RIEMANN MANİFOLDLARI ÜZERİNDEKİ BAZI ÖZEL YAPILAR VE *F*-KONNEKSİYONLAR

Çağrı KARAMAN

Doktora Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalı
Doç. Dr. Aydın GEZER
2016

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

RIEMANN MANİFOLDLARI ÜZERİNDEKİ BAZI ÖZEL YAPILAR VE *F*-KONNEKSİYONLAR

Çağrı KARAMAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI
Geometri Bilim Dalı

ERZURUM
2016

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

TEZ ONAY FORMU

RIEMANN MANİFOLDLARI ÜZERİNDEKİ BAZI ÖZEL YAPILAR VE *F*-KONNEKSİYONLAR

Doç. Dr. Aydın GEZER danışmanlığında, Çağrı KARAMAN tarafından hazırlanan bu çalışma, 11/01/2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı, Geometri Bilim Dalı'nda doktora tezi olarak **oybirliği (5/5)** ile kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Vedat ASIL	İmza	:
Üye : Doç. Dr. Aydın GEZER	İmza	:
Üye : Doç. Dr. Murat İŞCAN	İmza	:
Üye : Doç. Dr. Ceren Sultan ELMALI	İmza	:
Üye : Doç. Dr. Kadem MERAL	İmza	:

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu'nun 21.10.1/2016 tarih ve ...4....../...30..... nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Ertan YILDIRIM
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildiriş, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Doktora Tezi

RIEMANN MANİFOLDLARI ÜZERİNDEKİ BAZI ÖZEL YAPILAR VE F-KONNEKSİYONLAR

Çağrı KARAMAN

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Aydın GEZER

Bu tezde ilk olarak, bölgesel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldu üzerinde yarı-simetrik burulmaya sahip, altın yarı-simetrik metrik F-konneksiyon oluşturulmuştur. Oluşturulan bu konneksiyonun burulma ve eğrilik tensörleri hesaplanıp, bu tensörlerle ilgili özelliklere bakılmıştır ve bu konneksiyonla ilgili örnek verilmiştir. İkinci olarak altın yarı-simetrik metrik F-konneksiyon ile aynı burulmaya sahip, altın yarı-simetrik metrik olmayan F-konneksiyonlar oluşturulmuştur. Eğrilik tensörlerinin özelliklerine bakılan bu konneksiyonun, dual konneksiyonu hesaplanarak, çalışmalar yapılmıştır. Son olarak, metalik Riemann manifoldları üzerinde J metalik yapısının başka bir integrallenebilme şartı Tachibana operatörü yardımıyla verilerek, bu yapıyla ilgili örnekler sunulmuştur.

2016, 95 sayfa

Anahtar Kelimeler: Yarı simetrik metrik ve metrik olmayan F-konneksiyonlar, Altın Riemann manifold, Metalik Riemann manifold, Pür tensör, Tachibana operatör.

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

THE SOME STRUCTURES AND F-CONNECTIONS ON RIEMANN MANIFOLDS

Çağrı KARAMAN

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Discipline of Geometry

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Aydın GEZER

In this thesis, firstly, a golden semi-symmetric metric F-connection is constructed on locally decomposable golden Riemann manifolds with semi-symetric torsion. Torsion and curvature tensor of the connection are calculated and their properties are examined. Also example is given regarding the connection. Secondly, golden semi-symmetric non-metric F-connections having the semi-symmetric tensor are constructed. Their curvature proporties are studied. Then, dual connections of the golden semi-symmetric non-metric F-connections are introduced and studied. Finally, another integrability condition for the J metallic structure on the metallic Riemann manifolds is given by using Tachibana operator and examples are presented for this structure.

2016, 95 pages

Keywords: Semi-symmetric metric and non-metric F-connections, Golden Riemann manifold, Metallic Riemann manifold, Pure tensor, Tachibana operator.

TEŞEKKÜR

Doktora tezi olarak sunduğum bu çalışma Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Bu tez konusunu çalışmamı sağlayan, her adımda bilgilerini esirgemeyen, çok değerli danışmanım Sayın Doç. Dr. Aydın GEZER'e ve her türlü yardımlarından dolayı Doç. Dr. Murat İŞCAN'a en içten dileklerimle saygılarımı sunarım.

Ayrıca, çalışmalarım esnasında kendilerinden görmüş olduğum destek ve sonsuz güvenden dolayı aileme ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Çağrı KARAMAN
Ocak - 2016

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

F	Altın Yapı
I	Birim Afinor Alanı
φ	Çarpım Yapı
${}^{D}\widetilde{\nabla}$	Dual Yarı-simetrik Metrik Olmayan F-Konneksiyon
${}^{D}\tilde{R}_{ijk}{}^{l}$	Dual Yarı-simetrik Metrik Olmayan F-Konneksiyonun Eğrilik Tensörü
${}^{D}\tilde{\Gamma}_{ij}^{k}$	Dual Yarı-simetrik Metrik Olmayan F-Konneksiyonun Katsayıları
${}^{M}R_{ijk}{}^{l}$	Metalik Riemann Eğrilik Tensörü
J	Metalik Yapı
C	Kontraksiyon Operatörü
$R_{ijk}{}^{l}$	Riemann Eğrilik Tensörü
∇	Riemann Konneksiyonu
Γ_{ij}^{k}	Riemann Konneksiyonunun Katsayıları
g	Riemann Metriği
$\overset{C}{\otimes}$	Pür Çarpım
ϕ_F	Tachibana Operatörü
$\otimes$	Tensör Çarpımı
L_X	X Vektör Alanına Göre Lie Türevi
∇_X	X Vektör Alanına Göre Kovaryant Türev
$\overline{\nabla}$	Yarı-simetrik metrik F-Konneksiyon
$\bar{R}_{ijk}{}^{l}$	Yarı-simetrik Metrik F-Konneksiyonun Eğrilik Tensörü
$\bar{\Gamma}_{ij}^{k}$	Yarı-simetrik Metrik F-Konneksiyonun Katsayıları
$\widetilde{\nabla}$	Yarı-simetrik Metrik Olmayan F-Konneksiyon
$\tilde{R}_{ijk}{}^{l}$	Yarı-simetrik Metrik Olmayan F-Konneksiyonun Eğrilik Tensörü
$\tilde{\Gamma}_{ij}^{k}$	Yarı-simetrik Metrik Olmayan F-Konneksiyonun Katsayıları
S_{ij}^{k}	Yarı-simetrik Konneksiyonun Burulma Tensörü

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

M.Ö. 484-425 yılları arasında yaşamış olan tarihçi Heredot'a göre geometrinin başlangıcı Eski Mısır'a dayanır. Mısır'da geometrinin yer ve ölçüm anlamına geldiğini belirten Heredot, Kralın her Mısırlıya kare biçimli tarla verip, ona göre her birinden vergi aldığını gözlemlemiştir. Tarlanın bir kenarı sular altında kaldığında ise ölçümcülerin gelip, tarlanın geri kalan kısım için vergi aldıklarını ve bu yapılanların geometride ilk adım olduğunu söylemiştir (Dönmez 2005).

Heredot, geometrinin başlangıcının tam olarak hangi zamana denk geldiğini bilemesede, ilk sistematik çalışma M.Ö. 330-275 yılları arasında yaşamış olan Öklid'e (Euclides) aittir. Mısır'da doğan Yunan matematikçi, gelmiş geçmiş matematikçilerin içinde adı geometri ile en çok özdeşleştirilen kişidir. Geometri dünyasında kapladığı bu seçkin yeri, geometrinin başlangıcından kendi zamanına kadar bilinen ismi ile 13 ciltten oluşan, "*Elementler*" kitabıyla kazanmıştır (Asimov 1972). Öklid'in bu yapıtı, 2300 yıl boyunca önemli bir başvuru kaynağı olarak kullanılmıştır. Halen kullanılmaya devam etmektedir.

Öklid, çalışmalarının tutarlı bir bütün olmasını sağlamak için kanıt gerektirmeyen apaçık gerekçeler olarak 5 aksiyom ortaya koyar. Diğer bütün önermeleri bu aksiyomlardan çıkarır. Kendinden önceki Tales, Pisagor, Platon, Aristoteles gibi matematikçi ve geometricilerin çalışmalarını temel alan Öklid'in bu yapıtı, düzlem geometrisi, aritmetik, sayılar kuramı, irrasyonel sayılar ve katı cisimler geometrisi konulardan oluşur.

Öklid geometrisi 19. yüzyılın başına kadar rakipsiz kaldı. Ta ki 1827 yılında Carl Friedrich Gauss'un, Öklid'in ilk dört aksiyomunu sağlayan fakat beşinci aksiyomu (" Bir doğruya dışında alınan bir noktadan bir ve yalnız bir paralel çizilebilir.") sağlamayan geometrilerin var olduğu düşününe kadar. Gauss, Öklid dışı geometrilerin varlığını keşfettiğini ancak tepkilerden çekindiği için fikirlerini yayımlayamadığını iddia etmiştir.

Gauss, Hannover'da yaptığı yüzey ölçümleri sırasında, ölçüm hatalarının istatistiksel dağılımını veren normal dağılım (Gauss dağılımı) fikrini kafasında iyice belirginleştirdi. Ayrıca bu ölçümler Gauss'un diferensiyel geometriye de ilgi duymasını sağladı. Öklidyen uzayda eğriler ve yüzeyler üzerine olan çalışmalar geometrinin ilk günlerinden itibaren çalışılmışsa da, bugün ele alınan diferensiyel geometri ve manifold kavramının oluşmasına ön ayak olacak şekilde ortaya konan ilk çalışma Gauss'a aittir (Hall 1970; Bell 1986; Simmons 1996).

1827 yılında Gauss muhteşem teoremi *Theorema Egregium* da, yüzeyin eğriliğini ölçmede, bugün Gauss eğriliği adı verilen, bir ölçümün olduğunu ortaya koydu ve bu ölçümün sadece yüzey üzerindeki eğrilere bağlı olduğunu gösterdi. Bunun anlamı bu ölçü yüzeyin şeklinin değişmesi ile değişmez. Gauss'un bu keşfi bugün içsel geometri olarak adlandırılmaktadır. Yani yüzey üzerinde yaşayan bir canlı, bu ölçüyü (Gauss eğriliği) kullanarak yüzeyin eğriliği hakkında bilgi edinebilir.

Çığır açan ikinci çalışma ise Gauss'un doktora öğrencisi, Georg Friedrich Bernhard Riemann tarafından yapıldı. Riemann 1854 te Göttingen üniversitesinde akademik bir pozisyon alabilmek için sunum hazırladı. Seçtiği herhangi üç konuyu jüriye anlatması gerekiyordu. Riemann'ın sunacağı ilk iki konu, kompleks fonksiyonlar ve trigonometrik seriler üzerineydi. Üçüncü konu ise "Geometrinin temelleri üzerine hipotezler" olarak belirlenmişti.

Jüride bulunan Gauss, ilk iki konuyu atlayarak Riemann'dan üçüncü konuyu anlatmasını istedi. Çünkü üçüncü konu, kendisinin de ilgilendiği ama cesaret edip yayınlayamadığı Öklid dışı geometrilerdi. Riemann, üçüncü konusunda tanımladığı, katlı genişletilmiş çokluklar (manifold) kavramı ile geometri için yeni bir bakış açısı sunmaktaydı. Bu kavram izafiyet teorisi ve uzay-zaman yapısının anlaşılmasında da temel oluşturmaktaydı.

Riemann’ın sunduğu bu geometrinin Öklid ve Öklid dışı geometrileri içermesinin nedeni manifold üzerinde tanımladığı ölçme bağıntıları veya metrik bağıntılarından kaynaklanmaktaydı. Öklid geometride iki nokta arasındaki en kısa uzaklık bir ölçme bağıntısıdır. Riemann manifold kavramını tanımlamak için Öklid uzaydaki uzaklık ölçme bağıntısını genelleştirdi. Öklid düzlemde (x^1, x^2) ve $(x^1 + dx^1, x^2 + dx^2)$ noktaları arasındaki en kısa uzaklık l,

$$l = \sqrt{(dx^1)^2 + (dx^2)^2}$$

şeklindedir. Pisagor teoremi ile verilen bu l uzunluğu $i, j = 1,2$ için,

$$\sum g_{ij} dx^i dx^j$$

dir. Burada $g_{11} = g_{22} = 1$ ve $g_{12} = g_{21} = 0$ dır. Riemann son eşitliği $i, j = 1, \dots, n$ için (n, manifoldun boyutu),

$$ds^2 = \sum g_{ij}(x) dx^i dx^j$$

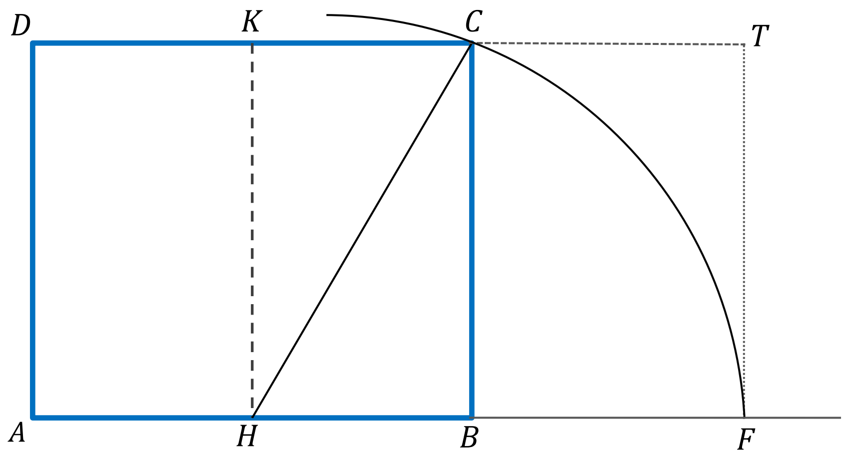
durumuna genelleştirdi. Böylece Riemann, Öklid uzaydaki uzunluk kavramını manifold üzerine metrik bağıntı olarak genişletmiş oldu. Artık metrik bağıntı sadece Öklid uzaydaki uzunluk kavramı olmak zorunda değildi. Öklid uzayda uzaklık kavramının belirlediği açı vb. kavramları manifold üzerinde tanımlamak mümkündü. Önemli olan uzayın geometrisini belirlemek için metrik bağıntıyı belirlemekti.

Riemann, manifold kavramını üzerinde çeşitli işlemlerin yapıldığı, koordinatların değiştirildiği n-boyutlu nokta kümesi olarak tanımladı. Gauss’un bulduğu ölçüye karşılık bugün Riemann eğrilik tensörü adı verilen ölçüyü koydu. Böylece Öklid veya Öklid dışı geometriler bu ölçünün durumuna göre belirleniyordu. Örneğin; sıfır eğrilikli düzlemde üçgenin iç açıları toplamı 180 derecedir. Eğriliği pozitif olan kürede çizilen üçgenin iç açıları toplamı 180 dereceden büyük ve eyer yüzeyi üzerindeki üçgenin iç açıları toplamı 180 dereceden küçüktür. Tüm bunlar manifoldun eğriliğinden kaynaklanır.

Riemann'ın geliştirdiği bu yeni bakış açısı, Einstein'ın geliştirdiği izafiyet teorisinin uzay-zaman kavramına temel oluşturdu. Einstein kütle çekimini tanımlamak için tensörel bir ifade aradığında, sonunda Riemann'ın tanımladığı metrik bağıntı veya bugün Riemann metriği adı verilen kavrama ulaştı.

Manifold kavramına ilk olarak Riemann tarafından giriş yapılmışsa da bu kavramın detaylı açıklaması Weyl tarafından 1923 yılında Riemann yüzeyler teorisi üzerine basılan makalesinde verildi. Manifold kavramının bugünkü forma taşınması ise Whitney (1936) in makalesinde görüldü (Şahin 2013).

Öklid'in çalışmalarından biri olan ve günümüzde, biyoloji, mimarlık, matematiksel olasılık, uzay-zamanı ve atom fiziği gibi birçok alanda uygulaması bulunan ayrıca bu tez çalışmasının da temelini oluşturan Altın Oran teorisi, matematiğin modern dallarından birisidir (El Naschie 1999; Heyrovska 2005). Altın oranı ifade etmenin en iyi yollarından biri kare üzerinde göstermektir: Kare tam ortadan HK doğru parçası ile bölünsün. Merkezi H olan ve karenin C kenarından geçen bir çember çizilsin ve bu çember AB doğru parçasının uzantısı olan F noktasını kessin.



Şekil 1.1. Altın Oranın Elde Edilişi (Altın Dikdörtgen)

Oluşan $AFTD$ dikdörtgenin taban uzunluğunu AF nin, $ABCD$ karesinin taban uzunluğu AB ye oranına Altın Oran denir. Buna denk olarak AB nin BF ye oranı da altın orandır. Yani,

$$\frac{AF}{AB} = \frac{AB}{BF} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618 \ldots$$

biçiminde olur ki buda $x^2 = x + 1$ cebirsel denkleminin pozitif köküdür. Uzun kenarın kısa kenara oranı altın oran olmasından dolayı yeni oluşan $AFTD$ dikdörtgenine altın dikdörtgen denir.

Diferensiyel geometride altın oran uygulaması üzerine yapılan çalışmalara büyük ilgi gösterilmiştir. Crasmareanu and Hretcanu (2008), Reimann manifoldu üzerinde (1,1) tipli afinor yardımıyla altın yapıyı tanımlayarak altın Riemann manifoldunu oluşturmuşlardır. Aslında bu altın yapı, Goldberg and Yano (1970) nun, $a_1, a_2, \ldots, a_d \in \mathbb{R}$ ve $I \in \mathfrak{J}_1^1(M_n)$ olmak üzere,

$$Q(f) = F^d + a_d F^{d-1} + \cdots + a_2 F + a_1 I = 0$$

biçiminde tanımladıkları d dereceli polinomsal yapının $d = 2$, $a_2 = -1$ ve $a_1 = -1$ için özel hali olan,

$$F^2 - F - I = 0$$

eşitliğini sağlayan $F \in \mathfrak{J}_1^1(M_n)$ afinorudur. Gezer *et al.* (2013) ise altın Riemann manifoldu üzerinde F altın yapısının integrallenebilme şartlarını araştırmışlardır. Altın yapılar ile ilgili daha fazla bilgi için Marek (2006), Stakhov (2006, 2007), Hretcanu and Crasmareanu (2007, 2009) ve Hretcanu *et. al.* (2009) çalışmalarına bakılabilir.

Bu tez çalışmasının araştırma ve bulgular kısmı üç bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm, Hayden (1932) in tanımladığı ve Yano (1970) tarafından geliştirilen yarı-simetrik metrik konneksiyon üzerinedir. Burulması,

$$\hat{S}_{ij}^{k} = p_j \delta_i^{\,k} - p_i \delta_j^{\,k}$$

biçiminde olan herhangi bir $\widehat{\nabla}$ afin konneksiyon eğer $\widehat{\nabla}_k g_{ij} = 0$ şartını sağlarsa bu konneksiyona yarı-simetrik metrik konneksiyon denir. Yarı-simetrik metrik konneksiyonlarla ilgili daha fazla bilgi için Chaki and Konar (1981), De and Biswas (1997), Pusic (2011a, 2011b) ve Mincic (2013) çalışmalarına bakılabilir. Daha sonra Yano and Imai (1975) hermit metriğe sahip kompleks manifoldlar üzerinde yarı-simetrik metrik F-konneksiyonu tanımlamıştır. Bu çalışmada Yano and Imai (1975) yarı-simetrik metrik konneksiyonun burulma tensörünü,

$$\hat{S}_{ij}^{k} = p_j \delta_i^{\,k} - p_i \delta_j^{\,k} - 2F_{ij} q^k$$

şeklinde tanımlamışlardır. Yani $\hat{S}_{ij}^{k} = -\hat{S}_{ji}^{k}$ özelliğini bozmadan burulmaya F kompleks yapısını dahil etmişlerdir. Daha sonra Hayden (1932) in metodu ile $\widehat{\nabla}_k g_{ij} = 0$ ve $\widehat{\nabla}_k F_i^{\,j} = 0$ (F-konneksiyon) şartlarını sağlayan $\widehat{\Gamma}_{ij}^{k}$ yarı-simetrik metrik F-konneksiyon katsayılarını bulup bununla ilgili çalışmalar yapmışlardır.

Prvanovic (1977a) ise bölgesel ayrıştırılabilir Riemann manifoldu üzerinde burulması,

$$\hat{S}_{ij}^{k} = p_j \delta_i^{\,k} - p_i \delta_j^{\,k} + p_t F_j^{\,t} F_i^{\,k} - p_t F_i^{\,t} F_j^{\,k}$$

şeklinde olan bir afin konneksiyon için, yine $\widehat{\nabla}_k g_{ij} = 0$ ve $\widehat{\nabla}_k F_i^{\,j} = 0$ şartları dahilinde, $\hat{S}_{ij}^{k} = -\hat{S}_{ji}^{k}$ eşitliği bozulmadan yarı-simetrik metrik F-konneksiyon katsayılarını elde etmişlerdir. Bu çalışmada F çarpım yapıdır. Yarı-simetrik metrik F-konneksiyonlarla ilgili daha fazla bilgi için Prvanovic (1971, 1979, 1984) çalışmalarına bakılabilir.

Araştırma ve bulguların ilk bölümünde de Prvanovic (1977a) in kullandığı burulmada, F yapısı $F^2 = F + I$ olarak kabul edildi. Yani F, altın yapı olarak seçildi ve altın yarı-simetrik metrik F-konneksiyon elde edildi. Bununla ilgili değişik çalışma ve uygulamalar yapıldı.

İkinci bölüm, Agashe and Chafle (1992) nin tanımladığı yarı-simetrik metrik olmayan konneksiyonlar üzerinedir. Burulması $\hat{S}_{ij}^{\ \ k} = p_j\delta_i^{\ k} - p_i\delta_j^{\ k}$ şeklinde olan ancak $\widehat{\nabla}_k g_{ij} \neq 0$, yani metrik olmayan $\widehat{\nabla}$ afin konneksiyona yarı-simetrik metrik olmayan konneksiyon denir. Burada elde edilen metrik olmayan konneksiyon katsayıları $\hat{\Gamma}_{ij}^k$, keyfi olarak seçilmiştir. Yani, $\hat{\Gamma}_{ij}^k - \hat{\Gamma}_{ji}^k = \hat{S}_{ij}^{\ \ k}$ olacak şekilde bir katsayı seçilmiştir. Vurgulanmalıdır ki, keyfi sayıda böyle metrik olmayan konneksiyon yazılabilir. Yarı-simetrik metrik olmayan konneksiyonlarla ilgili daha fazla bilgi için Agashe and Chafle (1994), De and Kamilya (1995), Sengupta *et. al.* (2000) ve Chaubey and Ojha (2011) çalışmalarına bakılabilir. Bu tezde ise, içinde F altın yapısının da bulunduğu genel bir altın yarı-simetrik metrik olmayan F-konneksiyon katsayısı yazılmıştır. Eğrilikleri hesaplanıp, bununla ilgili çalışmalar yapılmıştır.

Lauritzen (1987), herhangi bir $\widehat{\nabla}$ afin konneksiyon için,

$$Xg(Y,Z) = g\big(\widehat{\nabla}_X Y, Z\big) + g(Y, {}^{D}\widehat{\nabla}_X Z)$$

eşitliğini sağlayan ${}^{D}\widehat{\nabla}$ konneksiyonuna $\widehat{\nabla}$ nın dual konneksiyonu adını vermiştir. Sadece metrik olmayan konneksiyonlar için verimli çalışmalar sağlayan dual konneksiyon, bu tez çalışmasında elde edilen altın yarı-simetrik metrik olmayan F-konneksiyonun dual konneksiyonunu elde etmek için kullanıldı. $\widehat{\nabla}$ ve ${}^{D}\widehat{\nabla}$ konneksiyonlarının eğrilikleri arasındaki bağıntılar incelendi. Daha sonra herhangi bir ω kovektör alanı için,

$$Xg(Y,Z) = g\big(\widehat{\nabla}_X Y, Z\big) + g\big(Y, {}^{GD}\widehat{\nabla}_X Z\big) - \omega(X)g(Y,Z)$$

biçiminde tanımlanan $\widehat{\nabla}$ afin konneksiyonun genelleştirilmiş duali ${}^{GD}\widehat{\nabla}$ (Calin *et. al.* 2009), yine altın yarı-simetrik metrik olmayan F-konneksiyon için hesaplanıp çalışmalar yapılmıştır.

Üçüncü bölüm, metalik orana sahip metalik Reimann manifoldları üzerinedir. Metalik oran, Fizikçi De Spinadel (1999a) in elde ettiği, altın oranı veren denklemin genelleşmesi olarak ta kabul edilen,

$$x^2 - px - q = 0$$

denkleminin,

$$\sigma_{p,q} = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$$

biçimindeki köküdür. Ekstra bilgi için De Spinadel (1999b, 2000, 2002) çalışmalarına bakılabilir. Burada $p, q \in \mathbb{Z}^+$ şeklindedir. Örneğin:

- $p = q = 1$ için $\sigma_{1,1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ olup altın oranı verir,

- $p = 2,\ q = 1$ için $\sigma_{2,1} = 1 + \sqrt{2}$, gümüş oran olup fraktal ve Cantor geometride önemli uygulamaları vardır (El Naschie 1994),

- $p = 3$, $q = 1$ için $\sigma_{3,1} = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$, bronz oran olup dinamik ve yarı-kristal (quasicrystal) sistemler de uygulamaları bulunmaktadır.

Hretcanu and Crasmareanu (2013) ise Riemann manifoldu üzerinde g metriği ile uyumlu, yani $g(JX, Y) = g(X, JY)$ olan ve $J \in \Im_1^1(M_n)$ için,

$$J^2 - pJ - qI = 0$$

denklemini sağlayan metalik Riemann manifoldları üzerine çalışmışlardır. Bu tezin üçüncü bölümde ise metalik Riemann manifoldu üzerinde J için farklı bir integrallenme şartı verilerek bölgesel ayrıştırılabilir metalik Riemann manifoldu oluşturulmuştur.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde tez çalışması boyunca ihtiyaç duyulan temel kavramlar konu bütünlüğüne uygun olarak sunulmuştur.

2.1. Tensörler

Tanım 2.1.1: V_n, n-boyutlu bir vektör uzayı ve ${}^{D}V_n$ de V_n vektör uzayının dual uzayı olsun. Bu durumda,

$$t: \overbrace{V_n \times V_n \ldots \times V_n}^{q\ tane} \times \overbrace{{}^{D}V_n \times {}^{D}V_n \ldots \times {}^{D}V_n}^{p\ tane} \longrightarrow \mathbb{R}$$

ile tanımlanan ve $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $v_1, v_2, \ldots v_q \in V_n$ ve ${}^{D}v_1$, ${}^{D}v_2, \ldots$, ${}^{D}v_p \in {}^{D}V_n$ olmak üzere,

$$t(v_1, \ldots, \lambda_1 v_k + \lambda_2 v'_k, \ldots) = \lambda_1 t(v_1, \ldots v_k, \ldots) + \lambda_2 t(v_1, \ldots v'_k, \ldots)$$

şartını sağlayan t dönüşümüne p dereceden kontravaryant ve q dereceden kovaryant tensör denir. Burada $v_k, v'_k \in V_n$ (veya ${}^{D}V_n$) dir. Bu tensörlerin kümesi $\Im_q^p(V_n)$ ile gösterilir ve $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ve $t_1, t_2 \in \Im_q^p(V_n)$ olmak üzere,

$$(\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2)(v_1, v_2, \ldots) = \lambda_1 t_1(v_1, v_2, \ldots) + \lambda_2 t_2(v_1, v_2, \ldots)$$

olup $\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2 \in \Im_q^p(V_n)$ olduğundan $\Im_q^p(V_n)$ bir vektör uzayı yapısına sahiptir. Ayrıca (p, q) ifadesi tensörün tipini ifade eder (Şahin 2013).

Tanım 2.1.2: V_n, n-boyutlu bir vektör uzayı ve ${}^{D}V_n$ de V_n vektör uzayının dual uzayı olsun. $\Im_q^p(V_n)$, (p, q) tipli tensörlerin kümesi olmak üzere,

$$C_j^i : \Im_q^p(V_n) \longrightarrow \Im_{q-1}^{p-1}(V_n)$$

$$A \longrightarrow (C_j^i A)(e_1, \ldots e_{q-1}, w^1, \ldots w^{p-1}) = C\{A(., e_1, \ldots e_{q-1}, ., w^1, \ldots w^{p-1})\}$$

ve

$$C_j^i A = \sum_m A(e_m, e_1, \dots e_{q-1}, w^m, w^1, \dots w^{p-1})$$

ile tanımlanan operatöre kontraksiyon (daraltma) operatörü denir (Şahin 2013). Burada $e_m, e_1, \dots e_{q-1}$ ler V_n de baz ve $w^m, w^1, \dots w^{p-1}$ ler ise ${}^D V_n$ de dual baz (kobaz) vektörleridir. Böylece bir daralma operatörü (p, q) tipli bir tensörü $(p-1, q-1)$ tipli bir tensöre taşır (Şahin 2013).

$(0,2)$ tipli $t(v_1, v_2)$ tensörü ele alınsın. Bu tensörle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$t'(v_1, v_2) = \lambda t(v_1, v_2) + \mu t(v_2, v_1)$$

biçiminde bir $t'(v_1, v_2)$ tensörü tanımlansın. Böylece λ ve μ reel değerleri için sonsuz sayıda tensör elde edilir. Bunlar içerisinden herhangi birisi $\lambda = \mu = \frac{1}{2!}$ biçiminde seçilisin. Buna karşılık gelen yeni tensöre $t(v_1, v_2)$ tensörünün simetrikleşmesi denir ve $Sim(t)$ biçiminde gösterilir. Yani,

$$Sim\big(t(v_1, v_2)\big) = \frac{1}{2!}\big(t(v_1, v_2) + t(v_2, v_1)\big)$$

olur. Eğer değişken sayısı 3 tane olursa $t(v_1, v_2, v_3)$ tensörünün simetrikleşmesi,

$$\begin{aligned} Sim\big(t(v_1, v_2, v_3)\big) = \frac{1}{3!}[&t(v_1, v_2, v_3) + t(v_2, v_3, v_1) + t(v_3, v_1, v_2) \\ &+ t(v_1, v_3, v_2) + t(v_3, v_2, v_1) + t(v_2, v_1, v_3)] \end{aligned}$$

biçiminde yazılır. Benzer olarak $t'(v_1, v_2) = \lambda t(v_1, v_2) + \mu t(v_2, v_1)$ tensörlerinden bir diğeri ise $\lambda = -\mu = \frac{1}{2!}$ seçilerek elde edilebilir. O halde yeni elde edilen tensöre $t(v_1, v_2)$ tensörünün antisimetrikleşmesi denir ve $Alt(t)$ biçiminde gösterilir. Yani,

$$Alt\big(t(v_1, v_2)\big) = \frac{1}{2!}\big(t(v_1, v_2) - t(v_2, v_1)\big)$$

olur. Eğer değişken sayısı 3 tane olursa $t(v_1, v_2, v_3)$ tensörünün antisimetrikleşmesi,

$$Alt\big(t(v_1, v_2, v_3)\big) = \frac{1}{3!}[t(v_1, v_2, v_3) + t(v_2, v_3, v_1) + t(v_3, v_1, v_2)$$
$$-t(v_1, v_3, v_2) - t(v_3, v_2, v_1) - t(v_2, v_1, v_3)]$$

biçiminde olur (Salimov ve Mağden 2008).

