KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ✶ TEMEL BİLİMLER FAKÜLTESİ

REGLE YÜZEYLER TEORİSİ ÜZERİNE

Karadeniz Teknik Üniversitesi Temel Bilimler Fakültesince
« Fen Doktoru »
ünvanının verilmesi için kabul edilen tezdir.

Murteza YILMAZ

Tezin Dekanlığa Verildiği Tarih	:	7.12.1979
Sözlü Sınav Tarihi	:	25.4.1980

Doktorayı yöneten öğretim üyesi	:	Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU
Doktora komisyonu Üyeleri	:	Prof. Dr. Ergün BAYAR
	:	Doç. Dr. Asuman ILGAZ

Kapak Baskı

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
1980 — Trabzon

Bu çalışmayı bana öneren ve çalışmalarım boyunca değerli yardımlarını esirgemeyen Hocam Sayın Prof.Dr. H.Hilmi HACISALİHOĞLU'na şükranlarımı sunarım.

Murteza YILMAZ

İ Ç N D E K İ L E R

Ö Z E T

Bu çalışma üç bölüm halinde düzenlenmiştir. İlk bölüm giriş bölümüdür. İkinci bölüm bu çalışmada kullanılan temel kavramlara ayrılmıştır. Bu bölümde genel anlamda hareketler, bir parametreli uzay hareketleri, regle yüzeyler ve regle yüzeylerin-hareket geometrisinde önemli rol oynayan- invaryantlarına ait bilgiler sıralanmış, bu arada diferensiyel geometrinin eğriler teorisinden de kısaca bahsedilmiştir.

Bir takım teoremlerin ispatı verilirken bazıları için yalnızca kaynak gösterilmiştir.

Bu çalışmanın orjinal kısmı üçüncü bölümdedir. Burada regle yüzeyler teorisi açılım uzunluğu ve açılım açısı cinsinden ele alındı. Kapalı bir uzay hareketine katılan bir doğrunun yörüngesi olan kapalı regle yüzeyin; drali, açılım açısı ve açılım uzunluğu ile ilgili yeni özelliklere varıldı. Bu cins regle yüzeylerin özel halleri de incelenmiş ve özellikle dayanak eğrilerinin özel cinsten olmalarına dair karakterizasyonlar araştırılmıştır.

S U M M A R Y

This dissertation consists of three chapters. The first chapter is the introduction. The second chapter deals with the basic concepts that have been used in this study. In this chapter; motions in general, one-parameter spatial motions, ruled surfaces and the knowledge about the invariants of the ruled surfaces, which play an important role in the motion geometry, have been mentioned; and meanwhile, the curves theory of the differential geometry has also been briefly explained. While some theorems are being proved, only the references have been pointed out for the others.

The original part of this study is in the third chapter. Here, the teory of ruled surfaces subject to the pitch (öffnungsstrecke) and the angle of pitch (öffnungswinkel) has been presented. It has led to some new properties about the distribution parameter, the angle of pitch and the pitch of the closed ruled surface that is the orbit of a straight line that takes part in a closed spatial motion. The special cases of this kind of the ruled surfaces have also been examined and especially the characterizations subject to the directrix curve of the special kind have been researched.

N O T A S Y O N L A R

$\mathbb{R}$	Reel sayılar cümlesi
$\mathbb{R}^n$	n-boyutlu standard reel afin uzay
E^n	n-boyutlu Öklid uzayı
$\langle\, ,\, \rangle$	Reel vektör uzaylarında iç çarpım fonksiyonu
$\Vert\ \Vert$	Reel vektör uzaylarında norm fonksiyonu
$R(n)$	E^n Öklid uzayının izometrilerinin cümlesi
$O(n)$	nxn tipindeki ortogonal matrislerin cümlesi
$\mathbb{R}^n_1$	nx1 tipindeki reel matrislerin cümlesi
δ_{ij}	Kronecker deltası
$SO(n)$	nxn tipinde ve determinantı + 1 olan ortogonal matrislerin cümlesi
A^T	A matrisinin transpozu
$Sp\{\ldots\}$	$\{\ldots\}$ cümlesinin gerdiği uzay
$\det A$	A matrisinin determinantı
$T_{E^3}(P)$	$P \in E^3$ noktasındaki tanjant uzayı
$T^*_{E^3}(P)$	$P \in E^3$ noktasındaki kotanjant uzay
Ω^1	1-formların uzayı
$\wedge$	Vektörel çarpım
H	Hareketli çizgiler uzayı
H'	Sabit çizgiler uzayı
H/H'	H uzayının H' uzayına göre hareketi
$\mathcal{R}$	Harmonik eğrilik
(r)	Yervektörü $\vec{r}$ olan kapalı eğri
$\oint$	Kapalı bir eğri boyunca eğrisel integral
P_a	Birim doğrultman vektörü $\vec{a}$ olan regle yüzeyin dağılma parametresi
L_a	Birim doğrultman vektörü $\vec{a}$ olan regle yüzeyin açılım uzunluğu
λ_a	Birim doğrultman vektörü $\vec{a}$ olan regle yüzeyin açılım açısı

B Ö L Ü M I.

G İ R İ Ş

Bir parametreli hareketlere dair ilk ilgi çekici çalışmalar J. Steiner [8] ve A.Holditch [8] e dayanmaktadır. Daha sonra aynı konu ile ilgili olarak birçok çalışma yapılmıştır. Bunlardan düzlem kinematiği ile ilgili olarak C.Leudesorf [1,2] ve A.B.Kempe [3] , küresel hareketlerle ilgili olarak da E.B.Elliot [4] zikredilebilir. E.Cartan [5] ise çizgiler uzayı ve bilhassa regle yüzeylerle ilgili birçok özellikleri ele alıp incelemiştir.

W.Blaschke [7] bir parametreli reel küresel hareketler için Steiner vektörünü ve Steiner noktasını tanımlayarak regle yüzeyler için bir integral invaryantı olan açılım uzunluğundan bahsetmiştir.

H.R.Müller [9] ise regle yüzeyler için açılım uzunluğu ve açılım açısı kavramlarını izah ederek bunların birer integral invaryantı olduğunu göstermiştir.

Ayrıca H.H.Hacısalihoğlu [10,11] da Holditch ve Steiner teoremlerini reel ve dual küre üzerinde ele alıp çizgiler uzayında regle yüzeyler ve invaryantları ile ilgili genelleştirmeler yaptı. J.Hoschek [12] ise adı geçen teoremleri çizgiler uzayında doğrudan (direkt metod ile) ele aldı.

Bu çalışmalar bize regle yüzeyler teorisinin açılım uzunluğu ve bilhassa açılım açısı cinsinden yeniden ele alınabileceği ve bunun bizi yeni sonuçlara götüreceği fikrini verdi. Ayrıca bir parametreli uzay hareketlerinin regle yüzeylerle olan çok yakın ilgisi nedeniyle [5,7,12] uzay hareketlerini de bu iki invaryant cinsinden tekrar incelemek yeni sonuçlar verir diye düşündük. Çalışmalarımızın esasını bu iki konu oluşturmaktadır. Ancak bu arada eğriler teorisindeki eğilim çizgileri ve Bertrand eğrileri ile ilgili bir takım karakteristik özellikleri de regle yüzeylerin invaryantlarına bağlı olarak yeniden ele almak gerektiğini gördük.

B Ö L Ü M II.
U Z A Y H A R E K E T L E R İ

II.1. ÖKLİD UZAYLARI

TANIM II.1.1. (İÇ ÇARPIM UZAYLARI) :

V sonlu boyutlu bir reel vektör uzayı olsun. Bir

$$\varphi : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu eğer bilineer, simetrik ve pozitif tanımlı olarak verilmiş ise φ ye V üzerinde bir iç çarpım fonksiyonu ve V ye de iç çarpım uzayı adı verilir.

TANIM II.1.2. (ÖKLİD UZAYLARI) :

V bir n-boyutlu reel vektör uzayı ve V üzerinde Öklid iç çarpımı tanımlanmış olsun. V ile birleşen bir A afin uzayına n- boyutlu Öklid uzayı denir.

TANIM II.1.3.

Öklid uzayında bir nokta X olsun. Bu uzayda bir afin koordinat sistemine göre X noktasının koordinatları $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ olsun.

$$x_i : A \longrightarrow \mathbb{R}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

fonksiyonuna A Öklid uzayının i-yinci koordinat fonksiyonu denir.

n-boyutlu reel standard afin uzayı ele alalım ve bunu n-boyutlu reel standard vektör uzayı $\mathbb{R}^n$ ile eşleyelim. $\mathbb{R}^n$ vektör uzayında bir

$$\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

iç çarpımını $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$, $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ için

$$\langle , \rangle (X,Y) = \langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad \text{(II.1.1)}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu iç çarpıma $\mathbb{R}^n$ de standard iç çarpım veya Öklid iç çarpımı adı verilir. $\{\mathbb{R}^n, \langle , \rangle\}$ iç çarpım uzayı ile eşlenen reel standard afin uzay n-boyutlu Öklid uzayı adını alır ve E^n ile gösterilir.

TANIM II.1.4. (UZAKLIK) :

n-boyutlu bir reel iç çarpım uzayı $\mathbb{R}^n$ ile birleşen Öklid uzayı E^n olsun. Bir

$$d : E^n \times E^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu $\forall X,Y \in E^n$ için $\mathbb{R}^n$ deki norm ile

$$d: (X,Y) \longrightarrow d(X,Y) = \|\overrightarrow{XY}\| = \sqrt{\langle \overrightarrow{XY}, \overrightarrow{XY} \rangle} \qquad \text{(II.1.2)}$$

şeklinde tanımlanır ve E^n de X ile Y noktaları arasındaki uzaklık adını alır.

TEOREM II.1.1.

E^n Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu bir metriktir.

İSPAT :

$\forall X,Y,Z \in E^n$ için

i) E^n ile birleşen $\mathbb{R}^n$ reel çarpım uzayında iç çarpım pozitif tanımlı olduğundan $\forall \vec{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ için

$$\|\vec{\alpha}\| \geq 0$$

dır. Dolayısiyle

$$\vec{\alpha} = \overrightarrow{XY}$$

olmak üzere

$$d(X,Y) = \|\overrightarrow{XY}\| \geq 0$$

elde edilir. $\|\vec{\alpha}\| = 0 \Rightarrow \vec{\alpha} = \vec{0}$ olduğundan

$$d(X,Y) = \|\overrightarrow{XY}\| = 0,$$

$$\|\overrightarrow{XY}\| = 0,$$

$$\overrightarrow{XY} = \vec{0} \text{ veya } X = Y$$

olur. Tersine $X=Y$ ise $\overrightarrow{XY} = \vec{0} \Rightarrow \|\overrightarrow{XY}\| = 0$ ve dolayısiyle $d(X,Y) = 0$ olur. O halde

$$d(X,Y) = 0 \Leftrightarrow X=Y$$

bulunur.

ii) $\overrightarrow{XY} = -\overrightarrow{YX} \Rightarrow \|\overrightarrow{XY}\| = \|\overrightarrow{YX}\|$ ve buradan

$$d(X,Y) = d(Y,X)$$

elde edilir.

iii) İç çarpım uzayında normun özeliklerinden

$$\|\vec{XZ}\| = \|\vec{XY} + \vec{YZ}\| \leq \|\vec{XY}\| + \|\vec{YZ}\|$$

olur ki bu da

$$d(X,Z) \leq d(X,Y) + d(Y,Z)$$

olması demektir.

TANIM II.1.5.

E^n Öklid uzayında tanımlanan uzaklık fonksiyonuna E^n de Öklid metriği denir.

TANIM II.1.6.(ÖKLİD ÇATISI) :

E^n Öklid uzayında sıralı bir $\{P_o,P_1,\ldots,P_n\}$ nokta n+1-lisi için eğer $\{\vec{P_oP_1},\ldots,\vec{P_oP_n}\}$ vektör sistemi $\mathbb{R}^n$ nin bir ortonormal bazı ise $\{P_o,P_1,\ldots,P_n\}$ nokta cümlesine E^n de bir Öklid çatısı (veya dik çatı) denir. Böyle bir çatı için tanımlanan bir $(x_1,x_2,\ldots x_n)$ koordinat sistemi ise Öklid koordinat sistemi (veya dik koordinat sistemi) adını alır.

TANIM II.1.7. (İZOMETRİ) :

E_1^n ve E_2^n , sırası ile, $\mathbb{R}_1^n$ ve $\mathbb{R}_2^n$ n-boyutlu iç çarpım uzayları ile birleşen birer Öklid uzayı olsunlar. Bir

$$f : E_1^n \longrightarrow E_2^n$$

afin dönüşümü $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_1^n$ için

$$\langle \Psi(\alpha), \Psi(\beta) \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle \qquad \text{(II.1.3)}$$

bağıntısı sağlanacak şekilde bir

$$\Psi : \mathbb{R}_1^n \longrightarrow \mathbb{R}_2^n$$

lineer dönüşümü ile birleşiyorsa f ye bir izometri adı verilir.

TEOREM II.1.2.

Bir

$$f : E_1^n \longrightarrow E_2^n$$

dönüşümü izometri ise

i) $d(f(A), f(B)) = d(A,B)$, $\forall A,B \in E_1^n$,

ii) f birebir ve örtendir,

iii) E_1^n ve E_2^n uzayında iki Öklid koordinat sistemi, sırası ile, $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ ve $\{y_1,y_2,\ldots,y_n\}$ ise f izometrisi, $A\in O(n)$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} Y \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (II.1.4)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $C,X,Y \in \mathbb{R}_1^n$ dir [13,S.70].

