Y-C-100

KARADENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FİZİK ANABİLİM DALI
FİZİK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

TEZ NUMARASI

Genel :
Anabilim Dalı :
Program :

ELEKTRONUN ELEKTROMAGNETİK FORM FAKTÖRLERİNİN HESABI

Ayten ÜSTÜN

Yönetici: Prof.Dr.Mehmet ABAK

Trabzon, 1986

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın yöneticiliğini üstlenen ve çalışmalarımı yönlendiren Hocam Sayın Prof.Dr. Mehmet ABAK'a teşekkür ederim.

Çalışmalarımın her aşamasında yardımcı olan Sayın Arş.Gör. Coşkun AYDIN'a teşekkür ederim.

Ayrıca kaynak konusunda yardımcı olan Sayın Arş.Gör. Aytekin AYDEMİR'e, Sayın Uzman Atilla AKAY'a ve çalışmayı daktilo eden Sayın Temel TOSUN'a teşekkür ederim.

Trabzon, Ocak 1986 Ayten ÜSTÜN

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Kuantum elektrodinamiğinde köşe katkılarının hangi fiziksel anlama geldiği, ikinci (e^2) ve dördüncü (e^4) mertebeden olası Feynman diyagramlarının katkıları ve deneysel değerleri ile arasındaki fark gözönüne alınarak, elektronun elektromagnetik form faktörleri (F_1, F_2) EKLER'de gösterilen Feynman kuralları ve integralleri ile hesaplanmıştır.

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Kuantum elektrodinamiği renormalize bir kuram olduğundan yüksek mertebeden düzeltmeler fiziksel ölçülebilir büyüklükler (elektron yükü e, kütlesi m gibi) cinsinden hesaplanabilir. Elektromagnetik etkileşmelerde çiflenim sabiti $\alpha = \frac{1}{137}$ 'nin küçük olması nedeniyle ilk terim kullanılabilir sonuçlara götürür. Fakat duyurucu bir kuramda yüksek mertebeden katkıların da hesaplanabilmesi gerekir. Kuantum elektrodinamiği ve kuantum alanlar kuramında bu bizi karakteristik büyüklüklere götürür. Bazı "küçük düzeltmeler" sonsuz büyük olur. Bu sorunun çözüme bağlanması kuramda önemli bir adım oluşturmuyordu. Demek ki renormalizesyon problemi halledilmelidir. Böylece elde edilen sonlu bir kuramda etkileşmenin ölçülebilir etkileri virtüel (gerçek olmayan) üretilen parçacıklar (vakum flüktüasyonları) ile hesaplanabilir.

Bu çalışmada elektronun elektromagnetik form faktörleri hesaplanmıştır.

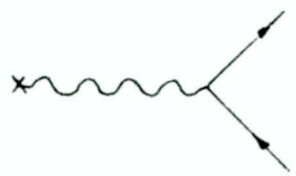
İkinci bölümde, yüksek mertebeden saçılma düzeltmeleri, üçüncü bölümde elektronun elektromagnetik form faktörleri hesaplanmıştır. Ek lerde konu ile ilgili matematiksel yöntemler verilmiştir.

BÖLÜM 2

YÜKSEK MERTEBEDEN SAÇILMA DÜZELTMELERİ

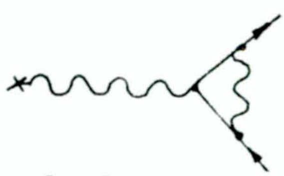
Foton, elektromagnetik alanın kuantumlanmış şekli olduğundan elektromagnetik etkileşmeler foton aracılığı ile olur. Elektromagnetik etkileşmelerdeki hesaplar kuantum elektrodinamiği aracılığı ile yapılabilmektedir. Elektromagnetik etkileşmeler hakkındaki bu bilgiler bize elemanter parçacıkların özelliklerini araştırma olanağı verir.

Dış bir elektromagnetik alan ile etkileşen bir elektron için Feynman diyagramı



şeklindedir.

Gelen ve saçılan elektronlar arasında virtüel foton aracılığı ile bir etkileşmenin olması durumunda

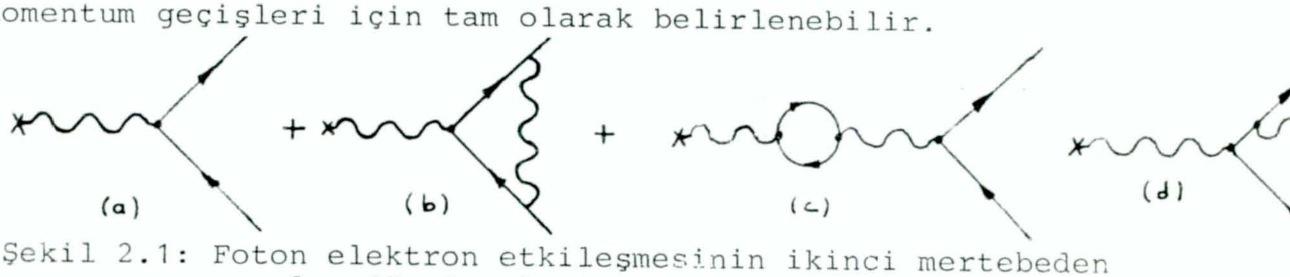


diyagramını gözönüne almalıyız.

Bu iki diyagramın matris elemanını yazarken $-ie\gamma^{\mu}$ yerine $-ie(\gamma^{\mu}+\Gamma^{\mu}(p',p))$ almanın ne gibi fiziksel sonuçlar getireceğini araştırmak istiyoruz. Buna göre

$$-ie\gamma^{\mu} = -ie(\gamma^{\mu}+\Gamma^{\mu}(p',p)) \tag{2.1}$$

yazılır ve $\Gamma^{\mu}_{R}(p',p)$ köşe fonksiyonu serbest spinörler ve düşük momentum geçişleri için tam olarak belirlenebilir.



Şekil 2.1: Foton elektron etkileşmesinin ikinci mertebeden saçılma düzeltmeleri

Şekil 2.1 diyagramlarının fiziksel yorumu için bir dış elektromagnetik ($A^{\mu}_{dış}$) alanıyla etkileşen bir elektronun enerjisini araştıralım.

(c) ve (d) diyagramları, self enerji düzeltmeleri serbest parçacıklarda sadece yük ve kütle renormalizasyonuna katkı yaptıklarından gözönüne alınmayabilirler. (a) dan (c) ye kadar olan diyagramlar dış bir alanla etkileşen elektron etkileşme enerjisine katkı yaparlar. Etkileşme enerjisi

$$w = \int d^3x \; j_{\mu} A^{\mu}_{dış} \tag{2.2}$$

ile verilir.

Şekil 2.1 için

$$w = e\int d^3x \; \bar{\psi}_{p'}[\gamma_{\mu} + \Gamma^{R}_{\mu}(p',p) + \frac{-i\pi^{R}_{\mu\nu}}{4\pi} \, iD^{\nu\sigma}_{F}\gamma_{\sigma}]\psi_{p} A^{\mu}_{dış} \tag{2.3}$$

olur.

$$D^{\nu\sigma}_{F} = -4\pi \frac{g^{\nu\sigma}}{k^2} \tag{2.4}$$

tanımından

$$w = e\int d^3x \bar{\psi}_{p'}\{\gamma_{\mu}[1 + \frac{\alpha}{3\pi}\frac{k^2}{m^2}(\ell n\frac{m}{\lambda} - \frac{3}{8} - \frac{1}{5})] + \frac{\alpha}{2\pi}\frac{i}{2m}\sigma_{\mu\nu}k^{\nu}\} \psi_{p} A^{\mu}_{dış} \tag{2.5}$$

bulunur. (2.5) denklemi Gordon ayrılması (EK.F) ile

$$w = e\int d^3x \bar{\psi}_{p'}\{\frac{1}{2m}(p+p')_{\mu}[1 + \frac{\alpha}{3\pi}\frac{k^2}{m^2}(\ell n\frac{m}{\lambda} - \frac{3}{8} - \frac{1}{5})] + (1 + \frac{\alpha}{2\pi})\frac{i}{2m}\sigma_{\mu\nu}k^{\nu}\}\psi_{p} A^{\mu}_{dış} \tag{2.6}$$

formuna dönüşür. Burada $(-\frac{1}{5})$ terimi vakum polarizasyonundan gelir. Momentum faktörleri konum uzayında gradyentler cinsinden aşağıdaki gibi

$$k \rightarrow i\partial_{x} \tag{2.7}$$

verilir. (2.7) ifadesi (2.6) denkleminde yerine yazıldığında

$$w=e\int d^3x\{\frac{i}{2m}\ \bar{\psi}(x)\overleftrightarrow{\partial}_\mu\psi(x)\left[1-\frac{\alpha}{3\pi}\cdot\frac{1}{m^2}(\ln\frac{m}{\lambda}-\frac{3}{8}-\frac{1}{5})\ \Box\right]A^\mu_{dış}$$

$$-(1+\frac{\alpha}{2\pi})\frac{1}{2m}\ \bar{\psi}(x)\sigma_{\mu\nu}\psi(x)\partial^\nu A^\mu_{dış}\} \tag{2.8}$$

bulunur.

