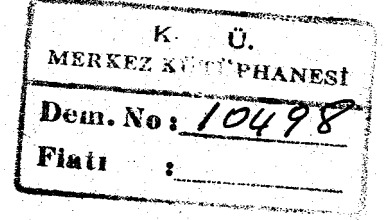


KARADENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FİZİK ANA BİLİM DALI
FİZİK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI



TEZ NUMARASI

Genel :
Anabilim Dalı :
Program :

DÖNME ENERJİ SEVİYELERİNİN HARMONİK
SALINICI MODELİNDEN ELDE EDİLMESİ

Belgin KALAYCIOĞLU

Yönetici: Doç.Dr. Hüseyin DİRİM

Trabzon, 1985

ÖNSÖZ

Bu tezin yöneticiliğini üstlenen ve çalışmalarımnda yardımlarını esirgemeyen Hocam Sayın Doç.Dr. Hüseyin DİRİM'e teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, tezimin bu aşamaya gelmesinde katkıları bulunanlara da teşekkürlerimi sunarım.

Belgin Kalaycıoğlu

İÇİNDEKİLER

ÖZET

BÖLÜM 1

DÖNME SERBESTLİK DERECELERİ VE BOZULMA SİMETRİLERİ	1
1.1. Giriş	1
1.2. Uzay Dönmeleri ile ilgili Serbestlik Dereceleri	1
1.3. Eksenel Simetrinin Doğurduğu Sonuçlar	3
1.4. R-Değişmezliği	5

BÖLÜM 2

DÖNME ENERJİLERİ	8
2.1. Giriş	8
2.2. Eylemsizlik Momentinin Hesaplanması	9

BÖLÜM 3

DÖNME İLE İLGİLİ DİĞER ÇEKİRDEK ÖZELLİKLERİ	17
3.1. Silindirik Bazda Salınıcı Dalga Fonksiyonları İçin Matris Elemanları	17
3.2. Dönme Yüzünden Açısal Momentumun Yönelimi	20
3.3. Büyük Açısal Momentumlu Durumlar	22
3.4. Titreşimsel Genlikler	25

BÖLÜM 4

ELLIOTT MODELİ	28
4.1. Kuadropol Etkileşmesi	28
4.2. Durumların Tanımlanması	30

KAYNAKLAR	35
-----------	----

ÖZET

Bu çalışmada çekirdeklerin dönme enerji seviyeleri, nükleonların dönen bir harmonik salıncı potansiyeli içindeki hareketi gözönüne alınarak incelenmeye çalışılmıştır.

Birinci bölümde dönme serbestlik dereceleri ve bozulma simetritleri ele alınarak çekirdeğin hareketi incelenmiştir. Ayrıca aksenal simetriye sahip sistemlerde R-değişmezliği incelenerek bu değişmezlik yüzünden dönme serbestlik derecelerinin kısıtlandığı gösterilmiştir.

İkinci bölümde, dönme enerjileri incelenmeye çalışılmış ve dönme hareketi yarı klasik şekilde ele alınarak eylemsizlik momenti hesaplanmıştır.

Üçüncü bölümde, dönme ile ilgili diğer çekirdek özellikleri incelenmeye çalışılmıştır. Bunun için harmonik salıncı potansiyelinde hareket eden parçacıkların matris elemanlarını hesaplamada ve nükleonların hareketini salıncı kuantaları cinsinden incelemekte yararlı olacak olan kuantaya yaratan ve yok eden işlemciler tanımlanmıştır. Ayrıca açısal momentumun büyük olması halindeki enerji ifadesi elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde, kuadrupol etkileşmesi ele alınarak, yapay üç boyutlu uzayda açısal momentum işlemcilerine benzer işlemciler tanımlanmıştır. Toplam kuadrupol etkileşmesi, bu işlemciler cinsinden ifade edilmiştir. Ayrıca iki boyutlu harmonik salıncı potansiyeli içindeki parçacığın durumlarının ve enerjilerinin silindirik koordinatlarda incelenmesine çalışılmıştır.

BÖLÜM 1

DÖNME SERBESTLİK DERECELERİ VE BOZULMA SİMETRİLERİ

1.1 Giriş

Çekirdeğin hareketini dönme bileşenleri ve iç bileşenler şeklinde ayırmış olalım. Bu durumda Hamiltonyen,

$$H=H_{iç}(q,p)+H_{dönme,\alpha}(P_\omega) \quad (1.1.1)$$

şeklinde yazılır.

İç hareket q koordinatları ve p eşlenik momentaları ile tanımlanır. Bu değişkenler cisim-sabit koordinat sistemine göre ölçülür. Yani bunlar dış koordinat sistemindeki dönmelere göre skalerdir. Cisim-Sabit koordinat sisteminin yönelimi sistemin bozulma şekli ile tanımlanır ve ω ile gösterilen açısız değişkenlerle belirlenir. Dönme Hamiltonyeni, ω yöneliminden bağımsızdır ve P_ω eşlenik açısız momentumun bir fonksiyonudur. Dönme hareketi, çekirdeğin iç durumunu tanımlayan α kuantum sayılarına bağlı olabilir.

(1.1.1) Hamiltonyeninin öz durumları

$$\Psi_{\alpha,I} = \Phi_\alpha(q)\psi_{\alpha,I}(\omega) \quad (1.1.2)$$

çarpımı şeklinde yazılabilir. Her bir Φ_α iç durumu için spektrum bir dönme seviyeleri dizisi içerir. Dönme seviyeleri, I ile gösterilen açısız momentumun bir dizi kuantum sayısı değerleri tarafından belirlenir.

1.2 Uzay Dönmeleri ile ilgili Serbestlik Dereceleri

İki boyutta dönme hareketi, (sabit eksen etrafında dönme) çok basit yapıya sahiptir. Yönelim \emptyset azimut açısı ile belirlenir. Hareketin bir durumu, eşlenik açısız momentumun M özdeğeri ile şu şekilde tanımlanır.

$$\Psi_M(\phi) = (2\pi)^{-1/2} \exp\{iM\phi\} \quad (1.2.1)$$

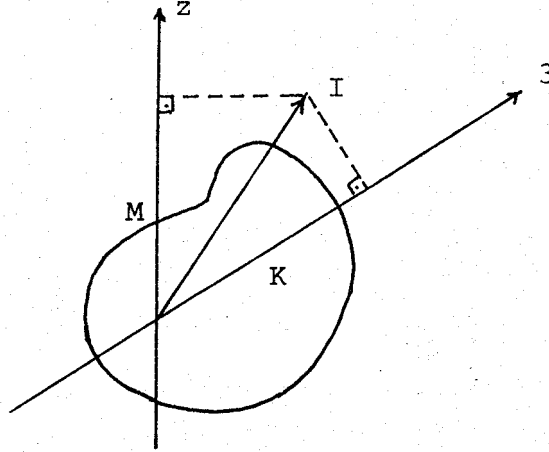
Üç boyutlu uzayda bir cismin yönelimi üç tane açısal değişken içerir. Örneğin: $\omega = \phi, \theta, \psi$ Euler açıları gibi. O halde hareketin durumunu belirtmek üzere üç tane kuantum sayısına gerek vardır. Bu kuantum sayılarından ikisi toplam açısal momentum I ve onun sabit eksen üzerindeki bileşeni $M = I_z$ olarak alınabilir. Üçüncü kuantum sayısı \vec{I} vektörünün ω yönelimli cisim-sabit koordinat sistemindeki bileşenleri incelenerek elde edilebilir. İç bileşenler $I_{1,2,3}$ ile dış bileşenler $I_{x,y,z}$ sıra-değişimlidir. Çünkü, $I_{1,2,3}$ dış sistemin yöneliminden bağımsızdır. İç bileşenler arasındaki sıra-değişim bağıntıları $I_{x,y,z}$ bileşenlerinininkinin benzeridir. Yalnız bir işaret farkı vardır. Örneğin:

$$[I_1, I_2] = -i\hbar I_3 .$$

Böylece birbiri ile sıra-değişimli açısal momentum değişkenleri seti olarak I^2, I_z, I_3 seçilebilir. I_3 ün özdeğerleri K ile gösterilir ve M nin alabileceği değerleri alır.

$$K = I, I-1, \dots, -I$$

$$(1.2.2)$$



Şekil-1.1: Üç boyutta dönme hareketini tanımlayan açısal momentum kuantum sayıları. z-ekseni laboratuvarındaki sabit koordinat sistemine aittir. Bunun yanında 3-ekseni, cisim-sabit koordinat sisteminin bir eksenidir.

Üç kuantum sayısı I, K, M nin verilen belli değerleri için dönme dalga fonksiyonu

$$\psi_{IKM}(\omega) = \left(\frac{2I+1}{8\pi^2}\right)^{1/2} D_{MK}^I(\omega) \quad (1.2.3)$$

ile verilir. Burada D_{MK}^I fonksiyonları dönme matrisleridir. Bu neticeyi; sabit koordinat sisteminden, cisim-sabit sistemi ile çakışan döndürülmüş koordinat sistemine bir dönüşüm yaparak elde edebiliriz. $K=0$ için D_{MK}^I fonksiyonları küresel harmoniklere indirgenir.

$$\psi_{I,K=0,M}(\omega) = (2\pi)^{-1/2} Y_{IM}(\theta, \phi) \quad (1.2.4)$$

Bu dalga fonksiyonu üçüncü Euler açısı ψ den bağımsızdır. Fakat üç Euler açısı üzerinden integrale göre normalleştirilmiştir.

$K=0$ için dönme dalga fonksiyonu, spinsiz bir nokta parçacığın açısal hareketine ait fonksiyonla aynıdır. Sonlu K için dönme hareketi $h=K$ helicity'le sahip parçacığın açısal hareketine karşılık gelir.

