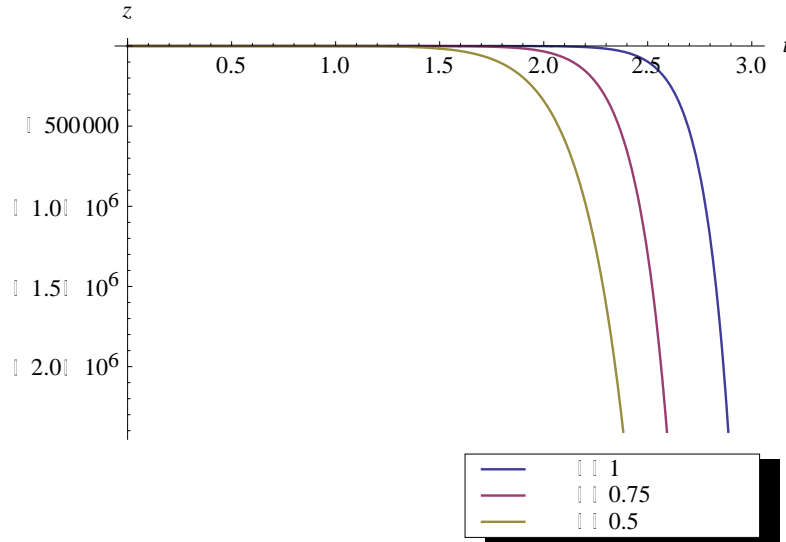
t	TÇ	NILTM	TÇ-NILTM
0	1.0000000000000000	1.0000000000000000	0.0000000000000000
0.1	0.90483741803596	0.90485694547951	0.00001952744355
0.2	0.81873075307798	0.81909581941191	0.00036506633393
0.3	0.74081822068172	0.74297287583295	0.00215465515124
0.4	0.67032004603564	0.67824416809356	0.00792412205792
0.5	0.60653065971263	0.62900215245457	0.02247149274193



Şekil 4.12. (4.64)'te NILTM ile elde edilen $x(t)$ yaklaşık çözüm fonksiyonunun farklı α değerlerine ait grafik



Şekil 4.13. (4.64)'te NILTM ile elde edilen $y(t)$ yaklaşık çözüm fonksiyonunun farklı α değerlerine ait grafik



Şekil 4.14. (4.64)'te NILTM ile elde edilen $z(t)$ yaklaşık çözüm fonksiyonunun farklı α değerlerine ait grafik

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Tezde kullanılan homotopi pertürbasyon dönüşüm metodu ve yeni iteratif dönüşüm metodu, tamsayı ve kesirli mertebeden diferansiyel cebirsel denklemlere ilk kez tarafımızdan uygulanmıştır. Homotopi pertürbasyon dönüşüm metodu uygulanırken He polinomlarının kullanılması metodu daha güçlü kılmıştır. Elde edilen sonuçlar gösteriyor ki her iki metotla elde edilen sonuçlar hem birbirleriyle, hem de analitik çözümlerle uyumludur. Yeni iteratif dönüşüm metodu uygulanabilirlik açısından homotopi pertürbasyon dönüşüm metoduna göre daha kolaydır. Her iki metot da nümerik ve analitik çözümleri elde etmede oldukça etkili metotlardır. Sonuçlar Maple ve Mathematica programları yardımıyla elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

- Abbasbandy, S., 2006. Numerical solutions of the integral equations: Homotopy perturbation method and Adomian's decomposition method. *Applied Mathematics and Computation*, 173, 493-500.
- Abbasbandy, S., 2007. An approximation solution of a nonlinear equation with Riemann-Liouville's fractional derivatives by He's variational iteration method. *J. Comput. Appl. Math.*, 207, 53-58.
- Ascher, U.M., Petzold, L.R., 1991. Projected implicit Runge-Kutta methods for differential-algebraic equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 28, 1097-1120.
- Ayaz, F., 2004. Applications of differential transform method to differential-algebraic equations. *Appl. Math. Comput.*, 152 (3), 649-657.
- Barkari, E., Metzler, R., and Klafter, J., 2000. From continuous time random walks to the fractional Fokker-Planck equation. *Phys. Rev. E.*, 61, 132-138.
- Belgacem, F. B. M., and Karaballi, A. A., 2006. Sumudu transform fundamental properties investigations and applications. *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, 2006, 1-23.
- Belgacem, F. B. M., and Karaballi, A. A., and Kalla, S.L., 2003. Analytical investigations of the Sumudu transform and applications to integral production equations. *Mathematical Problems in Engineering*, 2003, 103-118.
- Benghorbal, M.M., 2004. Power series solutions of fractional differential equations and symbolic derivatives and integrals. PhD thesis, Faculty of Graduate Studies The University of Western Ontario, Canada.
- Bhalekar, S., and Daftardar-Gejji, V., 2008. New iterative method: Application to partial differential equations. *Appl. Math. Comput.*, 203, 778-783.
- Brenan, K.E., Campell S.L. and Petzold L.R., 1989. Numerical solution of initial-value problems in differential-algebraic equations. Elsevier, 269p, New York.
- Çelik, E., 2004. On the numerical solution of chemical differential-algebraic equations by Pade' series. *Appl. Math. Comput.*, 153, 13-17.
- Çelik, E., and Bayram, M., 2003. Arbitrary order numerical method for solving differential-algebraic equations by Pade' series. *Appl. Math. Comput.*, 137, 57-65.
- Çelik, E., and Bayram, M., 2003. On the numerical solution of differential-algebraic equations by Pade' series. *Appl. Math. Comput.*, 137, 151-160.
- Çelik, E., and Bayram, M., 2004. Numerical solution of differential-algebraic equation systems and applications. *Applied Mathematics and Computation*, 154, 405-413.
- Çelik, E., and Bayram, M., 2005. The numerical solution of physical problems modeled as a system of differential-algebraic equations (DAEs). *Journal of the Franklin Institute*, 342, 1-6.
- Çelik, E., and Bayram, M., and Yeloğlu, T., 2006. Solution of differential-algebraic equations (DAE's) by Adomian decomposition method, *Internat. J. Pure Appl. Math. Sci.*, 3, 93-100.
- Çelik, E., Karaduman, E., and Bayram, M., 2002. A numerical method to solve chemical differential-algebraic equations. *Int. J. Quant.Chem.*, 89, 447-451.