Potansiyel ile etkileşen ilk terim elektronun "konveksiyon akımını" içerir. İkinci kısmını saf bir magnetik alanın özel halindeki magnetik dipol enerjisine özdeş kılıyoruz $F^{\mu\nu}=\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu$ elektromagnetik alan tensörünü ve $\sigma_{\mu\nu}=\frac{i}{2}[\gamma_\mu,\gamma_\nu]$ antisimetrik bağıntısını kullanalım. Buna göre

$$w_{mag}=e(1+\frac{\alpha}{2\pi})\ \frac{1}{4m}\int d^3x\ \bar{\psi}(x)\sigma_{\mu\nu}\ \psi\ (x)\ F^{\mu\nu} \tag{2.9}$$

bulunur. Saf bir magnetik alan halinde $F^{12}=-B^3$, $\sigma_{12}=\Sigma_3$ dür. Böylece etkileşme enerjisi

$$w_{mag}=-\frac{e}{4m}(1+\frac{\alpha}{2\pi})\ 2\int d^3x\ \bar{\psi}(x)\vec{\Sigma}\ \psi(x)\ \vec{B} \tag{2.10}$$

$$w=-\langle\vec{\mu}\rangle\ \vec{B} \tag{2.11}$$

dir. Burada magnetik moment

$$\langle\vec{\mu}\rangle=\frac{e}{2m}(1+\ \frac{\alpha}{2\pi})\ \mu_B\langle\vec{s}\rangle \tag{2.12}$$

dir. Böylece magnetik moment beklendiği gibi elektron spininin beklenen değeri ile orantılıdır. $\mu_B=\frac{e\ h}{2mc}$ Bohr magneton birimleri cinsinden orantı faktörü (g-faktörü)

$$g=2(1+\frac{\alpha}{2\pi}) \tag{2.13}$$

$$g=2(1+0.00116141) \tag{2.14}$$

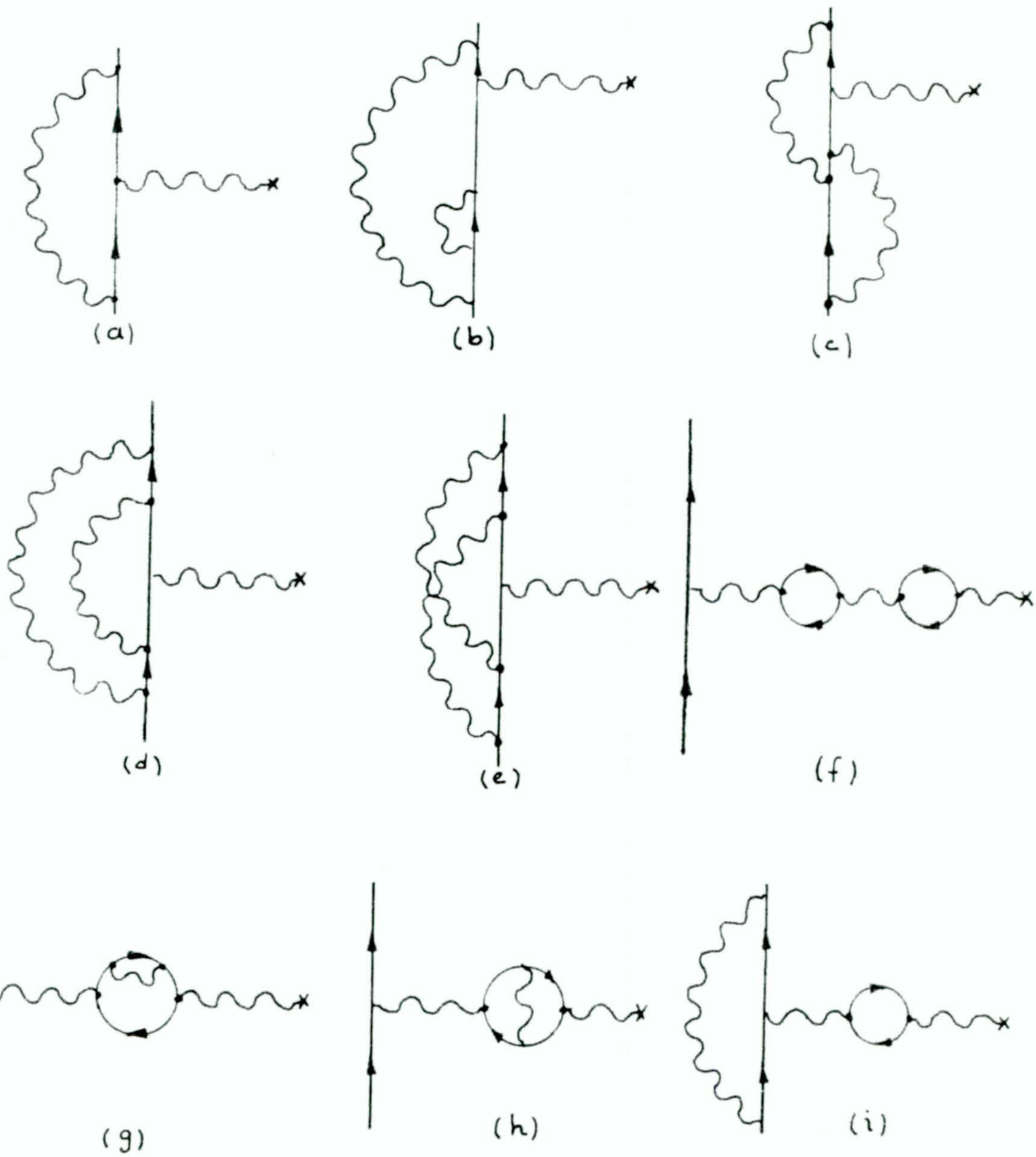
olur.

g- faktörünün iki değerinden sapması elektronun anomalisi olarak gösterilir. Bu kuantum elektrodinamiğinin en anlamlı bir öngörüsüdür ve ilk defa Schwinger tarafından hesaplanmıştır. Modern deneysel değeri

$$g = 2(1+0.00115965241) \qquad (2.15)$$

dir.

Denklem (2.15) ile verilen sonucu anlamak için yüksek mertebeden terimler gözönüne alınmalıdır. Şekil 2.2 de olan dördüncü mertebeden (e^4) diyagramlarını gözönüne alalım.



Şekil 2.2. Foton-elektron etkileşmesinin dördüncü mertebeden (e^4) saçılma düzeltmeleri

(a) dan (e) ye kadar olan diyagramların magnetik momente katkıları olduğu ortaya çıkar.

Dördüncü mertebe için g-faktörü

$$g = 2\left[1 + \frac{\alpha}{2\pi} - 0.328478445\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + 1.183\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3\right] \qquad (2.16)$$

$$g = 2\left[1+0.00115965236\right] \qquad (2.17)$$

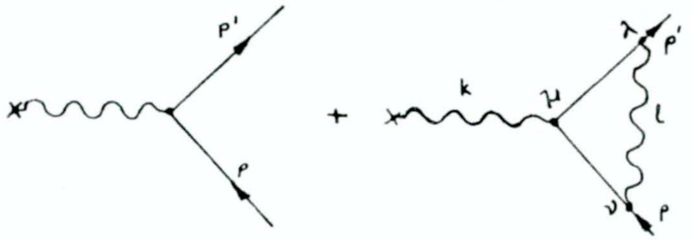
olarak hesaplanır.

Daha ayrıntılı hesaplar için olası tüm yüksek mertebeden diyagramların gözönüne alınması gerekir.

BÖLÜM 3

ELEKTRONUN ELEKTROMAGNETİK FORM FAKTÖRLERİNİN HESABI

Elektronun form faktörlerinin hesabına geçmeden önce köşe katkıları üzerinde biraz durmak istiyoruz.



Şekil 3.1. Elektronun elektromagnetik form faktörlerine katkısı olan diyagramlar (Schwinger düzeltmeleri).

Bu diyagramlara karşılık gelen matris elemanları katkısı aşağıdaki gibidir:

$$-ie\Lambda^{\mu}(p',p) = ie\gamma^{\mu}-ie\Gamma^{\mu}(p',p) \qquad (3.1)$$

$\Gamma^{\mu}(p',p)$'ye köşe (vertex) fonksiyonu denir. (Ek-D) deki Feynman kurallarına göre köşe fonksiyonu aşağıdaki formdadır:

$$-ie\Gamma^{\mu}(p',p) = (-ie)^3 \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4}\, \gamma^{\lambda} \frac{i}{(\not{p}'-\not{\ell}-m)}\, \gamma^{\mu} \frac{i}{(\not{p}-\not{\ell}-m)}\gamma^{\nu} \frac{-ig_{\nu\lambda}}{\ell^2} \qquad (3.2)$$

$g_{\nu\lambda}\gamma^{\nu}=\gamma_{\lambda}$ kullanılırsa bu fonksiyon

$$\Gamma^{\mu}(p',p) = i(-ie)^2 \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4}\, \gamma^{\lambda} \frac{(\not{p}'-\not{\ell}+m)}{(p'-\ell)^2-m^2}\, \gamma^{\mu} \frac{(\not{p}-\not{\ell}+m)}{(p-\ell)^2-m^2}\, \gamma_{\lambda} \frac{1}{\ell^2} \qquad (3.3)$$

olur.