Herhangi bir dönme değişmezi Hamiltonyen için I^2 ve I_z hareket sabitleridir. Bunun yanında I_3 ün Hamiltonyen ile sıradışı değişimi sistemin iç özelliklerine bağlıdır. O halde genel olarak kararlı durumlar, farklı K değerli bileşenlerin bir karışımını içerir.

$$\psi_{\tau IM}(\omega) = \left(\frac{2I+1}{8\pi^2}\right)^{1/2} \sum_K C_{\tau I}(K) D_{MK}^I(\omega) \quad (1.2.5)$$

Burada üçüncü dönme kuantum sayısı τ ile gösterilmiştir ve $C_{\tau I}(K)$ katsayıları eylemsizlik momentinin göreceli büyüklüğüne bağlıdır.

1.3 Eksenel Simetrinin Doğurduğu Sonuçlar

Eğer bir sistem eksenal simetriye sahipse, iki özellik ortaya çıkar:

(a) Simetri ekseni üzerindeki I_3 izdüşümü bir hareket sabitidir.

(b) Simetri ekseni etrafında kollektif dönme yoktur.

Yukarıdaki birinci netice Klasik Mekanikte iyi bilinir. Simetri ekseni etrafında dönmelere göre hamiltonyeninin değişmezliğini ifade eder. Daha genel olarak eylemsizlik tensörü için 3-ekseni bir simetri ekseni ise I_3 bir hareket sabitidir.

İkinci netice Kuantum Fiziği tanımından ileri gelir. Yalnız simetri ekseni etrafındaki bir dönmeye göre farklı olan iki duruma ait iç sistemleri birbirinden ayırmak mümkün değildir. Eksenel simetrinin bu neticesi küresel sistemde kollektif dönmelerin olmayışına benzemektedir. K kuantum sayısı, iç hareketin açısız momentumunu temsil eder ve verilen bir iç duruma ait dönme bandı için sabit bir değere sahiptir.

İki atomlu molekülde atomları birleştiren eksene simetri ekseni denir. Kollektif dönme hareketinin açısız momentumu bu simetri eksenine diktir. Bu sistemin simetri ekseni etrafındaki dönmesi farkedilmez, yani enerjiye bir katkısı yoktur. Ancak simetri eksenine dik bir eksen etrafında dönme söz konusu olabilir. Bu dönme hareketi ile ilgili olan açısız momentum dönme ekseni doğrultusundadır.

Eksenel simetriden ileri gelen dönme serbestlik dereceleri üzerindeki kısıtlamayı

$$I_3 = J_3 \quad (1.3.1)$$

bağ koşulu ile ifade edebiliriz. Burada J_3 işlemcisi iç açısız momentum bileşenini göstermektedir. (1.3.1) koşulu, simetri ekseni etrafındaki dönmelerle ilgili işlemlerin I_3 tarafından üretildiğini ve bunun değerinin iç yapı tarafından önceden belirlenmiş olduğunu göstermektedir.

Eksenel simetriden dolayı üçüncü Euler açısı ψ nin farklı değerlerine ait yönelimler birbirinden ayırt edilemez. Bu bakımdan ψ değişkeni fazlalıktır. Yukarıdaki (1.3.1) koşulu toplam çekirdek dalga fonksiyonunun ψ açısından bağımsız olmasını sağlar.

1.4 R-Değişmezliği

Eğer iç Hamiltonyen simetri eksenine dik bir eksen etrafında 180° dönmeye göre değişmez ise dönme serbestlik derecelerinde ek indirgeme olur. Simetri eksenine dik değişik eksenler etrafında dönmeler eşdeğerdir. Bu bakımdan 2-eksenine göre $R=R_2(\pi)$ dönmesi seçilir. Eksenel simetriye sahip, fakat küresel olmayan sistemlerde R-değişmezliği mümkün olan tek ek dönme değişmezliğidir. Gerçekten bir başka eksene göre değişmezlik, sonsuz simetri eksenleri gerektirir. Yani küresel simetriyi gerektirir.

R-değişmezliği, R dönmesinin iç serbestlik derecesinin bir parçası olduğunu gösterir. O halde dönme serbestlik dereceleri içine konamaz. Bu bağ koşulunu değişik şekilde şöyle ifade edebiliriz. Dış değişkenlere ait bir R dönmesini R_d işlemcisi ile ve aynı dönmenin iç değişkenler üzerine etkisini R_i işlemcisi ile göstermiş olalım. Bu durumda

$$R_d = R_i \quad (1.4.1)$$

özdeşliği vardır. Bu koşul (1.3.1) bağ koşuluna benzemektedir.

$K=0$ olan iç durumlar R_i nin r özdeğeri ile etiketlenebilir.

$$R_i \phi_{r,K=0}(q) = r \phi_{r,K=0}(q) \quad (1.4.2)$$

$$r = \pm 1$$

R_i nin özdeğerleri ± 1 dir. Çünkü tam sayı açısal momentumlu bir sistem için $R^2 = R_2(2\pi) = +1$ özdeşliği vardır.

Dönme dalga fonksiyonu üzerine etki eden R_d işlemcisi, simetri eksenini doğrultusunu tersine çevirir, $(\theta \rightarrow \pi - \theta, \phi \rightarrow \phi + \pi)$. Burada,

$$R_d Y_{IM}(\theta, \phi) = (-1)^I Y_{IM}(\theta, \phi) \quad (1.4.3)$$

elde edilir. Böylece $R_i = R_d$ bağ koşulu

$$(-1)^I = r \quad (1.4.4)$$

özelliğini verir. Netice olarak dönme spektrumu ya sadece çift I değerleri, veya sadece tek I değerleri içerir:

$$\Psi_{r,K=0,IM} = (2\pi)^{-1/2} \Phi_{r,K=0}(q) Y_{IM}(\theta, \phi)$$

$$I = 0, 2, 4, \dots, \quad r=+1$$

$$I = 1, 3, 5, \dots, \quad r=-1$$
(1.4.5)

$K \neq 0$ olan iç durumlar, R-değişmezliğinin neticesi olarak iki katlı yozlaşmıştır. K 'yı pozitif alalım. J_3 değeri negatif olan döndürülmüş durumlar \bar{K} ile gösterilmiş olsun,

$$\Phi_{\bar{K}}(q) \equiv R_i^{-1} \Phi_K(q)$$
(1.4.6)

Eğer iç durumlar, toplam açılal momentum J nin bileşenleri cinsinden seriye açılmış ise (1.4.6) ifadesinden

$$\Phi_{\bar{K}} = \sum_J C_J \Phi_{JK}$$
(1.4.7)

$$\Phi_{\bar{K}} = \exp\{i\pi J_2\} \Phi_K = \sum_J (-1)^{J+K} C_J \Phi_{J, -K}$$

olmasını gerektirir. Burada $\Phi_{J, \pm K}$ bir J çoklusunun $J_3 = \pm K$ değerli bileşenleridir.

R_d nin dönme dalga fonksiyonu üzerine etkisi aşağıdaki gibidir,

$$R_d D_{MK}^I(\omega) = \exp\{-i\pi I_2\} D_{MK}^I(\omega)$$
(1.4.8)

(1.4.1) $R_d = R_i$ koşulunun yerine gelmesi için çekirdek dalga fonksiyonunun

$$\Psi_{KIM} = 2^{-1/2} (1 + R_i^{-1} R_d) \left(\frac{2I+1}{8\pi}\right)^{1/2} \Phi_K(q) D_{MK}^I(\omega)$$
(1.4.9)

$$= \left(\frac{2I+1}{16\pi}\right)^{1/2} \{ \Phi_K(q) D_{MK}^I(\omega) + (-1)^{I+K} \Phi_{\bar{K}}(q) D_{M-K}^I(\omega) \}$$

$$I = K, K+1, \dots \quad (K > 0)$$

şeklinde olması gerekir. Dikkat edilirse,

$$R_i^2 = R_d^2 = (-1)^{2I}$$

olmaktadır.

Φ_K ve $\Phi_{\bar{K}}$ iç durumlarından sadece bir tane dönme durumu oluşturulmaktadır. Bunun sebebi, R değişmezliği yüzünden dönme serbestlik derecelerinin kısıtlanmasıdır.

BÖLÜM 2

DÖNME ENERJİLERİ

2.1 Giriş

Yavaş dönen bir sistem için enerji değeri yaklaşık olarak $\Phi_K(q)$ durumu ile ilgili E_K iç enerjisine eşit alınabilir. Bu enerji bir bandın tüm üyeleri için aynıdır. Bunun üstüne gelen dönme hareketi sisteme ek enerji verir. Bu enerji dönme açısai momentum değerine bağlıdır. Koordinat eksenlerinin dönmesine göre enerji değişmez olduğundan etkin Hamiltonyen sadece açısai momentumun cisim-sabit eksenlerine göre bileşenlerini içerir.

$K=0$ olan bandlarda enerji işlemcisi I_3 'e göre köşegen olup sadece $I_1^2 + I_2^2$ değerine bağlıdır. Buna göre dönme Hamiltonyen işlemcisi

$$H_{\text{dön}}(K=0) = h_0(q,p) (I_1^2 + I_2^2) \quad (2.1.1)$$

şeklindedir. Burada h_0 iç değişkenlerin bir fonksiyonudur. Bu işlemcinin beklenen değeri

$$E_{\text{dön}} = \frac{\hbar^2}{2\mathcal{I}} I(I+1) \quad (2.1.2)$$

şeklinde yazılabilir.

Etkin eylemsizlik momenti

$$\frac{\hbar^2}{2\mathcal{I}} \equiv \langle K | h_0 | K \rangle \quad (2.1.3)$$

ile tanımlanmıştır.

