RIEMANN YÜZEYLERİNİN CEBİRSEL KARAKTERİZASYONU VE ÜNİFORMİZASYON TEOREMİ

Karadeniz Teknik Üniversitesi Temel Bilimler Fakültesince
« Fen Doktoru - Dr. Rer. Nat »
ünvanının verilmesi için kabul edilen tezdir.

Abdullah ÇAVUŞ

Tezin Dekanlığa Verildiği Tarih : 15. 02. 1977
Sözlü İmtihan Tarihi : 29. 03. 1977

Doktorayı Yöneten : Prof. Dr. Cengiz ULUÇAY
Diğer Juri Üyeleri : Prof. Dr. Cevdet KOÇAK
Prof. Dr. Mahmut TANRIKULU

Kapak Baskı
KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ BASIMEVİ
1980 — TRABZON

Bu çalışmayı bana vererek, araştırmalarım boyunca, yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen Sayın hocam *Prof.Dr. Cengiz Uluçay*'a teşekkürü bir borç bilir, minnet ve şükranlarımı arzederim.

Abdullah ÇAVUŞ

İ Ç İ N D E K İ L E R

ÖZET I

BÖLÜM I
CEBİRSEL KAVRAMLAR

1.1. HALKA ve CİSİMLER 1
1.2. HALKA HOMOMORFİZMLERİ 4
1.3. İDEALLER 6

BÖLÜM II
GENEL TOPOLOJİ

2.1. TOPOLOJİK UZAYLAR 12
2.2. TOPOLOJİK UZAYLARDA SÜREKLİ FONKSİYONLAR 15
2.3. SÜREKLİ FONKSİYON HALKALARI 18
2.4. SIFIR CÜMLELERİ 19
2.5. ANALİTİK FONKSİYON HALKALARI 21

BÖLÜM III
RİEMANN YÜZEYLERİNİN CEBİRSEL KARAKTERİZASYONU
VE
ÜNİFORMİZASYON TEOREMİ

3.1. TARİFLER 24
3.2. RİEMANN YÜZEYLERİNİN CEBİRSEL KARAKTERİZASYONU VE ÜNİFORMİZASYON TEOREMİ 25
3.3. BASİT SIFIR YERLERİNİN KARAKTERİZASYONU 30

SUMMARY 33

KAYNAKLAR 34

ÖZET

Kompleks düzlemde bulunan iki bölgenin konform eşdeğerliliğinin cebirsel bir karakterizasyonu, ilk olarak 1942 yılında *Chevalley* ve *Kakutani* tarafından bu bölgeler üzerinde tarif edilmiş sınırlı analitik fonksiyonların halkaları gözönüne alınarak verilmiştir(Bu çalışmalar neşredilmemiştir).

1948 yılında *Lipman Bers*[2],kompleks düzlemde bulunan iki bölge üzerinde tarif edilmiş analitik fonksiyonların halkaları arasındaki bir izomorfizm yardımıyla bu bölgelerin konform eşdeğer olduğunu göstermiştir. *Bers*' in bu neticesi; *W.Rudin*[14],*H.L.Royden*[7] ve *M.Nakai*[9] tarafından açık Riemann Yüzeylerine teşmil edilmiştir. 1968 lerde *I.Kra* [13]ve diğer matematikçiler tarafından Riemann Yüzeylerinin cebirsel karakterizasyonu incelenmiştir. Yakın bir zaman önce, *C.Uluçay*[3](1975),[4](1976) tarafından Riemann Yüzeyleri ve Riemann Yüzeylerinin konform eşdeğerliliğinin çok kısa bir ispatı; cebirsel bir karakterizasyonla verilmiştir.

Bu çalışmamızda, *Florack-Uluçay hassasını* kullanarak basit irtibatlı Riemann Yüzeylerinin yeni bir karakterizasyonunu verdik. *D*, açık birim dairesi üzerinde tarifli analitik fonksiyonların *A(D)* halkası ile *R* 1-boyutlu çokkatlısı üzerinde tarif edilmiş sürekli fonksiyonların *C(R)* halkasını gözönüne alıyor ve *C(R)* nin *Florack-Uluçay hassasını* haiz olduğunu farzediyoruz. Bu taktirde gösterdik ki, *R* basit irtibatli bir Riemann Yüzeyidir, şayet *A(D)* ile *C(R)* arasında sabitleri muhafaza eden bir izomorfizm mevcut ise. Böylece basit irtibatlı bir Riemann Yüzeyinin birim daireye konform eşdeğer olduğunu gösterdik. Ayrıca *C(R)* halkasındaki fonksiyonların basit sıfır yerlerinin cebirsel bir karakterizasyonunu verdik.

Çalışmamız üç bölümden ibaret olup;Bölüm-I,II de problemimiz ile ilgili cebirsel ve topolojik kavramları verdik. Bölüm-III ise tamamen karakterizasyon problemi ile ilgilidir.

Kullandığımız ispat metodu,lokal parametrelere kullanmayı mümkün kılan bir özdeş fonksiyonun ithali bakımından daha önceki ispatlardan tamamiyle farklıdır.

BÖLÜM - I

CEBİRSEL KAVRAMLAR

I.I. HALKA VE CİSİMLER

TARİF.1.1.1.

$R \neq \emptyset$ olan bir cümle ve $+, \cdot$ da R üzerinde tarif edilmiş adlarına sıra ile *toplama* ve *çarpma* adı verilen iki *operasyon* olsun. Farzedelimki R bu operasyon - lara nazaran kapalıdır, yani her $a,b \in R$ için $a+b$ ve $a \cdot b$ R nin elemanıdır. R cümlesine bu iki operasyona göre bir *halka* teşkil ediyor denir, şayet aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa:

A_1. Her $a,b,c \in R$ için $a+(b+c) = (a+b)+c$ dir.

A_2. Her $a, b \in R$ için $a+b = b+a$ dir.

A_3. R de o ile gösterilen ve R nin toplama nazaran *nötr elemanı* adı verilen bir $o \in R$ elemanı vardır öyleki her $a \in R$ için $a+o =a$ dır.

A_4. Her $a \in R$ için R de a *nın negatifi* adı verilen ve $-a$ ile gösterilen bir $-a \in R$ elemanı vardır, öyleki $a+(-a)= o$ dır.

M_1. Her $a,b,c \in R$ için $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ dir.

M_A. Her $a,b,c \in R$ için $a.(b+c) = a.b +a.c$ ve $(b+c).a = b.a+c.a$ dır.

R halkasına *komütatiftir* denir, şayet her $a, b \in R$ için $a.b =b.a$ ise.

TARİF.1.1.2.

R halkasına, *özdeş elemanlı halka* denir, şayet her $a \in R$ için $a.1 = 1.a = a$ olacak şekilde bir $1 \in R$ elemanı mevcut ise.

R özdeş elemanlı bir halka olsun. Her $a \in R$ için R nin $a.1=1.a=a$ şartını sağlıyan $1 \in R$ elemanına R nin *özdeş elemanı* denir.

TARİF.1.1.3.

R özdeş elemanlı bir halka ve $a \in R \setminus \{o\}$ olsun. a ya *birim* denir, şayet R de $a.a^{-1}=a^{-1}.a=1$ olacak şekilde bir $a^{-1} \in R$ elemanı mevcut ise.

$a \in R \setminus \{o\}$ birim ise, R nin $a.a^{-1}=a^{-1}.a= 1$ şartını sağlıyan a^{-1} elemanına *a nın inversi* denir.

TARİF.1.1.4.

R , $+$ ve $\cdot$ operasyonlarına göre bir halka ve S de R nin boş olmayan bir altcümlesi olsun. S ye R nin *althalkası* denir, şayet S, R deki operasyonlara göre bir halka teşkil ederse.

TEOREM.1.1.1.

R, $+$ ve . operasyonlarına göre bir halka ve S de R nin boş olmayan bir altcümlesi olsun. S,R nin althalkasıdır, yanlız ve yanlız her $a,b \in S$ için $a-b$ ve $a.b \in S$ ise.

İSPAT.

S, R nin bir alt halkası ise her $a,b \in S$ için $a.b$ ve $a-b \in S$ dir. S, R nin althalkası olduğundan S toplama ve çarpma operasyonlarına göre kapalıdır. Üstelik, S her elemanının negatifini ihtiva eder. Şu halde her $a,b \in S$ için $a-b$, $a.b \in S$ olur.

Tersine olarak her $a,b \in S$ için $a.b, a-b \in S$ ise S,

R nin althalkasıdır. $S \neq \emptyset$ ve $S \subset R$ olduğundan, S nin elamanları tarif.1.1.1. deki A_1, A_2, M_1 ve M_A şartlarını sağlar. Her $a,b \in S$ için $a.b \in S$ olduğundan S, çarpma operasyonuna göre kapalıdır. Her $a,b \in S$ için $a-b \in S$ olduğun - dan özellikle $a \in S$ için $a-a=o \in S$ olur. Dolayısıyla S, A_3 şartını sağlar. $o \in S$ olduğundan her $a \in S$ için $O-a= -a \in S$ olur, yani S, A_4 şartını sağlar. Her $a \in S$ için $-a \in S$ olduğundan verilen hipoteze göre, her $a,b \in S$ için $a-(-b)=a+b \in S$ olur. Bu ise S nin toplama operasyonuna göre kapalı olduğunu gösterir. Netice olarak S, tarif.1.1.1. e göre R nin bir althalkasıdır.