(3.3) integrali logaritmik olarak ıraksadığından regülarize edilmesi gerekir. Bu integralin hesabı uzun ve yorucu olduğundan özel bir durum olan köşenin elektron çizgileri "kütle kabuğu" üzerinde bulunan durumu alınmıştır. Yani hesabın sonunda serbest spinörler arasındaki matris elemanını $\bar{u}(p')\Gamma^{\mu}(p',p)u(p)$ formunda oluşturacağız. Ayrıca

$$\bar{u}(p')(\not{p}'-m) = 0$$

ve

$$(\not{p}-m)u(p) = 0$$

Dirac denklemi geçerli olmalıdır. Buradan $\not{p}'\to m$, $\not{p}\to m$ yazılır.

Köşe fonksiyonu $\Gamma^{\mu}(p',p)$ 'yi momentum geçişinin sıfır olduğu sınır değeri $k=(p-p')=0$ (ileri saçılma) ile kalanı bir toplama ayırıyoruz.

$$\Gamma^{\mu}(p',p) = \Gamma^{\mu}(p,p)+\Gamma^{\mu}(p',p)-\Gamma^{\mu}(p,p) \tag{3.4}$$

Buradan

$$\Gamma^{\mu}_{R}(p',p) = \Gamma^{\mu}(p',p)-\Gamma^{\mu}(p,p) \tag{3.5}$$

olur. Bu integralin yakınsak olacağını ilerdeki işlemlerimizde göreceğiz.

Köşe fonksiyonu $\Gamma^{\mu}(p',p)$ k^{μ} vektör olmadığından γ^{μ} veya p^{μ} ile orantılı olmalıdır. Bu iki işlemcinin serbest spinörler arasındaki matris elemanları birbiri ile orantılıdır. Bundan ötürü birbiri cinsinden yazılabilir. Bu durum Gordon ayrılmasında görülür.

Gordan ayrılması (Ek-F) de görüldüğü gibi

$$\bar{u}(p')\gamma^{\mu}\, u(p) = \frac{1}{2m}\,\bar{u}(p')\left[(p+p')^{\mu}-i\sigma^{\mu\nu}k_{\nu}\right]u(p) \tag{3.6}$$

formundadır. Bu nedenle yalnızca γ^{μ}'yü uygulamak yetişir. (3.35) denkleminde tanımlayacağımız L gözönüne alınırsa

$$\bar{u}(p')\Gamma^{\mu}(p,p)u(p) = L\bar{u}(p')\gamma^{\mu}u(p) \tag{3.7}$$

olur. (3.7) denklemini (3.5) denkleminde yerine yazdığımızda serbest spinörler arasındaki köşe fonksiyonu

$$\bar{u}(p')\Gamma^{\mu}(p',p)u(p) = \bar{u}(p')\left[L\gamma^{\mu}+ \Gamma^{\mu}_{R}(p',p)\right]u(p) \tag{3.8}$$

olur. Buradan

$$\bar{u}(p')\Gamma^{\mu}_{R}(p',p)u(p) = \bar{u}(p')\left[\Gamma^{\mu}(p',p)-L\gamma^{\mu}\right]u(p) \tag{3.9}$$

bulunur. Dolayısıyla köşe fonksiyonu regülarize edilmiş olur. Bundan sonra amacımız regülarize olmuş köşe fonksiyonunun hesaplanmasıdır. (3.9) denklemini daha açık bir şekilde yazdığımızda

$$\bar{u}(p')\Gamma^{\mu}_{R}(p',p)u(p) = \bar{u}(p')\Gamma^{\mu}(p',p)u(p)-L\bar{u}(p')\gamma^{\mu}u(p) \qquad (3.10)$$

olur. Köşe fonksiyonu yeniden yazarsak

$$\Gamma^{\mu}(p',p) = -\frac{ie^2}{(2\pi)^4}\int d^4\ell\ \gamma^{\lambda}\ \frac{(\not{p}'-\not{\ell}+m)}{(p'-\ell)^2-m^2}\gamma^{\mu}\ \frac{(\not{p}-\not{\ell}+m)}{(p-\ell)^2-m^2}\gamma_{\lambda}\ \frac{1}{\ell^2-\lambda^2} \qquad (3.11)$$

elde edilir.

Burada çıkacak kızılötesi ıraksaklıkları gidermek için fotona küçük bir λ kütlesi ekledik.

Köşe fonksiyonunun hesaplanması için (Ek-E.60) integral formu yardımı ile

$$\frac{1}{[(p'-\ell)^2-m^2][(p-\ell)^2-m^2][(\ell^2-\lambda^2)(1-x)]}$$
$$=2\int_0^1 dx\int_0^x dy\ \frac{1}{[(p'^2+\ell^2-2p'\ell-m^2)y+(p^2+\ell^2-2p\ell-m^2)(x-y)+(\ell^2-\lambda^2)(1-x)]^3} \qquad (3.12)$$

bulunur. Bu integralin paydasını yeniden düzenlediğimizde

$$(p'^2-2p'\ell+2p\ell-p^2)y+(p^2-2p\ell-m^2)x+\ell^2-\lambda^2(1-x) \qquad (3.13)$$

olur.

(3.13)'deki paydanın değerini (3.12) denkleminde yerine yazdığımızda

$$\frac{1}{[(p'-\ell)^2-m^2][(p-\ell)^2-m^2][(\ell^2-\lambda^2)(1-x)]}$$
$$= 2\int_0^1 dx\int_0^x dy\ \frac{1}{[(p'^2-2p'\ell+2p\ell-p^2)y+(p^2-2p\ell-m^2)x+\ell^2-\lambda^2(1-x)]^3} \qquad (3.14)$$

bulunur. Bulunan bu integralin değeri (3.11) köşe fonksiyonunda yerine yazılırsa

$$\Gamma^{\mu}(p',p) = -\frac{2ie^2}{(2\pi)^4}\int_0^1 dx \int_0^x dy \int d^4\ell \frac{\gamma^{\lambda}(\not p'-\not\ell+m)\gamma^{\mu}(\not p-\not\ell+m)\gamma_{\lambda}}{\left[(p'^2-2p'\ell+2p\ell-p^2)y+(p^2-2p\ell-m^2)x+\ell^2-\lambda^2(1-x)\right]^3} \tag{3.15}$$

bulunur. (3.15) integralinin paydasında

$k = p-p'$

$a^2 = -m^2x^2+k^2y(x-y)+(p^2-m^2)(1-x)(x-y)+(p'^2-m^2)y(1-x)-\lambda^2(1-x)$

yazılırsa paydanın değerinin

$$\left[(\ell-px+ky)^2+a^2\right]^3 \tag{3.16}$$

olduğu görülür. (3.16) değerini (3.11) köşe fonksiyonunda yerine yazdığımızda

$$\Gamma^{\mu}(p',p) = -\frac{2ie^2}{(2\pi)^4}\int_0^1 dx\int_0^x dy\int d^4\ell \frac{\gamma^{\lambda}(\not p'-\not\ell+m)\gamma^{\mu}(\not p-\not\ell+m)\gamma_{\lambda}}{\left[(\ell-px+ky)^2+a^2\right]^3} \tag{3.17}$$

bulunur.