$K \neq 0$ olan bandlar için dönme enerjileri iki kısımdan oluşur. Birinci kısım $\Delta K=0$ ile ilgili terimdir. Bu terim $K=0$ bandındaki ile aynıdır. İkinci kısım, $\Delta K=\pm 2K$ ile ilgili terimdir. Örneğin: $K=\frac{1}{2}$ için enerji ifadesi

$$\begin{aligned}
E_{\text{dön}} &= AI(I+1) + A_1 (-1)^{I+1/2} (I+1/2) \delta(K, 1/2) \\
&= \frac{\hbar^2}{2\mathcal{I}} \left[I(I+1) + a (-1)^{I+1/2} (I+1/2) \delta(K, 1/2) \right]
\end{aligned}
\tag{2.1.4}$$

şeklindedir. Burada

$$a = -\langle K = \frac{1}{2} | J_+ | K = \frac{1}{2} \rangle \tag{2.1.5}$$

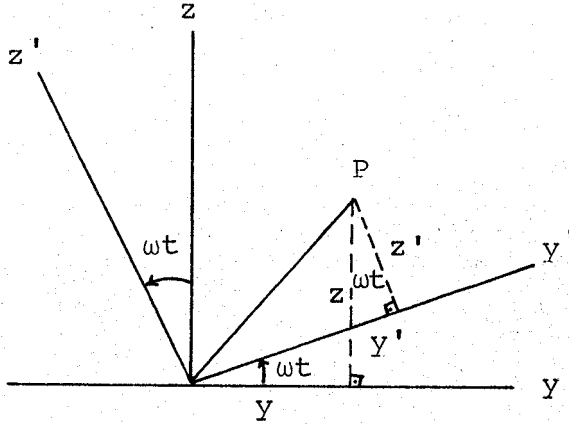
"ayrıştırma parametresi" olarak adlandırılır.

2.2 Eylemsizlik Momentinin Hesaplanması

$$E = \hbar^2 \frac{I(I+1)}{2\mathcal{I}}$$

ifadesindeki \mathcal{I} eylemsizlik momentini hesaplayalım. Dönme hareketini yarı-klasik şekilde ele alalım. Başka bir deyişle dönmenin herhangi bir ω frekansında olduğu kabul edilsin ve ω kuantumlu olmasın.

İlk durgun sistemdeki x-eksenine göre ω açısal hızı ile dönen sisteme koordinatları dönüştürelim. İlk sistemdeki koordinatları x, y, z ile ve dönen sistemdeki koordinatları x', y', z' ile gösterelim.



$$\begin{aligned}
x'_i &= x_i \\
y'_i &= y_i \cos \omega t + z_i \sin \omega t \\
z'_i &= -y_i \sin \omega t + z_i \cos \omega t
\end{aligned}
\tag{2.2.1}$$

Kinetik enerji ifadesi, ters dönüşümler kullanıldığında

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} m \sum_i (\dot{x}_i'^2 + \dot{y}_i'^2 + \dot{z}_i'^2) \\
&= \frac{1}{2} m \sum_i \{ \dot{x}_i'^2 + \dot{y}_i'^2 + \dot{z}_i'^2 + 2\omega (y_i' \dot{z}_i' - z_i' \dot{y}_i') + \omega^2 (y_i'^2 + z_i'^2) \}
\end{aligned} \tag{2.2.2}$$

olarak yazılır.

Burada ikinci terim "Coriolis" kuvvetini, üçüncü terim Merkezciil kuvveti verir. Bundan sonra momentaları hesaplırsak,

$$\begin{aligned}
P_{x_i'} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i'} = m \dot{x}_i' \\
P_{y_i'} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i'} = m (\dot{y}_i' - \omega z_i') \\
P_{z_i'} &= \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i'} = m (\dot{z}_i' + \omega y_i')
\end{aligned} \tag{2.2.3}$$

elde edilir. Bunlar cinsinden kinetik enerjiyi

$$T = \frac{1}{2m} \sum_i (P_{x_i'}^2 + P_{y_i'}^2 + P_{z_i'}^2) \tag{2.2.4}$$

şeklinde ifade edebiliriz. Böyle hareketli koordinat sistemlerinde Hamiltonyen enerjiye eşit değildir. Fakat daha genel

$$H_\omega = \sum_i (\dot{x}_i' P_{x_i'} + \dot{y}_i' P_{y_i'} + \dot{z}_i' P_{z_i'}) - T + V \tag{2.2.5}$$

ifadesinden elde edilir. Neticede

$$H_\omega = \frac{1}{2m} \sum_i (P_{x_i'}^2 + P_{y_i'}^2 + P_{z_i'}^2) + V - \omega \sum_i (y_i' P_{z_i'} - z_i' P_{y_i'}) \tag{2.2.6}$$

$$H_\omega = H(x', P') - \omega L_x'$$

bulunur. Şimdi x ve P deki üsleri kaldırabiliriz. Ayrıca genel halde parçacıkların spini var ise $L_x \rightarrow I_x$ alınır.

Sonuç olarak, ω frekansı ile dönen bir sisteme dönüştürmede Hamiltonyen

$$H_{\omega} = H - \omega I_X \quad (2.2.7)$$

haline gelir. Burada I_X toplam açısal momentumun x bileşenidir.

Zamana bağlı dönen çözümlerin oluşturulması, Hamiltonyene $-\omega I_X$ terimini ekleyip zamandan bağımsız denklemlerin çözülmesiyle yapılabilir. Burada $I_X = \sum_i I_X(i)$ ifadesi bir parçacık işlemcileri üzerine toplamayı içerdiğinden kinetik enerji işlemcisi $T_i \rightarrow T_i - \omega I_X(i)$ şeklinde düzeltilmiş demektir. O halde işimiz, Ψ antisimetrikleştirilmiş çarpım dalga fonksiyonu olmak üzere

$$\delta \frac{(\Psi, H_{\omega} \Psi)}{(\Psi, \Psi)} = 0 \quad (2.2.8)$$

denklemini çözmektir.

(2.2.8) ifadesini başka şekilde de yorumlayabiliriz. Açısal momentum I_X in sıfırdan farklı beklenen değerini verme koşulu altında uygun antisimetrik çarpım fonksiyonları aranır. Bu ise Hamiltonyene $-\omega I_X$ terimini ekleyip, ω yı bir Lagrange çarpanı kabul ederek istenen I_X değerini verecek şekilde ayarlanması ile yapılabilir. Şüphesiz neticede ω nın açısal hız özelliği gösterdiği ortaya çıkar.

Yarı-klasik yaklaşımda; ω keyfi olarak küçük seçilebileceğine göre $\omega=0$ çözümlerinden başlayarak, pertürbe olmuş dalga fonksiyonunu bulmada pertürbasyon teorisi kullanılabilir. Bu da enerjinin minimumlaştırılmasına eşdeğerdir.

Dalga fonksiyonu ile ilgili her bir Hartree-Fock denklemi

$$(T + \mathcal{V}) \psi_i(x) - \omega I_X \psi_i(x) = \epsilon_i \psi_i(x) \quad (2.2.9)$$

olur. Burada \mathcal{V} Hartree potansiyelidir. Yani değiş-tokuş terimi ihmal edilmiştir.

$\psi_i^{(0)}$, $\omega=0$ değerli çözümler olmak üzere.

$$\psi_i(x) = \psi_i^{(0)}(x) + \sum_m C_{mi} \psi_m^{(0)}(x) \quad (2.2.10)$$

yazarak neticede,

$$(\epsilon_m - \epsilon_i) C_{mi} + \sum_{n,j} \langle j|m|v|ni \rangle C_{nj} + \sum_{n,j} \langle mn|v|ij \rangle C_{nj}^* = \omega \langle m|I_x|i \rangle \quad (2.2.11)$$

$$(\epsilon_m - \epsilon_i) C_{mi}^* + \sum_{n,j} \langle ij|v|mn \rangle C_{nj} + \sum_{n,j} \langle ni|v|jm \rangle C_{nj}^* = \omega \langle i|I_x|m \rangle$$

elde edilir. İkinci denklem birincinin kompleks eşleniğidir. Bu denklemler özet olarak

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & A^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi \\ \Phi^* \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} I \\ I^* \end{pmatrix} \quad (2.2.12)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\begin{pmatrix} \Phi \\ \Phi^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{mi} \\ C_{mi}^* \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} I \\ I^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle m|I_x|i \rangle \\ \langle i|I_x|m \rangle \end{pmatrix} \quad (2.2.13)$$

dır.

Yavaş dönmeyi incelemek üzere sistemin düzeltilmesi gerekmektedir. (2.2.10) uyarılmaları sebebiyle sistemin enerjisi artacaktır. Enerjiyi bulmak için H nın perturbe olmuş dalga fonksiyonlarına göre beklenen değerini alırız. (H_ω nın değil. Çünkü $-\omega I_x$ terimi sadece sıfırdan farklı I_x değerini elde etmeyi garantilemek üzere konmuş bir terimdir.) Düzeltilmiş dalga fonksiyonunu yerleşim sayısı uzayında tanımlamak daha kullanışlıdır.

$$|\psi\rangle = \prod_{i=1}^N \prod_{m=N+1}^{\infty} (1 + C_{mi} a_m^+ a_i) |0\rangle \quad (2.2.14)$$

Enerjiyi hesaplarken, C_{mi} ye göre ikinci mertebe terimleri kullanmak gerekir:

$$\begin{aligned}
\frac{\langle \Psi, H \Psi \rangle}{\langle \Psi, \Psi \rangle} - E_0 &= \sum_{m,i} (\epsilon_m - \epsilon_i) |C_{mi}|^2 \\
&+ \sum_{m,i,n,j} \frac{1}{2} \left[\langle ni | v | jm \rangle C_{nj}^* C_{mi} + \langle jm | v | ni \rangle C_{nj} C_{mi}^* \right] \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{m,i,n,j} \langle ij | v | mn \rangle C_{mi} C_{nj} + \frac{1}{2} \sum_{m,i,n,j} \langle mn | v | ij \rangle C_{mi}^* C_{nj}^*
\end{aligned} \quad (2.2.15)$$

C ye göre lineer terimler ifadede yer almaz. Burada E_0 , $\omega=0$ 'a ait enerji değerleridir.