TARİF.1.1.5.

R özdeş elemanlı bir halka olsun. R ye *cisim* denin, şayet her $a \in R \setminus \{o\}$ birim ise.

TARİF.1.1.6.

K bir cisim ve F de K nın boş olmayan bir altcümlesi olsun. F ye K nın *altcismi* denir, şayet F, K daki operasyonlara göre bir cisim teşkil ederse.

TEOREM.1.1.2. [5:Sh.16]

K bir cisim ve F de K nın boş olmayan bir altcümlesi olsun. F nin K nın bir altcümlesi olmasi için gerek ve yeter şart F;

1. $+$ ve $\cdot$ ya nazaran kapalı olmalıdır,
2. ı i ihtiva etmelidir,
3. F, kendisine ait her elemanın negatifini ve nötr elamandan farklı her elemanının inversini ihtiva etmelidir.

I.2. HALKA HOMOMORFİZMLERİ

TARİF.1.2.1.

R_1, R_2 iki halka ve Φ de R_1 cümlesinden R_2 cümlesine bir tasvir olsun. $\Phi: R_1 \to R_2$ tasvirine *homomorf tasvir* veya *homomorfizm* denir, şayet Φ operasyonları muhafaza ederse. Kısaca R_1 deki operasyonları $+$, $\cdot$ ve R_2 deki operasyonları da $\boxplus, \boxdot$ ile gösterirsek, $\Phi: R_1 \to R_2$ tasvirine *homomorfizm* denir, şayet her $a,b \in R_1$ için aşağıdaki şartlar sağlanıyor ise:

1. $\Phi(a+b)=\Phi(a) \boxplus \Phi(b)$
2. $\Phi(a.b)=\Phi(a) \boxdot \Phi(b)$

Φ, R_1 halkasından R_2 halkasına bir homomorfizm ise, bu taktirde R_2 nin $\{x \in R_2 : \exists\, y \in R_1, \Phi(y)=x\}$ şeklinde tarif edilen altcümlesine R_1 in *homomorf resmi* denir ve $\Phi(R_1)$ ile gösterilir.

TARİF.1.2.2.

R_1, R_2 iki halka ve $\Phi: R_1 \to R_2$ tasviride bir homomorfizm olsun. Bu taktirde,

1. Φ ye *monomorfizm* denir, şayet Φ *injektif* ise,
2. Φ ye *epimorfizm* denir, şayet Φ *sürjektif* ise,
3. Φ ye *izomorfizm* denir, şayet Φ *bijektif* ise,
4. Φ ye *otomorfizm* denir, şayet $R_1=R_2$ ve Φ bir *izomorfizm* ise.

TARİF.1.2.3.

R_1, R_2 nötr elemanları sırasıyla o_1, o_2 olan iki halka ve $\Phi: R_1 \to R_2$ tasviride R_1 den R_2 ye bir homomorfizm olsun. Bu taktirde,

1. R_1 in $\{x\in R_1 : \Phi(x)=o_2\}$ şeklinde tarif edilen alt cümlesine Φ *homomorfizminin çekirdeği* denir ve $Ker\ \Phi$ ile gösterilir.

2. $\Phi: R_1 \to R_2$ homomorfizmine *sıfır homomorfizm* denir, şayet $Ker\ \Phi=R_1$ veya $\Phi(R_1)=\{o_2\}$ ise.

3. Φ bir izomorfizm ise R_1 halkası R_2 halkasına *izomorftur* denir ve bu durum $R_1\cong R_2$ ile gösterilir.

TEOREM.1.2.1.

R_1, R_2 nötr elemanları sıra ile o_1,o_2 olan iki halka ve $\Phi: R_1 \to R_2$ tasviride R_1 den R_2 ye bir homomorfizm olsun. Bu taktirde,

1. $Ker\ \Phi$, R_1 in bir althalkasıdır,
2. $\Phi(R_1)$, R_2 nin bir althalkasıdır.

İSPAT.

1. $Ker\ \Phi:=\{x\in R_1 : \Phi(x)=o_2\}$ idi. x,y, $Ker\ \Phi$ ye ait herhangi iki eleman olsun. $x,y\in Ker\ \Phi$ olduğundan $\Phi(x)=o_2$ ve $\Phi(y)=o_2$dir. Binaenaleyh, Φ homomorfizm olduğundan $\Phi(x.y)=o_2$ ve $\Phi(x-y)=o_2$ elde edilir ki, bu ise $x-y,x.y\in Ker\ \Phi$ olduğunu ifade eder. Şu halde, teorem.1.1.1. e göre $Ker\ \Phi$, R_1 in bir althalkasıdır.

2. $\Phi(R_1):=\{x\in R_2 : y\in R_1, \Phi(y)=x\}$ idi. $x_1,x_2\in\Phi(R_1)$ e ait herhangi iki eleman olsun. $x_1,x_2\in\Phi(R_1)$ olduğundan $x_1=\Phi(y_1)$ ve $x_2=\Phi(y_2)$ olacak şekilde $y_1,y_2\in R_1$ mevcuttur. R_2 bir halka ve Φ bir homomorfizm olduğundan $x_1-x_2, x_1.x_2 \in R_2$ olup, $\Phi(y_1-y_2)=x_1-x_2$ ve $\Phi(y_1.y_2)=x_1.x_2$ dir. Diğer taraftan R_1 bir halka olduğundan $y_1.y_2, y_1-y_2\in R_1$ dir. Dolayısıyla $x_1.x_2$, $x_1-x_2\in\Phi(R_1)$ olup, $\Phi(R_1)$, R_2 nin althalkasıdır.

TEOREM.1.2.2.

R özdeş elemanlı bir halka ve F de bir cisim olsun. Farzedelimki, $R \cong F$ dir. Bu taktirde R de cisimdir .

İSPAT.

R ile F arasındaki izomorf tasvir $\Phi: R \to F$ olsun. Her $a \in R \setminus \{o\}$ için a nın birim olduğunu gösterirsek ispat tamamlanmış olur.

Φ izomorfizm olduğundan her $a \in R \setminus \{o\}$ için $\Phi(a) \neq o$ dır. Dolayısıyla her $a \in R \setminus \{o\}$ için $\Phi(a) \neq o$ olduğundan $\Phi(a)$ F de birimdir. Şu halde, her $a \in R \setminus \{o\}$ için:

$$\Phi(a).(\Phi(a))^{-1}=(\Phi(a))^{-1}.\Phi(a)=1$$

olacak şekilde bir ve birtek $(\Phi(a))^{-1} \in F$ elemanı vardır. Diğer taraftan Φ bir izomorfizm olduğundan R de bir ve birtek $b \in R$ elemanı vardır, öyleki $\Phi(b)=(\Phi(a))^{-1}$ dir. Bu $b \in R$ için $\Phi(a.b)=\Phi(b.a)=\Phi(b).\Phi(a)=(\Phi(a))^{-1}.\Phi(a)=1$ ve Φ nin bir izomorfizm olduğu göz önüne alınırsa $a.b=b.a=1$ elde edilir ki, bu eşitlik $a \in R \setminus \{o\}$ elemanının birim ve inversinin $a^{-1}=b$ olduğunu ifade eder. Şu halde , R cisimdir.

Bir cisimden bir halkaya verilen bir homomorfizm ya monomorfizmdir yada sıfır homomorfizmdir[6: Sh.280].

R bir halka ve M de R nin boş olmayan bir altcümlesi olsun. $a \in R$ olmak üzere R nin $\{a+x : x \in M\}$ şeklinde tarif edilen altcümlesine M nin *yan cümlesi* denir ve $a+M$ ile gösterilir.

I.3. İ D E A L L E R

TARİF.1.3.1.

R bir halka ve I da R nin boş olmayan bir altcümlesi olsun. I ya R nin bir *ideali* denir, şayet her $x,y \in I$

ve $r\in R$ için $x-y\in I$ ve $r.x, x.r\in I$ ise.

Tariften görülüyor ki, I,R nin bir ideali ise I aynı zamanda R nin bir althalkasıdır. Aşikar olarak, R nin nötr elemanından ibaret olan $\{o\}$ altcümlesi ile R nin kendisi R nin idealidir. Bu ideallere R nin *has olmayan idealleri* denir.

I,R halkasının $I\neq\{o\}$ ve $I\neq R$ şartlarını sağlayan bir ideali ise, I ya R nin *has ideali* denir.

TARİF.1.3.2.

R komütatif bir halka ve I da R nin bir ideali olsun. I ya R nin *asal ideali* denir, şayet $a.b\in I$ şartını sağlıyan R nin her a,b elemanı için $a\in I$ veya $b\in I$ bağıntılarından en az biri doğru ise.

TARİF.1.3.3.

R komütatif bir halka ve I da R nin bir has ideali olsun. I ya R nin *maksimal ideali* denir, şayet R nin I yı ihtiva eden her J has ideali için $I=J$ ise.

MİSAL.1.3.1.

R özdeş elemanlı komütatif bir halka ve $A\neq\emptyset$ da R nin bir altcümlesi olsun. R nin A yı ihtiva eden bütün ideallerinin arakesiti R nin bir idealidir. Bu ideale *A tarafından tevlit edilen ideal* denir ve (A) ile gösterilir. Kolaylıkla görülür ki, (A) aşağıdaki özellikleri haizdir:

1. (A),R nin A yı ihtiva eden en küçük idealidir,
2. $(A)=\{\sum_{i=1}^{n} r_i.a_i : r_i\in R,\ a_i\in A\}$

R nin sonlu $\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ altcümlesi tarafından tevlit edilen ideali $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ ile gösterilir.