Bir n- boyutlu Öklid uzayı E^n in izometrilerinin

$$R(n) = \{f: E^n \xrightarrow{\text{İzometri}} E^n\}$$

cümlesini ele alalım. R(n) de dönüşümlerin birleşimi işlemi "0" ile gösterilirse (R(n),0) ikilisi bir gruptur. Bu gruba izometriler grubu denir.

II.2. HAREKETLER

TANIM II.2.1.

n-boyutlu bir E^n Öklid uzayının izometrilerinden biri f olsun. E^n deki bir $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ Öklid koordinat sistemine göre f nin matrisel ifadesi; $A \in O(n)$ ve $C\in\mathbb{R}_1^n$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} X' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (II.2.1)$$

şeklindedir. f ye E^n de bir hareket adı verilir.

$A\in O(n)$ olduğundan

$$\det A = \pm 1 \qquad (II,2.2)$$

dır. Eğer $\det A = +1$ ise f hareketine direkt hareket, $\det A = -1$ ise karşıt hareket denir. Hareket deyince daha çok direkt hareketleri anlayacağız. Direkt hareketlerde iki çeşit hereketin bileşimidir; direkt dönme ve öteleme.

TANIM II.2.2. (DÖNME) :

E^n Öklid uzayının bir f izometrisi için

$$f(0) = 0$$

olacak şekilde bir $0 \in E^n$ noktası var ise f ye "0" noktası etrafında bir dönme denir.

TEOREM II.2.1.

E^n de başlangıcı $0 \in E^n$ olan bir Öklid koordinat sistemi, $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ olsun. Bir

$$f : E^n \longrightarrow E^n$$

izometrisi için

i) 0 noktası etrafında bir dönme f ise f nin bu Öklid koordinat sistemine göre ifadesi

$$X' = AX \qquad (II.2.3)$$

şeklindedir, burada $A \in O(n)$ ve $X, X' \in \mathbb{R}^n_1$ dir.

ii) f bir direkt dönmedir $\Leftrightarrow X' = AX$ ve $A \in SO(n)$ dir [13,Sayfa 82-83] .

TANIM II.2.3. (ÖTELEME) :

E^n Öklid uzayının bir f izometrisi ve $\forall X \in E^n$ için

$$f(X) = X + h$$

olacak şekilde bir tek $h \in E^n$ noktası varsa f ye E^n nin h ile belirtilen bir ötelemesi denir.

II.3. E^3 ÖKLİD UZAYINDA EĞRİLER

TANIM II.3.1. (PARAMETRİK EĞRİ) :

$\mathbb{R}$ reel sayılar ekseni üzerinde bir açık aralık I olsun. E^3 de bir diferensiyellenebilir

$$\alpha : I \longrightarrow E^3$$

dönüşümü E^3 de bir eğri belirler. Burada I intervali $a, b \in \mathbb{R}$ ve $t \in I$ olmak üzere $a < t < b$, $-\infty < t < b$, $a < t < \infty$ ve hatta $I = \mathbb{R}$ olacak şekilde seçilebilir. t ye ise parametre adı verilir. $\forall t \in I$ için α eğrisi üzerinde değişen bir noktayı E^3 te bir $0=(o,o,o)$ başlangıç noktasına göre bir vektör ile

$$\vec{\alpha}(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)) \qquad \text{(II.3.1)}$$

şeklinde göstermek mümkündür.

TANIM II.3.2.

$\alpha: I \longrightarrow E^3$ bir eğri olsun. $\forall t \in I$ için α nın $\alpha(t)$ noktasındaki hız vektörü diye

$$\alpha'(t) = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}(t), \frac{d\alpha_2}{dt}(t), \frac{d\alpha_3}{dt}(t)\right)_{\alpha(t)} \qquad \text{(II.3.2)}$$

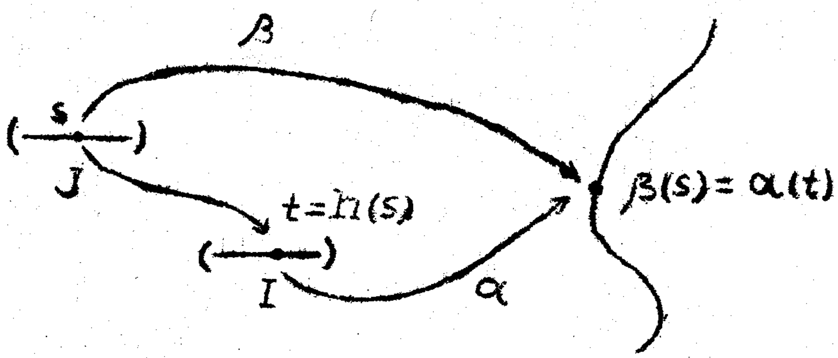
olmak üzere $\vec{\alpha}'(t) \in T_{E^3}(\alpha(t))$ tanjant vektörüne denir.

TANIM II.3.3. (PARAMETRE DEĞİŞİMİ) :

$\mathbb{R}$ reel sayılar ekseni üzerinde iki açık aralık I ve J olsun. $\alpha: I \longrightarrow E^3$ bir eğri ve $h: J \longrightarrow I$ bir diferensiyellenebilir reel değerli bir fonksiyon olsun. O zaman

$$\beta : \alpha \circ h : J \longrightarrow E^3$$

bileşke fonksiyonuna parametresi h ile değiştirilmiş bir eğri denir.



Şekil II.3.1

J intervalinde her s değerine eğri üzerinde $\beta(s) = \alpha(h(s))$ noktası karşılık gelir. Bu nokta I intervalindeki $h(s) = t$ değerine tekabül eder. Dolayısiyle α ve β aynı eğriyi belirtmiş olur.

TANIM II.3.4.

$\alpha: I \longrightarrow E^3$ eğrisi verildiğinde $\forall t \in I$ için

$$\vec{\alpha}(t+T) = \vec{\alpha}(t)$$

olacak şekilde bir $0 < T \in \mathbb{R}$ sayısı varsa α eğrisine peryodiktir, T sayılarının en küçüğüne ise peryot denir.

TANIM II.3.5.

$\alpha : I \longrightarrow E^3$ bir eğri olsun. $\forall t \in I$ için α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki hız vektörü daima sıfırdan farklı ise α eğrisine regülerdir denir.

TANIM II3.6.

$\alpha : I \longrightarrow E^3$ bir s parametresine göre ifade edilmiş bir eğri olsun. $\forall s \in I$ için $\vec{\alpha}'(s) = \frac{d\vec{\alpha}}{ds}(s) \in T_E 3\ (\alpha(s)\ )$ hız vektörünün boyu

$$\|\vec{\alpha}'(s)\| = 1 \qquad (II.3.3)$$

ise α eğrisine yayı cinsinden parametrik olarak ifade edilmiştir denir. Burada $T_E 3\ (\alpha(t)\ )$ ile E^3 ün $\alpha(t)$ noktasındaki tanjant uzayı gösteriliyor.

TEOREM II.3.1.

Herbir parametrik eğri daima kendi yayı cinsenden parametrik olarak ifade edilebilir.

İSPAT :

$\alpha : I \longrightarrow E^3$ eğrisinin ilk parametresi t ise, yay uzunluğu

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\left\langle \frac{d\vec{\alpha}(t)}{dt}, \frac{d\vec{\alpha}(t)}{dt} \right\rangle \Big|_{\alpha(t)}}\ dt$$

şeklindedir. O halde $s = s(t)$ fonksiyonunun $\frac{ds}{dt}$ türevi $\alpha = \alpha(t)$ eğrisinin skalar hızı

$$\frac{ds}{dt} = \|\vec{\alpha}'(t)\|$$

dir. Eğer α regüler bir eğri ise $\forall t \in I$ için

$$\|\vec{\alpha}'(t)\| > 0,$$

$$\frac{ds}{dt} > 0$$

elde edilir. Buna göre $s=s\ (t)$ fonksiyonu monoton artandır. Bu ters fonksiyonun türevi

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}}$$

şeklindedir. Ayrıca $L = s(b)$, $I = [a,b]$, $J = [a',b']$ olmak üzere $a' = 0$, $b' = L$ alınarak bir

$$h : J \longrightarrow I$$
$$h : (0,L) \longrightarrow (a,b)$$
$$s \longrightarrow t(s) = h(s)$$

fonksiyonu tanımlanabilir. O zaman

$$\beta(s) = (\alpha \circ h)(s) : (0,L) \longrightarrow E^3$$

fonksiyonu $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(t)$ eğrisini s parametresine göre $(0,L)$ üzerinde tanımlamış olur. Buradan

$$\vec{\beta}'(s) = \frac{d\vec{\beta}}{ds} = \frac{d}{ds}(\alpha \circ h)$$

veya

$$\vec{\beta}'(s) = \frac{d\vec{\alpha}}{dh}\,\frac{dh}{ds}$$

elde edilir. $t = h(s)$ olduğundan

$$\vec{\beta}'(s) = \frac{d\vec{\alpha}}{dt}\,\frac{dt}{ds},$$
$$\vec{\beta}'(s) = \frac{d\vec{\alpha}}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right)^{-1}$$

bulunur. Böylece

$$\langle \vec{\beta}'(s), \vec{\beta}'(s)\rangle\Big|_{\beta(s)} = \left\langle \frac{d\vec{\alpha}}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right)^{-1}, \frac{d\vec{\alpha}}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right)^{-1}\right\rangle\Big|_{(\alpha \circ h)}$$

$$\langle \vec{\beta}'(s), \vec{\beta}'(s)\rangle\Big|_{\beta(s)} = \left\|\frac{d\vec{\alpha}}{dt}\right\|^2_{(\alpha \circ h)}\left(\frac{ds}{dt}\right)^{-2},$$

$$\langle \vec{\beta}'(s), \vec{\beta}'(s)\rangle\Big|_{\beta(s)} = \|\vec{\alpha}'(t)\|^2_{(\alpha \circ h)}\,\|\vec{\alpha}'(t)\|_{(\alpha \circ h)},$$

$$\langle \vec{\beta}'(s), \vec{\beta}'(s)\rangle\Big|_{\beta(s)} = 1$$

elde edilir.

TANIM II.3.7. (EĞİLİM ÇİZGİSİ) :

E^3 de bir yüzey M olsun. $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere bir $\alpha : I \longrightarrow M$ eğrisi verilsin. Ayrıca E^3 de sabit bir birim vektör $\vec{u}$ olsun. $\forall s \in I$ için α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki hız vektörü $\vec{\alpha}'(s)$ olmak üzere

$$\langle \vec{\alpha}'(s)\big|_{\alpha(s)}, \vec{u}\rangle = \text{sabit} \qquad \text{(II.3.4)}$$

bağıntısı var ise α eğrisine M üzerinde bir eğilim çizgisi denir.

TEOREM II.3.2.

M bir yüzey ve $\alpha : I \longrightarrow M$ bir diferensiyellenebilir eğri olsun. α bir eğilim çizgisidir $\Leftrightarrow$ $\dfrac{k_1}{k_2}$ = sabittir.

İSPAT :

1) :

α bir eğilim çizgisi olsun. Bu takdirde

$$\langle \vec{\alpha}'(s), \vec{u} \rangle = \langle \vec{T}, \vec{u} \rangle = \text{sabit}$$

olduğundan türev alınırsa

$$\langle \vec{T}', \vec{u} \rangle = 0,$$
$$k_1 \langle \vec{N}, \vec{u} \rangle = 0,$$
$$\langle \vec{N}, \vec{u} \rangle = 0$$

veya tekrar türev alınarak

$$\langle \vec{N}', \vec{u} \rangle = 0,$$
$$\langle -k_1 \vec{T} + k_2 \vec{B}, \vec{u} \rangle = 0,$$
$$-k_1 \langle \vec{T}, \vec{u} \rangle + k_2 \langle \vec{B}, \vec{u} \rangle = 0$$

elde edilir. Eğer $\measuredangle(\vec{T}, \vec{u}) = \theta$ ise

$$\langle \vec{T}, \vec{u} \rangle = \cos\theta,$$
$$\langle \vec{B}, \vec{u} \rangle = \sin\theta$$

ve dolayısiyle

$$-k_1 \cos\theta + k_2 \sin\theta = 0, \quad \theta \neq \frac{\pi}{2}, \quad k_2 \neq 0,$$

$$\frac{k_1}{k_2} = \operatorname{tg}\theta = \text{sabit} \tag{II.3.5}$$

elde edilir.

2) $\Longleftarrow$:

$\dfrac{k_1}{k_2} = c$ (sabit) ise $k_1 = ck_2$ yazılabilir. Ayrıca $c \neq 0$ olmak üzere

$$\frac{d}{ds}\left(\vec{B}+\frac{\vec{T}}{c}\right) = -k_2\vec{N} + \frac{k_1\vec{N}}{c},$$

$$\frac{d}{ds}\left(\vec{B}+\frac{\vec{T}}{c}\right) = \vec{0}$$

$$\vec{B}+\frac{\vec{T}}{c} = \vec{u}\ \text{(sabit)}$$

bulunur. Böylece

$$\left\langle \vec{B}+\frac{\vec{T}}{c}, \vec{T}\right\rangle = \left\langle \vec{T}, \vec{u}\right\rangle,$$

$$\frac{1}{c} = \left\langle \vec{T},\vec{u}\right\rangle$$

olduğundan α bir eğilim çizgisidir.