Tanım 2.1.2: Eğer $Sim(t) = t$ $(Alt(t) = t)$ olursa, t tensörüne simetrik (antisimetrik) tensör denir (Salimov ve Mağden 2008).

2.2. Diferensiyellenebilir Manifoldlar

Tanım 2.2.1: f, $\mathbb{R}^n$ uzayının bir U açık kümesi üzerinde tanımlı reel değerli bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonunun k. mertebeden kısmi türevleri var ve, $k \leq r$ olmak üzere, sürekli ise f fonksiyonu r. mertebede diferensiyellenebilirdir denir ve $f \in C^r(U, \mathbb{R})$ ile gösterilir (Şahin 2013).

Tanım 2.2.2: M bir Haussdorf uzay olsun. Eğer her $p \in M$ için, $\mathbb{R}^n$ deki bir açık kümeye homeomorfik olacak şekilde p noktasının bir açık komşuluğu U varsa M Haussdorf uzayına bir topolojik manifold veya kısaca manifold denir. Bu durumda $boy(\mathbb{R}^n) = n$ olduğundan, manifoldun boyutu da n dir ve M_n ile gösterilir (Şahin 2013).

Tanım 2.2.2 te verilen homeomorfizma $\varphi: U \longrightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ ise, (U, φ) ikilisine bir harita denir. M_n manifoldunun bütün noktalarının en az bir haritada yer alması için bu açık kümelerin arakesitinin boştan farklı olması gerekir. φ bir homeomorfizma olduğundan, $p \in U$ noktasının koordinatları $x = \varphi(p) \in \mathbb{R}^n$ noktasının koordinatları olarak tanımlanabilir. Böylece φ homeomorfizması M_n manifoldunun bir p noktasına $(x_1(p), \dots, x_n(p))$ n-lisini karşılık getirir. $(x_1(p), \dots, x_n(p))$ sayılarına p noktasının φ altındaki yerel koordinatları denir. Bu nedenle manifold, herhangi bir noktasının komşuluğunda n tane bağımsız koordinatla verilen bir küme olarak da düşünülebilir (Şahin 2013).

$U \cap V \neq \phi$ olmak üzere (U, φ) ve (V, ψ) iki harita olsun. $U \cap V$ kümesinde bir noktanın φ altındaki koordinatları $(x_1, \dots, x_n)$ olsun. φ dönüşümünün φ^{-1} tersi olduğundan, $U \cap V$ de bir tek p noktası vardır. Şimdi p noktasının ψ altındaki koordinatları da $(y_1, \dots, y_n)$ olsun. Bu durumda bu koordinatlar arasında,

$$y_i = f^i(x_1, \dots, x_n) = \left(\psi \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n)\right)^i,$$

$$x_i = g^i(y_1, \dots, y_n) = (\varphi \circ \psi^{-1}(y_1, \dots, y_n))^i$$

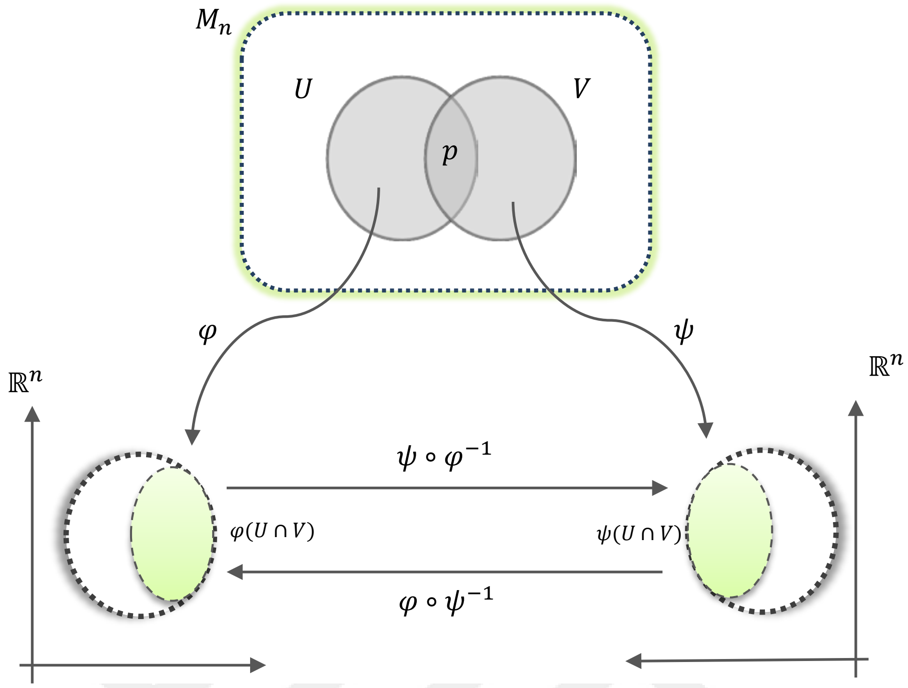
bağıntısı elde edilir, burada $(x_1, \dots, x_n) \in \varphi(U \cap V)$, $(y_1, \dots, y_n) \in \psi(U \cap V)$, $i = 1, \dots, n$ şeklindedir. $\psi \circ \varphi^{-1}$ ve $\varphi \circ \psi^{-1}$ homeomorfizmaları birbirinin tersi olduğundan, f^i ve g^i fonksiyonları süreklidir. $U \cap V \neq \phi$ durumunda $f^i(x_1, \dots, x_n)$ ve $g^i(y_1, \dots, y_n)$ fonksiyonları r. mertebeden diferensiyellenebiliyorsa (φ, U) ve (ψ, V) haritaları r. mertebeden uyumludur denir. Eğer $U \cap V = \phi$ ise uyumlu kabul edilir (Şahin 2013).

Tanım 2.2.3: M_n n-boyutlu manifold olsun. Eğer M_n üzerindeki haritaların bir ailesi olan $\mathbb{A} = \{(U, \varphi), (V, \psi), (W, \xi), \dots\}$ kümesi için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $\mathbb{A}$ kümesine M_n üzerinde r. mertebeden diferensiyellenebilir yapı (veya atlas) denir (Şahin 2013).

1) $\{U, V, W, \dots\}$ açık kümeleri M_n manifoldunun bir açık örtüsüdür,

2) $\mathbb{A}$ daki herhangi iki harita r. mertebeden uyumludur,

3) $\mathbb{A}$ maksimaldir, yani eğer bir $(\bar{U}, \bar{\varphi})$ haritası $\mathbb{A}$ daki bütün koordinat haritaları ile uyumlu ise bu durumda $(\bar{U}, \bar{\varphi}) \in \mathbb{A}$ dır.



Şekil 2.1. Diferensiyellenebilir Atlas

Tanım 2.2.4: M_n n-boyutlu manifold olsun. Eğer M_n manifoldu üzerinde r. mertebeden diferensiyellenebilir bit atlas varsa M_n manifolduna r. mertebeden diferensiyellenebilir manifold denir. Diferensiyellenebilir yapının her bir haritasına M_n manifoldunun uyumlu haritası adı verilir. Eğer atlas her mertebeden diferensiyellenebiliyorsa M_n manifolduna C^∞-manifold (veya diferensiyellenebilir manifold) denir.

Bir M_n manifoldu üzerindeki diferensiyel yapı, manifold üzerinde tensör, diferensiyel form, Lie türevi, kovaryant türev gibi birçok kavramı tanımlamaya olanak verir.

2.3. Tanjant Vektörler ve Vektör Alanları

Tanım 2.3.1: M_n n-boyutlu manifold, $p \in M_n$ bir nokta, p noktasındaki diferensiyellenebilir fonksiyonların kümesi $C^\infty(M_n, \mathbb{R})$ ve $f \in C^\infty(M_n, \mathbb{R})$ olsun. (U, φ), p noktasında ki bir harita ise $\varphi(p) = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ den $p = \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n)$ olur ve buradan $g = f \circ \varphi^{-1}$ olmak üzere,

$$y = f(p) = f\left(\varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n)\right) = g(x_1, \dots, x_n)$$

yazılır. Aşağıdaki ifade göz önüne alınsın,

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}\bigg|_p = \frac{\partial g}{\partial x^i}\bigg|_{\varphi(p)}$$

n tane olan $\zeta^i \in \mathbb{R}$ sayıları için,

$$X_p(f) = \sum_{i=1}^{n} \zeta^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\bigg|_p$$

biçiminde tanımlanan $X_p : C^\infty(M_n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ lineer fonksiyonu tanımlansın. Bu fonksiyon,

$$X_p = \sum_{i=1}^{n} \zeta^i \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p$$

şeklinde ve bu şekildeki tüm fonksiyonların kümesi $T_p(M_n)$ ile gösterilsin. $T_p(M_n)$ kümesi üzerinde toplama ve skalerle çarpma işlemleri $a \in \mathbb{R}$ için sırasıyla,

$$\left(X_{1_p} + X_{2_p}\right)(f) = X_{1_p}(f) + X_{2_p}(f)$$

$$\left(aX_p\right)(f) = aX_p(f)$$

şeklinde tanılanırsa $T_p(M_n)$ kümesi bu işlemlerle beraber $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olur. Bu vektör uzayına M_n nin p noktasındaki tanjant uzayı, bu uzayın elemanlarına ise M_n nin p noktasındaki tanjant vektörleri denir (Salimov ve Mağden 2008).

Bundan sonra işlemlerde kolaylık açısından tez boyunca $\sum \zeta^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ yerine $\zeta^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ kullanılacaktır. Yani $\sum$ toplam sembolü gerektiren işlemlerde bu toplam sembolü ifadesi kullanılmayacaktır. Ayrıca yine kolaylık açısından $\frac{\partial}{\partial x^i}$ bazı $\frac{\partial}{\partial x^i} = \partial_i$ biçiminde gösterilecektir.

Tanım 2.3.2: M_n n-boyutlu manifold ve $T_p(M_n)$ de manifoldun p noktasındaki tanjant uzayı olsun. Bu durumda her $p \in M_n$ noktasına $T_p(M_n)$ uzayında bir tanjant vektörü karşılık getiren X diferensiyellenebilir dönüşümüne vektör alanı denir. Böylece M_n üzerindeki bir vektör alanı,

$$X_p: M_n \longrightarrow \bigcup_{p \in M_n} T_p(M_n)$$

biçiminde diferensiyellenebilir bir dönüşümdür. Burada vektör alanının diferensiyellenebilir olması, her $f \in C^\infty(M_n, \mathbb{R})$ için,

$$Xf: M_n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$p \longrightarrow Xf(p) = X_p(f)$$

ile tanımlı fonksiyonun her mertebeden diferensiyellenebilir olması anlamındadır. Bir vektör alanı tanjant vektörlerinin topluluğudur. Vektör alanlarının kümesi tez boyunca $\Im_0^1(M_n)$ ile gösterilecektir ve böyle gösterimin sebebi bir sonraki konuda anlatılacaktır.

Yerel koordinat sisteminde bir X vektör alanı,

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

şeklinde ifade edilir (Şahin 2013). Ayrıca $g, h \in C^\infty(M_n, \mathbb{R})$ ve $X, Y \in \Im_0^1(M_n)$ ise bu durumda keyfi $p \in M_n$ ve $f \in C^\infty(M_n, \mathbb{R})$ için,

$$(gX + hY)_p f = g(p)X_p f + h(p)Y_p f$$

İfadesi tanımlanırsa $X + Y$, M_n üzerinde yeni bir vektör alanı olur. Bu şekilde tanımlanan toplama ve çarpma işlemleri ile birlikte $\Im_0^1(M_n)$, $C^\infty(M_n, \mathbb{R})$ halkası üzerinde bir modül olur.

2.4. Kotanjant Vektörler ve 1-Formlar

Tanım 2.4.1: M_n n-boyutlu manifold, $p \in M_n$ bir nokta, p noktasındaki diferensiyellenebilir fonksiyonların kümesi $C^{\infty}(M_n, \mathbb{R})$ ve $f \in C^{\infty}(M_n, \mathbb{R})$ olsun. $p \in M_n$ noktasında f fonksiyonunun diferensiyeli,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_p dx^i$$

şeklinde tanımlanır.

Her $f, g \in C^{\infty}(M_n, \mathbb{R})$ ve her $a \in \mathbb{R}$ için $f + g \in C^{\infty}(M_n, \mathbb{R})$ fonsiyonun diferensiyeli $df + dg$, $af \in C^{\infty}(M_n, \mathbb{R})$ fonksiyonunun türevi ise $a(df)$ biçiminde olup bu fonksiyonların p noktasındaki türevleri ${}^{D}T_p(M_n)$ ile gösterilen vektör uzayını oluştururlar. ${}^{D}T_p(M_n)$ vektör uzayına kotanjant uzay denir ve bazından bahsedilebilir. Öyle ki, $x^i \in C^{\infty}(M_n, \mathbb{R})$ koordinat fonksiyonları için $dx^i \in {}^{D}T_p(M_n)$ biçiminde olacaktır ve ${}^{D}T_p(M_n)$ nin bazı lineer bağımsız olan $\{dx^1, \dots, dx^n\}$ kümesidir. Ayrıca buradan $boy\left({}^{D}T_p(M_n)\right) = n$ dir.

Herhangi bir $df \in {}^{D}T_p(M_n)$ elemanı,

$$df : T_p(M_n) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$X \longrightarrow df(X) = X(f)$$

biçiminde lineer bir dönüşüm tayin eder. Son eşitlikte $f = x^j$ ve $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$ ifadeleri yerlerine yazılırsa $dx^j\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial x^j}{\partial x^i} = \delta_i^j$ elde edilir. Bu da demektir ki, $\{dx^j\}$ bazı $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ bazının dualidir. Yani $\{dx^j\}$ kobaz olur.

Tanım 2.4.1: M_n n-boyutlu manifold ve $p \in M_n$ olsun. M_n manifoldunun her bir p noktasına bir kovektör karşılık getiren dönüşüme kovektör (dual vektör) alanı veya 1-form denir (Şahin 2013).

2.5. Tensör Diferensiyellemesi

Tanım 2.5.1: M_n, C^∞ sınıfından bir manifold ve $\Im_q^p(M_n)$ de her $m \in M_n$ noktasındaki (p,q) tipli tensör uzayı olsun. M_n manifoldunun her $m \in M_n$ noktasına $\Im_q^p(M_n)$ tensör uzayından bir $t_q^p(m)$ tensörü karşılık getiren,

$$t_p: M_n \longrightarrow \Im_q^p(M_n)$$

$$m \longrightarrow t_q^p(m) \in \Im_q^p(M_n)$$

şeklindeki t fonksiyonuna (p,q) tipli tensör alanı denir (Bishop and Goldberg 1968).

Burada eğer $p = 1$ ve $q = 0$ alınırsa $(1,0)$ tipli tensör alanı (ya da vektör alanı) elde edilir. Bundan dolayıdır ki $(1,0)$ vektör alanlarının kümesi tez boyunca $\Im_0^1(M_n)$ ile işaretlenecektir. Eğer $p = 0$ ve $q = 1$ alınırsa $(0,1)$ tipli tensör alanı (ya da kovektör alanı) elde edilir ve kümesi $\Im_1^0(M_n)$ ile gösterilir. Eğer $p = 0$ ve $q = 0$ alınırsa her $m \in M_n$ noktasına bir skaler değer karşılık gelir. Yani $(0,0)$ tipli tensör alanı reel değerli bir fonksiyondur ve kümesi $\Im_0^0(M_n)$ ile gösterilir.

Yerel koordinatlarla (p,q) tipli t tensör alanı,

$$t = t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q} \otimes \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_p}$$

biçiminde gösterilir. Burada $t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ lere t tensör alanının U koordinat komşuluğunda yerel koordinat sistemindeki koordinatları denir. Eğer $t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}(x)$ fonksiyonları C^∞-sınıfından iseler t tensör alanına C^∞-sınıfındandır denir (Salimov ve Mağden 2008).

C^{∞}-sınıfından bir M_n manifoldu üzerindeki (p,q) tipli tensör alanlarının kümesi $\mathfrak{I}_q^p(M_n)$, $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayıdır. Bu tensörlerin toplamı,

$$\mathfrak{I}(M_n) = \sum_{p,q=0}^{\infty} \mathfrak{I}_q^p(M_n)$$

biçiminde gösterilirse, $\mathfrak{I}(M_n)$ kümesi $\mathbb{R}$ üzerinde bir cebir olur. Burada $\mathfrak{I}(M_n)$ cebiri üzerinde üçüncü işlem olan tensörel çarpım işlemi $\otimes$, noktasal olarak her $x \in M_n$ ve her $\underset{1}{t}, \underset{2}{t} \in \mathfrak{I}(M_n)$ için,

$$\underset{1}{t} \otimes \underset{2}{t} = \left(\underset{1}{t}\right)_x \otimes \left(\underset{2}{t}\right)_x$$

şeklindedir.

Tanım 2.5.2: $D: \mathfrak{I}(M_n) \longrightarrow \mathfrak{I}(M_n)$ şeklinde tanımlanan dönüşüm her $a, b \in \mathbb{R}$ ve $t, s \in \mathfrak{I}(M_n)$ için aşağıdaki şartları sağlarsa bu D dönüşümüne $\mathfrak{I}(M_n)$ cebirinin tensör diferensiyellemesi denir.

1) $D(at + bs) = aD(t) + bD(s)$ dir. Yani D dönüşümü sabit katsayılara göre lineerdir,

2) $D\left(\mathfrak{I}_q^p(M_n)\right) \subset \mathfrak{I}_q^p(M_n)$. Yani tensörün tipi korunur,

3) Leibniz kuralını sağlar. Yani $D(t \otimes s) = D(t) \otimes s + t \otimes D(s)$ dir,

4) C kontraksiyon operatörü olmak üzere $D(Ct) = C(D(t))$ dir. Yani D dönüşümü kontraksiyon ile yer değiştirebilir.

2.6. Lie Operatörü ve Lie Türevi

Tanım 2.6.1: M_n, C^{∞}-sınıfından bir manifold, M_n manifoldunda bir U açık kümesi üzerinde $X, Y \in \mathfrak{I}_0^1(M_n)$ ve $f \in C^{\infty}(U, \mathbb{R})$ fonksiyonu için,

$$[\,,\,]: \mathfrak{I}_0^1(M_n) \times \mathfrak{I}_0^1(M_n) \longrightarrow \mathfrak{I}_0^1(M_n)$$

$$[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$$

ile tanımlanan dönüşüme X ve Y vektör alanlarının Lie operatörü (parantezi) denir. Burada $X(f)$, f fonksiyonunun X vektör alanı yönündeki türevidir.

Tanım 2.6.2: $X, Y \in \Im_0^1(M_n)$ ve $f \in \Im_0^0(M_n)$ olmak üzere $D = L_X$ diferensiyelleme işlemi aşağıdaki şartları sağlarsa L_X e X vektör alanı yönündeki Lie diferensiyellemesi adı verilir.

1) $L_X f = X(f)$,

2) $L_X Y = [X, Y]$.

Burada $[X, Y]$ Lie parantezidir (Salimov ve Mağden 2008).

Keyfi (p, q) tipli t tensörü için Lie türevi $X_1, \dots, X_q \in \Im_0^1(M_n)$ ve $\overset{1}{w}, \dots, \overset{p}{w} \in \Im_1^0(M_n)$ için L_X özelliklerine göre,

$$(L_X t)\left(X_1, \dots, X_q, \overset{1}{w}, \dots, \overset{p}{w}\right) = X\left(t\left(X_1, \dots, X_q, \overset{1}{w}, \dots, \overset{p}{w}\right)\right)$$

$$-\sum_{\lambda=1}^{q} t\left(X_1, \dots, L_X X_\lambda, \dots, X_q, \overset{1}{w}, \dots \overset{p}{w}\right)$$

$$-\sum_{\mu=1}^{p} t\left(X_1, \dots, X_q, \overset{1}{w}, \dots, L_X \overset{\mu}{w}, \dots, \overset{p}{w}\right)$$

biçiminde ve yerel koordinatlarla bu ifade $X = X^k \partial_k$, $X_\lambda = \partial_{j_\lambda}, \lambda = 1, \dots, q$ ve $\overset{\mu}{w} = dx^{i_\mu}, \mu = 1, \dots, p$ için,

$$(L_X t)_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = X^k \partial_k t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} + \sum_{\lambda=1}^{q} \left(\partial_{j_\lambda} X^k\right) t_{j_1 \dots k \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} - \sum_{\mu=1}^{p} \left(\partial_k X^{i_\mu}\right) t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots k \dots i_p}$$

şeklindedir (Salimov ve Mağden 2008).

2.7. Lineer Konneksiyon ve Kovaryant Türev

Tanım 2.7.1: M_n, C^∞-sınıfından bir manifold, $X, Y, Z \in \Im_0^1(M_n)$ ve $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ fonksiyonu için,

$$\nabla: \Im_0^1(M_n) \longrightarrow \Im_0^1(M_n)$$

ile tanımlı ve

1) $\nabla_{X+Y}Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z,$

2) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z,$

3) $\nabla_{fX}Y = f\nabla_X Y,$

4) $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y,$

şartlarını sağlayan ∇ dönüşümüne afin veya lineer konneksiyon adı verilir (Şahin 2013). $\nabla_X Y$ vektör alanında ise Y vektör alanının X vektör alanı boyunca kovaryant türevi adı verilir. Afin konneksiyonun tanımından görülmektedir ki, bir afin konneksiyon M_n üzerindeki bir vektör alanını yine bir vektör alanına taşıyan bir dönüşümdür.

M_n manifoldun üzerindeki U koordinat komşuluğundaki x^i yerel koordinatları ve bu komşulukta $\frac{\partial}{\partial x^i} = \partial_i$ doğal vektör alanı ele alınsın. $\nabla_{\partial_i} = \nabla_i$ olmak üzere ∇_i nin ∂_j vektör alanına uygulanmasıyla elde edilen vektör alanı,

$$\nabla_i \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k$$

şeklinde olur. Burada $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k(x)$, U komşuluğunda tayin edilmiş C^∞-sınıfından fonksiyonlardır (Salimov ve Mağden 2008). Ayrıca bu Γ_{ij}^k ifadesine ∇ konneksiyonunun katsayıları veya 2. tür Christoffel sembolleri denir.

Keyfi (p, q) tipli t tensörü için kovaryant türev $X_1, \dots, X_q \in \Im_0^1(M_n)$ ve $\overset{1}{w}, \dots, \overset{p}{w} \in \Im_1^0(M_n)$ için ∇_Y özelliklerine göre,

$$(\nabla_Y t)\left(X_1,\dots,X_q,\overset{1}{w},\dots,\overset{p}{w}\right)=Y\left(t\left(X_1,\dots,X_q,\overset{1}{w},\dots,\overset{p}{w}\right)\right)$$

$$-\sum_{\lambda=1}^{q} t\left(X_1,\dots,\nabla_Y X_\lambda,\dots,X_q,\overset{1}{w},\dots\overset{p}{w}\right)$$

$$-\sum_{\mu=1}^{p} t\left(X_1,\dots,X_q,\overset{1}{w},\dots,\nabla_Y \overset{\mu}{w},\dots,\overset{p}{w}\right)$$

biçiminde ve yerel koordinatlarla bu ifade $Y=\partial_k$, $X_\lambda=\partial_{j_\lambda}, \lambda=1,\dots,q$ ve $\overset{\mu}{w}=dx^{i_\mu}$, $\mu=1,\dots,p$ için,

$$(\nabla_Y t)^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}=\partial_k t^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}-\sum_{\lambda=1}^{q}\Gamma^m_{kj_\lambda} t^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots m\dots j_q}-\sum_{\mu=1}^{p}\Gamma^{i_\lambda}_{km} t^{i_1\dots m\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$$

şeklindedir.

2.8. Eğrilik ve Burulma Tensörleri

$f\in C^\infty(U,\mathbb{R})$ fonksiyonunun tam diferensiyeli $df=\partial_i f dx^i$ şeklinde olup buradaki $\partial_i f=\omega_i$ ifadesi f fonksiyonunun tam diferensiyeli yardımıyla elde edilen 1-form dur. Elde edilen 1-formun kovaryant türevi,

$$\nabla_i\omega_j=\partial_i\omega_j-\Gamma^k_{ij}\omega_k$$

$$=\partial_i\,\partial_j f-\Gamma^k_{ij}(\partial_k f) \tag{2.1}$$

şeklindedir. Analizden bilinen Schwarz teoremine göre sürekli bir fonksiyonda kısmi türevler yer değiştirebilir. Yani, $\partial_i\,\partial_j f=\partial_j\,\partial_i f$ yazılır. O halde ,

$$\nabla_j\omega_i=\partial_j\,\partial_i f-\Gamma^k_{ji}\omega_k \tag{2.2}$$

biçiminde olup (2.1) ve (2.2) den,

$$\nabla_j\omega_i-\nabla_i\omega_j=\left(\Gamma^k_{ij}-\Gamma^k_{ji}\right)\omega_k=S_{ij}{}^k\omega_k$$

elde edilir. Burada ki ${S_{ij}}^k$ ifadesine ∇ konneksiyonunun burulma tensörü denir. ${S_{ij}}^k = -{S_{ji}}^k$ olduğu açıktır. Burulma tensörünün invaryant (genel) formdaki yazılışı ise her $X, Y \in \Im_0^1(M_n)$ için,

$$S(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

şeklindedir. Burada $[X,Y]$, Lie parantezidir. Afin konneksiyonlu uzaylar içerisinde burulması sıfır olan (burulmasız) uzaylar çok önemli bir sınıf teşkil eder. Bu tür uzaylarda konneksiyon katsayıları simetrik olur. Yani,

$$\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k = 0 \Leftrightarrow {S_{ij}}^k = 0$$

biçimindedir (Salimov ve Mağden 2008). Dolayısıyla burulmasız uzaylarda

$$[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$

eşitliği geçerlidir.

Eğrilik tensörü için $V = v^i \partial_i \in \Im_0^1(M_n)$ vektör alanı için $\nabla_s v^i$ kovaryant türevinin tekrar kovaryant türevi alınırsa,

$$\nabla_r \nabla_s v^i = \partial_r \Gamma_{sk}^i v^k + \partial_r \Gamma_{sk}^i v^k + \Gamma_{sk}^i \partial_r v^k + \Gamma_{rm}^i \partial_s v^m + \Gamma_{rm}^i \Gamma_{sk}^m v^k - \Gamma_{rs}^m \nabla_m v^i$$

olur. Burada r ve s indislerine göre antisimetrikleşme işlemi yapılırsa,

$$\nabla_{[r} \nabla_{s]} v^i = {R_{rsk}}^i v^k - {S_{ij}}^m \nabla_m v^i$$

elde edilir. Bu son eşitliğe v^i vektör alanı için Ricci özdeşliği denir. Ayrıca bu özdeşlik içinde bulunan ${R_{rsk}}^i$ bileşenlerine ise ∇ konneksiyonunun eğrilik tensörünün bileşenleri denir. İnvartant halde eğrilik tensörü her $X, Y, Z \in \Im_0^1(M_n)$ için,

$$R(X,Y,Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

biçiminde ifade edilir. $X = \partial_k,\ Y = \partial_i, Z = \partial_j$ doğal çatısı için eğrilik tensörünün ifadesi,

$$R_{ijk}{}^{l} = \partial_i \Gamma_{jk}^{l} - \partial_j \Gamma_{ik}^{l} + \Gamma_{im}^{l}\Gamma_{jk}^{m} - \Gamma_{jm}^{l}\Gamma_{ik}^{m}$$

şeklinde olur. Yukarıdaki son eşitlikten kolayca görülür ki $R_{ijk}{}^{l} = -R_{jik}{}^{l}$ ya da buna denk olarak $R_{(ij)k}{}^{l} = 0$ yazılır. Yani eğrilik tensörü ilk iki alt indise göre antisimetriktir.

Lemma 2.8.1: M_n, C^{∞}-sınıfından bir manifold ve ∇ ise bu manifold üzerinde burulmasız afin konneksiyon olsun. R, burulmasız afin konneksiyonun eğrilik tensörü aşağıdaki eşitlikleri sağlar.

1) $R_{ijk}{}^{l} + R_{kij}{}^{l} + R_{jki}{}^{l} = 0,$

2) $\nabla_t R_{ijk}{}^{l} + \nabla_j R_{tik}{}^{l} + \nabla_i R_{jtk}{}^{l} = 0.$

Ayrıca yukarıdaki ifadelere sırasıyla 1. Bianchi ve 2. Bianchi (Bianchi-Padov) özdeşlikleri denir.

2.9. Reimann Manifoldu

Tanım 2.9.1: M_n, C^{∞}-sınıfından bir manifold ve $\mathfrak{I}_0^1(M_n)$ bu manifold üzerinde vektör alanları olmak üzere,

$$g: \mathfrak{I}_0^1(M_n) \times \mathfrak{I}_0^1(M_n) \longrightarrow C^{\infty}(M_n, \mathbb{R})$$

ile tanımlanan g bilineer formu (yada $(0,2)$ tipli tensör) simetrik ve pozitif tanımlı ise, yani her $X, Y \in \mathfrak{I}_0^1(M_n)$ için,

1) $g(X,Y) = g(Y,X)$,

2) $g(X,X) \geq 0$ ve her X için $g(X,X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$,

şartlarını sağlıyorsa g bilineer formuna Riemann metriği veya metrik tensör adı verilir. (M_n, g) ikilisi Riemann manifoldu olarak adlandırılır.

Yukarıda pozitif tanımlılık şartı yerine bu şarttan daha zayıf olan, “ Her $Y \in \mathfrak{I}_0^1(M_n)$ için $g(X,Y) = 0$ olması $X = 0$ olmasını gerektirir.” şeklinde tanımlanan g bilineer formunun regülerlik (yada non-dejenere) şartı konulursa, bu durumda (M_n, g) ikilisine yarı-Riemann (pseudo-Riemann) manifoldu denir (Kühnel 2005).

Regülerlik şartını koordinatlarla ifade etmek gerekirse $X = X^i\partial_i$ ve $Y = Y^j\partial_j$ için,

$$g(X,Y) = g\left(\partial_i, \partial_j\right)X^iY^j = g_{ij}X^iY^j = 0$$

olur. Son eşitlik her Y^j için sağlandığından $g_{ij}X^i = 0$ olur. Bu denklem sisteminin $X^i = 0$ çözümüne sahip olması için,

$$Det(g_{ij}) \neq 0$$

olması gerekir. Burada (g_{ij}), g_{ij} tensörüne karşılık gelen matristir.

Tanım 2.9.2: (M_n, g) Riemann manifoldu olmak üzere bu manifold üzerinde tanımlı ∇ afin konneksiyon için eğer $\nabla g = 0$ ise bu konneksiyona g ye göre metrik konneksiyon denir.

Teorem 2.9.1: (M_n, g) Riemann manifoldu olmak üzere bu manifold üzerinde tanımlı burulmasız bir tek metrik konneksiyon vardır.