Köşe fonksiyonundaki momentum integralini hesaplayabilmek için N^{μ} ile göstereceğimiz integralin payını (Ek-C)'de verilen Dirac matrislerinin özdeşlikleri yardımı ile kısaltabiliriz.

$$N^{\mu} = \gamma^{\lambda}(\not p'-\not\ell+m)\ \gamma^{\mu}(\not p-\not\ell+m)\gamma_{\lambda}$$

$$N^{\mu} = \gamma^{\lambda}(\not p'-\not\ell)\gamma^{\mu}(\not p-\not\ell)\gamma_{\lambda}+m\gamma^{\lambda}(\not p'-\not\ell)\gamma^{\mu}\gamma_{\lambda}+m\gamma^{\lambda}\gamma^{\mu}(\not p-\not\ell)\gamma_{\lambda}+m^2\gamma^{\lambda}\gamma^{\mu}\gamma_{\lambda} \tag{3.18}$$

Buna göre birinci terim

$$\gamma^{\lambda}(\not p'-\not\ell)\gamma^{\mu}(\not p-\not\ell)\gamma_{\lambda} = -2(\not p-\not\ell)\gamma^{\mu}(\not p'-\not\ell) \tag{3.18a}$$

ikinci terim

$$m[\gamma^{\lambda}\not{p}'\gamma^{\mu}\gamma_{\lambda}-\gamma^{\lambda}\not{\ell}\ \gamma^{\mu}\gamma_{\lambda}+\gamma^{\lambda}\gamma^{\mu}\not{p}\gamma_{\lambda}-\gamma^{\lambda}\gamma^{\mu}\not{\ell}\gamma_{\lambda}]$$

$$= m[4p'\gamma^{\mu}-4\ell\gamma^{\mu}+4p\gamma^{\mu}-4\ell\gamma^{\mu}]$$

$$= m[4p'^{\mu}- 4\ell^{\mu}+4p^{\mu}-4\ell^{\mu}] \qquad (3.18b)$$

üçüncü terim

$$m^2\gamma^{\lambda}\gamma^{\mu}\gamma_{\lambda} = -2m^2\gamma^{\mu}$$

veya

$$m^2\gamma^{\lambda}\gamma^{\mu}\gamma_{\lambda} = m^2[2g^{\lambda\mu}-\gamma^{\mu}\gamma^{\lambda}]\gamma_{\lambda}$$

$$m^2\gamma^{\lambda}\gamma^{\mu}\gamma_{\lambda} = m^2[2\gamma^{\mu}-4\gamma^{\mu}]$$

$$m^2\gamma^{\lambda}\gamma^{\mu}\gamma_{\lambda} = - 2m^2\gamma^{\mu} \qquad (3.18c)$$

olur. (3.18a),(3.18b),(3.18c) eşitliklerini (3.18) denkleminde yerine yazdığımızda

$$N^{\mu} = - 2(\not{p}-\not{\ell})\gamma^{\mu}(\not{p}'-\not{\ell})+4m(p^{\mu}+p'^{\mu}-2\ell^{\mu})-2m^2\gamma^{\mu} \qquad (3.19)$$

bulunur.

(3.17) integrali (Ek-E)'de olduğu gibi logaritmik olarak ıraksayan integral olduğundan orijini $\ell\to\ell+px-ky$ kadar değiştirebiliriz. Buna göre integral

$$\bar{u}(p')\Gamma^{\mu}(p',p)u(p) = -\frac{2ie^2}{(2\pi)^4}\int_0^1 dx\int_0^x dy\int d^4\ell\ \frac{\bar{u}(p')N^{\mu}u(p)}{[\ell^2+a^2]^3} \qquad (3.20)$$

olur.

$\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ değerini yazdığımızda

$$\bar{u}(p')\Gamma^{\mu}(p',p)u(p) = -\frac{i\alpha}{(2\pi)^4}\int_0^1 dx \int_0^x dy \int d^4\ell \, \frac{\bar{u}(p')N^{\mu}u(p)}{[\ell^2+a^2]^3} \qquad (3.21)$$

şekline dönüşür.

$\ell \to \ell+px-ky$ dönüşümü yapıldığında integralin payı,

$$N^{\mu} = -2[\not{p}-\not{\ell}-(\not{p}x-\not{k}y)]\gamma^{\mu}[\not{p}'-\not{\ell}-(\not{p}x-\not{k}y)]+4m[p^{\mu}+p'^{\mu}-2\ell^{\mu}-2p^{\mu}x+2k^{\mu}y]-2m^2\gamma^{\mu} \qquad (3.22)$$

olur. (3.22) değerini (3.21) integral formunda yerine yazdığımızda simetrik integrallerden dolayı ℓ'ye göre tek olan integrallerin değeri sıfırdır. Buna göre payı düzenlediğimizde

$$N^{\mu} = -2[\not{p}-\not{p}x+\not{k}y]\gamma^{\mu}[\not{p}'-\not{p}x+\not{k}y]-2[\not{\ell}\gamma^{\mu}\not{\ell}]+4m[p^{\mu}+p'^{\mu}-2p^{\mu}x+2k^{\mu}y]-2m^2\gamma^{\mu} \qquad (3.23)$$

bulunur.

$\not{\ell}\gamma^{\mu}\not{\ell}$ ifadesi;

$\not{\ell} = \ell_{\nu}\gamma^{\nu}$ gösterimi

ve

$\ell_{\nu}\ell_{\sigma} = \frac{1}{4}\ell^2 g_{\nu\sigma}$ özdeşliği yardımı ile

$$\not{\ell}\gamma^{\mu}\not{\ell} = \frac{1}{4}\ell^2 g_{\nu\sigma}\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\gamma^{\sigma}$$
$$\not{\ell}\gamma^{\mu}\not{\ell} = \frac{1}{4}\ell^2 \gamma_{\sigma}\gamma^{\mu}\gamma^{\sigma}$$
$$\not{\ell}\gamma^{\mu}\not{\ell} = -\frac{1}{2}\ell^2\gamma^{\mu} \qquad (3.24)$$

olur. (3.24) eşitliğini (3.23) denkleminde yerine yazdığımızda

$$N^{\mu} = -2[\not{p}-\not{p}x+\not{k}y]\gamma^{\mu}[\not{p}'-\not{p}x+\not{k}y]+4m[p^{\mu}+p'^{\mu}-2p^{\mu}x+2k^{\mu}y]-2m^2\gamma^{\mu}+\ell^2\gamma^{\mu} \qquad (3.25)$$

olur.

Payın değerinin fiziksel olarak daha uygun bir yorumu için Gordon- ayrılmasından yararlanabiliriz. (3.6) denklemi aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\bar{u}(p')(p+p')^{\mu}u(p) = 2m\,\bar{u}(p')\gamma^{\mu}u(p)-\bar{u}(p')i\sigma^{\nu\mu}k_{\nu}\,u(p) \tag{3.26}$$

Bu bağıntı yardımı ile payın birinci terimi için

$$\bar{u}(p')\{[\not p(1-x)+\not k y]\gamma^{\mu}[\not p'-\not p x+\not k y]\}u(p)$$

$$=[m^2(1-x)^2-(1+y-x)(y-1)k^2]\bar{u}(p')\gamma^{\mu}u(p)-im(1-x)(2-x)\bar{u}(p')\sigma^{\nu\mu}k_{\nu}u(p)$$

$$+(1-x)(2y-x)mk^{\mu}\bar{u}(p')u(p) \tag{3.27}$$

bulunur. Bu sonucu (3.25) denkleminde yerine yazdığımızda payın değeri aşağıdaki şekilde olur.

$$\bar{u}(p')N^{\mu}u(p) = \bar{u}(p')\{[\ell^2-4m^2(\frac{x^2}{2}+x-1)]\gamma^{\mu}+2K^{\mu}(p',p,x,y)\}\,u(p) \tag{3.28}$$

Burada, C, M^{μ} , $M^{\mu'}$, $\sigma^{\nu\mu}$ ifadelerini

$$C = k^2(1+y-x)(y-1)-(1-x)[(p^2-m^2)(1+y-x)+(p'^2-m^2)(y-1)],$$

$$M^{\mu}=\gamma^{\mu}m(1-x^2)+i(p^{\mu}+p'^{\mu})(1-x)(1+y-x)+ik^{\mu}(1+x-2y)(1+y-x),$$

$$M^{\mu'}=\gamma^{\mu}m(1-x^2)+i(p^{\mu}+p'^{\mu})(1-x)(y-1)+ik^{\mu}(1-x+2y)(y-1)$$

$$\sigma^{\nu\mu}=-\frac{i}{2}(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}-\gamma^{\nu}\gamma^{\mu})$$

şeklinde tanımladığımızda

$$K^{\mu}(p',p,x,y) = (1-x)(\not p'-m)\gamma^{\mu}(\not p-m)+\gamma^{\mu}C-(\not p'-m)M^{\mu'}-M^{\mu}(\not p-m)$$

$$+ik^{\mu}m(1+x)(x-2y)-mix(1-x)\sigma^{\nu\mu}k_{\nu} \tag{3.29}$$

olur. (3.29) denklemini (3.28) denkleminde yerine yazar, ve

$$\bar{u}(p')(\not p'-m) = 0$$
$$(\not p-m)u(p) = 0$$

gözönüne alınırsa

$$\bar{u}(p')N^{\mu}u(p) = [\ell^2-4m^2(\frac{x^2}{2}+x-1)+2(1+y-x)(y-1)]\bar{u}(p')\gamma^{\mu}u(p)$$
$$-2mix(1-x)\sigma^{\nu\mu}k_{\nu}\bar{u}(p')u(p)+ik^{\mu}m(1+x)(x-2y) \qquad (3.30)$$

bulunur.