TANIM II.3.8.

$\alpha : I \longrightarrow E^3$ eğrisi verildiğinde k_1 bu eğrinin eğriliği, k_2 de burulması olmak üzere

$$h = \frac{k_1}{k_2} \qquad \text{(II.3.6)}$$

ifadesine α eğrisinin harmonik eğriliği denir.

O halde teorem II.3.2. yi şöyle de ifade etmek mümkündür :

TEOREM II.3.3.

Bir $\alpha : I \longrightarrow E^3$ eğrisinin eğilim çizgisi olması için gerek ve yeter şart harmonik eğriliğinin sabit olmasıdır.

TANIM II.3.9. (BERTRAND EĞRİLERİ) :

$\alpha : I \longrightarrow E^3$ ve $\beta : I \longrightarrow E^3$ diferensiyellenebilir iki eğri olsunlar. $\forall s \in I$ için iki eğri aynı asli normale sahip iseler bu iki eğriye Bertrand eğri çifti teşkil ediyorlar denir.

Bertrand eğri çiftine dahil olan bir eğrinin k_1, k_2 eğrilikleri arasında a,b sabit reel sayılar olmak üzere

$$ak_1 + bk_2 = \text{sabit} \qquad \text{(II.3.7)}$$

bağıntısı vardır. Ayrıca bu özelik Bertrand eğrileri için gerek ve yeterdir.

II.4.E^3 DE DİFERENSİYEL FORMLAR

TANIM II.4.1.(ÇATI ALANLARI) :

E^3 Öklid uzayında birer vektör alanı V_1, V_2, V_3 olsun. Eğer $\forall P \in E^3$ noktası için $\{V_1, V_2, V_3\}$ sistemi P noktasındaki T_E3 (P) tanjant uzayının bir tabanı ise $\{V_1, V_2, V_3\}$ üçlüsüne E^3 de bir çatı alanı denir.

E^3 Öklid uzayında $\forall P \in E^3$ için

$$e_1(P) = (1,0,0)\big|_P\,,\quad e_2(P) = (0,1,0)\big|_P\,, e_3(P) = (0,0,1)\big|_P \qquad (II.4.1)$$

şeklindeki $\{e_1, e_2, e_3\}$ çatı alanına doğal çatı alanı denir. E^3 de diğer bir ortonormal çatı alanı $\{E_1, E_2, E_3\}$ olsun. $\forall P \in E^3$ için

$$e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \qquad (II.4.2)$$

olarak alırsak, $A \in O(3)$ olmak üzere

$$E = Ae \qquad (II.4.3)$$

şeklinde yazılabilir.

TANIM II.4.2.

E^3 deki bir ortonormal $\{E_1, E_2, E_3\}$ çatı alanı verildiğinde $\forall P \in E^3$ için

$$\det\left[E_1(P),\ E_2(P),\ E_3\ (P)\right] = 1$$

ise bu çatı alanına pozitif olarak yönlendirilmiştir denir.

$\forall P \in E^3$ noktasındaki tanjant uzay $T_E3(P)$ olmak üzere Φ_P fonksiyonlarını

$$\Phi_P\ :\ T_E3(P) \xrightarrow{\text{lineer}} \mathbb{R}$$

olarak tanımlayalım. Bu şekilde elde edilen

$$T_E^*3\ (P) = \left\{\Phi_P\ :\ T_E3(P) \xrightarrow{\text{lineer}} \mathbb{R}\right\}$$

cümlesi $\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesi üzerinde bir vektör uzayıdır. Bu uzaya $T_E 3(P)$ tanjant uzayının dual (kotanjant) uzayı denir. $\forall \Phi_P \in T_E^* 3(P)$ elemanına ise kovektör denir.

TANIM II.4.3. (1-FORM) :

Bir $\Phi : E^3 \longrightarrow \bigcup_{P \in E^3} T_E^* 3\ (P)$

dönüşümü için

$$\pi \circ \Phi = I : E^3 \xrightarrow{\text{özdeşlik}} E^3,$$

$$\pi : \bigcup_{P \in E^3} T_E^* 3(P) \longrightarrow E^3$$

$$(\Phi_P) \longrightarrow \pi(\Phi_P) = P$$

olacak şekilde tanımlanan bir π dönüşümü varsa Φ ye E^3 de bir 1-form denir.

E^3 de 1-formların toplamı dönüşümlerin toplamı olarak tanımlanır. 1-formların toplamı da 1-formdur. Ayrıca bir fonksiyonla 1-formun çarpımı da yine 1-formdur. Bu iki işleme göre E^3 deki 1-formların cümlesi reel vektör uzayıdır. Bu uzayı Ω^1 ile gösterelim.

TEOREM II.4.1.

E^3 Öklid uzayında Öklid koordinat fonksiyonları x_1, x_2, x_3 ün diferensiyelleri ile teşkil edilen $\{dx_1, dx_2, dx_3\}$ sistemi $\forall P \in E^3$ noktasındaki $T_E^* 3(P)$ kotanjant uzayının bir tabanını oluştururlar [14,pp.22-25].

TEOREM II.4.2.

E^3 de herbir $\Phi \in \Omega^1$ 1-formu

$$\Phi = \sum_{i=1}^{3} f_i\, dx_i,\quad f_i : E^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \text{(II.4.4)}$$

şeklinde yazılabilir [14] .

E^3 Öklid uzayında bir çatı alanı $\{E_1, E_2, E_3\}$ olsun. $\forall P \in E^3$ noktasındakidE$_i$, $(1 \leq i \leq 3)$ diferensiyelleri $T_E3(P)$ tanjant uzayına ait vektörler olduğundan $\{\vec{E}_1(P), \vec{E}_2(P), \vec{E}_3(P)\}$ sistemi cinsinden ifade edilebilirler. Buna göre $w_{ij}(P) \in \mathbb{R}$, $(i,j = 1,2,3)$, olmak üzere

$$d\vec{E}_1(P) = w_{11}\vec{E}_1(P) + w_{12}\vec{E}_2(P) + w_{13}\vec{E}_3(P)$$
$$d\vec{E}_2(P) = w_{21}\vec{E}_1(P) + w_{22}\vec{E}_2(P) + w_{23}\vec{E}_3(P)$$
$$d\vec{F}_3(P) = w_{31}\vec{E}_1(P) + w_{32}\vec{E}_2(P) + w_{33}\vec{E}_3(P)$$

şeklinde veya matris formunda

$$\begin{bmatrix} d\vec{E}_1 \\ d\vec{E}_2 \\ d\vec{E}_3 \end{bmatrix}_P = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{E}_1 \\ \vec{E}_2 \\ \vec{E}_3 \end{bmatrix}_P \qquad \text{(II.4.5)}$$

yazılabilir.

TEOREM II.4.3.

E^3 Öklid uzayında bir çatı alanı $\{E_1, E_2, E_3\}$ olsun. O zaman $\forall P \in E^3$ için

$$w_{ij}(P) = \langle d\vec{E}_i(P), \vec{E}_j(P) \rangle, \quad (i,j = 1,2,3), \text{(II.4.6)}$$

reel değerli fonksiyonları antisimetrik 1-formlardır.

İSPAT :

$\{E_1, E_2, E_3\}$ Öklid çatı alanı ve $\forall P \in E^3$ için

$$\langle \vec{E}_i, \vec{E}_j \rangle \big|_P = \delta_{ij}$$

olduğundan diferensiyel alınırsa

$$\langle d\vec{E}_i, \vec{E}_j \rangle \big|_P + \langle \vec{E}_i, d\vec{E}_j \rangle \big|_P = 0$$

veya

$$w_{ij}\big|_P + w_{ji}\big|_P = 0 \qquad \text{(II.4.7)}$$

bulunur.

Ayrıca $w_{ij}\big|_P$ ler birer lineer fonksiyon olduklarından antisimetrik 1-form oldukları gösterilmiş olur.

Eğer

$$\Omega = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{bmatrix}$$

dersek i=j için (II.4.7) den dolayı

$$w_{ii} = -\, w_{ii}\,,$$

$$w_{ii} = 0$$

ve $i \neq j$ için

$$w_{ij} = -w_{ji}$$

olacağından

$$w_{23} = w_1, w_{13} = -\, w_2, w_{12} = w_3$$

olarak alırsak Ω matrisi

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & w_3 & -w_2 \\ -w_3 & 0 & w_1 \\ w_2 & -w_1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(II.4.8)}$$

olarak bulunur.

Ω matrisinin w_1, w_2, w_3 elamanlarına E^3 Öklid uzayındaki $\{E_1, E_2, E_3\}$ çatı alanı için bağ formları adı verilir.

TEOREM II.4.4.

E^3 Öklid uzayında $\{e_1, e_2, e_3\}$ doğal çatı alanı ve $\{E_1, E_2, E_3\}$ de diğer bir ortonormal çatı alanı olsun. Bu takdirde $A \in O(3)$ ve Ω da $\{E_1, E_2, E_3\}$ sistemi için bağ formlarının matrisi olmak üzere

$$\Omega = dA\ A^T \qquad \text{(II.4.8)}$$

veya $\Omega = [w_{ij}]$ ve $A = [a_{ij}]$, $(i,j = 1,2,3)$, cinsinden

$$w_{ij} = \sum_k da_{ik} \; a^T_{kj}$$

şeklindedir [14] .

II.5. ÇİZGİLER UZAYINDA HAREKETLER

E^3 Öklid uzayındaki 1-parametreli hareketlerde E^3 ün doğruları
gle yüzeyler teorisi için önemlidir. Doğrular E^3 ün lineer nokta
mleleridir. Bu yüzden E^3 Öklid uzayını yalnızca doğrulardan meyda-
gelmiş bir uzay olarak düşünecek ve bunu belirtmek için de çizgi-
r uzayı adını vereceğiz.

Uzayda hareketin gözlenebilmesi için bir referans noktasına
tiyaç vardır. Bu noktanın sabit veya aynı noktada bulunan gözleyi-
ye göre sabit olduğu farzedilir. Bu noktayı $0 \in E^3$ ile gösterelim
hareketi inceleyebilmek için ortonormal bir

$$\{\vec{e}_1(0),\ \vec{e}_2(0),\ \vec{e}_3(0)\} = \{0;\ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$$

stemini tesbit edelim. Ayrıca bu uzayda bütün noktaların sabit
ldığı yani hereket etmediği farzedilerek bu hâlde E^3 uzayına sa-
t çizgiler uzayı denir ve H' ile gösterilir. Yani

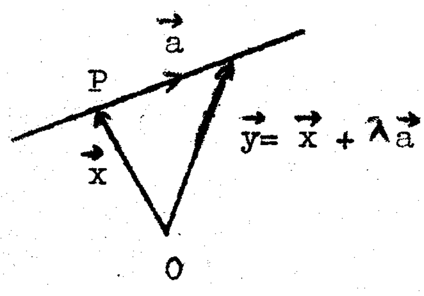
$$H' = Sp\left\{\vec{e}_1(0),\ \vec{e}_2(0),\ \vec{e}_3(0)\right\}. \qquad (II.5.1)$$

Diğer taraftan "O" noktasına göre hareketli bir P noktasını
bu noktaya sıkı bir şekilde bağlı olan ortonormal bir
$(P),\ \vec{E}_2(P),\ \vec{E}_3(P)\}$ **sistemini düşünelim**. Yani

$$H = Sp\left\{\vec{E}_1(P),\ \vec{E}_2(P),\ \vec{E}_3(P)\right\} \qquad (II.5.2)$$

sun.

Çizgiler uzayında artık noktaların hereketi yerine doğruların
reketi alınabilir. Bu sebeple uzayın en basit elemanı olarak yönlü
ğruları alırız. Hareketli bir P noktasının $\vec{OP}$ yervektörü ve bu
ktaya yerleştirilen bir $\vec{a}$ birim vektörü ile belirlenen doğrunun
rametrik denklemi



$$\vec{y} = \vec{x} + \lambda \vec{a} \tag{II.5.3}$$

şeklindedir. P noktasının doğru üzerinde keyfi bir nokta olması için, $\wedge$ vektörel çarpımı göstermek üzere,

$$\vec{a}^{*} = \vec{x} \wedge \vec{a} = \vec{y} \wedge \vec{a} \tag{II.5.4}$$

vektörel momentini kullanarak doğruyu $(\vec{a}, \vec{a}^{*})$ çifti ile belirleyebiliriz. $\vec{a}$ ve $\vec{a}^{*}$ vektörlerinin bileşenlerine <u>normlanmış Plücker doğru koordinatları</u> denir.

Çizgiler uzayında hereketleri üç gruba ayırabiliriz :

i) $(\vec{a}, \vec{a}^{*})$ doğrusunun H' sabit uzayına göre hareketi,

ii) $(\vec{a}, \vec{a}^{*})$ doğrusunun H hareketli uzayına göre hareketi,

iii) H hareketli uzayının H' sabit uzayına göre hareketi.

H nın H' uzayına göre 1-parametreli hareketine kısaca uzay hareketi diyerek H/H' ile göstereceğiz.

H/H' hareketini O noktası etrafında bir dönme ve O noktasına göre bir öteleme olmak üzere iki kısma ayırmak mümkündür.