Yukarıda Teorem 2.9.1 de bahsi geçen metrik konneksiyona Levi-Civita veya Riemann konneksiyonu denir.

Teorem 2.9.2: (M_n, g) Riemann manifoldu ve ∇ ise bu manifoldun Riemann konneksiyonu olsun. Her $X, Y, Z \in \mathfrak{I}_0^1(M_n)$ için aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) \\ &\quad - g(X,[Y,Z]) + g(Y,[Z,X]) + g(Z,[X,Y]). \qquad (2.3) \end{aligned}$$

Yukarıdaki (2.3) eşitliğine Kozsul formülü denir ve $X = \partial_i$, $Y = \partial_j$ ve $Z = \partial_k$ doğal koordinatları için,

$$\Gamma_{ij}^{h} = \frac{1}{2} g^{hk} \left(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij} \right) \tag{2.4}$$

elde edilir. Burada ki Γ_{ij}^{h} fonksiyonlarına, ∇ Levi-Civita konneksiyonunun katsayıları denir.

(M_n, g) Riemann manifoldunun ∇ Levi-Civita konneksiyonunun eğrilik tensörünü her $X, Y, Z \in \Im_0^1(M_n)$ için,

$$R(X, Y, Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

şeklinde tanımlanır ve bu tensöre Riemann eğrilik tensörü denir. ∇ Levi-Civita konneksiyonu burulmasız olduğundan Lemma 2.8.1 direkt sağlanır. Ayrıca ek olarak Riemann eğrilik tensörünün kontravaryant tensörü indirilip, (0,4) tipli kovaryant tensör elde edilir. Yani,

$$R_{ijk}{}^{m} g_{ml} = R_{ijkl}$$

olur.

Yardımcı Teorem 2.9.1: (M_n, g) Riemann manifoldu ve ∇ ise bu manifoldun Riemann konneksiyonu olsun. Bu manifoldun Riemann eğriliği R, aşağıdaki şartları sağlar:

1) $R_{ijkl} = -R_{ijlk}$,

2) $R_{ijkl} = R_{klij}$.

Yukarıdaki Lemma 2.9.1 de $R_{ijkl} = -R_{ijlk}$ eşitliği,

$$R_{ijk}{}^{m} g_{ml} + R_{ijl}{}^{m} g_{mk} = 0$$

biçiminde yazılabilir. Bu son eşitliğin g^{lk} ile kontraksiyonundan,

$$R_{ijk}{}^{m} \delta_m^k + R_{ijl}{}^{m} \delta_m^l = 0$$

ve buradan,

$$R_{ijk}{}^{k} = 0$$

eşitliği elde edilir.

Tanım 2.9.3: Eğrilik tensörü $R_{ijk}{}^{l}$ vasıtası ile tanımlanan,

$$C_1^1\left(R_{ijk}{}^{l}\right) = R_{ljk}{}^{l} = R_{jk}$$

tensörüne Ricci eğrilik tensörü denir. Burada C_1^1, kontraksiyon işlemi olup (1,3) tipli tensörü (0,2) tipli tensöre taşır. Ayrıca Ricci tensörü simetriktir. Yani, $R_{jk} = R_{kj}$ dir.

Tanım 2.9.4: Ricci tensöründen tam kontraksiyon ile elde edilen tensöre skaler eğrilik denir. Öyle ki skaler eğrilik τ,

$$\tau = g^{jk} R_{jk}$$

biçimindedir.

2.10. Afinor

Tanım 2.10.1: M_n, C^∞-sınıfından bir manifold olmak üzere, $\Im_1^1(M_n)$ uzayının elemanlarına, yani (1,1) tipli tensör alanlarına afinor denir.

Ayrıca afinorlara M_n manifoldunun endomorfizmleri de denir. Dolayısıyla keyfi $F \in \Im_1^1(M_n)$ için,

$$F\colon \Im_0^1(M_n) \longrightarrow \Im_0^1(M_n)$$

yazılır. O halde tanıma göre her $X \in \Im_0^1(M_n)$ için

$$F\colon \Im_0^1(M_n) \longrightarrow \Im_0^1(M_n)$$

$$X \longrightarrow F(X) \in \Im_0^1(M_n)$$

$$F(X) \longrightarrow F^2(X) \in \Im_0^1(M_n)$$

olur. I birim afinor olmak üzere,

1) $F^2(X) = I(X) \Longrightarrow F$, hemen hemen çarpım yapı,

2) $F^2(X) = -I(X) \Longrightarrow F$, hemen hemen kompleks yapı,

3) $F^2(X) = 0(X) \Longrightarrow F$, hemen hemen tanjant (dual) yapı

olur (Yano and Kon 1984).

2.11. Dış Cebir ve Dış Türev

$\wedge^r (M_n)$ ile M_n manifoldu üzerindeki bütün anti-simetrik kovaryant tensörlerin (formların) kümesi gösterilsin.

$$\wedge (M_n) = \bigoplus_{r=0} \wedge^r (M_n) = \mathbb{R} \oplus \wedge^1 (M_n) \oplus \wedge^1 (M_n) \oplus \ldots$$

biçiminde tanımlanan $\wedge (M_n)$, $\mathbb{R}$ üzerinde birleşimli cebir oluşturur. Bu cebire dış cebir veya Grassman cebiri denir (Şahin 2013).

Tanım 2.11.1: M_n bir manifold ve $\wedge (M_n)$ dış cebir olsun. Bu durumda,

$$d{:}\wedge (M_n) \longrightarrow \wedge (M_n)$$

ile tanımlı ve

1) $d{:}\wedge^r \longrightarrow \wedge^{r+1}$, yani d operatörü r mertebeli formu $(r+1)$ mertebeli forma taşır,

2) $d^2 = 0$,

3) her $f \in C^\infty(M_n, \mathbb{R})$ için df, f fonksiyonunun diferensiyelidir,

4) $w \in \wedge^r (M_n)$ ve $\overline{w}$ keyfi form için,

$$d(w \wedge \overline{w}) = dw \wedge \overline{w} + (-1)^r w \wedge d\overline{w},$$

şartlarını sağlayan d dönüşümüne dış türev denir.

Eğer w bir r-form ise $X_0, X_1, \dots, X_r \in \Im_0^1(M_n)$ olmak üzere,

$$dw(X_0, X_1, \dots, X_r) = \frac{1}{1+r}\{\sum_{i=0}^{r}(-1)^i X_i\left(w(X_0, \dots \hat{X}_i, \dots, X_r)\right)$$

$$+ \sum_{0\leq i<j\leq r}(-1)^{i+j} w([X_i, X_j], X_0, \dots \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_r)\}$$

olur. Burada $\widehat{\ }$ sembolü çıkarılması gereken bileşeni göstermektedir. Yukardaki eşitlik kullanılarak w, 1-formu ve p, 2-formu için sırasıyla,

$$2dw(X,Y) = Xw(Y) - Yw(X) - w([X,Y])$$

ve

$$3dp(X,Y,Z) = Xp(Y,Z) + Yp(Z,X) + Zp(X,Y)$$

$$-p([X,Y],Z) - p([Y,Z],X) - p([Z,X],Y)$$

elde edilir (Şahin 2013).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Tanım 3.1: $F \in \Im_1^1(M_n)$, M_n üzerinde bir afinor alanı olsun, keyfi $X_1, X_2, \dots, X_q \in \Im_0^1(M_n)$ ve $\overset{1}{w}, \overset{2}{w}, \dots, \overset{p}{w} \in \Im_1^0(M_n)$ için aşağıdaki şartları sağlayan (p,q) tipli t tensör alanına F ye göre pür tensör alanı denir.

$$\begin{aligned}
t(FX_1, X_2, \dots, X_q; \overset{1}{w}, \overset{2}{w}, \dots, \overset{p}{w}) &= t(X_1, FX_2, \dots, X_q; \overset{1}{w}, \overset{2}{w}, \dots, \overset{p}{w}) \\
&\vdots \\
&= t(X_1, X_2, \dots, FX_q; \overset{1}{w}, \overset{2}{w}, \dots, \overset{p}{w}) \\
&= t(X_1, X_2, \dots, X_q; \ {}'F\overset{1}{w}, \overset{2}{w}, \dots, \overset{p}{w}) \\
&= t(X_1, X_2, \dots, X_q; \overset{1}{w}, \ {}'F\overset{2}{w}, \dots, \overset{p}{w}) \\
&\vdots \\
&= t(X_1, X_2, \dots, X_q; \overset{1}{w}, \overset{2}{w}, \dots, \ {}'F\overset{p}{w})
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Burada ${}'F$, $X \in \Im_0^1(M_n)$ ve $w \in \Im_1^0(M_n)$ için,

$$({}'Fw)(X) = w(FX) = (w \circ F)(X)$$

ile tanımlanan F nin eşlenik operatörüdür (Salimov 2013).

$x^1, x^2, \dots, x^n$; M_n de lokal koordinat sistemi olmak üzere, (3.1) de $X_1 = \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, X_s = \frac{\partial}{\partial x^{i_q}}$ ve $\overset{1}{w} = dx^{j_1}, \dots, \overset{r}{w} = dx^{j_p}$ alındığında, pür tensör alanı $F_j^{\ i}$ ve $t_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_p}$ bileşenlerinin terimleriyle aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{aligned}
t_{m i_2 \dots i_q}^{j_1 \dots j_p} F_{i_1}^m &= t_{i_1 m \dots i_q}^{j_1 \dots j_p} F_{i_2}^m = \dots = t_{i_1 i_2 \dots m}^{j_1 \dots j_p} F_{i_q}^m \\
&= t_{i_1 \dots i_q}^{m j_2 \dots j_p} F_m^{j_1} = t_{i_1 \dots i_q}^{j_1 m \dots j_p} F_m^{j_2} = \dots = t_{i_1 \dots i_q}^{j_1 j_2 \dots m} F_m^{j_p}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Ayrıca vektör, kovektör ve skaler alanlar pür tensör alanları olarak kabul edilir.

(3.1) den, eğer K ve L, (p,q) tipli pür tensör alanları ise, $f \in \Im_0^0(M_n)$ olmak üzere $K+L$ ve fK de pür tensör alanı olur. F afinor alanına göre M_n üzerindeki tüm (p,q) tipli pür tensör alanlarının modülü $\overset{*}{\Im}{}_q^p(M_n)$ ile gösterilir. λ pozitif tam sayı olmak üzere, eğer K ile L sırasıyla (p_1,q_1) ve (p_2,q_2) tipli pür tensör alanları ise, K ve L nin tensör çarpımı vasıtasıyla,

$$K\overset{C}{\otimes}L = (K_{j_1\ldots j_{q_1}}^{i_1\ldots m_\lambda\ldots i_{p_1}} L_{s_1\ldots m_\lambda\ldots s_{q_2}}^{r_1\ldots r_{p_2}})$$

elde edilir ve bu da pür tensör alanıdır (Salimov 2013). Burada C, kontraksiyon operatörüdür.

3.1. Tachibana Operatörü

Tanım 3.1.1: $\Im(M_n) = \sum_{p,q=0}^{\infty} \Im_q^p(M_n)$, $\mathbb{R}$ üzerinde bir tensör cebiri ve $F \in \Im_1^1(M_n)$ olsun. $\phi_F : \overset{*}{\Im}{}_q^p(M_n) \to \Im_q^p(M_n)$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu ϕ_F dönüşümüne Tachibana operatörü veya ϕ_F-operatörü denir.

1) ϕ_F sabit katsayılara göre lineerdir,

2) Her (r,s) için, $\phi_F : \overset{*}{\Im}{}_q^p(M_n) \to \Im_{q+1}^p(M_n)$,

3) Her $K, L \in \overset{*}{\Im}(M_n)$ için, $\phi_F(K\overset{C}{\otimes}L) = (\phi_F K)\overset{C}{\otimes}L + K\overset{C}{\otimes}(\phi_F K)$,

4) Her $X, Y \in \Im_0^1(M_n)$ için, $\phi_{FX}Y = -(L_Y F)X$, (burada L_Y, Y ye göre Lie türevidir.)

5) Her $\omega \in \Im_1^0(M_n)$ ve $X, Y \in \Im_0^1(M_n)$ için,

$$\phi_{\varphi X}(\iota_Y \omega) = (d(\iota_Y \omega))(\varphi X) - (d(\iota_Y(\omega \circ \varphi)))(X)$$

$$= (\varphi X)(\iota_Y \omega) - X(\iota_{\varphi Y} \omega)$$

dir. Burada, $\iota_Y \omega = \omega(Y) = \omega \overset{C}{\otimes} Y$ dir (Yano and Ako 1968; Salimov 2010).

3.1.1. (p,q) Tipli Tensör Alanına Uygulanan Tachibana Operatörü

$X, Y_1, \dots, Y_q \in \Im_0^1(M_n)$ ve $\overset{1}{w}, \dots, \overset{p}{w} \in \Im_1^0(M_n)$ olmak üzere $t \in \overset{*}{\Im}_q^p(M_n)$ tensör alanına uygulanan Tachibana operatörü,

$$
\begin{aligned}
\left(\phi_\varphi t\right)\left(X, Y_1, \dots, Y_q, \overset{1}{w}, \dots, \overset{p}{w}\right) = {} & (\varphi X) t\left(X, Y_1, \dots, Y_q, \overset{1}{w}, \dots, \overset{p}{w}\right) \\
& - X t\left(\varphi Y_1, \dots, Y_q, \overset{1}{w}, \dots, \overset{p}{w}\right) \\
& + \sum_{\lambda=1}^{q} t\left(Y_1, \dots, \left(L_{Y_\lambda}\varphi\right) X, \dots, Y_q, \overset{1}{w}, \dots, \overset{p}{w}\right) \\
& - \sum_{\mu=1}^{p} t\left(Y_1, \dots, Y_q, \overset{1}{w}, \dots, L_{\varphi X}\overset{\mu}{w} - L_X\left(\overset{\mu}{w} \circ \varphi\right), \dots, \overset{p}{w}\right)
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

şeklindedir. Son ifade koordinatlarla $X = \partial_k$, $Y_\lambda = \partial_{j_\lambda}, \lambda = 1, \dots, q$ ve $\overset{\mu}{w} = dx^{i_\mu}$, $\mu = 1, \dots, p$ için,

$$
\begin{aligned}
\left(\phi_\varphi t\right)_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = {} & \varphi_k^m \partial_m t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} - \partial_k (t \circ \varphi)_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \\
& + \sum_{\lambda=1}^{q} \left(\partial_{j_\lambda} \varphi_k^m\right) t_{j_1 \dots m \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} - \sum_{\mu=1}^{p} \left(\partial_k \varphi_m^{i_\mu} - \partial_m \varphi_k^{i_\mu}\right) t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots m \dots i_p}
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

biçiminde olur. Burada,

$$
(t \circ \varphi)_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = t_{m \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \varphi_{j_1}^m = \cdots = t_{j_1 \dots m}^{i_1 \dots i_p} \varphi_{j_q}^m = t_{j_1 \dots j_q}^{m \dots i_p} \varphi_m^{i_1} = \cdots = t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots m} \varphi_m^{i_p}
$$

şeklindedir (Tachibana 1960; Salimov 2013).

3.2. Altın Riemann Manifoldlar

Tanım 3.2.1: Her $X, Y \in \mathfrak{J}_0^1(M_n)$ için (M_n, g) Riemann manifoldunda,

$$g(FX, Y) = g(X, FY) \tag{3.5}$$

olacak şekilde F altın yapısı ile uyumlu g Riemann metriği varsa, bu durumda (M_n, g, F) ye altın Riemann manifoldu denir (Hretcanu ve Crasmareanu 2009). Ayrıca (3.5) eşitliğinde X yerine FX yazılırsa,

$$g(FX, FY) = g(F^2X, Y) = g((F + I)X, Y) = g(FX, Y) + g(X, Y)$$

olur. Böyle Riemann metriklerden pür metrikler olarak da bahsedilebilir.

3.3. Altın Riemann Manifoldların İntegrallenebilirliği

Teorem 3.3.1: (M_n, g, F) altın Riemann manifoldu olmak üzere, $\phi_F g = 0$ olması F nin integrallenebilir olduğunu gösterir (Gezer *et al*. 2013).

Sonuç 3.3.1: (M_n, g, F) altın Riemann manifoldu için, $\phi_F g = 0$ şartı ∇, g nin Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere $\nabla F = 0$ şartına denktir (Gezer *et al*. 2013).

Tanım 3.3.1: (M_n, g) Riemann manifoldu olmak üzere, her $X, Y \in \mathfrak{J}_0^1(M_n)$ için,

$$g(\varphi X, Y) = g(X, \varphi Y)$$

ve

$$\varphi^2 = I$$

olacak şekilde (1,1) tipli φ çarpım yapısı varsa, bu (M_n, g, φ) üçlüsüne hemen hemen çarpım Riemann manifoldu denir.

Tanım 3.3.2: $t \in \mathfrak{I}_q^p(M_n)$ olmak üzere eğer t pür tensörü $\phi_\varphi t = 0$ eşitliğini sağlarsa t ye ϕ-tensör denir. Eğer özel olarak φ çarpım yapı ise yani $\varphi^2 = I$ ise, bu durumda ϕ-tensörüne ayrıştırılabilir tensör denir (Tachibana 1960).

Teorem 3.3.2: Eğer F, M_n üzerinde bir altın yapı ise bu durumda,

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}(2F - I) \tag{3.6}$$

M_n üzerinde hemen hemen çarpım yapıdır. Tersine M_n üzerinde her hemen hemen çarpım F yapısı aşağıdaki gibi verilen M_n üzerindeki iki altın yapıya indirgenebilir:

$$F_\pm = \frac{1}{2}\left(I \pm \sqrt{5}\varphi\right)$$

(Hretcanu and Crasmareanu 2009).

Eğer bir g Riemann metriği hemen hemen φ çarpım yapısına göre pürse bu durumda g Riemann metriği F altın yapıya göre pürdür. Gerçekten,

$$g(\varphi X, Y) = g(X, \varphi Y)$$

olup ve (3.6) eşitliğinden,

$$g(\frac{1}{\sqrt{5}}(2F - I)X, Y) = g(X, \frac{1}{\sqrt{5}}(2F - I)Y)$$

$$\frac{2}{\sqrt{5}}g(FX, Y) - \frac{1}{\sqrt{5}}g(X, Y) = \frac{2}{\sqrt{5}}g(X, FY) - \frac{1}{\sqrt{5}}g(X, Y)$$

$$g(FX, Y) = g(X, FY)$$

olur.

Ayrıca basit bir hesaplama ile,

$$\phi_\varphi g = \frac{2}{\sqrt{5}}\phi_F g$$

elde edilir. Gerçekten, (3.3) ve (3.6) denkleminden,

$$(\phi_\varphi g)(X,Y,Z) = (\varphi X)(g(Y,Z) - X\big(g(\varphi Y,Z)\big) + g\big((L_Y\varphi)X,Z\big) + g(Y,(L_Z\varphi)X)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(2F-I)X(g(Y,Z) - X(g(\frac{1}{\sqrt{5}}(2F-I)Y,Z))$$

$$+g((L_Y(\frac{2}{\sqrt{5}}(2F-I)X,Z) + g(Y,(L_Z(\frac{1}{\sqrt{5}}(2F-I)X)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}}[(FX)(g(Y,Z) - X\big(g(FY,Z)\big) + g\big((L_YF)X,Z\big)$$

$$+g(Y,(L_ZF)X)]$$

olup $\phi_\varphi g = \frac{2}{\sqrt{5}}\phi_F g$ eşitliği elde edilir. Bu eşitlik keyfi tipli pür tensörler için genelleştirilebilir. Yani $H \in \overset{*}{\mathfrak{I}}{}^p_q(M_n)$ için (3.3) ve (3.6) eşitliklerinden,

$$\phi_\varphi H = \frac{2}{\sqrt{5}}\phi_F H \tag{3.7}$$

olur.

(M_n, g, φ), hemen hemen çarpım Riemann manifoldu olmak üzere, eğer $\phi_\varphi g = 0$ ise bu durumda hemen hemen F çarpım yapısının integrallenebilir olduğu gösterilmiştir (Salimov *et al.* 2007). Buradan hareketle Teorem 3.3.1 den ve (3.6) eşitliğinden aşağıdaki önerme yazılır:

Önerme 3.3.1: (M_n, g, F) altın Riemann manifold ve φ, F altın yapı ile aralarında (3.6) şeklinde bir bağıntı olan hemen hemen çarpım yapı olsun. Bu durumda $\phi_\varphi g = 0$ ise F altın yapısı integrallenebilirdir (Gezer *et al.* 2013).

Tanım 3.3.3: İntegtallenebilir F altın yapısıyla verilen (M_n, g, F) altın Riemann manifolduna bölgesel altın Riemann manifoldu denir.

Tanım 3.3.4: (M_n, g, F) bölgesel altın Riemann manifoldunun Riemann metriği g, x^c nin fonksiyonları olan g_{ab}, $x^{\bar{c}}$ nin fonksiyonları olan $g_{\bar{a}\bar{b}}$ ve $g_{a\bar{b}} = 0$ olmak üzere $a, b, c = 1, \ldots, m$ ve $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} = m + 1, \ldots, n$ için,

$$ds^2 = g_{ab}(x^c)dx^a dx^b + g_{\bar{a}\bar{b}}(x^{\bar{c}})dx^{\bar{a}}dx^{\bar{b}}$$

şeklinde yazılabiliyorsa bu (M_n, g, F) ye bölgesel ayrıştırılabilir altın Riemann manifold denir.

Yano (1965), φ çarpım yapısına sahip (M_n, g, φ) bölgesel Riemann manifoldunun bölgesel ayrıştırılabilir Riemann manifoldu olması için gerek ve yeter şartın φ nin, g nin Levi-Civita konneksiyonuna göre paralel, yani $\nabla\varphi = 0$ olması gerektiğini göstermiştir. Salimov *et al.* (2007) ise $\phi_\varphi g = 0$ olmasının $\nabla\varphi = 0$ olmasına denk olduğunu göstermiştir. Buradan:

Önerme 3.3.2: (M_n, g, F) altın Riemann manifoldu olmak üzere bu manifoldunun bölgesel ayrıştırılabilir altın Riemann manifold olması için gerek ve yeter şart, $\phi_\varphi g = 0$ olmasıdır. Burada φ, F altın yapı ile aralarında (3.6) şeklinde bir bağıntı olan hemen hemen çarpım yapıdır (Gezer *et al.* 2013).

3.4. Metalik Riemann Manifoldlar

M_n manifoldu üzerinde alınan (1,1) tipli J tensör alanı, p ve q pozitif tam sayılar olmak üzere $J^2 = pJ + qI$ eşitliğini sağlıyorsa bu J yapısına metalik yapı ve (M_n, J) ikilisine de metalik manifold denir (Hretcanu and Crasmareanu 2013).

(M_n, g) Riemann manifoldu olmak üzere, her $X, Y \in \mathfrak{I}_0^1(M_n)$ ve $(1,1)$ tipli J metalik yapısı için,

$$g(JX, Y) = g(X, JY)$$

ya da son eşitliğe denk olarak,

$$g(JX, JY) = g(J^2X, Y) = pg(JX, Y) + qg(X, Y)$$

eşitliğini sağlayan (M_n, g, J) üçlüsüne hemen hemen metalik Riemann manifoldu denir.

Önerme 3.4.1:(Hretcanu and Crasmareanu 2013) M_n üzerindeki bir metalik yapı,

$$\varphi_{\pm} = \pm(\frac{2}{2\sigma_{p,q} - p}J - \frac{p}{2\sigma_{p,q} - p}I) \tag{3.8}$$

şeklinde iki hemen hemen çarpım yapıya indirgenebilir. Tersine M_n üzerinde her hemen hemen çarpım φ yapısı aşağıdaki gibi verilen M_n üzerindeki iki metalik yapıya indirgenebilir:

$$J_{\pm} = \frac{p}{2}I \pm \left(\frac{2\sigma_{p,q} - p}{2}\right)\varphi$$

Yukarıdaki önerme yardımıyla (M_n, g, J) üçlüsünün bölgesel ayrıştırılabilirliğinden bahsedilebilir. Öyle ki, (M_n, g, φ) bölgesel ayrıştırılabilir Riemann manifoldunda ∇, g nin Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere $\nabla\varphi = 0$ olduğu aşikardır. Buradan (3.8) eşitliği yardımıyla kolayca görülür ki $\nabla J = 0$ dır. O halde (M_n, g, J) üçlüsü bölgesel ayrıştırılabilir metalik Riemann manifoldunu oluşturur.

Bölüm 4 te (M_n, g, J) üçlüsünün başka bir integrallenme şartı Tachibana operatörü yardımıyla verilecektir.

3.5. Yarı-Simetrik Metrik F-Konneksiyonlu Manifoldlar

Tanım 3.5.1: M_n, C^∞-sınıfından bir manifold ve $\hat{\nabla}$, bu manifold üzerinde herhangi bir afin konneksiyon olsun. Eğer, her $X, Y \in \mathfrak{I}_0^1(M_n)$ ve $p \in \mathfrak{I}_1^0(M_n)$ 1-formu için, $\hat{\nabla}$ konneksiyonunun burulma tensörü,

$$\hat{S}(X,Y) = p(Y)X - P(X)Y \tag{3.9}$$

biçiminde ise $\hat{\nabla}$ konneksiyonuna yarı-simetrik konneksiyon denir (Yano 1970).

Koordinatlarla (3.9) ifadesi,

$$\hat{S}_{ij}^{\ \ k} = p_j \delta_i^{\ k} - p_i \delta_j^{\ k}$$

şeklindedir. Kolayca görülür ki $\hat{S}_{ij}^{\ \ k} = -\hat{S}_{ji}^{\ \ k}$ dir. Yani yarı-simetrik burulma tensörü alt indislere göre antisimetriktir.

Tanım 3.5.2: M_n, C^∞-sınıfından bir manifold, ve g ise bu manifold üzerinde bir metrik olsun. Bu durumda $\hat{\nabla}$ yarı-simetrik konneksiyon için eğer $\hat{\nabla} g = 0$, ya da bu denk olarak,

$$Xg(Y,Z) = g\left(\hat{\nabla}_X Y, Z\right) + g\left(Y, \hat{\nabla}_X Z\right) \tag{3.10}$$

ise $\hat{\nabla}$ ya yarı-simetrik metrik konneksiyon denir (Yano 1970).

Tanım 3.5.3: $F \in \mathfrak{I}_1^1(M_n)$ afinor olmak üzere $\hat{\nabla} F = 0$ şartını sağlayan $\hat{\nabla}$ yarı-simetrik metrik konneksiyona yarı-simetrik metrik F-konneksiyon denir (Yano 1970).

3.6. $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ Tipli Tensör Demet

Tanım 3.6.1: M_n, C^∞-sınıfından bir manifold ve $\mathfrak{I}^p_{q_{(Q)}}(M_n)$, bir Q noktasındaki (p,q) tipli tensör uzayı olsun. Bu durumda,

$$T_q^p(M_n) = \bigcup_{Q \in M_n} \mathfrak{I}_{q\,(Q)}^{p}(M_n)$$

ile ifade edilen $T_q^p(M_n)$ kümesine M_n manifoldunun (p, q) tipli tensör demeti denir.

Burada M_n ye demetin baz manifoldu ve $\mathfrak{I}_{q\,(Q)}^{p}(M_n)$ tensör uzaylarına ise lifleri (fibre) denir. M_n manifoldu üzerindeki $\pi: T_q^p(M_n) \longrightarrow M_n$ doğal izdüşümü için, M_n manifoldunun bir Q noktasının komşuluğundaki yerel koordinatları $x^j, j = 1, \dots, n$ şeklinde verilir. $Q \in M_n$ noktasına karşılık gelen $T_q^p(M_n)$ demetinin elemanı olan $\tilde{Q} \in \pi^{-1}(U)$ noktasının yerel ifadesi $\bar{j} = n + 1, \dots, n + n^{p+q}$ için,

$$\left(x^j, t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}\right) = \left(x^j, x^{\bar{j}}\right), x^{\bar{j}} = t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$$

şeklindedir.

M_n manifoldu üzerindeki koordinat dönüşümü $x^{j'} = x^{j'}\left(x^j\right)$ şeklinde olduğu için $T_q^p(M_n)$ tensör demetine karşılık gelen koordinat dönüşümü $A_{i_1}^{i'_1} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}$ ve $A_{j'_1}^{j_1} = \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}$ olmak üzere,

$$\begin{cases} x^{\bar{j}} = x^{j'}\left(x^j\right), \\ x^{\bar{j}'} = t_{j'_1 \dots j'_q}^{i'_1 \dots i'_p} = A_{i_1}^{i'_1} \dots A_{i_p}^{i'_p} A_{j'_1}^{j_1} \dots A_{j'_q}^{j_q} t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = A_{(i)}^{(i')} A_{(j')}^{(j)} x^{\bar{j}} \end{cases}$$

biçiminde olur.

$T_q^p(M_n)$ nin $\left(x^j, x^{\bar{j}}\right)$ koordinatlarına göre ${}^V A$ vektör alanının bileşenleri,

$${}^V A = \begin{pmatrix} {}^V A^j \\ {}^V A^{\bar{j}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ A_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \end{pmatrix}$$

biçimindedir. ${}^H X$ vektör alanının bileşenleri,

$$ {}^{H}X = \begin{pmatrix} X^{j} \\ X^{a}\left[-\sum_{\lambda=1}^{p} \Gamma_{am}^{i_\lambda}\, t_{j_1\ldots j_q}^{i_1\ldots m\ldots i_p} + \sum_{\lambda=1}^{q} \Gamma_{a j_\mu}^{m}\, t_{j_1\ldots m\ldots j_q}^{i_1\ldots i_p}\right] \end{pmatrix} $$

biçimdedir.

Tanım 3.6.2: $F \in \Im_1^1(M_n)$ tensör alanının yerel koordinatları $F = F_j{}^i \partial_i \otimes dx^j$ olmak üzere $T_q^p(M_n)$ tensör demetinin bir $\pi^{-1}(U)$ komşuluğunda $\left(x^j, x^{\bar{j}}\right)$ koordinatlarına göre,

$$ \gamma F = \left(\sum_{\lambda=1}^{p} t_{j_1\ldots j_q}^{i_1\ldots m\ldots i_p} F_m{}^{i_\lambda}\right)\partial_{\bar{j}}, (p \geq 1, q \geq 0), $$

$$ \tilde{\gamma} F = \left(\sum_{\lambda=1}^{p} t_{j_1\ldots m\ldots j_q}^{i_1\ldots i_p} F_{j_\lambda}{}^{m}\right)\partial_{\bar{j}}, (p \geq 0, q \geq 1) $$

biçiminde tanımlanan operatöre γ operatörü denir.

γF dikey vektör liftinin yerel koordinatlarla ifadesi ise,

$$ \gamma F = \begin{pmatrix} 0 \\ \sum_{\lambda=1}^{p} t_{j_1\ldots j_q}^{i_1\ldots m\ldots i_p} F_m{}^{i_\lambda} \end{pmatrix}, $$

$$ \bar{\gamma} F = \begin{pmatrix} 0 \\ \sum_{\lambda=1}^{p} t_{j_1\ldots m\ldots j_q}^{i_1\ldots i_p} F_{j_\lambda}{}^{m} \end{pmatrix} $$

şeklindedir.