Ayar değişmezliği (veya yük korunumu) nedeniyle k^{μ} ile orantılı sonucu terim herzaman ihmal edilir.

$$\bar{u}(p')N^{\mu}u(p) = [\ell^2-4m^2(\frac{x^2}{2}+x-1)+2(1+y-x)(y-1)]\bar{u}(p')\gamma^{\mu}u(p)$$
$$-2mix(1-x)\sigma^{\nu\mu}k_{\nu}\bar{u}(p')u(p) \qquad (3.31)$$

Köşe fonksiyonunda $p^2=m^2$ ve $p'^2=m^2$ yazarak yeniden düzenlediğimizde

$$\bar{u}(p')\Gamma^{\mu}(p',p)u(p) = -\frac{i\alpha}{2\pi^3}\int_o^1 dx\int_o^x dy\int d^4\ell\,\frac{\bar{u}(p')N^{\mu}u(p)}{[\ell^2+k^2(x-y)y-m^2x^2-\lambda^2(1-x)]^3} \qquad (3.32)$$

bulunur.

Regülarize olmuş köşe fonksiyonunun genel hesaplanması karışık olduğundan $\bar{u}(p')\ \Gamma_R^{\mu}(p',p)u(p)$ matris elemanını düşük momentum geçişlerinde, yani, $-\frac{k^2}{m^2} = -\frac{(p-p')^2}{m^2} << 1$ durumlarında hesaplayacağız. Bunun için (3.32) integralinin paydasını k^2'ye göre seriye açıp ilk iki terimle yetinelim.

$$\frac{1}{[\ell^2+k^2(x-y)y-m^2x^2-\lambda^2(1-x)]^3} = \frac{1}{[\ell^2-m^2x^2-\lambda^2(1-x)]^3}$$
$$-\frac{3k^2(x-y)y}{[\ell^2-m^2x^2-\lambda^2(x-y)]^4}+.... \qquad (3.33)$$

(3.33) denklemini (3.32) integral formunda yerine yazdığımızda

$$\bar{u}(p')\Gamma^{\mu}(p',p)u(p) = -\frac{i\alpha}{2\pi^3}\int_0^1 dx\int_0^x dy\int d^4\ell\Big\{\Big[\frac{\ell^2-4m^2(\frac{x^2}{2}+x-1)}{[\ell^2-m^2x^2-\lambda^2(1-x)]^3}$$

$$-\frac{3k^2(x-y)y[\ell^2-4m^2(\frac{x^2}{2}+x-1)]}{[\ell^2-m^2x^2-\lambda^2(1-x)]^4}+\frac{2k^2(1-x+y)(y-1)}{[\ell^2-m^2x^2-\lambda^2(1-x)]^3}\Big]\bar{u}(p')\gamma^{\mu}u(p)$$

$$\frac{-2mix(1-x)}{[\ell^2-m^2x^2-\lambda^2(1-x)]^3}\,\bar{u}(p')\sigma^{\nu\mu}k_{\nu}\,u(p)\Big\} \qquad (3.34)$$

bulunur. Regülarize olmuş köşe fonksiyonunun bulunması için $\bar{u}(p')\,\Gamma^{\mu}(p,p)u(p)$ büyüklüğünün de bulunması gerekir.

$$k = p-p' = 0$$

$$p = p'$$

koşulunu kullanarak

$$\bar{u}(p')\Gamma^{\mu}(p,p)u(p) = -\frac{i\alpha}{2\pi^3}\int_0^1 dx\int_0^x dy\int d^4\ell\,\frac{\ell^2-4m^2(\frac{x^2}{2}+x-1)}{[\ell^2-m^2x^2-\lambda^2(1-x)]^3}\,\bar{u}(p')\gamma^{\mu}u(p) \qquad (3.35)$$

bulunur. (3.35) ve (3.34) denklemlerini (3.10) denkleminde yerine yazdığımızda regülarize olmuş köşe fonksiyonu

$$\bar{u}(p')\Gamma^{\mu}_{R}(p',p)u(p) = -\frac{i\alpha}{2\pi^3}\int_0^1 dx\int_0^x dy\int d^4\ell\Big\{\Big[\frac{\ell^2-4m^2(\frac{x^2}{2}+x-1)}{[\ell^2-m^2x^2-\lambda^2(1-x)]^3}$$

$$-\frac{3k^2(x-y)y[\ell^2-4m^2(\frac{x^2}{2}+x-1)]}{[\ell^2-m^2x^2-\lambda^2(1-x)]^4}+\frac{2k^2(1-x+y)(y-1)}{[\ell^2-m^2x^2-\lambda^2(1-x)]^3}\Big]\bar{u}(p')\gamma^{\mu}u(p) \qquad (3.36)$$

$$-2mix\,\frac{(1-x)}{[\ell^2-m^2-x^2-\lambda^2(1-x)]^3}\,\bar{u}(p')\sigma^{\nu\mu}k_{\nu}u(p)-\frac{\ell^2-4m^2(\frac{x^2}{2}+x-1)}{[\ell^2-m^2x^2-\lambda^2(1-x)]^3}\,\bar{u}(p')\gamma^{\mu}u(p)\Big\}$$

elde edilir.

Regülarize olmuş köşe fonksiyonu aşağıdaki şekilde verilir:

$$\bar{u}(p')\,\Gamma^{\mu}_{R}(p',p)u(p) = \bar{u}(p')\gamma^{\mu}F_1(k^2)u(p) + \frac{i}{2m}\bar{u}(p')\sigma^{\nu\mu}k_{\nu}F_2(k^2)u(p) \tag{3.37}$$

$F_1(k^2)$ ve $F_2(k^2)$ elektronun form faktörleri olarak adlandırılırlar. (3.36) ve (3.37) denklemlerinden

$$F_2 = -\frac{i\alpha}{\pi^3}\int_0^1 dx\int_0^x dy\int d^4\ell\,\frac{-2m^2x(1-x)}{[\ell^2-m^2x^2-\lambda^2(1-x)]^3} \tag{3.38}$$

bulunur. F_2 form faktörü kızılötesi ıraksaklık içermediğinden $\lambda^2=0$ alabiliriz. Önce ℓ üzerinden integral aldığımızda

$$F_2 = -\frac{\alpha}{\pi}\,i^2\int_0^1 dx(1-x)$$

$$F_2 = \frac{\alpha}{2\pi} \tag{3.39}$$

bulunur.

$F_1(k^2)$ ise

$$F_1(k^2) = -\frac{i\alpha}{2\pi^3}\int_0^1 dx\int_0^x dy\int d^4\ell k^2\Big[\frac{2(1+y-x)(y-1)}{[\ell^2-m^2x^2-\lambda^2(1-x)]^3} - \frac{3(x-y)\ell^2}{[\ell^2-m^2x^2-\lambda^2(1-x)]^4}$$

$$+\frac{12m^2(x-y)y(\frac{x^2}{2}+x-1)}{[\ell^2-m^2x^2-\lambda^2(1-x)]^4}\Big] \tag{3.40}$$

olur. Burada yakınsak integraller aracılığı ile ℓ üzerinden integral aldığımızda

$$F_1(k^2) = -\frac{i\alpha}{2\pi^3}\int_o^1 dx\int_o^x dy\; k^2\Big[\frac{2(1+y-x)(y-1)}{[m^2x^2+\lambda^2(1-x)]}\,\frac{-i\pi^2}{2}$$

$$-\frac{3(x-y)y}{[m^2x^2+\lambda^2(1-x)]}\,\frac{-i\pi^2}{3}+\frac{12m^2(x-y)y(\frac{x^2}{2}+x-1)}{[m^2x^2+\lambda^2(1-x)]^2}\,\frac{i\pi^2}{6}\Big] \tag{3.41}$$

$$F_1(k^2) = -\frac{\alpha}{2\pi}\int_o^1 dx\int_o^x dy\quad k^2\Big[\frac{(1-x+y)(y-1)}{m^2x^2+\lambda^2(1-x)}-\frac{y(x-y)}{m^2x^2+\lambda^2(1-x)}$$

$$-\frac{2m^2(x-y)y(\frac{x^2}{2}+x-1)}{[m^2x^2+\lambda^2(1-x)]^2}\Big] \tag{3.42}$$

bulunur.