MİSAL.1.3.2.

R özdeş elemanlı komütatif bir halka ve M de R nin boş olmayan bir altcümlesi olsun. $a\in R$ olmak üzere R nin a, M yi ihtiva eden ideallerinin arakesiti R nin bir idealidir ve bu ideal (a,M) ile gösterilir. Bu tariften kolayca aşağıdaki özellikler ispat edilir:

1. (a,M),R nin a ve M yi ihtiva eden en küçük idealidir,
2. $(a,M)=\{a.r+\sum_{i=1}^{n} r_i.m_i \ : \ r,r_i\in R, \ m_i\in M\}$
3. M,R nin bir ideali ise $(a,M)=\{a.r+m: \ r\in R, m\in M\}$.

TARİF.1.3.4.

R özdeş elemanlı komütatif bir halka ve $a\in R$ olsun. (a) idealine, R nin a tarafından tevlit edilen *asli ideali* denir.

TARİF.1.3.5.

R özdeş elemanlı komütatif bir halka ve (a) da Rnin has bir asli ideali olsun. (a) asli idealine R nin *maksimal asli ideali* denir, şayet R nin $(a)\subset(b)$ şartını sağlıyan her has (b) asli ideali için $(a)=(b)$ ise.

TEOREM.1.3.1.

R özdeş elemanlı komütatif bir halka ve I da R nin bir has ideali olsun. I idealinin maksimal olması için gerek ve yeter şart, her $a\in R\setminus I$ için $(a,I)=R$ olmasıdır.

İSPAT.

I ideali maksimal ise her $a\in R\setminus I$ için $(a,I)=R$ dir. Aksini farzedelim, en az bir $a_o\in R\setminus I$ için $(a_o,I)\neq R$ olsun. Bu taktirde (a_o,I),R nin I yı ihtiva eden has bir idealidir. I ideali maksimal ve $I\subset(a_o,I)$ olduğundan $I=(a_o,I)$ elde edilir. $a_o\in R\setminus I$ olduğundan $a_o\notin I$ dır. Halbuki $I=(a_o,I)$ eşitliği bize $a_o \in I$ olduğunu gösterir ki bu bir tezattır. Şu halde her $a \in R \setminus I$ için $(a,I)=R$ olmak zorundadır.

Karşıt olarak, her $a \in R \setminus I$ için $(a,I)=R$ ise I ideali maksimaldir. Farz edelimki I ideali maksimal olmasın. Bu taktirde R özdeş elemanlı bir komütatif halka olduğundan R nin Iyı ihtiva eden bir J maksimal ideali mevcuttur [11:Sh.393]. $I \subset J$ ve I maksimal olmadığından $J \setminus I \neq \emptyset$ olup, J de I ya ait olmayan a_o gibi bir eleman mevcuttur. J, R nin bir ideali ve $a_o \in J$ olduğundan $(a_o,I)=J$ dir. Diğer taraftan $a_o \notin I$ olduğundan hipoteze göre $(a_o,I)=R$dir. Bulunan son iki eşitlikten $J=R$ elde edilirki; bu J nin maksimal oluşuna aykırıdır. Şu halde I ideali maksimal olmak zorundadır.

TEOREM.1.3.2.

R özdeş elemanlı komütatif bir halka ve I da Rnin bir maksimal ideali olsun. Bu taktirde I, R nin bir asal idealidir.

İSPAT.

Farzedelim ki, I ideali asal olmasın. Bu taktirde $a.b \in I$ olduğu halde $a \notin I$ ve $b \notin I$ olan R ait en az bir a,b çifti mevcuttur. I ideali maksimal ve $a \notin I$ olduğundan önceki teoreme göre $(a,I)=R$ dir. R özdeş elemanlı olduğundan R nin 1 özdeş elemanı (a,I) idealine aittir. Şu halde, misal.1.3.2. ye göre $1=a.r+m$ olacak şekilde $r \in R$ ve $m \in I$ elamanları mevcuttur. Buradan $a.b, m \in I$ ve I nın ideal olduğu göz önüne alınırsa $b=b.1=1.b=(a.b).r+m.b \in I$ elde edilir ki bu $b \notin I$ faraziyesine aykırıdır. Şu halde, I ideali asal olmak zorundadır.

I.4. BÖLÜM HALKASI

R özdeş elemanlı komütatif bir halka I da R nin bir ideali olsun. $a,b \in R$ için $a-b \in I$ ise *a kongrüenttir b Modülo I* denir ve bu durum $a \equiv b$ $Mod(I)$ ile gösterilir. Kolaylıkla görülür ki, bu şekilde tarif edilen $\equiv$ bağıntısı bir *eşdeğerlik bağıntısı* olup, R yi *ayrık kalan sınıflarına* böler[5:Sh.2]. Açık olarak $a \in R$ yi ihtiva eden ayrık kalan sınıfı $[a]$ ile gösterilirse, $[a]=a+I$ dir.

R nin $\equiv$ eşdeğerlik bağıntısına göre bütün ayrık kalan sınıflarından meydana gelen cümleyi R/I ile gösterelim. R/I da toplama ve çarpma operasyonları $[a],[b] \in R/I$ için,

$$[a]+[b]:=[a+b] \text{ ve } [a].[b]:=[a.b]$$

şeklinde tarif edilirse(Bu şekilde tarif edilen toplama ve çarpma operasyonları iyi tariflidir, yani sınıfları temsil eden elemanlara değil sadece sınıflara bağlıdır). R/I bu operasyonlara göre özdeş elemanlı komütatif bir halka teşkil eder[12:Sh.186-187]. R/I ya R nin I idealine göre *bölüm halkası* denir. R nötr elemanı o ve özdeş elemanı 1 ile gösterilirse, R/I nın nötr ve özdeş elemanları sırasıyla $[o]=I$, $[1]=1+I$ ayrık kalan sınıflarıdır.

TEOREM.1.4.1.

R özdeş elemanlı komütatif bir halka ve I da Rnin bir has ideali olsun. I idealinin maksimal olması için gerek ve yeter şart, R/I nın cisim olmasıdır.

İSPAT.

I ideali maksimal ise R/I cisimdir. $[a]$, R/I nın $[o]$ den farklı bir elemanı olsun. $[a]\neq[o]=I$ olduğundan $a \notin I$ dır. Diğer taraftan I ideali maksimal olduğundan teorem.1.3.1 e göre $(a,I)=R$ dir. Şu halde R nin 1 özdeş elemanı (a,I) idealine ait olup, $1=a.b+m$ olacak şekilde $b\in R$ ve $m\in I$ elamanları mevcuttur. $m\in I$ olduğundan $[m]=[o]=I$ dır. Binaen - aleh $1=a.b+m$ eşitliğinden $[a].[b]=[1]$ elde edilirki, buda R/I nın nötr elemandan farklı her elemanının birim olduğunu ifade eder. Şu halde, R/I bir cisimdir.

Tersine olarak R/I cisim ise I ideali maksimaldir . $a, R\setminus I$ ya ait keyfi bir eleman olsun. $a\in R\setminus I$ olduğundan $[a]\neq[o]$ dır. Şu halde R/I nın cisim olduğu göz önüne alınırsa $[1]=[a].[b]=[a.b]$ olacak şekilde bir $[b]\in R/I$ kalan sınıfı mevcuttur. $[1]=[a.b]$ olduğundan $1\equiv a.b \ Mod(I)$ olup, $1=a.b+m$ olacak şekilde bir $m\in I$ elemanının mevcut olduğunu gösterir ki, buda $1\in(a,I)$ yani $(a,I)=R$ olduğunu gösterir. $a\in R\setminus I$ keyfi ve $(a,I)=R$ olduğundan teorem.1.3.1 e göre I ideali maksimaldir.

BÖLÜM - II

GENEL TOPOLOJİ

I.1. TOPOLOJİK UZAYLAR [5].

TARİF.2.1.1.

Elemanlarına nokta adı verilen bir G cümlesine *uzay* denir. A, G uzayının bir altcümlesi olsun. G nin $\{x\in G: x\notin A\}$ şeklinde tarif edilen altcümlesine A nın G ye göre bütünleyeni denir ve $G\setminus A$ notasyonu ile gösterilir.

TARİF.2.1.2.

$G\neq\emptyset$ bir uzay ve χ de G nin altcümlelerinden meydana gelen bir aile olsun. χ ye G de bir *topoloji* tarif ediyor veya G, bir χ *topolojik strüktürünü haizdir* denir, şayet χ aşağıdaki şartları sağlar ise:

1. $G,\emptyset\in\chi$ dir,
2. χ ye ait herhangi bir altcümle kolleksiyonunun birleşimi yine χ ye aittir.
3. χ ye ait herhangi bir sonlu altcümle kolleksiyonunun arakesiti yine χ ye aittir.

$G\neq\emptyset$ olan bir uzay ve χ de G üzerinde bir topolojik strüktür olsun. Bu taktirde (G,χ) çiftine *topolojik uzay* denir. Görülüyorki, bir topolojik uzay boş olmayan bir G uzayı ve bir χ topolojisi olmak üzere iki şeyden müteşekkildir.

(G,χ) bir topolojik uzay ise χ nin elemanlarına G nin *açık altcümleleri* denir ve umumiyetle O harfi ile gösterilir.