4. Bölüm sonunda $p = 1, q = 1$ olmak üzere $T_1^1(M_n)$ tensör demette, metalik Riemann yapılara örnek verildi. Bundan dolayı ${}^{V}A$, ${}^{H}X$, γF ve $\bar{\gamma} F$ ifadelerinin $T_1^1(M_n)$ deki değerlerinin verilmesinde fayda var. Bu değerler,

$$ {}^{V}A = \begin{pmatrix} {}^{V}A^{j} \\ {}^{V}A^{\bar{j}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ A_j^i \end{pmatrix}, $$

$$ {}^{H}X = \begin{pmatrix} X^{j} \\ X^{s}\left(\Gamma_{sj}^{m} t_{m}^{\,i} - \Gamma_{sm}^{i} t_{j}^{m}\right) \end{pmatrix}, $$

$$ \gamma F = \begin{pmatrix} 0 \\ t_j^{m} F_{m}^{\,i} \end{pmatrix}, \qquad \bar{\gamma} A = \begin{pmatrix} 0 \\ t_{m}^{\,i} F_j^{m} \end{pmatrix} $$

biçimindedir (Salimov and Gezer 2011).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

4.1. Altın Yarı-Simetrik Metrik F-Konneksiyon

(M_n, g, F) bölgesel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldu olsun. Bu manifold üzerinde F altın yapı olmak üzere burulması yarı-simetrik yani,

$$S_{ij}^{\ \ k} = p_j\delta_i^{\ k} - p_i\delta_j^{\ k} + p_tF_j^{\ t}F_i^{\ k} - p_tF_i^{\ t}F_j^{\ k} \tag{4.1}$$

şeklinde olan herhangi bir $\overline{\nabla}$ afin konneksiyon alınsın. Γ_{ij}^k, Levi-Civita konneksiyonunun katsayıları olmak üzere,

$$\overline{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + T_{ij}^{\ \ k}$$

olacak şekilde $\overline{\nabla}_k g_{ij} = 0$ olan yani metrik konneksiyon şartını sağlayan $\overline{\nabla}$ afin konneksiyon için, Hayden (1932) in metodu yardımı ile,

$$S_{ij}^{\ \ k} = \overline{\Gamma}_{ij}^k - \overline{\Gamma}_{ji}^k \ \Rightarrow \ S_{ij}^{\ \ k} = T_{ij}^{\ \ k} - T_{ji}^{\ \ k}$$

olup ,

$$\overline{\nabla}_k g_{ij} = \nabla_k g_{ij} - T_{ki}^{\ \ t} g_{tj} - T_{kj}^{\ \ t} g_{ti} = 0$$

ve

$$T_{ki}^{\ \ t} g_{tj} + T_{kj}^{\ \ t} g_{ti} = 0 \ \Rightarrow \ T_{kij} + T_{kji} = 0$$

olur. Ayrıca,

$$S_{ij}^{\ \ t} g_{tk} = S_{ijk}$$

olup,

$$S_{ijk} = T_{ijk} - T_{jik}$$

$$S_{kij} = T_{kij} - T_{ikj}$$

$$S_{kji} = T_{kji} - T_{jki}$$

elde edilir. Son üç denklem taraf tarafa toplanırsa,

$$S_{ijk} + S_{kij} + S_{kji} = 2T_{ijk}$$

ve

$$S_{ij}^{k} + S^{k}{}_{ij} + S^{k}{}_{ji} = 2T_{ij}^{k}$$

olur ve buradan,

$$T_{ij}{}^{k} = p_j \delta_i{}^{k} - p^k g_{ij} + p_t F_j{}^t F_i{}^k - p_t F^{kt} F_{ij}$$

yazılır. O halde altın yarı-simetrik metrik konneksiyon,

$$\bar{\Gamma}_{ij}^{k} = \Gamma_{ij}^{k} + p_j \delta_i{}^{k} - p^k g_{ij} + p_t F_j{}^t F_i{}^k - p_t F^{kt} F_{ij} \qquad (4.2)$$

şeklinde olur. Elde edilen yeni konneksiyon F-konneksiyon olma özelliğini sağlar. Gerçekten,

$$\bar{\nabla}_k F_i{}^j = \nabla_k F_i{}^j + g_{ki}\left(p^t F_t{}^j - p_t F^{jt}\right)$$
$$= 0$$

olup (4.2) ile verilen konneksiyon altın yarı-simetrik metrik F-konneksiyondur.

4.1.1. Altın Yarı-Simetrik Metrik *F*-Konneksiyonun Burulma Özellikleri

Teorem 4.1.1.1: (M_n, g, F) bölgesel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldu olsun. Bu manifold üzerinde (4.2) ile verilen altın yarı-simetrik metrik F-konneksiyonun burulma tensörü $S_{ij}{}^{k}$, F altın yapısına göre pürdür.

İspat: (4.1) denkleminden ve $F_i{}^t F_t{}^j = F_i{}^j + \delta_i^j$ özelliğinden,

$$S_{ij}{}^{m} F_m^k = p_j F_i{}^k - p_i F_j{}^k + p_m F_j{}^m F_i{}^k + p_m F_j{}^m \delta_i^k - p_m F_i{}^m F_j{}^k - p_m F_i{}^m \delta_j^k$$

$$S_{mj}^{\ k}F_i^{\ m} = p_jF_i^{\ k} - p_mF_i^{\ m}\delta_j^{\ k} + p_mF_j^{\ m}F_i^{\ k} + p_mF_j^{\ m}\delta_i^{\ k} - p_mF_i^{\ m}F_j^{\ k} - p_iF_j^{\ k}$$

$$S_{im}^{\ \ k}F_j^{\ m} = p_mF_j^{\ m}\delta_i^{\ k} - p_iF_j^{\ k} + p_mF_j^{\ m}F_i^{\ k} + p_jF_i^{\ k} - p_mF_i^{\ m}F_j^{\ k} - p_mF_i^{\ m}\delta_j^{\ k}$$

olup,

$$S_{ij}^{\ \ m}F_m^k = S_{mj}^{\ k}F_i^{\ m} = S_{im}^{\ \ k}F_j^{\ m}$$

yazılır. Yani burulma tensörü S, F altın yapısına göre pürdür.

Ayrıca bir F-konneksiyonun pür olması için gerek ve yeter şart konneksiyonun burulmasının da pür olmasıdır (Salimov 2010). Dolayısıyla altın yarı-simetrik metrik F-konneksiyon için,

$$\bar{\Gamma}_{ij}^m F_m^k = \bar{\Gamma}_{mj}^k F_i^{\ m} = \bar{\Gamma}_{im}^k F_j^{\ m}$$

eşitliği yazılır.

Teorem 4.1.1.2: (M_n, g, F) bölgesel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldu olsun. (4.1) denklemi ile verilen yarı-simetrik burulmaya sahip $\bar{\nabla}$ altın yarı-simetrik metrik F-konneksiyonu için eğer $(\phi_F p)_{kj} = 0$ ise yani p kovektörü F altın yapısına göre ϕ-tensör ise bu durumda,

$$(\phi_F S)_{kij}^{\ \ \ l} = 0$$

olur. Yani S burulma tensörü F altın yapısına göre ϕ-tensördür.

İspat: Teorem 4.1.1.1 den,

$$S_{ij}^{\ \ m}F_m^k = S_{mj}^{\ k}F_i^{\ m} = S_{im}^{\ \ k}F_j^{\ m}$$

olup Tachibana operatörü uygulanırsa,

$$(\phi_F S)_{kij}^{\ \ \ l} = F_k^{\ m}\left(\partial_m S_{ij}^{\ l}\right) - \partial_k (S_{mj}^{\ l}F_i^{\ m})$$

$$= F_k^{\ m}\left(\nabla_m S_{ij}^{\ \ l} + \Gamma_{mi}^{s} S_{sj}^{\ \ l} + \Gamma_{mj}^{s} S_{is}^{\ \ l} - \Gamma_{ms}^{l} S_{ij}^{\ \ m}\right)$$

$$-F_i^{\ m}\left(\nabla_k S_{mj}^{\ \ l} + \Gamma_{km}^{s} S_{sj}^{\ \ l} + \Gamma_{kj}^{s} S_{ms}^{\ \ l} - \Gamma_{ks}^{l} S_{mj}^{\ \ s}\right)$$

olur. Burada S nin ve ∇ Levi-Civita konneksiyon katsayılarının F altın yapısına göre pürlüğünden,

$$(\phi_F S)_{kij}^{\ \ \ l} = \left(\nabla_m S_{ij}^{\ \ l}\right) F_k^{\ m} - \left(\nabla_k S_{mj}^{\ \ l}\right) F_i^{\ m} \tag{4.3}$$

elde edilir. Burada S değeri yerine yazılırsa,

$$(\phi_F \bar{S})_{kij}^{\ \ \ l} = \left[\left(\nabla_m p_j\right) F_k^{\ m} - (\nabla_k p_m) F_j^{\ m}\right] \delta_i^{\ l}$$

$$-[(\nabla_m p_i) F_k^{\ m} - (\nabla_k p_m) F_i^{\ m}] \delta_j^{\ l}$$

$$+\left[(\nabla_m p_t) F_k^{\ m} F_j^{\ t} - (\nabla_k p_t) F_j^{\ t} - \nabla_k p_j\right] F_i^{\ l}$$

$$-[(\nabla_m p_t) F_k^{\ m} F_i^{\ t} - (\nabla_k p_t) F_i^{\ t} - \nabla_k p_i] F_j^{\ l}$$

olur. Ayrıca p kovektörü için,

$$(\phi_F p)_{kj} = F_k^{\ t}\left(\nabla_t p_j + \Gamma_{tj}^{m} p_m\right) - F_j^{\ t}(\nabla_k p_t + \Gamma_{kt}^{m} p_m)$$

$$= F_k^{\ t}(\nabla_t p_j) - F_j^{\ t}(\nabla_k p_t)$$

olup buradan,

$$(\phi_F p)_{kj} = (\nabla_i p_t) F_k^{\ t} - (\nabla_t p_k) F_i^{\ t}$$

yazılır. Dolayısıyla $(\phi_F p)_{kj} = 0$ olması durumunda $(\phi_F S)_{kij}^{\ \ \ l} = 0$ olur. Buradan aşağıdaki sonuç yazılır:

Sonuç 4.1.1.1: a) (M_n, g, F) bölgesel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunda,

$$(\phi_F S)_{kij}^{\ \ \ l} = 0$$

ise yani S, F altın yapısına göre ϕ-tensör ise bu durumda (4.3) denkleminden,

$$\left(\nabla_m S_{ij}^{\ \ l}\right) F_k^{\ m} = \left(\nabla_k S_{mj}^{\ \ l}\right) F_i^{\ m} = \left(\nabla_k S_{im}^{\ \ l}\right) F_j^{\ m} = \left(\nabla_k S_{ij}^{\ \ m}\right) F_m^{\ l}$$

yazılır. Yani S nin kovaryant türevleri de F altın yapısına göre pürdür.

b) (3.7) denkleminden,

$$(\phi_F S)_{kij}{}^{l} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}(\phi_\varphi S)_{kij}{}^{l}$$

yazılabildiği için aynı zamanda burulma tensörü S, F altın yapıyla bağıntısı olan φ çarpım yapısına göre ayrıştırılabilir tensördür.

Bundan sonraki çalışmalarda p kovektörünün F altın yapısına göre ϕ-tensör olduğu kabul edilecektir.

Teorem 4.1.1.3: (M_n, g, F) bölgesel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunda $\overline{\nabla}$ altın yarı-simetrik metrik F-konneksiyonun burulma tensörü,

$$\overline{\nabla}_k S_{ij}^{\ l} + \overline{\nabla}_j S_{ki}^{\ l} + \overline{\nabla}_i S_{jk}^{\ l} = 0$$

şartını sağlarsa bu durumda,

$$[iz(F) - 2]^2 - (n-4)[n + iz(F) - 6] \neq 0$$

şartı altında $(dp)_{kj} = 0$, yani p kovektörü kapalıdır. Tersine p kovektörü kapalı ise direkt sonuç sağlanır. Burada $iz(F)$, F altın yapısının tam kontraksiyonudur. Yani,

$$iz(F) = C_1^1\left(F_i^j\right) = F_i^i = F_1^1 + \cdots + F_n^n$$

şeklindedir.

İspat:

$$\overline{\nabla}_k S_{ij}^{\ l} = \left(\overline{\nabla}_k p_j\right)\delta_i^{\ l} - (\overline{\nabla}_k p_i)\delta_j^{\ l} + (\overline{\nabla}_k p_t)F_j^{\ t}F_i^{\ l} - (\overline{\nabla}_k p_t)F_i^{\ t}F_j^{\ l}$$

$$\overline{\nabla}_j S_{ki}^{\ l} = \left(\overline{\nabla}_j p_i\right)\delta_k^{\ l} - \left(\overline{\nabla}_j p_k\right)\delta_i^{\ l} + \left(\overline{\nabla}_j p_t\right)F_i^{\ t}F_k^{\ l} - \left(\overline{\nabla}_j p_t\right)F_k^{\ t}F_i^{\ l}$$

$$\overline{\nabla}_i S_{jk}^{\;l} = (\overline{\nabla}_i p_k)\delta_j^{\;l} - (\overline{\nabla}_i p_j)\delta_k^{\;l} + (\overline{\nabla}_i p_t)F_k^{\;t}F_j^{\;l} - (\overline{\nabla}_i p_t)F_j^{\;t}F_k^{\;l}$$

olup,

$$\overline{\nabla}_k S_{ij}^{\;l} + \overline{\nabla}_j S_{ki}^{\;l} + \overline{\nabla}_i S_{jk}^{\;l} = (\overline{\nabla}_k p_j - \overline{\nabla}_j p_k)\delta_i^{\;l} + (\overline{\nabla}_i p_k - \overline{\nabla}_k p_i)\delta_j^{\;l} + (\overline{\nabla}_i p_j - \overline{\nabla}_j p_i)\delta_k^{\;l}$$

$$+[(\overline{\nabla}_k p_t)F_j^{\;t} - (\overline{\nabla}_j p_t)F_k^{\;t}]F_i^{\;l} + [(\overline{\nabla}_i p_t)F_k^{\;t} - (\overline{\nabla}_k p_t)F_i^{\;t}]F_j^{\;l}$$

$$+[(\overline{\nabla}_j p_t)F_i^{\;t} - (\overline{\nabla}_i p_t)F_j^{\;t}]F_k^{\;l}$$

yazılır. Ayrıca $\overline{\nabla}_k p_j - \overline{\nabla}_j p_k = \nabla_k p_j - \nabla_j p_k = 2(dp)_{kj}$ ve

$$(\overline{\nabla}_k p_t)F_j^{\;t} - (\overline{\nabla}_j p_t)F_k^{\;t} = (\nabla_k p_t)F_j^{\;t} - (\nabla_j p_t)F_k^{\;t}$$

olup,

$$\overline{\nabla}_k S_{ij}^{\;l} + \overline{\nabla}_j S_{ki}^{\;l} + \overline{\nabla}_i S_{jk}^{\;l} = (\nabla_k p_j - \nabla_j p_k)\delta_i^{\;l} + (\nabla_i p_k - \nabla_k p_i)\delta_j^{\;l}$$

$$+(\nabla_i p_j - \nabla_j p_i)\delta_k^{\;l} + (\nabla_k p_t - \nabla_t p_k)F_j^{\;t}F_i^{\;l}$$

$$+(\nabla_i p_t - \nabla_t p_i)F_k^{\;t}F_j^{\;l} + (\nabla_j p_t - \nabla_t p_j)F_i^{\;t}F_k^{\;l}$$

yazılır. $(dp)_{kj} = 0$ için $\nabla_k p_j = \nabla_j p_k$ olup,

$$\overline{\nabla}_k S_{ij}^{\;l} + \overline{\nabla}_j S_{ki}^{\;l} + \overline{\nabla}_i S_{jk}^{\;l} = 0$$

yazılır. Tersine,

$$0 = (\nabla_k p_j - \nabla_j p_k)\delta_i^{\;l} + (\nabla_i p_k - \nabla_k p_i)\delta_j^{\;l}$$

$$+(\nabla_i p_j - \nabla_j p_i)\delta_k^{\;l} + (\nabla_k p_t - \nabla_t p_k)F_j^{\;t}F_i^{\;l}$$

$$+(\nabla_i p_t - \nabla_t p_i)F_k^{\;t}F_j^{\;l} + (\nabla_j p_t - \nabla_t p_j)F_i^{\;t}F_k^{\;l}$$

olsun. Son denklem g_{lm} ile kontraksiyona alındığında,

$$0 = (\nabla_k p_j - \nabla_j p_k)g_{il} + (\nabla_i p_k - \nabla_k p_i)g_{jl}$$

$$+(\nabla_i p_j - \nabla_j p_i)g_{kl} + (\nabla_k p_t - \nabla_t p_k)F_j^{\;t}F_{il}$$

$$+(\nabla_i p_t - \nabla_t p_i)F_k^{\;t}F_{jl} + (\nabla_j p_t - \nabla_t p_j)F_i^{\;t}F_{kl}$$

olur. Ayrıca eşitliğin her iki tarafı g^{il} ve F^{il} ile kontraksiyona alınırsa sırasıyla,

$$(n-4)\left(\nabla_j p_k - \nabla_k p_j\right) + [iz(F)-2]F_k{}^t\left(\nabla_j p_t - \nabla_t p_j\right) = 0$$

ve

$$[iz(F)-2]\left(\nabla_j p_k - \nabla_k p_j\right) + (n + iz(F) - 6)F_k{}^t\left(\nabla_j p_t - \nabla_t p_j\right) = 0$$

elde edilir. Bu iki eşitlik ortak çözülürse,

$$\left[[iz(F)-2]^2 - (n-4)[n + iz(F) - 6]\right]\left(\nabla_j p_k - \nabla_k p_j\right) = 0$$

yazılır. Burada eğer,

$$[iz(F)-2]^2 - (n-4)[n + iz(F) - 6] \neq 0$$

ise

$$\nabla_j p_k - \nabla_k p_j = 2(dp)_{kj} = 0$$

olur.

Yardımcı Teorem 4.1.1.1: (M_n, g, F) bölgesel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunda $\overline{\nabla}$ altın yarı-simetrik metrik F-konneksiyonun burulma tensörü,

$$\underset{X,Y,Z}{\sigma} S(S(X,Y)Z) = 0$$

eşitliğini sağlar. Burada σ, X, Y, Z vektör alanları için döngüsel toplamdır.

İspat: Koordinatlarla,

$$\underset{X,Y,Z}{\sigma} S(S(X,Y)Z)_{ijk}{}^l = S_{ij}{}^m S_{mk}{}^l + S_{ki}{}^m S_{mj}{}^l + S_{jk}{}^m S_{mi}{}^l$$

şeklinde olup $S_{ij}{}^l$ değeri yerlerine yazılırsa,

$$S_{ij}{}^m S_{mk}{}^l + S_{ki}{}^m S_{mj}{}^l + S_{jk}{}^m S_{mi}{}^l = 0$$

olur.

4.1.2. Altın Yarı-Simetrik Metrik $\boldsymbol{F}$-Konneksiyonun Eğrilik Özellikleri

$\bar{\nabla}$ altın yarı-simetrik metrik F-konneksiyonun eğrilik tensörü,

$$\bar{R}_{ijk}{}^{l} = \partial_i \bar{\Gamma}_{jk}^{l} - \partial_j \bar{\Gamma}_{ik}^{l} + \bar{\Gamma}_{im}^{l} \bar{\Gamma}_{jk}^{m} - \bar{\Gamma}_{jm}^{l} \bar{\Gamma}_{ik}^{m}$$

şeklinde olup $\bar{\Gamma}_{jk}^{l}$ değerleri için bu ifade,

$$\bar{R}_{ijk}{}^{l} = R_{ijk}{}^{l} - \delta_i{}^{l} \mathcal{A}_{jk} + \delta_j{}^{l} \mathcal{A}_{ik} + g_{ik} \mathcal{A}_j{}^{l} - g_{jk} \mathcal{A}_i{}^{l}$$

$$-F_i{}^{l} F_k{}^{t} \mathcal{A}_{jt} + F_j{}^{l} F_k{}^{t} \mathcal{A}_{it} + F_{ik} F^{lt} \mathcal{A}_{jt} - F_{jk} F^{lt} \mathcal{A}_{it}$$

biçiminde olur. Burada $\mathcal{A}_j{}^{t} g_{tk} = \mathcal{A}_{jk}$ olup,

$$\mathcal{A}_{jk} = \nabla_j p_k - p_j p_k + \frac{1}{2} p^m p_m g_{kj} - p_m p_t F_j{}^{m} F_k^{t} + \frac{1}{2} p^m p_t F_m^{t} F_{jk} \qquad (4.4)$$

şeklindedir. Ayrıca eğrilik tensörünün (0,4) tipli hali $\bar{R}_{ijk}{}^{m} g_{ml} = \bar{R}_{ijkl}$ eşitliğinden,

$$\bar{R}_{ijkl} = R_{ijkl} - g_{il} \mathcal{A}_{jk} + g_{jl} \mathcal{A}_{ik} + g_{ik} \mathcal{A}_{jl} - g_{jk} \mathcal{A}_{il}$$

$$-F_{il} F_k^{t} \mathcal{A}_{jt} + F_{jl} F_k^{t} \mathcal{A}_{it} + F_{ik} F_l{}^{t} \mathcal{A}_{jt} - F_{jk} F_l{}^{t} \mathcal{A}_{it} \qquad (4.5)$$

şeklinde olup kolayca görülür ki $\bar{R}_{ijkl} = -\bar{R}_{jikl}$ ve $\bar{R}_{ijkl} = -\bar{R}_{ijlk}$, yani ilk iki ve son iki indise göre anti-simetriktir.

Yardımcı Teorem 4.1.2.1: (M_n, g, F) bölgesel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldu olsun. (4.4) ile verilen $\mathcal{A}_{ij}$ tensörü ϕ-tensör (ya da F altın yapı ile bağıntısı olan φ çarpım yapısına göre ayrıştırılabilir tensör) dür. Bundan dolayı aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$(\nabla_m \mathcal{A}_{ij}) F_k^{m} = (\nabla_k \mathcal{A}_{mj}) F_i{}^{m} = (\nabla_k \mathcal{A}_{im}) F_j{}^{m}.$$

İspat: Öncelikle,

$$F_k^{t} \mathcal{A}_{it} - F_i{}^{t} \mathcal{A}_{tk} = (\nabla_i p_t) F_k^{t} - (\nabla_t p_k) F_i{}^{t} = 0$$

olup $\mathcal{A}_{ij}$ pür tensördür. Buradan,

$$(\phi_F \mathcal{A})_{kij} = F_k^{\ m}\left(\partial_m \mathcal{A}_{ij}\right) - \partial_k\left(\mathcal{A}_{mj} F_i^{\ m}\right)$$

$$= F_k^{\ m}\left(\nabla_m \mathcal{A}_{ij} + \Gamma_{mi}^s \mathcal{A}_{sj} + \Gamma_{mj}^s \mathcal{A}_{is}\right)$$

$$-F_i^{\ m}(\nabla_k \mathcal{A}_{mj} + \Gamma_{km}^s \mathcal{A}_{sj} + \Gamma_{kj}^s \mathcal{A}_{ms})$$

olur. Burada $\mathcal{A}_{ij}$ nin ve ∇ Levi-Civita konneksiyon katsayılarının F altın yapısına göre pürlüğünden,

$$(\phi_F \mathcal{A})_{kij} = \left(\nabla_m \mathcal{A}_{ij}\right) F_k^m - \left(\nabla_k \mathcal{A}_{mj}\right) F_i^m \tag{4.6}$$

elde edilir. Burada $\mathcal{A}_{ij}$ değeri yerlerine yazılırsa,

$$(\phi_F \mathcal{A})_{kij} = \left(\nabla_m \nabla_i p_j\right) F_k^m - \left(\nabla_k \nabla_m p_j\right) F_i^{\ m}$$

bulunur. Burada p_k nın Ricci özdeşliğinden,

$$\left(\nabla_m \nabla_i p_j\right) F_k^m = \left(\nabla_i \nabla_m p_j\right) F_k^m - p_s R_{mij}^{\ \ \ s} F_k^m$$

ve

$$(\nabla_k \nabla_i p_m) F_j^{\ m} = (\nabla_i \nabla_k p_m) F_j^{\ m} - p_s R_{kim}^{\ \ \ s} F_j^{\ m}$$

olup son iki eşitlikten,

$$(\phi_F \mathcal{A})_{kij} = -p_s\left(R_{mij}^{\ \ \ s} F_k^m - R_{kim}^{\ \ \ s} F_j^{\ m}\right)$$

$$= 0$$

elde edilir. Ayrıca (4.6) eşitliğinden ise

$$\left(\nabla_m \mathcal{A}_{ij}\right) F_k^m = \left(\nabla_k \mathcal{A}_{mj}\right) F_i^{\ m} = (\nabla_k \mathcal{A}_{im}) F_j^{\ m}$$

olduğu kolayca görülür. Son olarak (3.7) denkleminden,

$$(\phi_F \mathcal{A})_{kij} = \pm \frac{\sqrt{5}}{2} (\phi_\varphi \mathcal{A})_{kij}$$

olup $\mathcal{A}_{ij}$ tensörü aynı zamanda F altın yapıyla bağıntısı olan φ çarpım yapısına göre ayrıştırılabilirdir.

Teorem 4.1.2.1: (M_n, g, F) bölgesel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldu olsun. (4.2) ile verilen yarı-simetrik metrik F-konneksiyonun eğrilik tensörü $\bar{R}_{ijk}^{\ \ \ l}$ ϕ-tensör (ya da F altın yapı ile bağıntısı olan φ çarpım yapısına göre ayrıştırılabilir tensör) dür ve aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$\left(\nabla_m \bar{R}_{ijl}{}^t\right) F_k^m = \left(\nabla_k \bar{R}_{mjl}^{\ \ \ t}\right) F_i^{\ m} = (\nabla_k \bar{R}_{iml}{}^t) F_j^{\ m} = \left(\nabla_k \bar{R}_{ijm}{}^t\right) F_l^{\ m} = \left(\nabla_k \bar{R}_{ijl}{}^m\right) F_m^t.$$

Yani eğrilik tensörünün kovaryant türevleri de F altın yapısına göre pürdür.

İspat: Eğrilik tensörü için,

$$\bar{R}_{ijl}{}^m F_m^t = \bar{R}_{mjl}^{\ \ \ t} F_i^{\ m} = \bar{R}_{iml}{}^t F_j^{\ m} = \bar{R}_{ijm}{}^t F_l^{\ m}$$

olup F altın yapısına göre pürdür. Buradan,

$$\begin{aligned}(\phi_F \bar{R})_{kijl}{}^t &= F_k^m\left(\partial_m \bar{R}_{ijl}{}^t\right) - \partial_k(\bar{R}_{mjl}^{\ \ \ t} F_i^{\ m}) \\ &= F_k^m\left(\nabla_m \bar{R}_{ijl}{}^t + \Gamma_{mi}^s \bar{R}_{sjl}{}^t + \Gamma_{mj}^s \bar{R}_{isl}{}^t + \Gamma_{ml}^s \bar{R}_{ijs}{}^t - \Gamma_{ms}^t \bar{R}_{ijl}{}^m\right) \\ &\quad - F_i^{\ m}\left(\nabla_k \bar{R}_{mjl}^{\ \ \ t} + \Gamma_{km}^s \bar{R}_{sjl}{}^t + \Gamma_{kj}^s \bar{R}_{msl}{}^t + \Gamma_{kl}^s \bar{R}_{mjs}{}^t - \Gamma_{ks}^t \bar{R}_{mjl}{}^s\right).\end{aligned}$$

Burada $\bar{R}_{ijl}{}^t$ ve ∇ Levi-Civita konneksiyon katsayılarının F altın yapısına göre pürlüğünden,

$$(\phi_F \bar{R})_{kijl}{}^t = \left(\nabla_m \bar{R}_{ijl}{}^t\right) F_k^m - \left(\nabla_k \bar{R}_{mjl}^{\ \ \ t}\right) F_i^{\ m} \tag{4.7}$$

elde edilir. Burada $\bar{R}_{ijl}{}^t$ değerleri yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}(\phi_F \bar{R})_{kijl}{}^t = (\phi_F R)_{kijl}{}^t &+ \left[\left(\nabla_k \mathcal{A}_{jm}\right) F_l^{\ m} - \left(\nabla_m \mathcal{A}_{jl}\right) F_k^m\right] \delta_i^t \\ &+ [(\nabla_m \mathcal{A}_{il}) F_k^m - (\nabla_k \mathcal{A}_{im}) F_l^{\ m}] \delta_i^t\end{aligned}$$

yazılır. Yardımcı teorem 4.1.2.1 den ve Riemann eğrilik tensörü $R_{ijk}^{\;\;\;l}$ nin F altın yapısına göre ϕ-tensör olasından $(\phi_F \bar{R})_{kijl}^{\;\;\;\;\;t} = 0$ yazılır. Ayrıca (4.7) denkleminden,

$$\left(\nabla_m \bar{R}_{ijl}^{\;\;\;t}\right) F_k^{\;m} = \left(\nabla_k \bar{R}_{mjl}^{\;\;\;\;t}\right) F_i^{\;m} = \left(\nabla_k \bar{R}_{iml}^{\;\;\;\;t}\right) F_j^{\;m} = \left(\nabla_k \bar{R}_{ijm}^{\;\;\;\;t}\right) F_l^{\;m} = \left(\nabla_k \bar{R}_{ijl}^{\;\;\;m}\right) F_m^{\;t}$$

olduğu ve yine (3.7) eşitliğinden ise

$$(\phi_F \bar{R})_{kijl}^{\;\;\;\;\;t} = \pm \frac{\sqrt{5}}{2} (\phi_\varphi \bar{R})_{kijl}^{\;\;\;\;\;t}$$

olup yarı simetrik metrik F-konneksiyonun eğrilik tensörünün F altın yapısı ile bağıntısı olan φ çarpım yapısına göre ayrıştırılabilir olduğu söylenir.

Teorem 4.1.2.2: (M_n, g, F) bölgesel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldu olsun. (4.2) ile verilen yarı-simetrik metrik F-konneksiyonun eğrilik tensörü,

1) $\bar{R}_{ijkl} - \bar{R}_{klij} = 0$,

2) $\bar{R}_{ijkl} + \bar{R}_{kijl} + \bar{R}_{jkil} = 0$,

şartlarını sağlarsa bu durumda,

$$[iz(F) - 2]^2 - (n-4)[n + iz(F) - 6] \neq 0$$

şartı altında $(dp)_{kj} = 0$, yani p kovektörü kapalıdır. Tersine p kovektörü kapalı ise 1) ve 2) şartları direkt sağlanır.

