337

KARADENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

FUZZY KÜMELERİ VE FUZZY TOPOLOJİK UZAYLARI

Haskız CİNEMRE

Yönetici : Doç.Dr.Ali BÜLBÜL

TRABZON

HAZİRAN 1986

Bu çalışmayı bana öneren ve yöneten, çalışmam sırasında her türlü yardımlarını esirgemeyen Sayın Hocam Doç.Dr. Ali BÜLBÜL ' e minnet ve şükranlarımı arzederim.

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ

Bu çalışmada " Fuzzy kümeleri " ve " Fuzzy topolojik uzayları " ile ilgili temel bilgiler bu konularla ilgili ilk ve orijinal kaynaklardan derlenerek sunulmaya çalışılmıştır.

Bazı objelerin bazı kümelere " ait olması " kavramında ortaya çıkan belirsizlikler " objelerin kümelere ait olması " kavramının derecelendirilmesi gereğini ortaya koymuştur. Örneğin; virüs gibi bazı varlıkların özellikleri nedeniyle canlı - , yoksa cansız varlıklar kümesine mi ait olduğu ; ya da deniz yıldızı gibi bazı varlıkların bitki - , yoksa hayvanlar kümesine mi ait olduğu konusunda ki belirsizlik gibi.Aynı şekilde 1 den çok büyük sayılar kümesini göz önüne alalım.2,10,100,500 sayılarının herbiri bu kümeye aittir.Ancak bu sayıların 1 e göre büyüklükleri arasındaki fark nedeniyle bunların bu kümeye ait olmalarının da farklı olarak değerlendirilmesi, bir anlamda " ait olmanın " derecelendirilmesinin gerçeği daha iyi yansıtacağı düşüncesi L.A.ZADEH ([6],1965)i "Fuzz kümesi " kavramının tanımına götürmüştür.

Beş bölüm halinde düzenlenen çalışmamızın birinci bölümünde ZADEH'in yukarıda sözü edilen 1965 yılındaki çalışmasından fuzzy kümelerinin tanımı ve başlıca özellikleri ile ilgili bilgiler verilmiştir.

"Fuzzy topolojik uzayı " kavramı ilk kez C.L.CHANG ([1],196 tarafından tanımlanmıştır.İkinci bölüm CHANG'ın bu çalışmasına ayrılmıştır.CHANG bu çalışmasında fuzzy topolojik uzayından başka fuzzy topolojik uzaylarındaki yakınsaklık,süreklilik ve kompaktlık gibi bazı temel topolojik kavramların da ilk tanımlarını vermiştir.

Üç ve dördüncü bölümlerde C.K.WONG ([4],[5]) un fuzzy topolojik uzayları ile ilgili diğer bir takım bilgilerin verildiği çalışmaları incelenmiştir.Üçüncü bölümde baz kavramı ve buna bağlı olarak bazı sayılabilirlik özellikleri ; dördüncü bölümde ise fuzzy çarpım - ve bölüm uzaylarının bazı temel özellikleri incelenmiştir.

Son bölümde de fuzzy noktası kavramı tanıtıldıktan sonra Fuzzy Hausdorff uzayı ve bu uzay ile ilgili bir teorem verilmiştir.

BÖLÜM I
FUZZY KÜMELERİ

Tanım I.1 [6] X bir nokta kümesi olsun. X den [0,1] kapalı aralığına tanımlanan her fonksiyona X de bir "fuzzy kümesi" denir. Şu halde bir A fuzzy kümesi; $\mu_A : X \longrightarrow [0,1]$ şeklindeki bir fonksiyon ile tanımlanır. Buradaki μ_A fonksiyonuna A fuzzy kümesinin "üyelik fonksiyonu" ve $x \in X$ olmak üzere $\mu_A(x)$ değerine de x noktasının A fuzzy kümesine "üyelik derecesi" denir.

Xin herhangi bir $A \subset X$ alt kümesi, üyelik fonksiyonu A nın karakteristik fonksiyonu

$$\chi_A : X \longrightarrow [0,1] \; , \; \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

olan bir fuzzy kümesi olarak gözönüne alınabilir.

Adi kümelerde olduğu gibi fuzzy kümelerinde de boş fuzzy kümesi, iki fuzzy kümesinin eşitliği ve bir fuzzy kümesinin bütünleyeni gibi tanımlar verilebilir.

Tanım I.2 [6] X bir küme olsun.

a) Üyelik fonksiyonu X üzerinde özdeş olarak sıfır olan fuzzy kümesine "boş fuzzy kümesi " denir ve " $\emptyset$ " ile gösterilir.

b) A ve B X de iki fuzzy kümesi olsun. Xin her noktasında A ve B nin üyelik fonksiyonlarının değerleri birbirine eşitse A ve B fuzzy kümeleri birbirine eşittir denir ve A=B şeklinde yazılır. Kısaca:

$$A = B :\Longleftrightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x) \qquad (\forall x \in X)$$

ile tanımlanır.

c) A nın bütünleyeni A' ile gösterilir ve

$$\mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x) \qquad (\forall x \in X)$$

fonksiyonu ile tanımlanır.

d) Her $x \in X$ için $\mu_A(x) \leqslant \mu_B(x)$ ise A ya B nin alt kümesidir denir ve $A \subset B$ şeklinde yazılır. Kısaca :

$$A \subset B :\Longleftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \qquad (\forall x \in X)$$

ile tanımlanır.

e) A ve B nin birleşimi

$$\mu_{A \cup B}(x) = \text{maks}\,[\mu_A(x)\ \mu_B(x)] \qquad (\forall x \in X)$$

fonksiyonu ile tanımlanır ve $A \cup B$ ile gösterilir. Daha genel olarak fuzzy kümelerinin bir $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in I\}$ ailesi için birleşim;

$$\mu_{\bigcup_{i \in I} A_i}(x) = \sup_{i \in I} \{\mu_{A_i}(x)\} \qquad (\forall x \in X)$$

fonsiyonu ile tanımlanır ve $\bigcup_{i \in I} A_i$ ile gösterilir.

f) A ve B nin kesişimi

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min[\mu_A(x), \mu_B(x)] \qquad (\forall x \in X)$$

fonksiyonu ile tanımlanır ve $A \cap B$ ile gösterilir. Daha genel olarak fuzzy kümelerinin bir $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in I\}$ ailesi için kesişim;

$$\mu_{\bigcap_{i \in I} A_i}(x) = \inf_{i \in I} \{\mu_{A_i}(x)\} \qquad (\forall x \in X)$$

fonksiyonu ile tanımlanır ve $\bigcap_{i \in I} A_i$ ile gösterilir.

g) Bir fuzzy kümesinin üyelik fonksiyonu X in her noktasında 1 değerini alıyorsa bu fuzzy kümesi X ile gösterilecektir.

Uyarı I.1. Yukarıdaki tanımlarda iki fuzzy kümesinin birleşiminin de bir fuzzy kümesi olduğunu söyledik. Gerçekten;
fuzzy kümeleri X den $[0,1]$ kapalı aralığına fonksiyonlarla tanımlandığından üyelik fonksiyonları X in her noktası için $[0,1]$ kapa-

lı aralığında bir değer alır. $[0,1]$ kapalı aralık olduğu için bu değerlerin supremumunu da içerecektir.Yani birleşimin tanımlandığı üyelik fonksiyonu da X den $[0,1]$ kapalı aralığına bir fonksiyon olacağından, birleşim de bir fuzzy kümesidir.Benzer düşünceyle fuzzy kümelerinin kesişimi de bir fuzzy kümesidir,çünkü kapalı aralık infimumunu içerir.

Önerme: I.1. [6] a) $A \cup B$, hem A ve hem de B yi içeren en küçük fuzzy kümesidir.

b) $A \cap B$ hem A da ve hem B de bulunan en büyük fuzzy kümesidir.

Ispat : a) C , $A \cup B$ yi içeren başka bir fuzzy kümesi olsun .

$A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$, $A \subset C$ ve $B \subset C$ ise $A \cup B \subset C$ olduğunu göstermek yeter.

Her $x \in X$ için

$$\text{maks}\left[\mu_A(x), \mu_B(x)\right] \geq \mu_A(x) \Longrightarrow A \subset A \cup B$$

$$\text{maks}\left[\mu_A(x), \mu_B(x)\right] \geq \mu_B(x) \Longrightarrow B \subset A \cup B.$$

$$A \subset C \Longrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_C(x), \quad B \subset C \Longrightarrow \mu_B(x) \leq \mu_C(x)$$

$$\Longrightarrow \text{maks}\left[\mu_A(x), \mu_B(x)\right] \leq \mu_C(x) \Longrightarrow \mu_{A \cup B}(x) \leq \mu_C(x)$$

$$\Longrightarrow A \cup B \subset C.$$

b) C , A da ve B de bulunan başka bir fuzzy kümesi olsun.

$A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$, $C \subset A$ ve $C \subset B$ ise $C \subset A \cap B$ olduğunu göstermek yeter.

Her $x \in X$ için

$$\min\left[\mu_A(x), \mu_B(x)\right] \leq \mu_A(x) \Longrightarrow \mu_{A \cap B}(x) \leq \mu_A(x) \Longrightarrow A \cap B \subset A$$

$$\min[\mu_A(x), \mu_B(x)] \leq \mu_B(x) \Longrightarrow \mu_{A\cap B}(x) \leq \mu_B(x) \Longrightarrow A\cap B \subset B$$

$$C\subset A \Longrightarrow \mu_C(x) \leq \mu_A(x) \quad \text{ve} \quad C\subset B \Longrightarrow \mu_C(x) \leq \mu_B(x)$$

$$\Longrightarrow \mu_C(x) \leq \min[\mu_A(x), \mu_B(x)] = \mu_{A\cap B}(x) \Longrightarrow C\subset A\cap B. \bullet$$

<u>Önerme I.2</u> [6] A , B , C fuzzy kümeleri olmak üzere

a) $A\cup(B\cup C) = (A\cup B)\cup C$

b) $A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C$
dir.
<u>Ispat:</u> Önce A , B , C , nin üyelik fonksiyonlarının tüm mümkün durumlarını yazalım.
Her $x\in X$ için

i) $\mu_A(x) < \mu_B(x) < \mu_C(x)$

ii) $\mu_A(x) < \mu_C(x) < \mu_B(x)$

iii) $\mu_B(x) < \mu_A(x) < \mu_C(x)$

iv) $\mu_B(x) < \mu_C(x) < \mu_A(x)$

v) $\mu_C(x) < \mu_A(x) < \mu_B(x)$

vi) $\mu_C(x) < \mu_B(x) < \mu_A(x)$

durumları söz konusudur. Bu durumları tek tek inceleyerek önermeyi ıspatlayalım.

a) $A\cup(B\cup C) := D$, $(A\cup B)\cup C := E$ olsun. Her $x\in X$ için

$$\mu_D(x) = \text{maks}\ [\mu_A(x)\ ,\ \text{maks}\ [\mu_B(x),\ \mu_C(x)]]$$

$$\mu_E(x) = \text{maks}\ [\ \text{maks}\ [\mu_A(x)\ ,\ \mu_B(x)\ ]\ ,\ \mu_C(x)]$$

olur.

i) durumu için $\mu_D(x) = \mu_C(x)$, $\mu_E(x) = \mu_C(x)$

ii) " " $\mu_D(x) = \mu_B(x)$, $\mu_E(x) = \mu_B(x)$

iii) " " $\mu_D(x) = \mu_C(x)$, $\mu_E(x) = \mu_C(x)$

iv) " " $\mu_D(x) = \mu_A(x)$, $\mu_E(x) = \mu_A(x)$

v) " " $\mu_D(x) = \mu_B(x)$, $\mu_E(x) = \mu_B(x)$

vi) " " $\mu_D(x) = \mu_A(x)$, $\mu_E(x) = \mu_A(x)$.

Her $x \in X$ için

$$\mu_D(x) = \mu_E(x) \Longrightarrow D = E$$

yani,

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

dir.

b) $A \cap (B \cap C) := F$, $(A \cap B) \cap C := G$ olsun Her $x \in X$ için

$$\mu_F(x) = \min\ [\mu_A(x),\ \min\ [\mu_B(x)\ ,\ \mu_C(x)]]$$

$$\mu_G(x)=\min\left[\min\left[\mu_A(x),\ \mu_B(x)\right],\ \mu_C(x)\right]$$

olur.

i) durumu için $\mu_F(x) = \mu_A(x)$, $\mu_G(x) = \mu_A(x)$

ii) " " $\mu_F(x) = \mu_A(x)$, $\mu_G(x) = \mu_A(x)$

iii) " " $\mu_F(x) = \mu_B(x)$, $\mu_G(x) = \mu_B(x)$

IV) " " $\mu_F(x) = \mu_B(x)$, $\mu_G(x) = \mu_B(x)$

V) " " $\mu_F(x) = \mu_C(x)$, $\mu_G(x) = \mu_C(x)$

Vİ) " " $\mu_F(x) = \mu_C(x)$, $\mu_G(x) = \mu_C(x)$.

Her $x \in X$ için

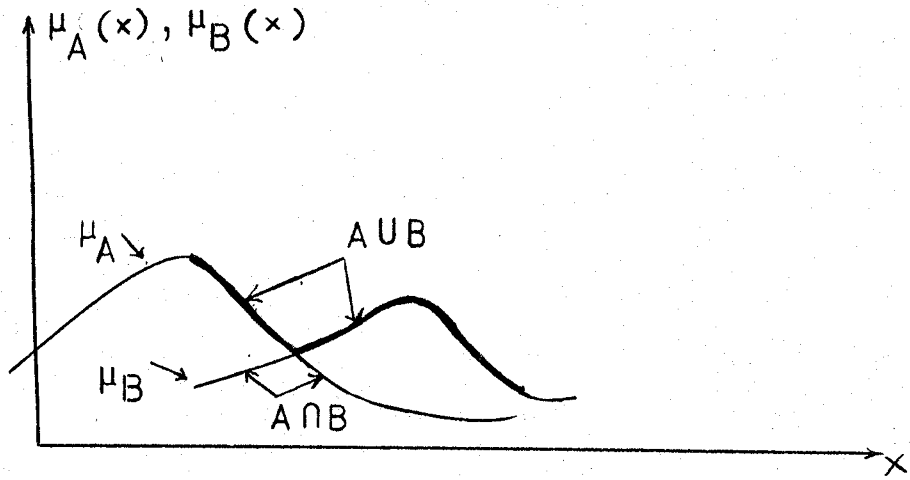
$$\mu_F(x) = \mu_G(x) \Longrightarrow F=G$$

yani,

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C. \bullet$$

Adi kümelerde olduğu gibi fuzzy kümelerinde de $A \cap B = \emptyset$ ise A ve B ye " ayrık fuzzy kümeleri " denir,

$\mathbb{R}^1$ de iki fuzzy kümesinin birleşim ve kesişimi aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



Önerme I.3 [6] A,B,C üyelik fonksiyonları μ_A , μ_B , μ_C olan fuzzy kümeleri olmak üzere

a) $(A\cup B)' = A'\cap B'$

b) $(A\cap B)' = A'\cup B'$

c) $C\cap(A\cup B) = (C\cap A)\cup(C\cap B)$

d) $C\cup(A\cap B) = (C\cup A)\cap(C\cup B)$

dır.
a)veb) ye "De Morgan"; c)ve d) ye "distrübitif" kuralları denir.

Ispat a) $(A\cup B)' := C$, $(A'\cap B') := D$ olsun. Her $x\in X$ için

$$\mu_C(x) = 1\text{-maks}\ [\ \mu_A(x),\ \mu_B(x)\ ]$$

$$\mu_D(x) = \min\ [1-\mu_A(x),\ 1-\mu_B(x)\ ]$$

$$\mu_A(x) < \mu_B(x) \Longrightarrow \mu_C(x) = 1-\mu_B(x),\ \mu_D(x) = 1-\mu_B(x)$$

$$\mu_A(x) > \mu_B(x) \Longrightarrow \mu_C(x) = 1-\mu_A(x),\ \mu_D(x) = 1-\mu_A(x)$$

Her $x \in X$ için

$$\mu_C(x) = \mu_D(x) \Longrightarrow C = D$$

yani,

$(A \cup B)' = (A' \cap B')$.

b) $(A \cap B)' := E, (A' \cup B') := F$ olsun. Her $x \in X$ için

$$\mu_E(x) = 1 - \min\left[\mu_A(x), \mu_B(x)\right]$$

$$\mu_F(x) = \text{maks}\left[1 - \mu_A(x), 1 - \mu_B(x)\right]$$

$$\mu_A(x) < \mu_B(x) \Longrightarrow \mu_E(x) = 1 - \mu_A(x),\ \mu_F(x) = 1 - \mu_A(x)$$

$$\mu_A(x) > \mu_B(x) \Longrightarrow \mu_E(x) = 1 - \mu_B(x),\ \mu_F(x) = 1 - \mu_B(x)$$

Her $x \in X$ için

$$\mu_E(x) = \mu_F(x) \Longrightarrow E = F$$

yani,

$(A \cap B)' = A' \cup B'$.

c) Önce A,B,C nin üyelik fonksiyonlarının tüm mümkün durumlarını yazalım. Her $x \in X$ için

i) $\mu_A(x) < \mu_B(x) < \mu_C(x)$

ii) $\mu_A(x) < \mu_C(x) < \mu_B(x)$

iii) $\mu_B(x) < \mu_A(x) < \mu_C(x)$

IV) $\mu_B(x) < \mu_C(x) < \mu_A(x)$

V) $\mu_C(x) < \mu_A(x) < \mu_B(x)$

VI) $\mu_C(x) < \mu_B(x) < \mu_A(x)$

durumları söz konusudur.