Burada \mathcal{J}_x in tanımı

$$\frac{\langle \Psi, H \Psi \rangle}{\langle \Psi, \Psi \rangle} - E_0 = \frac{1}{2} \mathcal{J}_x \omega^2 \quad (2.2.16)$$

şeklindedir. (2.2.14) ifadesini kullanarak,

$$\mathcal{J}_x = \frac{1}{\omega} \sum_{m,i} \{ \langle m | I_x | i \rangle C_{mi}^* + \langle i | I_x | m \rangle C_{mi} \} \quad (2.2.17)$$

elde edilir. C_{mi} katsayıları ω ile orantılı olduğuna göre \mathcal{J}_x değeri ω 'dan bağımsız olacaktır.

(2.2.11) ifadesinde v nin tüm matris elemanlarını ihmal edersek,

$$C_{mi} = \omega \frac{\langle m | I_x | i \rangle}{\epsilon_m - \epsilon_i} \quad (2.2.18)$$

olur. Bu değeri (2.2.17) de yerine koyarsak eylemsizlik momenti için,

$$\mathcal{J}_x = 2 \sum_{m,i} \frac{|\langle m | I_x | i \rangle|^2}{\epsilon_m - \epsilon_i} \quad (2.2.19)$$

"Cranking modeli" ifadesi bulunur.

Harmonik salınıcı potansiyeli x, y doğrultularında eşit frekanslı z doğrultusunda farklı frekanslı olması halinde \mathcal{J}_x 'i

hesaplayalım.

(2.2.19) ifadesinde \mathcal{J}_x 'i hesaplarken son durumlar (parçacık durumları) üzerine ve ilk durumlar (boşluk durumları) üzerine toplama vardır. Burada spini ihmal ederek

$$L_x = \sum_i (y_i P_{z_i} - z_i P_{y_i}) \quad (2.2.20)$$

işlemcisinin matris elemanlarını hesaplayalım. Bunun için,

$$\langle n_x + 1 | x | n_x \rangle = \sqrt{(n_x + 1) \hbar / (2m\omega_x)} \quad (2.2.21)$$

$$\langle n_x + 1 | P_x | n_x \rangle = i \sqrt{\frac{1}{2} (n_x + 1) (\hbar m \omega_x)}$$

matris elemanlarına gerek vardır. Burada n_x , x doğrultusundaki mevcut salınıcı kuantum sayısını gösterir. Netice olarak ilgili matris elemanları,

$$\begin{aligned} \langle n_y + 1, n_z + 1 | y P_z - z P_y | n_y n_z \rangle &= \frac{1}{2} i \left(\sqrt{\frac{\omega_z}{\omega_y}} - \sqrt{\frac{\omega_y}{\omega_z}} \right) \sqrt{(n_y + 1)(n_z + 1)} \\ \langle n_y - 1, n_z - 1 | y P_z - z P_y | n_y n_z \rangle &= -\frac{1}{2} i \left(\sqrt{\frac{\omega_z}{\omega_y}} - \sqrt{\frac{\omega_y}{\omega_z}} \right) \sqrt{n_y n_z} \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

ve

$$\begin{aligned} \langle n_y + 1, n_z - 1 | y P_z - z P_y | n_y n_z \rangle &= -\frac{1}{2} i \left(\sqrt{\frac{\omega_z}{\omega_y}} + \sqrt{\frac{\omega_y}{\omega_z}} \right) \sqrt{(n_y + 1)n_z} \\ \langle n_y - 1, n_z + 1 | y P_z - z P_y | n_y n_z \rangle &= \frac{1}{2} i \left(\sqrt{\frac{\omega_z}{\omega_y}} + \sqrt{\frac{\omega_y}{\omega_z}} \right) \sqrt{n_y (n_z + 1)} \end{aligned} \quad (2.2.23)$$

elde edilir. Enerji paydaları $\pm(\hbar\omega_y + \hbar\omega_z)$ olan bu çiftlerden ilki, farklı iki tabaka arasındaki geçişleri temsil eder. Aynı tabaka içindeki geçişleri tanımlayan ikinci çiftin enerji paydaları ise $\pm(\hbar\omega_y - \hbar\omega_z)$ dir. Bu matris elemanları (2.2.19) da yerine koyar ve tüm m'ler üzerine toplam alınırsa

$$\mathcal{J}_x = \frac{1}{2} \hbar \left\{ \frac{(\omega_z - \omega_y)^2}{\omega_y \omega_z (\omega_y + \omega_z)} \sum_{i=1}^A (n_y + n_z + 1)_i + \frac{(\omega_y + \omega_z)^2}{\omega_y \omega_z (\omega_y - \omega_z)} \sum_{i=1}^A (n_z - n_y)_i \right\} \quad (2.2.24)$$

elde edilir. Bu ifadede birinci terimin katsayısı, ikinci terimin katsayısı yanında çok küçüktür. Birinci terim, ikinci yanında ihmal edilebilir. \mathcal{J}_x 'in hesaplamasını tamamlamak üzere ω_y ve ω_z nin bilinmesi gerekir. Yoğunluk dağılımının potansiyel ile aynı şekle sahip olduğu kabul edilirse ω_y ve ω_z bulunabilir. Harmonik salınıcının iyi bilinen bir özelliği

$$\overline{x^2} = \frac{1}{A} \sum_i \langle x_i^2 \rangle = \frac{1}{A} \frac{\hbar}{m\omega_x} \sum_i (n_x + \frac{1}{2})_i \quad (2.2.25)$$

şeklindedir. y ve z için de aynı benzer özellik vardır. Burada,

$$\Sigma_x = \sum_{i=1}^A (n_x + \frac{1}{2})_i \quad (2.2.26)$$

tanımını yaparsak

$$\overline{x^2} : \overline{y^2} : \overline{z^2} = \left(\frac{1}{\omega_x} \Sigma_x \right) : \left(\frac{1}{\omega_y} \Sigma_y \right) : \left(\frac{1}{\omega_z} \Sigma_z \right) \quad (2.2.27)$$

elde edilir.

Potansiyel eksenlerinin $(1/\omega_x) : (1/\omega_y) : (1/\omega_z)$ oranını kullanırsak ve ω_i frekansları

$$\frac{1}{\omega_x} : \frac{1}{\omega_y} : \frac{1}{\omega_z} = \frac{\Sigma_x}{x} : \frac{\Sigma_y}{y} : \frac{\Sigma_z}{z} \quad (2.2.28)$$

özelliğini sağlayacak şekilde seçilirse potansiyel şekli ile yoğunluk dağılımının şekli arasında uyum sağlanmış olur.

$\omega_0^3 = \omega_x \omega_y \omega_z$ olmak üzere (2.2.28) ifadesinden

$$\omega_x = \omega_0 \left(\frac{\Sigma_x \Sigma_y \Sigma_z}{x y z} \right)^{1/3} / \Sigma_x, \dots \quad (2.2.29)$$

değeri elde edilir. (2.2.29) ifadesi ile verilen ω_y, ω_z değerleri (2.2.24) ifadesinde yerine konulursa, bir takım işlemlerden sonra

$$\mathcal{J}_x = \hbar \left\{ \frac{1}{\omega_y} \sum_{i=1}^A (n_y + \frac{1}{2})_i + \frac{1}{\omega_z} \sum_{i=1}^A (n_z + \frac{1}{2})_i \right\} \quad (2.2.30)$$

elde edilir. Bu eylemsizlik momenti ifadesi, çekirdeğin x eksenini etrafındaki katı cisim dönmesine aittir

$$(\mathcal{I}_x)_{\text{katı}} = m \sum_i (\bar{y}_i^2 + \bar{z}_i^2) = \hbar \left\{ \frac{1}{\omega_y} \sum_i (n_{y_i} + \frac{1}{2}) + \frac{1}{\omega_z} \sum_i (n_{z_i} + \frac{1}{2}) \right\} \quad (2.2.31)$$

değerlerine özdeştir. O halde parçacıklar çekirdek hacmi içinde bağımsız hareket etmelerine rağmen, sistemin eylemsizlik momenti katı cismin eylemsizlik momenti ile aynıdır. Denel eylemsizlik momenti değerleri katı cismin eylemsizlik momenti değerlerine göre 2 ile 5 kere daha küçüktür. Bu aykırılık nükleonların çiftleşim özelliği ile ilgilidir.

BÖLÜM 3

DÖNME İLE İLGİLİ DİĞER ÇEKİRDEK ÖZELLİKLERİ

3.1 Silindirik Bazda Salınıcı Dalga Fonksiyonları İçin Matris Elemanları

Harmonik salınıcı potansiyeli içinde hareket eden parçacıklara ait matris elemanlarının hesaplanmasında, hareketi salınımın kuantası cinsinden tanımlamak kullanışlı olmaktadır. Bir boyutlu salınıcı için kuantaya yaratan C^+ ve kuantaya yok eden C işlemcileri, parçacığın koordinat ve momentumunun çizgisel birleşimidir,

$$\begin{aligned}x &= \left(\frac{\hbar}{2M\omega}\right)^{1/2} (C^+ + C) \\P &= i \left(\frac{\hbar M\omega}{2}\right)^{1/2} (C^+ - C) \\C^+ &= \left(\frac{M\omega}{2\hbar}\right)^{1/2} \left(x - \frac{i}{M\omega} P\right)\end{aligned}\tag{3.1.1}$$

Burada ω salınıcı frekansıdır. C^+ işlemcilerinin sıfırdan farklı matris elemanları

$$\langle n+1 | C^+ | n \rangle = (n+1)^{1/2}\tag{3.1.2}$$

olur. Normalleştirilmiş dalga fonksiyonları

$$|n\rangle = (n!)^{-1/2} (C^+)^n |n=0\rangle\tag{3.1.3}$$

olarak yazılabilir.