İspat: 1) (4.5) ten,

$$\begin{aligned}\bar{R}_{ijkl} - \bar{R}_{klij} &= (\mathcal{A}_{li} - \mathcal{A}_{il}) g_{jk} + (\mathcal{A}_{kj} - \mathcal{A}_{jk}) g_{il} + (\mathcal{A}_{ik} - \mathcal{A}_{ki}) g_{jl} \\ &\quad + (\mathcal{A}_{jl} - \mathcal{A}_{lj}) g_{ik} + F_{il} F_j^t (\mathcal{A}_{kt} - \mathcal{A}_{tk}) + F_{jl} F_k^t (\mathcal{A}_{it} - \mathcal{A}_{ti}) \\ &\quad + F_{ik} F_l^{\;t} (\mathcal{A}_{jt} - \mathcal{A}_{tj}) - F_{jk} F_l^{\;t} (\mathcal{A}_{it} - \mathcal{A}_{ti})\end{aligned}$$

şeklindedir. Ayrıca $\mathcal{A}_{ik} - \mathcal{A}_{ki} = \nabla_i p_k - \nabla_k p_i = 2(dp)_{kj}$ olup $(dp)_{kj} = 0$ için,

$$\bar{R}_{ijkl} - \bar{R}_{klij} = 0$$

olur. Tersine,

$$\bar{R}_{ijkl} - \bar{R}_{lkij} = 0$$

olsun. Bu durumda,

$$0 = (\mathcal{A}_{li} - \mathcal{A}_{il})g_{jk} + (\mathcal{A}_{kj} - \mathcal{A}_{jk})g_{il} + (\mathcal{A}_{ik} - \mathcal{A}_{ki})g_{jl}$$

$$+(\mathcal{A}_{jl} - \mathcal{A}_{lj})g_{ik} + F_{il}F_j^t(\mathcal{A}_{kt} - \mathcal{A}_{tk}) + F_{jl}F_k^{\ t}(\mathcal{A}_{it} - \mathcal{A}_{ti})$$

$$+F_{ik}F_l^{\ t}(\mathcal{A}_{jt} - \mathcal{A}_{tj}) - F_{jk}F_l^{\ t}(\mathcal{A}_{it} - \mathcal{A}_{ti})$$

olup eşitliğin her iki tarafı g^{il} ve F^{il} ile çarpılırsa sırasıyla,

$$(n-4)(\mathcal{A}_{jk} - \mathcal{A}_{kj}) + [iz(F) - 2]F_k^{\ t}(\mathcal{A}_{jt} - \mathcal{A}_{tj}) = 0$$

ve

$$[iz(F) - 2](\mathcal{A}_{jk} - \mathcal{A}_{kj}) + (n + iz(F) - 6)F_k^{\ t}(\mathcal{A}_{jt} - \mathcal{A}_{tj}) = 0$$

elde edilir. Bu iki eşitlik ortak çözülürse,

$$\left[[iz(F) - 2]^2 - (n-4)[n + iz(F) - 6]\right](\mathcal{A}_{jk} - \mathcal{A}_{kj}) = 0$$

yazılır. Burada eğer

$$[iz(F) - 2]^2 - (n-4)[n + iz(F) - 6] \neq 0$$

ise

$$\mathcal{A}_{ik} - \mathcal{A}_{ki} = \nabla_i p_k - \nabla_k p_i = 2(dp)_{kj} = 0$$

olur.

2) (4.1) ve (4.5) ten,

$$\bar{R}_{ijkl} + \bar{R}_{kijl} + \bar{R}_{jkil} = \left(\bar{\nabla}_k S_{ij}^{\ h} + \bar{\nabla}_j S_{ki}^{\ h} + \bar{\nabla}_i S_{jk}^{\ h}\right)g_{hl}$$

olup Teorem 4.1.1.3 den direkt sonuç görülür.

Örnek 4.1.2.1: $\mathbb{R}^{2k}$ Öklid uzayı üzerindeki standart Öklid metriği ve φ çarpım yapısı $\alpha = (i, \bar{\imath}), \beta = (j, \bar{\jmath}),\ i, j = 1, \dots, k$ ve $\bar{\imath}, \bar{\jmath} = k+1, \dots, 2k$ ve δ birim matris olmak üzere,

$$\left(g_{\alpha\beta}\right) = \begin{pmatrix} g_{ij} & g_{\bar{\imath}j} \\ g_{i\bar{\jmath}} & g_{\bar{\imath}\bar{\jmath}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{ij} & 0 \\ 0 & \delta_{\bar{\imath}\bar{\jmath}} \end{pmatrix}$$

ve

$$\left(\varphi_\alpha^{\ \beta}\right) = \begin{pmatrix} \varphi_i^{\ j} & \varphi_{\bar{\imath}}^{\ j} \\ \varphi_i^{\ \bar{\jmath}} & \varphi_{\bar{\imath}}^{\ \bar{\jmath}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \delta_{\bar{\imath}}^{\ j} \\ \delta_i^{\ \bar{\jmath}} & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde olup $(\mathbb{R}^{2k}, g, \varphi)$ üçlüsüne bölgesel ayrıştırılabilir Öklid uzayı denir. Ayrıca φ çarpım yapısıyla elde edilen $\mathbb{R}^{2k}$ üzerindeki altın yapı $F_\pm$,

$$(F_\pm) = \begin{pmatrix} F_i^{\ j} & F_{\bar{\imath}}^{\ j} \\ F_i^{\ \bar{\jmath}} & F_{\bar{\imath}}^{\ \bar{\jmath}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\delta_i^{\ j} & \pm\frac{\sqrt{5}}{2}\delta_{\bar{\imath}}^{\ j} \\ \pm\frac{\sqrt{5}}{2}\delta_i^{\ \bar{\jmath}} & \frac{1}{2}\delta_{\bar{\imath}}^{\ \bar{\jmath}} \end{pmatrix}$$

biçimindedir ve $(\mathbb{R}^{2k}, g, F_\pm)$ üçlüsü bölgesel ayrıştırılabilir altın Öklid uzayını oluşturur. Bu örnekte p kovektörü gradyent vektör, yani $p_\alpha = (p_i, p_{\bar{\imath}}) = (\partial_i f, \partial_{\bar{\imath}} f)$ ve f fonksiyonu bölgesel ayrıştırılabilir herhangi bir fonksiyon olarak seçildi. Bölgesel ayrıştırılabilir bir fonksiyon ise Tachibana operatörü yardımıyla,

$$\left(\phi_\varphi df\right)_{\sigma\beta} = \varphi_\sigma^\alpha \partial_\alpha \partial_\beta f - \partial_\sigma\left(\varphi_\beta^\alpha \partial_\alpha f\right) + \left(\partial_\beta \varphi_\sigma^\alpha\right)\partial_\alpha f = 0$$

şeklinde tanımlanmıştır (Salimov 2013). Buradan hareketle $(\mathbb{R}^{2k}, g, F_\pm)$ üzerindeki altın yarı simetrik metrik $F_\pm$-konneksiyonun bileşenleri,

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{ij}^k &= \bar{\Gamma}_{\bar{\imath}\bar{\jmath}}^{\bar{k}} = \bar{\Gamma}_{i\bar{\jmath}}^{\bar{k}} = \bar{\Gamma}_{\bar{\imath}\bar{\jmath}}^{k} \\ &= \frac{5}{4}\left[(\partial_j f)\delta_i^{\ k} - (\partial_h f)\delta^{hk}\delta_{ij}\right] \pm \frac{\sqrt{5}}{4}\left[(\partial_{\bar{\jmath}} f)\delta_i^{\ k} - (\partial_{\bar{h}} f)\delta^{\bar{h}\bar{k}}\delta_{ij}\right] \end{aligned}$$

ve

$$\bar{\Gamma}_{\bar{i}j}^{k} = \bar{\Gamma}_{i\bar{j}}^{k} = \bar{\Gamma}_{\bar{i}\bar{j}}^{\bar{k}} = \bar{\Gamma}_{ij}^{\bar{k}}$$

$$= \frac{5}{4}\left[(\partial_{\bar{j}}f)\delta_i^{\ k} - (\partial_{\bar{h}}f)\delta^{\bar{h}\bar{k}}\delta_{ij}\right] \pm \frac{\sqrt{5}}{4}\left[(\partial_j f)\delta_i^{\ k} - (\partial_h f)\delta^{hk}\delta_{ij}\right]$$

şeklindedir. Ayrıca burulma tensörünün bileşenleri,

$$S_{ij}^{\ \ k} = S_{\bar{i}j}^{\ \ \bar{k}} = S_{i\bar{j}}^{\ \ \bar{k}} = S_{\bar{i}\bar{j}}^{\ \ k}$$

$$= \frac{5}{4}\left[(\partial_j f)\delta_i^{\ k} - (\partial_i f)\delta_j^{\ k}\right] \pm \frac{\sqrt{5}}{4}\left[(\partial_{\bar{j}} f)\delta_i^{\ k} - (\partial_{\bar{i}} f)\delta_j^{\ k}\right]$$

ve

$$S_{ij}^{\ \ k} = S_{\bar{i}j}^{\ \ \bar{k}} = S_{i\bar{j}}^{\ \ \bar{k}} = S_{\bar{i}\bar{j}}^{\ \ k}$$

$$= \frac{5}{4}\left[(\partial_{\bar{j}} f)\delta_i^{\ k} - (\partial_{\bar{i}} f)\delta_j^{\ k}\right] \pm \frac{\sqrt{5}}{4}\left[(\partial_j f)\delta_i^{\ k} - (\partial_i f)\delta_j^{\ k}\right]$$

biçiminde olup kolayca görülür ki burulma tensörü S, $F_{\pm}$ altın yapısına göre pürdür. Dahası,

$$(\phi_F S)_{\sigma\alpha\beta}^{\ \ \ \ \gamma} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}(\phi_{\varphi} S)_{\sigma\alpha\beta}^{\ \ \ \ \gamma} = 0$$

olup burulma tensörü S, $F_{\pm}$ altın yapısına göre ϕ-tensör (ya da φ çarpım yapısına göre ayrıştırılabilir tensör) dür.

Altın yarı simetrik metrik $F_{\pm}$-konneksiyonun eğrilik tensörü bileşenleri,

$$\bar{R}_{ijk}^{\ \ \ \ l} = \bar{R}_{\bar{i}\bar{j}k}^{\ \ \ \ l} = \bar{R}_{\bar{i}j\bar{k}}^{\ \ \ \ l} = \bar{R}_{i\bar{j}\bar{k}}^{\ \ \ \ l}$$

$$= \bar{R}_{\bar{i}jk}^{\ \ \ \ \bar{l}} = \bar{R}_{i\bar{j}k}^{\ \ \ \ \bar{l}} = \bar{R}_{ij\bar{k}}^{\ \ \ \ \bar{l}} = \bar{R}_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}}^{\ \ \ \ \bar{l}}$$

$$= -\delta_i^{\ l}\left(\frac{5}{4}\mathcal{A}_{jk} \pm \frac{\sqrt{5}}{4}\mathcal{A}_{\bar{j}k}\right) + \delta_j^{\ l}\left(\frac{5}{4}\mathcal{A}_{ik} \pm \frac{\sqrt{5}}{4}\mathcal{A}_{\bar{i}k}\right)$$

$$+\delta_{ik}\left(\frac{5}{4}\mathcal{A}_j^{\ l} \pm \frac{\sqrt{5}}{4}\mathcal{A}_{\bar{j}}^{\ l}\right) - \delta_{jk}\left(\frac{5}{4}\mathcal{A}_i^{\ l} \pm \frac{\sqrt{5}}{4}\mathcal{A}_{\bar{\imath}}^{\ l}\right)$$

ve

$$\bar{R}_{\bar{\imath}jk}{}^{l} = \bar{R}_{i\bar{j}k}{}^{l} = \bar{R}_{ij\bar{k}}{}^{l} = \bar{R}_{ijk}{}^{\bar{l}}$$

$$= \bar{R}_{\bar{\imath}\bar{j}k}{}^{\bar{l}} = \bar{R}_{\bar{\imath}j\bar{k}}{}^{\bar{l}} = \bar{R}_{i\bar{j}\bar{k}}{}^{\bar{l}} = \bar{R}_{\bar{\imath}\bar{j}\bar{k}}{}^{l}$$

$$= -\delta_i^{\ l}\left(\frac{5}{4}\mathcal{A}_{\bar{j}k} \pm \frac{\sqrt{5}}{4}\mathcal{A}_{jk}\right) + \delta_j^{\ l}\left(\frac{5}{4}\mathcal{A}_{\bar{\imath}k} \pm \frac{\sqrt{5}}{4}\mathcal{A}_{ik}\right)$$

$$+\delta_{ik}\left(\frac{5}{4}\mathcal{A}_{\bar{j}}^{\ l} \pm \frac{\sqrt{5}}{4}\mathcal{A}_j^{\ l}\right) - \delta_{jk}\left(\frac{5}{4}\mathcal{A}_{\bar{\imath}}^{\ l} \pm \frac{\sqrt{5}}{4}\mathcal{A}_i^{\ l}\right)$$

şeklindedir. Burada,

$$\mathcal{A}_{jk} = \mathcal{A}_{\bar{j}\bar{k}} = \partial_k\partial_j f - \frac{5}{4}\left[(\partial_{\bar{k}}f)(\partial_{\bar{j}}f) + (\partial_k f)(\partial_j f)\right]$$

$$\pm \frac{\sqrt{5}}{4}\left[(\partial_k f)(\partial_{\bar{j}}f) + (\partial_{\bar{k}}f)(\partial_j f)\right]$$

$$+ \frac{5}{8}\delta^{hm}\delta_{jk}[(\partial_{\bar{h}}f)(\partial_{\bar{m}}f) + (\partial_h f)(\partial_m f)]$$

$$\pm \frac{\sqrt{5}}{8}\delta^{hm}\delta_{jk}[(\partial_{\bar{h}}f)(\partial_m f) + (\partial_h f)(\partial_{\bar{m}}f)]$$

ve

$$\mathcal{A}_{\bar{j}k} = \mathcal{A}_{j\bar{k}} = \partial_{\bar{k}}\partial_j f - \frac{5}{4}\left[(\partial_k f)(\partial_{\bar{j}}f) + (\partial_{\bar{k}}f)(\partial_j f)\right]$$

$$\pm \frac{\sqrt{5}}{4}\left[(\partial_{\bar{k}}f)(\partial_{\bar{j}}f) + (\partial_k f)(\partial_j f)\right]$$

$$\pm \frac{\sqrt{5}}{8}\delta^{hm}\delta_{jk}[(\partial_{\bar{h}}f)(\partial_{\bar{m}}f) + (\partial_h f)(\partial_m f)]$$

$$+ \frac{5}{8}\delta^{hm}\delta_{jk}[(\partial_{\bar{h}}f)(\partial_m f) + (\partial_h f)(\partial_{\bar{m}}f)]$$

dir. Burada $(\phi_{F_\pm}\mathcal{A})_{\sigma\alpha\beta} = 0$ dır. Dahası eğrilik tensörü $F_\pm$ altın yapısına göre pür olduğundan kolayca görülür ki,

$$(\phi_F \bar{R})_{\sigma\alpha\beta\varepsilon}{}^{\gamma} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}(\phi_J \bar{R})_{\sigma\alpha\beta\varepsilon}{}^{\gamma} = 0$$

dır. Yani eğrilik tensörü $\bar{R}$, $F_\pm$ altın yapısına göre ϕ-tensör (ya da φ çarpım yapısına göre ayrıştırılabilir tensör) dür. Son olarak (0,4) tipli eğrilik tensörü tensörünün bileşenleri,

$$\begin{aligned}
\bar{R}_{ijkl} &= \bar{R}_{\bar{\imath}\bar{\jmath}kl} = \bar{R}_{\bar{\imath}j\bar{k}l} = \bar{R}_{i\bar{\jmath}\bar{k}l} \\
&= \bar{R}_{\bar{\imath}jk\bar{l}} = \bar{R}_{i\bar{\jmath}k\bar{l}} = \bar{R}_{ij\bar{k}\bar{l}} = \bar{R}_{\bar{\imath}\bar{\jmath}\bar{k}\bar{l}} \\
&= -\delta_{il}\left(\frac{5}{4}\mathcal{A}_{jk} \pm \frac{\sqrt{5}}{4}\mathcal{A}_{\bar{\jmath}k}\right) + \delta_{jl}\left(\frac{5}{4}\mathcal{A}_{ik} \pm \frac{\sqrt{5}}{4}\mathcal{A}_{\bar{\imath}k}\right) \\
&+\delta_{ik}\left(\frac{5}{4}\mathcal{A}_{jl} \pm \frac{\sqrt{5}}{4}\mathcal{A}_{\bar{\jmath}l}\right) - \delta_{jk}\left(\frac{5}{4}\mathcal{A}_{il} \pm \frac{\sqrt{5}}{4}\mathcal{A}_{\bar{\imath}l}\right)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\bar{R}_{\bar{\imath}jkl} &= \bar{R}_{i\bar{\jmath}kl} = \bar{R}_{ij\bar{k}l} = \bar{R}_{ijk\bar{l}} \\
&= \bar{R}_{\bar{\imath}\bar{\jmath}k\bar{l}} = \bar{R}_{\bar{\imath}j\bar{k}\bar{l}} = \bar{R}_{i\bar{\jmath}\bar{k}\bar{l}} = \bar{R}_{\bar{\imath}\bar{\jmath}\bar{k}l} \\
&= -\delta_{il}\left(\frac{5}{4}\mathcal{A}_{\bar{\jmath}k} \pm \frac{\sqrt{5}}{4}\mathcal{A}_{jk}\right) + \delta_{jl}\left(\frac{5}{4}\mathcal{A}_{\bar{\imath}k} \pm \frac{\sqrt{5}}{4}\mathcal{A}_{ik}\right) \\
&+\delta_{ik}\left(\frac{5}{4}\mathcal{A}_{\bar{\jmath}l} \pm \frac{\sqrt{5}}{4}\mathcal{A}_{jl}\right) - \delta_{jk}\left(\frac{5}{4}\mathcal{A}_{\bar{\imath}l} \pm \frac{\sqrt{5}}{4}\mathcal{A}_{il}\right)
\end{aligned}$$

olup

$$\begin{cases} \bar{R}_{\alpha\beta\gamma\varepsilon} - \bar{R}_{\gamma\varepsilon\alpha\beta} = 0 \\ \bar{R}_{\alpha\beta\gamma\varepsilon} + \bar{R}_{\gamma\alpha\beta\varepsilon} + \bar{R}_{\beta\gamma\alpha\varepsilon} = 0 \end{cases}$$

eşitlikleri de yazılır.

(4.2) denklemi ile verilen altın yarı-simetrik metrik F-konneksiyon için Ricci tensörü,

$$\bar{R}_{jk} = R_{jk} - (n-4)\mathcal{A}_{jk} - iz(\mathcal{A})g_{jk} - [iz(\mathcal{A}) - 2]F_k^t\mathcal{A}_{jt} - F_{jk}F^{lt}\mathcal{A}_{lt}$$

şeklindedir. Burada R_{jk} Levi-Civita konneksiyonunun Ricci tensörüdür. Ayrıca kolayca görülür ki,

$$\bar{R}_{jk} - \bar{R}_{kj} = (n-4)\big(\mathcal{A}_{kj} - \mathcal{A}_{jk}\big) + [iz(\mathcal{A}) - 2]F_j^{\ t}(\mathcal{A}_{kt} - \mathcal{A}_{tk})$$

olup $\mathcal{A}_{ik} - \mathcal{A}_{ki} = \nabla_i p_k - \nabla_k p_i = 2(dp)_{kj}$ eşitliğinden,

$$\bar{R}_{jk} - \bar{R}_{kj} = 2(n-4)(dp)_{kj} + 2[iz(\mathcal{A}) - 2]F_j^{\ t}(dp)_{kt}$$

olur. O halde p kovektörü kapalı olduğu takdirde $(dp)_{kj} = 0$ olup,

$$\bar{R}_{jk} - \bar{R}_{kj} = 0$$

yazılır. Ayrıca τ Levi-Civita konneksiyonunun skaler eğriliği olmak üzere (4.2) denklemi ile verilen altın yarı-simetrik metrik F-konneksiyonun skaler eğriliği,

$$\bar{\tau} = \tau - 2(n-2)iz(\mathcal{A}) - 2[iz(\mathcal{A}) - 1]F^{lt}\mathcal{A}_{lt}$$

biçimindedir.

Bu bölümde incelenecek olan eğrilik tensörlerinden birisi de önemli uygulama alanları olan kanharmonik eğrilik tensörüdür. Altın yarı-simetrik metrik F-konneksiyonun kanharmonik eğrilik tensörünün ifadesi,

$$\bar{C}_{ijkl} = \bar{R}_{ijkl} - \frac{1}{n-2}\big[\bar{R}_{jk}g_{il} - \bar{R}_{ik}g_{jl} - \bar{R}_{jl}g_{ik} + \bar{R}_{il}g_{jk}\big]$$

şeklinde olup $\bar{R}_{ijkl}$ ve $\bar{R}_{jk}$ değerleri yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\bar{C}_{ijkl} = {} & C_{ijkl} - F_{il}F_k^t\mathcal{A}_{jt} + F_{jl}F_k^t\mathcal{A}_{it} + F_{ik}F_l^{\ t}\mathcal{A}_{jt} - F_{jk}F_l^{\ t}\mathcal{A}_{it} \\ & - \frac{1}{n-2}[\big(2\mathcal{A}_{jk} - g_{jk}iz(\mathcal{A}) + F_{jk}F^{mt}\mathcal{A}_{mt} - \big(2 - iz(\mathcal{A})\big)F_k^t\mathcal{A}_{jt}\big)g_{il} \\ & - \big(2\mathcal{A}_{ik} - g_{ik}iz(\mathcal{A}) + F_{ik}F^{mt}\mathcal{A}_{mt} - \big(2 - iz(\mathcal{A})\big)F_k^t\mathcal{A}_{it}\big)g_{jl}\end{aligned}$$

$$-\left(2\mathcal{A}_{jl} - g_{jl}iz(\mathcal{A}) + F_{jl}F^{mt}\mathcal{A}_{mt} - \left(2 - iz(\mathcal{A})\right)F_l{}^t\mathcal{A}_{jt}\right)g_{ik}$$

$$+\left(2\mathcal{A}_{il} - g_{il}iz(\mathcal{A}) + F_{il}F^{mt}\mathcal{A}_{mt} - \left(2 - iz(\mathcal{A})\right)F_l{}^t\mathcal{A}_{it}\right)g_{jk}]$$

elde edilir. Burada C_{ijkl} Levi-Civita konneksiyonunun kanharmonik tensörü olup $C_{ijkl} = -C_{jikl}$ ve $C_{ijkl} = -C_{ijlk}$ eşitliklerini sağladığından altın yarı-simetrik metrik F-konneksiyonun kanharmonik tensörü de $\bar{C}_{ijkl} = -\bar{C}_{jikl}$ ve $\bar{C}_{ijkl} = -\bar{C}_{ijlk}$ eşitliklerini sağlar.

Teorem 4.1.2.3: (M_n, g, F) bölgesel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldu olsun. (4.2) ile verilen yarı-simetrik metrik F-konneksiyonun kanharmonik eğrilik tensörü ile Levi-Civita konneksiyonunun kanharmonik tensörü çakışırsa, yani $\bar{C}_{ijkl} = C_{ijkl}$ olur ise bu durumda aşağıdaki denklem sağlanır:

$$\nabla_l p^l + a_1(\nabla_t p^l)F_l{}^t + a_2 p_l p^l + a_3 p_t p^l F_l{}^t = 0.$$

Burada

$$a_1 = \frac{iz(F) - 1}{n - 2}$$

$$a_2 = \frac{(iz(F) - 1)(iz(F) - 2) + (n - 2)(n - 4)}{2(n - 2)}$$

$$a_3 = \frac{(iz(F) - 2)(n - 2) + (iz(F) - 1)(iz(F) + n - 6)}{2(n - 2)}$$

biçimindedir.

İspat: $\bar{C}_{ijkl} = C_{ijkl}$ olsun bu durumda,

$$0 = -F_{il}F_k^t\mathcal{A}_{jt} + F_{jl}F_k^t\mathcal{A}_{it} + F_{ik}F_l{}^t\mathcal{A}_{jt} - F_{jk}F_l{}^t\mathcal{A}_{it}$$

$$-\frac{1}{n-2}[\left(2\mathcal{A}_{jk} - g_{jk}iz(\mathcal{A}) + F_{jk}F^{mt}\mathcal{A}_{mt} - \left(2 - iz(\mathcal{A})\right)F_k^t\mathcal{A}_{jt}\right)g_{il}$$

$$-\left(2\mathcal{A}_{ik} - g_{ik}iz(\mathcal{A}) + F_{ik}F^{mt}\mathcal{A}_{mt} - \left(2 - iz(\mathcal{A})\right)F_k^t\mathcal{A}_{it}\right)g_{jl}$$

$$-\big(2\mathcal{A}_{jl} - g_{jl} iz(\mathcal{A}) + F_{jl} F^{mt} \mathcal{A}_{mt} - \big(2 - iz(\mathcal{A})\big) F_l{}^t \mathcal{A}_{jt}\big) g_{ik}$$

$$+\big(2\mathcal{A}_{il} - g_{il} iz(\mathcal{A}) + F_{il} F^{mt} \mathcal{A}_{mt} - \big(2 - iz(\mathcal{A})\big) F_l{}^t \mathcal{A}_{it}\big) g_{jk}]$$

olup denklem g^{il} ile kontraksiyona alınırsa,

$$iz(\mathcal{A}) + \frac{iz(F) - 1}{n - 2} F^{lt} \mathcal{A}_{lt} = 0 \qquad (4.8)$$

olur. Burada $iz(\mathcal{A})$ ve $\mathcal{A}_{lt}$ değerleri yerlerine yazılırsa,

$$\nabla_l p^l + a_1 (\nabla_t p^l) F_l{}^t + a_2 p_l p^l + a_3 p_t p^l F_l{}^t = 0$$

denklemi elde edilir.

Ayrıca (4.8) denklemi $2(n-2)$ ile çarpılırsa,

$$2(n-2) iz(\mathcal{A}) + 2[iz(\mathcal{A}) - 1] F^{lt} \mathcal{A}_{lt} = 0$$

denklemi elde edilir. Buradan aşağıdaki sonuç yazılır.

Sonuç 4.1.2.1: (M_n, g, F) bölgesel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunda (4.2) ile verilen yarı-simetrik metrik F-konneksiyonun için $\bar{C}_{ijkl} = C_{ijkl}$ ise bu durumda skaler eğrilikler de çakışır. Yani $\bar{\tau} = \tau$ olur.

İspat: Skaler eğrilik,

$$\bar{\tau} = \tau - 2(n-2) iz(\mathcal{A}) - 2[iz(\mathcal{A}) - 1] F^{lt} \mathcal{A}_{lt}$$

şeklinde olup $2(n-2) iz(\mathcal{A}) + 2[iz(\mathcal{A}) - 1] F^{lt} \mathcal{A}_{lt} = 0$ olduğundan $\bar{\tau} = \tau$ olur.

Teorem 4.1.2.4: (M_n, g, F) bölgesel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldu olsun. (4.2) ile verilen yarı-simetrik metrik F-konneksiyonun kanharmonik eğrilik tensörü düzlemsel (flat) ise yani $\bar{C}_{ijkl} = 0$ ise bu durumda aşağıdaki denklem sağlanır:

$$\nabla_l p^l + a_1(\nabla_t p^l){F_l}^t + a_2 p_l p^l + a_3 p_t p^l {F_l}^t + a_4\tau = 0.$$

Burada

$$a_1 = \frac{iz(F) - 1}{n - 2}$$
$$a_2 = \frac{(iz(F) - 1)(iz(F) - 2) + (n - 2)(n - 4)}{2(n - 2)}$$
$$a_3 = \frac{(iz(F) - 2)(n - 2) + (iz(F) - 1)(iz(F) + n - 6)}{2(n - 2)}$$
$$a_4 = \frac{1}{2(2 - n)}$$

şeklindedir.

İspat: $\bar{C}_{ijkl} = 0$ olsun bu durumda,

$$0 = C_{ijkl} - F_{il}F_k^{\ t}\mathcal{A}_{jt} + F_{jl}F_k^{\ t}\mathcal{A}_{it} + F_{ik}{F_l}^t\mathcal{A}_{jt} - F_{jk}{F_l}^t\mathcal{A}_{it}$$
$$-\frac{1}{n-2}[\big(2\mathcal{A}_{jk} - g_{jk}iz(\mathcal{A}) + F_{jk}F^{mt}\mathcal{A}_{mt} - \big(2 - iz(\mathcal{A})\big)F_k^{\ t}\mathcal{A}_{jt}\big)g_{il}$$
$$-\big(2\mathcal{A}_{ik} - g_{ik}iz(\mathcal{A}) + F_{ik}F^{mt}\mathcal{A}_{mt} - \big(2 - iz(\mathcal{A})\big)F_k^{\ t}\mathcal{A}_{it}\big)g_{jl}$$
$$-\big(2\mathcal{A}_{jl} - g_{jl}iz(\mathcal{A}) + F_{jl}F^{mt}\mathcal{A}_{mt} - \big(2 - iz(\mathcal{A})\big){F_l}^t\mathcal{A}_{jt}\big)g_{ik}$$
$$+\big(2\mathcal{A}_{il} - g_{il}iz(\mathcal{A}) + F_{il}F^{mt}\mathcal{A}_{mt} - \big(2 - iz(\mathcal{A})\big){F_l}^t\mathcal{A}_{it}\big)g_{jk}]$$

olup denklem g^{il} ile kontraksiyona alınırsa ve Levi-Civita konneksiyonunun kanharmonik tensörünün $C_{ijkl}g^{il} = C_{ijk}^{\ \ \ l} = -\frac{\tau}{n-2}g_{jk}$ olmasından elde edilir ki,

$$iz(\mathcal{A}) + \frac{iz(F) - 1}{n - 2}F^{lt}\mathcal{A}_{lt} + \frac{1}{2(2 - n)}\tau = 0 \tag{4.9}$$

olur. Burada $iz(\mathcal{A})$ ve $\mathcal{A}_{lt}$ değerleri yerlerine yazılırsa,

$$\nabla_l p^l + a_1(\nabla_t p^l){F_l}^t + a_2 p_l p^l + a_3 p_t p^l {F_l}^t + a_4\tau = 0$$

denklemi elde edilir.

Ayrıca (4.9) denklemi $2(2-n)$ ile çarpılırsa,

$$\tau - 2(n-2)iz(\mathcal{A}) - 2[iz(\mathcal{A}) - 1]F^{lt}\mathcal{A}_{lt} = 0$$
$$= \bar{\tau}$$

denklemi elde edilir. Buradan aşağıdaki sonuç yazılır.

Sonuç 4.1.2.2: (M_n, g, F) bölgesel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunda (4.2) ile verilen yarı-simetrik metrik F-konneksiyon için $\bar{C}_{ijkl} = 0$ ise bu durumda skaler eğrilik $\bar{\tau} = 0$ şartını sağlar.

