KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ✶ TEMEL BİLİMLER FAKÜLTESİ

NEVANLINNA SINIFLARININ ALTCEBİRLERİ ÜZERİNDE ÇARPIM LİNEER FONKSİYONELLERİ VE KONFORM EŞDEĞERLİLİĞİNİN CEBİRSEL KARAKTERİZASYONU

Karadeniz Teknik Üniversitesi Temel Bilimler Fakültesince
« Fen Doktoru »
ünvanının verilmesi için kabul edilen tezdir.

Ferhat YILDIRIM

Tezin Dekanlığa Verildiği Tarih : 16.1.1980
Sözlü Sınav Tarihi : 2.5.1980

Doktorayı yöneten öğretim üyesi : Prof. Dr. Cengiz ULUÇAY
Doktora Komisyon Üyesi : Prof. Dr. Cevdet KOÇAK
Doktora Komisyon Üyesi : Prof. Dr. Ergün BAYAR

Kapak Baskı
KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
1980 — Trabzon

Bu tez konusunu veren ve çalışmalarım süresince değerli yardımlarını esirgemeyen Sayın Hocam Prof.Dr. Cengiz ULUÇAY'a en derin şükran ve hürmetlerimi arzederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET

SUMMARY

GİRİŞ

BÖLÜM I
TEMEL KAVRAMLAR

1.1. KOMPLEKS CEBİR VE İDEALLER 3
1.2. BÖLÜM CEBİRLERİ 6
1.3. İZOMORFİZM VE ÇARPIM LİNEER FONKSİYONELLERİ 6
1.4. HARMONİK VE ALTHARMONİK FONKSİYONLAR 9
1.5. GREEN FONKSİYONU-LOGARİTMİK KAPASİTE VE KONFORM EŞDEĞERLİLİK 12

BÖLÜM II
FONKSİYON CEBİRLERİ

2.1. ANALİTİK FONKSİYON CEBİRLERİ 14
2.2. NEVANLİNNA SINIFLARI 18

BÖLÜM III
NEVANLİNNA SINIFLARI İLE KONFORM EŞDEĞERLİLİĞİN CEBİRSEL KARAKTERİZASYONU

3.1. *A(D)* NİN ÇARPIM LİNEER FONKSİYONELLERİNİN KARAKTERİZASYONU.. 22
3.2. KONFORM EŞDEĞERLİLİĞİN CEBİRSEL KARAKTERİZASYONU 24

SONUÇ 26

KAYNAKLAR 27

ÖZGEÇMİŞİM

Ö Z E T

Bu tez üç bölümden ibarettir. Birinci bölümde çalışmamızla yakınen ilgili temel analitik ve cebirsel kavramlar verilmiştir. İkinci bölümde analitik fonksiyon cebirleri tetkik edilmiştir.

Çalışmamızın orjinal kısmı üçüncü bölümdedir. Bu bölümde kompleks düzlemde bütünleyeninin logaritmik kapasitesi pozitif olan bir D bölgesi üzerinde tarif edilmiş tek değerli analitik fonksiyonların $N(D)$ Nevanlinna cebirinin aşağıdaki şartları sağlayan bir $A(D)$ altcebiri gözönüne alınmış ve $A(D)$ üzerinde tarif edilmiş sıfırdan farklı her çarpım lineer fonksiyonelinin bir nokta fonksiyoneli olduğu gösterilmiştir.

Sözkonusu şartlar şunlardır :

(a) $1 \in A(D)$

(b) $j \in A(D)$, $j(z) = z$

(c) $f \in A(D)$, $a \in D$ için $f(a) = 0$ ise $f/j-a \in A(D)$

(d) $a \notin D$ ise $1/j-a \in A(D)$

Diğer taraftan, $A(D)$ üzerinde tarif edilmiş sıfırdan farklı her çarpım lineer fonksiyonelinin bu özelliği kullanılarak bütünleyeninin logaritmik kapasitesi pozitif olan D, D' gibi iki düzlem bölge için $A(D)$ den $A(D')$ ye bir $\mathbb{C}$ - izomorfizminin mevcut olması halinde bu iki bölgenin konform eşdeğer olduğu gösterilmiştir.

S U M M A R Y

This dissertation consists of three chapters. In the first chapter, the fundamental algebraic and analytic concepts closely related to my study are given. In the second chapter, the algebras of analytic functions are investigated.

The chapter three is entirely devoted to the original part of my study. In this chapter, I have considered the subalgebra $A(D)$ of Nevanlinna class $N(D)$ of one-valued complex analytic functions defined on a plane domain D whose complementary set has positive logarithmic capacity and I have proved that every non-zer multiplicative linear functional, defined on $A(D)$, is a point functional. The subalgebra $A(D)$ of $N(D)$ satisfies the following four conditions;

(a) $1 \in A(D)$

(b) $j \in A(D)$, $j(z) = z$

(c) $f \in A(D)$, $f(a) = 0$ for an $a \in D$ implies $f/_{j-a} \in A(D)$,

(d) $a \notin D$ implies $\frac{1}{j-a} \in A(D)$

On the other hand, using this property of every non-zero multiplicative linear functional, defined on $A(D)$, I have proved that two plane domains such as D, D' whose complementary sets have positive logarithmic capacity, are conformally equivalent, if there exists a $\mathbb{C}$- izomorphism from $A(D)$ to $A(D')$.

G İ R İ Ş

1942 yılında *C.Chevalley* ve *S. Kakutani* tarafından analitik fonksiyonlar teorisi ve cebir ile alakalı ilginç bir çalışma yapıldı. Neşredilmeyen bu çalışmada, kompleks düzlemde bulunan D,D' gibi iki maksimal bölgenin konform eşdeğerliliği bu bölgeler üzerinde tarif edilmiş tek değerli sınırlı analitik fonksiyonların $B(D)$, $B(D')$ halkaları arasında verilen bir izomorfizm yardımıyla karakterize edildi. Kompleks düzlemde bir D bölgesine *maksimaldir* denir, şayet her $\xi\in\bar{D}\setminus D$ için hakiki singüler noktası ξ olan bir $f\in B(D)$ mevcut ise,

1948 de *L.Bers* [2], D,D' gibi iki düzlem bölge üzerinde tarif edilmiş bütün tekdeğerli analitik fonksiyonların $H(D)$, $H(D')$ halkaları arasında i yi ($i\in\mathbb{C}$) sabit bırakan bir izomorfizm mevcut ise bu iki bölgenin konform eşdeğer olduğunu gösterdi. *L.Bers*' in bu neticesi *H.L.Royden* [10], *W.Rudin* [11] ve *M.Nakai* [6] tarafından açık Riemann yüzeylerine ve *L.P.Su* [17] tarafından da kompleks düzlemde rastgele iki cümlenin konform eşdeğer olmasına genişletildi. Öte yandan *I.Kra* [5], *I.Richards* [9] ve diğer matematikcilerce bir düzlem bölge veya bir Riemann yüzeyi üzerinde tarif edilmiş bazı sürekli fonksiyon cebirlerinin, bu bölgeler üzerinde tarif edilmiş analitik fonksiyon cebirlerinin altcebiri olması için gerekli şartlar araştırılmıştır. Yakın bir zaman önce *C.Uluçay* [18], [19] konform eşdeğerlilik ve analitikliliği cebirsel olarak karakterize etmiştir.

Biz bu çalışmamızda bütünleyeninin logaritmik kapasitesi pozitif olan bir düzlem bölge üzerinde tarif edilmiş Nevanlinna sınıfının belirli bir $A(D)$ altcebirini gözönüne aldık ve $A(D)$ üzerinde tarif edilmiş sıfırdan farklı her çarpım lineer fonksiyonelinin bir nokta fonksiyoneli olduğunu gösterdik. Öte yandan

D, D' gibi bütünleyenlerinin logaritmik kapasiteleri pozitif olan iki düzlem bölge verildiğinde bunlar üzerinde tarif edilmiş $A(D)$, $A(D')$ altcebirleri arasında bir $\mathbb{C}$ - izomorfizmi mevcut ise bu iki bölgenin konform eşdeğer olduğunu gösterdik.

BÖLÜM I

TEMEL KAVRAMLAR

1.1. KOMPLEKS CEBİR VE İDEALLER

<u>TARİF 1.1.1.</u>

A, üzerinde $+$, . operasyonları tarif edilmiş bir cümle ve $\mathbb{C}$ de kompleks sayılar cismi olsun. A ya *kompleks cebir* denir; şayet aşağıdaki şartlar sağlanıyor ise :

1. A, Abel grubu $(A, +)$ olan ve nötr elemanı 0 ile gösterilen bir halkadır,
2. A nın aditif Abel grubu $\mathbb{C}$ üzerinde bir kompleks vektör uzayıdır,
3. Her $x,y \in A$ ve her $\alpha \in \mathbb{C}$ için $\alpha(x.y) = (\alpha x)y = (\alpha y)x$ dir.

<u>TARİF 1.1.2.</u>

A kompleks cebirine *komütatiftir* denir; şayet her x,y A için $x.y = y.x$ ise.