TARİF.2.1.3.

(G,χ) bir topolojik uzay ve $A\subset G$ olsun. A ya G nin *kapalı altcümlesi* denir, şayet $G\setminus A$ açık ise.

Açık ve kapalı cümlelerin tariflerinden görülüyorki, bir (G,χ) topolojik uzayında G ve $\emptyset$ hem açık ve hemde kapalı altcümlelerdir.

(G,χ) bir topolojik uzay ve A da G nin boş olmayan bir altcümlesi olsun. Bu taktirde A nın altcümlelerinden ibaret olan $\chi_1 := \{A\cap O : O\in\chi\}$ kolleksiyonu A üzerinde bir topoloji tarif eder. Bu topolojiye χ nin A da intaç ettiği *Rölatif topoloji* denir.

TARİF.2.1.4.

(G,χ) bir topolojik uzay olsun. (G,χ) ye *Hausdorff uzayı* denir, şayet $p\neq q$ şartını sağlıyan G nin her elemanı için $O_p\cap O_q=\emptyset$ şartını sağlıyan $O_p, O_q\in\chi$ açık cümleleri mevcut ise $(p\in O_p, q\in O_q)$.

TARİF.2.1.5.

(G,χ) bir topolojik uzay ve $A\subset G$ olsun. G nin bir V altcümlesine A nın bir civarı denir, şayet G nin $A\subset O\subset V$ şartını sağlıyan en az bir O açık altcümlesi mevcut ise.

A nın G nin sadece birtek p noktasından ibaret olması halinde bu civar umumiyetle $V(p)$ ile gösterilir.

TARİF.2.1.6.

(G,χ) topolojik uzayına irtibatlıdır denir, şayet G arakesiti boş olan boştan farklı iki açık altcümlesinin birleşimi olarak ifade edilemez ise.

G nin boş olmayan bir A altcümlesine irtibatlıdır denir, şayet A rölatif topolojide irtibatlı ise.

G nin irtibatlı ve açık olan bir altcümlesine *bölge* denir.

TARİF.2.1.7.

(G,χ) bir topolojik uzay ve Λ da bir indeks (işaret) cümlesi olsun. χ nin $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ alt ailesine G nin *açık örtmesi* denir, şayet $G=\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$ ise.

G nin $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ açık örtmesine *sonludur* denir, şayet Λ indeks cümlesi sonlu ise.

TARİF.2.1.8.

(G,χ) topolojik uzayına *kompakttır* denir, şayet G nin herhangi bir açık örtmesinden sonlu bir altörtme çıkarılabilir ise.

G nin bir altcümlesine kompakttır denir, şayet bu altcümle rölatif topolojide kompakt ise.

TARİF.2.1.9.

(G,χ) bir Hausdorff uzayı olsun. (G,χ) uzayına *Normal Uzay* denir, şayet G de arakesitleri boş olan X, Y gibi herhangi iki kapalı altcümle verildiğinde $X\subset O_1, Y\subset O_2$ ve $O_1\cap O_2=\emptyset$ şartlarını sağlıyan $O_1,O_2\in\chi$ açık cümleleri mevcut ise[6:Sh.242].

(G,χ) Kompakt bir Hausdorff uzayı ise, (G,χ) uzayı normaldir[6:Sh.245].

Bir karışıklığa meydan verilmedikçe, (G,χ) topolojik uzayı sadece G ile gösterilir.

2.2. TOPOLOJİK UZAYLARDA SÜREKLİ FONKSİYONLAR .

TARİR.2.2.1.

X,Y iki topolojik uzay ve f de X uzayından Y uzayına bir tasvir olsun. $f: X \to Y$ tasvirine $p \in X$ noktasında *süreklidir* denir, şayet $p'=f(p) \in Y$ noktasının her $V'(p')$ civarı için p nin $f(V) \subset V'$ şartını sağlıyan en az birtek $V=V(p)$ civarı mevcut ise.

$f: X \to Y$ tasvirine X de *süreklidir* denir, şayet f tasviri X uzayının her noktasında sürekli ise.

X,X' iki topolojik uzay ve A,A' de sıra ile X,X' uzaylarının boş olmayan altcümleleri olsun. A dan A'ye verilen bir $f:A \to A'$ tasvirinin sürekliliği incelenirken A, A' rölatif topolojik uzaylar olarak göz önüne alınır.

TARİF.2.2.2.

X,Y iki topolojik uzay ve f de X uzayından Y uzayına bir tasvir olsun. $f:X \to Y$ tasvirine *homeomorfizm* veya *topolojik tasvir* denir, şayet f aşağıdaki şartları sağlıyor ise:

1. f tasviri bijektiftir,
2. f, f^{-1} tasvirleri süreklidir.

X,Y iki topolojik uzay ve $f:X \to Y$ tasviride bir homeomorfizm olsun. Bu taktirde X topolojik uzayı Y uzayına *homeomorftur* denir.

Sürekli bir tasvir, irtibatlı cümleleri irtibatlı cümlelere ve kompakt cümleleri de kompakt cümlelere dönüştürür. Topolojik tasvirler ise daha fazla olarak, açık cümleleri açık cümlelere ve kapalı cümleleri de kapalı cümlelere dönüştürür[5:Sh.429].

Bu paragrafın geriye kalan kısmında *Riemann Yüzeyleri* hakkında bilgi verilecektir.

TARİF.2.2.3.

D_1, D_2 $\mathbb{C}$ kompleks düzleminde iki bölge olsun. D_1 bölgesi D_2 bölgesine *konform eşdeğerdir* denir ve $D_1 \approx D_2$ yazılır, şayet D_1 bölgesinden D_2 bölgesine bijektif ve analitik bir $\gamma : D_1 \to D_2$ fonksiyonu mevcut ise.

Aşikar olarak $D_1 \approx D_2$ ise $D_2 \approx D_1$ dir.

TARİF.2.2.4.

R irtibatlı bir Hausdorff uzayı olsun. R ye *Riemann Yüzeyi* denir, şayet aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa :

1. R nin her p_0 noktasının enaz bir N_{p_0} açık civarı vardır, öyleki bu N_{p_0} açık civarı $z_0 = \psi_{p_0}(p_0)$ olmak üzere $z = \psi_{p_0}(p)$ topolojik tasviri ile kompleks düzlemin uygun bir $U_r := \{z \in C : |z - z_0| < r\}$ açık dairesine homeomorftur.

$N_{p_0} \subset R$ açık cümlesine p_0 merkezli *parametre dairesi* ve $z = \psi_{p_0}(p)$ tasvirine de p_0 noktasına ait *Lokal parametre* denir.

2. N_{p_0} ve $N_{p_0'}$, R nin $N_{p_0} \cap N_{p_0'} \neq \emptyset$ şartını sağlıyan iki parametre dairesi ve bu parametre dairelerine ait homeomorfizmler sıra ile ψ_{p_0} ve $\psi_{p_0'}$ ise $\phi(z) = (\psi_{p_0} \circ \psi_{p_0'}^{-1})(z)$ tasviri tarif bölgesinde analitiktir, yani $\psi_{p_0}(N_{p_0} \cap N_{p_0'})$ ve $\psi_{p_0'}(N_{p_0} \cap N_{p_0'})$ bölgeleri kompleks düzlemde konform eşdeğerdir.

R bir Riemann Yüzeyi, $p_0 \in R$ ve N_{p_0}, $z = \psi_{p_0}(p)$ da sıra ile p_0 noktasına ait parametre dairesi ve lokal parametreyi göstersin. $z = \psi_{p_0}(p)$ lokal parametresi altında her $p \in N_{p_0}$ noktasına kompleks düzlemde birtek nokta tekabül eder.

Bu itibarla $p \in N_{p_o}$ noktası ile bunun ψ_{p_o} tasviri altındaki z resmi özdeş kabul edilebilir. Keza N_{p_o} parametre dairesi ile U_r açık daireside özdeş kabul edilebilir.

Kompleks düzlemde bir D bölgesi, her $z_o \in D$ noktası için N_{z_o} parametre daireleri olarak z_o noktasının Dnin içinde bulunan açık daireleri ve $\psi_{z_o}(z)$ lokal parametreleri olarakta $\psi_{z_o}(z):=j(z):=z$ *özdeş fonksiyonu* alınırsa, D bir Riemann Yüzeyi olur.

TARİF.2.2.5.

R bir Riemann yüzeyi ve F de R üzerinde tarif edilmiş kompleks değerli bir fonksiyon olsun. F ye R de *analitiktir* denir, şayet *her* $p_o \in R$ için $f(z):=(F \circ \psi_{p_o}^{-1})(z)$ fonksiyonu U_r de analitik ise.

TARİF.2.2.6.

R_1, R_2 iki Riemann yüzeyi ve F de R_1 den R_2 ye sürekli bir tasvir olsun. $F: R_1 \to R_2$ tasvirine R_1 de analitiktir denir, şayet her $p_o \in R_1$ için $p_o' := F(p_o)$ olmak üzere $\Psi(z):=(\psi_{p_o'} \circ F \circ \psi_{p_o}^{-1})(z)$ fonksiyonu tarif bölgesinde analitik ise.

TARİF.2.2.7.

R_1 , R_2 iki Riemann yüzeyi olsun. R_1, R_2 ye *konform eşdeğerdir* denir ve $R_1 \simeq R_2$ yazılır, şayet R_1 den R_2 ye bijektif ve analitik bir $\gamma: R_1 \to R_2$ tasviri mevcut ise.