4.1.3. Altın Yarı-Simetrik Metrik F-Konneksiyonun Transpozu

Keyfi bir $\bar{\nabla}$ afin konneksiyonunun transpozu,

$${}^{t}\bar{\nabla}_X Y = \bar{\nabla}_Y X + [X, Y]$$

şeklinde tanımlanır. Bu tip konneksiyonlar birçok yazar tarafından çalışılmıştır (Prvanovic 1977b; Hirica 2011; Mincic 2013**)**. Ayrıca $\bar{S}$, $\bar{\nabla}$ afin konneksiyonun burulması olmak üzere,

$$\bar{S}(X, Y) = \bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X - [X, Y]$$

olup transpoz konneksiyon,

$${}^{t}\bar{\nabla}_X Y = \bar{\nabla}_X Y - \bar{S}(X, Y) \tag{4.10}$$

biçiminde de tanımlanır. Koordinatlarla bu ifade,

$${}^{t}\bar{\Gamma}_{ij}^{k} = \bar{\Gamma}_{ij}^{k} - \bar{S}_{ij}^{k}$$

şeklinde yazılır. $\bar{S} = S$ için altın yarı-simetrik metrik F-konneksiyonun transpozunun burulması, ${}^{t}S_{ij}^{k} = -S_{ij}^{k}$ şeklinde olup Teorem 4.1.1.2 ve (3,7) den kolayca görülür ki,

$$(\phi_F\ {}^tS)_{kij}{}^l = -(\phi_F S)_{kij}{}^l = \mp\frac{\sqrt{5}}{2}(\phi_\varphi S)_{kij}{}^l = 0$$

dır. Yani ${}^tS_{ij}^k$, F altın yapısna göre ϕ-tensör (ya da F altın yapı ile bağıntısı olan φ çarpım yapısına göre ayrıştırılabilir tensör) dür.

(4.10) denkleminden altın yarı-simetrik metrik F-konneksiyonun transpozu,

$${}^t\bar{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + p_i\delta_j{}^k - p^k g_{ij} + p_t F_i{}^t F_j{}^k - p^t F_k{}^t F_{ij} \qquad (4.11)$$

şeklindedir. Elde edilen konneksiyon,

$$\bar{\nabla}_k g_{ij} = p_i g_{jk} + p_j g_{ik} - 2p_k g_{ij} - 2p_t F_k{}^t F_{ij} + p_t F_j{}^t F_{ki} + p_t F_i{}^t F_{kj} \neq 0$$

olup metrik olmayan ve

$${}^t\bar{\nabla}_k F_i{}^j = 0$$

olup F-konneksiyondur.

(4.11) ile verilen altın yarı-simetrik metrik olmayan transpoz F-konneksiyonun eğrilik tensörü,

$${}^t\bar{R}_{ijk}{}^l = \partial_i\ {}^t\bar{\Gamma}_{jk}^l - \partial_j\ {}^t\bar{\Gamma}_{ik}^l + {}^t\bar{\Gamma}_{im}^l\ {}^t\bar{\Gamma}_{jk}^m - {}^t\bar{\Gamma}_{jm}^l\ {}^t\bar{\Gamma}_{ik}^m$$

şeklinde olup açık ifadesi,

$${}^t\bar{R}_{ijk}{}^l = \bar{R}_{ijk}{}^l - \bar{\nabla}_i S_{jk}^l - \bar{\nabla}_j S_{ki}^l - (S_{ij}{}^m S_{mk}^l + S_{ki}{}^m S_{mj}^l + S_{jk}{}^m S_{mi}^l)$$

biçimindedir. Yardımcı Teorem 4.1.1.1 den altın yarı-simetrik metrik olmayan transpoz F-konneksiyonun eğrilik tensörü,

$${}^t\bar{R}_{ijk}{}^l = \bar{R}_{ijk}{}^l - \bar{\nabla}_i S_{jk}^l - \bar{\nabla}_j S_{ki}^l$$

şeklindedir.

Teorem 4.1.3.1: (M_n, g, F) bölgesel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunda (4.11) ile verilen altın yarı-simetrik metrik olmayan transpoz F-konneksiyonun eğrilik tensörü ${}^t\bar{R}$, ϕ-tensör (ya da F altın yapı ile bağıntısı olan φ çarpım yapısına göre ayrıştırılabilir tensör) dür.

İspat: Öncelikle eğrilik tensörü için,

$$ {}^t\bar{R}_{ijk}{}^{m} F_m^{\,l} = \bar{R}_{ijk}{}^{m} F_m^{\,l} - (\bar{\nabla}_i S_{jk}^{m}) F_m^{\,l} - (\bar{\nabla}_j S_{ki}^{m}) F_m^{\,l} $$

$$ {}^t\bar{R}_{mjk}{}^{l} F_i^m = \bar{R}_{mjk}{}^{l} F_i^m - (\bar{\nabla}_m S_{jk}^{l}) F_i^m - (\bar{\nabla}_j S_{km}{}^{l}) F_i^m $$

$$ {}^t\bar{R}_{imk}{}^{l} F_j^m = \bar{R}_{imk}{}^{l} F_j^m - (\bar{\nabla}_i S_{mk}^{l}) F_j^m - (\bar{\nabla}_m S_{ki}^{l}) F_j^m $$

$$ {}^t\bar{R}_{ijm}{}^{l} F_k^m = \bar{R}_{ijm}{}^{l} F_k^m - (\bar{\nabla}_i S_{jm}{}^{l}) F_k^m - (\bar{\nabla}_j S_{mi}^{l}) F_k^m $$

olup $(\bar{\nabla}_m S_{ij}^{l}) F_k^m - (\bar{\nabla}_k S_{mj}^{l}) F_i^m = (\nabla_m S_{ij}^{l}) F_k^m - (\nabla_k S_{mj}^{l}) F_i^m = 0$ eşitliğinden F altın yapısına göre pürdür. Yani,

$$ {}^t\bar{R}_{ijk}{}^{m} F_m^{\,l} = {}^t\bar{R}_{mjk}{}^{l} F_i^m = {}^t\bar{R}_{imk}{}^{l} F_j^m = {}^t\bar{R}_{ijm}{}^{l} F_k^m $$

yazılır. Buradan,

$$ (\phi_F\, {}^t\bar{R})_{kijl}^{s} = F_k^m (\partial_m\, {}^t\bar{R}_{ijl}{}^{s}) - \partial_k ({}^t\bar{R}_{ijl}{}^{m} F_m^s) $$

$$ = F_k^m (\nabla_m\, {}^t\bar{R}_{ijl}{}^{s} + \Gamma_{mi}^n\, {}^t\bar{R}_{njl}{}^{s} + \Gamma_{mj}^n\, {}^t\bar{R}_{inl}{}^{s} + \Gamma_{ml}^n\, {}^t\bar{R}_{ijn}{}^{s} - \Gamma_{mn}^s\, {}^t\bar{R}_{ijl}{}^{n}) $$

$$ - F_m^s (\nabla_k\, {}^t\bar{R}_{ijl}{}^{m} + \Gamma_{ki}^n\, {}^t\bar{R}_{njl}{}^{m} + \Gamma_{kj}^n\, {}^t\bar{R}_{inl}{}^{m} + \Gamma_{kl}^n\, {}^t\bar{R}_{ijn}{}^{m} - \Gamma_{kn}^m\, {}^t\bar{R}_{ijl}{}^{n}) $$

Burada ${}^t\bar{R}_{ijl}{}^{s}$ ve ∇ Levi-Civita konneksiyon katsayılarının F altın yapısına göre pürlüğünden,

$$ (\phi_F\, {}^t\bar{R})_{kijl}^{s} = F_k^m (\nabla_m\, {}^t\bar{R}_{ijl}{}^{s}) - F_m^s (\nabla_k\, {}^t\bar{R}_{ijl}{}^{m}) $$

elde edilir. Burada ${}^t\bar{R}_{ijl}{}^{s}$ değeri yerlerine yazılırsa,

$$ (\phi_F\, {}^t\bar{R})_{kijl}^{s} = (\nabla_m \bar{R}_{ijl}^{s}) F_k^m - (\nabla_k \bar{R}_{ijl}{}^{m}) F_m^s - (\nabla_m \bar{\nabla}_i S_{jl}^{s}) F_k^m - (\nabla_m \bar{\nabla}_j S_{li}^{s}) F_k^m $$

$$+\left(\nabla_k \overline{\nabla}_i S_{jl}^{m}\right) F_m^s + \left(\nabla_k \overline{\nabla}_j S_{li}^{m}\right) F_m^s$$

olur ve Teorem 4.1.2.1 den,

$$\left(\nabla_m \bar{R}_{ijl}{}^{s}\right) F_k^m - \left(\nabla_k \bar{R}_{ijl}{}^{m}\right) F_m^s = 0$$

olup,

$$(\phi_F\ {}^t\bar{R})_{kijl}{}^{s} = -\left(\nabla_m \overline{\nabla}_i S_{jl}{}^{s}\right) F_k^m - (\nabla_m \overline{\nabla}_j S_{li}^{s}) F_k^m + \left(\nabla_k \overline{\nabla}_i S_{jl}^{m}\right) F_m^s + \left(\nabla_k \overline{\nabla}_j S_{li}^{m}\right) F_m^s$$

elde edilir. Burada $\overline{\nabla}_i S_{jl}{}^{s}$ değerleri yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}(\phi_F\ {}^t\bar{R})_{kijl}{}^{s} &= \left[\left(\nabla_m \overline{\nabla}_i p_j\right) F_k^m - (\nabla_k \overline{\nabla}_i p_m) F_j^m\right] \delta_l^s \\ &\quad -[(\nabla_m \overline{\nabla}_i p_l) F_k^m - (\nabla_k \overline{\nabla}_i p_m) F_l^m] \delta_j^s \\ &\quad +\left[\left(\nabla_m \overline{\nabla}_j p_i\right) F_k^m - \left(\nabla_k \overline{\nabla}_j p_m\right) F_i^m\right] \delta_l^s \\ &\quad +\left[\left(\nabla_m \overline{\nabla}_j p_l\right) F_k^m - \left(\nabla_k \overline{\nabla}_j p_m\right) F_l^m\right] \delta_i^s\end{aligned}$$

olup $\left(\nabla_m \overline{\nabla}_i p_j\right) F_k^m - (\nabla_k \overline{\nabla}_i p_m) F_j^m = \left(\nabla_m \nabla_i p_j\right) F_k^m - (\nabla_k \nabla_i p_m) F_j^m$ eşitliğinden ve p kovektörünün Ricci özdeşliğinden,

$$\left(\nabla_m \nabla_i p_j\right) F_k^m - (\nabla_k \nabla_i p_m) F_j^m = 0$$

olup $(\phi_F\ {}^t\bar{R})_{kijl}{}^{s} = 0$ yazılır. Ayrıca (3.7) denkleminden,

$$(\phi_F\ {}^t\bar{R})_{kijl}{}^{s} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}(\phi_\varphi\ {}^t\bar{R})_{kijl}{}^{s} = 0$$

olup eğrilik tensörü ${}^t\bar{R}$, F altın yapı ile bağıntısı olan φ çarpım yapısına göre ayrıştırılabilir tensördür.

Eğrilik tensörü ${}^t\bar{R}$ için ${}^t\bar{R}_{ijkl} = {}^t\bar{R}_{ijl}{}^{s} g_{sl}$ olup,

$$\begin{aligned}{}^t\bar{R}_{ijkl} + {}^t\bar{R}_{kijl} + {}^t\bar{R}_{jkil} &= \bar{R}_{ijkl} + \bar{R}_{kijl} + \bar{R}_{jkil} \\ &\quad -2\left(\overline{\nabla}_k S_{ij}{}^{h} + \overline{\nabla}_j S_{ki}{}^{h} + \overline{\nabla}_i S_{jk}{}^{h}\right) g_{hl}\end{aligned}$$

olup Teorem 4.1.2.2 nin 2) şıkkından,

$$\bar{R}_{ijkl}+\bar{R}_{kijl}+\bar{R}_{jkil}=\left(\bar{\nabla}_k S_{ij}^{\ h}+\bar{\nabla}_j S_{ki}^{\ h}+\bar{\nabla}_i S_{jk}^{\ h}\right)g_{hl}$$

olur ve

$${}^{t}\bar{R}_{ijkl}+\ {}^{t}\bar{R}_{kijl}+\ {}^{t}\bar{R}_{jkil}=-\left(\bar{R}_{ijkl}+\bar{R}_{kijl}+\bar{R}_{jkil}\right)$$

yazılır. Buradan aşağıdaki teorem yazılır:

Teorem 4.1.3.2: (M_n, g, F) bölgesel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldu olsun. (4.11) ile verilen altın yarı-simetrik metrik olmayan transpoz F-konneksiyonun eğrilik tensörü,

$${}^{t}\bar{R}_{ijkl}+\ {}^{t}\bar{R}_{kijl}+\ {}^{t}\bar{R}_{jkil}=0$$

şartlarını sağlarsa bu durumda,

$$[iz(F)-2]^2-(n-4)[n+iz(F)-6]\neq 0$$

şartı altında $(dp)_{kj}=0$, yani p kovektörü kapalıdır. Tersine p kovektörü kapalı ise şart direkt sağlanır.

4.2. Altın Yarı-Simetrik Metrik Olmayan *F*-Konneksiyonlar

(M_n, g, F) ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldu üzerinde $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^{k}=\ \Gamma_{ij}^{k}+(1-\lambda)\left(p_j\delta_i^{\ k}+p_tF_j^{\ t}F_i^{\ k}\right)-\lambda\left(p_i\delta_j^{\ k}+p_tF_i^{\ t}F_j^{\ k}\right) \qquad (4.12)$$

şeklinde keyfi bir konneksiyon seçilsin. Buradan,

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_{ij}^{k}-\tilde{\Gamma}_{ji}^{k}&=\\&=p_j\delta_i^{\ k}-p_i\delta_j^{\ k}+p_tF_j^{\ t}F_i^{\ k}-p_tF_i^{\ t}F_j^{\ k}\\&=S_{ij}^{\ k}\end{aligned}$$

olup seçilen konneksiyon yarı-simetriktir. Ayrıca,

$$\widetilde{\nabla}_k F_i^{\ j} = \nabla_k F_i^{\ j} + (1-\lambda)p_s F_i^{\ s}\delta_k^j - \lambda\left(p_k F_i^{\ j}\right) + (1-\lambda)p_s F_i^{\ s} F_k^{\ j}$$

$$+(1-\lambda)\left(p_i F_k^{\ j}\right) - \lambda\left(p_s F_k^s F_i^{\ j}\right) - \lambda\left(p_s F_k^s \delta_i^{\ j}\right)$$

$$-(1-\lambda)p_i F_k^{\ j} + \lambda\left(p_k F_i^{\ j}\right) - (1-\lambda)p_s F_i^{\ s} F_k^{\ j}$$

$$+(1-\lambda)\left(p_s F_i^{\ s}\delta_k^{\ j}\right) + \lambda\left(p_s F_k^s F_i^{\ j}\right) + \lambda\left(p_s F_k^s \delta_i^{\ j}\right)$$

$$= 0$$

ve

$$\widetilde{\nabla}_k g_{ij} = (\lambda-1)\left(p_i g_{kj} + p_j g_{ki} + p_s F_i^{\ s} F_{kj} + p_s F_j^{\ s} F_{ki}\right) + 2\lambda\left(p_k g_{ij} + p_s F_k^s F_{ij}\right)$$

$$\neq 0$$

olup (4.12) ile verilen konneksiyon altın yarı-simetrik metrik olmayan F-konneksiyondur.

Elde edilen konneksiyonun eğrilik tensörü,

$$\mathcal{B}_{ij} = (\lambda-1)\nabla_i p_j + (\lambda-1)^2 p_i p_j + (\lambda-1)^2 p_s p_t F_i^{\ s} F_j^{\ t} \tag{4.13}$$

olmak üzere,

$$\tilde{R}_{ijk}^{\ \ \ l} = R_{ijk}^{\ \ \ l} - \delta_j^{\ l}\mathcal{B}_{ik} + \delta_i^{\ l}\mathcal{B}_{jk} - F_j^{\ l} F_k^{\ t}\mathcal{B}_{it} + F_i^{\ l} F_k^{\ t}\mathcal{B}_{jt}$$

$$-\lambda F_k^l\left[(\nabla_i p_t)F_j^{\ t} - \left(\nabla_j p_t\right)F_i^{\ t}\right] - \lambda\delta_k^l(\nabla_i p_j - \nabla_j p_i)$$

şeklindedir. Burada $\lambda \neq 1$ için,

$$F_k^t\mathcal{B}_{it} - F_i^{\ t}\mathcal{B}_{tk} = (\lambda-1)[(\nabla_i p_t)F_k^t - (\nabla_t p_k)F_i^{\ t}]$$

$$= 0$$

olup $\mathcal{B}$ nin F altın yapısına göre pürlüğünden ve

$$\mathcal{B}_{ij} - \mathcal{B}_{ji} = (\lambda-1)\left(\nabla_i p_j - \nabla_j p_i\right)$$

eşitliğinden, eğrilik tensörü,

$$\tilde{R}_{ijk}{}^{l} = R_{ijk}{}^{l} - \delta_j{}^l \mathcal{B}_{ik} + \delta_i{}^l \mathcal{B}_{jk} - F_j{}^l F_k{}^t \mathcal{B}_{it} + F_i{}^l F_k{}^t \mathcal{B}_{jt}$$

$$-\frac{\lambda}{(\lambda - 1)}\left[F_k{}^l F_j{}^t (\mathcal{B}_{it} - \mathcal{B}_{ti}) + \delta_k^l (\mathcal{B}_{ij} - \mathcal{B}_{ji})\right]$$

şeklinde yazılır. Ayrıca $\tilde{R}_{ijk}{}^{l} = -\tilde{R}_{jik}{}^{l}$ olduğu kolayca görülür.

Yardımcı Teorem 4.2.1: (M_n, g, F) bölgesel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldu olsun. (4.13) ile verilen $\mathcal{B}_{ij}$ tensörü ϕ-tensör (ya da F altın yapı ile bağıntısı olan φ çarpım yapısına göre ayrıştırılabilir tensör) dür. Bundan dolayı aşağıdaki eşitlik geçerlidir,

$$(\nabla_m \mathcal{B}_{ij})F_k^{\ m} = (\nabla_k \mathcal{B}_{mj})F_i^{\ m} = (\nabla_k \mathcal{B}_{im})F_j^{\ m}.$$

İspat: $\mathcal{B}$ nin F altın yapısına göre pürlüğünden,

$$(\phi_F \mathcal{B})_{kij} = F_k^m (\partial_m \mathcal{B}_{ij}) - \partial_k (\mathcal{B}_{mj} F_i^{\ m})$$

$$= F_k^m (\nabla_m \mathcal{B}_{ij} + \Gamma_{mi}^s \mathcal{B}_{sj} + \Gamma_{mj}^s \mathcal{B}_{is})$$

$$- F_i^{\ m} (\nabla_k \mathcal{B}_{mj} + \Gamma_{km}^s \mathcal{B}_{sj} + \Gamma_{kj}^s \mathcal{B}_{ms})$$

olur. Buradan,

$$(\phi_F \mathcal{B})_{kij} = (\nabla_m \mathcal{B}_{ij})F_k^m - (\nabla_k \mathcal{B}_{mj})F_i^{\ m} \tag{4.14}$$

elde edilir. Burada $\mathcal{B}_{ij}$ değeri yerlerine yazılırsa,

$$(\phi_F \mathcal{B})_{kij} = (\lambda - 1)\left[(\nabla_m \nabla_i p_j)F_k^m - (\nabla_k \nabla_m p_j)F_i^{\ m}\right]$$

bulunur. Burada p_k nın Ricci özdeşliğinden,

$$(\phi_F \mathcal{B})_{kij} = -p_s (R_{mij}^{\ \ \ s} F_k^{\ m} - R_{kim}^{\ \ \ s} F_j^{\ m})$$

$$= 0$$

elde edilir. Ayrıca (4.14) eşitliğinden ise

$$(\nabla_m \mathcal{B}_{ij})F_k^m = (\nabla_k \mathcal{B}_{mj})F_i^{\ m} = (\nabla_k \mathcal{B}_{im})F_j^{\ m}$$

olduğu kolayca görülür. Son olarak (3,7) denkleminden,

$$(\phi_F \mathcal{B})_{kij} = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}(\phi_\varphi \mathcal{B})_{kij}$$

olup $\mathcal{B}_{ij}$ tensörü aynı zamanda F altın yapıyla bağıntısı olan φ çarpım yapısına göre ayrıştırılabilirdir.

Teorem 4.2.1: (M_n, g, F) bölgesel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldu olsun. (4.12) ile verilen yarı-simetrik metrik olmayan F-konneksiyonun eğrilik tensörü $\tilde{R}_{ijk}^{\ \ \ l}$ ϕ-tensör (ya da F altın yapı ile bağıntısı olan φ çarpım yapısına göre ayrıştırılabilir tensör) dür ve aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$(\nabla_m \tilde{R}_{ijl}^{\ \ \ t})F_k^m = (\nabla_k \tilde{R}_{mjl}^{\ \ \ t})F_i^{\ m} = (\nabla_k \tilde{R}_{iml}^{\ \ \ t})F_j^{\ m} = (\nabla_k \tilde{R}_{ijm}^{\ \ \ t})F_l^{\ m} = (\nabla_k \tilde{R}_{ijl}^{\ \ \ m})F_m^t.$$

Yani eğrilik tensörünün kovaryant türevleri de F altın yapısına göre pürdür.

İspat: Eğrilik tensörü için,

$$\tilde{R}_{ijl}^{\ \ \ m}F_m^t = \tilde{R}_{mjl}^{\ \ \ t}F_i^{\ m} = \tilde{R}_{iml}^{\ \ \ t}F_j^{\ m} = \tilde{R}_{ijm}^{\ \ \ t}F_l^{\ m}$$

olup F altın yapısına göre pürdür. Buradan,

$$\begin{aligned}(\phi_F \tilde{R})_{kijl}^{\ \ \ \ t} &= F_k^{\ m}(\partial_m \tilde{R}_{ijl}^{\ \ \ t}) - \partial_k(\tilde{R}_{mjl}^{\ \ \ t}F_i^{\ m}) \\ &= F_k^{\ m}(\nabla_m \tilde{R}_{ijl}^{\ \ \ t} + \Gamma_{mi}^s \tilde{R}_{sjl}^{\ \ \ t} + \Gamma_{mj}^s \tilde{R}_{isl}^{\ \ \ t} + \Gamma_{ml}^s \tilde{R}_{ijs}^{\ \ \ t} - \Gamma_{ms}^t \tilde{R}_{ijl}^{\ \ \ m}) \\ &\quad -F_i^{\ m}(\nabla_k \tilde{R}_{mjl}^{\ \ \ t} + \Gamma_{km}^s \tilde{R}_{sjl}^{\ \ \ t} + \Gamma_{kj}^s \tilde{R}_{msl}^{\ \ \ t} + \Gamma_{kl}^s \tilde{R}_{mjs}^{\ \ \ t} - \Gamma_{ks}^t \tilde{R}_{mjl}^{\ \ \ s})\end{aligned}$$

olur. Burada $\tilde{R}_{ijl}^{\ \ \ t}$ ve ∇ Levi-Civita konneksiyon katsayılarının F altın yapısına göre pürlüğünden,

$$(\phi_F \tilde{R})_{kijl}^{\ \ \ \ t} = \left(\nabla_m \tilde{R}_{ijl}^{\ \ \ t}\right) F_k^m - \left(\nabla_k \tilde{R}_{mjl}^{\ \ \ t}\right) F_i^m \tag{4.15}$$

elde edilir. Burada $\tilde{R}_{ijl}^{\ \ \ t}$ değerleri yerlerine yazılırsa,

$$(\phi_F \tilde{R})_{kijl}^{\ \ \ \ t} = (\phi_F R)_{kijl}^{\ \ \ \ t} - \left[\left(\nabla_k \mathcal{B}_{jm}\right) F_l^{\ m} - \left(\nabla_m \mathcal{B}_{jl}\right) F_k^{\ m}\right] \delta_i^{\ t}$$
$$-[(\nabla_m \mathcal{B}_{il}) F_k^{\ m} - (\nabla_k \mathcal{B}_{im}) F_l^{\ m}] \delta_i^{\ t}$$
$$+\left[\left(\nabla_m \mathcal{B}_{js}\right) F_k^{\ m} F_l^{\ s} - \left(\nabla_k \mathcal{B}_{jm}\right) F_l^{\ m} - \left(\nabla_k \mathcal{B}_{jl}\right)\right] F_i^{\ t}$$
$$-[(\nabla_m \mathcal{B}_{is}) F_k^{\ m} F_l^{\ s} - (\nabla_k \mathcal{B}_{im}) F_l^{\ m} - (\nabla_k \mathcal{B}_{il})] F_j^{\ t}$$
$$-\frac{\lambda}{(1-\lambda)} [(\nabla_m \mathcal{B}_{is} - \nabla_m \mathcal{B}_{si}) F_k^{\ m} F_j^{\ s} - (\nabla_k \mathcal{B}_{im} - \nabla_k \mathcal{B}_{mi}) F_j^{\ m}$$
$$-\left(\nabla_k \mathcal{B}_{ij} - \nabla_k \mathcal{B}_{ji}\right) F_l^{\ t}] - \frac{\lambda}{(1-\lambda)} [\left(\nabla_m \mathcal{B}_{ij} - \nabla_m \mathcal{B}_{ji}\right) F_k^{\ m}$$
$$-(\nabla_k \mathcal{B}_{im} - \nabla_k \mathcal{B}_{mi}) F_j^{\ m}] \delta_j^{\ m}$$

olur. Yardımcı teorem 4.2.1 den ve Riemann eğrilik tensörü $R_{ijk}^{\ \ \ l}$ nin F altın yapısına göre ϕ-tensör olasından $(\phi_F \tilde{R})_{kijl}^{\ \ \ \ t} = 0$ yazılır. Ayrıca (4.15) denkleminden,

$$\left(\nabla_m \tilde{R}_{ijl}^{\ \ \ t}\right) F_k^{\ m} = \left(\nabla_k \tilde{R}_{mjl}^{\ \ \ t}\right) F_i^{\ m} = \left(\nabla_k \tilde{R}_{iml}^{\ \ \ t}\right) F_j^{\ m} = \left(\nabla_k \tilde{R}_{ijm}^{\ \ \ t}\right) F_l^{\ m} = \left(\nabla_k \tilde{R}_{ijl}^{\ \ \ m}\right) F_m^{\ t}$$

olduğu ve yine (3,7) eşitliğinden ise

$$(\phi_F \tilde{R})_{kijl}^{\ \ \ \ t} = \pm \frac{\sqrt{5}}{2} (\phi_\varphi \tilde{R})_{kijl}^{\ \ \ \ t}$$

olup yarı simetrik metrik olmayan F-konneksiyonun eğrilik tensörünün F altın yapısı ile bağıntısı olan φ çarpım yapısına göre ayrıştırılabilir olduğu söylenir.

Teorem 4.2.2: (M_n, g, F) bölgesel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldu olsun. (4.12) ile verilen yarı-simetrik metrik olmayan F-konneksiyonun eğrilik tensörü

$$\bar{R}_{ijkl} + \bar{R}_{kijl} + \bar{R}_{jkil} = 0$$

şartlarını sağlarsa bu durumda,

$$[iz(F)-2]^2-(n-4)[n+iz(F)-6]\neq 0$$

şartı altında $(dp)_{kj}=0$, yani p kovektörü kapalıdır. Tersine p kovektörü kapalı ise yukarıdaki şart direkt sağlanır.

İspat: Eğrilik tensörünün (0,4) tipli hali,

$$\tilde{R}_{ijkl}=R_{ijkl}-g_{jl}\mathcal{B}_{ik}+g_{il}\mathcal{B}_{jk}-F_{jl}F_k^{\ t}\mathcal{B}_{it}+F_{il}F_k^{\ t}\mathcal{B}_{jt}$$
$$-\frac{\lambda}{(\lambda-1)}\left[F_{kl}F_j^{\ t}(\mathcal{B}_{it}-\mathcal{B}_{ti})+g_{kl}(\mathcal{B}_{ij}-\mathcal{B}_{ji})\right]$$

şeklinde olup,

$$\tilde{R}_{ijkl}+\tilde{R}_{kijl}+\tilde{R}_{jkil}=\frac{1}{1-\lambda}[g_{jl}(\mathcal{B}_{ki}-\mathcal{B}_{ik})+g_{il}\left(\mathcal{B}_{jk}-\mathcal{B}_{kj}\right)$$
$$+g_{kl}\left(\mathcal{B}_{ij}-\mathcal{B}_{ji}\right)+F_{jl}F_i^{\ t}(\mathcal{B}_{kt}-\mathcal{B}_{tk})$$
$$+F_{il}F_j^{\ t}(\mathcal{B}_{tk}-\mathcal{B}_{kt})+F_{kl}F_j^{\ t}(\mathcal{B}_{it}-\mathcal{B}_{ti})]$$

olur. Kolayca görülür ki $(dp)_{kj}=0$ için $\mathcal{B}_{ki}=\mathcal{B}_{ik}$ olup,

$$\tilde{R}_{ijkl}+\tilde{R}_{kijl}+\tilde{R}_{jkil}=0$$

biçimindedir. Tersine $\tilde{R}_{ijkl}+\tilde{R}_{kijl}+\tilde{R}_{jkil}=0$ ise

$$0=\frac{1}{1-\lambda}[g_{jl}(\mathcal{B}_{ki}-\mathcal{B}_{ik})+g_{il}\left(\mathcal{B}_{jk}-\mathcal{B}_{kj}\right)$$
$$+g_{kl}\left(\mathcal{B}_{ij}-\mathcal{B}_{ji}\right)+F_{jl}F_i^{\ t}(\mathcal{B}_{kt}-\mathcal{B}_{tk})$$
$$+F_{il}F_j^{\ t}(\mathcal{B}_{tk}-\mathcal{B}_{kt})+F_{kl}F_j^{\ t}(\mathcal{B}_{it}-\mathcal{B}_{ti})]$$

olur. Eşitliğin her iki tarafı sırayla g^{il} ve F^{il} ile kontraksiyona alınırsa,

$$(n-4)\left(\mathcal{B}_{jk}-\mathcal{B}_{kj}\right)+(iz(F)-2)F_k^{\ t}\left(\mathcal{B}_{jt}-\mathcal{B}_{tj}\right)=0$$

ve

$$(iz(F)-2)\left(\mathcal{B}_{jk}-\mathcal{B}_{kj}\right)+(n+iz(F)-6)F_k^t\left(\mathcal{B}_{jt}-\mathcal{B}_{tj}\right)=0$$

olur. Bu iki eşitlik ortak çözülürse,

$$[(iz(F)-2)^2-(n-4)(n+iz(F)-6)]\left(\mathcal{B}_{jk}-\mathcal{B}_{kj}\right)=0$$

yazılır. Burada eğer

$$[iz(F)-2]^2-(n-4)[n+iz(F)-6]\neq 0$$

ise

$$\mathcal{B}_{ik}-\mathcal{B}_{ki}=(\lambda-1)(\nabla_i p_k-\nabla_k p_i)=2(\lambda-1)(dp)_{kj}=0$$

olur.