$F_1(k^2)$ nin çözümü için y=xu dönüşümü yapıp ve $\lambda^2=0$ limitinde yakınsak ve ıraksak terimleri ayırarak sonuca varırız

$$y = xu \qquad ;\ o<u<1$$
$$dy = xdu$$

$$F_1(k^2) = -\frac{\alpha}{2\pi}k^2\int_o^1 dx\; x\int_o^1 du\,\Big[\frac{(1-x+ux)(ux-1)}{m^2x^2+\lambda^2(1-x)}-\frac{ux(x-ux)}{m^2x^2+\lambda^2(1-x)}$$

$$-\frac{2m^2ux(x-ux)(\frac{x^2}{2}+x-1)}{[m^2x^2+\lambda^2(1-x)]^2}\Big] \tag{3.43}$$

$$F_1(k^2) = -\frac{\alpha}{2\pi}k^2\int_o^1 dx\; x\int_o^1 du\,\Big[\frac{x-1+2u^2x^2-2ux^2}{[m^2x^2+\lambda^2(1-x)]}-\frac{2m^2x^2(u-u^2)(\frac{x^2}{2}+x-1)}{[m^2x^2+\lambda^2(1-x)]^2}\Big] \tag{3.44}$$

u 'ya göre integral aldığımızda

$$F_1(k^2) = -\frac{\alpha}{2\pi}k^2 \int_0^1 dx.x \left[\frac{x-1-\frac{1}{3}x^2}{m^2x^2+\lambda^2(1-x)} - \frac{m^2x^2(\frac{x^2}{2}+x-1)}{3\left[m^2x^2+\lambda^2(1-x)\right]^2}\right] \tag{3.45}$$

olur. Daha açık bir şekilde yazıldığında

$$F_1(k^2) = -\frac{\alpha}{2\pi} k^2 \Big[\int_0^1 \frac{x^2dx}{m^2x^2+\lambda^2(1-x)} - \int_0^1 \frac{x\,dx}{\left[m^2x^2+\lambda^2(1-x)\right]} - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x^3dx}{\left[m^2x^2+\lambda^2(1-x)\right]}$$

$$-\frac{m^2}{6}\int_0^1 \frac{x^5dx}{\left[m^2x^2+\lambda^2(1-x)\right]^2} - \frac{m^2}{3}\int_0^1 \frac{x^4dx}{\left[m^2x^2+\lambda^2(1-x)\right]^2}$$

$$+\frac{m^2}{3}\int_0^1 \frac{x^3dx}{\left[m^2x^2+\lambda^2(1-x)\right]^2}\Big] \tag{3.46}$$

bulunur. Yakınsak ve ıraksak integralleri ayırdığımızda x'in küçük mertebeli integrallerinin ıraksak olduğunu görürüz. Bu integralleri I ile gösterelim.

$$I = -\left\{\int_0^1 \frac{x.dx}{m^2x^2+\lambda^2(1-x)} - \frac{m^2}{3}\int_0^1 \frac{x^3.dx}{\left[m^2x^2+\lambda^2(1-x)\right]^2}\right\} \tag{3.47}$$

I integralinin hesaplanması için (Ek-E) deki (35) ve (36) integral formlarından yararlanılır.

$$I = -\Big\{\frac{1}{2m^2}\,\ell n\left[m^2x^2-\lambda^2x+\lambda^2\right]_0^1 + \frac{\lambda^2}{2m^2}\int_0^1 \frac{dx}{m^2x^2-\lambda^2x+\lambda^2} - \frac{m^2}{3}\Big[\frac{1}{2m^4}\,\ell n\left[m^2x^2-\lambda^2x+\lambda^2\right]_0^1$$

$$+\frac{\lambda^2(2\lambda^2m^2-\lambda^4)-\lambda^2(3\lambda^2m^2-\lambda^4)x}{m^2(4m^2\lambda^2-\lambda^4)(m^2x^2-\lambda^2x+\lambda^2)}\Bigg|_0^1 + \frac{\lambda^2(6\lambda^2m^2-\lambda^4)}{2m^4(4m^2\lambda^2-\lambda^4)}\int_0^1 \frac{dx}{m^2x^2-\lambda^2x+\lambda^2}\Big]\Big\} \tag{3.48}$$

$$I=-\{\frac{1}{2m^2}[\ell n\ (m^2)-\ell n(\lambda^2)]+\frac{\lambda^2}{2m^2}\int_o^1\frac{dx}{m^2x^2+\lambda^2-\lambda^2x}-\frac{m^2}{3}[\frac{1}{2m^4}[\ell n(m^2)-\ell n(\lambda^2)]$$

$$+\frac{\lambda^2(2\lambda^2m^2-\lambda^4)-\lambda^2(3\lambda^2m^2-\lambda^4)x}{m^4(4m^2\lambda^2-\lambda^4)(m^2x^2-\lambda^2x+\lambda^2)}\Big|_o^1+\frac{\lambda^2(6\lambda^2m^2-\lambda^4)}{2m^4(4m^2\lambda^2-\lambda^4)}\int_o^1\frac{dx}{m^2x^2-\lambda^2x+\lambda^2}]\}$$

(3.49)

$$I=-(A_1+A_2+B_1+B_2+C_1) \tag{3.50}$$

olarak gösterdiğimizde

$$A_1+A_2=\frac{1}{2m^2}\ \ell n\ \frac{m^2}{\lambda^2}-\frac{1}{6m^2}\ \ell n\ \frac{m^2}{\lambda^2}$$

$$A_1+A_2=\frac{2}{6m^2}\ \ell n\ \frac{m^2}{\lambda^2}$$

$$A_1+A_2=\frac{2}{3m^2}\ \ell n\ \frac{m}{\lambda} \tag{3.51}$$

olur.

$$C_1=-\frac{m^2}{3}[\frac{\lambda^2(2\lambda^2m^2-\lambda^4-3\lambda^2m^2+\lambda^4)}{m^4\lambda^2(4m^2-\lambda^2)\ m^2})-\frac{\lambda^2(2m^2-\lambda^2)}{\lambda^4m^4(4m^2-\lambda^2)}] \tag{3.52}$$

$\lambda^2\to o$ limitinde

$$C_1=\frac{1}{6m^2} \tag{3.53}$$

$$B_1+B_2=\frac{\lambda^2}{2m^2}\int_o^1\frac{dx}{m^2x^2-\lambda^2x+\lambda^2}-\frac{m^2}{3}[\frac{\lambda^2(6\lambda^2m^2-\lambda^4)}{2m^4(4m^2\lambda^2-\lambda^4)}\int_o^1\frac{dx}{m^2x^2-\lambda^2x+\lambda^2}]$$

(3.54)

integralinin çarpım katsayısı $\lambda^2\to o$ limitinde sıfır olur. Buradan

$$B_1+B_2=0$$

olur.

(3.51) ve (3.53) denklemlerini (3.50) de yerine yazarsak

$$I = -\left[\frac{2}{3m^2}\ \ell n\ \frac{m}{\lambda} + \frac{1}{6m^2}\right] \tag{3.55}$$

bulunur.

Yakınsak integralleri $\lambda^2 \to 0$ limitinde çözebiliriz. Bunları I' ile gösterelim.

$$I' = \int_o^1 \frac{dx}{m^2} - \frac{1}{3m^2}\int_o^1 x\,dx - \frac{1}{6m^2}\int_o^1 x.dx - \frac{1}{3m^2}\int_o^1 dx \tag{3.56}$$

$$I' = \frac{5}{12m^2} \tag{3.57}$$

olur.

I ve I' değerleri (3.46) denkleminde yerine yazıldığında

$$F_1(k^2) = -\frac{\alpha}{2\pi}k^2\{-[\frac{2}{3m^2}\ell n\ \frac{m}{\lambda} + \frac{1}{6m^2}] + \frac{5}{12m^2}\} \tag{3.58}$$

$$F_1(k^2) = +\frac{\alpha}{2\pi}\ k^2[\frac{2}{3m^2}\ \ell n\ \frac{m}{\lambda} - \frac{1}{4m^2}] \tag{3.59}$$

veya

$$F_1(k^2) = \frac{\alpha k^2}{2\pi m^2}[\frac{2}{3}\ \ell n\ \frac{m}{\lambda} - \frac{1}{4}] \tag{3.60}$$

bulunur. (3.39) ve (3.60) denklemlerini (3.37) denkleminde yerine yazdığımızda

$$\bar{u}(p')\Gamma_R^{\mu}(p',p)u(p) = \bar{u}(p')[\gamma^{\mu}\ \frac{\alpha k^2}{2\pi m^2}(\frac{2}{3}\ \ell n\ \frac{m}{\lambda} - \frac{1}{4})$$

$$+ \frac{i}{2m}\sigma^{\nu\mu}k_{\nu}\ \frac{\alpha}{2\pi}]u(p)$$

elde edilir.

Ek-A
GÖSTERİM

Bu tez çalışmasında James D. Bjorken Sidney D.Drell'in aşağıda görülen metrik ve gösterimi kullanılmıştır.

$(t,x,y,z) \equiv (t,x)$ uzay-zaman koordinatları $(h=c=1)$ alınarak kontravaryant dört'lü vektör ile

$$x^{\mu} = (x^{o},\ x^{1},\ x^{2},\ x^{3}) \equiv (t,x,y,z)$$

şeklinde gösterilir. Kovaryant dörtlü vektör x_{μ} uzay bileşenlerinin işaret değişimi ile elde edilir.

$$x_{\mu} = (x_{o},\ x_{1},\ x_{2},\ x_{3}) \equiv (t,-x,-y,-z) = g_{\mu\nu} x^{\nu}$$

Burada metrik tansörü (ölçü gergeni)

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

dır.

Momentum vektörleri

$$P^{\mu} = (E,\ Px,\ Py,\ Pz)$$

şeklindedir ve iç çarpımı ise

$$P_1\ P_2 = P_1^{\mu}\ P_{2\mu} = E_1\ E_2 - \vec{P}_1\ \vec{P}_2$$

$$x\ P = t\ E - \vec{x}\ \vec{P}$$

dır.