Açık olarak $R_1 \simeq R_2$ ise $R_2 \simeq R_1$ dir.

2.3. SÜREKLİ FONKSİYON HALKALARI

X bir topolojik uzay ve $C(X)$ de X üzerinde tarif edilmiş kompleks değerli bütün sürekli fonksiyonların cümlesi olsun. $F,G\in C(X)$ için bu fonksiyonların $F+G$ toplamı ve $F.G$ çarpımı, her $p\in X$ için;

$$(F+G)(p):=F(p)+G(p),$$
$$(F.G)(p):=F(p).G(p)$$

şeklinde tarif edilirse, $C(X)$ bu iki operasyona göre özdeş elemanlı komütatif bir halka teşkil eder. Her $p\in X$ için sabit bir $c\in\mathbb{C}$ değerini alan fonksiyon c ile gösterilirse , $C(X)$ halkasının nötr ve özdeş elemanları sıra ile $0,1$ fonksiyonlarıdır.

TEOREM.2.3.1.

X bir topolojik uzay ve $p\in X$ olsun. Bu taktirde $C(X)$ in $I_p:=\{F\in C(X):F(p)=0\}$ şeklinde tarif edilen altcümlesi $C(X)$ in bir maksimal idealidir.

İSPAT.

Açık olarak I_p, $C(X)$ in bir idealidir. Diğer taraftan $\Phi: C(X)\to\mathbb{C}$ tasviri her $F\in C(X)$ için $\Phi(F):=F(p)$ şeklinde tarif edilirse; Φ tasviri bir epimorfizm olup, $Ker\ \Phi=I_p$ dir. Öte yandan $C(X)/I_p\cong\mathbb{C}$ dir[12:Sh.189]. $\mathbb{C}$ cisim ve $C(X)/I_p\cong\mathbb{C}$ olduğundan teorem.1.2.2. ye göre, $C(X)/I_p$ bölüm halkası bir cisimdir. Binaenaleyh teorem.1.4.1. den dolayı I_p, $C(X)$ in bir maksimal idealidir.

X, Kompakt bir Hausdorff uzayı ise $C(X)$ in maksimal idealleri aşağıdaki teorem ile karakterize edilirler .

TEOREM.2.3.2. [12:Sh.328]

X Kompakt bir Hausdorff uzayı olsun. Bu taktirde $C(X)$ in her maksimal ideali I_p tipindedir(yani uygun bir $p\in X$ için I_p ye eşittir) ve $C(X)$ in bütün maksimal ideallerinin Ω uzayı ile X arasında bijektif bir tekâbül vardır.

Diğer taraftan iki kompakt Hausdorff uzayının homeomorf olması, bu uzaylar üzerinde tarif edilmiş bütün kompleks değerli sürekli fonksiyon halkaları ile aşağıdaki teorem ile karakterize edilir.

*TEOREM.2.3.2** [*Banach Stone Teoremi*:12,Sh.330]

X ,Y İki kompakt Hausdorff uzayı olsun. X,Y uzaylarının homeomorf olması için gerek ve yeter şart,$C(X)\cong C(Y)$ olmasıdır.

2.4. SIFIR CÜMLELERİ

X Bir topolojik uzay ve $C(X)$ de X üzerinde tarif edilmiş bütün kompleks değerli sürekli fonksiyonların halkası olsun.

TARİF.2.4.1.

$F\in C(X)$ olsun. F fonksiyonunun *sıfır cümlesi* diye X uzayının $\{p\in X:F(p)=o\}$ şeklinde tarif edilen altcümlesine denir ve $Z(F)$ ile gösterilir. Sıfır cümlelerini cebirsel cümleler olarak telakki edeceğiz. $p\in Z(F)$ noktasına F nin *basit sıfır noktası* denir, şayet p noktası $Z(F)$ de bir defa vukubuluyor ise.

TARİF.2.4.2.

$F\in C(X)$ fonksiyonuna *birimdir* denir, yanlız ve yanlız $Z(F)=\emptyset$ ise.

TARİF.2.4.3.

$F\in C(X)$ olsun. F fonksiyonunun *konjügesi* diye, her $p\in X$ için $\overline{F(p)}$ değerini alan fonksiyona denir ve $\bar{F}$ ile gösterilir. Şu halde tarife göre , her $p\in X$ için $(\bar{F})(p)=\overline{F(p)}$dir.

TARİF.2.4.4.

$F\in C(X)$ olsun. F fonksiyonunun *modülü* diye, her $p\in X$ için $|F(p)|$ değerini alan fonksiyona denir ve $|F|$ ile gösterilir. Binaenaleh, tarife göre her $p\in X$ için $|F|(p)=|F(p)|$ dir.

Diğer taraftan kolayca görülür ki, $F\in C(X)$ ise $|F|$, $\bar{F}\in C(X)$ olup; $|F|^2=F.\bar{F}$ dir.

LEMMA.2.4.1.

$F,G\in C(X)$ olsun. Bu taktirde, $Z(F)\cap Z(G)=Z(|F|^2+|G|^2)$ dir.

İSPAT.

$p\in Z(F)\cap Z(G)$ keyfi bir nokta olsun. $p\in Z(F)\cap Z(G)$ olduğundan $F(p)=o$, $G(p)=o$ dır. Dolayısıyla $|F(p)|^2=o$, $|G(p)|^2=o$ olup; $p\in Z(|F|^2+|G|^2)$ dir. $p\in Z(F)\cap Z(G)$ keyfi olduğundan

$Z(F)\cap Z(G)\subset Z(|F|^2+|G|^2)$ ....(*) elde edilir.

Diğer taraftan $q\in Z(|F|^2+|G|^2)$ keyfi bir eleman olsun. $q\in Z(|F|^2+|G|^2)$ olduğundan $(|F|^2+|G|^2)(q)=o$ dır. Bu eşitlikten $|F(q)|^2=o$ ve $|G(q)|^2=o$ elde edilir ki; bu ise $F(q)=o$ ve $G(q)=o$ olduğunu gösterir. Şu halde $q\in Z(F)\cap Z(G)$ dir. $q\in Z(|F|^2+|G|^2)$ keyfi olduğundan,

$Z(|F|^2+|G|^2)\subset Z(F)\cap Z(G)$ ....(¤) elde edilir.

(*), (¤) dan $Z(F)\cap Z(G)=Z(|F|^2+|G|^2)$ elde edilir.

Benzer şekilde gösterilirki, $Z(F)\cap Z(G)=Z(|F|+|G|)$.

TEOREM.2.4.1. [8:Sh.284]

X bir topolojik uzay ve $C(X)$ de X üzerinde tarif edilmiş kompleks değerli bütün sürekli fonksiyonların halkası olsun. Farzedelim ki, X topolojik uzayı ile $C(X)$ halkasının bütün maksimal ideallerinin Ω uzayı arasında bijektif bir tekâbül mevcuttur. Bu taktirde $F_1, F_2, \ldots, F_n \in C(X)$, $i \neq j$ için $Z(F_i)\cap Z(F_j)=\emptyset$ şartını sağlıyan n-tane fonksiyon ise; $C(X)$ de $F_1.E_1+F_2.E_2+\ldots+F_n.E_n=1$ olacak şekilde n-tane $E_1, E_2, \ldots E_n$ fonksiyonları mevcuttur.

2.5. ANALİTİK FONKSİYON HALKALARI

R bir Riemann Yüzeyi ve $A(R)$ de R üzerinde tarif edilmiş kompleks değerli bütün analitik fonksiyonların cümlesi olsun. Her $p \in R$ sabit bir $c(c \in \mathbb{C})$ değerini alan fonksiyon c ile gösterilir ve $F, G \in A(R)$ için bu fonksiyonların $F+G$ toplamı ile $F.G$ çarpımı her $p \in R$ için;

$$(F+G)(p):=F(p)+G(p),\quad (F.G)(p):=F(p).G(p)$$

şeklinde tarif edilirse, $A(R)$ özdeş elemanlı komütatif bir halka teşkil eder. $A(R)$ halkasının nötr ve özdeş elemanları sıra ile o ve 1 sabit fonksiyonlarıdır.

TARİF.2.5.1. [3]

$F \in A(R)$ olsun. F fonksiyonunun *sıfır cümlesi* diye, R nin $\{p \in R:\ F(p)=o\}$ şeklinde tarif edilen altcümlesine denir ve $Z(F)$ ile gösterilir.

$p_o \in Z(F)$ olsun. p_o noktasına F fonksiyonunun *m.mertebeden sıfır yeri* denir, şayet $z=\psi_{p_o}(p)$ p_o merkezli N_{p_o} parametre dairesini kompleks düzlemde $U_r:=\{z \in \mathbb{C}:\ |z-z_o|<r\}$ açık

dairesine topolojik resmeden lokal parametre olmak üzere ($z_o=\psi_{p_o}(p_o)$) bir $m \geq 1$ tamsayısı ve aşağıdaki şartları sağlıyan U_r de analitik bir $g(z)$ fonksiyonu mevcut ise:

1. $g(z_o) \neq 0$ dır,
2. Her $z \in U_r$ için, $(F\circ\psi_{p_o}^{-1})(z)=(z-z_o)^m.g(z)$ dir.

$p_o \in Z(F)$ noktasına F fonksiyonunun *basit sıfır yeri* denir, şayet $m=1$ ise.