Üç boyutlu salınıcı için durumların fazları uygun şekilde seçilir. P_1 , x_2 ve P_3 'ün matris elemanları reel ve (n_1, n_2, n_3) bazında pozitif olacak şekilde seçim yapılır. x_1, P_2 ve x_3 'ün matris elemanları bu seçimde sanal olur. C_k^+ işlemcilerinin pozitif matris elemanlarına sahip olması istenirse,

$$\begin{aligned}
C_1^+ &= \left(\frac{M\omega_1}{2\hbar}\right)^{1/2} \left(ix_1 + \frac{P_1}{M\omega_1}\right) \\
C_2^+ &= \left(\frac{M\omega_2}{2\hbar}\right)^{1/2} \left(x_2 - \frac{iP_2}{M\omega_2}\right) \\
C_3^+ &= \left(\frac{M\omega_3}{2\hbar}\right)^{1/2} \left(ix_3 + \frac{P_3}{M\omega_3}\right)
\end{aligned} \tag{3.1.4}$$

elde edilir. Küresel simetri limitinde C_1^+ , iC_2^+ , C_3^+ değerleri bir vektörün kartezyen bileşenlerini oluşturur.

Uzatılmış salınıcı potansiyeli için silindirik gösterim kullanılabilir. Bu gösterimde parçacık durumları n_3 , n_+ , n_- kuantum sayılarıyla tanımlanır. Burada n_3 simetri eksenini doğrultusundaki kuantum sayısını, n_+ (12) düzleminde 3-eksenine göre +1 açısal momentumlu kuantum sayısını ve n_- (12) düzleminde 3-eksenine göre -1 açısal momentumlu kuantum sayısını gösterir. Toplam kuantum sayısı ve toplam açısal momentumun 3-ekseni doğrultusundaki bileşeni

$$\begin{aligned}
N &= n_3 + n_+ + n_- \\
\Lambda &= n_+ - n_-
\end{aligned} \tag{3.1.5}$$

ile verilir.

(n_+, n_-, n_3) silindirik bazında fazlar öyle seçilir ki C_+^+ , C_3^+ , C_-^+ işlemcileri pozitif matris elemanlarına sahip olurlar ve küresel simetri limitinde bunlar bir vektör işlemcisinin küresel bileşenlerini aşağıdaki gibi oluştururlar.

$$\begin{aligned}
C_{\pm}^+ &= \mp 2^{-1/2} (C_1^+ \mp C_2^+) \\
&= \mp \left(\frac{M\omega_1}{4\hbar}\right)^{1/2} \left(i(x_1 \pm ix_2) + \frac{P_1 \pm iP_2}{M\omega_1}\right) \\
C_3^+ &= \left(\frac{M\omega_3}{2\hbar}\right)^{1/2} \left(ix_3 + \frac{P_3}{M\omega_3}\right)
\end{aligned} \tag{3.1.6}$$

Bunların ters bağıntıları,

$$\begin{aligned}
x_1 \pm ix_2 &= \pm i \left(\frac{\hbar}{M\omega_{\perp}} \right)^{1/2} (C_{\pm}^+ + C_{\mp}) \\
P_1 \pm iP_2 &= \mp (\hbar M\omega_{\perp})^{1/2} (C_{\pm}^+ - C_{\mp})
\end{aligned} \tag{3.1.7}$$

$$x_3 = -i \left(\frac{\hbar}{2M\omega_3} \right)^{1/2} (C_3^+ - C_3)$$

$$P_3 = \left(\frac{\hbar M\omega_3}{2} \right)^{1/2} (C_3^+ + C_3)$$

olur.

$Nn_3\Lambda$ bazında ifade edilen dalga fonksiyonlarına göre koordinatların matris elemanları

$$\begin{aligned}
\langle N' n_3, \Lambda \pm 1 | x_1 \pm ix_2 | Nn_3 \Lambda \rangle &= \pm i \left(\frac{\hbar}{2M\omega_{\perp}} \right)^{1/2} (N - n_3 \pm \Lambda + 2)^{1/2} \delta(N', N+1) \\
&\quad + (N - n_3 \mp \Lambda)^{1/2} \delta(N', N-1)
\end{aligned} \tag{3.1.8}$$

$$\langle N \pm 1, n_3 \pm 1, \Lambda | x_3 | Nn_3 \Lambda \rangle = \mp i \left(\frac{\hbar}{2M\omega_3} \right)^{1/2} \left(n_3 + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \right)^{1/2} \tag{3.1.9}$$

ile verilir.

Yörünge açısal momentum C^+ , C işlemcilerinin ikili çarpımlarından oluşturulur,

$$\begin{aligned}
l_1 \pm il_2 &= (2\omega_3\omega_{\perp})^{-1/2} \left[(\omega_3 + \omega_{\perp}) (C_3^+ C_{\mp} + C_{\pm}^+ C_3) \right. \\
&\quad \left. + (\omega_3 - \omega_{\perp}) (C_3^+ C_{\pm}^+ + C_3 C_{\mp}) \right]
\end{aligned} \tag{3.1.10}$$

$$l_3 = C_+^+ C_+ - C_-^+ C_-$$

bunların matris elemanları

$$\begin{aligned}
\langle Nn_3', \Lambda \pm 1 | l_1 \pm il_2 | Nn_3 \Lambda \rangle &= \frac{\omega_3 + \omega_{\perp}}{2(\omega_3\omega_{\perp})^{1/2}} \\
&\cdot \left\{ (n_3 + 1)^{1/2} (N - n_3 \mp \Lambda)^{1/2} \delta(n_3', n_3 + 1) \right. \\
&\quad \left. + (n_3)^{1/2} (N - n_3 \pm \Lambda + 2)^{1/2} \delta(n_3', n_3 - 1) \right\} \\
\langle Nn_3 \Lambda | l_3 | Nn_3 \Lambda \rangle &= \Lambda
\end{aligned} \tag{3.1.11}$$

olur. $\ell_1 \pm i\ell_2$ bileşenleri yukarıdakinden ayrı olarak $\Delta N = \pm 2$ değerli ek matris elemanlara sahiptir. Fakat bunlar $\Delta N = 0$ değerli matris elemanlarına göre δ kere küçüktür. Yani küresel simetri halinde $\Delta N = \pm 2$ matris elemanları sıfır olur. Böylece yörünge açısal momentum hareket sabiti haline gelir.

3.2. Dönme Yüzünden Açısal Momentumun Yönelimi

İlk olarak, dıştan döndürülen izotropik olmayan salınıcı potansiyelinde nükleonların hareketini inceleyelim. Harmonik salınıcı potansiyeli için, hareketi salınıcı kuantaları cinsinden incelemek elverişlidir. Dönme yokluğunda asal eksenler boyunca salınımlar dikkate alınır,

$$H_0 = \sum_{k=1}^3 (C_k^+ C_k + \frac{1}{2}) \hbar \omega_k \quad (3.2.1)$$

yazılabilir. Burada C_k^+ ve C_k , k yönünde bir kuanta yaratır ve yok eder. Özdeğerler n_k kuantum sayısı cinsinden verilir.

$$E = \sum_{k=1}^3 \hbar \omega_k \sum_{k=1}^3 (n_k + \frac{1}{2}) \quad (3.2.2)$$

Spin-yörünge çiftlenimini ihmal edersek Hamiltonyen "Coriolis" terimi parçacığın yörünge açısal momentumu ile orantılı olacaktır. 1-ekseni etrafındaki dönme için

$$H_{Cor} = -\hbar \omega_{dön} \ell_1 = -\omega_{dön} (x_2 P_3 - x_3 P_2) \quad (3.2.3)$$

$$= -\hbar \omega_{dön} \left(\frac{(\omega_2 + \omega_3)}{2(\omega_2 \omega_3)^{1/2}} (C_3^+ C_2 + C_2^+ C_3) - \frac{(\omega_2 - \omega_3)}{2(\omega_2 \omega_3)^{1/2}} (C_3^+ C_2^+ + C_2 C_3) \right)$$

yazılabilir. İlk terim 3-doğrultusundan 2-doğrultusuna veya bunun zıttı kuantaya kaymasını içerir ($\Delta N = 0$). İkinci terim ise iki tane kuantaya yaratır veya yok eder ($\Delta N = 2$). Bu son etki büyük enerji paydasına $\hbar(\omega_2 + \omega_3)$ sahiptir. Bu yüzden bu terimden ileri gelen perturbasyon katkıları oranı

$$(\omega_2 - \omega_3)^2 / (\omega_2 + \omega_3)^2 = E(\Delta N=2) / E(\Delta N=0)$$

şeklindedir. 'Coriolis' teriminin $\Delta N=0$ kısmını ekleyerek elde edilen Hamiltonyen bir lineer dönüşümle köşegenleştirilebilir.

$$H = H_0 + H_{\text{Cor}} \quad (\Delta N=0) \quad (3.2.4)$$

$$C_2 = aC_\alpha + bC_\beta$$

$$C_3 = -bC_\alpha + aC_\beta \quad (a^2 + b^2 = 1)$$

Yeni salınıcı değişkenleri α ve β ile etiketlenmiştir. a ve b reel katsayıların sağladığı bağıntılar

$$2ab = p(1+p^2)^{-1/2} \quad a^2 - b^2 = (1+p^2)^{-1/2}$$

$$p \equiv \frac{2\omega_{\text{dön}}}{\omega_2 - \omega_3} \quad (3.2.5)$$

şeklinde yazılır. Böylece

$$H = H_0 - \hbar\omega_{\text{dön}} \ell_1$$

$$= (C_1^+ C_1 + \frac{1}{2}) \hbar\omega_1 + (C_\alpha^+ C_\alpha + \frac{1}{2}) \hbar\omega_\alpha + (C_\beta^+ C_\beta + \frac{1}{2}) \hbar\omega_\beta \quad (3.2.6)$$

ve

$$\omega_\alpha = \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_3) + \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_3)(1+p^2)^{+1/2} \quad (3.2.7)$$

$$\omega_\beta = \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_3) - \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_3)(1+p^2)^{+1/2}$$

elde edilir.