$C\cap(A\cup B):=D$, $(C\cap A)\cup(C\cap B):=E$ olsun. Her $x\in X$ için

$$\mu_D(x)=\min\left[\mu_C(x),\text{maks}\left[\mu_A(x),\mu_B(x)\right]\right]$$

$$\mu_E(x)=\text{maks}\left[\min\left[\mu_C(x),\mu_A(x)\right],\min\left[\mu_C(x),\mu_B(x)\right]\right]$$

i)durumu için $\mu_D(x)=\mu_B(x)$, $\mu_E(x)=\mu_B(x)$

ii) " " $\mu_D(x)=\mu_C(x)$, $\mu_E(x)=\mu_C(x)$

iii) " " $\mu_D(x)=\mu_A(x)$, $\mu_E(x)=\mu_A(x)$

IV) " " $\mu_D(x)=\mu_C(x)$, $\mu_E(x)=\mu_C(x)$

V) " " $\mu_D(x)=\mu_C(x)$, $\mu_E(x)=\mu_C(x)$

Vi) " " $\mu_D(x)=\mu_C(x)$, $\mu_E(x)=\mu_C(x)$

Her $x\in X$ için

$$\mu_D(x)=\mu_E(x)\Longrightarrow D=E$$

yani,

$$C\cap(A\cup B)=(C\cap A)\cup(C\cap B).$$

d) $C\cup(A\cap B):=F$, $(C\cup A)\cap(C\cup B):=G$ olsun.Her $x\in X$ için

$$\mu_F(x)=\text{maks}\left[\mu_C(x),\min\left[\mu_A(x),\mu_B(x)\right]\right]$$

$$\mu_G(x)=\min\left[\text{maks}\left[\mu_C(x),\mu_A(x)\right],\text{maks}\left[\mu_C(x),\mu_B(x)\right]\right]$$

c) deki A,B,C nin üyelik fonksiyonlarının tüm mümkün durumları tek tek incelenirse;

i) durumu için $\mu_F(x)=\mu_C(x)$, $\mu_G(x)=\mu_C(x)$

ii) " " $\mu_F(x)=\mu_C(x)$, $\mu_G(x)=\mu_C(x)$

iii) " " $\mu_F(x)=\mu_C(x)$, $\mu_G(x)=\mu_C(x)$

IV) " " $\mu_F(x)=\mu_C(x)$, $\mu_G(x)=\mu_C(x)$

V) " " $\mu_F(x)=\mu_A(x)$, $\mu_G(x)=\mu_A(x)$

Vi) " " $\mu_F(x)=\mu_B(x)$, $\mu_G(x)=\mu_B(x)$

elde edilir.Her $x \in X$ için

$$\mu_F(x) = \mu_G(x) \Longrightarrow F=G$$

yani,

$$C \cup (A \cap B) = (C \cup A) \cap (C \cup B). \bullet$$

BÖLÜM II
FUZZY TOPOLOJİK UZAYLARI

A Fuzzy Topolojik Uzayları

Tanım II.1 [1] X bir nokta kümesi olsun. X deki fuzzy kümelerinin bir T ailesi aşağıdaki koşulları sağlarsa bu T ailesine X üzerinde bir "fuzzy topolojisi" ve (X,T) ikilisine de bir "fuzzy topolojik uzayı" denir ve kısaca ftu şeklinde gösterilir.

a) $\emptyset, X \in T$

b) $A, B \in T \Longrightarrow A \cap B \in T$

c) $\forall i \in I$ için $A_i \in T \Longrightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in T$.

T nin her elemanına bir T- açık fuzzy kümesi veya kısaca açık fuzzy kümesi ve bütünleyeni açık olan bir fuzzy kümesine de T- kapalı fuzzy kümesi veya kısaca kapalı fuzzy kümesi adı verilir.

Tanım II.2. [1] X bir küme ve T_1, T_2 X üzerinde iki fuzzy topolojisi olmak üzere eğer $T_1 \subset T_2$ ise T_1 T_2 den daha kabadır veya T_2 T_1den daha incedir denir.

Bir X kümesi üzerinde sadece $\emptyset$ ve X fuzzy kümelerini içeren fuzzy topolojisine "indiskret fuzzy topolojisi", bütün fuzzy kümelerini içeren fuzzy topolojisine de "diskret fuzzy topolojisi" adı verilir.

Tanım II.3 [1] (X,T) bir ftu ve A X de bir fuzzy kümesi olsun. (X,T) de bir U fuzzy kümesine A nın bir komşuluğudur denir

$$:\Longleftrightarrow [\exists O \in T : A \subset O \subset U]$$

Teorem II.1 [1] (X,T)ftu da bir A fuzzy kümesi açıktır $\Longleftrightarrow$ A fuzzy kümesi, kendisinin içindeki her B fuzzy kümesinin bir komşuluğudur.

Ispat "$\Longrightarrow$" A açık bir fuzzy kümesi ve $B \subset A$ olsun. $B \subset A \subset A$ olduğundan, A B nin bir komşuluğudur.

"$\Longleftarrow$" A fuzzy kümesi içerdiği her B fuzzy kümesinin bir komşuluğu olsun. $A \subset A$ olduğundan, A kendisinin de bir komşuluğudur. Buradan

$$\exists O \in T : A \subset O \subset A \Longrightarrow A = O$$

$O \in T$ olduğundan $A \in T$ dir. ●

Tanım II. 4 [1] Bir fuzzy kümesinin bütün komşuluklarının ailesine bu fuzzy kümesinin "komşuluk sistemi denir.

Teorem II.2 [1] (X,T) ftu daki bir A fuzzy kümesinin komşuluk sistemi $\mathcal{U}$ olsun. $\mathcal{U}$ nun sonlu elemanının arakesiti ve $\mathcal{U}$ nun bir elemanını içeren her fuzzy kümesi yine $\mathcal{U}$ nun bir elemanıdır.

Ispat: $R,S \in \mathcal{U}$ olsun. $R \cap S \in \mathcal{U}$ olduğunu göstermek, $\mathcal{U}$ nun sonlu elemanının arakesitinin yine $\mathcal{U}$ da olduğunu göstermek için yeterlidir.

$$R \in \mathcal{U} \Longrightarrow \exists R_o \in T : A \subset R_o \subset R.$$

$$S \in \mathcal{U} \Longrightarrow \exists S_o \in T : A \subset S_o \subset S$$

Bu ikisinin sonucu olarak

$$A \subset R_o \cap S_o \subset R \cap S$$

elde edilir. $R_o \cap S_o \in T$ olduğundan $R \cap S$ A nın bir komşuluğu, yani $R \cap S \in \mathcal{U}$ dır.

İkinci olarak;

$R \in \mathcal{U}$ ve $R \subset S$ ise $S \in \mathcal{U}$ olduğunu gösterelim.

$$R \in \mathcal{U} \text{ ve } R \subset S \Rightarrow \exists R_o \in T : A \subset R_o \subset R \subset S$$

Buradan S A nın bir komşuluğu, yani $S \in \mathcal{U}$. ●

Tanım II.5 [1] A, B (X,T) ftu da fuzzy kümeleri ve $B \subset A$ olsun Eğer, A B nin bir komşuluğu ise B ye A nın bir iç fuzzy kümesi denir. A nın bütün iç fuzzy kümelerinin birleşimine A nın içi denir ve "A°" ile gösterilir.

Teorem II.3 [1] (X,T)ftu ve A X de bir fuzzy kümesi olsun. Bu takdirde:

i) A° açıktır.

ii) A° A da bulunan en geniş açık fuzy kümesidir.

iii) $A \in T \Longleftrightarrow A = A^{\circ}$

Ispat i) A nın bütün iç fuzzy kümelerinin ailesi

$\{ B_\nu \mid \nu \in I \}$ olsun. A nın tanımı gereği

$$A^{\circ} = \bigcup_{\nu \in I} B_\nu$$

dır. Her $\nu \in I$ için B_ν A nın bir iç fuzzy kümesi olduğundan

$\exists O_\nu \in T : B_\nu \subset O_\nu \subset A$

sağlanır.Buradan

$$A^o = \bigcup_{\nu \in I} B_\nu \subset \bigcup_{\nu \in I} O_\nu \subset A$$

elde edilir.Şu halde $O := \bigcup_{\nu \in I} O_\nu$ olarak tanımlanırsa $O \in T$ ve

(II.1) $A^o \subset O \subset A$

olur. Diğer taraftan A daki her O açık fuzzy kümesi için $O \subset O \subset A$ sağlandığından, O A nın bir iç fuzzy kümesidir.Buradan

(II.2) $O \subset A^o$

elde edilir.(II.1),(II,2) nin sonucu olarak

$$A^o = O$$

yani; A^o açıktır.

ii) $B \subset A$ ve $B \in T$ olsun. $B \subset B \subset A$ olduğundan B A nın bir iç fuzzy kümesi yani;

$$B \subset A^o$$

dır.

iii) "$\Longrightarrow$" $A \in T$ olsun. $A \subset A \subset A$ olduğundan , A kendisinin bir iç fuzzy kümesi yani;

$$A \subset A^o$$

dir.Diğer taraftan A^o nin tanımından $A^o \subset A$ olduğu göz önüne alınırsa

$$A = A^o$$

elde edilir.

"$\Longleftarrow$" $A = A^o$ ise i) den A açıktır.●

B Fuzzy Küme Dizileri

<u>Tanım II.6 [1]</u> $(A_n)_{n=1,2,\ldots}$ fuzzy kümelerinin bir dizisi ve A bir fuzzy kümesi olsun.

a) $(A_n)_{n=1,2,\ldots}$ dizisi hemen hemen A nın içindedir denir

$$:\Longleftrightarrow [\exists\, m \in \mathbb{N} : \forall n \geq m \Longrightarrow A_n \subset A]$$

b) $(A_n)_{n=1,2,\ldots}$ dizisi A da yığılır denir

$$:\Longleftrightarrow [\forall\, m \in \mathbb{N} \text{ için } \exists\, n \in \mathbb{N},\ n \geq m \text{ ve } A_n \subset A]$$

Tanım II.7 [1] (X,T) bir ftu $,(A_n)_{n=1,2,\ldots}$ X de fuzzy kümelerinin bir dizisi ve A X de bir fuzzy kümesi olsun .
Eğer A nın her komşuluğu için $(A_n)_{n=1,2,\ldots}$ dizisi hemen hemen bu komşuluğun içinde kalıyorsa bu diziye A ya yakınsaktır denir.

Tanım II.8 [1] $(A_n)_{n=1,2,\ldots}$ fuzzy kümelerinin bir dizisi ve $N : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ fonksiyonu

$$\forall m \in \mathbb{N} \text{ için } \exists n \in \mathbb{N} : \forall i \geq n \text{ için } N(i) \geq m$$

koşulunu sağlasın.Bu takdirde $(A_{N(i)})_{i=1,2,..}$ dizisine $(A_n)_{n=1,2\ldots}$ dizisinin bir alt dizisi denir.

Tanım II.9. [1] (X,T) ftu , $(A_n)_{n=1,2,\ldots}$ X de fuzzy kümelerinin bir dizisi ve A X de bir fuzzy kümesi olsun.
Eğer $(A_n)_{n=1,2,\ldots}$ dizisi A nın her komşuluğunda yığılıyorsa A ya bu dizinin bir fuzzy yığılma kümesi denir.

Teorem II.4 [1] (X,T) fuzzy topolojik uzayındaki her fuzzy kümesinin komşuluk sistemi sayılabilir ise

a) X de bir A fuzzy kümesi açıktır $\Longleftrightarrow$ A nın içindeki her B fuzzy kümesine yakınsayan fuzzy kümelerinin her $(A_n)_{n=1,2,\ldots}$ dizisi hemen hemen A nın içindedir.

b) Eğer A , fuzzy kümelerinin bir $(A_n)_{n=1,2,\ldots}$ dizisinin fuzzy yığılma kümesi ise bu dizinin A ya yakınsayan bir alt dizisi vardır.

Ispat a) "$\Longrightarrow$" $A \in T$, $B \subset A$ ve $(A_n)_{n=1,2,\ldots}$ B ye yakınsasın.

$A \in T$ ve $B \subset A \subset A$ nın sonucu olarak, A B nin bir komşuluğudur. $(A_n)_{n=1,2,\ldots}$ B ye yakınsak verildiğinden ve A B nin bir komşuluğu olduğundan $(A_n)_{n=1,2,\ldots}$ hemen hemen A nın içindedir.

"$\Longleftarrow$" $B \subset A$ keyfi bir fuzzy kümesi olsun. B ye yakınsayan fuzzy fuzzy kümelerinin her dizisi hemen hemen A nın içinde ise A nın açık olduğunu göstereceğiz. Bunun için; Teorem II. 1 e göre, A nın B nin bir komşuluğu olduğunu göstermek yeter.

$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ B nin komşuluk sistemi olmak üzere

$$V_n := \bigcap_{i=1}^{n} u_i$$

olarak tanımlayalım.Her $n \in \mathbb{N}$ için Teorem II.2 den V_n B nin bir komşuluğudur. B nin keyfi bir u_j komşuluğu ve her $n \geq j$ için

$$V_n = u_1 \cap u_2 \cap \dots \cap u_n \subset u_j$$

olduğundan $(V_n)_{n=1,2,\dots}$ dizisi B nin her komşuluğunun hemen hemen içindedir.Buradan $(V_n)_{n=1,2,\dots}$ B ye yakınsar.Hipotez kullanılırsa $(V_n)_{n=1,2,\dots}$ hemen hemen A nın içinde olacağından

(II.3) $$\exists m \in \mathbb{N} : \ \forall\ n \geq m \text{ için } V_n \subset A$$

dır.Diğer taraftan,V_n B nin bir komşuluğu olduğundan her V_n için

(II.4) $$\exists O_n \in T : B \subset O_n \subset V_n$$

dır.(II.3), (II.4) den

$$\exists m \in \mathbb{N} : \forall n \geq m \text{ için } \ B \subset O_n \subset A$$

yani; A B nin bir komşuluğudur.Teorem II.1 den A açıktır.

b) A; fuzzy kümelerinin $(A_n)_{n=1,2,\dots}$ dizisinin bir fuzzy yığılma kümesi olsun $(A_n)_{n=1,2,\dots}$ dizisinin A ya yakınsak bir alt dizisinin var olduğunu gösterelim.

$R_1, R_2, \dots, R_n, \dots$ Anın komşuluk sistemi olsun.$S_n := \bigcap_{i=1}^{n} R_i$ olarak tanımlayalım.$(S_n)_{n=1,2,\dots}$ A nın komşuluklarından meydana gelen ve her n için $S_{n+1} \subset S_n$ koşulunu sağlayan bir dizidir. A fuzzy kümesi, $(A_n)_{n=1,2,\dots}$ dizisinin bir fuzzy yığılma kümesi olduğundan,bu dizi A nın her komşuluğunda yığılır.Buradan

$$\forall i \in \mathbb{N} \text{ için } \ \exists N(i) \geq i, \quad A_{N(i)} \subset S_i$$

olur.Bu şekilde inşa edilen $(A_{N(i)})_{i=1,2,\dots}$ dizisi,$(A_n)_{n=1,2,\dots}$ dizisinin bir alt dizisidir, çünkü; $N : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $i \longrightarrow N(i)$ fonksiyonu istenen koşulu sağlar.Gerçekten; her $m \in \mathbb{N}$ için $n \geq m$ seçilirse her

$i \in \mathbb{N}$ için $N(i) \geq i$ olacak şekilde bir $N(i)$ mevcut olduğundan $i \geq n$ için $N(i) \geq n \geq m$ sağlanır.

Şimdi $(A_{N(i)})_{i=1,2,\ldots}$ dizisinin A ya yakınsadığını gösterelim. A nın keyfi bir R_j komşuluğunu alalım .

$\forall i \geq j$ için $N(i) \geq i \geq j$ ve $A_{N(i)} \subset S_i \subset S_j \subset R_j$ olduğundan $(A_{N(i)})_{i=1,2,\ldots}$ hemen hemen A nın içindedir. Buradan $(A_{N(i)})_{i=1,2,\ldots}$ A ya yakınsar.●

C. Fuzzy Sürekli Fonksiyonlar.

Tanım II.10 [1] X,Y iki nokta kümesi , $f:X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon ve B,Y de $\mu_B(y)$ $(y \in Y)$ üyelik fonksiyonu ile tanımlanan bir fuzzy kümesi olsun. B nin ters resmi $f^{-1}[B]$ ile gösterilir ve

$$\mu_{f^{-1}[B]}(x) = \mu_B(f(x)) \quad (x \in X)$$

üyelik fonksiyonu ile tanımlanır.

Tanım II.11 [1] X, Y iki nokta kümesi, $f:X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon ve A X de $\mu_A(x)$ $(x \in X)$ üyelik fonksiyonu ile tanımlanan bir fuzzy kümesi olsun. A nın resmi $f[A]$ ile gösterilir ve

$$\mu_{f[A]}(y) = \begin{cases} \sup\limits_{z \in f^{-1}[y]} \{\mu_A(z)\} & , f^{-1}[y] \neq \emptyset \quad (y \in Y) \\ 0 & , f^{-1}[y] = \emptyset \quad (y \in Y) \end{cases}$$

üyelik fonksiyonu ile tanımlanır. Burada $f^{-1}[y] = \{x \mid f(x)=y\}$ dir.