TARİF.2.5.2. [3]

$F \in A(R)$ fonksiyonuna *birim* denir, yanlız ve yanlız $Z(F)=\emptyset$ ise.

TARİF.2.5.3. [3]

$F,G \in A(R)$ olsun. F fonksiyonu G yi *böler* diyoruz , yanlız ve yanlız $Z(F) \subset Z(G)$ ise.

Florack göstermiştir ki; R Riemann yüzeyinde herhangibir $p_o \in R$ noktası verildiğinde, $R \setminus \{p_o\}$ ın her noktasında sıfırdan farklı olan ve $p_o \in R$ noktasında basit sıfır yeri olan bir $F \in A(R)$ fonksiyonu mevcuttur [10].

LEMMA.2.5.1. [7:Sh.270]

$F_1,F_2,\ldots,F_n \in A(R)$, $i\neq j$ için $Z(F_i)\cap Z(F_j)=\emptyset$ şartını sağlıyan n-tane fonksiyon olsun. Bu taktirde $A(R)$ de $F_1.E_1+F_2.E_2+\ldots+F_n.E_n=1$ olacak şekilde n- tane $E_1,E_2,\ldots,E_n$ fonksiyonları mevcuttur.

LEMMA.2.5.2.

R_1,R_2 konform eşdeğer iki Riemann yüzeyi olsun. Bu taktirde $A(R_1) \cong A(R_2)$ dir.

İSPAT.

$R_1 \simeq R_2$ olduğundan R_1 den R_2 ye bijektif ve analitik bir $\gamma: R_1 \to R_2$ tasviri mevcuttur. $\Phi: A(R_1) \to A(R_2)$ tasviri her $F \in A(R_1)$ için $\Phi(F) := F \circ \gamma^{-1}$ şeklinde tarif edilirse, Φ tasviri bir izomorfizm olup; $A(R_1) \cong A(R_2)$ elde edilir.

Tersine olarak $A(R_1), A(R_2)$ halkaları arasında sabitleri muhafaza eden bir izomorfizm mevcut ise R_1, R_2 Riemann Yüzeyleri konform eşdeğerdir[7:Sh.272].

$A(R)$ de basit sıfır yerlerinin karakterizasyonu aşağıdaki teorem ile ifade edilir.

TEOREM.2.5.1. [3:Sh.6].

$F \in A(R)$ ve $I = (F)$ olsun. F nin R de sadece bir tek basit sıfırı olması için gerek ve yeter şart $A(R)/I$ nin $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismine izomorf bir cisim olmasıdır.

B Ö L Ü M - III

RIEMANN YÜZEYLERİNİN CEBİRSEL KARAKTERİZASYONU VE ÜNİFORMİZASYON TEOREMİ

Bu çalışmamızda, $D:=\{z\in\mathbb{C}: |z|<1\}$ tarif edilmiş kompleks tek değerli analitik fonksiyonların $A(D)$ halkasından, bir R *1-Boyutlu Çokkatlısı* üzerinde tarif edilmiş kompleks değerli bütün sürekli fonksiyonların $C(R)$ halkasına bazı şartlara tabi bir izomorfizm yardımıyla, R nin basit irtibatlı bir Riemann Yüzeyine intikalini göstereceğiz. Ayrıca $C(R)$ halkasında basit sıfır yerlerinin bir karakterizasyonunu vereceğiz.

3.I. TARİFLER

TARİF.3.1.1.

R bir Hausdorff topolojik uzayı olsun. R ye *1-Boyutlu Çokkatlı* denir, şayet R nin her p_o noktasının en az bir N_{p_o} açık civarı $z_o=\psi_{p_o}(p_o)$ olmak üzere $z=\psi_{p_o}(p)$ tasviri ile kompleks düzlemin bir $U_r:=\{z\in\mathbb{C}: |z-z_o|<r\}$ açık dairesine homeomorf ise.

N_{p_o} açık civarına p_o *merkezli parametre dairesi* ve $z=\psi_{p_o}(p)$ tasvirinede p_o noktasına ait *lokal parametre* denir. R üzerindeki bir p noktasını bu noktanın ait olduğu N_{p_o} civarına ait ψ_{p_o} lokal parametre tasviri altında aldığı değer ile özdeş kabul edeceğiz. Böylece p yi ihtiva eden N_{p_o} ile U_r özdeş kabul edilmiş olur.

MİSAL.3.1.1.

N_{z_o} parametre daireleri olarak, z_o merkezli açık dai -

reler ve $\psi_{z_o}(z)$ lokal parametreleri olarakta her $z\in\mathbb{C}$ için $j(z):=z$ özdeş fonksiyonu alınırsa $\mathbb{C}$ kompleks düzlemi bir *1-Boyutlu Çokkatlı* olur.

TARİF.3.1.2.

R, 1-Boyutlu çokkatlısı üzerinde tarif edilmiş bütün sürekli kompleks değerli fonksiyonların halkası $C(R)$ olsun. Her $p\in R$ için p noktasının ait olduğu N_{p_o} parametre dairesine ait lokal parametre $z=\psi_{p_o}(p)$ olmak üzere N_{p_o} da $J(p)=(J\circ\psi_{p_o}^{-1})(z)=j(z)=z$ değerini alan J fonksiyonuna R de tarifli özdeş fonksiyon denir.

Açık olarak $J\in C(R)$ dir.

TARİF.3.1.3. [4]

$C(R)$, bir R 1-Boyutlu çokkatlısı üzerinde tarif edilmiş bütün sürekli fonksiyonların halkası olsun. $C(R)$ halkasına *Florack-Uluçay hassasını* haizdir denir, şayet aşağıdaki şartlar sağlanıyor ise:

1. Her $p\in R$ için p noktasında birtek basit sıfır yeri olan ve R nin diğer noktalarında sıfırdan farklı olan bir $F_p\in C(R)$ fonksiyonu mevcuttur,

2. $G\in C(R)$ ve $p\in R$ için $G(p)=o$ ise G, F_p nin bir katıdır, yani $G=H.F_p$ olacak şekilde bir $H\in C(R)$ fonksiyonu mevcuttur.

3.2. RIEMANN YÜZEYLERİNİN CEBİRSEL KARAKTERİZASYONU VE ÜNİFORMİZASYON TEOREMİ.

$C(R)$, R 1-Boyutlu çokkatlısı üzerinde tarif edilen kompleks değerli bütün sürekli fonksiyonların *Florack-Uluçay hassasını* haiz halkası olsun. Bu taktirde:

LEMMA.3.2.1.

R'nin herbir p noktasına $C(R)$ nin $I_p := \{F : F(p)=o\}$ maksimal idealine eşit olan bir maksimal asli ideal teka - bül eder.

İSPAT.

p,R nin keyfi bir noktası olsun.$C(R)$ Florack-Uluçay hassasını haiz olduğundan $p \in R$ için birtek basit sıfır noktası olan ve R nin diğer noktalarında sıfırdan farklı olan bir $F_p \in C(R)$ fonksiyonu mevcuttur, öyleki $p \in R$ noktasında sıfır olan her fonksiyon F_p nin bir katıdır.

$C(R)$ nin (F_p) asli idealini göz önüne alalım. İddia ediyoruz ki; (F_p) asli ideali, maksimal asli ideal olup I_p ye eşittir. $F_p(p)=o$ olduğundan $1 \notin (F_p)$ dir. Dolayısıyla (F_p), $C(R)$ nin has bir asli idealidir. (G), $C(R)$ nin (F_p) yi ihtiva eden herhangi bir has asli ideali olsun. $(G) \neq C(R)$ olduğundan $Z(G) \neq \emptyset$ dır. Aksi halde G birim olup, $1 \in (G)$ elde edilirki bu durum; $(G) \neq C(R)$ olmasına aykırıdır. $(F_p) \subset (G)$ olduğundan $F_p = G.H$ olacak şekilde bir $H \in C(R)$ fonksiyonu mevcuttur. F_p fonksiyonu $p \in R$ noktasında basit sıfır yerini haiz ve R nin diğer noktalarında sıfırdan farklı olduğundan $F_p = G.H$ eşitliğinden $G(p) = o$ ve $Z(H) = \emptyset$ elde edilir. Şu halde G,F_p nin bir katı olup $(G) \subset (F_p)$ dır. Öte yandan $(F_p) \subset (G)$ olduğundan $(F_p) = (G)$ elde edilir. O halde, (F_p) ,$C(R)$ nin bir maksimal asli idealidir. $p \in R$ noktasında sıfır olan her fonksiyon F_p nin bir katı olduğundan açık olarak $I_p = (F_p)$ dir.

Diğer taraftan kolayca görülürki; $p,q \in R$ ve $p \neq q$ için $I_p \neq I_q$ dir.

LEMMA.3.2.2.

(G), $C(R)$ nin herhangibir maksimal asli ideali olsun. Bu taktirde G nin R de sadece birtek basit sıfır noktası vardır ve G ,R nin diğer noktalarında sıfırdan farklıdır.

İSPAT.