Dönen salınıcı potansiyeli içinde, öz durumlar dönme eksenini boyunca sıfırdan farklı yörünge açısal momentuma sahiptirler.

$$\langle \ell_1 \rangle = 2ab(n_\beta - n_\alpha) \quad (3.2.8)$$

$\omega_{\text{dön}} \gg \omega_2 - \omega_3$ limitinde α ve β kuantaları 1-doğrultusundaki açısal momentumun öz durumları olur. Özdeğerler sırasıyla $-\hbar$ ve $+\hbar$

olur. Yine bu limitte ω_α ve ω_β frekansları $\frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_3) \pm \omega_{\text{dön}}$ değerlerine yaklaşır.

Dönme frekansı yavaş olarak artırılırsa, ilgili durumdaki kuantta sayısı sabit kalır. Böylece bir parçacık n_1, n_2, n_3 ilk durumunda ($\omega_{\text{dön}}=0$) ise dönen potansiyelde bu parçacık $n_1, n_\alpha=n_2, n_\beta=n_3$ durumunda olur. Benzer olarak sistem başlangıçta

$$\Sigma_k = \sum_{k=1}^A (n_k + \frac{1}{2}) \quad (3.2.9)$$

sayılarıyla belirtilen durumda ise dönme potansiyeli içinde bu sistemin toplam açısal momentumunun ortalama değeri,

$$\begin{aligned} \langle I_1 \rangle &= \langle \sum_k (l_1)_k \rangle = 2ab (\Sigma_3 - \Sigma_2) \\ &= 2ab I_{\text{max}} \quad \text{olur.} \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

Burada $I_{\text{max}} = \Sigma_3 - \Sigma_2$, I_1 in maksimum değeridir.

Çekirdek	I_{max}
8_{Be}	4
20_{Ne}	8
164_{Er}	≈ 100
238_{U}	≈ 140

Tablo 3.2.1 : (Dönme açısal momentumunun maksimum değeri, bir tek parçacığın açısal momentumunun yönelimine karşılık gelir.)

3.3. Büyük Açısal Momentumlu Durumlar

Simetrik olmayan döneç için, yüksek açısal momentumlu durumlara ait basit ve aydınlatıcı çözümler elde edilebilir. Simetrik olmayan dönecin klasik teorisinde; eğer açısal momentum

eylemsizlik momentinin en küçük veya en büyük olduğu eksen doğrultusunda ise, hareket basit bir dönme hareketine (presisyonsuz) indirgenir. Bununla ilgili olarak kuantum teorisinde de verilen bir I değerine ait en küçük (veya en büyük) enerjili durumlar I nın büyük olması limitinde basit bir yapıya sahiptirler.

Eksenler $\mathcal{I}_1 > \mathcal{I}_2 > \mathcal{I}_3$ şeklinde seçilsin. Verilen bir I için en düşük enerjili durumlar $|I_1| \approx I$ değerine sahip olurlar. Eğer $|I_1| \approx I \gg 1$ ise dalga fonksiyonunda I_1 in pozitif ve negatif işaretli bileşenlerinin çiftlenimi ihmal edilebilir ve I_1 pozitif değer olarak alınabilir. 1-eksenine dik açısal momentum bileşenleri aşağıdaki sıra-değişim bağıntısını sağlar.

$$[I_-, I_+] = 2I_1 \approx 2I \quad (I_{\pm} \equiv I_2 \pm iI_3) \quad (3.3.1)$$

Buradan görüleceği gibi bu bileşenler bozon yaratıcı ve yok edici işlemciler cinsinden aşağıdaki gibi ele alınabilir.

$$c^+ = \frac{1}{\sqrt{2I}} I_+ \quad c = \frac{1}{\sqrt{2I}} I_- \quad (3.3.2)$$

$$[c, c^+] \approx 1$$

Bu değişkenler cinsinden dönme Hamiltonyeni

$$H_{\text{dön}} = \sum_{k=1}^3 A_k I_k^2$$

$$A_k = \frac{\hbar^2}{2 \mathcal{I}_k}$$

$$H = A_1 I^2 + \frac{1}{2} (A_2 + A_3 - 2A_1) (I_2^2 + I_3^2) + \frac{1}{2} (A_2 - A_3) (I_2^2 - I_3^2)$$

$$= A_1 I^2 + H' \quad (3.3.3)$$

şeklinde yazılabilir.

Uyartma bozon sayısı n ile gösterilmiştir ve bozon vakumu ($n=0$) $I_1=I$ değerli durumdur. Her bir kuantum 1-eksenine göre -1 birim açısal momentum taşır.

Yukarıdaki Hamiltonyen bir kanonik dönüşümle köşegen hale getirilebilir. Yeni bozon değişkenleri \hat{C}^+ ve \hat{C}

$$\begin{aligned} C^+ &= x\hat{C}^+ + y\hat{C} \\ \hat{C}^+ &= xC^+ - yC \quad (x^2 - y^2 = 1) \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

olarak seçilirse Hamiltonyendeki H' terimi için

$$\begin{aligned} H' &= \hbar\omega(\hat{n} + \frac{1}{2}) \\ \hat{n} &= \hat{C}^+\hat{C} \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

elde edilir. Burada uyarılma kuantası

$$\hbar\omega = (\alpha^2 - \beta^2)^{1/2} = 2I((A_2 - A_1)(A_3 - A_1))^{1/2} \quad (3.3.6)$$

ve dönüşüm katsayıları

$$\left. \begin{array}{l} x \\ y \end{array} \right\} = \pm \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{(\alpha^2 - \beta^2)^{1/2}} \pm \frac{1}{2} \right) \right)^{1/2} \quad (3.3.7)$$

şeklindedir ve

$$\begin{aligned} H' &= \frac{1}{2}\alpha(C^+C + CC^+) + \frac{1}{2}\beta(C^+C^+ + CC) \\ &= \alpha(n + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}\beta(C^+C^+ + CC) \\ n &= C^+C \approx I - I_1 \\ \alpha &\equiv (A_2 + A_3 - 2A_1)I \\ \beta &\equiv (A_2 - A_3)I \end{aligned}$$

dir.

Böylece kararlı durumlar \hat{n} , I (ve M) kuantum sayılarıyla tanımlanır. Enerji değerleri:

$$E(\hat{n}, I) = A_1 I(I+1) + (\hat{n} + \frac{1}{2})\hbar\omega \quad (3.3.8)$$

ile verilir. \hat{n} kuantum sayısı, I doğrultusuna göre eksenlerin presisyon hareketini tanımlar. Küçük genlikler için bu hareket ω frekanslı bir harmonik salınım özelliğindedir. Bu yaklaşık çö-

zümün geçerli olabilmesi için

$$I^2 \gg \langle I_2^2 + I_3^2 \rangle = I \langle C^+ C + C C^+ \rangle \quad (3.3.9)$$

olmalıdır. Yukarıdaki ayrıntılı çözümler yerine konduğunda bu geçerlilik koşulu

$$I \gg (2\hat{n} + 1) \frac{A_2 + A_3 - 2A_1}{2(A_3 - A_1)^{1/2} (A_2 - A_1)^{1/2}} \quad (3.3.10)$$

şeklinde yazılabilir.

Üç eylemsizlik momentinin büyüklüğü aynı mertebede ise (3.3.10) koşulu $I \gg 1$ e karşılık gelir. Eğer eylemsizlik parametrelerinden biri diğer ikisinden çok büyük ($A_3 \gg A_2, A_1$) ise, yukarıda tanımlanan çiftlenime geçiş ($K=I_1 \approx I$) halinde açısal momentumun değeri $(A_3 / (A_2 - A_1))^{1/2}$ olur. Bunun yanında daha küçük I değerleri için $K=I_3 \approx 0$ olur.

3.4. Titreşimsel Genlikler

Titreşimsel modla ilgili yoğunluk değişimi, dengeden ayrılmayı temsil eden bir α genliği ile karakterize edilebilir. Bu kısımda gerçek genlikli titreşimleri gözönüne alacağız.

α nın küçük değerleri için titreşimsel enerji α ile $\dot{\alpha}$ nın kuvvetleri cinsinden ifade edilebilir. İlk mertebe olarak

$$E(\alpha, \dot{\alpha}) = \frac{1}{2} C \alpha^2 + \frac{1}{2} D \dot{\alpha}^2 \quad (3.4.1)$$

yazılabilir. Bu ifade harmonik salıncıyı ifade etmektedir. İlk terim bozulmanın v potansiyel enerjisidir. C katsayısı geri çağırıcı kuvvet sabiti olmaktadır. İkinci terim T kinetik enerjisidir. D katsayısı kütle parametresi olarak adlandırılır. Momentum değişkeni olarak

$$\pi = \frac{\partial}{\partial \dot{\alpha}} (T-v) = D\dot{\alpha} \quad (3.4.2)$$

tanımlanırsa, Hamiltonyen için

$$H = \frac{1}{2} D^{-1} \pi^2 + \frac{1}{2} C\alpha^2 \quad (3.4.3)$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadeler klasik harmonik salınıcı ifadeleri ile aynıdır. Kuantal sisteme geçildiğinde α ve π hermityen işlemcileri

$$[\pi, \alpha] = -i\hbar \quad (3.4.4)$$

sıra-değişim bağıntısını sağlarlar. Enerji spektrumu da çok iyi bilinen

$$E(n) = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega \quad (3.4.5)$$

ifadesi ile verilir. Buradaki klasik frekans

$$\omega = (C/D)^{1/2} \quad (3.4.6)$$

ile verilir. Titreşimsel dalga fonksiyonları

$$\psi_n(\alpha) = (2\pi)^{1/4} (2^n n! \alpha_0)^{-1/2} H_n(2^{-1/2} \frac{\alpha}{\alpha_0}) \exp\{-\frac{1}{4} \frac{\alpha^2}{\alpha_0^2}\} \quad (3.4.7)$$

şeklindedir. Bu ifadede H_n , n inci dereceden Hermite polinomudur. ($H_0(x)=1, H_1(x)=2x, H_2(x)=4x^2-2, \dots$).