<u>TARİF 1.1.3.</u>

A kompleks cebirine *özdeş elemanlı kompleks cebir* denir; şayet her x A için $x.1 = 1.x = x$ olacak şekilde bir $1 \in A$ mevcut ise.

A özdeş elemanlı bir kompleks cebir ise A nın her x elemanı için $x.1 = 1.x = x$ şartını sağlayan 1 elemanına A nın *özdeş elemanı* denir. Aşikar olarak A özdeş elemanlı bir kompleks cebir ise A nın özdeş elemanı bir tektir.

<u>TARİF 1.1.4.</u>

A özdeş elemanlı bir kompleks cebir ve a,A nın nötr elemanından farklı bir elemanı olsun. a ya *birim* denir; şayet $a.a^{-1} = a^{-1}.a = 1$ olacak şekilde bir $a^{-1} \in A$ mevcut ise.

a,A nın bir birimi ise a^{-1} elemanına a nın *inversi* denir.
Bundan sonra sadece komütatif kompleks cebirlerle ilgileneceğiz.

TARİF 1.1.5.

A komütatif bir kompleks cebir ve I da A nın boş olmayan bir altcümlesi olsun. I ya *ideal* denir; şayet her $x,y \in I$ ve $a \in A$ için $x-y \in I$ ve $a.x \in I$ ise.

Kolayca görüleceği üzere, A nın kendisi ve sadece nötr elemanından ibaret olan $\{0\}$ altcümlesi A nın birer idealidirler. Bu ideallere A nın *hakiki olmayan idealleri* denir. A nın kendisinden ve $\{0\}$ idealinden farklı olan her idealine *hakiki ideal* denir. Diğer taraftan, A özdeş elemanlı komütatif bir kompleks cebir ise A nın 1 özdeş elemanını ihtiva eden ideali A ya eşittir

TARİF 1.1.6.

A komütatif bir kompleks cebir, a A ve I da A nın bir ideali olsun. Bu takdirde A nın, $\{ x.a + m \mid x \in A, m \in I \}$ şeklinde tarif edilen altcümlesi A nın bir idealidir. Bu ideale A nın $I \cup \{a\}$ altcümlesi tarafından *tevlit edilen ideali* denir ve (a,I) notasyonu ile gösterilir.

Tariften görülüyor ki, (a,I) ideali $\{a\}$ ve I yı ihtiva eder.

TARİF 1.1.7.

A komütatif bir kompleks cebir ve $a_1,a_2,\ldots,a_n$ de A nın verilen sonlu n-tane elemanı olsun. Bu takdirde A nın $\{ \sum_{i=1}^{n} x_i a_i \mid x_i \in A \}$ şeklinde tarif edilen altcümlesi A nın bir idealidir. Bu ideale A nın sonlu $\{ a_1,a_2,\ldots,a_n \}$ altcümlesi tarafından *sonlu tevlit edilmiş ideali* denir ve $(a_1,\ldots,a_n)$ notasyonu ile gösterilir.

TARİF 1.1.8.

A komütatif bir kompleks cebir ve a A olsun. A nın tek elemanlı $\{a\}$ altcümlesi tarafından tevlit edilen $(a) := \{x.a \mid x \in A\}$ idealine a tarafından tevlit edilen *asli ideal* denir.

TARİF 1.1.9.

A komütatif bir kompleks cebir ve I da A nın hakiki bir ideali olsun. I idealine A nın *maksimal ideali* denir; şayet A nın I yı ihtiva eden herhangi bir J ideali için $J = A$ veya $J = I$ ise.

TARİF 1.1.10.

A komütatif bir kompleks cebir ve a A olsun. (a) aslî idealine *maksimal asli ideal* denir; şayet A nın $(a) \subset (b)$ şartını sağlayan her (b) aslî ideali için $(a) = (b)$ veya $(b) = A$ ise.

TEOREM 1.1.1. [13, s.393]

A özdeş elemanlı komütatif bir kompleks cebir ve I da A nın hakiki bir ideali olsun. Bu takdirde A nın I yı ihtiva eden bir maksimal ideali mevcuttur.

İSPAT

A nın I yı ihtiva eden bütün hakiki ideallerinin cümlesini P ile gösterelim. $I \in P$ olduğundan, $P \neq \emptyset$ olup; P cümlesi "$\subset$" ihtiva edilme bağıntısına göre kısmi sıralanmış bir cümledir. Q,P nin tam sıralanmış herhangi bir altcümlesi olsun. Bu takdirde $W := \bigcup_{J \in Q} J$ cümlesi A nın I yı ihtiva eden hakiki bir ideali olup, Q nın P de bir üstsınırıdır. Binanaleyh *Zorn lemmasından* [15 : s.44-45] dolayı P nin M gibi bir maksimal elemanı vardır. Netice olarak P nin bu M maksimal elemanı A nın I yı ihtiva eden maksimal idealidir.

TEOREM 1.1.2.

A özdeş elemanlı kömütatif bir kompleks cebir ve I da A nın hakiki bir ideali olsun. I idealinin maksimal olması için gerek ve yeter şart her $a \in A \setminus I$ için $(a,I) = A$ olmasıdır.

İSPAT

I, A nın maksimal ideali ise her $a \in A \setminus I$ için $(a,I) = A$ dır. Gerçekten; (a,I) ideali $\{a\}$ ve I yı ihtiva eden bir ideal olduğundan her $a \in A \setminus I$ için $I \subset (a,I)$ olup, $I \neq (a,I)$ dır. Binanenaleyh I nın maksimal oluşundan dolayı $(a,I) = A$ olmak zorundadır.

Tersine olarak her $a \in A \setminus I$ için $(a,I) = A$ ise I ideali maksimaldir. Aksini farz edelim. Bu taktirde teorem 1.1.1.e göre A nın I yı ihtiva eden M gibi bir maksimal ideali vardır. $I \subset M$ ve M ideali maksimal olduğundan $M \setminus I \neq \emptyset$ olup, $M \setminus I \subset A \setminus I$ dir. Binanenaleyh M I ya ait bir a elemanı alırsak bu $a \in M \setminus I$ için $(a,I) = M$ dir. Diğer taraftan a $M \setminus I$ ve $M \setminus I \subset A \setminus I$ olduğundan $(a,I) = A$ dır. Dolayısıyla $M = A$ elde edilir ki bu durum M nin A nın maksimal ideali oluşuna aykırıdır. Netice olarak I ideali maksimal olmak zorundadır.

1.2. BÖLÜM CEBİRLERİ

A komütatif bir kompleks cebir ve I da A nın bir ideali olsun. $a,b\in A$ için *a kongrüenttir b modülo I* denir ve $a \equiv b \bmod (I)$ yazılır; şayet $a-b\in I$ ise.

Kolayca gösterilir ki bu "$\equiv$" bağıntısı bir eşdeğerlik bağıntısı olup, A yı ayrık kalan sınıflarına [20, s.2] ayırır. $a\in A$ yı ihtiva eden ayrık kalan sınıfı $[a]$ ile gösterilirse açık olarak görülür ki $[a] = a + I$ dır. Burada $a+I$ ile A nın $\{ a+x \mid x\in I \}$ şeklinde tarif edilen altcümlesi ifade edilir. A nın bu eşdeğerlik bağıntısına göre ayrık kalan sınıflarından ibaret olan cümle A/I ile gösterilir ve A/I da toplam, çarpım, skaler çarpım operasyonları her $[a]$, $[b]\in A/I$ ve $\alpha\in \mathbb{C}$ için,

$$[a] + [b] := [a+b]$$

$$[a] \,.\, [b] := [a.b]$$

$$\alpha\, [a] := [\alpha\, a]$$

şeklinde tarif edilirse, A/I bu operasyonlara göre komütatif bir kompleks cebirdir. Bu cebire A nın I idealine göre *bölüm cebiri* denir. A/I bölüm cebirinin nötr elemanı $[0] = I$ kalan sınıfıdır.

Diğer taraftan A özdeş elemanlı komütatif bir kompleks cebir ise A/I bölüm cebiri de özdeş elemanlı olup, özdeş elemanı $[1] = 1 + I$ dır.

1.3. İZOMORFİZM VE ÇARPIM LİNEER FONKSİYONELLERİ

<u>TARİF 1.3.1.</u>

A,B iki komütatif kompleks cebir ve Φ de A cümlesinden B cümlesine tarif edilmiş bijektif bir tasvir olsun. $\Phi:A \to B$ tasvirine *izomorfizm* denir; şayet her $x,y\in A$ için aşağıdaki şartlar sağlanıyor ise:

1. $\Phi(x+y) = \Phi(x) + \Phi(y)$
2. $\Phi(x.y) = \Phi(x).\Phi(y)$.

Tariften görülür ki $\Phi: A \to B$ tasviri izomorfizm ise $\Phi^{-1}:B \to A$ tasviri de izomorfizmdir.

TARİF 1.3.2.

A,B iki komütatif kompleks cebir olsun. A,B ye *izomorftur* denir ve $A \cong B$ yazılır; şayet A dan B ye bir izomorfizm mevcut ise.

TARİF 1.3.3.