(G), $C(R)$ nin maksimal asli ideali olduğundan (G) ideali $C(R)$ den farklıdır. Dolayısıyla $Z(G)\neq\emptyset$ olur. Aksi halde G birim olup; $(G)=C(R)$ elde edilir ki bu bir tezattır. $p\in Z(G)$ olsun. $C(R)$ *Florack-Uluçay hassasını* haiz olduğundan $p\in Z(G)$ $(p\in R)$ noktasında birtek basit sıfır noktası olan ve $R\setminus\{p\}$ de sıfırdan farklı olan bir $F_p\in C(R)$ fonksiyonu vardır, öyleki $p\in R$ de sıfır olan her fonksiyon F_p nin bir katıdır. Şu halde G,F_p nin bir katı olup $(G)\subset(F_p)$ elde edilir. (F_p), $C(R)$ nin bir has asli ideali, $(G)\subset(F_p)$ ve (G) maksimal asli ideal olduğundan $(G)=(F_p)$ elde edilir. Bu eşitlik ise $p\in R$ noktasının G fonksiyonunun bir tek basit sıfır yeri olduğunu ve G nin R nin diğer noktalarında sıfırdan farklı olduğunu gösterir.

TEOREM.3.2.1.

$A(D)$, kompleks düzlemde $D:=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ açık birim dairesi üzerinde tarif edilmiş kompleks değerli bütün analitik fonksiyonların halkası ve $\Phi:A(D)\to C(R)$ tasviride her $c\in\mathbb{C}$ için $\Phi(c)=c$ şartının sağlıyan bir izomorfizm olsun. Bu taktirde R bir Riemann Yüzeyidir.

İSPAT.

$\alpha\in D$ herhangibir nokta olsun. Bu taktirde $A(D)$ halkasının $I_\alpha:=\{f\in A(D):f(\alpha)=o\}$ şeklinde tarif edilen altcümlesi $A(D)$ halkasında $f^*=j-\alpha$ fonksiyonu tarafından tevlit edilen bir maksimal asli idealdir [1:Sh.72]. $\Phi: A(D) \to C(R)$ tasviri bir izomorfizm olduğundan Φ tasviri altında $A(D)$ nin I_α maksimal asli idealinin resmi , $C(R)$ nin bir maksimal asli idealidir. Şu halde Lemma.3.2.1 ve Lemma.3.2.2. den dolayı $\Phi[I_\alpha]=I_a$ olacak şekilde R de bir tek $a\in R$ noktası mevcuttur.Her $\alpha\in D$ için $a\in R$, $\Phi[I_\alpha]= I_a$ şartını sağlıyan nokta olmak üzere $a:=\gamma(\alpha)$ koyarak $\gamma: D \to R$ tasvirini tarif edelim. Her $a\in R$ için I_a Lemma.3.2.1. ye göre $C(R)$ nin bir maksimal asli ideali olduğundan $\Phi^{-1}[I_a]$, $A(D)$ nin bir maksimal asli ideali olup; $\Phi^{-1}[I_a]= I_\alpha$ olacak şekilde birtek $\alpha\in D$ noktası mevcuttur[2].$A(D)$, $C(R)$ nin maksimal asli ideallerinin bu şekilde ve Φ tasvirinin de bijektif olduğu göz önüne alınırsa $\gamma:D \to R$ tasvirinin bijektif olduğu görülür.

Diğer taraftan, $J\in C(R)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. $f_o\in A(D)$ ile Φ izomorfizmi ile J ye resmedilen fonksiyonu gösterelim, yani $f_o=\Phi^{-1}(J)$ olsun. Herhangibir $\alpha\in D$ noktası için $f_o- f_o(\alpha)\in I_\alpha$ olup; $f_o- f_o(\alpha)$ fonksiyonunun Φ tasviri altındaki resmi $a:=\gamma(\alpha)$ olmak üzere I_a idealine aittir , yani:

$$\Phi(f_o-f_o(\alpha))=\Phi(f_o)-f_o(\alpha)=J-f_o(\alpha)\in I_{a=\gamma(\alpha)}$$

dır. Özellikle $a=\gamma(\alpha)$ noktasını ihtiva eden parametre dairesi gözönüne alınırsa $\gamma(\alpha)=f_o(\alpha)$ elde edilir. $\alpha\in D$ keyfi olduğundan her $\alpha\in D$ için $\gamma(\alpha)=f_o(\alpha)$ elde edilir. $f_o\in A(D)$ olduğundan $\gamma:D \to R$ tasviri analitiktir.Dolayısıyla süreklidir. D irtibatlı ve γ bijektif, sürekli olduğundan R de irtibatlıdır. Öte yandan $\gamma^{-1}:R \to D$ tasviri de bijektif ve analitiktir. R, irbibatlı bir 1-boyutlu çokkatlı ve $\gamma^{-1}:R \to D$ tasviri bijektif ve analitik olduğundan R bir Riemann Yüzeyidir.

TEOREM.3.2.2. [*Üniformizasyon Teoremi*]

R, Basit irtibatlıdır.

İSPAT.

Teorem.3.2.1. in neticesi olarak $\gamma^{-1}:R \to D$ tasviri bijektif ve analitik olduğundan $R \simeq D$ dir. Halbuki D, basit irtibatlıdır. Bolayısıyla R de basit irtibatlıdır.

Böylece cebirsel metotlarla basit irtibatlı açık bir Riemann Yüzeyini, cebirsel metotlarla açık birim daireye konform tasvir edildiğini göstermiş olduk.

NETİCE.3.2.1.

$A(R) \cong C(R)$ dir.

İSPAT.

Teorem.3.2.1. in neticesi olarak $R \simeq D$ dir. Lemma. 2.5.2. den dolayı $A(R) \cong A(D)$ olur. Halbuki $A(D) \cong C(R)$ olduğundan $A(R) \cong C(R)$ elde edilir.

Teorem.3.2.1. Riemann Yüzeylerine genelleştirilir.

TEOREM.3.2.3.

R' açık bir Riemann Yüzeyi ve $A(R')$ de R' üzerinde tarifli kompleks değerli bütün analitik fonksiyonların halkası olsun. Farzedelim ki, $A(R')$ den $C(R)$ ye her $c \in \mathbb{C}$ için $\Phi(c)=c$ şartını sağlıyan bir $\Phi:A(R') \to C(R)$ izomorfizmi mevcuttur. Bu taktirde R, bir Riemann Yüzeyidir.

İSPAT.

R' nün herhangibir p' noktasına $A(R')$ nün bir $I_{p'}$ maksimal asli ideali tekabül eder[9:Sh.80]. p', R' üzerinde değiştikçe; $A(R')$ nün $I_{p'}$ maksimal asli idealleri, Φ izomorfizması altında $C(R)$ nin maksimal asli ideallerine dönüşür. Binaenaleh Lemma.3.2.2. den dolayı her $p'\in R'$ için $\Phi[I_{p'}]=I_p$ olacak şekilde bir tek $p\in R$ noktası mevcuttur. Tersine olarak Lemma.3.2.1. den dolayı $C(R)$ nin her maksimal asli ideali $p\in R$ için I_p tipinde olup; Φ izomorfizm olduğundan $\Phi^{-1}[I_p]$, $A(R')$ nün bir maksimal asli idealidir. Şu halde $\Phi^{-1}[I_p]=I_{p'}$ olacak şekilde bir $p'\in R'$ noktası mevcuttur[9: Sh.80]. $p'\in R'$ için $p\in R$, $\Phi[I_{p'}]=I_p$ şartını sağlıyan nokta olmak üzere $\gamma: R'\to R$ tasviri $p:=\gamma(p')$ şeklinde tarif edilirse; $\gamma: R'\to R$ tasviri bijektif bir tasvirdir.

Diğer taraftan, $J\in C(R)$ özdeş fonksiyonunu göz önüne alalım. Φ izomorfizması altında J ye tekabül eden fonksiyon $F_o\in A(R')$, yani $\Phi^{-1}(F_o)=J$ olsun. Herhangi bir $a'\in R'$ için $F_o - F_o(a')\in I_{a'}$ olduğundan;

$$\Phi(F_o - F_o(a')) = J - F_o(a')\in I_{a=\gamma(a')}$$

Olur. R de $a=\gamma(a')$ noktasını ihtiva eden N_{p_o} parametre dairesi seçilirse, $J - F_o(a')\in I_{a=\gamma(a')}$ ifadesinden $\gamma(a')=F_o(a')$ elde edilir. $a'\in R'$ keyfi olduğundan her $a'\in R'$ için $\gamma(a')=F_o(a')$ olur. Netice olarak $F_o\in A(R')$ olduğundan γ tasviri analitiktir. Her analitik tasvir sürekli, γ bijektif ve R' irtibatlı olduğundan R de irtibatlıdır. $\gamma: R'\to R$ tasviri bijektif ve analitik olduğundan $\gamma^{-1}: R\to R'$ tasviri de analitiktir. R irtibatlı bir 1-boyutlu çokkatlı ve $\gamma^{-1}: R\to R'$ bijektif ve analitik bir tasvir olduğundan R bir Riemann Yüzeyidir. Üstelik, $R\cong R'$ dir.

3.3. BASİT SIFIR YERLERİNİN KARAKTERİZASYONU.

LEMMA.3.3.1.

$C(X)$, X topolojik uzayı üzerinde tarif edilmiş bütün sürekli kompleks değerli fonksiyonların halkası ve F_1, $F_2\in C(X)$ olsun. Farzedelim ki, $Z(F_1)\cap Z(F_2) = \emptyset$ olsun.

Bu taktirde $E_1.F_1+E_2.F_2=1$ olacak şekilde $E_1,E_2\in C(X)$ fonksiyonları mevcuttur.