Teorem II.5 [1] X,Y,Z nokta kümeleri ve

$f:X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde;

a) Y deki her B fuzzy kümesi için $f^{-1}[B'] = \{f^{-1}[B]\}'$ dır.
b) f örten ise , X deki her A fuzzy kümesi için $\{f[A]\}' \subset f[A']$ dır.
c) B_1 , B_2 Y de iki fuzzy kümesi ve $B_1 \subset B_2$ ise $f^{-1}[B_1] \subset f^{-1}[B_2]$ dır.
d) A_1, A_2 X de iki fuzzy kümesi ve $A_1 \subset A_2$ ise $f[A_1] \subset f[A_2]$ dır.
e) Y deki her B fuzzy kümesi için $f[f^{-1}[B]] \subset B$ dır.
Eğer f örten ise Y deki her B fuzzy kümesi için $f[f^{-1}[B]] = B$ dir.
f) X deki her A fuzzy kümesi için $A \subset f^{-1}[f[A]]$ dır.
g) $f:X \longrightarrow Y$, $g:Y \longrightarrow Z$ iki fonksiyon olsun. Bu takdirde, $(g \circ f)$ f ve g nin bileşkesi olmak üzere Z deki her C fuzzy kümesi için

$$(g \circ f)^{-1}[C] = f^{-1}[g^{-1}[C]]$$

dir.

Ispat a) B Yde herhangibir fuzzy kümesi olsun. Her $x \in X$ için

$$\mu_{f^{-1}[B']}(x)=\mu_{B'}[f(x)]=1-\mu_B[f(x)]=1-\mu_{f^{-1}[B]}(x)=\mu_{\{f^{-1}[B]\}'}(x)$$

olduğundan

$$f^{-1}[B']=\{f^{-1}[B]\}'$$

elde edilir.

b) Ispata başlamadan önce

$$\sup_{z\in f^{-1}[y]}(1-\mu_A(z)) = 1-\inf_{z\in f^{-1}[y]}(\mu_A(z)) \qquad (y\in Y)$$

eşitliğinin doğru olduğunu gösterelim.

$$\mu_A(z) \geq \inf_{z\in f^{-1}[y]} \mu_A(z) \Longrightarrow 1-\mu_A(z) \leq 1-\inf_{z\in f^{-1}[y]} \mu_A(z)$$

$$\Longrightarrow \sup_{z\in f^{-1}[y]}(1-\mu_A(z)) \leq 1-\inf_{z\in f^{-1}[y]}(\mu_A(z))$$

dır. Şimdi ise

$$s_1:=\sup_{z\in f^{-1}[y]}(1-\mu_A(z)) \quad \text{ve} \quad s_2:=1-\inf_{z\in f^{-1}[y]}(\mu_A(z))$$

olsun. $s_1 < s_2$ $(s_1 \neq s_2)$ ise $\varepsilon:=s_2-s_1 > 0$ olarak tanımlanırsa

$$1-s_2=\inf_{z\in f^{-1}[y]}(\mu_A(z)) \quad \text{olduğundan}$$

$$\exists z_0\in f^{-1}[y] : \mu_A(z_0) < 1-s_2+\varepsilon=1-s_1$$

Buradan da $s_1 < 1-\mu_A(z_0)$, yani

$$\sup_{z\in f^{-1}[y]}(1-\mu_A(z)) < 1-\mu_A(z)$$

elde edilir ki bu supremum tanımı ile çelişir. O halde $s_1=s_2$ dir.

Şimdi f örten ise X deki bir A fuzzy kümesi için $\{f[A]\}' \subset f[A']$ olduğunu gösterelim. $f^{-1}[y]\neq\emptyset$ olduğundan her $y\in Y$ için

$$\mu_{\{f[A']\}}(y)=\sup_{z\in f^{-1}[y]}\mu_{A'}(z)=\sup_{z\in f^{-1}[y]}\{1-\mu_A(z)\}=1-\inf_{z\in f^{-1}[y]}(\mu_A(z))$$

olur. Buradan

(II.5) $$\mu_{\{f[A']\}}(y)=1-\inf_{z\in f^{-1}[y]}(\mu_A(z))$$

dir. Diğer taraftan,

(II.6) $$\mu_{\{f[A]\}'}(y)=1-\mu_{f[A]}(y)=1-\operatorname{Sup}_{z\in f^{-1}[y]}\{\mu_A(z)\}$$

olduğundan (II.5),(II.6) nın sonucu olarak her $y\in Y$ için

$$\mu_{\{f[A]\}'}(y)\leqslant \mu_{\{f[A']\}}(y)$$

$$\Longrightarrow \{f[A]\}'\subset f[A']$$

elde edilir.

c) B_1, B_2 Y de iki fuzzy kümesi olsun ve $B_1\subset B_2$ sağlansın.

Her $x\in X$ için

$$\mu_{f^{-1}[B_1]}(x)=\mu_{B_1}(f(x))\leq \mu_{B_2}(f(x))=\mu_{f^{-1}[B_2]}(x)$$

olur. Buradan

$$f^{-1}[B_1]\subset f^{-1}[B_2]$$

elde edilir.

d) A_1, A_2 X de iki fuzzy kümesi olsun ve $A_1\subset A_2$ sağlansın. $y\in Y$ olmak üzere

i) $f^{-1}[y]\neq\emptyset$ ise

$$\mu_{f[A_1]}(y)=\sup_{z\in f^{-1}[y]}(\mu_{A_1}(z))\leq\sup_{z\in f^{-1}[y]}(\mu_{A_2}(z))=\mu_{f[A_2]}(y)$$

ii) $f^{-1}[y]=\emptyset$ ise

$$\mu_{f[A_1]}(y)=0=\mu_{f[A_2]}(y)$$

i),ii) nin sonucu olarak her $y\in Y$ için

$$\mu_{f[A_1]}(y)\leq\mu_{f[A_2]}(y)$$

$$\Longrightarrow f[A_1]\subset f[A_2]$$

elde edilir.

e) B Y de herhangibir fuzzy kümesi olsun. $y \in Y$ olmak üzere

i) $f^{-1}[y] \neq \emptyset$ ise

$$\mu_{f[f^{-1}[B]]}(y) = \sup_{z \in f^{-1}[y]} (\mu_{f^{-1}[B]}(z)) = \sup_{z \in f^{-1}[y]} (\mu_B(f(z)) = \mu_B(y)$$

ii) $f^{-1}[y] = \emptyset$ ise

$$\mu_{f[f^{-1}[B]]}(y) = 0 \leq \mu_B(y)$$

i),ii) den her $y \in Y$ için

$$\mu_{f[f^{-1}[B]]}(y) \leq \mu_B(y)$$

yani ;

$$f[f^{-1}[B]] \subset B$$

elde edilir. Eğer f örten ise sadece i) durumu vardır. Dolayısıyla

$$f[f^{-1}[B]] = B$$

dir.

f) A X de bir fuzzy kümesi olsun. Her $x \in X$ için

$$\mu_{f^{-1}[f[A]]}(x) = \mu_{f[A]}(f(x)) = \sup_{z \in f^{-1}[f(x)]} \{\mu_A(z)\} \geq \mu_A(x)$$

dır. Buradan

$$A \subset f^{-1}[f[A]]$$

elde edilir.

g) C Z de bir fuzzy kümesi olsun. Her $x \in X$ için

$$\mu_{(g\circ f)^{-1}[C]}(x) = \mu_C[(g\circ f)(x)] = \mu_C[g[f(x)]] = \mu_{g^{-1}[C]}(f(x))$$

$$= \mu_{f^{-1}[g^{-1}[C]]}(x)$$

olduğundan

$$(g\circ f)^{-1}[C] = f^{-1}[g^{-1}[C]]$$

dir.●

Sonuç II.1 . X,Y iki nokta kümesi ve f: $X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde ;

a) A_ν $(\nu\in\Lambda)$, X de fuzzy kümeleri olmak üzere f: $X \longrightarrow Y$ örten ise

$$f\Big[\bigcup_{\nu\in\Lambda} A_\nu\Big] = \bigcup_{\nu\in\Lambda} f[A_\nu]$$

ve

b) C_i, D_j $(i\in I, j\in J)$ X de fuzzy kümeleri olmak üzere

$$\Big(\bigcup_{i\in I} C_i\Big) \cap \Big(\bigcup_{j\in J} D_j\Big) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} C_i \cap D_j$$

dir.

Ispat a) f örten olduğu için $f^{-1}[y] \neq \emptyset$. Her $y\in Y$ için

$$\mu_{f[\bigcup_{\nu\in\Lambda} A_\nu]}(y) = \sup_{z\in f^{-1}[y]} \Big(\mu_{\bigcup_{\nu\in\Lambda} A_\nu}(z)\Big) = \sup_{z\in f^{-1}[y]} \Big(\sup_{\nu\in\Lambda}(\mu_{A_\nu}(z))\Big)$$

$$= \sup_{\nu\in\Lambda}\Big(\sup_{z\in f^{-1}[y]}(\mu_{A_\nu}(z))\Big) = \sup_{\nu\in\Lambda}\big(\mu_{f[A_\nu]}(y)\big)$$

$$= \mu_{\bigcup_{\nu\in\Lambda} f[A_\nu]}(y)$$

Buradan

$$f\Big[\bigcup_{\nu\in\Lambda} A_\nu\Big] = \bigcup_{\nu\in\Lambda} f[A_\nu]$$

elde edilir.

b) Her $x\in X$ için

$$\mu_{\bigcup_{i\in I} C_i \cap \bigcup_{j\in J} D_j}(x) = \min\Big[\sup_{i\in I} \mu_{C_i}(x),\ \sup_{j\in J} \mu_{D_j}(x)\Big]$$

ve

$$\mu_{\bigcup_{(i,j)\in I\times J} C_i\cap D_j}(x) = \sup_{(i,j)\in I\times J}\Big[\min\big(\mu_{C_i}(x), \mu_{D_j}(x)\big)\Big]$$

olduğundan

$$\min\Big[\sup_{i\in I} \mu_{C_i}(x), \sup_{j\in J} \mu_{D_j}(x)\Big] = \sup_{(i,j)\in I\times J}\Big[\min\big(\mu_{C_i}(x), \mu_{D_j}(x)\big)\Big]$$

olduğunu göstermeliyiz.

$c_{ij}:=\min(\mu_{C_i}(x),\mu_{D_j}(x)), a:=\sup_{i\in I}\mu_{C_i}(x), b:=\sup_{j\in J}\mu_{D_j}(x), c:=\sup_{(i,j)\in I\times J} c_{ij}$

olarak tanımlayalım.

$$c_{ij}\leq \mu_{C_i}(x)\leq a, c_{ij}\leq \mu_{D_j}(x)\leq b$$

$$\Longrightarrow \forall (i,j)\in I\times J \text{ için } c_{ij}\leq \min(a,b)\Longrightarrow c\leq \min(a,b)$$

olur. Genelliği bozmayacağı için $b\geq a$ kabul edebiliriz. Buradan $c\leq a$ elde edilir. $c<a$ olamıyacağını gösterirsek ıspat biter.

Varsayım: $c<a$ olsun. $d\in[0,1]$ olmak üzere

(II.7) $\qquad \exists i_0\in I: \mu_{C_{i_0}}(x)>d>c$

dir (Aksi olsaydı $a\leq c$ olurdu). Buradan her $(i,j)\in I\times J$ için

$$\mu_{C_{i_0}}(x)>d>c_{ij}\Longrightarrow \forall j\in J \text{ için } \mu_{C_{i_0}}(x)>d>c_{i_0 j}$$

$$c_{i_0 j}=\min(\mu_{C_{i_0}}(x),\mu_{D_j}(x))=\mu_{D_j}(x)$$

dir. Aksi halde (II.7) ile çelişir. Buradan her $j\in J$ için

$$\mu_{C_{i_0}}(x)>d>\mu_{D_j}(x)\Longrightarrow b=\sup_{j\in J}\mu_{D_j}(x)\leq d<\mu_{C_{i_0}}(x)\leq a$$

Buradan da $b<a$ elde edilir ki bu $b\geq a$ olması ile çelişir. O halde varsayım yanlış, yani $c<a$ olamaz. ●

<u>Tanım II.12 [1]</u> (X,T) ve (Y,T^*) fuzzy topolojik uzayları ve $f:X\longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. f fuzzy süreklidir veya kısaca F-süreklidir denir

$$:\Longleftrightarrow [\forall U\in T^* \text{ için } f^{-1}[U]\in T]$$

Tanımdan kolayca görülebileceği gibi $f:X\longrightarrow Y$, $g:Y\longrightarrow Z$ F-sürekli iki fonksiyon iseler bunların bileşkesi olan $(g\circ f):X\longrightarrow Z$ fonksiyonu da F-süreklidir. Gerçekten; Teorem II.5.g) den Z deki her V fuzzy kümesi için

$$(g\circ f)^{-1}[V]=f^{-1}[g^{-1}[V]]$$

olduğundan eğer V açıksa f,g F- sürekli olduğu için $(g\circ f)^{-1}[V]$ de açıktır.

Teorem II.6 [1] (X,T) ve (Y,T^*) iki ftu ve $f:X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun.

a) f F-süreklidir $\Longleftrightarrow$ Y deki her kapalı fuzzy kümesinin ters resmi X de kapalıdır.

b) A X de herhangibir fuzzy kümesi olsun. Bu takdirde; f[A]nın her V komşuluğunun ters resmi A nın bir komşuluğudur $\Longleftrightarrow$ f[A]nın her V komşuluğu için A nın bir W komşuluğu vardır öyle ki $f[W] \subset V$ dir.

c) f F-sürekli ise X deki her A fuzzy kümesi için f[A]nın her komşuluğunun ters resmi A nın bir komşuluğudur.

d) X deki her A fuzzy kümesi ve f[A]nın her V komşuluğu için $f[W] \subset V$ olacak şekilde A nın bir W komşuluğu varsa bu takdirde; X deki bir A fuzzy kümesine yakınsayan fuzzy kümelerinin her $(A_n)_{n=1,2,...}$ dizisi f[A]ya yakınsar.

İspat a) "$\Longrightarrow$" f F- sürekli, B Y de alınan herhangibir kapalı fuzzy kümesi olsun. Teorem II.5.a) ve f in F-sürekliliğinden $f^{-1}[B']=\{f^{-1}[B]\}'$ (X,T) de açıktır. Buradan $f^{-1}[B]$ (X,T) de kapalıdır.

"$\Longleftarrow$" A Y de keyfi açık bir fuzzy kümesi olsun A' (Y,T^*) de kapalıdır. Hipotez ve Teorem II.5. a) dan $f^{-1}[A']=\{f^{-1}[A]\}'$ (X,T) de kapalı, yani $f^{-1}[A]$ (X,T) de açıktır. Buradan f F- süreklidir.

b) "$\Longrightarrow$" V f[A]nın keyfi bir komşuluğu olsun. Hipotezden $f^{-1}[V]$ A nın bir komşuluğudur. Teorem II.5. e) den $f[f^{-1}[V]] \subset V$ olduğundan $f^{-1}[V]:=W$ olarak tanımlanırsa $f[W] \subset V$ olacak şekilde A nın bir komşuluğu bulunmuş olur.

"$\Longleftarrow$" V f[A] nın keyfi bir komşuluğu olsun. Hipotezden $f[W] \subset V$ olacak şekilde A nın bir W komşuluğu vardır.
Teorem II.5. f), II.5.c)den

$$W \subset f^{-1}[f[W]] \subset f^{-1}[V]$$

elde edilir. Teorem II.2 den $f^{-1}[V]$ A nın bir komşuluğudur.

c) f F-sürekli, A X de bir fuzzy kümesi ve V, f[A] nın keyfi bir komşuluğu olsun. Komşuluğun tanımından $f[A] \subset W \subset V$ olacak şekilde (Y,T^*) de W açık fuzzy kümesi vardır. Teorem II.5 f), II.5.c) den

$$A \subset f^{-1}[f[A]] \subset f^{-1}[W] \subset f^{-1}[V]$$

dır. f F-sürekli olduğu için $f^{-1}[W] \in T$ dir. Teorem II.1, II.2 den $f^{-1}[V]$ A nın bir komşuluğudur.

d) A X de bir fuzzy kümesi, $(A_n)_{n=1,2,\ldots}$ A ya yakınsayan fuzzy kümelerinin bir dizisi ve V f [A] nın keyfi bir komşuluğu olsun. Hipotezden $f[W]\subset V$ olacak şekilde A nın bir W komşuluğu vardır. $(A_n)_{n=1,2,\ldots}$ A ya yakınsadığından A nın her komşuluğunun hemen hemen içinde olacağı için

$\exists m\in\mathbb{N} : \forall\, n\geq m$ için $A_n\subset W$

dır. Teorem II.5. d) den

$f[A_n]\subset f[W]$

ayrıca $f[W]\subset V$ olduğundan da

$\exists m\in\mathbb{N} : \forall\, n\geq m$ için $f[A_n]\subset f[W]\subset V$

elde edilir. Bu ise $(f(A_n))_{n=1,2,\ldots}$ dizisinin $f[A]$ ya yakınsadığını gösterir. ●

D. Kompakt Fuzzy Uzayları.

<u>Tanım II.13 [1]</u> (X,T) bir ftu ve B X de fuzzy kümesi olsun.

a) Fuzzy kümelerinin bir $\mathcal{A}$ ailesine B fuzzy kümesinin bir örtümüdür denir

$$:\Longleftrightarrow [B\subset\{\bigcup A \mid A\in\mathcal{A}\}]$$

b) Eğer; $\mathcal{A}$ ailesinin her elemanı bir açık fuzzy kümesi ise $\mathcal{A}$ ya B nin bir açık örtümü denir.

c) $\mathcal{A}$ nın bir alt ailesi B nin yine bir örtümü oluyorsa bu alt aileye $\mathcal{A}$ nın bir alt örtümü denir.