A,B, $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismini ihtiva eden iki komütatif kompleks cebir ve Φ de A dan B ye bir izomorfizm olsun. Φ izomorfizmine *$\mathbb{C}$- izomorfizmi* denir; şayet her $c \in \mathbb{C}$ için $\Phi(c) = c$ ise.

TARİF 1.3.4.

A komütatif bir kompleks cebir ve m de A cümlesinden $\mathbb{C}$ ye tarif edilmiş bir tasvir olsun. $m: A \to \mathbb{C}$ tasvirine A üzerinde tarif edilmiş *çarpım lineer fonksiyoneli* denir; şayet her $x,y \in A$ ve $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$ için aşağıdaki şartlar sağlanıyor ise :

1. $m(\alpha x+\beta y) = \alpha m(x) + \beta m(y)$,
2. $m(x.y) = m(x)m(y)$.

TARİF 1.3.5.

m,A komütatif kompleks cebiri üzerinde tarif edilmiş bir çarpım lineer fonksiyoneli olsun. m nin *çekirdeği* diye A nın $\{ x \in A \mid m(x) = 0 \}$ şeklinde tarif edilen altcümlesine denir ve $Ker\ m$ ile gösterilir.

TARİF 1.3.6.

m,A komütatif kompleks cebiri üzerinde tarif edilmiş bir çarpım lineer fonksiyoneli olsun. m ye *sıfırdır* denir; her $x \in A$ için $m(x) = 0$ yani $Ker\ m = A$ ise.

Tariften açık olarak görülüyor ki; sıfır olan iki çarpım lineer fonksiyoneli birbirine eşittir.

Diğer taraftan sıfırdan farklı olan iki çarpım lineer fonksiyonelinin eşitliği hakkında aşağıdaki teorem verilir.

TEOREM 1.3.1.

m_1,m_2, A komütatif kompleks cebiri üzerinde tarif edilmiş sıfırdan farklı iki çarpım lineer fonksiyoneli olsun. $m_1 = m_2$ olması için gerek ve yeter şart $Ker\ m_1 = Ker\ m_2$ olmasıdır.

<u>İSPAT</u>

$m_1 = m_2$ ise açık olarak $Ker\ m_1 = Ker\ m_2$ dir.

Tersine olarak $Ker\ m_1 = Ker\ m_2$ ise $m_1 = m_2$ dir. Gerçekten x, A nın herhangi bir elemanı olsun. m_2 sıfırdan farklı olduğundan, $m_2(x_o) \neq 0$ olacak şekilde bir $x_o \in A$ mevcuttur. Bu $x_o \in A$ için

$$m_2 \left(x - \frac{m_2(x)}{m_2(x_o)} x_o \right) = 0 \text{ olduğundan } x - \frac{m_2(x)}{m_2(x_o)} x_o \in Ker\ m_2$$

dir. Binaenaleyh $Ker\ m_1 = Ker\ m_2$ olduğundan

$$m_1 \left(x - \frac{m_2(x)}{m_2(x_o)} x_o \right) = 0 \text{ olur. } m_1\left(x - \frac{m_2(x)}{m_2(x_o)} x_o \right) = 0 \text{ olduğu}$$

gözönüne alınırsa;

$$x \equiv x - \frac{m_2(x)}{m_2(x_o)} x_o + \frac{m_2(x)}{m_2(x_o)} x_o$$

özdeşliğinden,

$$m_1(x) = \frac{m_1(x_o)}{m_2(x_o)} m_2(x)$$

elde edilir. Bu bağıntı A ya ait herhangi bir x elemanı için doğru olduğundan $x^2 \in A$ için,

$$m_1(x^2) = \frac{m_1(x_o)}{m_2(x_o)} m_2(x^2)$$

olur. Bu eşitliğin sol tarafında bulunan $m_1(x^2)$ yerine $\{ m_1(x) \}^2$ yazılıp $m_1(x)$ yerine,

$$m_1(x) = \frac{m_1(x_o)}{m_2(x_o)} m_2(x)$$

koyulursa,

$$\left\{ \frac{m_1(x_o)}{m_2(x_o)} \right\}^2 m_2(x^2) = \frac{m_1(x_o)}{m_2(x_o)} m_2(x^2) \quad \text{ve buradan}$$

$$\frac{m_1(x_o)}{m_2(x_o)} = 1 \text{ bulunur. Dolayısıyla her } x \in A \text{ için}$$

$$m_1(x) = \frac{m_1(x_o)}{m_2(x_o)}\, m_2(x)$$ olduğundan her $x \in A$ için

$m_1(x) = m_2(x)$ olur ki; bu eşitlik $m_1 = m_2$ olduğunu ifade eder.

TEOREM 1.3.2.

m,A komütatif kompleks cebiri üzerinde tarif edilmiş bir çarpım lineer fonksiyoneli olsun. Bu takdirde $Ker\ m,A$ nın bir idealidir.

İSPAT

$Ker\ m := \{\, x \in A \mid m(x) = 0 \,\}$ olduğundan her $x,y \in Ker\ m$ ve $a \in A$ için $m(x-y) = 0$ ve $m(a.x) = 0$ dır. Dolayısıyla $x-y$, $a.x \in Ker\ m$ olup, $Ker\ m$ A nın bir idealidir.

1.4. HARMONİK VE ALTHARMONİK FONKSİYONLAR

TARİF 1.4.1.

$f(z)$ kompleks düzlemin bir D bölgesi üzerinde tarif edilmiş reel değerli bir fonksiyon olsun. $f(z)$ fonksiyonuna *üst yarı süreklidir* denir; şayet her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\{\, z \in D \mid f(z) < \alpha \,\}$, D nin açık bir altcümlesi ise.

TARİF 1.4.2.

$f(z)$ kompleks düzlemin bir D bölgesi üzerinde tarif edilmiş reel değerli bir fonksiyon olsun. $f(z)$ fonksiyonuna *alt yarı süreklidir* denir; şayet her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\{\, z \in D \mid f(z) > \alpha \,\}$, D nin açık bir alt cümlesi ise.

Üst ve alt yarı sürekliliğin tarifinden görülüyor ki, bir D bölgesi üzerinde tarif edilmiş reel değerli bir $f(z)$ fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter şart $f(z)$ nin hem alt hem de üst yarı sürekli olmasıdır.

TARİF 1.4.3.

$u(z) = u(x,y)$, kompleks düzlemin bir D bölgesi üzerimde tarif edilmiş reel değerli sürekli bir fonksiyon olsun. Farzedelim ki, her $z = x + iy \in D$ için,

$$\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

kısmi türevleri mevcut ve süreklidir. u ya D de *harmoniktir* denir; şayet,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{ise.}$$

MİSAL 1.4.1.

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ kompleks düzlemin bir D bölgesi üzerinde tarif edilmiş analitik bir fonksiyon olsun. Bu takdirde $u(x,y)$ve $v(x,y)$ fonksiyonları D de harmoniktirler. Diğer taraftan $u(z)$ kompleks düzlemin bir D bölgesi üzerinde tarif edilmiş harmonik bir fonksiyon ise her $z_0 \in D$ için,

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + r.e^{i\theta})\, d\theta$$

olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı mevcuttur.

TARİF 1.4.4.

$u(z)$, kompleks düzlemin bir D bölgesi üzerinde tarif edi reel değerli bir fonksiyon olsun. u ya D de *altharmonikti* denir; şayet $u(z)$ aşağıdaki şartları sağlıyor ise:

1. $-\infty \leqslant u(z) < +\infty$ (u, idantik olarak ~~-sonsuz~~ değildir),
2. $u(z)$, D de üst yarı süreklidir,
3. Her $z_0 \in D$ için $\exists\, r > 0$ $\quad u(z_0) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta.$

MİSAL 1.4.1.

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, kompleks düzlemin bir D bölgesi üzerinde tarif edilmiş analitik bir fonksiyon olsun. Bu taktirde $Ln\ |f(z)|$ fonksiyonu D de altharmoniktir.

TARİF 1.4.5.

F, $\mathbb{R}$ nin (a,b) açık aralığı üzerinde tarif edilmiş reel değerli bir fonksiyon olsun. F ye *konvekstir* denir; şayet her x,y (a,b) ve $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ için $F(\ (1-\lambda)\ x+\lambda y) \leqslant (1-\lambda)F(x)+\lambda F(y)$ ise.

TEOREM 1.4.1. [13. s.63]

$F,(a,b)$ açık aralığı üzerinde tarif edilmiş bir konveks fonksiyon olsun. Bu taktirde $F,(a,b)$ de süreklidir.

TEOREM 1.4.2. [14.s.479]

$G(x)$, (a,b) kapalı aralığı üzerinde tarif edilmiş sürekli bir fonksiyon ve F de G nin değer bölgesini ihtiva eden bir açık aralık üzerinde tarifli bir konveks fonksiyon olsun. Bu taktirde,

$$F\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b G(x)\,dx\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b (F\circ G)(x)\,dx \text{ dir.}$$

TEOREM 1.4.3. [12. s. 362]

$u(z)$ kompleks düzlemin bir D bölgesi üzerinde tarif edilmiş bir altharmonik fonksiyon ve F de $u(D)$ yi ihtiva eden bir açık aralık üzerinde tarif edilmiş monoton artan bir konveks fonksiyon olsun. Bu taktirde $F\circ u$ fonksiyonu D de altharmoniktir.