Koordinat gösteriminde momentum işlemcisi

$$P^{\mu} = i \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \equiv \left(i \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\vec{\nabla}}{i}\right) \equiv i \nabla^{\mu}$$

ile tanımlanır.

Dirac denklemi

$$\left(i\gamma^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - m\right) \psi(x) = 0$$

dır. Fiziksel momentumu P ve polarizasyonu s olan bir parçacık için Dirac spinörü u(p,s) ile, anti parçacık ise v(p,s) ile gösterilir.

$$(\not{p}-m)\ u(p,s) = 0$$

$$(\not{p}+m)\ v(p,s) = 0$$

Herhangi bir A dörtlü vektörü ile γ matrisinin iç çarpımı

$$\gamma_{\mu}A^{\mu} = \not{A} = \gamma^{o}A^{o} - \vec{\gamma}\ \vec{A}$$

$$P_{\mu}A^{\mu} = i\not{\nabla} = i\gamma \frac{\partial}{\partial t} + i\vec{\gamma}\vec{\nabla} = i\gamma^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$$

şeklinde gösterilir.

Ek-B
SERBEST PARÇACIKLAR

Herhangi bir etkileşim olmaksızın parçacıkların hareketini relativistik bir kuramda inceleyelim. Bunun için kısaca spini $-\frac{1}{2}$'li parçacıkların (elekronlar, pozitronlar, nükleonlar, müonlar,..v.s) ve spini -1 'li fakat sıfır kütleli (fotonlar) parçacıkların dalga fonksiyonlarını tartışalım.

1) 1/2 -spinli serbest parçacıklar

m kütleli 1/2-spinli bir parçacığın hareket denklemi (1) Dirac denklemi ile verilir.

$$(i\gamma^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - m)\ \psi(x) = 0 \tag{1}$$

Kompleks eşleniğini aldığımızda

$$(-i\gamma^{*\mu}\ \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - m)\ \psi^{*}(x) = 0 \tag{2}$$

olur. Transpozeden

$$\psi^{*T}(x)\left[\ -i(\gamma^{*\mu})^{T}\ \ \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^{\mu}} - m\right] = 0 \tag{3}$$

bulunur.

$$\psi^{*T} = \psi^{+} \tag{4}$$

veya

$$\gamma^{*T} = \gamma^{+} \tag{5}$$

olduğundan (4) ifadesini (3) denkleminde yerine yazarsak

$$\psi^{+}(x)\ \ \left[-i(\gamma^{\mu})^{+}\ \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^{\mu}} - m\right] = 0 \tag{6}$$

veya

$$-\psi^{+}(x)\left[i(\gamma^{\mu})^{+}\ \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^{\mu}} + m\right] = 0 \tag{7}$$

bulunur. Diferansiyel simgesi üzerindeki ok, soldaki $\psi^{+}(x)$ spinörünün diferansiyelinin alınacağını gösterir.

$$(\gamma^{\mu})^{+} = \beta\gamma^{\mu}\beta^{-1} \tag{8}$$

ile

$$\psi^{+}(x)\left[i\beta\gamma^{\mu}\beta^{-1} \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^{\mu}} + m\right] = 0 \tag{9}$$

olur. Sağdan β ile çarpılırsa

$$\psi^{+}(x)\left[i\beta\gamma^{\mu} \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^{\mu}} + \beta m\right] = 0 \tag{10}$$

veya

$$\psi^{+}(x)\beta\left[i\gamma^{\mu} \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^{\mu}} + m\right] = 0 \tag{11}$$

bulunur. Eşlenik spinör olarak

$$\bar{\psi}(x) = \psi^{+}(x)\beta \tag{12}$$

alınır. Bununla (11) denklemi

$$\bar{\psi}(x)\left[i\gamma^{\mu} \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^{\mu}} + m\right] = 0 \tag{13}$$

eşlenik spinörün Dirac denklemi olur.

Dirac parçacığı için momentum dalga fonksiyonu $\psi(x)$ konum dalga fonksiyonunun Fourier dönüşümü aracılığı ile momentum uzayında ($p_o = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$, $px = p_{\mu}x^{\mu}$)

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{s=\pm} \int \frac{d^3p}{2p_o}\left[u(p,s)e^{-ipx} + v(p,s)e^{ipx}\right] \tag{14}$$

(s üzerinde toplam her iki spin yönelişini dikkate alır)

$$[\, i\gamma^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - m \,]\, \psi(x) = 0 \tag{15}$$

kullanarak

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \Big[i\gamma^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - m \Big] \sum_{s=\pm} \int \frac{d^3p}{2p_o} \big[u(p,s)e^{-ipx} + v(p,s)e^{ipx} \big] = 0 \tag{16}$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{s=\pm} \int \frac{d^3p}{2p_o} \{ [i\gamma^{\mu}(-ip_{\mu})-m]u(p,s)e^{-ipx}$$

$$+ [i\gamma^{\mu}(ip_{\mu})-m]\, v(p,s)e^{ipx} \} = 0 \tag{17}$$

bulunur. Üstel fonksiyonların lineer bağımsızlıklarından momentum uzayında spinörler denklemleri olarak $u(p,s)$, $v(p,s)$

$$(\gamma^{\mu}p_{\mu}-m)u(p,s) = 0 \tag{18}$$

$$(\gamma^{\mu}p_{\mu}+m)v(p,s) = 0 \tag{19}$$

yazılır. $u(p,s)$ spinörü spin-$\frac{1}{2}$'nin dalga fonksiyonunu, $v(p,s)$ ise buna ait antiparçacığın dalga fonksiyonunu gösterir.

2. Kütlesiz 1-spinli parçacıklar

1-spinli, kütlesiz, serbest bir parçacığın Maxwell teorisine göre hareket denklemi

$$A_{\mu}(x) = 0 \tag{20}$$

dır. Bu denklemin çözümü

$$A_{\mu}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\lambda=1}^{2} \int \frac{d^3k}{2k_o} \epsilon_{\mu}(k,\lambda)e^{ikx} \tag{21}$$

şeklindedir. Burada $\epsilon_{\mu}(k,\lambda)$ $\lambda=1,2$ elektromagnetik dalganın polarizasyon vektörleridir.

Ek-C

DIRAC'IN γ MATRİSLERİ ve ÖZELLİKLERİ

Dirac denklemi

$$(i\gamma^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - m)\ \psi(x) = 0 \tag{1}$$

şeklinde verilir. Burada γ^{μ} 4×4 'lü Dirac matrisleri $\psi(x)$ ise dört bileşenli spinörlerdir. Dirac γ matrisleri sıradeğişmez (antikomitasyon) bağıntısını sağlarlar. (μ=0,1,2,3)

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} + \gamma^{\nu}\gamma^{\mu} = 2\ g^{\mu\nu} \tag{2}$$

Buna göre

$$\gamma^{\mu} = T\gamma^{\mu}\ T^{-1} \tag{3}$$

bağıntısını sağlayan bir T matrisi vardır. γ'ların gösterimi

$$\gamma^{o} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix},\quad \gamma^{1} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^{1} \\ -\sigma^{1} & 0 \end{pmatrix},\quad \gamma^{2} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^{2} \\ -\sigma^{2} & 0 \end{pmatrix},\quad \gamma^{3} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^{3} \\ -\sigma^{3} & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

şeklindedir. Burada

$$\sigma^{1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad \sigma^{2} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\quad \sigma^{3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

bilinen 2×2 'li Pauli matrisleridir. Ayrıca

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

ise 2×2 'li birim matristir.

Açık olarak γ^{i}, (i=1,2,3) matrisleri hermityen değildirler, çünkü

$${\gamma^{i}}^{2} = -1 \tag{7}$$

dir. γ^{μ}'lerin hermityen eşleniklerinde sıradeğişmezliği (antikomutatifliği) gerçekler. Bu teoreme göre öyle bir β matrisi vardır ki

$$\bar{\gamma}^{\mu} = \beta^{-1}(\gamma^{\mu})^{+}\beta = \gamma^{\mu} \tag{8}$$

sağlar. Böylece

$$(\bar{\gamma}^{\mu})^{+} = \beta^{+}\gamma^{\mu}\beta^{-1^{+}} = (\gamma^{\mu})^{+} \tag{9}$$

veya

$$\begin{aligned} \gamma^{\mu} &= \beta^{+^{-1}}(\gamma^{\mu})^{+}\,\beta^{+} \\ \gamma^{\mu} &= \beta^{-1}(\gamma^{\mu})^{+}\,\beta \end{aligned} \tag{10}$$

eşitliği sağlanır.