Eğer sabit ve hareketli çizgiler uzayında iki Öklid koordinat sistemi, sırası ile, $\{x_1', x_2', x_3'\}$ ve $\{x_1, x_2, x_3\}$ ise

$$X' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{II.5.5}$$

olmak üzere (II.2.1) den dolayı H/H' uzay hereketini matris formunda

$$\begin{bmatrix} X' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterebiliriz. Burada $A \in O(3)$, $C \in \mathbb{R}_1^3$ şeklindedir.

TANIM II.5.1.

H/H' uzay hareketinin,

$$\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisinde dönmeye karşılık gelen $A \in O(3)$ ve ötelemeye karşılık gelen $C \in \mathbb{R}^3_1$ matrisleri,

$$A = A(t), \qquad (II.5.6)$$

$$C = C(t) \qquad (II.5.7)$$

olacak şekilde birtek reel t parametresinin diferensiyellenebilir fonksiyonları iseler H/H' uzay hareketine bir parametreli uzay hareketi denir.

TANIM II.5.2.

H/H' uzay hareketini belirleyen $A \in O(3)$ ve $C \in \mathbb{R}^3_1$ matrisleri $\forall t \in \mathbb{R}$ için,

$$A(t+2\pi) = A(t), \qquad (II.5.8)$$

$$C(t+2\pi) = C(t) \qquad (II.5.9)$$

olacak şekilde peryodik iseler H/H' uzay hareketine kapalı, aksi halde açık hareket adı verilir.

Kapalı bir H/H' uzay hareketinde hareketli uzayda tesbit edilen bir noktanın H ve H' deki yörüngeleri, sabit ve hareketli pol eğrileri, birer kapalı eğridirler [10].

H/H' hareketinin değişimini incelemek için diferensiyel alırsak (II.4.3) den dolayı

$$E = Ae, \; A \in O(3),$$

olduğundan

$$dE = dAe$$

elde edilir. Ayrıca

$$e = A^T E$$

olacağından

$$dE = dAA^T E$$

bulunur. Bağ formlarının $\Omega = dAA^T$ matrisi kullanılarak

$$dE = \Omega E \qquad (II.5.10)$$

yazılabilir.

Şimdi de hareketli uzayda bir $(\vec{a}, \vec{a}^{*})$ doğrusunu düşünelim. $\vec{a}$ birim doğrultman vektörünü $\forall P \in H$ için,

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} \vec{E}_1 \\ \vec{E}_2 \\ \vec{E}_3 \end{bmatrix} \qquad \text{(II.5.11)}$$

olmak üzere

$$\vec{a} = a^T E \qquad \text{(II.5.12)}$$

şeklinde yazalım. Doğrunun hareketinin değişimi için diferensiyel alırsak,

$$d\vec{a} = da^T E + a^T \, dE \; .$$

ayrıca (II.5.10) dan dolayı,

$$d\vec{a} = da^T E + a^T \, dE,$$

$$d\vec{a} = (da + \Omega^T a)^T E \qquad \text{(II.5.13)}$$

elde edilir. $(\vec{a}, \vec{a}^{*})$ doğrusu H hareketli uzayında sabit bir doğru ise.

$$da = 0 \qquad \text{(II.5.14)}$$

olacağından

$$d\vec{a} = a^T \Omega E \qquad \text{(II.5.15)}$$

bulunur. Eğer Ω matrisinin (II.4.8) deki ifadesinden bir $\vec{w}$ vektörünü

$$\vec{w} = (w_1, w_2, w_3) \qquad \text{(II.5.16)}$$

şeklinde alacak olursak (II.5.15) ifadesi

$$d\vec{a} = \vec{w} \wedge \vec{a} \qquad \text{(II.5.17)}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\wedge$ vektörel çarpımdır. Diferensiyel geometrideki Darboux dönme vektörünün rölünü oynayan $\vec{w}$ vektörüne H/H' hareketinin ani Pfaff vektörü denir.

TANIM II.5.3. (STEİNER VEKTÖRÜ) :

$\alpha : I \longrightarrow E^3$ bir kapalı eğri olsun. Bir ortonormal $\{\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3\}$ çatı alanı eğriye sıkı bir şekilde bağlı ve ayrıca $\forall t \in I$ için $\alpha(t)$ noktasındaki hareketli çizgiler uzayı

$$H = Sp\left\{\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3\right\}_{\alpha(t)}$$

olsun. H/H' uzay hareketindeki $\vec{w}$ Pfaff vektörünün α eğrisi boyunca eğrisel integraliyle belirtilen

$$\vec{D} = \oint \vec{w} \qquad \text{(II.5.18)}$$

vektörüne H/H' hareketinin Steiner vektörü denir.

TANIM II.5.4.

$\alpha : I \longrightarrow E^3$ diferensiyellenebilir kapalı bir eğri ve bu eğriye sıkı bir şekilde bağlı olarak hereket eden bir ortonormal $\{\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3\}$ sistemi H hareketli uzayı olarak seçilsin. $\vec{X}$ hareketli uzayın yer vektörü olmak üzere $d\vec{X} \in T_H(\alpha(t))$ olduğundan

$$d\vec{X} = \sigma_1 \vec{E}_1 + \sigma_2 \vec{E}_2 + \sigma_3 \vec{E}_3 \qquad \text{(II.5.19)}$$

şeklinde tek türlü olarak ifade edilebilir. α eğrisi boyunca eğrisel integral ile belirtilen

$$\vec{V} = \oint d\vec{X} \qquad \text{(II.5.20)}$$

vektörüne H/H' hareketinin Steiner öteleme vektörü denir.

H hareketli uzayını göstermek üzere bir $\alpha : I \longrightarrow E^3$ eğrisini çizen bir $\alpha(s)$ noktasına sıkı bir şekilde bağlı olarak hareket eden $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}_{\alpha(s)}$ Frenet çatı alanını alalım. O zaman E^3 deki hareketli çizgiler uzayı olan H yı

$$H = Sp\left\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\right\}_{\alpha(s)}$$

şeklinde düşünebiliriz.

$\alpha : I \longrightarrow E^3$ eğrisinin s yay parametresine göre $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}_{\alpha(s)}$ sisteminin değişimi (II.4.8) deki Ω matrisini bu hal için teşkil ederek

$$\begin{bmatrix} d\vec{T} \\ d\vec{N} \\ d\vec{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} ds \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix} \qquad \text{(II.5.21)}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada k_1 ve k_2, sırası ile, α eğrisinin eğrilik ve burulmasıdır.

II.6. REGLE YÜZEYLER

Bir $M \subset E^3$ yüzeyi verilsin. $\forall P \in M$ noktasında E^3 ün tamamen M de kalan bir doğrusu varsa M ye bir regle yüzey ve $\forall P \in M$ noktasından geçen ve M de kalan bu doğruya da regle yüzeyin doğrultmanı denir.

Regle yüzeylerin parametrik denklemini elde etmek için doğrultmanları kesen ve yüzey üzerinde bulunan diferensiyellenebilir bir

$$r : I \longrightarrow E^3$$
$$t \longrightarrow \vec{r}(t)$$

eğrisi seçilir ve regle yüzeyin dayanak eğrisi adı ile bilinir. M regle yüzeyinin r dayanak eğrisinin r(t) noktasındaki doğrultmanı üzerinde değişen bir nokta

$$\beta : \mathbb{R} \longrightarrow M$$
$$v \longrightarrow \vec{\beta}(v) = \vec{r}(t) + v\vec{a}(t) \qquad \text{(II.6.1)}$$

şeklindedir. Burada

$$\vec{a}(t) = (a_1(t),\ a_2(t),\ a_3(t))$$

birim doğrultman vektörünü göstermektedir. Böylece regle yüzey

$$\varphi : I \times \mathbb{R} \longrightarrow E^3$$

dönüşümü ile belirtilmiş olur.

TANIM II.6.2.

$$\varphi : I \times \mathbb{R} \longrightarrow E^3$$
$$(t,v) \longrightarrow \vec{\varphi}(t,v) = \vec{r}(t) + v\vec{a}(t) \qquad \text{(II.6.2)}$$

regle yüzeyi $\forall t \in I$ için

$$\vec{\varphi}(t + 2\pi,\ v) = \vec{\varphi}(t,v)$$

olacak şekilde peryodik ise regle yüzeye kapalıdır denir.

Kapalı regle yüzeylerin dayanak eğrileri ve anadoğrularının küresel göstergeleri kapalı eğrilerdir [15].

TANIM II.6.3.

Bir $\vec{\varphi}(t,v)$ regle yüzeyinin anadoğrularının her birini dik olarak kesen eğriye regle yüzeyin ortogonal yörüngesi denir.

TANIM II.6.4.

Bir $\vec{\varphi}(t,v)$ regle yüzeyinde komşu iki doğrultmanın ortak dikmesinin doğrultmanlar üzerindeki ayaklarına boğaz (merkez veya striksiyon) noktası adı verilir.

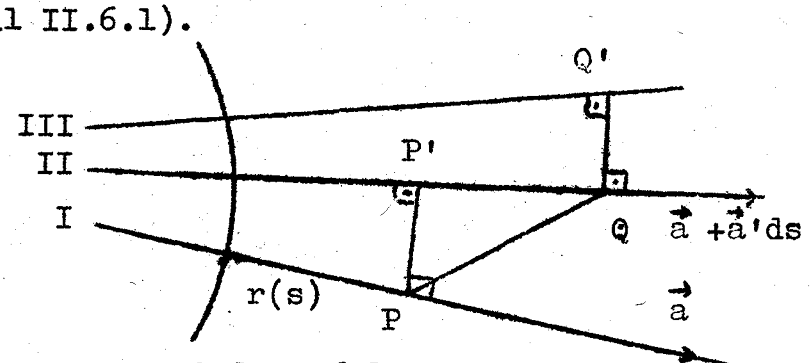
TANIM II.6.5.

Bir $\vec{\varphi}(t,v)$ regle yüzeyinin dayanak eğisi boyunca H/H' hareketinde boğaz noktalarının geometrik yerine regle yüzeyin boğaz (striksiyon) çizgisi (eğrisi) adı verilir.

Bir $\vec{\varphi}(s,v)$ regle yüzeyinin merkez noktasının $\vec{\bar{r}}$ yer vektörü dayanak eğrisinin $\vec{r}(s)$ yer vektörü, $\vec{a}(s)$ doğrultman vektörü ve dayanak eğrisine olan $\bar{u}$ uzaklığı cinsinden

$$\vec{\bar{r}}\,(s,\bar{u}) = \vec{r}(s) + \bar{u}\,\vec{a}(s) \qquad \text{(II.6.3)}$$

şeklinde ifade edilebilir. $\bar{u}$ parametresi regle yüzeyin dayanak eğrisinin yer vektörü ve doğrultman cinsinden bulunabilir. Regle yüzeyin ilk ikisi, $\vec{a}(s)$ ve $\vec{a}(s) + d\vec{a}\,(s)$ olan komşu üç anadoğrusu verilsin (Şekil II.6.1).



Şekil II.6.1.

P,P' ve Q,Q' komşu anadoğruların ortak dikmelerinin anadoğrular üzerindeki ayakları olsunlar. İlk iki komşu anadoğrunun ortak dikmesi

$$\vec{a}(s) \wedge (\vec{a}(s) + \vec{a}'\,(s)\,ds\,) = \vec{a}\,(s) \wedge \vec{a}'\,(s)\,ds \quad \text{(II.6.4)}$$

bağıntısından dolayı $\vec{a} \wedge \vec{a}'$ vektörüne paraleldir. Limit halinde $\vec{PQ}$ vektörü $\vec{PP'}$ ile çakışacak ve boğaz çizgisinin teğeti olacaktır. Dolayısıyle

$$\langle \vec{a}, \vec{PQ} \rangle = 0, \ \langle \vec{a}+\vec{a}'ds, \vec{PQ} \rangle = 0 \qquad \text{(II.6.5)}$$

olacağından

$$\langle \vec{a}', \vec{PQ} \rangle = 0 \qquad \text{(II.6.6)}$$

elde edilir. Ayrıca (II.6.3) den dayanak eğrisinin s yay parametresine göre türevi alınırsa ve (II.6.6) dan dolayı,

$$\left\langle \frac{d\vec{a}}{ds}, \frac{d\vec{r}}{ds} \right\rangle = 0, \qquad \text{(II.6.7)}$$

$$\left\langle \frac{d\vec{a}}{ds}, \vec{T} + \frac{d\bar{u}}{ds}\vec{a} + \bar{u}\frac{d\vec{a}}{ds} \right\rangle = 0,$$

$$\langle \vec{a}', \vec{T} \rangle + \bar{u}\, \|\vec{a}'\|^2 = 0,$$

$$\bar{u} = -\frac{\langle \vec{a}', \vec{T} \rangle}{\|\vec{a}'\|^2} \qquad \text{(II.6.8)}$$

bulunur. Böylece striksiyon eğrisinin yervektörü için (II.6.3) den

$$\vec{\bar{r}}(s) = \vec{r}(s) - \frac{\langle \vec{a}', \vec{T} \rangle}{\|\vec{a}'\|^2}\vec{a}(s) \qquad \text{(II.6.9)}$$

elde edilir. Eğer $\|\vec{a}'\| = 0$ ise regle yüzey striksiyon eğrisine sahip değildir. Bu hal regle yüzeyin silindir olmasını karakterize eder. Regle yüzeyler için striksiyon eğrisi dayanak eğrisi olarak alınabilir. Bunun için (II.6.8) formülünde

$$\bar{u} = 0, \langle \vec{a}', \vec{T} \rangle = 0 \qquad \text{(II.6.10)}$$

alınması yeterlidir.