NOTASYON

$Ln^{+}t$ ile her t $\mathbb{R}_{+}$ için $max\{0, Lnt\}$ değerini alan ve tarif bölgesi $\mathbb{R}_{+}$ olan fonksiyon ifade edilir.

$p > 0$ olmak üzere e^{pt} ve $max\{0,t\}$ fonksiyonları $\mathbb{R}$ üzerinde tarif edilmiş monoton artan konveks fonksiyonlardır. Diğer taraftan $f(z)$ kompleks düzlemde bir D bölgesi üzerinde, tarif edilmiş analitik bir fonksiyon ise $Ln\,|f(z)|$, D de altharmoniktir. Şu halde Teorem 1.4.3. e göre $Ln^{+}|f(z)|$ ve $|f(z)|^{p}$ fonksiyonları D de altharmoniktir.

TEOREM 1.4.4. [13. s.362]

$u(z)$ kompleks düzlemin bir D bölgesi üzerinde tarif edilmiş sürekli bir altharmonik fonksiyon olsun. K, D nin kompakt bir altcümlesi olmak üzere farzedelim ki K da sürekli ve K nın içinde harmonik olan bir $h(z)$ fonksiyonu vardır; öyle ki her $z\in\partial K$ için $u(z) \leq h(z)$ dir. Bu taktirde her $z\in K$ için $u(z) \leq h(z)$ dir.

TEOREM 1.4.5. [Harnack Prensibi; 1. s.183]

$u_n(z)$ ler D_n $(n = 1,2,3,\dots)$ bölgeleri üzerinde tarif edilmiş harmonik fonksiyonlar ve D de her z_0 noktası için uygun bir $N(z_0,\varepsilon) := \{z\in D \mid |z-z_0| < \varepsilon\}$ açık civarı sonlu sayıda D_n bölgeleri hariç bütün D_n ler içinde ihtiva edilen bir bölge olsun. Farzedelim ki her z $N(z_0,\varepsilon)$ için sonlu sayıda n-ler hariç $u_n(z) \leq u_{n+1}(z)$ ve bir ξ_0 D noktasında $\{u_n(\xi_0)\}$ dizisi yakınsaktır. Bu taktirde $\{u_n(z)\}$ dizisi D de harmonik bir $u(z)$ fonksiyonuna yakınsar.

1.5. GREEN FONKSİYONU - LOGARİTMİK KAPASİTE VE KONFORM EŞDEĞERLİLİK

TARİF 1.5.1.

D kompleks düzlemde sınırı ∂D ile gösterilen bir bölge ve $z_o = x_o + iy_o \in D$ olsun. Farzedelim ki $\bar{D}$ de birinci mertebeden sürekli kısmi türevleri mevcut *D* de harmonik ve *D* nin ∂D sınırında $Ln\,|z-z_o|$ değerini alan bir $u(z) = u(x,y)$ fonksiyonu mevcuttur. Bu taktirde $G(z,z_o) := Ln\,\frac{1}{|z-z_o|} + u(z)$ fonksiyonuna *D* nin z_o *noktasına göre Green fonksiyonu denir.*

Tariften görülüyor ki, $G(z,z_o)$ Green fonksiyonu $z_o \in D$ noktası hariç *D* de harmoniktir ve ∂D de sıfır değerini alır. Bir bölgede harmonik ve bu bölgenin sınırında aynı değeri alan iki fonksiyon eşit olduğundan [21.s.65] *D* nin z_o noktasına göre Green fonksiyonu bir tektir.

D, sınırı sonlu sayıda analitik eğrilerin birleşimi olan bir bölge ise *D* nin Green fonksiyonu mevcuttur [3. s.249]. Diğer taraftan $v(z)$, *D* bölgesinde harmonik ve ∂D de sürekli bir fonksiyon ise *D* nin herhangi bir z_o noktası için,

$$v(z_o) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} v(z) \frac{d\,G(z,z_o)}{dn}\, ds$$

[21.s.66] dir. Bu formülde $G(z,z_o)$ *D* nin z_o noktasına göre Green fonksiyonu olup; ds, ∂D sınırının yay elemanıdır. $\frac{dG}{dn}$ ise *D* nin iç normali doğrultusundaki türevi gösterir ve

$$\frac{dG}{dn}\, ds = \frac{\partial G}{\partial y}\, dx - \frac{\partial G}{\partial x}\, dy \quad \text{dir.}$$

D nin sınırında $\frac{dG}{dn} > 0$ olması [21.s.71] Green fonksiyonunun önemli bir kaç özelliğinden biridir.

TARİF 1.5.2.

K sınırı sonlu sayıda analitik eğrilerin bileşimi olan kompakt bir cümle ve $\Omega(K)$ da *K* nın genişletilmiş kompleks düzleme göre bütünleyeni olsun. $G(z,\infty)$, $\Omega(K)$ nın ∞ noktasına göre Green fonksiyonu olduğuna göre,

$$\tau := \lim_{z\to\infty} \{\, G(z,\infty) - Ln\,|z| \,\}$$

vazedilirse e^{τ} sayısına K nın *logaritmik kapasitesi* denir ve *Kap (K)* ile gösterilir.

S kompleks düzlemin herhangi bir altcümlesi ise K,S nın kompakt sonlu sayıda analitik eğrilerle sınırlı altcümleleri olmak üzere $Kap\ (S) := \sup\limits_{K \subset S} \{ Kap\ (K) \}$ olarak tarif edilir [23.s.134],[7.s.122-124].

TARİF 1.5.3.

D,D'; $\mathbb{C}$ kompleks düzleminde verilen iki bölge ve $\gamma: D \to D'$ de bijektif bir tasvir olsun. γ tasvirine *konformdur* denir; şayet γ analitik ise.

$\gamma: D \to D'$ tasviri konform ise D,D' ye *konform eşdeğerdir* denir ve $D \simeq D'$ yazılır. Açık olarak $D \simeq D'$ ise $D' \simeq D$ dir.

BÖLÜM II

FONKSİYON CEBİRLERİ

2.1. ANALİTİK FONKSİYON CEBİRLERİ

D, kompleks düzlemde herhangibir bölge ve $H(D)$ de D üzerinde tarif edilmiş tek değerli kompleks analitik fonksiyonların cümlesi olsun. Her $f,g \in H(D), \alpha \in \mathbb{C}$ ve $z \in D$ için ;

$$(f+g)(z) := f(z) + g(z)$$
$$(f.g)(z) := f(z)g(z)$$
$$(\alpha f)(z) := \alpha f(z)$$

şeklinde tarif edilirse, $H(D)$ bu operasyonlara göre özdeş elemanlı komütatif bir kompleks cebirdir. Her $z \in D$ için $c (c \in \mathbb{C})$ değerini alan fonksiyon c ile gösterilirse; $H(D)$ nin nötr ve özdeş elemanları sıra ile $0,1$ fonksiyonlarıdır. c fonksiyonu ile c kompleks sayısına aynı olarak bakılırsa $H(D)$, $\mathbb{C}$ yi ihtiva eder.

TARİF 2.1.1.

$f \in H(D)$ fonksiyonunun *sıfır cümlesi* diye D nin $\{ z \in D \mid f(z) = 0 \}$ şeklinde tarif edilen altcümlesine denir ve $N(f)$ notasyonu ile gösterilir.

$f \in H(D)$ ve $a \in D$ için $f(a) = 0$ ise her $z \in D$ için , $f(z) = (z-a)^m . g(z)$ olacak şekilde bir $m \geq 1$ pozitif tamsayısı ve $g \in H(D)$ fonksiyonu mevcuttur, öyle ki $g(a) \neq 0$ dır [20.s.145]. Buradaki m sayısına, f fonksiyonunun a noktasındaki sıfır yerinin mertebesi denir. $m = 1$ ise a noktasına f nin basit sıfır yeri denir. Bu itibarla sıfır cümlelerini cebirsel cümleler olarak telakki edeceğiz, yani $a \in D$ noktası $f \in H(D)$ nin m. mertebeden bir sıfır yeri ise, a, $N(f)$ de m defa tekrar eder.

Bir $f \in H(D)$ fonksiyonuna birimdir denir, Yalnız ve yalnız $N(f) = \emptyset$ ise. Diğer taraftan $g,f \in H(D)$ için f fonksiyonu g yi böler, ancak ve ancak $N(f) \subset N(g)$ ise.

TARİF 2.1.2.

Her $z \in D$ için $j(z) = z$ şeklinde tarif edilen fonksiyona *idantik fonksiyon* denir.

LEMMA 2.1.1.

Her $a \in D$ için $(j-a)$, $H(D)$ nin bir maksimal aslî idealidir.

İSPAT.