<u>Tanım II.14 [1]</u> (X,T) ftu olmak üzere eğer X in her açık örtümünün sonlu bir alt örtümü varsa bu uzaya kompakt ftu denir.

<u>Tanım II.15 [1]</u> $\mathcal{A}$; fuzzy kümelerinin bir ailesi olsun. Eğer $\mathcal{A}$ nın her sonlu alt ailesinin elemanlarının arakesiti boş değilse $\mathcal{A}$ ya sonlu arakesit özelliğine (veya kısaca S.A.Ö) sahiptir denir.

<u>Teorem II.7 [1]</u> Bir (X,T) ftu kompakttır $\Longleftrightarrow$ kapalı fuzzy kümelerinin S.A.Ö sahip her ailesinin bütün elemanlarının arakesiti boş değildir.

<u>Ispat:</u> "$\Longrightarrow$" (X,T) kompakt ve $\mathcal{A}$ kapalı fuzzy kümelerinin S.A.Ö sahip bir ailesi olsun.

Varsayım: $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A = \emptyset$ olsun. Buradan $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A' = X$, X in bir açık örtümüdür. (X,T) kompakt olduğundan

$$\exists A_1,\ldots,A_n \in \mathcal{A} : \bigcup_{i=1}^{n} A_i' = X \Longrightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \emptyset$$

bu ise $\mathcal{A}$ nın S.A.Ö ile çelişir. O halde varsayım yanlıştır. Buradan

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \neq \emptyset$$

elde edilir.

"$\Longleftarrow$" Varsayım: (X,T) kampakt olmasın. X in hiç sonlu alt örtümü olmayan bir $\mathcal{G}$ açık örtümü vardır, yani

$$X = \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G \quad \text{, fakat her } n \in \mathbb{N} \text{ için } X \neq \bigcup_{i=1}^{n} G_i \text{ dir.}$$

Buradan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\emptyset \neq \bigcap_{i=1}^{n} G_i'$$

dir. Şu halde $\mathcal{A} = \{G' \mid G \in \mathcal{G}\}$ ailesi kapalı fuzzy kümelerinin S.A.Ö sahip bir ailesidir. Fakat

$$X = \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G$$

olduğundan

$$\emptyset = \bigcap_{G \in \mathcal{G}} G'$$

sağlanmaktadır. Bu ise hipotezle çelişir. O halde varsayım yanlıştır, yani (X,T) kompakttır. ●

<u>Teorem II.8[1]</u> $(X,T),(Y,T^*)$ iki ftu , $f : X \longrightarrow Y$ F- sürekli ve örten bir fonksiyon olsun. Bu takdirde (X,T) kompakt ise (Y,T^*) da kompakttır.

<u>Ispat:</u> $\mathcal{B}$ Y nin bir açık örtümü olsun. Buradan

$$Y = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \Longrightarrow f^{-1}[Y] = X = f^{-1}\Big[\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B\Big]$$

olur. Diğer taraftan her $x \in X$ için,

$$\mu_{f^{-1}[\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B]}(x) = \mu_{\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B}(f(x)) = \sup_{B \in \mathcal{B}} \{\mu_B(f(x))\} = \sup_{B \in \mathcal{B}} \{\mu_{f^{-1}[B]}(x)\}$$

$$= \mu_{\bigcup_{B \in \mathcal{B}} f^{-1}[B]}(x)$$

olduğundan

$$f^{-1}\Big[\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B\Big] = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} f^{-1}[B]$$

elde edilir.Şu halde

$$X = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} f^{-1}[B]$$

dir.f F-sürekli ve her $B\in\mathcal{B}$ Y de açık fuzzy kümesi olduğundan $\bigcup_{B\in\mathcal{B}} f^{-1}[B]$ X in bir açık örtümüdür. (X,T) kompakt olduğundan

$$\exists B_1, B_2, \ldots, B_n \in \mathcal{B} : \quad X = \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}[B_i]$$

dir.Diğer taraftan f örten olduğu için sonuç II.1. a),Teorem II.5 e) den

$$f[X] = Y = f\Big[\bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}[B_i]\Big] = \bigcup_{i=1}^{n} f\left[f^{-1}[B_i]\right] = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$$

dir.Buradan $\{B_i \mid i=1,2,\ldots,n\}$ $\mathcal{B}$ nin sonlu bir alt örtümüdür, yani (Y,T^*) kompakttır.●

BÖLÜM III

FUZZY TOPOLOJİK UZAYLARININ ÖRTÜM ÖZELLİKLERİ

Tanım III.1 [4] (X,T) ftu olsun. Eğer X in her sayılabilir açık örtümünün sonlu bir alt örtümü varsa bu uzaya sayılabilir kompakttır denir.

Tanım III.2 [4] (X,T) ftu ve $\mathcal{B} \subset T$ olsun. Eğer; T nin her elemanı $\mathcal{B}$ nin bazı elemanlarının birleşimi olarak yazılabiliyorsa $\mathcal{B}$ ye T için bir bazdır denir.

Tanım III.3 [4] (X,T) bir ftu olsun. Eğer; T nin sayılabilir bir $\mathcal{B}$ bazı varsa bu uzaya C_{11} -ftu denir.

Teorem III.1 [4] (X,T) bir C_{11}-ftu olsun. Bu takdirde ; (X,T) kompakttır $\Longleftrightarrow (X,T)$ sayılabilir kompakttır.

Ispat "$\Longrightarrow$" (X,T) kompakt olduğundan her açık örtümünün, dolayısıyla sayılabilir her açık örtümünün de sonlu bir alt örtümü olduğundan (X,T) sayılabilir kompakttır.

"$\Longleftarrow$" $\mathcal{A}=\{A_i \mid i\in I\}$ X in bir açık örtümü olsun. (X,T) C_{11}-ftu olduğundan

$$\exists\, \mathcal{B}=\{B_n \mid n=1,2,\ldots\} \subset T \;:\; A_i=\bigcup_{k=1}^{i_o} B_{i_k} \quad (i\in I)$$

dır. Burada i_o sonsuz olabilir. Ayrıca

$$X=\bigcup_{i\in I} A_i=\bigcup_{i\in I}\left(\bigcup_{k=1}^{i_o}\right) B_{i_k}$$

olduğundan $\mathcal{B}_o := \{B_{i_k} \mid i\in I,\ 1\leq k\leq i_o\}$ X in sayılabilir bir açık örtümüdür. X Sayılabilir kompakt olduğundan, bu örtümün $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_o$ sonlu alt örtümü vardır. $\mathcal{B}_1$ in her elemanı bir A_i tarafından içerileceğinden böyle A_i lerin oluşturduğu aile $\mathcal{A}$ nın sonlu alt ailesidir ve X i örter. Buradan (X,T) kompakttır.●

Teorem III.2 [4] (X,T) kompakt (sayılabilir kompakt) ftu, (Y,T^*) herhangibir ftu ve $f:X \longrightarrow Y$ F-sürekli ve örten bir fonksiyon olsun. Bu takdirde ; Y de kompakttır (sayılabilir kompaktır.)

Kompaktlık için teorem, II.8 de ıspatlandı. Sayılabilir kompaktlık için de ıspat benzer yolla yapılır.

Tanım III.4 [4] X bir küme ve $\mathcal{A}=\{A_i \mid i\in I\}$ fuzzy kümelerinden oluşan X in bir örtümü yani ; her $x\in X$ için $\sup\{\mu_{A_i}(x) \mid i\in I\}=1$ olsun. Buradan $0<\varepsilon<1$ ve her $x\in X$ için

$$\exists A_i\in \mathcal{A} \;:\; \mu_{A_i}(x) \geq 1-\varepsilon$$

dır. Bu A_i ile $x\in X$ lerin kümesini $\Gamma_{i,\varepsilon}$ ile gösterelim ve

$$\Gamma_{i,\varepsilon} := \{x\in X \mid \mu_{A_i}(x) \geq 1-\varepsilon\}$$

olarak tanımlayalım. Sabit bir $\varepsilon>o$ için $\{\Gamma_{i,\varepsilon} \mid i\in I\}$ ailesine X in $\mathcal{A}$ ile verilen bir ε-parçalanışı denir. Eğer her $x\in X$ için $\mu_{A_i}(x)=1$ ise

$$\Gamma_{i,\varepsilon}:=\{x\in X \mid \mu_{A_i}(x)=1\}$$

olmak üzere $\{\Gamma_{i,o} \mid i\in I\}$ ailesine X in $\mathcal{A}$ ile verilen bir o- parçalanışı denir.

Teorem III.3 [4](X,T)bir ftu olsun .(X,T) kompakttır(Sayılabilir kompakttır)$\Longleftrightarrow$X in her açık örtümüne (Sayılabilir açık örtümüne) karşılık X in bir sonlu o-parçalanışı vardır.

Ispat: "$\Longrightarrow$": $\mathcal{A}=\{A_i \mid i\in I\}$ X in bir açık örtümü (Sayılabilir açık örtümü) olsun.(X,T) kompakt (sayılabilir kompakt) olduğundan

$\mathcal{A}_o:=\{A_k \mid k=1,2,\ldots,n\}$ gibi $\mathcal{A}$ nın sonlu bir alt örtümü vardır, yani her $x\in X$ için

$$\text{maks}\{\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x), \ldots, \mu_{A_n}(x)\}=1$$

ve buradan da

$$\exists A_i \ (1\leq i\leq n) \ : \mu A_i(x)=1$$

dir. $\Gamma_{i,o}:=\{x\in X : \mu A_i(x)=1\}$ olmak üzere $\{\Gamma_{i,o} \mid i=1,2,\ldots,n\}$

X in $\mathcal{A}_o$ ile verilen bir o- parçalanışıdır. $\mathcal{A}_o$, $\mathcal{A}$ nın sonlu alt ailesi olduğundan X in $\mathcal{A}$ ile verilen bir sonlu o-parçalanışı vardır.

"$\Longleftarrow$" $\mathcal{A}$; X in bir açık örtümü (sayılabilir açık örtümü) ve

$\{\Gamma_{k,o} \mid k=1,2,\ldots n\}$ X in $\mathcal{A}$ ile verilen bir sonlu o-parçalanışı olsun. A_k $\Gamma_{k,o}$ ı tanımlayan fuzzy kümesi olmak üzere, $\{A_k \mid k=1,2,\ldots,n\}$ $\mathcal{A}$ nın sonlu bir alt örtümüdür. Gerçekten ;

$\{\Gamma_{k,o} \mid k=1,2,\ldots,n\}$ X in $\mathcal{A}$ ile verilen bir sonlu o-parçalanışı olduğundan , her $x\in X$ için

$$\exists j\in\{1,2,\ldots,n\} : x\in\Gamma_{J,o} \Longrightarrow \mu A_J(x)=1$$

dir. Buradan

$$\text{maks} \quad \{\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x), \ldots, \mu_{A_n}(x)\} = 1$$

dir.Şu halde $X=\bigcup_{i=1}^{n} A_i$,yani (X,T) kompakttır (sayılabilir kompakttır

Sonuç III.1[4] (X,T) bir ftu ve $x\in X$ olsun.Eğer X in bir $\mathcal{A}$ açık örtümü (sayılabilir açık örtümü) her $A_i\in\mathcal{A}$ için $\mu_{A_i}(x)<1$ olacak şekilde varsa (X,T) kompakt (sayılabilir kompakt) olamaz.

Ispat: X in bir $\mathcal{A}$ açık örtümü (sayılabilir açık örtümü) her $A_i\in\mathcal{A}$ ve $x\in X$ için $\mu_{A_i}(x)<1$ olacak şekilde bulunsun.

Varsayım: (X,T) kompakt (Sayılabilir kompakt) olsun.Buradan Teorem III.3 e göre X in $\mathcal{A}$ açık örtümününe karşılık Xin $\{\Gamma_{i,o}\mid i=1,2,\ldots n\}$ ile gösterilen bir sonlu o- parçalanışı vardır.Dolayısıyla her $x\in X$ için

$$\exists i\in\{1,2,\ldots,n\} : x\in\Gamma_{i,o}\Longrightarrow\mu_{A_i}(x)=1$$

dir.Bu ise her $A_i\in\mathcal{A}$ ve $x\in X$ için $\mu_{A_i}(x)<1$ olması ile çelişir.O halde varsayım yanlıştır, yani (X,T) kompakt (Sayılabilir kompakt) olamaz.●

Tanım III.5 [4]Bir (X,T) ftu nın her açık örtümünün sayılabilir bir alt örtümü varsa bu uzaya Lindöləf fuzzy topolojik uzayı veya kısaca Lindölöf uzayı denir.

Teorem III.4 [4] Her C_{11}- ftu bir Lindelöf uzayıdır.

Ispat: (X,T) C_{11}-ftu ve $\mathcal{A}=\{A_i\mid i\in I\}$ X in bir açık örtümü olsun.Buradan

$$\exists\mathcal{B}=\{B_n\mid n=1,2,\ldots\}\subset T \ : \ A_i=\bigcup_{k=1}^{i_o}B_{i_k} \quad (A_i\in\mathcal{A})$$

dır.Burada i_o sonsuz olabilir. Şu halde

$$X=\bigcup_{i\in I}A_i=\bigcup_{i\in I}\Big(\bigcup_{k=1}^{i_o}B_{i_k}\Big)=\bigcup_{\substack{k=1\\ i\in I}}^{i_o}B_{i_k}$$

dır. $\mathcal{B}_o:=\{B_{i_k}\mid i\in I,\ 1\leq k\leq i_o\}$ olarak tanımlanırsa $\mathcal{B}_o\subset\mathcal{B}$ sayılabilirdir ve X in bir açık örtümüdür.$\mathcal{B}_o$ ın her elemanı bir A_i elemanı tarafından içerileceğinden böyle A_i lerin oluşturduğu aile $\mathcal{A}$ nın sayılabilir bir alt örtümüdür.Buradan (X,T) Lindelöf uzayıdır.●

Teorem III.5 [4] (X,T), (Y,T^*) iki ftu , $f:X\longrightarrow Y$ F-sürekli ve örten bir fonksiyon olsun.Bu takdirde; (X,T) Lindelöf uzayı ise (Y,T^*) da Lindelöf uzayıdır.

Ispat: $\mathcal{B}$; Y nin bir açık örtümü olsun. Buradan

$$\sup_{B\in\mathcal{B}}\{\mu_B f(x)\}=\sup_{B\in\mathcal{B}}\{\mu_{f^{-1}[B]}(x)\}=\mu_{\bigcup_{B\in\mathcal{B}}f^{-1}[B]}(x)=1$$

olur. Diğer taraftan f F-sürekli olduğundan $\{f^{-1}[B] \mid B \in \mathcal{B}\}$ ailesi X in bir açık örtümüdür. (X,T) Lindelöf uzayı olduğundan bu örtümün $\{f^{-1}[B_i] \mid i=1,2,\ldots\}$ şeklinde sayılabilir bir alt örtümü vardır, yani

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}[B_i]$$

dir. Ayrıca f örten olduğundan

$$\text{(III.1)} \qquad f(X)=f(\bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}[B_i]) = Y$$

ve sonuç II.1 a), Teorem II.5 e) kullanılırsa

$$\text{(III.2)} \qquad f(\bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}[B_i]) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f(f^{-1}[B_i]) = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$$

elde edilir. (III.1), (III.2) den

$$Y = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$$

bulunur. Buradan $\{B_i \mid i=1,2,\ldots\} \subset \mathcal{B}$ $\mathcal{B}$ nin sayılabilir bir alt örtümüdür, yani (Y,T^*) Lindelöf uzayıdır. ●

<u>Teorem III. 6 [4]</u> (X,T) bir ftu olsun. (X,T) Lindelöf tür $\Longleftrightarrow$ X in her açık örtümüne karşılık her $0<\varepsilon<1$ için X in sayılabilir bir ε-parçalanışı vardır.

<u>İspat :</u>"$\Longrightarrow$" $\mathcal{A}$; X in keyfi açık örtümü ve $0<\varepsilon<1$ keyfi olsun. Hipotezden $\mathcal{A}_0 := \{A_k \mid k=1,2,\ldots\}$ şeklinde $\mathcal{A}$ nın sayılabilir bir alt örtümü vardır. Her $A_k \in \mathcal{A}_0$ için $\Gamma_{k,\varepsilon} = \{x \in X : \mu_{A_k}(x) \geq 1-\varepsilon\}$ olmak üzere $\{\Gamma_{k,\varepsilon} \mid k=1,2,\ldots\}$ X in $\mathcal{A}_0$ a karşılık gelen sayılabilir bir ε-parçalanışıdır. $\mathcal{A}_0$ $\mathcal{A}$ nın alt ailesi olduğundan bu parçalanış, X in $\mathcal{A}$ ile verilen sayılabilir bir ε-parçalanışıdır.