Sıfır nokta genliği

$$\begin{aligned} \alpha_0 &\equiv \langle n=0 | \alpha^2 | n=0 \rangle^{1/2} = \langle n=1 | \alpha | n=0 \rangle \\ &= (\frac{\hbar}{2D\omega})^{1/2} = (\frac{\hbar\omega}{2C})^{1/2} = (\frac{\hbar^2}{4CD})^{1/4} \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

olur.

α , π değişkenlerinden C^+ , C değişkenlerine dönüşüm ifadeleri

$$\alpha = \alpha_0 (C^+ + C)$$

$$\pi = \frac{i\hbar}{2\alpha_0} (C^+ - C) \quad (3.4.9)$$

$$C^+ = \frac{1}{2\alpha_0} \alpha - \frac{i\alpha_0}{\hbar} \pi = \frac{1}{2\alpha_0} \left(\alpha - \frac{i\hbar}{\omega} \dot{\alpha} \right)$$

ile verilir. Bu dönüşümler α ve π nin pozitif ve negatif frekans kısımlarına ayrıştırılmasına karşılık gelir.

Yeni değişkenler C, C^+

$$[C, C^+] = 1 \quad (3.4.10)$$

sıra-değişim bağıntısını sağlar. Yani C^+ ve C sırasıyla bozon yaratıcı ve yok edici işlemcilerdir. Kuantal sayısı

$$n_{i\hbar} = C^+ C \quad (3.4.11)$$

işlemcisi ile temsil edilirse bu işlemcinin özvektörleri ortak özvektör olarak alınabilir. n tane kuantalı durum

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (C^+)^n |0\rangle \quad (3.4.12)$$

ile verilir. $|0\rangle$ durumu "vakum" durumudur.

Ayrıca

$$\begin{aligned} C^+ |n\rangle &= \sqrt{n+1} |n+1\rangle \\ C |n\rangle &= \sqrt{n} |n-1\rangle \end{aligned} \quad (3.4.13)$$

bağıntıları geçerlidir. Yeni değişkenler cinsinden Hamiltonyen

$$H = \hbar\omega C^+ C + E(n=0) \quad (3.4.14)$$

şeklindedir.

BÖLÜM 4
ELLIOTT MODELİ

4.1. Kuadrupol Etkileşmesi

Tam çözümü olan basitleştirilmiş bir etkileşmeyi gözönüne alalım. Örneğin, verilen bir ana tabakada n tane parçacık problemine ait

$$V_{ij} = -k \sum_{i,j} r_i^2 r_j^2 Y_2^m(\theta_i, \phi_i) Y_2^{-m}(\theta_j, \phi_j) \quad (4.1.1)$$

potansiyelini inceleyelim. Bu üç boyutlu potansiyelin çözümü uzun ve karmaşık olduğundan iki boyutlu özel hale ait problemi ele alalım.

İki boyutlu harmonik salıncı potansiyeli içinde hareket eden parçacıklar sisteminin Hamiltonyeni

$$H = H_0 + \sum_{i,j} V_{ij} \quad (4.1.2)$$

olsun. Burada

$$H_0 = \sum_i \left\{ \frac{P_{x_i}^2}{2m} + \frac{P_{y_i}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 (x_i^2 + y_i^2) \right\} \quad (4.1.3)$$

ve

$$V_{ij} = -k(\vec{q}_i \cdot \vec{q}_j) \quad (4.1.4)$$

ile verilmektedir. Burada \vec{q}_i vektörü i . parçacığın kuadrupol momentidir. Bunun bileşenleri

$$q_{1i} = x_i^2 - y_i^2, \quad q_{2i} = 2x_i y_i \quad (4.1.5)$$

dir.

Standart tabaka modeli hesaplamalarında farklı tabaka şekillenimlerinin karışması ihmal edilir. Yani V_{ij} etkileşmesinin farklı ana tabakalar arasındaki matris elemanları ihmal edilir.

Yukarıdaki harmonik salıncı ve Kuadrupol-Kuadrupol kuvveti halinde bu ihmal ediş analitik olarak sağlanır. Bunun için momentum uzayına ve konum uzayına ait momentlerin lineer karışımını

almak gerekir. Böylece aşağıdaki tanımları yapalım.

$$t_{1i} = \frac{m\omega}{4\hbar}(x_i^2 - y_i^2) + \frac{1}{4m\omega\hbar}(P_{x_i}^2 - P_{y_i}^2) \quad (4.1.6)$$

$$t_{2i} = \frac{m\omega}{2\hbar}x_i y_i + \frac{1}{2m\omega\hbar} P_{x_i} P_{y_i}$$

Verilen bir salınıcı ana tabakasının içinde kalındığı sürece t_{1i} ve t_{2i} 'nin matris elemanları ile q_{1i} ve q_{2i} 'nin matris elemanlarının aynı olduğu gösterilebilir. Ayrıca bu t-işlemcilerinin farklı ana tabakalar arasındaki matris elemanları (tam olarak) sıfırdır. O halde bir ana tabaka içindeki kuadrupol etkileşmesini

$$V_{ij} = -k(t_{1i}t_{1j} + t_{2i}t_{2j}) \quad (4.1.7)$$

şeklinde yazabiliriz. Şimdi

$$t_{oi} = \frac{1}{2}(x_i P_{y_i} - y_i P_{x_i}) = \frac{1}{2} L_i \quad (4.1.8)$$

işlemcisini tanımlayalım. Burada L_i işlemcisi i. parçacığın bu iki boyutlu uzaydaki açısal momentumudur. t_{1i}, t_{2i} ve t_{oi} işlemcileri açısal momentum sıra-değişim bağıntılarına benzer bağıntıları sağlarlar.

$$[t_{1i}, t_{2i}] = it_{oi}, [t_{2i}, t_{oi}] = it_{1i}, [t_{oi}, t_{1i}] = it_{2i} \quad (4.1.9)$$

Bu işlemcilerden faydalanarak,

$$T_1 = \sum_i t_{1i}, T_2 = \sum_i t_{2i}, T_o = \sum_i t_{oi} = \frac{1}{2} L \quad (4.1.10)$$

toplam işlemcilerini tanımlayalım. Burada L sistemin toplam açısal momentumudur. Ayrıca,

$$t_i^2 = t_{1i}^2 + t_{2i}^2 + t_{oi}^2, T^2 = T_1^2 + T_2^2 + T_o^2 \quad (4.1.11)$$

şeklindedir. Bu t-işlemcileri yapay bir üç boyutlu uzayda açısal momentum işlemcileri gibi davranmaktadır. Bu işlemciler H_o ile sıra-değişimli olduğuna göre iki boyutlu salınıcı durumları bu işlemcilerin özdeğerleri ile ilgili kuantum sayıları tarafından tanımlanabilir.

Toplam kuadrupol etkileşmesi yukarıdaki V_{ij} ifadesinin tüm parçacık çiftleri üzerine toplamı alınarak bulunabilir. Bu modelde $i=j$ ye ait terimi de eklemek gelenektir. Bu terim bir parçacık salınıcı potansiyelinin bir miktar düzeltilmesine eşdeğerdir. Eklenen terimle birlikte toplam kuadrupol etkileşmesi T işlemcileri cinsinden

$$\sum_{i,j} V_{ij} = -\frac{1}{2}k (T_1^2 + T_2^2) = -\frac{1}{2}k (T^2 - T_0^2) \quad (4.1.12)$$

şeklinde basitçe ifade edilebilir.

4.2. Durumların Tanımlanması

H_0 ile gösterimde, iki boyutlu harmonik salınıcı potansiyeli içindeki bir parçacığın durumlarını n_x ve n_y kuantum sayılarının değerlerini belirterek tanımlayabiliriz.

n_x ve n_y sırasıyla x ve y doğrultusundaki kuantum (tane) sayılarını göstermektedir. Enerji ifadesi de

$$E_0 = \hbar \omega (n_x + n_y + 1) \quad (4.2.1)$$

ile verilir.

Görüldüğü gibi enerji sadece $n=n_x+n_y$ toplamına bağlıdır. Bu iki serbestlik derecesi silindirik koordinatlarda da ayrılabilir. Silindirik koordinatlarda durumları n ve ℓ kuantum sayıları ile tanımlayabiliriz. Buradaki ℓ açısal momentumu gösterir. Yukarıdaki (4.1.8) işlemcisinin özdeğerleridir. Bu temsilde, verilen bir n değerine ait aynı enerjili $n+1$ tane farklı ℓ değerine karşılık gelen durum vardır.