(f), $H(D)$ nin $(j-a)$ yı ihtiva eden herhangibir hakiki aslî ideali olsun. (f) aslî ideali hakiki olduğundan $(f) \neq H(D)$, dolayısıyla $N(f) \neq \emptyset$ dır. Aksi halde f, $H(D)$ de birim olup; $f^{-1}.f = 1 \in (f)$, yani $(f) = H(D)$ olur ki bu bir tezattır. $(j-a) \subset (f)$, $N(j-a) = \{a\}$ olduğundan $f(a) = 0$ yani $N(j-a) \subset N(f)$ dir. Binanenaleyh $j-a$ fonksiyonu f yi böler. $j-a$, f yi böldüğünden $(f) \subset (j-a)$ dır. $(f) \subset (j-a)$ ve $(j-a) \subset (f)$ den $(f) = (j-a)$ elde edilir ki, bu da $(j-a)$ aslî idealinin maksimal olduğunu gösterir.

NETİCE 2.1.2.

Her $a \in D$ için $I_a := \{ f \in H(D) \mid f(a) = 0 \}$ altcümlesi $H(D)$ nin bir maksimal aslî idealidir.

İSPAT

Her $g \in (j-a)$ için $g(a) = 0$ olduğundan $(j-a) \subset I_a$ dır. Diğer taraftan her $f \in I_a$ için $N(j-a) \subset N(f)$ dır. Dolayısıyla $j-a$, f yi böler, yani $f = (j-a).h$ olacak şekilde bir $h \in H(D)$ mevcuttur. Şu halde her $f \in I_a$ için $f \in (j-a)$ olup; $I_a \subset (j-a)$ dır. Sonuç olarak $I_a = (j-a)$ elde edilir ki, bu ise Lemma 2.1.1. den dolayı I_a nın $H(D)$ nin bir maksimal ideali olduğunu gösterir.

Bu neticeden görmekteyiz ki, D nin herbir a noktasına $H(D)$ de bir I_a maksimal aslî ideali tekabül eder ve I_a yı tevlit eden $j-a$ fonksiyonunun D de sadece bir tek basit sıfırı vardır. Üstelik her $a,b \in D$, $a \neq b$ için $I_a \neq I_b$ dir.

Karşıt olarak $H(D)$ nin her maksimal aslî idealini tevlit eden fonksiyonun D de bir tek basit sıfırı vardır.

LEMMA 2.1.2.

(f), $H(D)$ nin herhangibir maksimal aslî ideali olsun. Bu taktirde f nin D de sadece bir tek basit sıfırı vardır.

İSPAT

$(f) \neq H(D)$ olduğundan $N(f) \neq \emptyset$ dır. $a \in N(f)$ olsun. $N(j-a)=\{a\}$ olduğundan, $N(j-a) \subset N(f)$, yani $j-a, f$ yi böler. Şu halde $(f) \subset (j-a)$ dır. Halbuki (f) aslî ideali maksimal, $(j-a) \neq H(D)$ ve $(f) \subset (j-a)$ dan $(f) = (j-a)$ elde edilir ki, bu da $N(f) = \{a\}$ olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır.

Netice 2.1.1. den dolayı her $a \in D$ için $I_a = \{ f \in H(D) \mid f(a) = 0 \}$ altcümlesi $H(D)$ nin bir maksimal aslî idealidir. $H(D)$ nin herhangibir I maksimal idealinin belirli bir $a \in D$ için I_a ya eşit olması aşağıdaki teorem ile karakterize edilir.

TEOREM 2.1.1. [4.s.76]

I, $H(D)$ nin herhangibir maksimal ideali olsun. I nın I_a tipinde olması için gerek ve yeter şart $H(D)/I$ bölüm cebirinin kompleks sayılar cismine izomorf bir cisim olmasıdır.

$H(D)$ analitik fonksiyon cebirinin en önemli özelliklerinden biri de $H(D)$ de her sonlu tevlit edilen idealin asli bir ideal olmasıdır [13.s.328].

TEOREM 2.1.2.

D, D' kompleks düzlemde konform eşdeğer iki bölge ve $H(D)$, $H(D')$ bu bölgeler üzerinde tarif edilmiş tek değerli kompleks analitik fonksiyonların cebiri olsun. Bu takdirde $H(D)$ den $H(D')$ ye bir Φ $\mathbb{C}$ -izomorfizmi mevcuttur.

İSPAT

D, D' konform eşdeğer olduğundan D den D' üzerine tarif edilmiş bijektif ve analitik bir $\gamma : D \to D'$ tasviri mevcuttur. γ tasviri bijektif ve analitik olduğundan $\gamma^{-1} : D' \to D$ tasviri de analitiktir. Binanenaleyh, $\Phi : H(D) \to H(D')$ tasviri her f $H(D)$ için $\Phi(f) := f \circ \gamma^{-1}$ şeklinde tarif edilirse, kolayca tahkik edilir ki; Φ, $H(D)$ den $H(D')$ ye bir $\mathbb{C}$ -izomorfizmidir.

Karşıt olarak;

TEOREM 2.1.3.

D, D' kompleks düzlemde herhangi iki bölge ve $H(D)$, $H(D')$ de bu bölgeler üzerinde tarif edilmiş tek değerli kompleks analitik fonksiyonların cebiri olsun. Farzedelim ki, $H(D)$ den $H(D')$ ye bir Φ $\mathbb{C}$ -izomorfizmi mevcuttur. Bu taktirde her $f \in H(D)$ için $\Phi(f) = f \circ \gamma^{-1}$ olacak şekilde bir $\gamma : D \to D'$ tasviri vardır ve $D \simeq D'$ dır.

İSPAT

$a \in D$ olsun. a noktasına $H(D)$ de bir I_a maksimal aslî ideali tekabül eder. $\Phi : H(D) \to H(D')$ bir izomorfizm olduğundan $\Phi(I_a)$,$H(D')$ nün bir maksimal aslî idealidir. Binanenaleyh Lemma 2.1.2. den dolayı $\Phi(I_a) = I_{a'}$ olacak şekilde bir ve birtek $a' \in D'$ noktası mevcuttur. Şu halde her $a \in D$ için $a' \in D'$, $\Phi(I_a) = I_{a'}$ şartını sağlayan nokta olmak üzere $\gamma : D \to D'$ tasviri $a' = \gamma(a)$ şeklinde tarif edilirse; γ tasviri bijektif bir tasvirdir.

$j \in H(D')$ idantik fonksiyonu gözönüne alınırsa; Φ izomorfizm olduğundan $f_o = \Phi^{-1}(j)$ olacak şekilde bir ve bir tek $f_o \in H(D)$ fonksiyonu mevcuttur. Her $a \in D$ için $f_o - f_o(a) \in I_a$ olduğundan, $\Phi(f_o - f_o(a)) \in I_{a'}$ dır. Φ nin $\mathbb{C}$ -izomorfizmi olduğu gözönüne alınırsa;

$$\Phi(f_o - f_o(a)) = \Phi(f_o) - \Phi(f_o(a)) = j - f_o(a) \in I_{a'} = I_{\gamma(a)}$$

olup; buradan

$$(j - f_o(a))(\gamma(a)) = 0, \text{ yani } \gamma(a) = f_o(a)$$

elde edilir. Netice olarak $\gamma = f_o$ olduğundan γ analitiktir. Dolayısıyla $D \simeq D'$ dır.

Son olarak her $f \in H(D)$ için $\Phi(f) = f_o \gamma^{-1}$ olduğunu gösterelim.Her $f \in H(D)$ için $\Phi(f)$, $f_o \gamma^{-1}$ $H(D')$ dır. Binanenaleyh herhangibir $a' \in D'$ için $\Phi(f)(a') = (f_o \gamma^{-1})(a')$ olduğunu gösterirsek iddia gösterilmiş olur.

$a' \in D'$ keyfi bir nokta olsun. Bu taktirde her $f \in H(D)$ için $\Phi(f) - \Phi(f)(a') \in I_{a'}$ dır. $\gamma : D \to D'$ bijektif olduğundan, $a' = \gamma(a)$ olacak şekilde bir $a \in D$ mevcuttur. Binanenaleyh $\Phi(f) - \Phi(f)(a') \in I_{a'}$ olduğundan $\Phi^{-1}(\Phi(f) - \Phi(f)(a')) = f - \Phi(f)(a') \in I_a$ olup, $f(a) - \Phi(f)(a') = 0$ dır. $a = \gamma^{-1}(a')$ konulursa $(f_o \gamma^{-1})(a') = \Phi(f)(a')$ elde edilir ki, bu istenilen neticedir.

Bu teorem *Walter Rudin* [11] *H.L.Royden* [10] *Misturi Nakai* [6] tarafından açık Riemann yüzeylerine, *L.P.Su* [17] tarafından da kompleks düzlemin rastgele iki altcümlesine teşmil edilmiştir.

Cengiz Uluçay iki düzlem bölgenin konform eşdeğerliliğini, bu bölgeler üzerinde tarif edilmiş ~~maksimum-modül~~ şartını sağlayan kompleks değerli sürekli fonksiyonların cebirleri arasında bir $\mathbb{C}$ -izomorfizmi verildiği taktirde karakterize etmiş ve bunu Florack manifoldları ile Riemann yüzeylerine teşmil etmiştir [18],[19].