"$\Longleftarrow$" $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in I\}$ X in bir açık örtümü ve $0<\varepsilon<1$ için $\{\Gamma_{i,\varepsilon} \mid i \in I(\varepsilon) \subset I\}$ X in $\mathcal{A}$ ile verilen sayılabilir bir ε-parçalanışı olsun. Her $\varepsilon = \frac{1}{n}$ $(n=2,3,\ldots)$ için X in $\mathcal{A}$ ya karşılık gelen $\frac{1}{n}$- parçalanışlarının oluşturduğu $\{\Gamma_{i,\frac{1}{n}} \mid i \in I(\frac{1}{n}), n=2,3,\ldots\}$ ailesi de sayılabilirdir. $A_{i,\frac{1}{n}}$ $\Gamma_{i,\frac{1}{n}}$ i belirleyen fuzzy kümesi olmak üzere $\mathcal{A}_0 := \{A_{i,\frac{1}{n}} \mid i \in I(\frac{1}{n}), n=2,3,\ldots\}$ ailesi $\mathcal{A}$ nın sayılabilir bir alt ailesidir ve bu aile X in bir örtümüdür. Gerçekten; $x \in X$ ve $\varepsilon > 0$ için $n_0 \in \mathbb{N}$

$\frac{1}{n_o} < \varepsilon$ olacak şekilde seçilsin. $\mathcal{A}$ ya karşılık X in $\frac{1}{n_o}$- parçalanışı mevcut olduğundan

$$\exists\, i_o \in I(\tfrac{1}{n_o}) : \mu_{A_{i_o, \frac{1}{n_o}}}(x) \geq 1 - \tfrac{1}{n_o} > 1 - \varepsilon$$

dir. Buradan

$$\sup\{\mu_{A_{i,\frac{1}{n}}}(x) : i \in I(\tfrac{1}{n}), n=2,3,\ldots\} = 1$$

elde edilir. Şu halde (X,T) Lidelöf uzayıdır. ●

Şimdi de çeşitli kavramları aşağıdaki iki örnek üzerinde görelim.

1. Yarı -Sürekli Fuzzy Topolojisi. $(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay, A X de bir fuzzy kümesi ve $\alpha \in [0,1)$ olmak üzere $\Gamma_{A,\alpha} \subset X$ kümesini

$$\Gamma_{A,\alpha} := \{x \in X \mid \mu_A(x) > \alpha\}$$

şeklinde tanımlayalım. Şimdi de X üzerindeki fuzzy kümelerinin

$$T: \{A \text{ X de bir fuzzy kümesi öyle ki; } \Gamma_{A,\alpha} \in \mathcal{T} \quad , \alpha \in [0,1)\}$$

ailesini göz önüne alalım. Bu durumda T X üzerinde bir fuzzy topolojisidir. Gerçekten; i) $\Gamma_{\emptyset,\alpha} = \{x \in X \mid \mu_\emptyset(x) > \alpha\} = \emptyset \subset X$

$$\Gamma_{X,\alpha} = \{x \in X \mid \mu_X(x) > \alpha\} = X \subset X$$

ve $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzay olduğundan $\Gamma_{\emptyset,\alpha}$, $\Gamma_{X,\alpha} \in \mathcal{T}$, yani $\emptyset, X \in T$ dir.

ii) önce her $\alpha \in [0,1)$ için

$$\Gamma_{A\cap B,\alpha} = \Gamma_{A,\alpha} \cap \Gamma_{B,\alpha} \tag{III.3}$$

eşitliğinin doğru olduğunu gösterelim. $x \in X$ herhangibir nokta olsun.

$$x \in \Gamma_{A\cap B,\alpha} \Longleftrightarrow \mu_{A\cap B}(x) > \alpha \Longleftrightarrow \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) > \alpha$$

$$\Longleftrightarrow \mu_A(x) > \alpha \text{ ve } \mu_B(x) > \alpha \Longleftrightarrow x \in \Gamma_{A,\alpha} \text{ ve } \quad x \in \Gamma_{B,\alpha}$$

$$\Longleftrightarrow x \in \Gamma_{A,\alpha} \cap \Gamma_{B,\alpha}$$

olduğundan (III.3) eşitliği doğrudur.

Şimdi $A,B \in T$ olsun. Buradan $\Gamma_{A,\alpha} \in \mathcal{T}$, $\Gamma_{B,\alpha} \in \mathcal{T}$ ve $\mathcal{T}$ topoloji olduğundan $\Gamma_{A,\alpha} \cap \Gamma_{B,\alpha} \in \mathcal{T}$ dır. Ayrıca (III.3) eşitliği kullanılırsa $\Gamma_{A \cap B,\alpha} \in \mathcal{T}$, yani $A \cap B \in T$ elde edilir.

iii) Önce her $\alpha \in [0,1)$ için

$$\Gamma_{\bigcup\limits_{i \in I} A_i,\alpha} = \bigcup_{i \in I} \Gamma_{A_i,\alpha} \qquad \text{(III.4)}$$

eşitliğinin doğru olduğunu gösterelim. $x \in X$ herhangibir nokta olsun

$$x \in \Gamma_{\bigcup\limits_{i \in I} A_i,\alpha} \iff \mu_{\bigcup\limits_{i \in I} A_i}(x) = \sup_{i \in I}\{\mu_{A_i}(x)\} > \alpha \iff \exists i \in I : \mu_{A_i}(x) > \alpha$$
$$\iff x \in \bigcup_{i \in I} \Gamma_{A_i,\alpha}$$

olduğundan (III.4) eşitliği doğrudur.

Şimdi $(A_i)_{i \in I} \in T$ olsun. Buradan her $i \in I$ için $\Gamma_{A_i,\alpha} \in \mathcal{T}$ dır. $\mathcal{T}$ topoloji olduğundan $\bigcup\limits_{i \in I} \Gamma_{A_i,\alpha} \in \mathcal{T}$ ve ayrıca (III.4) eşitliği kullanılırsa $\Gamma_{\bigcup\limits_{i \in I} A_i,\alpha} \in \mathcal{T}$,yani $\bigcup\limits_{i \in I} A_i \in T$ elde edilir.Şu halde T X üzerinde bir fuzzy topolojisidir.Bu topolojiye "yarı-sürekli fuzzy topolojisi" denir.

A X de μ_A üyelik fonksiyonu sürekli olan bir fuzzy kümesi olsun.(Burada $[0,1]$ doğal topolojisi ile gözönüne alınmıştır.) Her $\alpha \in [0,1)$ ve her $x \in X$ için

$$x \in \Gamma_{A,\alpha} \iff \mu_A(x) > \alpha \iff x \in \mu_A^{-1}(\alpha,1]$$

olduğundan

$$\Gamma_{A,\alpha} = \mu_A^{-1}(\alpha,1]$$

dır. μ_A sürekli olduğundan $\mu_A^{-1}(\alpha,1] = \Gamma_{A,\alpha} \in \mathcal{T}$, yani $A \in T$ dir. Buradan görülüyor ki, X de üyelik fonksiyonları sürekli olan fuzzy kümeleri X üzerinde tanımlanan T yarı-sürekli fuzzy topolojisine göre açıktır.

$B_x (x \in X)$ sürekli üyelik fonksiyonu μ_{B_x} ile aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$\mu_{B_x}(y) = \begin{cases} 1, & y=x \\ <1, & y \neq x \end{cases}$$

Her $x \in X$ için $B_x \in T$ ve

$$\mu_{\bigcup_{x\in X} B_x}(x)=\sup\{\mu_{B_x}(x) \mid x\in X\}=1$$

olduğundan $\{B_x \mid x\in X\}$ X in bir açık örtümüdür. Eğer X sonlu değilse bu örtümün hiç sonlu alt örtümü yoktur.

Varsayım: X sonlu olmasın ve $\{B_{x_1},\ldots,B_{x_n}\}$ X in bir açık örtümü olsun. Her $x\in X$ için

$$\text{maks}\{\mu_{B_{x_1}}(x),\mu_{B_{x_2}}(x),\ldots,\mu_{B_{x_n}}(x)\}=1$$

olur. Buradan her $x\in X$ için

$$\exists i\in\{1,2,\ldots,n\}:\ \mu_{B_{x_i}}(x)=1 \tag{III.5}$$

elde edilir. X sonsuz elemanlı olduğundan

$$\exists x\in X\setminus\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}:\ i=1,2,\ldots,n \text{ için } \mu_{B_{x_i}}(x)<1$$

bulunur. Bu ise (III.5) ile çelişir. O halde varsayım yanlış, yani X in hiç sonlu alt örtümü yoktur. Buradan (X,T) yarı -sürekli fuzzy topolojik uzayı kompakt olamaz.

$\{V_n \mid n=1,2,\ldots\}$ birleşimleri X olan X deki ayrık alt kümelerin sayılabilir bir ailesi olsun. $B_n (n=1,2,\ldots)$ fuzzy kümelerinin sürekli üyelik fonksiyonları

$$\mu_{B_n}(y)=\begin{cases} 1, & y\in V_n \\ <1, & y\notin V_n \end{cases}$$

ile verilen bir ailesi olsun. Her bir B_n sürekli üyelik fonksiyonu ile tanımlandığından T yarı-sürekli fuzzy topolojisine göre açıktır. Diğer taraftan her $x\in X$ için

$$\exists n\in\{1,2,\ldots\}: x\in V_n \Longrightarrow \mu_{B_n}(x)=1 \Longrightarrow \sup_{n\in\{1,2,\ldots\}}\{\mu_{B_n}(x)\}=1$$

olduğundan $\{B_n \mid n=1,2,\ldots\}$ (X,T) nin sayılabilir bir açık örtümüdür. Eğer V_n lerin hiç biri boş değilse bu örtümün hiç sonlu alt örtümü yoktur.

Varsayım: Bu örtümün $\{B_{x_1}, B_{x_2},\ldots,B_{x_k}\}$ şeklinde bir alt örtümü olsun. Her $x\in X$ için

$$\text{maks}\{\mu_{B_{x_1}}(x),\mu_{B_{x_2}}(x),\ldots,\mu_{B_{x_k}}(x)\}=1$$

olur. Buradan

$$\exists\, i\in\{1,2,3,\ldots,k\} : \mu_{B_{x_i}}(x) = 1$$

dir. Diğer taraftan V_n lerin hiçbiri boş olmadığından ve V_n ler ayrık olduklarından

$$\exists x\in V_{k+1}: x\notin V_i \ (i\neq k+1) \Longrightarrow \forall i\in\{1,2,\ldots,k\} \text{ için } \mu_{B_{x_i}}(x)<1$$

elde edilir. Bu ise (III.6) ile çelişir. O halde varsayım yanlıştır, yani $\{B_n|n=1,2,\ldots\}$ sayılabilir açık örtümünün hiç sonlu alt örtümü yoktur. Buradan (X,T) yarı-sürekli fuzzy topolojik uzayı sayılabilir kompakt olamaz.

2 Yarı-diskret Fuzzy Topolojisi .

X bir küme ve $0\leq\alpha<1$ keyfi verilsin. X üzerinde tanımlı bütün fuzzy kümelerinin bir T_α alt ailesini $x\in X$ olmak üzere

$$T_\alpha: =\{A_\beta|\ \mu_{A_\beta}(x)=\beta,\ \beta\in[0,\alpha] \text{ veya } \beta=1\}$$

şeklinde tanımlayalım. T_α X üzerinde bir fuzzy topolojisidir.

Gerçekten; i) $\beta=0, \beta=1$ ve her $x\in X$ için $\mu_{A_0}(x)=0$, $\mu_{A_1}(x)=1$ olduğundan $A_0=\emptyset$, $A_1=X\in T_\alpha$ dır.

ii) $A_\beta, A_{\beta'}\in T_\alpha$ olsun. ($\beta,\beta'\in[0,\alpha]$ veya $\beta,\beta'=1$) Her $x\in X$ için

$$\mu_{\bigcup\limits_{i\in I} A_{\beta_i}}(x) = \sup\{\mu_{A_{\beta_i}}(x)\mid i\in I\} = \sup\{\beta_i\mid i\in I\}$$

olduğundan $A_\beta\cap A_{\beta'}\in T_\alpha$ dır.

iii) $\{A_{\beta_i}|i\in I\}\subset T_\alpha$ olsun. ($\beta_i\in[0,\alpha]$ veya $\beta_i=1$) Her $x\in X$ için

$$\mu_{\bigcup\limits_{i\in I} A_{\beta_i}}(x) = \sup\{\mu_{A_{\beta_i}}(x)\mid i\in I\} = \sup\{\beta_i\mid i\in I\}$$

olduğundan $\bigcup\limits_{i\in I} A_{\beta_i}\in T_\alpha$ dır. Şu halde T_α alt ailesi X üzerinde bir fuzzy topolojisidir. Bu fuzzy topolojisine " yarı-diskret fuzzy topolojisi " denir. Bu fuzzy topolojisi ile oluşturulan (X,T_α) yarı-diskret fuzzy topolojik uzayı kompakt, sayılabilir kompakt ve Lindelöf'tür. Çünkü; her $x \in X$ için

$$\sup\{\mu_{A_\beta}(x) \mid \beta \in [o,\alpha] \text{ veya } \beta=1\}=1$$

olması $\beta=1$, dolayısıyla $A_1 = X$ le mümkün olacağından X in açık örtümü (sayılabilir açık örtümü) sadece X in kendisidir. Bu nedenle (X,T_α) kompakt, sayılabilir kompakt ve Lindelöf'tür.

R: $[o,\alpha]$ aralığındaki rasyonel sayıların kümesi olmak üzere $\mathcal{B} \subset T_\alpha$ ailesini

$$\mathcal{B} := \{A_{\beta'} \mid \mu_{A_{\beta'}}(x) = \beta', \beta' \in R \text{ veya } \beta'=1, \ x \in X\}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda sayılabilir $\mathcal{B}$ ailesi T_α için bir bazdır. Bunun için $A_\beta \in T_\alpha$ keyfi olsun. $\beta \in [o,\alpha]$ veya $\beta=1$ dir. $\beta=1$ ise $A_\beta \in \mathcal{B}$ olduğundan $\mathcal{B}$ T_α için bir bazdır. Eğer $\beta \in [o,\alpha]$ ise $[o,\alpha]$ da $\beta'_n \longrightarrow \beta$ olacak şekilde bir $(\beta'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton artan rasyonel sayı dizisi vardır. Buradan $A_{\beta'_n} \in \mathcal{B}$ olup

$$\mu_{A_\beta}(x) = \sup\{\mu_{A_{\beta'_n}}(x) \mid n \in \mathbb{N}\} \qquad (x \in X)$$

yani;

$$A_\beta = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{\beta'_n}$$

elde edilir. Şu halde β nın her iki durumu için sayılabilir $\mathcal{B}$ ailesi T_α için bazdır. Sonuç olarak (X,T_α) C_{11}-ftu dır.●

<u>Tanım III.6[1]</u> (X,T) ve (Y,T^*) iki ftu olsun

i) X den Y ye birebir, örten, F-sürekli ve tersi de F-sürekli olan bir dönüşüm varsa bu dönüşüme bir "Fuzzy homeomorfizmi" veya kısaca "F-homeomorfizmi" denir.

ii) (X,T) ve (Y,T^*) fuzzy topolojik uzayları arasında bir F-homeomorfizmi varsa bu azaylara "Fuzzy homeomorf" veya kısaca "F-homeomorf" uzaylar denir.

iii) Eğer (X,T) ve (Y,T^*) fuzzy topolojik uzayları F-homeomorf ise bu uzaylara "Topolojik olarak Fuzzy denk " veya kısaca "F- denk" uzaylar denir.

Teorem III.7[4] (X,T_α) ve $(X,T_{\alpha'})$ iki yarı-diskret fuzzy topolojik uzay olsun. (X,T_α) ve $(X,T_{\alpha'})$ F-denktir $\Longleftrightarrow \alpha=\alpha'$

Ispat: "$\Longrightarrow$" $f: (X,T_\alpha)\longrightarrow(X,T_{\alpha'})$ bir homeomorfizm ve $\alpha\neq\alpha'$ olsun.

i) $\alpha<\alpha'$ ise her $A_{\alpha'}\in T_{\alpha'}$ için

$$\mu_{f^{-1}[A_{\alpha'}]}(x)=\mu_{A_{\alpha'}}(f(x))=\alpha'$$

ve $\alpha'>\alpha$ olduğundan $f^{-1}[A_{\alpha'}]\notin T_\alpha$ dır.

ii) $\alpha>\alpha'$ ise; $g:=f^{-1}:(X,T_{\alpha'})\longrightarrow(X,T_\alpha)$ tanımlanırsa her $A_\alpha\in T_\alpha$ için

$$\mu_{g^{-1}[A_\alpha]}(x)=\mu_{A_\alpha}(g(x))=\mu_{A_\alpha}(f^{-1}(x))=\alpha$$

ve $\alpha>\alpha'$ olduğundan $g^{-1}[A_\alpha]\notin T_{\alpha'}$ dır. i),ii) den f,f^{-1} fonksiyonlarının F-sürekli olmadıkları görülür. Bu ise hipotezle çelişir. O halde $\alpha=\alpha'$ olmak zorundadır.