TANIM II.6.6.

Bir $\vec{\varphi}(s,v)$ regle yüzeyinin ana doğruları boyunca teğet düzlemleri aynı kalıyorsa regle yüzeye açılabilirdir denir.

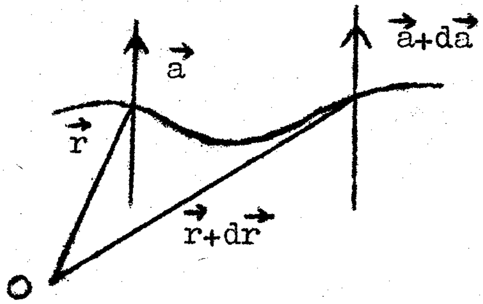
TANIM II.6.7. (DAĞILMA PARAMETRESİ) :

Regle yüzeyin komşu iki anadoğrusu arasındaki en kısa uzaklığın anadoğrular arasındaki açıya oranına regle yüzeyin dağılma parametresi (drali) denir.

Anadoğrularının birim doğrultman vektörü $\vec{a}$ olan bir regle yüzeyin dralini P_a ile gösterelim. Komşu anadoğruların ortak dikmesi doğrultusundaki bir vektör (II.6.4) den dolayı $\vec{a} \wedge \vec{a}'$ olduğundan bu doğrultudaki birim vektör

$$\frac{\vec{a} \wedge \vec{a}'}{\|\vec{a}'\|}$$

dir.



Şekil II.6.2.

Dayanak eğrisinin komşu iki noktası $\vec{r}(s)$ ve $\vec{r}(s) + d\vec{r}\,(s)$ olduğundan bu noktalardaki anadoğrular arasındaki en kısa uzaklık $d\vec{r}$ vektörünün $\dfrac{d\vec{r} \wedge \vec{a}'}{\|\vec{a}'\|}$ vektörü üzerindeki izdüşümüdür. Böylece en kısa uzaklığı

$$k = \left\langle d\vec{r}, \frac{\vec{a} \wedge \vec{a}'}{\|\vec{a}'\|} \right\rangle,$$

$$k = \frac{\det\left[d\vec{r}, \vec{a}, \vec{a}'\right]}{\|\vec{a}'\|} \qquad \text{(II.6.11)}$$

olarak buluruz. Eğer anadoğruların küresel göstergelerini göz önüne alırsak bu göstergenin yay elementi olan,

$$d\psi = \left\|\frac{d\vec{a}}{ds}\right\| ds \qquad \text{(II.6.12)}$$

komşu iki anadoğru arasındaki açı olarak alınabilir. Böylece regle yüzeyin drali için

$$P_a = \frac{k}{d\psi},$$

$$P_a = \frac{\det\left[d\vec{r}, \vec{a}, \vec{a}'\right]}{\|\vec{a}'\|} : \|\vec{a}'\|\, ds, \qquad \text{(II.6.13)}$$

$$P_a = \frac{\det\left[\frac{d\vec{r}}{ds}, \vec{a}, \vec{a}'\right]}{\|\vec{a}'\|^2} \qquad \text{(II.6.14)}$$

bulunur. Regle yüzeyler için dral koordinat değişimlerine göre en basit diferensiyel invaryanttır [16, Sayfa 250].

TEOREM II.6.1.

Bir $\vec{\varphi}(s,v)$ regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter şart dağılma parametresinin sıfır olmasıdır.

İSPAT :

1) $\Rightarrow$:

Regle yüzeyin açılabilir olması için anadoğrular boyunca teğet düzlemin, dolayısiyle yüzey normallerinin aynı kalması gerekir.

Regle yüzeyin

$$\vec{\varphi}(s,v) = \vec{r}(s) + v\vec{a}(s)$$

denkleminden s ve v parametrelerine göre kısmi türev alınırsa

$$\vec{\varphi}_s = \vec{T} + v\vec{a}'$$
$$\vec{\varphi}_v = \vec{a}(s)$$

elde edilir. Buradan

$$\vec{\varphi}_s \wedge \vec{\varphi}_v = (\vec{T}+v\vec{a}')\wedge \vec{a},$$
$$\vec{\varphi}_s \wedge \vec{\varphi}_v = \vec{T}\wedge\vec{a} + v\vec{a}'\wedge\vec{a} \qquad \text{(II.6.15)}$$

ve ayrıca yüzey normali

$$\vec{n} = \frac{\vec{\varphi}_s \wedge \vec{\varphi}_v}{\|\vec{\varphi}_s \wedge \vec{\varphi}_v\|}$$

olduğundan $\vec{n}$ nin değişmemesi için v parametresinden bağımsız olması gerekir. Bu sebeple (II.6.15) deki $\vec{T}\wedge\vec{a}$ ve $\vec{a}'\wedge\vec{a}$ vektörleri lineer bağımlı olmalıdır. Böylece

$$(\vec{T}\wedge\vec{a})\wedge(\vec{a}'\wedge\vec{a}) = \vec{0},$$
$$\vec{a}(\det[\vec{T},\vec{a}',\vec{a}]) - \vec{T}(\det[\vec{a},\vec{a}',\vec{a}]) = \vec{0},$$
$$\vec{a}(\det[\vec{T},\vec{a}',\vec{a}]) = \vec{0}, \qquad \text{(II.6.16)}$$
$$\det[\vec{T},\vec{a}',\vec{a}] = 0, \quad \det\left[\frac{d\vec{r}}{ds}, \vec{a}, \frac{d\vec{a}}{ds}\right] = 0$$

veya

$$P_a = 0$$

elde edilir.

2) $\Longleftarrow$:

Tersine hareket edilerek $P_a = 0$ ise regle yüzey normallerinin aynı kalacağı dolayısiyle regle yüzeyin açılabilir olduğu görülür.

Açılabilir regle yüzeyler için dralin sıfır olması (II.6.11) deki komşu anadoğrular arasındaki en kısa k uzaklığının sıfır olmasını yani bu anadoğruların kesişmesini gerektirir.

II.7. REGLE YÜZEYLERİN İNTEGRAL İNVARYANTLARI

H/H' kapalı uzay hareketinde H uzayında tesbit edilen her doğru bir regle yüzey çizer. Bir

$$\vec{\varphi}(s,v) = \vec{r}(s) + v\vec{a}(s)$$

regle yüzeyinin anadoğrularının dik yörüngeleri için

$$\begin{aligned} &\langle \vec{a}, d\vec{\varphi} \rangle = 0, \\ &\langle \vec{a}, d\vec{r} + dv\vec{a} + vd\vec{a} \rangle = 0, \\ &\langle \vec{a}, d\vec{r} \rangle + dv \,\|\vec{a}\|^2 = 0, \\ &-dv = \langle \vec{a}, d\vec{r} \rangle \end{aligned} \qquad (II.7.1)$$

bulunur. Bu formülün regle yüzeyin dayanak eğrisi boyunca eğrisel integrali alınırsa

$$L_a = \oint_{(r)} \langle d\vec{r}, \vec{a} \rangle = -\oint_{(r)} dv \qquad (II.7.2)$$

elde edilir. Burada

$$L_a : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlanmış olan L_a fonksiyonuna regle yüzeyin açılım uzunluğu (adımı) denir.

Açılım uzunluğu regle yüzeylerin bir integral invaryantıdır [6]. Eğer kapalı regle yüzeyin ortogonal yörüngelerinin bir tam devri göz önüne alınırsa adım hiçbir zaman regle yüzeyin striksiyon eğrisinin uzunluğunu aşamaz [15]. Fakat eşitlik hali mümkündür. Eğer regle yüzeyi kapalı ve açılabilir farzeder, dayanak eğrisini de striksiyon eğrisi olarak alırsak, $s_{\bar{r}}$ striksiyon eğrisinin uzunluğu olmak üzere,

$$L_a = s_{\bar{r}} \qquad (II.7.3)$$

elde edilir [15] . Diğer taraftan bu özellik regle yüzeyin açılabilir olması için bir karakterizasyondur [15] . Açılabilir kapalı regle yüzeyin açılım uzunluğu sıfır ise striksiyon eğrisi bir nokta ve dolayısiyle regle yüzey bir koni olur.

TANIM II.7.1. (AÇILIM AÇISI) :

Anadoğrusunun birim doğrultman vektörü $\vec{a}$ olan bir $\vec{\varphi}(s,v)$ regle yüzeyinin anadoğrularına dik bir doğrultunun bir peryot sonra ilk konumu ile yaptığı açıya regle yüzeyin açılım açısı denir ve λ_a ile gösterilir.

$\vec{\varphi}(s,v)$ regle yüzeyinin $\vec{a}$ doğrultman vektörünü

$$\vec{a}_1 = \vec{a}(s) \qquad \text{(II.7.4)}$$

şeklinde bir ortonormal üç ayaklının ilk bileşeni olarak alalım. Doğrultmana dik olan vektörü $\vec{a}_2$ birim vektörü olarak alırsak

$$\vec{a}_3 = \vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2$$

şeklinde $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ ortonormal sistemini tesbit etmiş oluruz. Böylece regle yüzeyin dayanak eğrisi boyunca hareket eden H hareketli uzayını

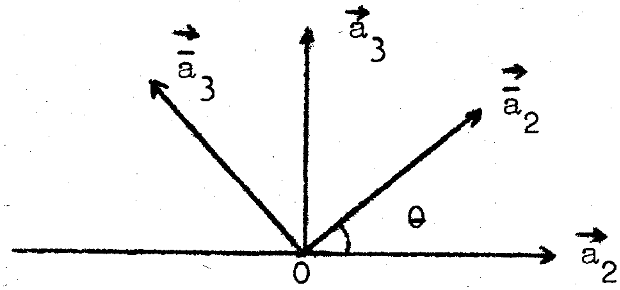
$$H = Sp\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}\Big|_{r(s)}$$

olarak alabiliriz. Bir tam dönmeden sonra doğrultmanın ilk ve son konumları aynı olacağından $\vec{\bar{a}}_1$ ve $\vec{a}_1$ ile gösterilen bu konumlar için

$$\vec{\bar{a}}_1 = \vec{a}_1$$

elde edilir. Ayni şekilde üç ayaklının diğer vektörlerinin ilk ve son konumlarını, sırası ile, $\vec{\bar{a}}_2$, $\vec{\bar{a}}_3$ ve $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ ile gösterelim. Böylece sabit sistemi

$$\{\vec{r}(s_o); \vec{\bar{a}}_1, \vec{\bar{a}}_2, \vec{\bar{a}}_3\}$$ ve hareketli sistemi de $\{\vec{r}(s); \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ şeklinde alalım. İkinci ve üçüncü eksenlerin ilk ve son konumları arasındaki açı θ ise bu takdirde



Şekil II.7.1

$$\vec{a}_2 = \vec{\bar{a}}_2 \cos\theta - \vec{\bar{a}}_3 \sin\theta$$
$$\vec{a}_3 = \vec{\bar{a}}_2 \sin\theta + \vec{\bar{a}}_3 \cos\theta, \quad \theta = \theta\,(s) \qquad \text{(II.7.5)}$$

yazılabilir. H/H' hareketinin değişimi için diferensiyel alınırsa,

$$d\vec{a}_2 = d\vec{\bar{a}}_2 \cos\theta - d\vec{\bar{a}}_3 \sin\theta + (-\vec{\bar{a}}_2 \sin\theta - \vec{\bar{a}}_3 \cos\theta)\, d\theta,$$
$$d\vec{a}_3 = d\vec{\bar{a}}_2 \sin\theta + d\vec{\bar{a}}_3 \cos\theta + (\vec{\bar{a}}_2 \cos\theta - \vec{\bar{a}}_3 \sin\theta)\, d\theta \qquad \text{(II.7.6)}$$

elde edilir. $\vec{\bar{a}}_2$ ve $\vec{\bar{a}}_3$ sabit sistemde olduklarından

$$d\vec{\bar{a}}_2 = d\vec{\bar{a}}_3 = \vec{0} \qquad \text{(II.7.7)}$$

bulunur. Dolayısiyle,

$$d\vec{a}_2 = (-\vec{\bar{a}}_2 \sin\theta - \vec{\bar{a}}_3 \cos\theta)\, d\theta,$$
$$d\vec{a}_3 = (\vec{\bar{a}}_2 \cos\theta - \vec{\bar{a}}_3 \sin\theta)\, d\theta$$

olacağından (II.7.5) den dolayı

$$d\vec{a}_2 = -\vec{a}_3\, d\theta,$$
$$d\vec{a}_3 = \vec{a}_2\, d\theta \qquad \text{(II.7.8)}$$

olur. Buradan $d\theta$ çözülürse,

$$-d\theta = \langle d\vec{a}_2, \vec{a}_3 \rangle = -\langle d\vec{a}_3, \vec{a}_2 \rangle \qquad \text{(II.7.9)}$$

elde edilir. Eğer (II.7.9) un, $\vec{\varphi}(s,v)$ regle yüzeyinin dayanak eğrisi boyunca integralini alırsak açılım açısının λ_a değeri

$$\lambda_a = -\oint_{(r)} d\theta \qquad \text{(II.7.10)}$$

veya

$$\lambda_a = \oint_{(r)} \langle d\vec{a}_2, \vec{a}_3 \rangle = -\oint \langle d\vec{a}_3, \vec{a}_2 \rangle \qquad \text{(II.7.11)}$$

olarak bulunur.