Teorem 2.1.3., D ve D' bölgeleri üzerine kısıtlama yapılmaksızın $H(D)$ ve $H(D')$ nın altcebirleri arasında bir $\mathbb{C}$ -izomorfizmi verildiği zaman umumiyetle doğru değildir. Misal olarak ; D, kompleks düzlemde açık birim disk ve $D':=D\setminus\{0\}$ olsun. Bu taktirde D,D' üzerinde tarif edilmiş sınırlı analitik fonksiyonların $H^\infty(D)$, $H^\infty(D')$ cebirleri izomorftur. Fakat D,D' ye konform eşdeğer değildir [22.s.91].

2.2. NEVANLINNA SINIFLARI

TARİF 2.2.1.

D kompleks düzlemde herhangibir bölge ve $H(D)$ de D üzerinde tarif edilmiş tek değerli kompleks analitik fonksiyonların cümlesi olsun. Bir $f\in H(D)$ fonksiyonuna *Nevanlinna sınıfına* aittir denir, şayet her $z\in D$ için $Ln^+|f(z)|\leq U_f(z)$ olacak şekilde D de harmonik bir U_f fonksiyonu mevcut ise [16.s.930],[13.s.334-382]. $H(D)$ nin Nevanlinna sınıfına ait elemanlarının tamamının cümlesi $N(D)$ ile gösterilir ve buna D üzerinde tarif edilmiş analitik fonksiyonların *Nevanlinna sınıfı* denir.

Her $x,y\in\mathbb{R}+$ için $Ln^+|xy|\leq Ln^+|x|+Ln^+|y|$ ve $Ln^+|x+y|\leq Ln^+|x|+Ln^+|y|+Ln2$ olduğundan $N(D)$, özdeş elemanlı komütatif bir kompleks cebirdir. Bu cebirde D üzerinde tarif edilmiş tek değerli kompleks analitik fonksiyonların *Nevanlinna cebiri* denir.

Aşikar olarak $N(D)$ bütün sabitleri ihtiva eder. Diğer taraftan $N(D)$ nin sabitlerden başka fonksiyon ihtiva etmesi için gerek ve yeter şart D nin bütünleyeninin logaritmik kapasitesinin pozitif olmasıdır. Bu halde $j\in N(D)$ olup, $f\in N(D)$ ve $a\in D$ için $f(a)=0$ ise $f/j-a\in N(D)$ dir [8.s.115] , [11.s.49].

Nevanlinna cebirleri aşağıdaki şekilde karakterize edilir.

TEOREM 2.2.1.

$z_0 \in D$ ve $f \in H(D)$ olsun. $f \in N(D)$ olması için gerek ve yeter şart $z_0 \in \Delta$ olmak üzere $\partial\Delta$ sınırı sonlu sayıda analitik eğrilerin birleşimi olan ve $\Delta \cup \partial\Delta \subset D$ şartını sağlayan D nin her Δ altbölgesi için,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Delta} Ln^+ |f| \cdot \frac{dG}{dn} ds \leq M$$

olacak şekilde Δ dan bağımsız bir M sayısının mevcut olmasıdır. Burada G, Δ nın z_0 a göre Green fonksiyonudur.

İSPAT

Önce gösterelim ki, $f \in N(D)$ ise $z_0 \in \Delta, \Delta \cup \partial\Delta \subset D$ şartını sağlayan her Δ bölgesi için,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Delta} Ln^+ |f| \frac{dG}{dn} ds \leq M$$

olacak şekilde Δ dan bağımsız bir M sayısı mevcuttur.

Gerçekten $f \in N(D)$ olduğundan her $z \in D$ için $Ln^+|f(z)| \leq U_f(z)$ olacak şekilde D de harmonik bir U_f fonksiyonu mevcuttur. $\Delta \cup \partial\Delta \subset D$ olduğundan her $z \in \bar{\Delta}$ için $Ln^+|f| \leq U_f$ dir. Dolayısıyla,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Delta} Ln^+|f| \cdot \frac{dG}{dn} ds \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Delta} U_f \frac{dG}{dn} ds = U_f(z_0)$$

elde edilir. Şu halde $M := U_f(z_0)$ alınırsa $z_0 \in \Delta$ ve $\Delta \cup \partial\Delta \subset D$ olan her Δ bölgesi için,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Delta} Ln^+|f| \frac{dG}{dn} ds \leq M$$

elde edilir.

Karşıt olarak $f \in H(D)$ için D nin $z_0 \in \Delta, \Delta \cup \partial\Delta \subset D$ { $\partial\Delta$, sonlu sayıda analitik eğrilerin bileşimidir } şartını sağlayan herhangibir Δ altbölgesi için $G(z, z_0)$, Δ nın z_0 a göre Green fonksiyonu olmak üzere,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Delta} Ln^+|f| \cdot \frac{dG}{dn} ds \leq M$$

olacak şekilde Δ dan bağımsız bir M sayısı mevcut ise $f \in N(D)$ dir.
{ Δ_k }, teoremin hipotezindeki şartları sağlayan ve D nin altbölgelerinden meydana gelen bir dizi olsun. Öyle ki, $\Delta_n \subset \Delta_{n+1}$ ve $D = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k$ dır. Bu taktirde her bir k için $\Delta_k \cup \partial\Delta_k$ da sürekli Δ_k da $Ln^+|f|$

değerini alan bir $V_k(z)$ fonksiyonu mevcuttur. Diğer tariftan bu $\{V_k(z)\}$ fonksiyon dizisi monoton artan olup,

$$V_k(z_o) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Delta_k} Ln^+|f| \frac{dG_k}{dn} ds \leq M$$

olduğundan $\{ V_k(z) \}$ dizisi z_o noktasında yakınsaktır. Dolayısıyla Harnack prensibine göre $\{ V_k(z) \}$ dizisi D de bir $V(z)$ harmonik fonksiyonuna yakınsar. İşte bu $V(z)$ için $Ln^+|f| \leq V$ olduğundan $f \in N(D)$ elde edilir.

B Ö L Ü M III

NEVANLINNA SINIFLARI İLE KONFORM EŞDEĞERLİLİĞİN CEBİRSEL KARAKTERİZASYONU

Misturu Ozawa ve Hisao Mizumoto [8], bütünleyenlerinin logaritmik kapasiteleri pozitif olan D,D' gibi iki düzlem bölge üzerinde tarifli tek değerli analitik fonksiyonların $N(D),N(D')$ Nevanlinna cebirlerini gözönüne almakta ve $N(D)$ den $N(D')$ ye bir Φ $\mathbb{C}$ -izomorfizmi verildiğinde D' bölgesini Dbölgesine konform olaraktasvir eden ve her $f\in N(D)$ için $f \circ \gamma = \Phi(f)$ eşitliğini sağlayan bir $\gamma:D'\to D$ tasvirinin mevcut olduğunu göstermektedirler.

$D,\mathbb{C}$ kompleks düzleminde bütünleyeninin logaritmik kapasitesi pozitif olan bir bölge ve $N(D)$ de D üzerinde tarifli tek değerli analitik fonksiyonların Nevanlinna cebiri olsun. $N(D)$ nin aşağıdaki dört şartı gerçekleyen altcebirini $A(D)$ ile gösterelim.

(a) $1\in A(D)$,

(b) $j\in A(D)$, $j(z) = z$,

(c) $a\in D$ ve $f\in A(D)$ için $f(a) = 0$ ise $f/j-a\in A(D)$,

(d) $a\notin D$ ise $1/j-a\in A(D)$.

Açık olarak $A(D)$ bütün sabit fonksiyonları ihtiva eder. Diğer taraftan $a\in D$ olmak üzere $m_a : A(D) \to \mathbb{C}$ tasviri her $f\in A(D)$ için $m_a(f):=f(a)$ şeklinde tarif edilirse; m_a,$A(D)$ üzerinde tarif edilmiş bir çarpım lineer fonksiyonelidir. $A(D)$ bütün sabitleri ihtiva ettiğinden her $a\in D$ için $m_a:A(D) \to \mathbb{C}$ çarpım lineer fonksiyonelleri sıfırdan farklıdır. Diğer taraftan $j-a\in A(D)$ için $j-a\in Ker m_a$ dır.

$m_a: A(D) \to \mathbb{C}$ çarpım lineer fonksiyoneline *nokta fonksiyoneli* denir.

Çalışmamızın bu bölümünde $A(D)$ nin sıfırdan farklı olan herhangibir m çarpım lineer fonksiyonelinin belirli bir $a\in D$ için m_a tipinde olduğunu göstereceğiz. Bundan faydalanarak bütünleyenlerinin logaritmik kapasiteleri pozitif olan iki düzlem bölge için bu bölgeler üzerinde tarifli Nevanlinna cebirlerinin $(a),(b),(c),(d)$ şartlasağlayan altcebirleri arasında bir $\mathbb{C}$ -izomorfizmi mevcut ise; bu iki bölgenin konform eşdeğer olduğunu ispat edeceğiz.