(4.12) ile verilen yarı-simetrik metrik olmayan F-konneksiyonun Ricci tensörü $\tilde{R}_{jk}$,

$$\tilde{R}_{jk}=R_{jk}+(n-2)\mathcal{B}_{jk}+[iz(F)-1]F_k^t\mathcal{B}_{jt}$$
$$+\frac{\lambda}{(\lambda-1)}\left[F_k^t\left(\mathcal{B}_{jt}-\mathcal{B}_{tj}\right)+2(\mathcal{B}_{jk}-\mathcal{B}_{kj})\right]$$

şeklindedir. Bu son eşitlikten,

$$\tilde{R}_{jk}-\tilde{R}_{kj}=\left[n+\frac{2(\lambda+1)}{\lambda n-1}\right]\left(\mathcal{B}_{jk}-\mathcal{B}_{kj}\right)+\left[iz(F)+\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\right]F_k^t(\mathcal{B}_{jt}-\mathcal{B}_{tj})$$

elde edilir ve kolayca görülür ki eğer $(\nabla_i p_k-\nabla_k p_i)=2(dp)_{kj}=0$ ise, bu durumda

$$\tilde{R}_{jk}-\tilde{R}_{kj}=0$$

olur.

(4.12) ile verilen yarı-simetrik metrik olmayan F-konneksiyonun skaler eğriliği,

$$\tilde{\tau}=\tau+(n-2)iz(\mathcal{B})+[iz(F)-1]F_l^t\mathcal{B}_t^l$$

şeklindedir. Ayrıca (4.12) ile verilen konneksiyonun kanharmonik eğrilik tensörünün ifadesi,

$$\tilde{C}_{ijkl} = \tilde{R}_{ijkl} - \frac{1}{n-2}\left[\tilde{R}_{jk}g_{il} - \tilde{R}_{ik}g_{jl} - \tilde{R}_{jl}g_{ik} + \tilde{R}_{il}g_{jk}\right]$$

şeklinde olup $\tilde{R}_{ijkl}$ ve $\tilde{R}_{jk}$ değerleri yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\tilde{C}_{ijkl} &= C_{ijkl} + \mathcal{B}_{jl}g_{ik} - \mathcal{B}_{il}g_{jk} - F_{jl}F_k^{\ t}\mathcal{B}_{it} + F_{il}F_k^{\ t}\mathcal{B}_{jt} \\ &- \frac{\lambda}{\lambda-1}\left[F_{kl}F_j^{\ t}(\mathcal{B}_{it} - \mathcal{B}_{ti}) + g_{kl}(\mathcal{B}_{ij} - \mathcal{B}_{ji})\right] \\ &- \frac{\lambda}{(n-2)(\lambda-1)}\left[F_k^{\ t}(\mathcal{B}_{jt} - \mathcal{B}_{tj})g_{il} - F_k^{\ t}(\mathcal{B}_{it} - \mathcal{B}_{ti})g_{jl}\right. \\ &\left.- F_l^{\ t}(\mathcal{B}_{jt} - \mathcal{B}_{tj})g_{ik} + F_l^{\ t}(\mathcal{B}_{it} - \mathcal{B}_{ti})g_{jk}\right] \\ &- \frac{2\lambda}{(n-2)(\lambda-1)}\left[(\mathcal{B}_{jk} - \mathcal{B}_{kj})g_{il} - (\mathcal{B}_{ik} - \mathcal{B}_{ki})g_{jl}\right. \\ &\left.- (\mathcal{B}_{jl} - \mathcal{B}_{lj})g_{ik} + (\mathcal{B}_{il} - \mathcal{B}_{li})g_{jk}\right]\end{aligned}$$

elde edilir. Burada C_{ijkl} Levi-Civita konneksiyonunun kanharmonik tensörü olup $C_{ijkl} = -C_{jikl}$ eşitliği sağladığından altın yarı-simetrik metrik olmayan F-konneksiyonun kanharmonik tensörü de $\tilde{C}_{ijkl} = -\tilde{C}_{jikl}$ eşitliğini sağlar.

Teorem 4.2.3: (M_n, g, F) bölgesel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldu olsun. Eğer (4.12) ile verilen yarı-simetrik metrik olmayan F-konneksiyonun kanharmonik eğrilik tensörü, Levi-Civita konneksiyonunun kanharmonik tensörüyle çakışırsa, yani $\tilde{C}_{ijkl} = C_{ijkl}$ olur ise bu durumda aşağıdaki denklem sağlanır:

$$\nabla_l p^l + c_1(\nabla_t p^l)F_l^{\ t} + c_2 p_t p^l F_l^{\ t} + c_3 p_l p^l = 0.$$

Burada

$$c_1 = \frac{iz(F) - 1}{n-2}$$

$$c_2 = \frac{(3iz(F) + n - 5)(\lambda - 1)}{(n - 2)}$$
$$c_3 = \frac{(iz(F) + 2n - 5)(\lambda - 1)}{(n - 2)}$$

şeklindedir.

İspat: $\tilde{C}_{ijkl} = C_{ijkl}$ olsun bu durumda,

$$0 = \mathcal{B}_{jl} g_{ik} - \mathcal{B}_{il} g_{jk} - F_{jl} F_k^{\ t} \mathcal{B}_{it} + F_{il} F_k^{\ t} \mathcal{B}_{jt}$$
$$-\frac{\lambda}{\lambda - 1}[F_{kl} F_j^{\ t}(\mathcal{B}_{it} - \mathcal{B}_{ti}) + g_{kl}(\mathcal{B}_{ij} - \mathcal{B}_{ji})]$$
$$-\frac{\lambda}{(n-2)(\lambda - 1)}[F_k^{\ t}(\mathcal{B}_{jt} - \mathcal{B}_{tj}) g_{il} - F_k^{\ t}(\mathcal{B}_{it} - \mathcal{B}_{ti}) g_{jl}$$
$$-F_l^{\ t}(\mathcal{B}_{jt} - \mathcal{B}_{tj}) g_{ik} + F_l^{\ t}(\mathcal{B}_{it} - \mathcal{B}_{ti}) g_{jk}]$$
$$-\frac{2\lambda}{(n-2)(\lambda - 1)}\left[(\mathcal{B}_{jk} - \mathcal{B}_{kj}) g_{il} - (\mathcal{B}_{ik} - \mathcal{B}_{ki}) g_{jl}\right.$$
$$\left.-(\mathcal{B}_{jl} - \mathcal{B}_{lj}) g_{ik} + (\mathcal{B}_{il} - \mathcal{B}_{li}) g_{jk}\right]$$

olup denklem g^{il} ile kontraksiyona alınırsa,

$$iz(\mathcal{B}) + \frac{iz(F) - 1}{n - 2} F_l^{\ t} \mathcal{B}_t^l = 0 \tag{4.16}$$

olur. Burada $iz(\mathcal{B})$ ve $\mathcal{B}_t^l$ değerleri yerlerine yazılırsa,

$$\nabla_l p^l + c_1(\nabla_t p^l) F_l^{\ t} + c_2 p_t p^l F_l^{\ t} + c_3 p_l p^l = 0$$

denklemi elde edilir.

Ayrıca (4.16) denklemi $(n - 2)$ ile çarpılırsa,

$$(n - 2) iz(\mathcal{B}) + 2[iz(\mathcal{B}) - 1] F_l^{\ t} \mathcal{B}_t^l = 0$$

denklemi elde edilir. Buradan aşağıdaki sonuç yazılır:

Sonuç 4.2.1: (M_n, g, F) bölgesel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunda (4.12) ile verilen yarı-simetrik metrik olmayan F-konneksiyonun için $\tilde{C}_{ijkl} = C_{ijkl}$ ise bu durumda skaler eğrilikler de çakışır. Yani $\tilde{\tau} = \tau$ olur.

İspat: Skaler eğrilik,

$$\tilde{\tau} = \tau + (n-2)iz(\mathcal{B}) + [iz(F) - 1]F_l^{\ t}\mathcal{B}_t^l$$

şeklinde olup $(n-2)iz(\mathcal{B}) + 2[iz(\mathcal{B}) - 1]F_l^{\ t}\mathcal{B}_t^l = 0$ olduğundan $\tilde{\tau} = \tau$ olur.

Teorem 4.2.4: (M_n, g, F) bölgesel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldu olsun. (4.12) ile verilen yarı-simetrik metrik olmayan F-konneksiyonun kanharmonik eğrilik tensörü düzlemsel (flat) ise yani $\tilde{C}_{ijkl} = 0$ ise bu durumda aşağıdaki denklem sağlanır:

$$\nabla_l p^l + d_1(\nabla_t p^l)F_l^{\ t} + d_2 p_t p^l F_l^{\ t} + d_3 p_l p^l + d_4 \tau = 0.$$

Burada

$$d_1 = \frac{iz(F) - 1}{n-2}$$
$$d_2 = \frac{(3iz(F) + n - 5)(\lambda - 1)}{(n-2)}$$
$$d_3 = \frac{(iz(F) + 2n - 5)(\lambda - 1)}{(n-2)}$$
$$d_4 = \frac{1}{(n-2)(\lambda - 1)}$$

şeklindedir.

İspat: $\tilde{C}_{ijkl} = 0$ olsun bu durumda,

$$0 = C_{ijkl} + \mathcal{B}_{jl}g_{ik} - \mathcal{B}_{il}g_{jk} - F_{jl}F_k^{\ t}\mathcal{B}_{it} + F_{il}F_k^{\ t}\mathcal{B}_{jt}$$

$$-\frac{\lambda}{\lambda-1}[F_{kl}F_j^{\ t}(\mathcal{B}_{it}-\mathcal{B}_{ti})+g_{kl}(\mathcal{B}_{ij}-\mathcal{B}_{ji})]$$

$$-\frac{\lambda}{(n-2)(\lambda-1)}[F_k^{\ t}(\mathcal{B}_{jt}-\mathcal{B}_{tj})g_{il}-F_k^{\ t}(\mathcal{B}_{it}-\mathcal{B}_{ti})g_{jl}$$

$$-F_l^{\ t}(\mathcal{B}_{jt}-\mathcal{B}_{tj})g_{ik}+F_l^{\ t}(\mathcal{B}_{it}-\mathcal{B}_{ti})g_{jk}]$$

$$-\frac{2\lambda}{(n-2)(\lambda-1)}\left[(\mathcal{B}_{jk}-\mathcal{B}_{kj})g_{il}-(\mathcal{B}_{ik}-\mathcal{B}_{ki})g_{jl}\right.$$

$$\left.-(\mathcal{B}_{jl}-\mathcal{B}_{lj})g_{ik}+(\mathcal{B}_{il}-\mathcal{B}_{li})g_{jk}\right]$$

olup denklem g^{il} ile kontraksiyona alınırsa ve Levi-Civita konneksiyonunun kanharmonik tensörünün $C_{ijkl}g^{il}=C_{ijk}^{\ \ \ l}=-\frac{\tau}{n-2}g_{jk}$ olmasından,

$$iz(\mathcal{B})+\frac{iz(F)-1}{n-2}F_l^{\ t}\mathcal{B}_t^l+\frac{1}{(n-2)}\tau=0 \tag{4.17}$$

olur. Burada $iz(\mathcal{B})$ ve $\mathcal{B}_t^l$ değerleri yerlerine yazılırsa,

$$\nabla_l p^l+d_1(\nabla_t p^l)F_l^{\ t}+d_2 p_t p^l F_l^{\ t}+d_3 p_l p^l+d_4\tau=0$$

denklemi elde edilir.

Ayrıca (4.17) denklemi $(n-2)$ ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned}0&=\tau+(n-2)iz(\mathcal{B})+[iz(\mathcal{B})-1]F_l^{\ t}\mathcal{B}_t^l\\&=\tilde{\tau}\end{aligned}$$

denklemi elde edilir. Buradan aşağıdaki sonuç yazılır:

Sonuç 4.2.2: (M_n,g,F) bölgesel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunda (4.12) ile verilen yarı-simetrik metrik olmayan F-konneksiyon için eğer $\tilde{C}_{ijkl}=0$ ise bu durumda skaler eğrilik $\tilde{\tau}=0$ şartını sağlar.

4.2.1. Dual Altın Yarı-Simetrik Metrik Olmayan $\boldsymbol{F}$-Konneksiyonlar

(M_n, g) Riemann manifoldu üzerinde alınan keyfi bir $\widetilde{\nabla}$ afin konneksiyonun duali ${}^{D}\widetilde{\nabla}$, X, Y ve Z vektör alanları olmak üzere,

$$Xg(Y,Z) = g\left(\widetilde{\nabla}_X Y, Z\right) + g(Y, {}^{D}\widetilde{\nabla}_X Z)$$

eşitliği ile tanımlanır (Lauritzen 1987). Yerel koordinatlarla bu ifade,

$$\partial_k g_{ij} = \tilde{\Gamma}_{ki}^{m} g_{mj} + {}^{D}\tilde{\Gamma}_{kj}^{m} g_{im}$$

şeklinde olup (4.12) ile verilen yarı-simetrik metrik olmayan F-konneksiyonun duali,

$${}^{D}\tilde{\Gamma}_{ij}^{k} = \Gamma_{ij}^{k} + (\lambda - 1)\left(p^k g_{ij} + p_t F^{kt} F_{ij}\right) + \lambda\left(p_i \delta_j{}^k + p_t F_i{}^t F_j{}^k\right) \qquad (4.18)$$

biçimindedir.

Elde edilen yeni konneksiyonun burulma tensörü ${}^{D}\tilde{S}_{ij}{}^{k}$,

$$\begin{aligned} {}^{D}\tilde{S}_{ij}{}^{k} &= {}^{D}\tilde{\Gamma}_{ij}^{k} - {}^{D}\tilde{\Gamma}_{ji}^{k} \\ &= -\lambda \tilde{S}_{ij}{}^{k} \end{aligned}$$

şeklinde olup Teorem 4.1.1.2 den aşağıdaki önerme yazılır:

Önerme 4.2.1.1: (M_n, g, F) bölgesel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunda (4.18) ile verilen dual yarı-simetrik konneksiyonun burulma tensörü ${}^{D}\tilde{S}$, pür ve aynı zamanda ϕ-tensör (ya da F altın yapı ile bağıntısı olan φ çarpım yapısına göre ayrıştırılabilir tensör) dür.

Ayrıca (4.18) ile verilen dual yarı-simetrik konneksiyon,

$$\begin{aligned} {}^{D}\widetilde{\nabla}_k F_i{}^j &= \partial_k F_i{}^j + {}^{D}\tilde{\Gamma}_{ki}^{m} F_m{}^j - {}^{D}\tilde{\Gamma}_{km}^{j} F_i{}^m \\ &= (\lambda - 1) g_{ki}\left(p_t F^{jt} - p^t F_t{}^j\right) \end{aligned}$$

$$= 0$$

ve

$$^{D}\widetilde{\nabla}_k g_{ij} = -\widetilde{\nabla}_k g_{ij}$$

$$\neq 0$$

şartlarını sağladığından dual yarı-simetrik metrik olmayan F-konneksiyon olarak adlandırılır.

(4.12) ve (4.18) konneksiyonlarının eğrilik tensörleri arasında,

$$\tilde{R}_{ijkl} = -\,^{D}\tilde{R}_{ijlk} \tag{4.19}$$

bağıntısı olduğundan (Lauritzen 1987),

$$^{D}\tilde{R}_{ijk}{}^{l} = R_{ijk}{}^{l} + g_{jk}\mathcal{B}_i^{\,l} - g_{ik}\mathcal{B}_j^{\,l} + F_{jk}F_t{}^{l}\mathcal{B}_i^{\,t} - F_{ik}F_t{}^{l}\mathcal{B}_j^{\,t}$$

$$+\frac{\lambda}{(\lambda-1)}\left[F_k^{\,l}F_j{}^{t}(\mathcal{B}_{it} - \mathcal{B}_{ti}) + \delta_k^{\,l}(\mathcal{B}_{ij} - \mathcal{B}_{ji})\right]$$

olarak yazılır. (4.19) eşitliğinden aşağıdaki teorem yazılır:

Teorem 4.2.1.1: (M_n, g, F) bölgesel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunda (4.18) ile verilen dual yarı-simetrik metrik olmayan F-konneksiyonun eğrilik tensörü $^{D}\tilde{R}$, pür ve aynı zamanda ϕ-tensör (ya da F altın yapı ile bağıntısı olan φ çarpım yapısına göre ayrıştırılabilir tensör) dür.

(4.18) ile verilen konneksiyonun Ricci tensörü,

$$^{D}\tilde{R}_{jk} = \tilde{R}_{jk} + iz(\mathcal{B})g_{jk} - 2\mathcal{B}_{jk} + F_{jk}F_t{}^{l}\mathcal{B}_l^{\,t} - F_k^{\,t}\mathcal{B}_{jt}$$

$$-\frac{\lambda}{(\lambda-1)}\left[F_k^{\,t}\left(\mathcal{B}_{jt} - \mathcal{B}_{tj}\right) + 2(\mathcal{B}_{kj} - \mathcal{B}_{jk})\right]$$

şeklindedir. Buradan,

$$ {}^{D}\tilde{R}_{jk} - {}^{D}\tilde{R}_{kj} = \frac{(6\lambda-2)}{(\lambda-1)}\left(\mathcal{B}_{kj} - \mathcal{B}_{jk}\right) + \frac{(2\lambda-1)}{(\lambda-1)} F_k^{\ t}(\mathcal{B}_{tj} - \mathcal{B}_{jt}) $$

olup, eğer p kovektörü kapalı ise $\mathcal{B}_{kj} - \mathcal{B}_{jk} = 0$ eşitliğinden,

$$ {}^{D}\tilde{R}_{jk} - {}^{D}\tilde{R}_{kj} = 0 $$

elde edilir. (4.18) ile verilen konneksiyonunun skaler eğriliğinin,

$$ \begin{aligned} {}^{D}\tilde{\tau} &= \tau + (n-2)iz(\mathcal{B}) + [iz(F)-1]F_l^{\ t}\mathcal{B}_t^l \\ &= \tilde{\tau} \end{aligned} $$

biçiminde olduğu kolayca görülür.

4.2.2. Genelleştirilmiş Dual Altın Yarı-Simetrik Metrik Olmayan *F*-Konneksiyonlar

(M_n, g) Riemann manifoldu üzerinde alınan keyfi bir $\tilde{\nabla}$ afin konneksiyonun genelleştirilmiş duali ${}^{GD}\tilde{\nabla}$, X, Y, Z vektör alanları ve ω kovektör alanı olmak üzere,

$$ Xg(Y,Z) = g\left(\tilde{\nabla}_X Y, Z\right) + g\left(Y, {}^{GD}\tilde{\nabla}_X Z\right) - \omega(X)g(Y,Z) $$

eşitliği ile tanımlanır (Calin *et. al.* 2009). Yerel koordinatlarla bu ifade,

$$ \partial_k g_{ij} = \tilde{\Gamma}_{ki}^m g_{mj} + {}^{GD}\tilde{\Gamma}_{kj}^m g_{im} - \omega_k g_{ij} $$

şeklinde olup (4.12) ile verilen yarı-simetrik metrik olmayan F-konneksiyonun genelleştirilmiş duali,

$$ {}^{GD}\tilde{\Gamma}_{ij}^k = {}^{D}\tilde{\Gamma}_{ij}^k + \omega_i \delta_j^{\ k} \tag{4.20} $$

biçimindedir.

Elde edilen yeni konneksiyonun burulma tensörü,

$$ {}^{GD}\tilde{S}_{ij}^{\ \ k} = {}^{GD}\tilde{\Gamma}_{ij}^k - {}^{GD}\tilde{\Gamma}_{ji}^k $$

$$= -\lambda \tilde{S}_{ij}^{\ k} + \omega_i \delta_j^{\ k} - \omega_j \delta_i^{\ k}$$

şeklinde ve

$${}^{GD}\tilde{S}_{mj}^{\ k} F_i^{\ m} \neq {}^{GD}\tilde{S}_{im}^{\ k} F_j^{\ m} \neq {}^{GD}\tilde{S}_{ij}^{\ m} F_m^k$$

olup F altın yapısına göre pür değildir.

Ayrıca,

$$\begin{aligned} {}^{GD}\widetilde{\nabla}_k g_{ij} &= {}^{D}\widetilde{\nabla}_k g_{ij} + 2\omega_k g_{ij} \\ &= -\widetilde{\nabla}_k g_{ij} + 2\omega_k g_{ij} \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} {}^{GD}\widetilde{\nabla}_k F_i^{\ j} &= (\lambda - 1) g_{ki} \left(p_t F^{jt} - p^t F_t^{\ j} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olup (4.20) ile verilen konneksiyon genelleştirilmiş dual yarı-simetrik metrik olmayan F-konneksiyon olarak adlandırılır.

(4.20) ile verilen konneksiyonun eğrilik tensörü,

$${}^{GD}\tilde{R}_{ijk}^{\ \ l} = {}^{D}\tilde{R}_{ijk}^{\ \ l} + \delta_k^l (\nabla_i \omega_j - \nabla_j \omega_i)$$

biçimindedir. Buradan aşağıdaki önerme yazılır:

Önerme 4.2.2.1: (M_n, g, F) bölgesel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldunda ${}^{GD}\tilde{R}$ ve ${}^{D}\tilde{R}$ eğrilik tensörlerinin çakışması için gerek ve yeter şart ω kovektör alanının kapalı yani $d\omega = 0$ olmasıdır.

Ayrıca,

$$^{GD}\tilde{R}_{mjk}{}^{l}F_i{}^{m} = {}^{D}\tilde{R}_{mjk}{}^{l}F_i{}^{m} + \delta_k^l(\nabla_m\omega_j - \nabla_j\omega_m)F_i{}^{m}$$

$$^{GD}\tilde{R}_{imk}{}^{l}F_j{}^{m} = {}^{D}\tilde{R}_{imk}{}^{l}F_j{}^{m} + \delta_k^l(\nabla_i\omega_m - \nabla_m\omega_i)F_j{}^{m}$$

$$^{GD}\tilde{R}_{ijm}{}^{l}F_k^{m} = {}^{D}\tilde{R}_{ijm}{}^{l}F_k^{m} + \left(\nabla_i\omega_j - \nabla_j\omega_i\right)F_k^l$$

$$^{GD}\tilde{R}_{ijk}{}^{m}F_m{}^{l} = {}^{D}\tilde{R}_{ijk}{}^{m}F_m{}^{l} + \left(\nabla_i\omega_j - \nabla_j\omega_i\right)F_k^l$$

olup buradan,

$$^{GD}\tilde{R}_{ijk}{}^{m}F_m{}^{l} = {}^{GD}\tilde{R}_{ijm}{}^{l}F_k^{m} \neq {}^{GD}\tilde{R}_{mjk}{}^{l}F_i{}^{m} \neq {}^{GD}\tilde{R}_{imk}{}^{l}F_j{}^{m}$$

eşitliği yazılır. Yani eğrilik tensörü $^{GD}\tilde{R}$, F altın yapısına göre pür değildir.

4.3. Bölgesel Ayrıştırılabilir Metalik Riemann Manifoldları

Bu bölümde yapılan "metalik Riemann manifoldları", "konformal metriklere sahip metalik Riemann manifoldları" ve "metalik Riemann manifoldları ile ilgili örnekler" çalışması, Gezer and Karaman (2015) makalesinde yayımlanmıştır.

Teorem 4.3.1: (M_n, g, J) metalik Riemann manifoldu olmak üzere, aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

1) $\phi_J g = 0$ ise J metalik yapısı integrallenebilirdir,

2) ∇, g nin Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere $\phi_J g = 0$ şartı $\nabla J = 0$ şartına denktir.

İspat: (M_n, g, J) metalik Riemann manifoldunda $g(JX, Y) = g(X, JY)$ ve ∇, g nin Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere $\nabla g = 0$ olmasından dolayı tüm $X, Y, Z_1, Z_2 \in \Im_0^1(M_n)$ için,

$$g(X, (\nabla_Z J)Y) = g((\nabla_Z J)X, Y) \tag{4.21}$$

yazılır. (3.3) ve $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ denklemlerinden,

$$(\phi_J g)(X, Z_1, Z_2) = -g(\nabla_X J)Z_1, Z_2) + g(\nabla_{Z_1} J)X, Z_2)$$

$$+g(Z_1, (\nabla_{Z_2} J)X) \tag{4.22}$$

ve buradan,

$$(\phi_J g)(Z_2, Z_1, X) = -g\big(\nabla_{Z_2} J\big)Z_1, X) + g(\nabla_{Z_1} J)Z_2, X)$$

$$+g(Z_1, (\nabla_X \Phi_c), Z_2) \tag{4.23}$$

yazılır. (4.22) ve (4.23) den ise,

$$(\phi_J g)(X, Z_1, Z_2) + (\phi_J g)(Z_2, Z_1, X) = 2g(X, \nabla_{Z_1} J)Z_2) \tag{4.24}$$

elde edilir. (4.24) denkleminde $\phi_J g = 0$ yazılırsa $\nabla J = 0$ elde edilir.

(3.5) ve (4.22) den,

$$\phi_{\varphi_\pm} g = \pm \frac{2}{2\sigma_{p,q} - p} \phi_J g \tag{4.25}$$

yazılır. Buradan söylenir ki, eğer Riemann metriği g ayrıştırılabilirse yani $\phi_{\varphi_\pm} g = 0$ ise J metalik yapısı integrallenebilirdir.

Önerme 4.3.1: (M_n, g, J) metalik Riemann manifoldunun bölgesel ayrıştırılabilir metalik Riemann manifoldu olması için gerek ve yeter şart $\phi_{\varphi_\pm} g = 0$ olmasıdır.

(3,7) denklemine benzer olarak tüm (p, q) tipli pür tensörler için Tachibana operatörü yardımıyla,

$$\phi_{\varphi_\pm} K = \pm \frac{2}{2\sigma_{p,q} - p} \phi_J K \tag{4.26}$$

eşitliği yazılır.

Teorem 4.3.2: (M_n, g, J) metalik Riemann manifoldunun Riemann eğrilik tensörü ${}^M R$, J metalik yapısına göre ϕ-tensördür. Yani $\phi_J {}^M R = 0$ dır.

İspat: Bu ispat, Iscan and Salimov (2009) makalesindeki Theorem 2 nin ispatı takip edilerek yapılmıştır. Riemann eğrilik tensörü ${}^{M}R$, J metalik yapısına göre pür olup her $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 \in \mathfrak{J}_0^1(M_n)$ için,

$$\begin{aligned}{}^{M}R(JY_1, Y_2, Y_3, Y_4) &= {}^{M}R(Y_1, JY_2, Y_3, Y_4)\\ &= {}^{M}R(Y_1, Y_2, JY_3, Y_4) = {}^{M}R(Y_1, Y_2, Y_3, JY_4)\end{aligned}$$

yazılır. Riemann eğrilik tensörü ${}^{M}R$ ye uygulanan Tachibana operatörü,

$$\left(\phi_J {}^{M}R\right)(X, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) = \left(\nabla_{JX} {}^{M}R\right)(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) - \left(\nabla_X {}^{M}R\right)(JY_1, Y_2, Y_3, Y_4) \quad (4.27)$$

şeklinde olup 2. Bianchi eşitliği yardımıyla,

$$\begin{aligned}\left(\phi_J {}^{M}R\right)(X, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) &= g\left[\left(\nabla_{JX} {}^{M}R\right)(Y_1, Y_2, Y_3) - \left(\nabla_X {}^{M}R\right)(JY_1, Y_2, Y_3), Y_4\right]\\ &= g\left[\left(\nabla_{JX} {}^{M}R\right)(Y_1, Y_2, Y_3) - J((\nabla_X {}^{M}R)(Y_1, Y_2, Y_3)), Y_4\right]\\ &= g\big(-(\nabla_{Y_1} {}^{M}R)(Y_2, JX, Y_3) - \left(\nabla_{Y_2} {}^{M}R\right)(JX, Y_1, Y_3)\\ &\quad -J\left(\left(\nabla_X {}^{M}R\right)(Y_1, Y_2, Y_3)\right), Y_4\big) \qquad (4.28)\end{aligned}$$

elde edilir. Öte yandan $\nabla J = 0$ olmasından,

$$\begin{aligned}\left(\nabla_{Y_2} {}^{M}R\right)(JX, Y_1, Y_3) &= \nabla_{Y_2}\left({}^{M}R(JX, Y_1, Y_3)\right) - {}^{M}R\left(\nabla_{Y_2}(JX), Y_1, Y_3\right)\\ &\quad -{}^{M}R\left(JX, \nabla_{Y_2}Y_1, Y_3\right) - {}^{M}R\left(JX, Y_1, \nabla_{Y_2}Y_3\right)\\ &= J\left(\nabla_{Y_2} {}^{M}R(X, Y_1, Y_3)\right) - J\left({}^{M}R\left(\nabla_{Y_2}X, Y_1, Y_3\right)\right)\\ &\quad -J\left({}^{M}R\left(X, \nabla_{Y_2}Y_1, Y_3\right)\right) - J\left({}^{M}R\left(X, Y_1, \nabla_{Y_2}Y_3\right)\right)\\ &= J\left(\nabla_{Y_2} {}^{M}R\right)(X, Y_1, Y_3) \qquad (4.29)\end{aligned}$$

ve benzer olarak,

$$\left(\nabla_{Y_1} {}^{M}R\right)(Y_2, JX, Y_3) = J\left(\nabla_{Y_1} {}^{M}R\right)(Y_2, X, Y_3) \quad (4.30)$$

elde edilir. (4.29) ve (4.30), (4.28) de yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\left(\phi_J{}^M R\right)(X,Y_1,Y_2,Y_3,Y_4) &= g\left(-J\left(\nabla_{Y_1}{}^M R\right)(Y_2,X,Y_3)\right) \\ &\quad -J\left(\nabla_{Y_2}{}^M R\right)(X,Y_1,Y_3) - J\left(\left(\nabla_X{}^M R\right)(Y_1,Y_2,Y_3)\right),Y_4\Big) \\ &= -g\left(J\left(\mathfrak{o}\left\{\left(\nabla_X{}^M R\right)(Y_1,Y_2\right\},Y_3)\right),Y_4\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

olur. Burada $\mathfrak{o}$, X, Y_1, Y_2 vektör alanlarına göre döngüsel toplamı göstermektedir. (4.26) vasıtası ile aşağıdaki önerme yazılır:

Önerme 4.3.2: (M_n, g, J) metalik Riemann manifoldunun Riemann eğrilik tensörü ${}^M R$,

$$\phi_{\varphi_\pm}{}^M R = \pm\frac{2}{2\sigma_{p,q} - p}\phi_J{}^M R$$

eşitliğini sağlar. Yani metalik Riemann eğrilik tensörü ${}^M R$, aynı zamanda φ çarpım yapısına göre ayrıştırılabilirdir.