"$\Longleftarrow$" $\alpha=\alpha'$ olsun, $i:X\longrightarrow X;\ i(x):=x\ (x\in X)$ şeklinde tanımlanan i fonksiyonu bir F- homeomorfizmi olduğundan (X,T_α) ve $(X,T_{\alpha'})$ F- denk uzaylardır.●

BÖLÜM IV

FUZZY TOPOLOJİSİ ; ÇARPIM - VE BÖLÜM TEOREMLERİ

A Fuzzy Çarpım Topolojisi

Tanım IV.1 [5] (X,T) bir ftu ve $S \subset T$ olsun. Eğer S nin elemanlarının bütün sonlu arakesitlerinin ailesi T için bir baz oluyorsa S ye T için bir alt baz denir.

Tanım IV.2 [5] $\{X_\alpha \mid \alpha \in I\}$ kümelerin bir ailesi, $X := \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ bu ailenin kartezen çarpımı ve $p_\alpha : \prod_{\alpha \in I} X_\alpha \longrightarrow X_\alpha$ ya bir projeksiyon olsun.

$$S = \{p_\alpha^{-1}[B_\alpha] \mid B_\alpha \in T_\alpha , \alpha \in I\}$$

$$\mathcal{B} = \{\bigcap_{\alpha \in K} p_\alpha^{-1}[B_\alpha] \mid B_\alpha \in T_\alpha , K \subset I, K \text{ sonlu}\}$$

şeklinde tanımlansın. $\mathcal{B}$ nin elemanlarının bütün keyfi birleşimlerinin ailesini $\mathcal{T}$ ile gösterelim. Bu durumda $\mathcal{T}$; X üzerinde bir bazı $\mathcal{B}$ ve bir alt bazı S olan bir fuzzy topolojisidir.

Tanım IV.3 [5] $\{(X_\alpha, T_\alpha) \mid \alpha \in I\}$ fuzzy topolojik uzaylarının bir ailesi ve $X := \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ bu ailenin çarpım kümesi olsun. X kümesi üzerinde yukarıdaki gibi tanımlanan $\mathcal{T}$ topolojisine fuzzy çarpım topolojisi ve $(X, \mathcal{T})$ ya da fuzzy çarpım uzayı denir.

Teorem IV.1 [5] $\{(X_\alpha, T_\alpha) \mid \alpha \in I\}$ fuzzy topolojik uzaylarının bir ailesi ve $(X, \mathcal{T})$ çarpım uzayı olsun. Bu takdirde;

i) Her $\alpha \in I$ için p_α F-süreklidir.

ii) X üzerindeki fuzzy çarpım topolojisi $\mathcal{T}$, p_α $(\alpha \in I)$ projeksiyonlarını sürekli yapan X üzerindeki en kaba fuzzy topolojisidir.

iii) (Y, T^*) bir ftu ve $f : Y \longrightarrow X$ örten bir fonksiyon olsun. f F-süreklidir $\Longleftrightarrow$ Her $\alpha \in I$ için $p_\alpha \circ f$ F-süreklidir.

Ispat i) Fuzzy çarpım topolojisinin tanımından p_α projeksiyon fonksiyonları F-süreklidir.

ii) X çarpım kümesi üzerindeki fuzzy çarpım topolojisini $\mathcal{T}$ ile, her $\alpha \in I$ için p_α projeksiyonlarını sürekli yapan X üzerindeki başka bir topolojiyi $\mathcal{T}^*$ ile gösterelim. Her $\alpha \in I$ için p_α $\mathcal{T}^*$ a göre F-sürekli olduğundan $p_\alpha^{-1}[B_\alpha]$ $(B_\alpha \in T_\alpha)$ tipindeki bütün kümeler, yani $\mathcal{T}$

nun tüm alt baz elemanları τ^* da bulunacağından $\tau \subset \tau^*$ dır.

iii) "$\Longrightarrow$" Her $\alpha \in I$ için p_α F-sürekli ve f F-sürekli olduğundan $p_\alpha \circ f$ F-süreklidir.

"$\Longleftarrow$" Her $\alpha \in I$ için $p_\alpha \circ f$ F-sürekli ve $B \in \tau$ olsun. B ; $p^{-1}[B_\alpha]$ ($B_\alpha \in T_\alpha$) tipindeki kümelerin sonlu arakesitlerinin keyfi birleşimi şeklindedir. Diğer taraftan f birleşim ve arakesit işlemlerini koruduğundan $f^{-1}[B]$;

$$f^{-1}[p_\alpha^{-1}[B_\alpha]]=(p_\alpha \circ f)^{-1}[B_\alpha] \quad (B_\alpha \in T_\alpha)$$

şeklindeki kümelerin sonlu arakesitlerinin keyfi birleşimidir. Her $\alpha \in I$ için $p_\alpha \circ f$ F-sürekli olduğundan $f^{-1}[B] \in \tau^*$ dır. Buradan f F-süreklidir.●

Teorem IV.2 [5] : $\{(X_\alpha, T_\alpha) \mid \alpha=1,2,3,\ldots\}$ C_{11}-ftu larının sayılabilir bir ailesi ise (X,τ) fuzzy çarpım uzayı da C_{11}-ftu dır.

Ispat B_α T_α için sayılabilir bir baz,

$$\mathcal{U} := \{p_\alpha^{-1}[B] \mid B \in B_\alpha, \ \alpha=1,2,\ldots\}$$

ve $\mathcal{B}$; $\mathcal{U}$ nun bütün sonlu arakesitlerinin ailesi olsun. $\mathcal{B}$ τ nun sayılabilir alt ailesidir. Ayrıca $\mathcal{B}$ τ için bir baz dır. Gerçekten ;

$F \in \tau$ keyfi olsun. F; $\bigcap_{i=1}^{n} p_{\alpha_i}^{-1}[A_i]$, $(A_i \in T_{\alpha_i})$ tipindeki açık kümelerin keyfi birleşimidir. B_{α_i} T_{α_i} için bir baz olduğundan, $B_{j_i} \in B_{\alpha_i}$ olmak üzere

$$A_i = \bigcup_{j_i \in J_i} B_{j_i}$$

ve buradan da

$$p_{\alpha_i}^{-1}[A_i]=p_{\alpha_i}^{-1}\Big[\bigcup_{j_i \in J_i} B_{j_i}\Big]$$

dir. p_{α_i} ler örten olduklarından sonuç II.1 a) dan

$$p_{\alpha_i}^{-1}\Big[\bigcup_{j_i \in J_i} B_{j_i}\Big]=\bigcup_{j_i \in J_i} p_{\alpha_i}^{-1}[B_{j_i}] \Longrightarrow \bigcap_{i=1}^{n} p_{\alpha_i}^{-1}[A_i]=\bigcap_{i=1}^{n}\bigcup_{j_i \in J_i} p_{\alpha_i}^{-1}[B_{j_i}]$$

elde edilir.Sonuç II.1 b) kullanılırsa

$$\bigcap_{i=1}^{n} \bigcup_{j_i \in J_i} p_{\alpha_i}^{-1}[B_{j_i}] = \bigcup_{j_i \in J_i} \bigcap_{i=1}^{n} p_{\alpha_i}^{-1}[B_{j_i}]$$

bulunur.Buradan

$$\bigcap_{i=1}^{n} p_{\alpha_i}^{-1}[A_i] = \bigcup_{j_i \in J_i} \bigcap_{i=1}^{n} p_{\alpha_i}^{-1}[B_{j_i}]$$

olduğu görülür. Bu ise F nin, $\mathcal{U}$ nun elemanlarının sonlu arakesitlerinin keyfi birleşimleri şeklinde yazılabileceğini, yani $\mathcal{B}$ nin $\mathcal{T}$ için bir baz olduğunu gösterir. Şu halde $(X,\mathcal{T})$ C_{11}-ftu dır.●

<u>Teorem IV.3 [5]</u> $\{(X_\alpha, T_\alpha) \mid \alpha=1,2,\ldots,n\}$ kompakt (sayılabilir kompakt) fuzzy uzaylarının sonlu bir ailesi olsun. Bu takdirde; $(X,\mathcal{T})$ fuzzy çarpım uzayı da kompakttır.(sayılabilir kompakttır.)

<u>Ispat:</u> Teorem sadece kompaktlık için ıspatlanacaktır. Sayılabilir kompaktlık için ıspat benzer yolla yapılır.Ispat için n=2 durumunun doğruluğunu göstermek yeterlidir.Bu durumda fuzzy çarpım topolojisi

$$B=\{A_1 x A_2 \mid A_1 \in T_1, A_2 \in T_2\}$$

bazı ile karakterize edilebilir.Burada A_1xA_2,

$$\mu_{A_1 x A_2}(x_1, x_2) = \min(\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2))$$

üyelik fonksiyonları ile tanımlanan X deki fuzzy kümesidir.

$\mathcal{A}=\{B_i \mid i\in I\}$ $(X,\mathcal{T})$ fuzzy çarpım uzayının bir açık örtümü olsun.Her $i \in I$ için

$$B_i = A_1^{(i)} x A_2^{(i)}, A_1^{(i)} \in T_1, A_2^{(i)} \in T_2$$

şeklinde göz önüne alınabilir.y X_2 de alınan herhangibir nokta olmak üzere

$$S_y := X_1 x\{y\} \subset X$$

ve $\delta > o$ sabit sayısı için

$$V_{y,\delta} := \{A_1^{(i)} x A_2^{(i)} \mid \exists x_1 \in X_1 : \mu_{A_1^{(i)}}(x_1) > 1-\delta, \mu_{A_2^{(i)}}(y) > 1-\delta\}$$

kümelerini tanımlayalım. $V_{y,\delta}\neq\emptyset$ dır. Gerçekten; $\mathcal{A}$ örtüm olduğundan her $(x,y)\in X_1xX_2$ dolayısıyla $(x_1, y)\in X_1xX_2$ için de

$$\sup\left\{\mu_{A_1^{(i)}\times A_2^{(i)}}(x_1,y)\right\}=1$$

dir. Buradan her $\delta>0$ için

$$\exists A_1^{(i)}xA_2^{(i)}\in\mathcal{A}:\mu_{A_1^{(i)}\times A_2^{(i)}}(x_1,y)>1-\delta$$

$$\Longrightarrow \min\left(\mu_{A_1^{(i)}}(x_1),\ \mu_{A_2^{(i)}}(y)\right)>1-\delta$$

$$\Longrightarrow \mu_{A_1^{(i)}}(x_1)>1-\delta \text{ ve } \mu_{A_2^{(i)}}(y)>1-\delta$$

dır. Şu halde $V_{y,\delta}\neq\emptyset$ dır. Ayrıca $\{V_{y,\delta}\mid \delta>0\}$ S_y nin bir açık örtümüdür. Bunu göstermek için her $(x_1,y)\in S_y$ için

$$\sup\left\{\mu_{A_1^{(k)}\times A_2^{(k)}}(x_1,y)\mid A_1^{(k)}xA_2^{(k)}\in V_{y,\delta}\right\}=1$$

olduğunu göstermeliyiz. Bunun için $\mathcal{A}$ nın örtüm olduğu kullanılırsa her $(x_1,y)\in S_y$ için $(x_1,y)\in X_1xX_2$ olduğundan

$$\sup\left\{\mu_{A_1^{(i)}\times A_2^{(i)}}(x_1,y)\mid A_1^{(i)}xA_2^{(i)}\in\mathcal{A}\right\}=1$$

dir. Buradan her $k\in\mathbb{N}$ için

$$\mu_{A_1^{(k)}\times A_2^{(k)}}(x_1,y)>1-\frac{1}{k}$$

dolayısıyla $\frac{1}{k_0}<\delta$ olacak şekilde $k_0\in\mathbb{N}$ için de

$$\mu_{A_1^{(k_0)}\times A_2^{(k_0)}}(x_1,y)>1-\frac{1}{k_0}>1-\delta$$

dır. Bu ise $A_1^{(k_0)}xA_2^{(k_0)}\in V_{y,\delta}$ olduğunu gösterir. Diğer taraftan her $k\geq k_0$ için

$$\frac{1}{k}\leq\frac{1}{k_0} \text{ ve } \mu_{A_1^{(k)}\times A_2^{(k)}}(x_1,y)>1-\frac{1}{k}\geq 1-\frac{1}{k_0}>1-\delta$$

olduğundan

$$\lim_{k\to\infty} \mu_{A_1^{(k)}\times A_2^{(k)}}(x_1,y)=1$$

dir.Bu bağıntı her $(x_1,y)\in S_y$ için $\mu_{A_1^{(k)}\times A_2^{(k)}}(x_1,y)\leq 1$ olması ile birleştirilirse

$$\sup\left\{\mu_{A_1^{(k)}\times A_2^{(k)}}(x_1,y) \mid A_1^{(k)}\times A_2^{(k)}\in V_{y,\delta}\right\}=1$$

elde edilir.Şimdi

$$W_{y,\delta}:=\left\{A_1^{(i)} \mid A_1^{(i)}\times A_2^{(i)}\in V_{y,\delta}\right\}$$

şeklinde tanımlayalım.Her $(x_1,y)\in S_y$ için

$$\lim_{k\to\infty} \mu_{A_1^{(k)}\times A_2^{(k)}}(x_1,y)=1$$

olduğundan

$$\lim_{k\to\infty} \min\left(\mu_{A_1^{(k)}}(x_1),\mu_{A_2^{(k)}}(y)\right)=1$$

dir. Buradan

$$\lim_{k\to\infty} \mu_{A_1^{(k)}}(x_1)=1,\quad \lim_{k\to\infty} \mu_{A_2^{(k)}}(y)=1$$

elde edilir.Her $x_1\in X_1$ için $\mu_{A_1^{(k)}}(x_1)\leq 1$ olduğundan

$$\sup\left\{\mu_{A_1^{(k)}}(x_1) \mid A_1^{(k)}\in T_1\right\}=1$$

bulunur.Bu ise, $W_{y,\delta}$ nın (X_1,T_1) in bir açık örtümü olduğunu gösterir. (X_1,T_1) kompakt olduğundan $W_{y,\delta}$ nın $Z_{y,\delta}\subset W_{y,\delta}$ gibi sonlu bir alt örtümü vardır.Her bir $A_1^{(i)}\in Z_{y,\delta}$ için bir $A_2^{(i)}$ fuzzy kümesini; $A_1^{(i)}\times A_2^{(i)}\in V_{y,\delta}$ olacak şekilde seçelim.Bu şekilde oluşturulan $A_1^{(i)}\times A_2^{(i)}$ lerin sonlu ailesini $H_{y,\delta}$ ile gösterelim, yani

$$H_{y,\delta}:=\left\{A_1^{(i)}\times A_2^{(i)} \mid A_1^{(i)}\times A_2^{(i)}\in V_{y,\delta},\ A_1^{(i)}\in Z_{y,\delta},\ A_2^{(i)}\in T_2\right\}$$

dır.$H_{y,\delta}$ nın seçimindeki $A_2^{(i)}\in T_2$ lerin kümesini $G_{y,\delta}$ ile adlandıralım, yani

$$G_{y,\delta}:=\{A_2^{(i)} \mid A_1^{(i)} x A_2^{(i)} \in H_{y,\delta}, A_2^{(i)} \in T_2\}$$

dır.

$$D_{y,\delta} :=\{\bigcap A_2^{(i)} \mid A_2^{(i)} \in G_{y,\delta}\}$$

olarak tanımlayalım.Bu durumda $D_{y,\delta} \subset T_2$dir.Bu işlemi her $y \in X_2$ ve her $\delta > o$ için yaparsak $\{D_{y,\delta} \mid y \in X_2 , \delta > o\}$ ailesi (X_2,T_2) nin bir açık örtümüdür. Gerçekten; $\varepsilon > o$ keyfi verilsin. Her $\delta > o$ için dolayısıyla $\delta < \varepsilon$ için de $G_{y,\delta}$ tanımlı olduğundan her $y \in X_2$ ve her $A_2^{(i)} \in G_{y,\delta}$ için

$$\mu_{A_2^{(i)}}(y) > 1-\delta > 1-\varepsilon$$

dır.Buradan

$$\min \{\mu_{A_2^{(i)}}(y) \mid A_2^{(i)} \in G_{y,\delta}\} > 1-\varepsilon$$

$$\Longrightarrow \{\mu_{\bigcap A_2^{(i)}}(y) \mid A_2^{(i)} \in G_{y,\delta}\} > 1-\varepsilon$$

$$\Longrightarrow \mu_{D_{y,\delta}}(y) > 1-\varepsilon$$

elde edilir.Her $\varepsilon > o$ için $\mu_{D_{y,\delta}}(y) > 1-\varepsilon$ olduğundan

$$\sup \{\mu_{D_{y,\delta}}(y) \mid \delta > o\} = 1$$

dir.(X_2,T_2) kompakt olduğundan bu örtümün sonlu bir alt örtümü vardır.Bu alt örtümü $\{D_{y_i,\delta_i} \mid i=1,2,3,\ldots,m\}$ ile gösterelim ve

$$\mathcal{B} :=\{H_{y_i,\delta_i} \mid i=1,2,3,\ldots,m\} \subset \mathcal{A}$$

olarak tanımlayalım.Bu durumda $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}$ nın sonlu bir alt örtümüdür. Gerçekten; $\mathcal{B}$ sonlu ailelerin sonlu kolleksiyonu olduğundan sonludur. Şimdi $\mathcal{B}$ nin X in bir örtümü olduğunu gösterelim.$(x,y) \in X_1 \times X_2$ keyfi alalım. $\{D_{y_i,\delta_i} \mid i=1,2,3,\ldots,m\}$ (X_2,T_2) nin bir açık örtümü olduğundan

$$\exists i \in \{1,2,\ldots,m\} : \mu_{D_{y_i,\delta_i}}(y)=1$$

dir. Buradan

$$\min\{\mu_{A_2^{(i)}}(y) \mid A_2^{(i)} \in G_{y_i,\delta_i}\}=1$$

dir. Şu halde her $A \in G_{y_i,\delta_i}$ için $\mu_A(y)=1$ dir. Diğer taraftan $Z_{y,\delta}$ (X_1,T_1) in bir sonlu örtümü olduğundan

$$\exists B \in Z_{y,\delta} : \mu_B(x)=1$$

dir. Bu B yi birinci koordinat ve $G_{y,\delta}$ nın her B_o elemanını ikinci koordinat olarak seçtiğimiz takdirde $(BxB_o) \in \mathcal{B}$ için

$$\mu_{B \times B_o}(x,y)=\min\{\mu_B(x),\, \mu_{B_o}(y)\}=1$$

olduğundan $\mathcal{B}$, X in bir örtümüdür, sonuç olarak $(X, \mathcal{T})$ kompakttır.●

Teorem IV.4 [5] Kompakt (sayılabilir kompakt) fuzzy topolojik uzaylarının öyle bir sayılabilir ailesi vardır ki, onların çarpım uzayı kompakt (sayılabilir kompakt) değildir.