Ayrıca $\{\vec{r}(s)\,;\, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ sisteminin değişimi için (II.4.8) deki Ω matrisi kullanılarak

$$\begin{bmatrix} d\vec{a}_1 \\ d\vec{a}_2 \\ d\vec{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & w_3 & -w_2 \\ -w_3 & 0 & w_1 \\ w_2 & -w_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vec{a}_3 \end{bmatrix} \tag{II.7.12}$$

şeklinde yazılabileceğinden

$$\langle d\vec{a}_2, \vec{a}_3 \rangle = -\langle d\vec{a}_3, \vec{a}_2 \rangle = w_1 \tag{II.7.13}$$

ve açılım açısı için

$$\lambda_a = \oint w_1 \tag{II.7.14}$$

elde edilir. Diğer taraftan H/H' hareketinin (II.5.18) de tanımlanan $\vec{D}$ Steiner vektörü için

$$\vec{D} = \oint_{(r)} (w_1\vec{a}_1 + w_2\vec{a}_2 + w_3\vec{a}_3)$$

ve dolayısiyle

$$\begin{aligned} \langle \vec{D}, \vec{a} \rangle &= \langle \vec{D}, \vec{a}_1 \rangle , \\ \langle \vec{D}, \vec{a} \rangle &= \oint w_1 \end{aligned} \tag{II.7.15}$$

elde edilir. (II.7.14) ve (II.7.15) formüllerinden regle yüzeyin açılım açısı için

$$\lambda_a = \oint \langle \vec{D}, \vec{a} \rangle \tag{II.7.16}$$

ifadesi bulunur. Ayrıca H/H' hareketinin (II.5.20) deki Steiner öteleme vektörü

$$\vec{V} = \oint_{(r)} d\vec{r} \tag{II.7.17}$$

kullanılarak (II.7.2) deki açılım uzunluğu için

$$L_a = \langle \vec{V}, \vec{a} \rangle \tag{II.7.18}$$

elde edilir. Böylece şu teoremi verebiliriz :

TEOREM II.7.1.

Anadoğrusunun birim doğrultman vektörü $\vec{a}$ olan bir kapalı regle yüzeyin L_a açılım uzunluğu ve λ_a açılım açısı, sırası ile, H/H' uzay hareketinin Steiner öteleme vektörü $\vec{V}$ ve Steiner vektörü $\vec{D}$ üzerindeki dik izdüşümlerine eşittir, yani

$$L_a = \langle \vec{V}, \vec{a} \rangle,$$
$$\lambda_a = \langle \vec{D}, \vec{a} \rangle.$$

Açılım açısı da regle yüzeyler için açılım uzunluğu gibi bir integral invaryantıdır [9].

Diğer taraftan regle yüzeyin dayanak eğrisi boyunca H/H' hareketinde H hareketli uzayını (II.5.21) deki gibi $H = Sp\{\vec{T},\vec{N},\vec{B}\}_{r(s)}$ olarak seçelim. Bu halde hareketin Steiner vektörü için

$$\vec{D} = \oint_{(r)} (k_2\vec{T}+k_1\vec{B})\, ds \qquad \text{(II.7.19)}$$

bulunur, burada $\vec{T}$ ve $\vec{B}$, sırası ile, dayanak eğrisinin birim teğet vektör alanı ve binormal vektör alanıdır. k_1 ile k_2 de dayanak eğrisinin eğrilik fonksiyonlarıdır.

B Ö L Ü M III

REGLE YÜZEYLERİN İNVARYANTLARI

III.1. AÇILIM AÇISI, AÇILIM UZUNLUĞU VE DAĞILMA PARAMETRESİ ÜZERİNE

$\vec{\varphi}(s,v)$ ile gösterdiğimiz kapalı regle yüzeyin dayanak eğrisinin yay parametresi s, doğrultman vektörü $\vec{a}$ olsun. $r : I \to E^3$ dayanak eğrisi boyunca tanımlanan H/H' hareketinin Steiner vektörü (II.7.19) da olduğu gibi

$$\vec{D} = \vec{T}\oint k_2 ds + \vec{B}\oint k_1 ds \qquad \text{(III.1.1)}$$

dır. Buradaki integral dayanak eğrisi boyunca eğrisel integraldir. Dayanak eğrisinin $\vec{T},\vec{N},\vec{B}$ Frenet vektörlerinin hareket sırasında çizdikleri regle yüzeylerin açılım açıları, sırası ile, (II.7.16) gereğince

$$\lambda_T = \langle \vec{D},\vec{T} \rangle,$$

$$\lambda_T = \oint k_2 ds; \qquad \text{(III.1.2)}$$

$$\lambda_N = \langle \vec{D},\vec{N} \rangle,$$

$$\lambda_N = 0; \qquad \text{(III.1.3)}$$

$$\lambda_B = \langle \vec{D},\vec{B} \rangle,$$

$$\lambda_B = \oint k_1 ds \qquad \text{(III.1.4)}$$

dir. Aynı şekilde açılım uzunlukları da, sırası ile,

$$L_T = \langle \oint d\vec{r}, \vec{T} \rangle,$$

$$L_T = \langle \oint \vec{T} ds, \vec{T} \rangle,$$

$$L_T = \oint ds; \qquad \text{(III.1.5)}$$

$$L_N = \langle \oint d\vec{r}, \vec{N} \rangle,$$

$$L_N = 0; \qquad \text{(III.1.6)}$$

$$L_B = 0$$

dir. (III.1.2) ve (III.1.4) formüllerinden dolayı hareketin Steiner vektörünün (III.1.1) deki ifadesi için

$$\vec{D} = \lambda_T \vec{T} + \lambda_B \vec{B} \qquad \text{(III.1.7)}$$

bulunur. Böylece şu sonucu verebiliriz.

TEOREM III.1.1.

Kapalı bir regle yüzeyin dayanak eğrisi boyunca $\{\vec{T},\vec{N},\vec{B}\}$ Frenet üç ayaklısının hareketinde, hareketin Steiner vektörünün bileşenleri bu üç ayaklının ayaklarının temsil ettikleri doğruların çizdikleri regle yüzeylerin açılım açılarından ibarettir.

Şimdi de $\{\vec{T},\vec{N},\vec{B}\}$ sistemine sıkı bir şekilde bağlı olarak hareket eden bir $\vec{a}$ doğrusunun çizmiş olduğu regle yüzeyi düşünelim. $\vec{a}$ vektörü bu sisteme göre tek türlü olarak

$$\vec{a} = a_1\vec{T} + a_2\vec{N} + a_3\vec{B},\quad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1 \qquad \text{(III.1.8)}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu durumda a_i, $1 \leq i \leq 3$, bileşenleri H da sabittirler. $\vec{a}$ doğrusunun çizdiği regle yüzeyin açılım açısını hesaplayalım. (II.7.16) ve (III.1.7) den dolayı λ_a açılım açısı

$$\lambda_a = \langle \vec{D}, \vec{a} \rangle,$$

$$\lambda_a = \langle \lambda_T\vec{T} + \lambda_B\vec{B},\ a_1\vec{T} + a_2\vec{N} + a_3\vec{B} \rangle,$$

$$\lambda_a = \lambda_T\, a_1 + \lambda_B a_3 . \qquad \text{(III.1.9)}$$

Buradan şu teoremleri verebiliriz :

TEOREM III.1.2.

Bir $r : I \longrightarrow E^3$ kapalı eğrisi boyunca tanımlanan bir H/H' uzay hareketinde H uzayındaki sabit bir doğrunun H' de çizmiş olduğu regle yüzeyin açılım açısı seçilen doğrunun asli normal doğrultusundaki bileşeninden bağımsızdır.

TEOREM III.1.3.

Bir $r : I \longrightarrow E^3$ kapalı eğrisi boyunca tanımlanan bir H/H' hareketinde H daki sabit bir $\vec{a}$ doğrusunun H' de çizdiği regle yüzeyin açılım açısı ile harekete katılan $\vec{T},\vec{B}$ Frenet vektörleri ile belli olan doğruların H' de çizdiği regle yüzeylerin açılım açıları arasında

$$\lambda_a = a_1\lambda_T + a_3\lambda_B$$

lineer bağıntısı vardır.

Aynı şekilde $\vec{a}$ doğrusunun çizdiği regle yüzeyin L_a açılım uzunluğu için ise (II.7.2) den -

$$L_a = \langle \oint d\vec{r}, \vec{a} \rangle ,$$
$$L_a = \oint \langle \vec{T}\ ds,\ a_1\vec{T} + a_2\vec{N} + a_3\vec{B} \rangle ,$$
$$L_a = a_1 \oint ds \qquad \text{(III.1.10)}$$

ve ayrıca (III.1.5) formülünden dolayı

$$L_a = a_1 L_T \qquad \text{(III.1.11)}$$

elde edileceğinden şu teorem verilebilir :

TEOREM III.1.4.

Bir $r : I \longrightarrow E^3$ kapalı eğrisi boyunca tanımlanan H/H' hareketinde H daki sabit bir $\vec{a}$ doğrusunun H' de çizdiği regle yüzeyin açılım uzunluğu hareketi belirleyen $\vec{r}(s)$ eğrisinin $\vec{T}$ teğetinin çizdiği regle yüzeyin açılım uzunluğu ile $\vec{a}$ doğrusunun teğet yönündeki bileşeninin çarpımıdır.

Diğer taraftan $\{\vec{T},\vec{N},\vec{B}\}$ sistemine bağlı olarak hareket eden, $\vec{a}$ doğrusunun çizdiği regle yüzeyin açılabilir olması için drali, dolayısiyle (II.6.14) den $\det\left[\frac{d\vec{r}}{ds}, \vec{a}, \frac{d\vec{a}}{ds}\right]$ ifadesi sıfır olmalıdır. (III.1.18) ifadesinden dolayı türev hesaplanırsa, $\vec{a}$ doğrusu H hareketli sisteminde sabit olduğundan,

$$\frac{d\vec{a}}{ds} = a_1k_1\vec{N} + a_2\,(-k_1\vec{T} + k_2\vec{B}) + a_3(-k_2\vec{N}),$$
$$\frac{d\vec{a}}{ds} = -a_2k_1\vec{T} + (a_1k_1 - a_3k_2)\,\vec{N} + a_2k_2\vec{B}$$

bulunur. Böylece

$$\frac{d\vec{r}}{ds} \wedge \vec{a} = \vec{T} \wedge \vec{a},$$
$$\frac{d\vec{r}}{ds} \wedge \vec{a} = a_2\vec{B} - a_3\vec{N} \qquad \text{(III.1.12)}$$

olduğundan

$$\det\left[\frac{d\vec{r}}{ds}, \vec{a}, \frac{d\vec{a}}{ds}\right] = \langle \vec{T} \wedge \vec{a}, \frac{d\vec{a}}{ds} \rangle ,$$

$$\det\left[\frac{d\vec{r}}{ds}, \vec{a}, \frac{d\vec{a}}{ds}\right] = \left\langle a_2\vec{B} - a_3\vec{N}, \frac{d\vec{a}}{ds}\right\rangle,$$

$$\det\left[\frac{d\vec{r}}{ds}, \vec{a}, \frac{d\vec{a}}{ds}\right] = a_2^2 k_2 - a_3(a_1k_1 - a_3k_2) = 0, \quad \text{(III.1.13)}$$

$$(a_2^2 + a_3^2)\, k_2 - a_1a_3k_1 = 0,$$

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{a_2^2 + a_3^2}{a_1a_3} \quad \text{(III.1.14)}$$

ve ayrıca $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$ olduğundan

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{1 - a_1^2}{a_1a_3}. \quad \text{(III.1.15)}$$

Ayrıca (III.1.9) ve (III.1.11) den a_1 ve a_3 çözülecek olursa

$$a_1 = \frac{L_a}{L_T} \quad \text{(III.1.16)}$$

$$\lambda_a = \frac{L_a}{L_T}\lambda_T + a_3\lambda_B,$$

$$a_3 = \frac{\lambda_a L_T - L_a\lambda_T}{L_T\,\lambda_B} \quad \text{(III.1.17)}$$

elde edilir. a_1 ve a_3 ün bu değerleri (III.1.15) de yerine yazılacak olursa

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{(L_T^2 - L_a^2)\lambda_B}{(\lambda_a L_T - L_a\lambda_T)\, L_a} \quad \text{(III.1.18)}$$

bulunur. Diğer taraftan $\vec{a}$ doğrusu $\{\vec{T},\vec{N},\vec{B}\}$ sisteminde sabit bir doğru olduğundan, bu sisteme göre bileşenleri olan a_1, a_2, a_3 de sabit olacak ve dolayısiyle (III.1.15) den

$$\overset{o}{h} = \frac{k_1}{k_2} = \text{sabit}$$

elde edilir. Böylece şu teoremi verebiliriz :

TEOREM III.1.5.

Hareketli $H = Sp\{\vec{T},\vec{N},\vec{B}\}$ uzayının sabit H' uzayına göre kapalı ve bir parametreli H/H' hareketinde H daki sabit bir $\vec{a}$ doğrusunun H' de çizdiği regle yüzeyin açılabilir olması için gerek ve yeter şart bu regle yüzeyin dayanak eğrisinin, harmonik eğriliği

$$h = \frac{k_1}{k_2} = \frac{(L_T^2 - L_a^2)\lambda_B}{(\lambda_a L_T - L_a \lambda_T)\, L_a}$$

olacak şekilde bir eğilim çizgisi olmasıdır.