3.1. $A(D)$ NİN ÇARPIM LİNEER FONKSİYONELLERİNİN KAREKTERİZASYONU

D, kompleks düzlemde bütünleyeninin logaritmik kapasitesi pozitif olan bir bölge ve $A(D)$ de D üzerinde tarifli tek değerli analitik fonksiyonların (a),(b),(c),(d) şartlarını sağlayan cebiri olsun.

LEMMA 3.1.1.

$a,b \in D$ için m_a, m_b: $A(D) \to \mathbb{C}$ çarpım lineer fonksiyonellerinin eşit olması için gerek ve yeter şart $a=b$ olmasıdır.

İSPAT

$a=b$ ise açık olarak $m_a=m_b$ dir. Karşıt olarak $m_a=m_b$ ise $a=b$ dir. Gerçekten $m_a=m_b$ olduğundan Teorem 1.3.1. den dolayı $Kerm_a=Kerm_b$ dir. $j-a \in Kerm_a$ ve $Kerm_a=Kerm_b$ olduğundan $j-a \in Kerm_b$ elde edilir. Bu ise $b-a = 0$ yani $a=b$ olduğunu ifade eder.

LEMMA 3.1.2.

Her $a \in D$ için $Kerm_a$, $A(D)$ nin maksimal idealidir.

İSPAT

Teorem 1.3.2. den dolayı $Kerm_a$, $A(D)$ nin bir idealidir. f, $A(D) \setminus Kerm_a$ ye ait herhangibir eleman olsun. f nin seçilişinden dolayı $m_a(f) = f(a) \neq 0$ dır. Dolayısıyla,

$$\frac{f(a)-f}{f(a)} \text{ ve } \frac{f}{f(a)}$$

fonksiyonları $A(D)$ cebirine ait olup, $\frac{f(a)-f}{f(a)} \in Kerm_a$ dır.

Diğer taraftan;

$$1 = \frac{f(a)-f}{f(a)} + \frac{f}{f(a)}$$

şeklinde yazılabileceğinden 1 birim fonksiyonu tarif 1.1.6. ya göre $(f,Kerm_a)$ idealine aittir. Şu halde $(f,Kerm_a) = A(D)$ olup; Teorem 1.1.2. den dolayı $Kerm_a$, $A(D)$ nin maksimal idealidir.

LEMMA 3.1.3.

m, $A(D)$ üzerinde tarif edilmiş sıfırdan farklı herhangibir çarpım lineer fonksiyoneli olsun. Bu taktirde $m(1) = 1$ olup, her $a \in \mathbb{C}$ için $m(a) = a$ dır.

<u>İSPAT</u>

$m: A(D) \to \mathbb{C}$ çarpım lineer fonksiyoneli sıfırdan farklı olduğundan $m(f) \neq 0$ olacak şekilde bir $f \in A(D)$ fonksiyonu mevcuttur. $f=f.1$ ve m çarpım lineer fonksiyoneli olduğundan $m(f) = m(f).m(1)$ dir. Buradan $m(f).(1-m(1)) = 0$ ve $\mathbb{C}$ cisim olduğundan $m(1) = 1$ elde edilir.

Diğer taraftan m lineer ve $m(1) = 1$ olduğundan her $a \in \mathbb{C}$ için $m(a) = m(a.1) = a.m(1) = a.1 = a$ bulunur.

<u>TEOREM 3.1.1.</u>

m, $A(D)$ üzerinde tarif edilmiş sıfırdan farklı herhangibir çarpım lineer fonksiyoneli olsun. Bu takdirde $m = m_a$ olacak şekilde bir ve bir tek $a \in D$ mevcuttur.

<u>İSPAT</u>

m, sıfırdan farklı çarpım lineer fonksiyoneli olduğundan Lemma 3.1.3. den dolayı $m(1) = 1$ ve her $b \in \mathbb{C}$ için $m(b) = b$ dir.

$a:=m(j)$ diyelim. İddia ediyoruz ki, $a \in D$ dir. Aksi halde $a \notin D$ ise $A(D)$, (d) şartını sağladığından,

$$1/j-a \in A(D) \text{ olup, } 1 = m(1)$$

olduğundan,

$$1 = m\{ (j-a).\ \frac{1}{j-a} \}$$

$$1 = m(j-a).m(\frac{1}{j-a})$$

$$1 = \{ m(j)-m(a) \}\ m(\frac{1}{j-a})$$

$$1 = \{ a-a \}.m(\frac{1}{j-a})$$

$$1 = 0$$

elde edilir ki; bu bir tezattır. Dolayısıyla $a \in D$ olmak zorundadır.

İspat edelim ki, $m = m_a$ dır. m, sıfırdan farklı olduğundan $Ker m \neq A(D)$ dir. $a \in D$ için $m_a : A(D) \to \mathbb{C}$ çarpım lineer fonksiyonelini gözönüne alalım. f, $Ker m_a$ nın herhangibir elemanı olsun. $f \in Ker m_a$ için $f(a) = 0$ dır. $f(a) = 0$ ve $A(D)$, (c) şartını sağladığından $f = (j-a).g$ olacak şekilde bir $g \in A(D)$ fonksiyonu mevcuttur. Binanenaleyh $a=m(j)$ olduğu dikkate alınırsa $f \in Ker m_a$ için,

$$m(f) = m\{(j-a).g\}$$
$$m(f) = m(j-a).m(g)$$
$$m(f) = 0$$

elde edilir. Şu halde her $f \in Kerm_a$ için, $f \in Kerm$ olup; $Kerm_a \subset Kerm$ dir. $Kerm \neq A(D)$, $Kerm_a \subset Kerm$ ve Lemma 3.1.2. ye göre $Kerm_a$, $A(D)$ nin maksimal ideali olduğundan $Kerm_a = Kerm$ elde edilir. Şu halde Teorem 1.3.1. den dolayı $m = m_a$ dır.

a nın birtekliği Lemma 3.1.1. den derhal görülür.

3.2. KONFORM EŞDEĞERLİLİĞİN CEBİRSEL KARAKTERİZASYONU

D,D' kompleks düzlemde bütünleyenlerinin logaritmik kapasiteleri pozitif olan iki bölge ve $A(D)$, $A(D')$ de bu bölgeler üzerinde tarifli Nevanlinna cebirlerinin (a),(b),(c),(d) şartlarını sağlayan altcebirleri olsun.

TEOREM 3.2.1.

Φ, $A(D)$ den $A(D')$ ye bir $\mathbb{C}$ -izomorfizmi olsun. Bu taktirde her $f \in A(D)$ için $\Phi(f) = f \circ \gamma^{-1}$ olacak şekilde bir ve birtek $\gamma : D \to D'$ konform tasviri mevcuttur.

İSPAT

$\Phi : A(D) \to A(D')$ tasviri bir $\mathbb{C}$ -izomorfizmi olduğundan $\Phi^{-1} : A(D') \to A(D)$ tasviri de $\mathbb{C}$ -izomorfizmidir.

$a \in D$ keyfi bir nokta olsun. Bu taktirde her $f \in A(D)$ için $m_a(f) := f(a)$ şeklinde tarif edilen $m_a : A(D) \to \mathbb{C}$ tasviri $A(D)$ üzerinde tarif edilmiş sıfırdan farklı bir çarpım lineer fonksiyonelidir. $m' := m_a \circ \Phi^{-1}$ vazedelim. Kolayca görülür ki, $m' : A(D') \to \mathbb{C}$ tasviri $A(D')$ üzerinde tarif edilmiş sıfırdan farklı bir çarpım lineer fonksiyonelidir. Binanenaleyh Teorem 3.1.1. den dolayı $m' = m_a \circ \Phi^{-1} = m'_{a'}$ olacak şekilde bir ve birtek $a' \in D'$ mevcuttur.

Her $a \in D$ için $a' \in D'$, $m_a \circ \Phi^{-1} = m'_{a'}$ şartını sağlayan nokta olmak üzere $\gamma : D \to D'$ tasvirini, $\gamma(a) := a'$ şeklinde tarif edelim. İddia ediyoruz ki, $\gamma : D \to D'$ tasviri bijektif bir tasvirdir. Gerçekten $a,b \in D$ $a \neq b$ ise $\gamma(a) \neq \gamma(b)$ dır. Aksi halde $\gamma(a) = \gamma(b)$ ise, $m_a = m'_{\gamma(a)} \circ \Phi = m'_{\gamma(b)} \circ \Phi = m_b$ dir. Dolayısıyla $m_a = m_b$ den Lemma 3.1.1. e göre $a=b$ elde edilir ki; bu bir tezattır. Şu halde $a,b \in D$,

$a \neq b$ için $\gamma(a) \neq \gamma(b)$ dir. Diğer taraftan $a' \in D'$ herhangibir nokta ise $m'_{a'} \circ \Phi$, $A(D)$ üzerinde tarif edilmiş sıfırdan farklı bir çarpım lineer fonksiyoneli olduğundan $m'_{a'} \circ \Phi = m_a$ olacak şekilde bir ve birtek $a \in D$ mevcuttur. İşte bu $a \in D$ için $m_a \circ \Phi^{-1} = (m'_{a'} \circ \Phi) \circ \Phi^{-1} = m'_{a'}$ olduğundan $\gamma(a) = a'$ dır. Netice olarak γ tasviri bijektiftir.