Ispat: Y noktaların kümesi, n pozitif bir tamsayı olmak üzere $y \in Y$ için A_n, $\mu_{A_n}(y)=1-\frac{1}{n}$ üyelik fonksiyonu ile tanımlanan Y deki fuzzy kümesi olsun. $X_n := Y$ ve $T_n:=\{\emptyset, A_n, Y\}$ olarak tanımlandığında X_n in açık örtümü (sayılabilir açık örtümü) sadece X_n olduğundan (X_n,T_n) kompakttır (sayılabilir kompakttır). Buna rağmen, $\{(X_n,T_n) \mid n=1,2,\ldots\}$ sayılabilir ailesinin fuzzy çarpım uzayı kompakt (sayılabilir kompakt) değildir. Gerçekten;

$$X=\prod_{n=1}^{\infty} X_n$$

çarpım kümesi olmak üzere

$$S=\{\emptyset, X, p_n^{-1}[A_n] \mid n=1,2,\ldots \quad, A_n \in T_n\}$$

ailesinin önce sonlu arakesitleri ve sonra da bu arakesitlerin birleşimleri alınarak fuzzy çarpım topolojisi $\mathcal{T}$ üretilsin. Bu durumda $\{p_n^{-1}[A_n] \mid n=1,2,\ldots\}$ $(X,\mathcal{T})$ nun bir açık örtümüdür, çünkü ;

her $x \in X, n=1,2,\ldots$ için

$$\mu_{p_n^{-1}[A_n]}(x) = \mu_{A_n}(p_n(x)) = 1-\frac{1}{n}$$

ve $\mu_{p_n^{-1}[A_n]}(x) \leq 1$ olduğundan

$$\sup \{\mu_{p_n^{-1}[A_n]}(x) \mid n=1,2,\ldots\} = 1$$

dir. Bu nedenle $\{p_n^{-1}[A_n] \mid n=1,2,\ldots\}$ $(X,\mathcal{T})$ nun bir açık örtümüdür (sayılabilir açık örtümüdür). Fakat her $x \in X$ ve her sonlu k için

$$\text{maks} \{\mu_{p_n^{-1}[A_n]}(x) \; n=1,2,\ldots, k\} < 1$$

olduğundan $\{p_n^{-1}[A_n] \mid n=1,2,\ldots\}$ ailesinin hiç sonlu alt örtümü yoktur. Bu ise $(X,\mathcal{T})$ nun kompakt (sayılabilir kompakt) olmadığını gösterir. ●

B. Fuzzy Bölüm Topolojisi

Tanım IV.4 [5] (X,T) Bir ftu, R X üzerinde tanımlanan bir denklik bağıntısı, X/R bölüm kümesi ve $p: X \longrightarrow X/R$ ye bir projeksiyon olsun. X/R de fuzzy kümelerinin bir $\mathcal{U} := \{B \mid p^{-1}[B] \in T\}$ ailesi p yi F-sürekli yapan bir fuzzy topolojisidir. Bu topolojiye fuzzy bölüm topolojisi ve $(X/R, \mathcal{U})$ ya da fuzzy bölüm uzayı denir.

Teorem IV.5 [5] (X,T) ve (Y,T^*) iki ftu olsun.

i) X/R üzerindeki $\mathcal{U}$ fuzzy bölüm topolojisi, p yi F-sürekli yapan en ince fuzzy topolojisidir.

ii) $g: X/R \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olmak üzere g F-süreklidir $\Longleftrightarrow g \circ p$ F-süreklidir.

İspat i) X/R deki p yi F-sürekli yapan başka bir topolojiyi $\mathcal{U}^*$ ile gösterelim. Her $B^* \in \mathcal{U}^*$ için $p^{-1}[B^*] \in T$ dır. Diğer taraftan bölüm topolojisinin tanımına göre $B^* \in \mathcal{U}$, yani $\mathcal{U}^* \subset \mathcal{U}$ dır.

ii "$\Longrightarrow$" $g: X/R \longrightarrow Y$ F-sürekli olsun. $p: X \longrightarrow X/R$ ye F-sürekli olduğundan $g \circ p : X \longrightarrow Y$ F-süreklidir.

"$\Longleftarrow$" $g \circ p: X \longrightarrow Y$ F-sürekli olsun. Her $G \in T^*$ için

$$(g \circ p)^{-1}[G] = p^{-1}[g^{-1}[G]] \in T$$

olduğundan fuzzy bölüm topolojisinin tanımına göre $g^{-1}[G]\in \mathcal{U}$ olur. Buradan da $g : X/R \longrightarrow Y$ F-süreklidir.●

Tanım IV.5 [5] $(X,T),(Y,T^*)$ iki ftu ve $f:X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer X deki her açık (kapalı) fuzzy kümesinin resmi Y de de açık (kapalı) ise f ye fuzzy açık (fuzzy kapalı) veya kısaca F-açık (F-kapalı) fonksiyon denir.

Teorem IV.6 [5] (X,T) , (Y,T^*) iki ftu ,$f:X \longrightarrow Y$ F-sürekli, örten ve F-açık(F-kapalı) bir fonksiyon olsun. Bu takdirde ;(Y,T^*) $(X/R,\mathcal{U})$ fuzzy bölüm uzayına F-homeomorf olacak şekilde X üzerinde bir R denklik bağıntısı vardır.

Ispat: X üzerinde bir R bağıntısını $xRy \Longleftrightarrow f(x)=f(y)$ olarak tanımlayalım.Böyle tanımlanan R bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Ayrıca f örten olduğundan her $y\in Y$ için $f(x)=y$ olacak şekilde bir $x\in X$ vardır. $[x]$; x in denklik sınıfını göstermek üzere $h:Y \longrightarrow X/R, h(y):=[x]$ $(y\in Y)$ olarak tanımlayalım. Böyle tanımlanan h fonksiyonu birebir ve örtendir. Diğer taraftan $f=h^{-1}\circ p$ ve f F-sürekli olduğundan Teorem IV.5 ii) ye göre h^{-1} F-süreklidir. Şimdi h nın sürekli olduğunu gösterelim. $Q\in\mathcal{U}$ olsun. $p^{-1}[Q]\in T$ dir. f F-açık verildiğinden

$$f[p^{-1}[Q]]=(h^{-1}\circ p)[p^{-1}[Q]]=h^{-1}[p[p^{-1}[Q]]]=h^{-1}[Q]\in T^*$$

Buradan h F-süreklidir.Eğer; Q,X/R de kapalı bir fuzzy kümesi alınırsa f F-kapalı olduğundan $h^{-1}[Q]$ Y de kapalı bir fuzzy kümesi bulunur. Buradan da yine h nın sürekli olduğu elde edilir.Şu halde (Y,T^*) $(X/R,\mathcal{U})$ fuzzy bölüm uzayına F-homeomorf olacak şekilde X üzerinde bir R denklik bağıntısının mevcut olduğu görülür.●

(X,T) ftu, R X üzerinde bir denklik bağıntısı ve $D:=\{X_i \mid i\in I\}$ X in bir parçalanışı olsun. A X de bir fuzzy kümesi olmak üzere A_1, A_2 fuzzy kümeleri

$$\mu_{A_1}(x)=\sup_{z\in X_i}\mu_A(z) \quad , \mu_{A_2}(x)=\inf_{y\in X_i}\mu_A(y) \quad (x\in X_i)$$

üyelik fonksiyonları ile tanımlansın. Bu durumda A_1 A nın bir üst fuzzy kümesi ve A_2 A nın bir alt fuzzy kümesidir.

Teorem IV.7 5 (X,T) bir ftu, $(X/R,\mathcal{U})$ fuzzy bölüm uzayı ve $p:X \longrightarrow X/R$ ye bir projeksiyon olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir.

i) p F-açıktır.

ii) A (X,T) de bir açık fuzzy kümesi ise A nın üst fuzzy kümesi A_1 de açıktır.

iii) A (X,T) de kapalı bir fuzzy kümesi ise A nın alt fuzzy kümesi A_2 de kapalıdır.

Eğer i), ii), iii) deki açık kavramı yerine kapalı alınırsa yine bu üç durum birbirine denktir. Teoremin ıspatına geçmeden önce A_1, A_2 ve D yukarıda tanımlandığı gibi olmak üzere

1) $A_1 = p^{-1}[P[A]]$

2) $A_2 = [p^{-1}[p[A']]]'$

eşitliklerinin doğru olduğunu gösterelim.

Ispat 1) $\forall x \in X$ için $\exists i \in I : x \in X_i$

$$\mu_{A_1}(x) = \sup_{z \in X_i} \mu_A(z) \tag{IV.1}$$

$$\mu_{p^{-1}[P[A]]}(x) = \mu_{P[A]}(p(x)) = \mu_{P[A]}([x])$$

$p^{-1}[[x]] = X_i$ olduğundan

$$\mu_{P[A]}([x]) = \sup_{z \in X_i} (\mu_A(z))$$

dir. Şu halde

$$\mu_{p^{-1}[P[A]]}(x) = \sup_{z \in X_i} (\mu_A(z)) \tag{IV. 2}$$

(IV.1) , (IV.2) den de

$$A_1 = p^{-1}[p[A]]$$

elde edilir.

2) $\forall x \in X$ için $\exists i \in I : x \in X_i$

(IV.3) $$\mu_{A_2}(x) = \inf_{z \in X_i} \mu_A(z)$$

$$\mu_{[P^{-1}[P[A']]]'}(x) = 1 - \{\mu_{P^{-1}[P[A']]}(x)\} = 1 - \{\mu_{P[A']}(p(x))\}$$

$$= 1 - \{\mu_{P[A']}([x])\} = 1 - \{\sup_{z \in X_i} \mu_{A'}(z)\}$$

$$= 1 - \sup_{z \in X_i}(1 - \mu_A(z)) = -\sup_{z \in X_i}(-\mu_A(z))$$

dir. Ayrıca $\forall z \in X_i$ için

$$\inf_{z \in X_i}(\mu_A(z)) \leq \mu_A(z) \Longrightarrow -\inf_{z \in X_i}(\mu_A(z)) \geq -\mu_A(z)$$

$$\Longrightarrow -\inf_{z \in X_i}(\mu_A(z)) \geq \sup_{z \in X_i}(-\mu_A(z))$$

(IV.4) $$\inf_{z \in X_i}(\mu_A(z)) \leq -\sup_{z \in X_i}(-\mu_A(z))$$

$$\sup_{z \in X_i}(-\mu_A(z)) \geq -\mu_A(z) \Longrightarrow -\sup_{z \in X_i}(-\mu_A(z)) \leq \mu_A(z)$$

(IV.5) $$-\sup_{z \in X_i}(-\mu_A(z)) \leq \inf_{z \in X_i}(\mu_A(z))$$

(IV.4) , (IV.5) den

$$-\sup_{z \in X_i}(-\mu_A(z)) = \inf_{z \in X_i}(\mu_A(z))$$

dir. Şu halde

(IV.6) $$\mu_{[p^{-1}[p[A']]]'}(x) = \inf_{z \in X_i} (\mu_A(z))$$

ve (IV.3) , (IV.6) dan da

$$A_2 = [p^{-1}[p[A']]]'$$

elde edilir. Şimdi Teoremi ıspatlayalım.

"i $\Longrightarrow$ ii" p F-açık, $A \in T$ olsun. $A_1 = p^{-1}[p[A]]$ olduğundan $A_1 \in T$ dir.

"ii $\Longrightarrow$ iii" A (X,T) de kapalı bir fuzzy kümesi olsun $A' \in T$ dir. ii) den A' nün üst fuzzy kümesi $p^{-1}[p[A']] \in T$ dir. Buradan $[p^{-1}[p[A']]]' = A_2$ (X,T) de kapalıdır.

"iii $\Longrightarrow$ i" $A \in T$ olsun. A' (X,T) de kapalıdır. iii) den A' nün alt fuzzy kümesi $[p^{-1}[p[A]]]'$ (X,T) de kapalı, yani $p^{-1}[p[A]] \in T$ dir. Fuzzy bölüm topolojisinin tanımına göre $p[A] \in \mathcal{U}$ dır. Buradan p nin F-açık olduğu görülür.●

<u>Teorem IV.8[5]</u> (X,T) C_{11}-ftu ve p F-açık ise $(X/R, \mathcal{U})$ fuzzy bölüm uzayı da C_{11}-ftu dır.

<u>Ispat</u> (X,T) C_{11}-ftu olduğundan T için sayılabilir bir $\mathcal{B} \subset T$ bazı vardır. Her $B \in \mathcal{B}$ için p F-açık olduğundan $p[B] \in \mathcal{U}$ dır.
$\{p[B] \mid B \in \mathcal{B}\}$ ailesi $\mathcal{U}$ için sayılabilir bir bazdır. Gerçekten; $\mathcal{B}$ sayılabilir olduğundan bu aile de sayılabilirdir. Şimdi bu ailenin $\mathcal{U}$ için bir baz olduğunu gösterelim. $V \in \mathcal{U}$ keyfi olsun. p F-sürekli olduğundan $p^{-1}[V] \in T$ dir. $\mathcal{B}$ T için baz olduğundan

$$p^{-1}[V] = \bigcup_{i \in I} B_i \quad (B_i \in \mathcal{B})$$

şeklindedir. Diğer taraftan p örten olduğundan Teorem II.5 e) ve sonuç II. 1 a) dan

$$p[p^{-1}[V]] = V = \bigcup_{i \in I} p[B_i] \quad (B_i \in \mathcal{B})$$

elde edilir. Buradan $\{p[B]|B\in\mathcal{B}\}$ ailesi $\mathcal{U}$ için sayılabilir bir bazdır.●

<u>Teorem IV.9[5]</u> (X,T) kompakt (sayılabilir kompakt) ftu ise bölüm uzayı (X/R,$\mathcal{U}$) da kompakttır (sayılabilir kompakttır).

<u>Ispat:</u> Teorem II.8 den elde edilir.●

BÖLÜM V

FUZZY HAUSDORFF TOPOLOJİK UZAYLARI

Tanım V.1 [2] X bir nokta kümesi olsun. X de bir p fuzzy noktası

$$\mu_p(x_p)=\begin{cases} t\ , & x=x_p \quad 0<t<1 \\ 0\ , & x\neq x_p \end{cases}$$

üyelik fonksiyonu ile tanımlanan bir fuzzy kümesidir. Bu durumda p ye x_p desteğe ve t değerine sahiptir denir.

Tanım V.2 [2] A: X bir fuzzy kümesi ve p; desteği x_p olan bir fuzzy noktası olsun. $x=x_p$ için $\mu_p(x_p) < \mu_A(x_p)$ ve $x\neq x_p$ için $\mu_p(x) \leq \mu_A(x)$ ise p ye A nın elemanıdır denir ve "$p\in A$" ile gösterilir.

Tanım V.3 [2] p,q X de iki fuzzy noktası olsun. Eğer $x_p\neq x_q$ ise p ve q birbirinden farklıdır denir

Teorem V.1 [2] I indeks kümesi ve $(A_i)_{i\in I}$ X kümesindeki fuzzy kümelerinin bir ailesi olsun. Bu takdirde $p\in \bigcup_{i\in I} A_i \Longleftrightarrow \exists i\in I: p\in A_i$

Ispat: "$\Longrightarrow$" $p\in \bigcup_{i\in I} A_i$ olsun. Buradan

$$\mu_p(x_p) < \sup\{\mu_{A_i}(x_p) \mid i\in I\} \Longrightarrow \exists i\in I: \mu_p(x_p) < \mu_{A_i}(x_p)$$

$$\Longrightarrow \exists i\in I: p\in A_i$$

$x\neq x_p$ ise

$$\mu_p(x) \leq \sup\{\mu_{A_i}(x) \mid i\in I\} \Longrightarrow \exists i\in I: \mu_p(x) \leq \mu_{A_i}(x)$$

$$\Longrightarrow \exists i\in I: p\in A_i$$

"$\Longleftarrow$" $p\in A_i$ olsun. Buradan

$$\mu_p(x_p) < \mu_{A_i}(x_p) \leq \sup\{\mu_{A_i}(x_p) \mid i\in I\}$$

$$\Longrightarrow \mu_p(x_p) < \sup\{\mu_{A_i}(x_p) \mid i \in I\} \Longrightarrow p \in \bigcup A_i$$

$x \neq x_p$ ise

$$\mu_p(x) \leq \mu_{A_i}(x) \leq \sup\{\mu_{A_i}(x) \mid i \in I$$

$$\Longrightarrow \mu_p(x) \leq \sup\{\mu_{A_i}(x) \mid i \in I\} \Longrightarrow p \in \bigcup_{i \in I} A_i \quad \bullet$$

Teorem V.2[2] X bir nokta kümesi olsun. X deki **bir A fuzzy kümesi A** nın bütün fuzzy noktalarının birleşimidir.