- Çelik, E., Karaduman, E., and Bayram, M., 2003. Numerical solutions of chemical differential-algebraic equations. *Applied Mathematics and Computation*, 139, 259–264.
- Daftardar-Gejji, V., Jafari, H., 2006. An iterative method for solving nonlinear functional equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 316, 753-763.
- Diethelm, K., 2010. *The analysis of fractional differential equations*. Springer, 262p, Berlin.
- Dyke, P., 2014. *An introduction to Laplace transforms and Fourier series*. 2ed, Springer-Verlag, 325p, London.
- Ghorbani, A., 2009. Beyond Adomian polynomials: He polynomials. *Chaos, Solitons and Fractals*, 39, 1486-1492.
- Gorenflo, R., Kilbas, A.A., Mainardi, F., and Rogosin, S.V., 2014. *Mittag-Leffler functions, related topics and applications*. Springer-Verlag, 454p, Berlin.
- Guzel, N., and Bayram, M., 2006. On the numerical solution of differential-algebraic equations with index-3. *Appl. Math. Comput.*, 175, 1320-1331.
- Haghighi, A. R., Aghababa, M. P., and Roohi, M., 2014. Robust stabilization of a class of three-dimensional uncertain fractional-order non-autonomous systems. *Int. J. Industrial Mathematics* 6, 133-139.
- Hairer, E., Lubich, C.H. and Roche, M., 1989. *The Numerical Solution of Differential Algebraic Systems by Runge Kutta methods*. Lecture Notes in Mathematics, 1409, Springer, Berlin.
- Hall, M. G., and Barrick, T. R., 2008. From diffusion-weighted MRI to anomalous diffusion imaging. *Magn. Reson. Med.* 59, 447-455.
- He, J.H., 1999. Homotopy perturbation technique. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 178, 257-262.
- Higuera, I., and Carcia-Celayta, B., 1999. Runge–Kutta methods for DAEs. A new approach. *J. Comput. Appl. Math.*, 111 49–61.
- Hilfer, R., 2000. *Applications of Fractional Calculus in Physics*. World Scientific, 472p, Singapore.
- Hosseini, M.M., 2006. Adomain decomposition method for solution of differential-algebraic equations. *Appl. Math. comput.*, 197, 495-501.
- İbiş, B. and Bayram, M., 2011. Numerical comparison of methods for solving fractional differential-algebraic equations. 62, 3270-3278.
- Jafari, H., and Daftardar-Gejji, V., 2006. Positive solutions of nonlinear fractional boundary value problems using Adomian decomposition method. *Appl. Math. Comput.*, 180, 700-706.
- Jafari, H., and Daftardar-Gejji, V., 2006. Revised Adomian decomposition method for solving systems of ordinary and fractional differential equations. *Appl. Math. Comput.*, 181, 598-608.
- Jafari, H., Seifi, S., 2009. Solving a system of nonlinear fractional partial differential equations using homotopy analysis method. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 14, 1962-1969.
- Khan, Y., and Austin, F., 2010. Application of the Laplace decomposition method to nonlinear homogeneous and non-homogeneous advection equations. *Zeitschrift fuer Naturforschung A.*, 65, 1-5.
- Kilbas, A.A., Srivastava and H.M., Trujillo, J.J., 2006, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier B.V., Amsterdam.