Bir $r: I \longrightarrow E^3$ eğrisi boyunca alınan H/H' kapalı uzay hareketinde H yı geren $\{\vec{T},\vec{N},\vec{B}\}$ Frenet üç ayaklısının ayaklarına karşılık gelen doğruların H' de çizmiş oldukları regle yüzeylerin drallerini hesap edelim.

$\vec{T}$ teğetine karşılık gelen doğrunun H' de çizmiş olduğu regle yüzeyin P_T drali

$$P_T = \frac{\det\left[\frac{d\vec{r}}{ds}, \vec{T}, \frac{d\vec{T}}{ds}\right]}{\left\|\frac{d\vec{T}}{ds}\right\|^2}, \qquad \text{(III.1.19)}$$

$$P_T = \frac{\det\left[\vec{T}, \vec{T}, \frac{d\vec{T}}{ds}\right]}{\left\|\frac{d\vec{T}}{ds}\right\|^2},$$

$$P_T = 0 \qquad \text{(III.1.20)}$$

dır. $\vec{N}$ asli normaline karşılık gelen doğrunun H' de çizdiği regle yüzeyin P_N drali

$$P_N = \frac{\det\left[\frac{d\vec{r}}{ds}, \vec{N}, \frac{d\vec{N}}{ds}\right]}{\left\|\frac{d\vec{N}}{ds}\right\|^2},$$

$$P_N = \frac{\det\left[\vec{T},\vec{N}, -k_1\vec{T} + k_2\vec{B}\right]}{\left\|-k_1\vec{T} + k_2\vec{B}\right\|^2},$$

$$P_N = \frac{\langle \vec{B}, -k_1\vec{T} + k_2\vec{B}\rangle}{k_1^2 + k_2^2},$$

$$P_N = \frac{k_2}{k_1^2 + k_2^2}. \qquad \text{(III.1.21)}$$

$\vec{B}$ binormaline karşılık gelen doğrunun H' de çizdiği regle yüzeyin P_B drali

$$P_B = \frac{\det\left[\frac{d\vec{r}}{ds}, \vec{B}, \frac{d\vec{B}}{ds}\right]}{\left\|\frac{d\vec{B}}{ds}\right\|^2},$$

$$P_B = \frac{\langle \vec{T}\wedge\vec{B}, -k_2\vec{N}\rangle}{\|-k_2\vec{N}\|^2},$$

$$P_B = \frac{\langle -\vec{N}, -k_2\vec{N}\rangle}{k_2^2},$$

$$P_B = \frac{k_2}{k_2^2},$$

$$P_B = \frac{1}{k_2}. \qquad \text{(III.1.22)}$$

ayrıca (III.1.21) in pay ve paydası k_2^2 ile bölünürse

$$P_N = \frac{\frac{1}{k_1}\,\frac{k_1}{k_2}\cdot\frac{1}{k_2}}{\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2+1}$$

olur. Diğer taraftan (III.1.22) den dolayı

$$P_N = \frac{P_B}{\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 + 1},$$

$$1 + \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 = \frac{P_B}{P_N},$$

$$\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 = \frac{P_B}{P_N} - 1 \qquad \text{(III.1.23)}$$

elde edilir. Böylece şu teoremi verebiliriz :

TEOREM III.1.6.

Bir $r : I \longrightarrow E^3$ kapalı eğrisi boyunca tanımlanan bir H/H' uzay hareketinde (r) eğrisinin harmonik eğriliği ile harekete iştirak eden asli normal ve binormal doğrularının H' de çizdikleri regle yüzeylerin dralleri arasında

$$\left(\frac{k_1}{k_2} \right)^2 = \frac{P_B}{P_N} - 1$$

bağıntısı vardır.

Ayrıca $\frac{k_1}{k_2}$ = sabit ise $\frac{P_B}{P_N}$ = sabit olacağından H/H' hare-
etinde esas alınan $r : I \longrightarrow E^3$ eğrisi eğilim çizgisi ise $\frac{P_B}{P_N}$ = sa-
it elde edilir. Tersine $\frac{P_B}{P_N}$ = sabit ise

$$\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 = \text{sabit},$$

$$\frac{k_1}{k_2} = \text{sabit}$$

lacağından (r) eğrisi bir eğilim çizgisi olur. Böylece şu teoremi spatlamış olduk :

EOREM III.1.7.

Bir $r : I \longrightarrow E^3$ kapalı eğrisi boyunca tanımlanan kapalı bir H/H' hareketinde (r) eğrisinin bir eğilim çizgisi olabilmesi için gerek ve yeter şart H/H' hareketine iştirak eden asli normal ve binormal doğrularının H' de çizdikleri regle yüzeylerin dralleri oranı için

$$\frac{P_B}{P_N} = \text{sabit}$$

olmasıdır.

Diğer taraftan (III.1.18) formülünde iki tarafın karesi alırsa

$$\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 = \frac{(L_T^2 - L_a^2)^2 \lambda_B^2}{(\lambda_a L_T - L_a \lambda_T)^2 L_a^2}, \qquad \text{(III.1.24)}$$

(III.1.23) den $(\frac{k_1}{k_2})$ çözülerek (III.1.24) formülünde yerine yazılırsa

$$\frac{P_B}{P_N} - 1 = \frac{(L_T^2 - L_a^2)^2 \lambda_B^2}{(\lambda_a L_T - L_a \lambda_T)^2 L_a^2} + 1 \qquad \text{(III.1.25)}$$

elde edilir. Böylece teorem (III.1.5) e benzer şekilde şu teoremi verebiliriz:

TEOREM III.1.8.

Bir $r : I \longrightarrow E^3$ kapalı eğrisi boyunca tanımlanan H/H' kapalı hareketinde H deki sabit bir $\vec{a}$ doğrusunun H' de çizdiği regle yüzeyin açılabilir olması için gerek ve yeter şart H/H' hareketine katılan $\vec{a}, \vec{T}, \vec{N}$ doğrularının H' de çizdikleri regle yüzeylerin açılım açıları ile dralleri arasında

$$\frac{P_B}{P_N} = \frac{(L_T^2 - L_a^2)^2 \lambda_B^2}{(\lambda_a L_T - L_a \lambda_T)^2 L_a^2} + 1$$

bağıntısının var olmasıdır.

III.2. ÖZEL HALLER

$\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$ Frenet üç ayaklısına katı bir şekilde bağlı olarak hareket eden bir

$$\vec{a} = a_1 \vec{T} + a_2 \vec{N} + a_3 \vec{B}, \quad \|\vec{a}\| = 1$$

doğrusu için şimdi de özel halleri inceliyelim :

Eğer $\vec{a}$ doğrusu normal düzlemde (şekil III.2.1) ise $a_1 = 0$ olacağından (III.1.13) den dolayı

$$k_2 \, (a_2^2 + a_3^2) = 0$$

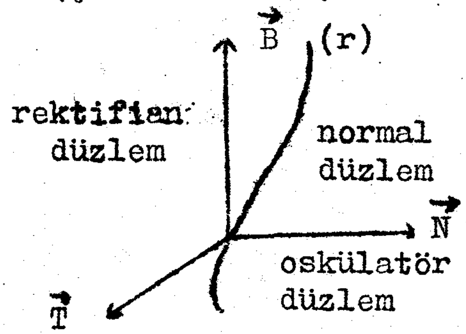
elde edilir. Buradan ya

$$a_2^2 + a_3^2 = 0$$

ya da

$$k_2 = 0$$

olmalıdır.



Şekil III.2.1.

Bunlardan birinci hal mümkün değildir. İkinci halde dayanak eğrisinin oskülatör düzlemde kalacağı, yani düzlemsel bir eğri olacağı, biliniyor. Böylece şu sonucu elde ederiz :

SONUÇ III.2.1.

Bir $r : I \longrightarrow E^3$ kapalı eğrisi boyunca tanımlanan bir H/H' kapalı uzay hareketinde H nın normal düzlemindeki sabit bir doğrunun H' de çizdiği regle yüzeyin açılabilir olması için gerek ve yeter şart (r) eğrisinin bir düzlemsel eğri olmasıdır.

Oskülatör düzlemdeki bir doğru için $a_3 = 0$ olduğundan yine (III.1.13) den dolayı

$$k_2 a_2^2 = 0 \tag{III.2.1}$$

olur. Bu hal için ya $a_2 = 0$ veya $k_2 = 0$ olmalıdır. $a_2 = 0$ olması; $a_1 = 1$ ve dolayısiyle

$$\vec{a} = \vec{T}$$

olmasını gerektirir. $k_2 = 0$ olması ise, dayanak eğrisinin düzlemsel bir eğri olması demektir.

Eğer doğru rektifian düzlemde ise $a_2 = 0$ olacağından (III.1.14) den dolayı

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{a_3}{a_1} \tag{III.2.2}$$

bulunur. Ayrıca a_1 ve a_3 ün (III.1.16) ve (III.1.17) deki değerleri yerine yazılırsa

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{\lambda_a L_T - L_a \lambda_T}{L_a \lambda_B} \tag{III.2.3}$$

şeklinde (III.1.18) in bir özel hali elde edilir. Yine (III.1.23) den $\frac{k_1}{k_2}$ çözülerek (III.2.3) de yerine yazılırsa

$$\frac{P_B}{P_N} - 1 = \left(\frac{\lambda_a L_T - L_a \lambda_T}{L_a \lambda_B}\right)^2 ,$$

$$\frac{P_B}{P_N} = \frac{(\lambda_a L_T - L_a \lambda_T)^2}{L_a^2 \lambda_B^2} + 1 \qquad (III.2.4)$$

şeklinde rektifian düzlemdeki bir doğrunun çizdiği regle yüzeyin açılabilir olması için invaryantlar arasında bir bağıntı bulunmuş olur.

Bir $r : I \longrightarrow E^3$ kapalı eğrisi boyunca tanımlanan bir H/H' kapalı hareketinde H da sabit olan bir $\vec{a}$ doğrusunun H' de çizdiği regle yüzeyin açılabilir olması için (III.1.13) formülünden dolayı

$$-a_1 a_3 k_1 + (1-a_1^2) k_2 = 0 ,$$

$$-a_1 (a_1 k_2 + a_3 k_1) + k_2 = 0, \qquad (III.2.5)$$

$$a_1 = \frac{k_2}{a_1 k_2 + a_3 k_1}$$

olmalıdır. Eğer,

$$a_1 k_2 + a_3 k_1 = c \text{ (sabit)} \qquad (III.2.6)$$

bağıntısı sağlanıyorsa (yani (r) eğrisi bir Bertrand eğri çiftine dahil ise)

$$a_1 = \frac{k_2}{c} \qquad (III.2.7)$$

elde edilir. Ayrıca $\vec{a}$ doğrusunun çizdiği regle yüzeyin açılım uzunluğu için (III.1.11) den dolayı

$$L_a = a_1 L_T$$

veya

$$L_a = \frac{k_2 L_T}{c}$$

bulunur. Aynı şekilde regle yüzeyin açılım açısı için ise (II.7.16) dan

$$\lambda_a = \langle \vec{D}, \vec{a} \rangle ,$$
$$\lambda_a = \langle \oint (k_2\vec{T} + k_1\vec{B}\ )\, ds,\ a_1\vec{T} + a_2\vec{N} + a_3\vec{B} \rangle ,$$
$$\lambda_a = \oint (a_1k_2 + a_3k_1)\ ds\ ,$$
$$\lambda_a = c\oint ds$$

elde edilir. Ayrıca (III.1.5) den

$$_a = cL_T \qquad (III.2.9)$$

yazılabilir. $_a$ ve L_a nın bulunan bu değerleri taraf tarafa çarpılırsa

$$\lambda_a\ L_a = k_2\ L_T^2 \qquad (III.2.10)$$

elde edilir. Diğer taraftan (III.1.22) gereğince $P_B = \frac{1}{k_2}$ olduğundan

$$\lambda_a L_a = \frac{L_T^2}{P_B} \qquad (III.2.11)$$

yazılabilir. Böylece şu sonucu çıkarmış oluruz :

TEOREM III.2.2.

Bir $r : I \longrightarrow E^3$ kapalı eğrisi boyunca tanımlanan H/H' uzay hareketinde H deki sabit bir $\vec{a}$ doğrusunun H' de çizdiği regle yüzeyin (r) dayanak eğrisi bir Bertrand eğri çiftine dahil ise regle yüzeyin açılım uzunluğu ve açılım açısı arasında

$$\lambda_a L_a = \frac{L_T^2}{P_B}$$

bağıntısının var olması bu regle yüzeyin açılabilir olması için gerek ve yeterdir. Burada L_T teğetler yüzeyinin açılım uzunluğu, P_B ise binormaller yüzeyinin dağılma parametresidir.

Aynı şekilde H deki bir başka $\vec{b}$ doğrusunun da $\vec{a}$ doğrusu gibi $\{\vec{T},\vec{N},\vec{B}\}$ sistemine bağlı olarak hareket ettiği farzedilir ve meydana gelen regle yüzey açılabilir ise L_b açılım uzunluğu ve λ_b açılım açısı arasında (III.2.11) deki gibi

$$\lambda_b\ L_b = \frac{L_T^2}{P_B} \qquad (III.2.12)$$

bağıntısı yazılabilir. Böylece (III.2.10) ve (III.2.12) taraf tarafa bölünücek olursa

$$\frac{\lambda_a \; L_a}{\lambda_b \; L_b} = \frac{\dfrac{L_T^2}{P_B}}{\dfrac{L_T^2}{P_B}},$$

$$\frac{\lambda_a}{\lambda_b} \quad \frac{L_a}{L_b} = 1 \qquad \text{(III.2.13)}$$

elde edilir. Böylece şu sonucu verebiliriz :

TEOREM III.2.3.