Ispat: $A \neq \emptyset$ durumunu inceleyelim. $\{p_i \mid i \in I\}$ A daki bütün fuzzy noktalarının kümesi olsun

$$A = \bigcup_{i \in I} p_i$$

olduğunu göstermek istiyoruz.

$p_i \in A$ ise $\mu_{p_i}(x_{p_i}) < \mu_A(x_{p_i})$ ve $x \neq x_p$ için $\mu_{p_i}(x) \leq \mu_A(x)$

dir. Şu halde $p_i \in A$ ise her $x \in X$ için

$$\mu_{p_i}(x) \leq \mu_A(x) \Longrightarrow \sup\{\mu_{p_i}(x) \mid i \in I\} \leq \mu_A(x)$$

olur. Buradan

$$\bigcup_{i \in I} p_i \subset A \tag{V.1}$$

elde edilir. Diğer taraftan $A \neq \emptyset$ olduğundan

$$\exists x_o \in X: \mu_A(x_o) \neq 0$$

dır. $\{\delta_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ negatif olmayan reel sayıların

$$\lim_n \delta_n = 0$$

koşulunu sağlayan bir dizisi olmak üzere $(\mu_{p_n}(x_o))_{n \in \mathbb{N}}$ sıfırdan farklı reel sayıların bir dizisini

$$\mu_{p_n}(x_o)=\mu_A(x_o)-\int_n, n=1,2,3,\ldots$$

şeklinde tanımlayalı .radan

$$\sup_n \mu_{p_n}(x_o) \quad (x_o)$$

dır. Ayrıca

$$\sup_n \mu_{p_n}(x_o) \leq \sup_{i\in I} \mu_{p_i}(x_o)$$

olduğundan

$$\mu_A(x_o) \leq \sup_{i\in I} \mu_{p_i}(x_o)$$

elde edilir. Buradan şu sonuca varabiliriz; $\mu_A(x) \neq o$ olan X in her x noktası için

(V.2) $$\mu_A(x) \leq \sup_{i\in I} \mu_{p_i}(x)$$

sağlanır. X in $\mu_A(x)=o$ olan noktalarında da (V.2) sağlanacağından her $x \in X$ için

$$\mu_A(x) \leq \sup_{i\in I} \mu_{p_i}(x)$$

olur. Buradan

(V.3) $$A \subset \bigcup_{i\in I} p_i$$

ve (V.1),(V.3) den de

$$A = \bigcup_{i\in I} p_i$$

elde edilir.●

Teorem V.3[2] (X,T) bir ftu ve $\mathcal{B} \subset T$ olsun. $\mathcal{B}$ T için bir bazdır $\Longleftrightarrow \forall A \in T$ ve her $p \in A$ için

$$\exists B_p \in \mathcal{B} : p \in B_p \subseteq A$$

Ispat :"$\Longrightarrow$" $\mathcal{B}$ T için bir baz ve $A \in T$ keyfi olsun.

$$A = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$$

şeklindedir.Diğer taraftan Teorem V.1 den

$$p \in A = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \Longrightarrow \exists B_p \in \mathcal{B} : \quad p \in B_p \subseteq A$$

sağlanır.

"$\Longleftarrow$" $A \in T$ keyfi açık küme ve her $p \in A$ için $p \in B_p \subseteq A$

olacak şekilde $B_p \in \mathcal{B}$ mevcut olsun. Teorem V.2 kullanılırsa

$$A = \bigcup_{i \in I} p_i \subset \bigcup_{B_{p_i} \in \mathcal{B}} B_{p_i} \subseteq A$$

ve buradan da

$$A = \bigcup_{B_{p_i} \in \mathcal{B}} B_{p_i}$$

elde edilir, yani $\mathcal{B}$ T için bir bazdır.●

Tanım V.4 [2] (X,T) bir ftu ve p (X,T) de bir fuzzy noktası olsun. X de bir N fuzzy kümesine p nin bir fuzzy komşuluğu veya kısaca komşuluğudur denir

$$:\Longleftrightarrow [\exists A \in T : p \in A \subseteq N]$$

Eğer $N \in T$ ise N ye p nin açık komşuluğu denir.

Teorem V.4 [2] (X.T) bir ftu ve A X de bir fuzzy kümesi olsun. $A \in T \Longleftrightarrow A$ içerdiği bütün fuzzy noktalarının bir komşuluğudur.

Ispat: "$\Longrightarrow$" $A \in T$ keyfi olsun. A daki her p fuzzy noktası için

$p \in A \subseteq A$ sağlandığından, A p nin bir komşuluğudur.

"$\Longleftarrow$" $\{p_i \mid i \in I\}$ A daki bütün fuzzy noktalarının kümesi olsun. Her p_i için, A p_i nin bir komşuluğu olduğundan

$$\exists B_i \in T : p_i \in B_i \subseteq A$$

dır. Buradan her $x \in X$ için

$$\mu_{p_i}(x) \leq \mu_{B_i}(x) \leq \mu_A(x)$$

$$\Longrightarrow \mu_{p_i}(x) \leq \sup\{\mu_{B_i}(x) \mid i \in I\} \leq \mu_A(x)$$

$$\Longrightarrow \sup\{\mu_{p_i}(x) \mid i \in I\} \leq \sup\{\mu_{B_i}(x) \mid i \in I\} \leq \mu_A(x)$$

$$\Longrightarrow \bigcup_{i\in I} p_i \subset \bigcup_{i\in I} B_i \subset A$$

elde edilir.Diğer taraftan Teorem V.2 den

$$A=\bigcup_{i\in I} p_i$$

olduğu kullanılırsa

$$A=\bigcup_{i\in I} p_i \subset \bigcup_{i\in I} B_i \subset A$$

ve buradan da

$$A=\bigcup_{i\in I} B_i$$

elde edilir.Her bir $B_i \in T$ olduğundan $A\in T$ dir.●

Tanım V.5 [2] (X,T) bir ftu olsun. X deki her farklı p,q fuzzy noktaları için $p\in U$, $q\in V$ olacak şekilde ayrık ve açık U,V fuzzy kümeleri bulunabiliyorsa bu uzaya Fuzzy Hausdorff topolojik uzayı denir.

Teorem V.5 [2] (X,T) bir ftu olsun.Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

i) (X,T) Fuzzy Hausdorff topolojik uzayıdır.

ii) $\Delta_X := \{(x,x)\in XxX\}$ XxX de kapalıdır.

iii) $f,g:(Y,S) \longrightarrow (X,T)$ F-sürekli iki fonksiyon ise $A:=\{y\in Y: f(y)=g(y)\}$ kümesi (Y,S) de kapalıdır.

iV) $f:(Y,S) \longrightarrow (X,T)$ F-sürekli bir fonksiyon ise f nin grafiği $G_f:=\{(y,f(y)) \mid y\in Y\}$ (YxX,SxT) de kapalıdır.

Ispat: Teoremin ıspatında XxX in her alt kümesi; üyelik fonksiyonu bu kümenin karakteristik fonksiyonu olan fuzzy kümesi olarak göz önüne alınacaktır.

"i $\Longrightarrow$ ii" Δ'_X nın XxX de açık olduğunu göstermek yeter.Bunun için $p\in \Delta'_X$ desteği (x_1,x_2) ve değeri t olan herhangibir fuzzy noktası olsun Buradan

$$\mu_p(x_1,x_2) = t < \mu_{\Delta'_X}(x_1,x_2) = 1-\mu_{\Delta_X}(x_1,x_2) \qquad (0<t<1)$$

dır.Bu nedenle $x_1 = x_2$ olamaz.Eğer $x_1=x_2$ olsaydı

$$\mu_{\Delta_X}(x_1,x_2)=1 \text{ ve } \mu_p(x_1,x_2)=t<o$$

elde edilirdi ki bu $o<t<1$ olması ile çelişir. O halde $x_1 \neq x_2$ dir. X deki farklı iki r,s fuzzy noktasını

$$\mu_r(x_1)=\mu_p(x_1,x_2)=\mu_s(x_2)=t, \quad o<t<1$$

olacak şekilde seçelim. $r\neq s$ olduğundan ve i) den $r\in U$ ve $s\in V$ olacak şekilde ayrık ve açık U,V fuzzy kümeleri vardır.

$$r\in U \Longrightarrow \mu_r(x_1)=t<\mu_U(x_1)$$

$$s\in V \Longrightarrow \mu_s(x_2)=t<\mu_V(x_2)$$

$$\Longrightarrow \mu_p(x_1,x_2)=t<\min\{\mu_U(x_1),\mu_V(x_2)\}$$

$$\Longrightarrow \mu_p(x_1,x_2)<\mu_{UxV}(x_1,x_2) \Longrightarrow p\in UxV$$

2. olarak $UxV \subset \Delta'_X$ olduğunu gösterelim. Her $(x,y)\in XxX$ için
1) $x=y$ ise

$$\mu_{UxV}(x,x)=\min\{\mu_U(x),\mu_V(x)\}=\mu_{U\cap V}(x)=\mu_{\emptyset}(x)=o=\mu_{\Delta'_X}(x,x)$$

2) $x\neq y$ ise

$$\mu_{UxV}(x,y)=\min\{\mu_U(x),\mu_V(y)\}\leq 1=\mu_{\Delta'_X}(x,y)$$

olur. 1),2) den her $(x,y)\in XxX$ için

$$\mu_{UxV}(x,y)\leq\mu_{\Delta'_X}(x,y) \Longrightarrow UxV\subset\Delta'_X=XxX-\Delta_X$$

elde edilir. Sonuç olarak her $p\in\Delta'_X$ fuzzy noktası için

$$\exists UxV\subset\Delta'_X : p\in UxV\subset\Delta'_X$$

yani, Δ_X' XxX de açık, Δ_X kapalıdır.

"ii $\Longrightarrow$ iii" $(f,g):(Y,S)\longrightarrow(XxX,TxT)$

$$(f,g)(y):=(f(y),g(y)) \qquad (y\in Y)$$

şeklinde tanımlansın. Önce her $UxV\in TxT$ için

$$(f,g)^{-1}[UxV]=f^{-1}[U]\cap g^{-1}[V]$$

olduğunu gösterelim. $UxV\in TxT$ keyfi olsun. Her $y\in Y$ için

$$\mu_{(f,g)^{-1}[UxV]}(y)=\mu_{UxV}(f,g)(y)=\mu_{UxV}(f(y),g(y))=\min\{\mu_U f(y),\ \mu_V g(y)\}$$

$$=\min\{\mu_{f^{-1}[U]}(y),\mu_{g^{-1}[V]}(y)\}=\mu_{f^{-1}[U]\cap g^{-1}[V]}(y)$$

Buradan

$$(f,g)^{-1}[UxV]=f^{-1}[U]\cap g^{-1}[V]$$

elde edilir. $U\in T, V\in T$ ve f,g F-sürekli olduğundan $f^{-1}[U]\in S, g^{-1}[V]\in S$ dir. S topolaji olduğundan $f^{-1}[U]\cap g^{-1}[V]\in S$ yani; $(f,g)^{-1}[UxV]\in S$ dir. Şu halde $(f,g):(Y,S)\longrightarrow(XxX,TxT)$ ya F- süreklidir. Ayrıca

$$A=(f,g)^{-1}\Delta_X$$

dir. Gerçekten; $y\in Y$ olmak üzere

1) $f(y)=g(y)$ ise $y\in A$ dır. Buradan

$$\mu_A(y)=1=\mu_{\Delta_X}(f(y),g(y))=\mu_{(f,g)^{-1}\Delta_X}(y)$$

2) $f(y)\neq g(y)$ ise $y\notin A$ dır. Buradan

$$\mu_A(y)=0=\mu_{\Delta_X}(f(y),g(y))=\mu_{(f,g)^{-1}\Delta_X}(y)$$

dir. 1), 2) den

$$A=(f,g)^{-1}\Delta_X$$

olduğu görülür. Diğer taraftan ii) den $\Delta_X$in XxX de kapalı olduğunu biliyoruz. (f,g) F-sürekli olduğundan $(f,g)^{-1}\Delta_X=A$ da XxX de kapalıdır.

"iii $\Longrightarrow$ iv" $f,g:(Y,S)\longrightarrow(X,T)$ ya F- sürekli iki fonksiyon ve

$A:=\{y\in Y: f(y)=g(y)\}$ kümesi (Y,S) de kapalı olsun, $G_f:=\{(y,f(y))| y\in Y\}$ nin (YxX,SxT) de kapalı olduğunu gösterelim.

$p_X: YxX\longrightarrow X; p_X(y,x):=x, p_Y: YxX\longrightarrow Y; p_Y(y,x):=y$

Projeksiyon fonksiyonlarını tanımlayalım. Projeksiyon fonksiyonları F-sürekli ve $f:Y\longrightarrow X$ F-sürekli olduğundan $f\circ p_Y: YxX\longrightarrow X$ F-süreklidir. iii) ye göre

$$A=\{(y,x)| p_X(y,x)=(f\circ p_Y)(y,x), (y,x)\in YxX\}$$

(YxX,SxT) de kapalıdır. Fakat

$$A=\{(y,x)| x=f(p_Y(y,x)), (y,x)\in YxX\}=\{(y,x)| x=f(y), y\in Y\}$$

$$=\{(y,f(y))| y\in Y\}=G_f$$

olduğundan G_f (YxX,SxT) de kapalıdır.

"iv $\Longrightarrow$ i" $f:(Y,S)\longrightarrow(X,T)$ ya F- sürekli ve $G_f:=\{(y,f(y))| y\in Y\}$ (YxX,SxT) de kapalı olsun.

$i:(X,T)\longrightarrow(X,T), i(x):=x$ dönüşümü her $G\in T$ ve her $x\in X$ için

$$\mu_{i^{-1}[G]}(x)=\mu_G(i(x))=\mu_G(x)$$

olduğundan süreklidir. Hipotezden

$$G_i:=\{(x,i(x))| x\in X\}=\{(x,x)| x\in X\}=\Delta_X$$

(XxX,TxT) de kapalıdır. Buradan $XxX-\Delta_X$ açıktır. p,q X de birbirinden farklı iki fuzzy noktası olsun. $x_p\neq x_q$ olduğundan $(x_p,x_q)\in XxX-\Delta_X$ dir.

Şimdi XxX de bir r fuzzy noktasını;

$$\mu_r(x_p,x_q)=\text{maks}\{\mu_p(x_p),\mu_q(x_q)\}$$

şeklinde düşünelim.

$$\mu_r(x_p,x_q)=\text{maks}\{\mu_p(x_p),\mu_q(x_q)\}<1=\mu_{XxX-\Delta_X}(x_p,x_q)$$

olduğundan $r\in XxX-\Delta_X$ tir. $XxX-\Delta_X$ açık olduğundan

$$r\in UxV\subset XxX-\Delta_X$$

olacak şekilde UxV açık fuzzy kümesi vardır. Buradan

$$\mu_r(x_p,x_q)=\text{maks}\{\mu_p(x_p),\mu_q(x_q)\}<\min\{\mu_U(x_p),\mu_V(x_q)\}$$

$$\Longrightarrow \mu_p(x_p)<\mu_U(x_p),\ \mu_q(x_q)<\mu_V(x_q)\Longrightarrow p\in U,q\in V$$

elde edilir. Diğer taraftan $UxV\subset XxX-\Delta_X$ olduğundan her $x\in X$ için $(x,x)\notin UxV$ dir. Buradan

$$\mu_{U\cap V}(x)=\min\{\mu_U(x),\mu_V(x)\}=\mu_{UxV}(x,x)=0$$

yani $U\cap V=\emptyset$ olur. Şu halde X in her $p\neq q$ fuzzy noktaları için $p\in U$ ve $q\in V$ olacak şekilde ayrık ve açık U,V fuzzy kümeleri bulunabildiğinden (X,T) bir fuzzy Hausdorff topolojik uzayıdır. ●

KAYNAKLAR

[1] CHANG,C.L.,Fuzzy Topological Spaces,J.Math.Anal.Appl. 24(1968) 182-190

[2] SRIVASTAVA,R;LAL,S.N. AND SRIVASTAVA,A.K.,Fuzzy Hausdorff Topological Spaces,J.Math,Anal.Appl.81(1981) 497-506

[3] WILLARD,S.General Topology,Addıson-Wesley Publıshıng Company,1970

[4] WONG,C.K., Covering Proporties of Fuzzy Topological Spaces, J.Math.Anal.Appl.43(1973) 697-704

[5] WONG,C.K.,Fuzzy Topology:Product and Quotient Theorems,J.Math. Anal.Appl.45(1974)512-521

[6] ZADEH,L.A.,Fuzzy Sets, Informatıon and Control 8(1965) 338-353