4.3.1. Konformal Metriklere Sahip Metalik Riemann Manifoldları

g Riemannian metriği, f diferensiyellenebilir bir fonksiyon ve $X, Y \in \mathfrak{I}_0^1(M_n)$ olmak üzere konformal Riemann metriği $\tilde{g}$,

$$\tilde{g}(X,Y) = e^{2f} g(X,Y)$$

şeklinde tanımlanır. O halde $(M_n, \tilde{g}, J)$ üçlüsü de metalik Riemann manifoldu olur. Ayrıca $\tilde{g}$ metriğine Tachibana operatörü uygulanırsa,

$$\begin{aligned}\left(\phi_J \tilde{g}\right)(X,Y,Z) &= (JX)\left(e^{2f} g(Y,Z)\right) - X\left(e^{2f} g(JY,Z)\right) \\ &\quad + e^{2f} g\left((L_Y J)X,Z\right) + e^{2f} g(Y,(L_Z J)X) \\ &= (JX)(e^{2f})g(Y,Z) - X(e^{2f})g(JY,Z) + e^{2f}\left(\phi_J g\right)(X,Y,Z)\end{aligned}$$

olur. (3.5) ve (4.25) den,

$$\big(\phi_J \tilde{g}\big)(X,Y,Z) = \pm\frac{2\sigma_{p,q}-p}{2}\{(\varphi_\pm X)(e^{2f})g(Y,Z)$$
$$-X(e^{2f})g(\varphi_\pm Y,Z) + e^{2f}\big(\phi_{\varphi_\pm} g\big)(X,Y,Z)\}$$

yazılır. Buradan aşağıdaki teorem yazılır:

Teorem 4.3.1.1: (M_n, g, J) metalik Riemann manifoldu olsun. $(M_n, \tilde{g}, J)$ üçlüsünün bölgesel ayrıştırılabilir metalik Riemann manifoldu olması için gerek ve yeter şart diferensiyellenebilir f fonksiyonunun sabit (skaler) olmasıdır.

4.3.2. Metalik Riemann Manifoldları ile İlgili Örnekler

Örnek 4.3.2.1: g Öklid metriğine sahip $\mathbb{R}^{2k}$ uzayı ele alınsın. Burada $i,j = 1,\dots,k$, $\bar{\imath},\bar{\jmath} = k+1,\dots,2k$ ve δ birim matris olmak üzere,

$$g = \begin{pmatrix} \delta_j^{\,i} & 0 \\ 0 & \delta_{\bar{\jmath}}^{\,\bar{\imath}} \end{pmatrix}$$

ve $\mathbb{R}^{2k}$ üzerinde verilen standart çarpım yapı φ, yine $i,j = 1,\dots,k$ ve $\bar{\imath},\bar{\jmath} = k+1,\dots,2k$ olmak üzere,

$$\varphi = \begin{pmatrix} \delta_j^{\,i} & 0 \\ 0 & \delta_{\bar{\jmath}}^{\,\bar{\imath}} \end{pmatrix}$$

şeklinde verilir. Bu durumda $(\mathbb{R}^{2k}, g, \varphi)$ bölgesel ayrıştırılabilir Öklid uzayı olur. φ çarpım yapısından elde edilen $J_\pm$ metalik yapısı,

$$J_\pm = \begin{pmatrix} \frac{p}{2}\delta_j^{\,i} & \pm\frac{2\sigma_{p,q}-p}{2}\delta_{\bar{\jmath}}^{\,i} \\ \pm\frac{2\sigma_{p,q}-p}{2}\delta_j^{\,\bar{\imath}} & \frac{p}{2}\delta_{\bar{\jmath}}^{\,\bar{\imath}} \end{pmatrix}$$

biçiminde olup $(\mathbb{R}^{2k}, g, J_\pm)$ üçlüsü bölgesel ayrıştırılabilir metalik Öklid uzayı olur.

Örnek 4.3.2.2: $T_1^1(M_n)$ de Sasaki metriği ${}^Sg$, herhangi X, Y vektör alanları ve A, B (1,1) tipli tensör alanları olmak üzere,

$$ {}^Sg\left({}^VA, {}^VB\right) = g(A, B) \tag{4.31} $$

$$ {}^Sg\left({}^VA, {}^HY\right) = 0 \tag{4.32} $$

$$ {}^Sg\left({}^HX, {}^HY\right) = g(X, Y) \tag{4.33} $$

biçiminde tanımlıdır. Burada $g(A, B) = g_{it}g^{jl}A_j^iB_l^t$ şeklindedir (Salimov and Gezer 2011).

Herhangi X vektör alanı ve A (1,1) tipli tensör alanı için $T_1^1(M_n)$ de bir $\tilde{J}$ yapısı,

$$ \begin{aligned} \tilde{J}^HX &= \frac{p}{2}{}^HX + \left(\frac{2\sigma_{p,q} - p}{2}\right){}^V(X\otimes\tilde{E}) \\ \tilde{J}^V\left(X\otimes\tilde{E}\right) &= \frac{p}{2}{}^V\left(X\otimes\tilde{E}\right) + \left(\frac{2\sigma_{p,q} - p}{2}\right){}^HX \\ \tilde{J}\left({}^VA\right) &= \sigma_{p,q}{}^VA \end{aligned} \tag{4.34} $$

şeklinde tanımlansın. Burada $\tilde{E} = g \circ E$ biçiminde bir kovektör alanıdır. $H + V^E$ ve $V^\perp$ için $\tilde{J}$ nin kısıtlaması endomorfizmdir. Buradan söylenir ki $\tilde{J}$, $T_1^1(M_n)$ de (1,1) tipli bir tensör alanıdır. Ayrıca $\tilde{J}^2 - p\tilde{J} - qI = 0$ şartını sağlar. Yani $\tilde{J}$, $T_1^1(M_n)$ de bir metalik yapıdır.

Teorem 4.3.2.1: (M_n, g) Riemann manifoldu ve $T_1^1(M_n)$ ise onun ${}^Sg$ Sasaki metriğine sahip tensör demeti olsun. $\tilde{J}$, (4.34) ile tanımlanan metalik yapı olmak üzere $\left(T_1^1(M_n), {}^Sg, \tilde{J}\right)$ üçlüsünün metalik Riemann manifoldu olması için gerek ve yeter şart $g(E, E) = 1$ olmasıdır.

İspat: $\tilde{X}$ ve $\tilde{Y}$, $T_1^1(M_n)$ de herhangi iki vektör alanı olmak üzere,

$$A(\tilde{X},\tilde{Y}) = {}^{S}g(\tilde{J}\tilde{X},\tilde{Y}) - {}^{S}g(\tilde{X},\tilde{J}\tilde{Y})$$

biçiminde tanımlanan tensör için (4.31), (4.33) ve (4.34) yardımıyla,

$$A({}^{H}X, {}^{H}Y) = {}^{S}g\left(\frac{p}{2}\,{}^{H}X + \left(\frac{2\sigma_{p,q} - p}{2}\right){}^{V}(X\otimes\tilde{E}), {}^{H}Y\right)$$

$$- {}^{S}g\left({}^{H}X, \frac{p}{2}\,{}^{H}Y + \left(\frac{2\sigma_{p,q} - p}{2}\right){}^{V}(Y\otimes\tilde{E})\right)$$

$$= 0,$$

$$A\left({}^{V}(X\otimes\tilde{E}), {}^{V}(Y\otimes\tilde{E})\right) = {}^{S}g\left(\frac{p}{2}\,{}^{V}(X\otimes\tilde{E}) + \left(\frac{2\sigma_{p,q} - p}{2}\right){}^{H}X, {}^{V}(Y\otimes\tilde{E})\right)$$

$$- {}^{S}g\left({}^{V}(X\otimes\tilde{E}), \frac{p}{2}\,{}^{V}(Y\otimes\tilde{E}) + \left(\frac{2\sigma_{p,q} - p}{2}\right){}^{H}Y\right)$$

$$= 0,$$

$$A\left({}^{V}(X\otimes\tilde{E}), {}^{H}Y\right) = {}^{S}g\left(\frac{p}{2}\,{}^{V}(X\otimes\tilde{E}) + \left(\frac{2\sigma_{p,q} - p}{2}\right){}^{H}X, {}^{H}Y\right)$$

$$- {}^{S}g\left({}^{V}(X\otimes\tilde{E}), \frac{p}{2}\,{}^{H}Y + \left(\frac{2\sigma_{p,q} - p}{2}\right){}^{V}(Y\otimes\tilde{E})\right)$$

$$= \left(\frac{2\sigma_{p,q} - p}{2}\right)\{g(X,Y) - g(X,Y)g(E,E)\},$$

$$A({}^{V}A, {}^{V}B) = \sigma_{p,q}\{{}^{S}g({}^{V}A, {}^{V}B) - {}^{S}g({}^{V}A, {}^{V}B)\}$$

$$= 0,$$

$$A\left({}^{V}A, {}^{V}(Y\otimes\tilde{E})\right) = \sigma_{p,q}\,{}^{S}g\left({}^{V}A, {}^{V}(Y\otimes\tilde{E})\right)$$

$$- {}^{S}g\left({}^{V}A, \frac{p}{2}\,{}^{V}(Y\otimes\tilde{E}) + \left(\frac{2\sigma_{p,q} - p}{2}\right){}^{H}Y\right)$$

$$= 0,$$

$$A({}^{V}A, {}^{H}Y) = \sigma_{p,q}\,{}^{S}g({}^{V}A, {}^{H}Y)$$

$$- {}^{S}g\left({}^{V}A, \frac{p}{2}\,{}^{H}X + \left(\frac{2\sigma_{p,q} - p}{2}\right){}^{V}(X\otimes\tilde{E})\right)$$

$$= 0$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan söylenir ki ${}^{S}g$ nin $\tilde{J}$ metalik yapısına göre pür olması için gerek ve yeter şart $g(E,E) = 1$ olmasıdır.

Şimdi $\tilde{J}$ metalik yapısının ${}^{S}g$ nin Levi-Civita konneksiyonu ${}^{S}\nabla$ ya göre kovaryant türevlerine bakılacaktır. Bunun için gerekli önerme aşağıdadır:

Önerme 4.3.2.1: (Salimov and Gezer 2011) (M_n, g) Riemann manifoldu ve $T_1^1(M_n)$ ise onun ${}^{S}g$ Sasaki metriğine sahip tensör demeti olsun. ${}^{S}g$ Sasaki metriğinin Levi-Civita konneksiyonu ${}^{S}\nabla$ aşağıdaki şartları sağlar:

1) ${}^{S}\nabla_{{}^{H}X}{}^{H}Y = {}^{H}(\nabla_X Y) - \frac{1}{2}(\tilde{\gamma} - \gamma)R(X,Y)$,

2) ${}^{S}\nabla_{{}^{V}A}{}^{H}Y = \frac{1}{2}{}^{H}\left(g^{bl}R(t_b, A_l)Y + g_{at}\left(t^a\left(g^{-1} \circ R(\ ,Y)\tilde{A}^t\right)\right)\right)$,

3) ${}^{S}\nabla_{{}^{H}X}{}^{V}B = {}^{V}(\nabla_X B) + \frac{1}{2}{}^{H}\left(g^{bj}R\left(t_b, B_j\right)X + g_{ai}\left(t^a\left(g^{-1} \circ R(\ ,X)\tilde{B}^i\right)\right)\right)$,

4) ${}^{S}\nabla_{{}^{V}A}{}^{V}B = 0$.

Burada X, Y vektör alanı, A, B (1,1) tipli tensör alanı, $A_l = \left(A_l^i\right)$, $\tilde{A}^t = (g^{bl}A_l{}^t) = (A_{\cdot}^{bt})$, $t_l = (t_l{}^a)$ ve $t^a = (t_b{}^a)$ biçimindedir. Ayrıca $R(\ ,X)Y$, (1.1) tipli tensör alanı ve $g^{-1} \circ R(\ ,X)Y$ ise bir vektör alanıdır.

Önerme 4.3.2.1 kullanılarak, $T_1^1(M_n)$ de herhangi üç $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}$ vektör alanı için,

$$\left({}^{S}\nabla_{\tilde{X}}\tilde{J}\right)\tilde{Y} = {}^{S}\nabla_{\tilde{X}}\left(\tilde{J}\tilde{Y}\right) - \tilde{J}\left({}^{S}\nabla_{\tilde{X}}\tilde{Y}\right)$$

bileşenleri,

$$\left({}^{S}\nabla_{{}^{H}X}\tilde{J}\right){}^{H}Y = \frac{2\sigma_{p,q} - p}{2}\,{}^{V}(Y \otimes \nabla_X E)) + \frac{p - 2\sigma_{p,q}}{4}(\tilde{\gamma} - \gamma)R(X,Y)$$

$$+\frac{2\sigma_{p,q} - p}{4}\,{}^{H}\left\{g^{bj}R\left(t_b, Y \otimes \tilde{E}\right)_j X + g_{ai}(t^a\left(g^{-1} \circ R(\ ,X)\left(Y \otimes \tilde{E}\right)^i\right)\right\},$$

$$\left({}^{S}\nabla_{{}^{H}X}\tilde{J}\right){}^{V}B=\frac{2\sigma_{p,q}-p}{4}{}^{H}\left\{g^{bj}R\left(t_b,B_j\right)X+g_{ai}\left(t^{a}\left(g^{-1}\circ R(\,,X)\tilde{B}^{i}\right)\right)\right\}$$

$$+\frac{p-2\sigma_{p,q}}{4}{}^{V}\left\{\left[g^{bj}R\left(t_b,B_j\right)X+g_{ai}\left(t^{a}\left(g^{-1}\circ R(\,,X)\tilde{B}^{i}\right)\right)\right]\otimes\tilde{E}\right\},$$

$$\left({}^{S}\nabla_{{}^{H}X}\tilde{J}\right){}^{V}\left(Y\otimes\tilde{E}\right)=\frac{p}{2}{}^{V}(Y\otimes(g\circ\nabla_X E))+\frac{2\sigma_{p,q}-p}{4}(\tilde{\gamma}-\gamma)R(X,Y)$$

$$+\frac{p-2\sigma_{p,q}}{4}{}^{V}\{[g^{bj}R\left(t_b,Y\otimes\tilde{E}\right)_j X$$

$$+g_{ai}(t^{a}\left(g^{-1}\circ R(\,,X)\left(Y\otimes\tilde{E}\right)^{i}\right)]\otimes\tilde{E}\},$$

$$\left({}^{S}\nabla_{{}^{V}A}\tilde{J}\right){}^{H}Y=+\frac{p-2\sigma_{p,q}}{4}{}^{V}\left\{\left[g^{bj}R\left(t_b,A_j\right)Y+g_{ai}\left(t^{a}\left(g^{-1}\circ R(\,,Y)\tilde{A}^{i}\right)\right)\right]\otimes\tilde{E}\right\},$$

$$\left({}^{S}\nabla_{{}^{V}A}\tilde{J}\right){}^{V}\left(Y\otimes\tilde{E}\right)=\frac{2\sigma_{p,q}-p}{4}{}^{H}\left\{\left(g^{bj}R\left(t_b,A_j\right)Y+g_{ai}\left(t^{a}\left(g^{-1}\circ R(\,,Y)\tilde{A}^{i}\right)\right)\right)\right\},$$

$$\left({}^{S}\nabla_{{}^{V}(X\otimes\tilde{E})}\tilde{J}\right){}^{V}\left(Y\otimes\tilde{E}\right)=\frac{2\sigma_{p,q}-p}{4}{}^{H}\{g^{bj}R\left(t_b,X\otimes\tilde{E}\right)_j Y$$

$$+g_{ai}\left(t^{a}\left(g^{-1}\circ R(\,,Y)\left(X\otimes\tilde{E}\right)^{i}\right)\right\},$$

$$\left({}^{S}\nabla_{{}^{V}(X\otimes\tilde{E})}\tilde{J}\right){}^{H}Y=\frac{p-2\sigma_{p,q}}{4}{}^{V}\{[g^{bj}R\left(t_b,X\otimes\tilde{E}\right)_j Y$$

$$+g_{ai}(t^{a}\left(g^{-1}\circ R(\,,Y)\left(X\otimes\tilde{E}\right)^{i}\right)]\otimes\tilde{E}\},$$

$$\left({}^{S}\nabla_{{}^{V}A}\tilde{J}\right){}^{V}B=0,$$

$$\left({}^{S}\nabla_{{}^{V}(X\otimes\tilde{E})}\tilde{J}\right){}^{V}B=0$$

şeklindedir. Buradan aşağıdaki teorem yazılır:

Teorem 4.3.2.2: (M_n,g) Riemann manifoldu ve $T_1^1(M_n)$ ise onun ${}^{S}g$ Sasaki metriğine sahip tensör demeti olsun. $\tilde{J}$, (4.34) ile tanımlanan metalik yapı olmak üzere

$\left(T_1^1(M_n),\ {}^Sg, \tilde{J}\right)$ üçlüsünün bölgesel ayrıştırılabilir metalik Riemann manifoldu olması için gerek ve yeter şart M_n manifoldunun, $R = 0$ (düzlemsel), $g(E, E) = 1$, ve ∇, g nin Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere $\nabla E = 0$ şartlarını sağlamasıdır.

5. SONUÇ

Sunulan bu tezde ilk olarak, bölgesel ayrıştırılabilir altın Riemann manifoldu üzerinde F altın yapısı için, burulması,

$$S_{ij}^{k} = p_j\delta_i^{\ k} - p_i\delta_j^{\ k} + p_tF_j^{\ t}F_i^{\ k} - p_tF_i^{\ t}F_j^{\ k}$$

şeklinde olan, yani yarı-simetrik burulmaya sahip, $\overline{\nabla}$ altın yarı-simetrik metrik F-konneksiyon elde edilmiştir. $\overline{\Gamma}_{ij}^{k}$ altın yarı-simetrik metrik F-konneksiyon katsayıları yardımıyla $\bar{R}$ eğrilik tensörü hesaplanmış ve Riemann eğrilik tensörü R nin sağladığı özellikleri hangi şartlar altında sağladığı araştırılmıştır.

Burulma tensörü S nin ve eğrilik tensörü $\bar{R}$ nin, Tachibana operatörü yardımıyla F altın yapısına göre ϕ-tensör ve F altın yapısı ile bağıntısı olan φ çarpım yapısına göre ayrıştırılabilir tensör oluğu gösterilmiştir ve altın yarı-simetrik metrik F-konneksiyona örnek verilmiştir. Daha sonra,

$${}^{t}\overline{\nabla}_X Y = \overline{\nabla}_X Y - \bar{S}(X,Y)$$

şeklinde ifade edilen, bir konneksiyonun traspozu tanımı ile altın yarı-simetrik metrik F-konneksiyonun ${}^{t}\overline{\Gamma}_{ij}^{k}$ transpoz konneksiyon katsayıları elde edilmiştir. ${}^{t}\overline{\nabla}$ konneksiyonun eğrilik tensörü ${}^{t}\bar{R}$ nin F altın yapısına göre ϕ-tensör ve aynı zamanda F altın yapısı ile bağıntısı olan φ çarpım yapısına göre ayrıştırılabilir tensör oluğu gösterilmiştir.

İkinci olarak burulması yine S, yani yarı-simetrik olan keyfi bir konneksiyon yazılmıştır. $\lambda \in \mathbb{R}$ için,

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^{k} = \Gamma_{ij}^{k} + (1-\lambda)\left(p_j\delta_i^{\ k} + p_tF_j^{\ t}F_i^{\ k}\right) - \lambda\left(p_i\delta_j^{\ k} + p_tF_i^{\ t}F_j^{\ k}\right)$$

biçiminde yazılan bu konneksiyona altın yarı-simetrik metrik olmayan F-konneksiyon adı verilmiştir. Eğrilik tensörü $\tilde{R}$ nin özelliklerinin çalışılmasının yanı sıra,

$$Xg(Y,Z) = g\big(\widetilde{\nabla}_X Y, Z\big) + g(Y,\, {}^{D}\widetilde{\nabla}_X Z)$$

şeklinde ifade edilen bir konneksiyonun duali tanımı ile altın yarı-simetrik metrik olmayan F-konneksiyonun duali hesaplanmıştır. $\widetilde{\nabla}$ ve ${}^{D}\widetilde{\nabla}$ konneksiyonlarının eğrilik tensörleri arasında $\tilde{R}_{ijkl} = -\,{}^{D}\tilde{R}_{ijlk}$ şeklinde bağıntı olup, bu bağıntı aracılığı ile ${}^{D}\tilde{R}$ nin de hem F altın yapısına göre ϕ-tensör hem de F altın yapısı ile bağıntısı olan φ çarpım yapısına göre ayrıştırılabilir tensör olduğu gösterilmiştir.

Konu devamında ise, keyfi ω kovektörü için

$$Xg(Y,Z) = g\big(\widetilde{\nabla}_X Y, Z\big) + g\big(Y, {}^{GD}\widetilde{\nabla}_X Z\big) - \omega(X)g(Y,Z)$$

biçiminde ifade edilen, bir konneksiyonun genelleştirişmiş duali tanımı ile altın yarı-simetrik metrik olmayan F-konneksiyonun genelleştirişmiş duali hesaplanmıştır. Bu konneksiyonun burulması ${}^{GD}\tilde{S}$ ve eğriliği ${}^{GD}\tilde{R}$ için,

$${}^{GD}\tilde{S}_{mj}^{\ \ k} F_i^{\ m} \neq {}^{GD}\tilde{S}_{im}^{\ \ k} F_j^{\ m} \neq {}^{GD}\tilde{S}_{ij}^{\ \ m} F_m^{\ k}$$

$${}^{GD}\tilde{R}_{ijk}^{\ \ \ m} F_m^{\ l} = {}^{GD}\tilde{R}_{ijm}^{\ \ \ l} F_k^{\ m} \neq {}^{GD}\tilde{R}_{mjk}^{\ \ \ l} F_i^{\ m} \neq {}^{GD}\tilde{R}_{imk}^{\ \ \ l} F_j^{\ m}$$

olduğu gösterilmiştir.

Üçüncü ve son olarak, metalik Riemann manifoldu olarak tanımlanan bir manifold üzerindeki $J^2 - pJ - qI = 0$ şartını sağlayan J metalik yapısı incelenmiştir. Tachibana operatörü yardımıyla farklı bir integrallenebilme şartı ve bu yapı ile ilgili örnekler verilmiştir.

KAYNAKLAR

Agashe, N. S. and Chafle M. R., 1992. A semi-symmetric non-metric connection in a Riemannian manifold. Indian J. Pure Appl. Math. 23, 399-409.

Agashe, N. S. and Chafe M. R., 1994. On submanifolds of a Riemannian manifold with a semi- symmetric non-metric connection. Tensor (N.S.) 55, no. 2, 120.130.

Asimov, I., 1972. *Biographical Encyclopedia of Science and Technology; the Lives and Achievements of 1195 Great Scientists from Ancient Times to the Present, Chronologically Arranged*. New York: Doubleday.

Bell, E. T., 1986. "The Prince of Mathematicians: Gauss". *Men of Mathematics: The Lives and Achievements of the Great Mathematicians from Zeno to Poincaré*. New York: Simon and Schuster. p. 218–269.

Bishop, R. L. and Goldberg S., 1968. Tensor Analysis on Manifolds. The Macmillan Company, New York, p. 19-135.

Calin, O. and Matsuzoe H. and Zhang J., 2009. *Generalizations of conjugate connections*. Trends in differential geometry, complex analysis and mathematical physics, 26–34, World Sci. Publ., Hackensack, NJ.

Chaki, MC. and Konar A., 1981. On a type of semisymmetric connection on a Riemannian manifold. J. Pure Math; 1: 77-80.

Chaubey, S. K. and Ojha R. H., 2011. On a semi-symmetric non-metric connection. Filomat 25, no. 4, 19.27.

Crasmareanu, M. and Hretcanu C., 2008. Golden differential geometry. Chaos Solitons Fractals 38, no. (5), 1229-1238.

De Spinadel, V.W., 1999a. The metallic means family and multifractal spectra, Nonlinear Anal. Ser. B: Real World Appl. 36(6), 721-745.

De Spinadel, V.W., 1999b. The family of metallic means, Vis. Math. 1, 3, http://vismath1. tripod.com/spinadel/.

De Spinadel, V.W., 2000. The metallic means family and renormalization group techniques. Proc. Steklov Inst. Math., Control in Dynamic Systems, suppl. 1, 194-209.

De Spinadel, V.W., 2002. The metallic means family and forbidden symmetries. Int. Math. J. 2(3), 279-288.

De, U. C. and Kamilya D., 1995. Hypersurfaces of a Riemannian manifold with semi-symmetric non-metric connection. J. Indian Inst. Sci. 75, no. 6, 707.710.

De, U. C. and Biswas S. C., 1997. On a type of semi-symmetric metric connection on a Riemannian manifold. Publ. de. L'inst. Math, Nouv.serie, 61(75), p.90-96.

Dönmez, A., 2005. Matematiğin Öyküsü ve Serüveni: "Dünya Matematik Tarihi Ansiklopedisi": Cilt:4,8. Toplumsal Dönüşüm Yayınları, İstanbul.

El Naschie, M.S., 1994. Silver mean Hausdorff dimension and Cantor sets. Chaos, Solitons & Fractals 3, 1861-1870.

El Naschie, M.S., 1999. The golden mean in quantum geometry, knot theory and related topics. Chaos, Solitons & Fractals 10(8), 1303-1307.

Gezer, A., Cengiz N. and Salimov A.A., 2013. On integrability of Golden Riemannian structures. Turkish J. Math. 37(4), 693-703.

Gezer, A. and Karaman C., 2015. *On Metallic Riemannian Structure*, Turk. J. Math., 39, 954-962

Goldberg, S.I. and Yano K., 1970. Polynomial structures on manifolds. Kodai Math. Sem. Rep. (22), 199-218.

Hall, T., 1970. *Carl Friedrich Gauss: A Biography*. Cambridge, MA: MIT Press.

Hayden, H. A., 1932. Sub-spaces of a space with torsion. Proc. London Math. Soc, S2-34: 27-50.

Heyrovska, R., 2005 The Golden ratio ionic and atomic radii and bond lengths. Mol Phys. (103):877.82.

Hirica IE, and Nicolescu L., 2011. On quarter-symmetric metric connections on pseudo Riemannian manifolds. Balkan J. Geom. Appl.; 16, 1: 56-65.

Hretcanu, C. E. and Crasmareanu M., 2007. On some invariant submanifolds in a Riemannian manifold with golden structure. An. Stiins. Univ. Al. I. Cuza Iasi. Mat. (N.S.), (53), suppl. 1, 199-211.

Hretcanu, C. E. and Crasmareanu M., 2009. Applications of the golden ratio on Riemannian manifolds. Turkish J. Math. 33, no. (2), 179-191.

Hretcanu, C. E., Blaga A. and Hretcanu C. I., 2009. On some generalisations of the golden proportion and of the golden rectangle. An. of the Stefan cel Mare University Suceava - Food Eng. 1, 63-69.

Hretcanu, C. E. and Crasmareanu M., 2013. Metallic structures on Riemannian manifolds. Rev Un Mat Argentina; 54: 15-27.

Iscan M. and Salimov A.A., 2009. On Kahler-Norden manifolds. Proc. Indian Acad. Sci.(Math. Sci.) 119, no.(1), 71-80.

Kühnel, W., 2005. Differential geometry curves- surfaces- manifolds. Amer. Mat. Soc., New York.

Lauritzen, S., 1987. Statistical manifolds., in: Di erential Geometry in Statistical Inference. Insti- tute of Mathematical Statistics Lecture Notes. Monograph Series, 10 (Inst. Math. Statist., Hayward, CA, p. 163.216.

Marek, C. L., 2006 The Golden mean in the topology of four-manifolds in conformal .eld theory in the mathematical probability theory and in Cantorian spacetime. Chaos, Solitons& Fractals, 28(5), 1113.8.

Mincic, S. M., 2013. On Ricci type identities in manifolds with non-symmetric affine connection. Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) 94(108) , 205-217.

Prvanovic, M., 1971. Holomorphically projective transformations in a locally product space. Mathematica Balkanica, (1) , 195-213.

Prvanovic, M., 1977a. Locally decomposable Riemannian manifold endowed with some semi- symmetric F-connection. Bull. Cl. Sci. Math. Nat. Sci. Math.; 22: 45, 56.

Prvanovic, M., 1977b. $\left({}^{1}F,\ {}^{2}F\right)$- and $\left({}^{3}F,\ {}^{4}F\right)$-connexions of an almost complex and an almost product space. Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.); 22, 36: 223-229.

Prvanovic, M. 1979. Product semi-symmetric connections of the locally decomposable Riemannian spaces. Bull. Acad. Serbe Sci. Arts Cl. Sci. Math. Natur. (N.S.); 10: 17-27.

Prvanovic, M., 1984. Some special product semi-symmetric and some special holomorphically semi-symmetric F connections. Publ. de l_Institut Mathematique, Nouvelle serie, tome 35 (49) , 139-152.

Pusic, N., 2011a. On some connections on locally product Riemannian manifolds-part I. Novi Sad J. Math. 2011; 41, 2: 29-40.

Pusic, N., 2011b. On some connections on locally product Riemannian manifolds-part II. Novi Sad J. Math, 41, 2: 41-56.

Salimov, A.A., Iscan M. and Etayo F., 2007. Paraholomorphic B-manifold and its properties. Topology Appl. 154, no.(4), 925-933.

Salimov, A. A. and Mağden A., 2008. Diferensiyel Geometri, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

Salimov, A.A., 2010. On Operators Associated with Tensor Fields. J. Geom, 99 (1-2), 107-145.

Salimov, A. A. and Gezer A., 2011. On the geometry of the (1,1)-tensor bundle with Sasaki type metric. Chin Ann Math Ser B, 32: 369-386.

Salimov, A., 2013. Tensor operators and their applications. Mathematics Research Developments Series. Nova Science Publishers, Inc., New York, xii+186 pp.

Sengupta, J., De U. C. and Binh T. Q., 2000. On a type of semi-symmetric non-metric connection on a Riemannian manifold. Indian J. Pure Appl. Math. 31, no. 12, 1659.1670.

Simmons, J., 1996. *The Giant Book of Scientists: The 100 Greatest Minds of All Time*. Sydney: The Book Company.

Stakhov, A.P. and Rozin B., 2006. The golden algebraic equations. Chaos, Solitons & Fractals 27(5), 1415-1421.

Stakhov, A.P., 2007. The generalized golden proportions, a new theory of real numbers, and ternary mirror-symmetrical arithmetic. Chaos Solitons & Fractals 33(2), 315-334.

Şahin, B., 2013. Manifoldların diferensiyel geometrisi., Nobel yayıncılık, Ankara.

Tachibana, S., 1960. Analytic tensor and its generalization. Tôhoku Math. J. 12 (2), 208-221.

Whitney, H., 1936. Differentiable manifolds. The Annals of Mathematics, Second series, Volume 37, Issue 3, 645-880.

Yano, K. and Ako M., 1968. On certain operators associated with tensor field. Kodai Math. Sem. Rep. 20, 414-436.

Yano, K., 1970. On Semi-symmetric Metric Connections. Rev.Roumanie Math. Pures Appl., 15, p. 134-138.

Yano, K. and Imai T., 1975. On semi-symmetric metric F-connection. Tensor N.S. 29, 134-138.

Yano, K. and Kon M., 1984. Structures on manifolds. Series in Pure Mathematics, 3. World Scientific Publishing Co., Singapore.

ÖZGEÇMİŞ

Çağrı KARAMAN 1988 yılında Kars’ta dünyaya geldi. İlk, orta ve lise öğrenimini Kars’ta tamamladı. 2007 yılında girdiği Erzurum Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü’nden 2010 yılında mezun oldu. 2011 yılında aynı bölümde yüksek lisansa başladı. 2013 yılında yüksek lisansını bitirdi ve aynı bölümde doktora eğitimine başladı. Halen lisansüstü eğitimine devam etmektedir.