Durumlar ayrıca t^2 ve t_0 işlemcilerinin özdeğerleri ile de tanımlanabilir. $1/2$ çarpanı dışında, bu işlemciler açısal momentum işlemcileri gibi davranır. Böylece t^2 nin özdeğerleri $t(t+1)$ şeklinde yazılabilir. Burada t hem tamsayı hem de yarı tamsayı değerlerini alabilir. t 'nin her bir değeri için $t_0=t, t-1, \dots, -t$ değerlerine karşılık gelen $2t+1$ tane durum vardır. Bu tanımlama silindirik gösterime eşdeğerdir. Öyleki (t, t_0) kuantum sayıları ile (n, ℓ) kuantum sayıları arasındaki bağıntı

$$t = \frac{1}{2} n \quad , \quad t_0 = \frac{1}{2} \ell$$

ile verilmektedir.

(3,0)	_____	(3,3)	(3/2, 3/2)
(2,1)	_____	(3,1)	(3/2, 1/2)
(1,2)	_____	(3,-1)	(3/2, -1/2)
(0,3)	_____	(3,-3)	(3/2, -3/2)
(2,0)	_____	(2,2)	(1,1)
(1,1)	_____	(2,0)	(1,0)
(0,2)	_____	(2,-2)	(1,-1)
(1,0)	_____	(1,1)	(1/2, 1/2)
(0,1)	_____	(1,-1)	(1/2, -1/2)
(0,0)	_____	(0,0)	(0,0)
(n_x, n_y)		(n, ℓ)	(t, t_0)

Şek. 4.1: İki boyutlu harmonik salıncı kuyusunda bir parçacık enerji seviyeleri. Sol taraftaki etiketleme, sağ taraftaki etiketlemeye karşılık gelmemektedir. Örneğin: $(n, \ell) = (2, 2)$ durumu sol taraftaki üç durumun lineer karışımıdır.

Şekilde iki boyutlu harmonik salıncı kuyusunda bir parçacık enerji seviyeleri gösterilmektedir. Yapay açısal momentum t 'nin hem integral ve hem de yarı integral değerler aldığı görülmektedir. Dikkat edilirse t kuantum sayısı ana tabakayı etiketlemektedir.

Şimdi en düşük ana tabakaların dolu olduğu ve son dolmamış tabakada belli sayıda parçacığın bulunduğu çok parçacıklı sistemi inceleyelim. Dolmamış tabakadaki parçacıkların tümü aynı t kuantum sayısına sahip durumlarda bulunmaktadır. Bu durumların sadece t_0 değerleri farklıdır. Bu hal, üç boyutlu küresel simetrik tabaka

modelindeki j^n şekillenimine tam olarak benzemektedir. Etkileşmenin yokluğunda (parçacıklar etkileşmiyor kabul edilirse) farklı t_0 değerlerine sahip durumların yozlaşması ile ilgili olan bir yozlaşma vardır. Küresel tabaka modelinde yozlaşmayı kaldırmak üzere ek etkileşme de gözönüne alındığı zaman, uygun özfonksiyonlar belli bir J toplam açısai momentumuna sahip olan fonksiyonlardır. Bu özfonksiyonlar her bir parçacığın açısai momentumunun birleşerek toplam J yi verecek şekilde çiftlenmesi ile oluşturulur. Ele aldığımız iki boyutlu modelde, iki cisim kuadrupol kuvvetinin yapay toplam açısai momentum T^2 ile sıra-değişimli olduğunu biliyoruz. Bilinen açısai momentuma benzeterek, harmonik salınıcı Hamiltonyeni ve kuadrupol etkileşmesinin ortak özfonksiyonlarını oluşturabiliriz. Bunun için parçacıkların yapay açısai momentumlarını birleştirerek T^2 ve T_0 işlemcilerinin özfonksiyonlarını oluştururuz.

Kuadrupol kuvveti ile ilgili etkileşme enerjisi T^2 ve T_0 değerleri cinsinden (4.1.12) ifadesi ile verilmektedir. Normal açısai momentumda olduğu gibi T^2 nin özdeğerleri $T(T+1)$ şeklindedir. Burada T yarı tamsayı değerlerini de alabilir. Her bir T değeri için $T_0 = T, T-1, \dots, -T$ değerlerine sahip $2T+1$ tane durum vardır. Denklem (4.1.12) de görülmektedir ki aynı T ve farklı T_0 değerlerine sahip durumlar bir band oluşturur. Bu band içindeki bireylerin enerjisi $\frac{1}{2}kT_0^2$ ile orantılıdır. Bir başka deyişle (4.1.10) dan görüleceği gibi açısai momentumun karesi ile orantılıdır.

Farklı T değerleri, farklı bantları gösterir. k pozitif ise en küçük t değeri en düşük bantı vermektedir.

Şek. 4.1 de gösterilen çeşitli durumların elde edilmesi aşağıdaki gibi yazılabilir. Eğer bir parçacık için harmonik salınıcı taban durumunu $|0\rangle$ ile gösterirsek çeşitli (n_x, n_y) durumlarını bulmak kolaylaşır.

$$|0\rangle = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} e^{-1/2(x^2+y^2)/a^2} \quad (4.2.2)$$

Tanım olarak

$$a_x^+ = (P_x + im\omega x) / \sqrt{2m\hbar\omega}, \quad a_y^+ = (P_y + im\omega y) / \sqrt{2m\hbar\omega} \quad (4.2.3)$$

işlemcilerini ve bunların hermityen eşlenikleri a_x ve a_y 'yi ele alalım. Bunlar arasındaki sıra-değişim bağıntıları

$$a_x a_x^+ - a_x^+ a_x = 1, \quad a_y a_y^+ - a_y^+ a_y = 1, \quad a_x a_y^+ - a_y^+ a_x = 0 \quad (4.2.4)$$

ile verilir.

Bu bağıntılardan görüldüğü gibi a_x^+ ve a_x işlemcileri bozonlar için sırasıyla yaratıcı ve yok edici işlemcilerdir. Yani harmonik salınıcıya ait kuantal bozon gibi davranır.

Şimdi (n_x, n_y) durumu aşağıdaki gibi oluşturulabilir.

$$(n_x, n_y) = N (a_x^+)^{n_x} (a_y^+)^{n_y} |0\rangle \quad (4.2.5)$$

Burada N sayısı kolayca hesaplanabilen normalizasyon katsayısıdır.

Silindirik temsildeki (n, ℓ) durumları için

$$a_+^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_x^+ + ia_y^+) , \quad a_-^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_x^+ - ia_y^+) \quad (4.2.6)$$

$$n = a_+^{\dagger} a_+ + a_-^{\dagger} a_- , \quad \ell = a_+^{\dagger} a_+ - a_-^{\dagger} a_- \quad (4.2.7)$$

yazılır. Yani (+) doğrultusundaki kuantal sayısı ile (-) doğrultusundaki kuantal sayısı arasındaki fark ℓ ye eşittir. Her iki doğrultudaki kuantal sayılarının toplamı n yi verir.

Diğer işlemcilerde

$$t_1 = \frac{1}{2} [a_x^+ a_x - a_y^+ a_y] = \frac{1}{2} [a_-^{\dagger} a_+ + a_+^{\dagger} a_-] \quad (4.2.8)$$

$$t_2 = \frac{1}{2} [a_x^+ a_y + a_y^+ a_x] = \frac{1}{2} i [a_-^{\dagger} a_+ - a_+^{\dagger} a_-]$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$t_1 + it_2 = a_+^{\dagger} a_- , \quad t_1 - it_2 = a_-^{\dagger} a_+ \quad (4.2.9)$$

yükseltici ve alçaltıcı işlemcileri tanımlanabilir. $t_1 + it_2$ işlemcisi açısal momentumu -1 olan durumu yok etmekte ve açısal momentumu $+1$ olan durumu yaratmaktadır. Böylece T_0, T_1, T_2 işlemcileri

$$T_0 = \sum_i t_{0i} = \frac{1}{2} \sum_i (a_{+i}^\dagger a_{+i} - a_{-i}^\dagger a_{-i}), \text{ v.s.} \quad (4.2.10)$$

şeklinde elde edilir.

Kuanta sayısı n ve açısal momentumu ℓ olan bir parçacık durumları

$$(n, \ell) = N (a_+^\dagger)^{\frac{1}{2}(n+\ell)} (a_-^\dagger)^{\frac{1}{2}(n-\ell)} |0\rangle \quad (4.2.11)$$

şeklinde oluşturulur. Burada $(n-\ell)$ daha önce belirtildiği gibi çift sayıdır. Bu şekilde verilen bir n değerine $(t=\frac{1}{2}n)$ karşılık gelen tüm $2t+1$ tane durum elde edilebilir.

Bu iki boyutlu harmonik salıncı için elde ettiğimiz sonuçlar üç boyutlu hale genelleştirilebilir. Üç boyutlu halde yaratıcı işlemciler, a_x^+ , a_y^+ , a_z^+ olur. Ayrıca $a_0^+ = a_z^+$ olmak üzere

$$n = a_x^+ a_x + a_y^+ a_y + a_z^+ a_z = a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_- + a_0^\dagger a_0 \quad (4.2.12)$$

yazılabilir. Bu halde a_\pm^\dagger işlemcileri açısal momentum izdüşümü ± 1 olan kuanta yaratırlar ve a_0^\dagger işlemcisi de izdüşümü 0 olan kuanta yaratır.

KAYNAKLAR

1. BOHR, A., MOTTELSON, B.R. (1969), Nuclear Structure, Volume I, W.A. Benjamin, Inc.
2. BOHR, A., MOTTELSON, B.R. (1975), Nuclear Structure, Volume II, W.A. Benjamin Inc.
3. BROWN, G.E. (1971), Unified Theory of Nuclear Models and Forces, North-Holland, American Elsevier.
4. EISENBERG, M.J., GREINER, W., (1975) Nuclear Models, North-Holland, American Elsevier.
5. GOLDSTEIN, H. (1962), Classical Mechanics, Addison-Wesley Publ., Company , Inc., Reading, Massachusetts.
6. NIGAM, B.P., ROY, R.R., (1967), Nuclear Physics, John Wiley Sons, Inc.