Şimdi de $\gamma\colon D \to D'$ tasvirinin her $f \in A(D)$ için $\Phi(f) = f \circ \gamma^{-1}$ şartını sağladığını ve konform olduğunu gösterelim.

$a' \in D'$ keyfi bir nokta olsun. $\gamma\colon D \to D'$ bijektif olduğundan $\gamma(a) = a'$ olacak şekilde bir ve birtek $a \in D$ mevcuttur. $\gamma(a) = a'$ olduğundan $a = \gamma^{-1}(a')$ dır. Bu $a' \in D'$, $a \in D$ için $m'_{a'} = m_a \circ \Phi^{-1}$, $A(D')$ üzerinde tarif edilmiş bir çarpım lineer fonksiyoneli olduğundan her $f \in A(D)$ için;

$$\Phi(f)(a') = m'_{a'}(\Phi(f)) = (m_a \circ \Phi^{-1})(\Phi(f)) = m_a(f) = m_a(f) = f(a) = (f \circ \gamma^{-1})(a')$$

elde edilir. $\Phi(f)(a') = (f \circ \gamma^{-1})(a')$ ve $a' \in D'$ keyfi olduğundan $\Phi(f) = f \circ \gamma^{-1}$ dir.

$\Phi\colon A(D) \to A(D')$ tasviri bir izomorfizm ve $j \in A(D')$ olduğundan $j = \Phi(f_o)$ olacak şekilde bir ve birtek $f_o \in A(D)$ mevcuttur.

Bu $f_o \in A(D)$ için $j = \Phi(f_o) = f_o \circ \gamma^{-1}$, yani $j \circ \gamma = f_o$ olduğundan her $a \in D$ için $\gamma(a) = j(\gamma(a)) = (j_o\, \gamma)(a) = f_o(a)$ dır. Dolayısıyla $\gamma = f_o$ olup, γ analitiktir.

Netice olarak γ bijektif ve analitik olduğundan konformdur.

Son olarak γ nin tek olduğunu gösterelim. Farzedelim ki, her $f \in A(D)$ için $\Phi(f) = f_o\, \gamma_1^{-1}$, $\Phi(f) = f_o\, \gamma_2^{-1}$ olacak şekilde $\gamma_1, \gamma_2 \colon D \to D'$ konform tasvirleri mevcuttur. Bu taktirde her $f \in A(D)$ için $f_o \gamma_1^{-1} = f_o \gamma_2^{-1}$ olduğundan özellikle $j \in A(D)$ için $j_o \gamma_1^{-1} = j_o \gamma_2^{-1}$ olur. Son eşitlikten her $a' \in D'$ için $\gamma_1^{-1}(a') = (j_o \gamma_1^{-1}(a') = (j_o \gamma_2^{-1})(a') = \gamma_2^{-1}(a')$, yani $\gamma_1^{-1} = \gamma_2^{-1}$ elde edilir ki, bu da $\gamma_1 = \gamma_2$ olduğunu gösterir.

S O N U Ç

Bu çalışmada, kompleks düzlemde bütünleyeninin logaritmik kapasitesi pozitif olan bir D bölgesi üzerinde tarif edilmiş tek değerli analitik fonksiyonların $N(D)$Nevanlinna sınıfının aşağıdaki şartları sağlayan bir $A(D)$ altcebiri gözönüne alındı ve $A(D)$ üzerinde tarif edilmiş sıfırdan farklı herhangibir m çarpım lineer fonksiyonelinin uygun bir $a\in D$ için $m = m_a$ tipinde, yani her $f\in A(D)$ için $m_a(f) = f(a)$ olacak şekilde bir $a\in D$ nin mevcut olduğu gösterildi [Teorem 3.1.1.].

$A(D)$ nin sağladığı şartlar şunlardır ;

(a) $1\in A(D)$,

(b) $j\in A(D)$, $j(z) = z$,

(c) $a\in D$ ve $f\in A(D)$ için $f(a) = 0$ ise $f/j-a\in A(D)$,

(d) $a\notin D$ ise $1/j-a\in A(D)$.

$A(D)$ üzerinde tarif edilen sıfırdan farklı herhangibir çarpım lineer fonksiyonelinin m_a tipinde olduğu kullanılarak D,D' gibi kompleks düzlemde bütünleyenlerinin logaritmik kapasiteleri pozitif olan iki bölge üzerinde tarif edilmiş mütekabil $A(D),A(D')$ cebirleri arasında bir $\mathbb{C}$ -izomorfizmi mevcut ise bu iki bölgenin konform eşdeğer olduğu gösterildi [Teorem 3.2.1.].

K A Y N A K L A R

[1] AHLFORS, L.V.
" Complex Analysis". Mc Graw-Hill Book Company, Second edition (1966), New York.

[2] BERS, L.
" On rings of analytic functions ". Bull. Amer. Math. Soc. 54 (1948, pp.311-315).

[3] COURANT, R.
" Dirichtle Principle Conformal Mapping and Minimal surfaces" Interscience, Publishers, Inc. New York (1950)

[4] KAKUTANI, S.
" On rings of analytic functions ". Lectures on functions of a complex variable. (edited by W.Kaplan), pp.71-78, Univ. of Michigan Press, Ann Arbor (1955).

[5] KRA, I.
" On the ring of holomorphic functions on an open Riemann surface ". Trans. Amer. Math. Soc. 132 (1968), pp.231-244.

[6] NAKAI, M.
" On rings of analytic functions on Riemann Surfaces ". Proc, Japan Acad. 39(1963), pp.79-84.

[7] NEVANLINNA, R.
" Analytic Functions ". Spinger Verlag - New York (1970).

[8] OZAWA, M. and MIZUMOTO, H.
" On rings of analytic Functions ". Japan Jour. of Math. 29 (1959), pp. 114-117.

[9] RICHARDS, I.
" A criterion for rings of analytic functions ". Trans. Amer. Math. Soc. 128 (1967), pp.523-530.

[10] ROYDEN, H.L.
" Rings of analytic and meromorphic functions ". Trans. Amer. Math. Soc. 83 (1956), pp. 269-276.

[11] RUDIN, W.
" An algebraic Characterization of Conformal equivalence ". Bull. Amer. Math. Soc. 61 (1955), pp.543.

[12] RUDIN, W.
" Analytic functions of class Hp ". Trans. Amer. Math. Soc. 78 (1955), pp.46-66.

[13] RUDIN, W.
" Real and Complex Analysis ". Mc Graw-Hill Book Company, second edition (1974).

[14] SAKS, S. and ZYGMUND, A.
" Analytic Functions ". Elsevier publishing Company, third edition (1971) New York.

[15] SIMONS, G.F.
" Introduction to topology and modern Analysis ". Mc Graw-Hill Book Company (1963), New York.

[16] SHAPIRO, H.J. and SHIELDS, A.L.
" Unusual topological properties of the Nevanlinna Class ". Amer. Jour. of math. Vol. 97. No.4, (1975),pp.915-936.

[17] SU, L.P.
" Rings of Analytic functions on any subset of the Complex plane ". Pacific Jour. of Math. Vol. 42, No.2 (1972), pp.535-538.

[18] ULUÇAY, C.
" Converse of the maxsimum modules theorem and Rings of continuous Complex functions ". Communitions De la Faculté Des Sciences de L' universite D' Ankara, Serie A_1 Tome 24, (1975), pp.1-8.

[19] ULUÇAY, C.
" Characterizations of Riemann Surfaces ". Jour. of the faculte science of the KTÜ. Vol. 1. Fasc.1 (1977), pp.1-6.

[20] ULUÇAY, C.
" Fonksiyonlar Teorisi ve Riemann Yüzeyleri ". KTÜ. Temel Bilimler Fakültesi yayınları (1978).

[21] ULUÇAY, C.
" Konform Tasvir ". Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi yayını Um. 70, Mat. 21 (1955).

[22] WERMER, J.
" Banach Algebras and Analytic functions ". Advences in Mathematics, Vol. 1. Fascicle, 1. (1961),pp.51-102.

[23] ZALCMAN, L.
" Analytic Capacity and Rational approximation ". Lecture Notes in Mathematics, Vol.50 (1968).

ÖZGEÇMİŞİM

1951 yılında Trabzon'un Tonya ilçesinin Kaleönü mahallesinde doğdum. İlk ve Orta Okulu Tonya'da bitirdim. 1966 Trabzon İlköğretmen Okuluna girdim. 1968 de Trabzon İlköğretmen Okulu öğretmenler kurulu kararı ile Ankara Yüksek Öğretmen Okulu Hazırlık Lisesine gönderildim. 1969 da Ankara Yüksek Öğretmen Okulu Hazırlık Lisesini bitirdim. Aynı yıl Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümüne kayıt oldum. 1973 de mezun oldum. 11 Kasım 1973 de Van Kız İlköğretmen Okulunda stajyer öğretmen olarak göreve başladım.

25 Mayıs 1974 den beri KTÜ Temel Bilimler Fakültesi Matematik bölümünde asistan olarak görev yapmaktayım.