Bir $r : I \longrightarrow E^3$ kapalı eğrisi boyunca tanımlanan H/H' kapalı uzay hareketinde H da verilen farklı iki $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ doğrularının H' de çizdikleri açılabilir regle yüzeylerin açılım açıları ve açılım uzunlukları oranlarının çarpımının bire eşit olması (r) nin bir Bertrand eğri çiftine dahil olması için gerek ve yeterdir.

Bir

$$\vec{\varphi}(s,v) = \vec{r}(s) + v\,\vec{a}(s), \quad \|\vec{a}\| = 1$$

regle yüzeyi için striksiyon eğrisinin yer vektörü $\vec{\bar{r}}$ ve dayanak eğrisine uzaklığı $\bar{u}$ olmak üzere (II.6.8) den dolayı

$$\bar{u} = -\frac{\langle \vec{r}\,', \vec{a}\,' \rangle}{\|\vec{a}\,'\|^2}$$

olduğundan striksiyon eğrisinin dayanak eğrisi olabilmesi için

$$\bar{u} = 0$$

yani

$$\langle \vec{r}\,', \vec{a}\,' \rangle = 0 \qquad \text{(III.2.14)}$$

olmalıdır. $\vec{a}$ doğrusunun, striksiyon eğrisinin Frenet üç ayaklısına katı şekilde bağlı kalarak hareket ettiğini düşünelim. Doğrunun (III.1.8) deki denkleminde türev alınırsa

$$\frac{d\vec{a}}{ds} = -a_2k_1\vec{T} + (a_1k_1 - a_3k_2)\vec{N} + a_2k_2\vec{B}$$

olur. Bu ifade (III.2.14) de yerine yazılırsa

$$\left\langle -a_2k_1\vec{T} + (a_1k_1 - a_3k_2)\vec{N} + a_2k_2\vec{B}, \vec{T} \right\rangle = 0,$$

$$-a_2k_1 = 0 \qquad \text{(III.2.15)}$$

elde edilir. Burada $k_1 \neq 0$ olduğundan $a_2 = 0$ olmak zorundadır. Buradan şu sonuca varmak mümkündür:

TEOREM III.2.4.

Bir $\bar{r} : I \longrightarrow E^3$ kapalı eğrisi boyunca tanımlanan H/H' kapalı hareketinde $(\bar{r})$eğrisini striksiyon eğrisi olarak kabul eden, H daki doğruların H' de oluşturdukları, regle yüzeylerin anadoğruları daima $\vec{r}$ nin rektifian düzleminde kalırlar.

Ayrıca (II.6.14) den regle yüzeyin P_a drali hesaplanırsa

$$P_a = \frac{\det\left[\vec{T},\ a_1\vec{T} + a_3\vec{B},\ (a_1k_1 - a_3k_2)\vec{N}\right]}{\left\| (a_1k_1 - a_3k_2)\vec{N} \right\|},$$

$$P_a = \frac{\left\langle -a_3\vec{N},\ (a_1k_1 - a_3k_2)\vec{N} \right\rangle}{(a_1k_1 - a_3k_2)^2},$$

$$P_a = \frac{-a_3}{a_1k_1 - a_3k_2} \qquad \text{(III.2.16)}$$

bulunur. Söz konusu olan regle yüzeyin açılabilir olması için gerek ve yeter şart $P_a = 0$ olması yani (III.2.16) ya göre $a_3 = 0$ olmasıdır. Ayrıca $a_2 = 0$ olduğundan regle yüzeyin açılabilir olması için gerek ve yeter şart $a_2 = a_3 = 0$ ve böylece

$$a_1 = 1$$

veya

$$\vec{a} = \vec{T} \qquad \text{(III.2.17)}$$

bulunur.

TEOREM III.2.5.

Bir $\bar{r} : I \longrightarrow E^3$ kapalı eğrisi boyunca tanımlanan H/H' kapalı hareketinde $\bar{r}$ yi striksiyon eğrisi kabul edin, H daki sabit doğruların H' de çizmiş oldukları, regle yüzeyler arasında açılabilir olanı sadece teğetler yüzeyidir.

Eğer $\bar{r}$ striksiyon eğrisi için

$$a_1k_1 - a_3k_2 = \text{sabit}$$

bağıntısı varsa striksiyon eğrisi (II.3.7) formülünden dolayı bir Bertrand eğri çiftine dahildir ve böylece P_a = sabit elde edilir. Bunun tersi de söylenebilir. Yani, P_a = sabit ise

$$a_1k_1 - a_3k_2 = \text{sabit}$$

elde edileceğinden striksiyon eğrisi bir Bertrand eğri çiftine dahildir. Böylece şu teoremi verebiliriz.

TEOREM III.2.6.

Bir $\bar{r} : I \longrightarrow E^3$ kapalı eğrisi boyunca tanımlanan H/H' kapalı hareketinde $\bar{r}$ yi striksiyon eğrisi kabul eden H' deki regle yüzeylerin drallerinin aynı olması için gerek ve yeter şart $\bar{r}$ nin bir Bertrand eğri çiftine dahil olmasıdır.

III.3. REGLE YÜZEYLERİN AÇILABİLİRLİĞİ VE AÇILIM AÇISI

Bir $\vec{\varphi}(s,v)$ regle yüzeyi verilsin. Bu regle yüzeyin dayanak eğrisi olarak striksiyon eğrisini alalım. Striksiyon eğrisinin hareketli Frenet üçlüsünde tesbit edilmiş bir doğru $\vec{a}$ olsun. $\vec{a}$ doğrusunun H/H' hareketinde H' de çizmiş olduğu regle yüzeyin açılabilir olması için gerek ve yeter şart (III.2.17) ye göre

$$\vec{T} = \vec{a}$$

olmasıdır. Buna göre regle yüzeyin λ_a açılım açısı (II.7.16) ve (II.7.19) gereğince

$$\lambda_T = \lambda_a = \langle \vec{D}, \vec{T} \rangle$$

veya

$$\lambda_T = \lambda_a = \oint k_2 \, ds. \qquad \text{(III.3.1)}$$

Böylece şu teoremi vermek mümkündür:

TEOREM III.3.1.

Bir kapalı açılabilir regle yüzeyin açılım açısı onun striksiyon eğrisinin toplam burulmasına eşittir.

Kapalı küresel bir eğrinin toplam burulması sıfırdır. Ayrıca bir yüzey üzerindeki bütün kapalı eğrilerin toplam burulmaları sıfır ise bu yüzey küredir [17] .

Eğer açılabilir bir regle yüzeyin striksiyon eğrisi küresel kapalı bir eğri ise (III.3.1) den

$$\lambda_a = \lambda_T = 0$$

elde edilir. Diğer taraftan tersine striksiyon eğrisi küresel ve kapalı olan bir regle yüzey için açılım açısı

$$\lambda_a = 0$$

ise (III.1.9) dan

$$0 = a_1 \lambda_T + a_3 \lambda_B,$$
$$0 = a_1 \oint k_2 \, ds + a_3 \oint k_1 \, ds,$$
$$a_3 \oint k_1 \, ds = 0$$

bulunur. Burada ya

$$a_3 = 0$$

veya

$$\oint k_1 ds = 0$$

olmalıdır. Eğer $a_3 = 0$ ise (III.2.15) den $a_2 = 0$ olduğundan $a_1 = 1$ ve $\vec{a} = \vec{T}$ bulunur. $\oint k_1 ds = 0$ ise $k_1 > 0$, $ds \geq 0$ olduğundan $\oint k_1 ds$ integralinin içi yani

$$k_1 ds = 0$$

olmalıdır. Buna göre $k_1 \neq 0$ olduğundan $ds = 0$, s = sabit olmalıdır. Bu halde striksiyon eğrisi bir noktadan ibaret olduğundan regle yüzey bir konidir. Böylece şu sonuçları verebiliriz :

TEOREM III.3.2.

Striksiyon eğrileri küresel kapalı birer eğri olan regle yüzeylerin açılabilir olması için gerek ve yeter şart açılım açılarının sıfır olmasıdır.

TEOREM III.3.3.

M bir yüzey olsun. M üzerinde yatan bütün kapalı eğriler boyunca M nin yüzey normallerinin oluşturduğu açılabilir regle yüzeylerin açılım açıları sıfır ise M bir küredir.

S O N U Ç

Regle yüzeylerin dağılma parametresi, açılım uzunluğu ve açılım açısı invaryantları ile dayanak eğrisinin şekli arasında bu eğrinin Bertrand eğrisi ve eğilim çizgisi olması bakımından yakın ilgi olduğu görüldü.

Kapalı bir H/H' uzay hareketine katılan ve hareketli uzayda sabit olan bir doğrunun sabit uzayda çizdiği regle yüzeyin açılabilir olmasına dair karakterizasyonlar bulundu. Ayrıca W.Scherrer [17] e benzer şekilde striksiyon eğrileri küresel kapalı olan regle yüzeyler için açılım uzunluğuna bağlı olarak karakterizasyonlar da verildi.

B İ B L İ Y O G R A F Y A

[1] Leudesdorf C., Theorem in Kinematics, The Messenger of Mathematics, 7,125-127, (1877) .

[2] Leudesdorf C., Note on the Theorem in Kinematics, The Messenger of Math. 8,11,12 (1878).

[3] Kempe A.B. Note on Mr. Leudesdorf's Theorem in Kinematics, The Messenger of Math. 7,165-167 (1878).

[4] Elliot E.B., Some Theorem of Kinematics on a sphere,proc. London Math. soc. 47-57 (1881).

[5] Cartan E., Le Principe du Dualite et Certaines Integrales Multiples de I'espace tangentiel et de l'espace Regle "Bull.soc.Math.France" XXIV, 140-177 (1896) .

[6] Blaschke W., Worlesungen über Differential Geometrie,Bd.1.p242, Julius Springer, (1930) Berlin.

[7] Blaschke W., Zur Bewegungsgeometrie auf der Kugel,S.-B., Heidelberger Akad. Wiss.Math.- Nat Kl. no.2 (1948).

[8] Blaschke W. and Müller H.R., Ebene Kinematik, Verlag Oldenbourg,München, 1956,pp.113-115,pp.120-242.

[9] Müller H.R., Über geschlossene Bewegungsvorgange, Monatsh.Math. 55,206-214 (1951).

[10] Hacısalihoğlu H.H., On Closed Spherical Motions, Q.Appl.Math. 29,269-276 (1971).

[11] Hacısalihoğlu H.H., On the pitch of a Closed Ruled Surface, Mech.and Mach. Theory, Vol . 7,pp.291-309.

[12] Hoschek J., Eine Verallgemeinerung des Satzes von Holditch, Monatchefte -für Math. 80, 93 - 99 (1975)

[13] Hacısalihoğlu H.H., Yüksek boyutlu uzaylarda dönüşümler ve geometriler, A.Ü. Fen Fakültesi, Ankara (1976)

[14] O'Neill B., Elementary Differential Geometry, Academic press, (1966).

[15] Saban G,. A Characteristic Property of a Developale surface, Communucations de La Faculté des Sciences de l'Université d' Ankara 16 A, 93-96 (1967).

[16] Müller H.R., Kinematik Dersleri, T.C. A.Ü. Fen Fakültesi Yayınları, Ankara (1963).

[17] Scherrer W., Wierteljahresschrift, Naturforscher Ges.,Zürich, 85,1940, pp.40-46.

Ö Z G E Ç M İ Ş

2 Haziran 1950 de Trabzon'un Vakfıkebir ilçesinin Şalpazarı bucağına bağlı Karakaya köyünde doğdum. 1957-62 yılları arasında aynı köydeki ilk okula devam ederek mezun oldum. Bir yıl aradan sonra 1963 yılında Amasya Merzifon Ortaokuluna kaydoldum. 1966 yılında Ortaokulu bitirince üç yıllık Tokat İlköğretmen okuluna yatılı öğrenci olarak kaydoldum. 1968 yılında ilk öğretmen okulu öğretmenler kurulu tarafından Ankara Yüksek Öğretmen Okulu Hazırlık Lisesine seçildim.

Bir yıl okuduktan sonra 1969 yılında Hazırlık Lisesinden mezun oldum. Aynı yıl Üniversitelerarası giriş sınavına katıldım. Yine 1969 yılında Anakara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümüne Matematik-Fizik Lisans öğrencisi olarak kaydoldum. 1973 Haziran döneminde Matematik Lisansını ve Ankara Yüksek Öğretmen Okulu'nu bitirdim. Milli Eğitim Bakanlığınca aynı yıl Erzurum Ilıca, Yavuz Selim İlköğretmen Okulu Matematik öğretmenliğine atandım. Bu görevde iken 1974 Şubatında Karadeniz Teknik Üniversitesi Matematik Bölümü asistanlığı sınavını kazanarak aynı üniversitede matematik asistanı olarak göreve başladım.

1975 yılında, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi öğretim üyelerinden Sayın Hocam Prof.Dr. H.Hilmi Hacısalihoğlu ile Diferensiyel Geometri alanında doktora çalışmalarım başladı.

Halen Matematik asistanı olarak Karadeniz Teknik Üniversitesinde görev yapmaktayım. Evliyim.