<u>İSPAT.</u>

$Z(F_1)\cap Z(F_2)=\emptyset$ olduğundan Lemma.2.4.1.den dolayı $Z(|F_1|^2+|F_2|^2)=\emptyset$ olur. Diğer taraftan $F_1,F_2\in C(X)$ olduğundan $\bar{F}_1,\ \bar{F}_2\in C(X)$ olup; $F_1.\bar{F}_1+F_2.\bar{F}_2=|F_1|^2+|F_2|^2\in C(X)$ dir. $C(X)$ halkasında F_1,F_2 elemanları tarafından tevlit edilen (F_1,F_2) idealini gözönüne alalım. Açık olarak $|F_1|^2+|F_2|^2\in C(X)$ dir. Diğer taraftan $Z(|F_1|^2+|F_2|^2)=\emptyset$ olduğundan $|F_1|^2+|F_2|^2$ fonksiyonu birimdir. Şu halde $1\in C(X)$ olup; $(F_1,F_2)=C(X)$ elde edilir. Bu eşitlik ise $C(X)$ de $E_1.F_1+E_2.F_2=1$ şartını sağlıyan $E_1,E_2\in C(X)$ fonksiyonlarının mevcut olduğunu gösterir.

<u>TEOREM.3.3.1.</u>

R bir 1-Boyutlu çokkatlı ve $C(R)$ de R üzerinde tarif edilmiş kompleksdeğerli bütün sürekli fonksiyonların halkası ve $F\in C(R)$ olsun. Farzedelim ki, $C(R)$ *Florack-Uluçay hassasını* haizdir. Bu taktirde $C(R)/I=(F)$ bölüm halkasının cisim olması için gerek ve yeter şart F nin R de sadece bir tek basit sıfır noktası olmasıdır.

<u>İSPAT.</u>

Farzedelim ki, F nin R de sadece bir tek basit sıfır noktası vardır. Bu taktirde $C(R)/I$ bir cisimdir. $C(R)/I$ nın nötr elemanı $[o]=I$ ve özdeş elemanı $[1]=1+I$ olan komütatif bir halka olduğunu biliyoruz. $C(R)/I$ cisim ise nötr elemandan farklı her elemanı birim olmalıdır. $[G]$, $C(R)$ nin nötr elemanından farklı herhangibir elemanı olsun. $[G]\neq[o]$ olduğundan $G\not\equiv o$ Mod I olup; $G-o=G\notin I$ dır. F nin R deki basit sıfırı $p\in R$ olsun. $C(R)$, *Florack-Uluçay hassasını* haiz ve $G \notin I$ olduğundan $G(p) \neq o$ dır. F, R nin diğer noktalarında sıfırdan farklı olduğundan $Z(G) \cap Z(F) = \emptyset$ olur. Dolayısıyla $C(R)$ de $G.H_1 + F.H_2 = 1$ olacak şekilde $H_1, H_2 \in C(R)$ fonksiyonları mevcuttur. $F \in I$ olduğundan $G.H_1 + F.H_2 = 1$ eşitliğinden $[G].[H_1] = [1]$ elde edilir ki, bu ise $[G]$nin birim, yani $C(R)/I$ nın cisim olduğunu gösterir.

Tersine olarak, $C(R)/I$ cisim ise F nin R de sadece bir tek basit sıfır noktası vardır ve F ,R nin diğer noktalarında sıfırdan farklıdır. $C(R)/I$ cisim olduğundan teorem.1.4.1. den dolayı $I = (F)$,$C(R)$ nin bir maksimal asli idealidir. Dolayısıyla $Z(F) \neq \emptyset$ dır. $p \in Z(F)$ olsun. $C(R)$, *Florack-Uluçay hassasını* haiz olduğundan p noktasında bir-tek basit sıfır yeri olan ve $R \setminus \{p\}$ nin her noktasında sıfırdan farklı olan bir $F_p \in C(R)$ fonksiyonu mevcuttur; öyleki $p \in R$ de sıfır olan her fonksiyon F_p nin bir katıdır. Şu halde F,F_p nin bir katı olup; $(F) \subset (F_p)$ elde edilir. $(F_p) \neq C(R)$, $(F) \subset (F_p)$ ve (F) ideali maksimal olduğundan $(F) = (F_p)$ elde edilir ki, bu eşitlik de F nin $p \in R$ noktasında basit sıfır yeri olduğunu ve R nin diğer noktalarında sıfırdan farklı olduğunu gösterir.

S U M M A R Y

An algebraic characterization of the conformal equivalance of two plane domains was first given by *Chevalley* and *Kakutani* (unpublished) in 1942. Both considered the rings of bounded analytic functions defined over these domains.

Lipman Bers[2] in 1948 proved the conformal equivalence of two plane domains by considering the rings of analytic functions on these domains. Bers` result has been extented to open Riemann surfaces by *W.Rudin*[14],*H.L.Royden* [7] and *M.Nakai* [9].

Algebraic characterizations of Riemann surfaces have been studied by *I.Kra*[13] and others in 1968. A very short proof of a characterization of Riemann surfaces and conformal equivalence of Riemann surfaces have been given recently by *C.Uluçay* [3], [4] in 1975-1976.

In the present paper, using *Florack-Uluçay's property*, a new characterization of simply connected Riemann surfaces is given by considering the ring of continuous complex-valued functions over an 1-dimesional manifold. This manifold is endowed with an analytic structure by means of an isomorphism, which preserves the constants, between the ring $A(D)$ of analytic functions on the unit open disc D and the ring $C(R)$ of continuous complex-valued functions on the 1-dimesional manifold R, Subject to the *Florack-Uluçay`s property* that for each point on R there exits a function $F_p \in C(R)$ which has only a simple zero at p, and if p is a zero point a function $G \in C(R)$, then $G=H.F_p$, $H \in C(R)$.

It follows that R is a simply connected Riemann surfaces which is mapped conformally on the open unit disc.

Under the same condition, an algebraic characterization simple zero point a function in $C(R)$ is also given.

Chapters I and II are prepartory to chapter III which is entirely devoted to the proof of the characterization problem.

Our method of proof differs entirely from the earlier proofs as to the introduction of an identy function that permits the use local parameters.

KAYNAKLAR

[1] *Shizuo Kakutani*, Rings of Analytic Functions, Lectures on Functions of a complex Variable, University of Michigan Press, Ann Arbor (1955), 71-83.

[2] *Lipman Bers*, On rings of Analytic Functions, Bull.Amer. Math. Soc. 54 (1948), 311-315.

[3] *Cengiz Uluçay*, Converse of the Maximum Modulus Theorem and Rings of Continuous Complex Functions, Communications, De la Facutlé Des sciences de L'Universite D'-Ankara, Série A_1Tome 24 (Année 1975).

[4] *Cengiz Uluçay*, Characterizations of Riemann Surfaces, (Matematik Araştırma Enstitüsü tarafından 20-24 Eylül 1976 tarihleri arasında tertip edilen "Fonksiyonlar Teorisi Simpozyumunda" sunulan çalışma) Publaciation of Mathematical Research Institute, İstanbul.

[5] *Cengiz Uluçay*, Fonksiyonlar Teorisi ve Riemann Yüzeyleri, A.Ü. Fen Fakültesi Yayınları, Um.114.Mat:31 (1971).

[6] *Cengiz Uluçay*, Modern Topolojiye Giriş ve Grup Temsilleri, İ.T.Ü. Kütüphanesi Sayı : 868, İstanbul (1972).

[7] *H.L.Royden*, Rings of Analytic and Meromorphic Functions, Trans. Amer. Math. Soc. 83 (1956), 269-276.

[8] *H.L.Royden*, Functions Algebras, Bull. Amer. Math. Soc. 69 (1963) 281-298.

[9] *Mitsuru Nakai*, On rings of Analytic functions on Riemann Surfaces, Proc. Japan. Acad. 39 (1963) 79-84.

[10] *H.Florack*, Regulare und meromorphe Functionen auf nicht geschlossenen Riemannschen Flachen, Math. Inst. Univ. Münster no : 1 (1948).

[11] *Walter Rudin*, Real and Complex Analysis, Mc-Graw-Hill (1974).

[12] *George F. Simmons*, Introduction to Topology and Modern Analysis, Mc-Graw-Hill (1963).

[13] *Irwin Kra*, On the ring of holomorphic functions on an open Riemann surfaces, Trans. Amer. Math. Soc. 132 (1968), 231-244.

[14] *W. Rudin*, An algebraic characterization of conformal equivalence, Bull. Amer. Math. Soc. Vol. 61 (1955), 543.

ÖZGEÇMİŞİM

1949 yılında Ordu ili merkez Altınyurt köyünde doğdum. İlk ve Ortaokulu Ordu'da bitirdikten sonra 1964 yılında Perşembe İlköğretmen okuluna girdim. 1966 yılında Okul Öğretmenler Kurulu kararı ile Milli Eğitim Bakanlığı İstanbul Yüksek Öğretmen Okulu Hazırlama Lisesi'ne gönderilerek 1967 yılında bu liseyi bitirdim ve aynı yıl İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik-Fizik bölümüne kayıt oldum.

1971 yılında Fen Fakültesi Matematik-Fizik bölümünden mezun olarak aynı yıl 31.Ağustos.1971 tarihinde Karadeniz Teknik Üniversitesi Temel Bilimler Fakültesi Matematik Bölümüne asistan olarak tayin edildim.

Halen aynı bölümde asistan olarak görevime devam etmekteyim.

Abdullah Ç A V U Ş