- Kunkel, P., and Mehrmann, V., 2006. Differential-algebraic equations: analysis and numerical solution. European mathematical society, 385p, Germany.
- Küçük Dilek, G., 2014. Kesirli mertebeden kısmi diferansiyel cebirsel denklemlerin farklı metotlarla nümerik çözümü. Doktora tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi, Arzurum.
- Liao, S., 2004. Beyond perturbation: introduction to the homotopy analysis method. Chapman & Hall/CRC.
- Liao, S., 2012. Homotopy analysis method in nonlinear differential equations. Springer.
- Liao, S., 2014. Advances in the homotopy analysis method. World Scientific.
- Momani, S., and Odibat, Z., 2007. Homotopy perturbation method for nonlinear partial differential equations of fractional order. Phys. Lett. A, 365, 345-350.
- Najafi, R., Küçük Dilek, G., and Çelik, E., 2016. Modified iteration method for solving fractional gas dynamics equation. Math. Meth. Appl. Sci., DOI: 10.1002/mma.4023.
- Noor, M.A., Waseem, M., and Noor, K.I., 2015. New iterative technique for solving a system of nonlinear equations. Applied Mathematics and Computation, 271, 446-466.
- Odibat, Z., and Momani, S., 2006. Application of variation iteration method to nonlinear differential equations of fractional order. Int. J. Nonlin. Sci. Numer. Simulat., 1, 15-27.
- Odibat, Z., and Momani, S., 2006. Modified homotopy perturbation method: Application to quadratic Riccati differential equation of fractional order. Chaos, Solitons & Fractals, 36, 167-174.
- Ozis, T., and Agirseven, D., 2008. He's homotopy perturbation method for solving heat-like and wave-like equations with variable coefficients. Phys. Lett. A, 372, 5944-5950.
- Petzold, L.R., 1982. Differential-algebraic equations are not ODEs. SIAM J. Sci. Stat. Comput., 3, 367-384.
- Podlubny, I., 1999. Fractional differential equations. Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, 198p, USA.
- Ray, S.S. and Bera, R.K., 2005. An approximate solution of a nonlinear fractional differential equation by Adomian decomposition method. Appl. Math. Comput., 167, 561-571.
- Samko, S.G., Kilbas, A.A., and Marichev, O.I., 1987. Fractional integrals and derivatives: theory and applications. Nauka i Tekhnika, 1014p, Minsk.
- Singh, J., Kumar, D., and Kılıçman, A., 2013. Homotopy perturbation method for fractional Gas dynamics equation using Sumudu transform. Abstract and Applied Analysis, 2013, 1-8.
- Singh, J., Kumar, D., and Sushila, 2011. Homotopy perturbation Sumudu transform method for nonlinear equations. Adv. Theor. Appl. Mech., 4, 165 – 175.
- Soltanian, F., S.M. Karbassi, S.M., Hosseini, M.M., 2009. Application of He's variational iteration method for solution of differential-algebraic equations. Chaos, Solitons and Fractals, 41, 436–445.
- Song, L. and Zhang, H., 2007. Application of homotopy analysis method to fractional KdV-Burgers-Kuramoto equation. Phys. Lett. A, 367, 88-94.
- Wang, J. R., Zhou, Y., Wei, W., 2012. Fractional Schrodinger equations with potential and optimal controls. Nonlinear Anal. Real., 13, 2755-2766.

- Wang, J.R., and Zhou, Y., 2011. A class of fractional evolution equations and optimal controls. *Nonlinear Anal. Real.*, 12, 262-272.
- Wang, J.R., and Zhou, Y., 2011. Existence and controllability results for fractional semilinear differential inclusions. *Nonlinear Anal. Real.*, 12, 3642-3653.
- Watugala, G.K., 1993. Sumudu transform: a new integral transform to solve differential equations and control engineering problems. *Int. J. Educ. Sci. Technol.*, 24, 35-43.
- Yuste, S. B., Acedo, L., and Lindenberg, K., 2004. Reaction front in an A+BC reaction-subdiffusion process. *Phys. Rev. E.*, 69, 036126.
- Zurigat, M., Momani, S., and Alawneh, A., 2010. Analytical approximate solutions of systems of fractional algebraic-differential equations by homotopy analysis method. *Comput. Math. Appl.*, 59, 1227-1235.



ÖZGEÇMİŞ

1975 yılında Maku'da doğdum. 1994 yılında girdiğim Tebriz Üniversitesi Matematik Fakültesi Uygulamalı Matematik Bölümünden 1998 yılında mezun oldum ve aynı yıl Tahran Terbiyet-i Müderris Üniversitesi Matematik Enstitüsü Uygulamalı Matematik Bilim Dalında yüksek lisans öğrenimini tamamladım. 2011 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik Bilim Dalında doktora öğrenimine başladım. Maku İslami Azad Üniversitesi Matematik Bölümünde bilim kurulu üyesi olarak görev yapmaktayım.