Bununla β^{+} ler β lar gibidir. Denklem (10) dan

$$\beta\gamma^{\mu} = (\gamma^{\mu})^{+}\,\beta = (\beta\gamma^{\mu})^{+} \tag{11}$$

bulunur, öyleki $\beta\gamma^{\mu}$ hermityen olur. Bizim γ matrisleri için

$$\beta = \gamma^{o} \tag{12}$$

dir.

Sıradeğişmezliği (antikomutatifliği) sağlayan γ^{μ}'lerin transpozesinin negatifi için öyle bir C matrisi vardır ki

$$\gamma^{\mu} = -\,C(\gamma^{\mu})^{T}\,C^{-1} \tag{13}$$

geçerlidir. Bu gösterimde $C=\gamma^{o}\gamma^{2}$ dir. Beşinci bir Dirac matrisi γ^{5} 'i eklemek kolaydır

$$\gamma^{5} = i\gamma^{o}\gamma^{1}\gamma^{2}\gamma^{3} = \gamma_{5} \tag{14}$$

ve

$$\gamma^{5}\gamma^{\mu}+\gamma^{\mu}\gamma^{5} = 0 \tag{15}$$

dır. Ayrıca

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \gamma^5 \qquad (16)$$

şeklindedir.

Dirac'ın γ matrisleri arasında aşağıdaki özdeşlikler geçerlidir.

$$\gamma_\mu \gamma^\mu = 4 \qquad (17)$$

$$\gamma_\mu \not{a} \gamma^\mu = -2\not{a} \qquad (18)$$

$$\gamma_\mu \not{a}\not{b} \gamma^\mu = 4\, a\, b \qquad (19)$$

$$\gamma_\mu \not{a}\not{b}\not{c} \gamma^\mu = -2\not{c}\not{b}\not{a} \qquad (20)$$

$$\gamma_\mu \not{a}\not{b}\not{c}\not{d} \gamma^\mu = 2\left[\not{d}\not{a}\not{b}\not{c} + \not{c}\not{b}\not{a}\not{d}\right] \qquad (21)$$

Ek-D

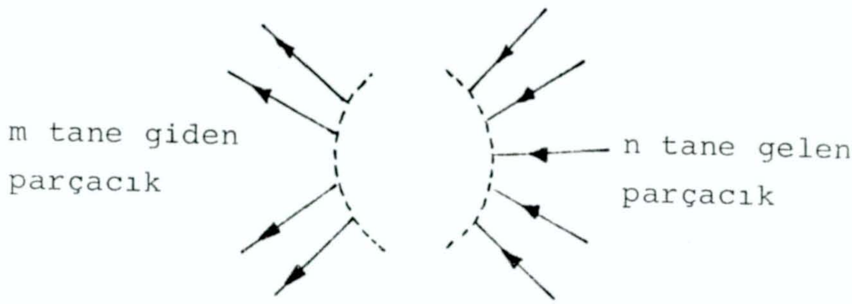
FEYNMAN DİYAGRAMLARI ve FEYNMAN KURALLARI

a) Feynman Diyagramları

Feynman diyagramları, matematiksel formüllerin diyagram olarak gösterimleridir.

ℓ mertebeli, n gelen ve m giden parçacıklı bir süreç için Feynman diyagramı aşağıdaki şekilde oluşturulur.

1) Sürecin zamansal gelişimi sağdan sola temsil edilir.
2) Gelen parçacıklar n tane ve giden parçacıklar m tane çizgi ile gösterilir.

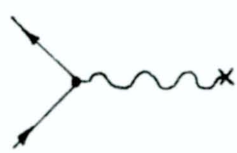


(1)

3) Çeşitli parçacık tipleri çeşitli ok ve çizgilerle gösterilir.

(2)

4) Gelen ve giden çizgiler bir etkileşme düğümü ile bağlanır. Elektromagnetik etkileşme için etkileşme düğümünün şekli aşağıdaki gibidir.

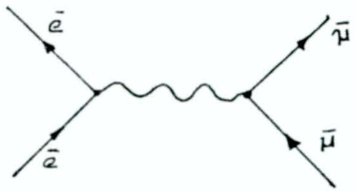


(3)

Yani her elektromagnetik etkileşme noktasında aynı çeşidin iki parçacık çizgisi olmalıdır.

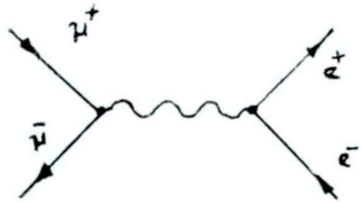
Aşağıdaki örneklerde bu özellikleri görebiliriz.

a) Düşük mertebeden elektron müon saçılması



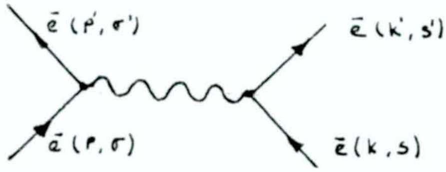
(4)

b) Bir elektron pozitron çiftinin bir müon antimüon çiftine dönüşmesi (yok olması)

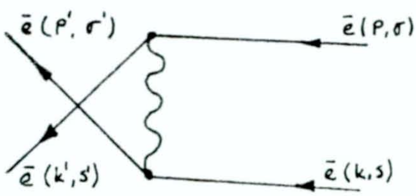


(5)

c) Düşük (sıfır olmayan) mertebeden elektron-elektron saçılması (Möller saçılması)



(6)



(7)

ilk iki örneğin tersine bunda düşük mertebeden (sıfır olmayan) iki diyagram var.

b) Feynman Kuralları

Yukarıda verilen Feynman diyagramlarının S_{fi} geçiş matris elemanları Feynman kuralları ile formalize edilir. Feynman diyagramları aşağıdaki kısımlardan meydana gelmiştir.

1) Dış çizgiler : Bunların yalnız bir sonu diyagrama bağlıdır, diğer sonu serbesttir. Dış çizgiler gelen veya çıkan parçacıklar veya antiparçacıklara karşılık gelirler.

2) İç çizgiler: Bunlar her iki ucundan diyagrama bağlıdır. Değiş-tokuş olan parçacıklara karşılık gelirler.

3) Köşeler (vertexler): Dış ve iç çizgilerin birleştiği noktalardır. Bunlarda parçacıkların etkileşmelerine karşılık gelirler.

Parçacıklar çizgiler üzerinde gösterilen ok yönünde, antiparçacıklar ise ok yönünün tersi yönde hareket ederler.

Feynman diyagramlarının momentum uzayında matematiksel ifadesi aşağıdaki gibidir.

Parçacık	Momentum	Polarizasyon	Dalga fonksiyonu Gelen parçacık	Dalga fonksiyonu Giden parçacık
e^-, μ^-, p, n	p	s	$u(p,s)$	$\bar{u}(p,s)$
$e^+, \mu^+, \bar{p}, \bar{n}$	p	s	$\bar{v}(p,s)$	$v(p,s)$
γ	k	λ	$\epsilon_\mu(k,\lambda)$	$\epsilon_\mu(k,\lambda)$

a) Dış çizgiler; her dış çizgi için $(2\pi)^{-3/2}$ faktörü ve momentum dalga fonksiyonu gelir.

b) İç çizgiler; her iç çizgi için $i(2\pi)^{-4}$ faktörü ile aşağıdaki prabagatörler (ilerleticiler) gelir.

Parçacık	Prabagatör	Diyagram
e, μ, p, n	$\dfrac{i(\gamma^\mu p_\mu + m)}{p^2 - m^2}$	
γ	$\dfrac{-ig^{\mu\nu}}{k^2}$	

c) Köşeler (Düğüm noktaları veya vertex'ler): Her köşe için

$$-i(2\pi)^4 \, \delta^4\left(\sum_i p_i' - \sum_j p_j\right)$$

faktörü gelir.

p_j - momentumları köşeye gelen parçacıkların momentumlarını,
p_i' - momentumları köşeden çıkan parçacıkların momentumlarını gösterir.

4) Toplam Feynman diyagramlarının ön işareti Pauli ilkesinden belirlenir.

i) Giden iki Fermiyon çizgisinin değiş-tokuşundan formül ifade bir (-1) faktörü kazanır.

ii) Kapalı her Fermiyon çizgisi için (-1) faktörü ve iz alınır.

5) Faktörlerin birleşiminde şöyle hareket edilir.

i) Gelen ve giden parçacıklar oklar konarak belirtilir.

ii) Bütün iç momentumlar üzerinden integral alınır.

iii) (2π) ve (i) faktörleri şöyle gelir.

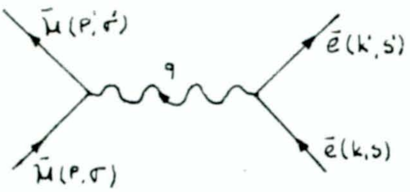
$$(2\pi)^{A/2-2K_3-4K_4}(i)^{K_3+2K_4-A-1}$$

A; Dış çizgilerin sayısı

K_3; Üç çizginin düğüm noktası (köşe) sayısı

K_4; Dört çizginin düğüm noktası (köşe) sayısı

Verilen Feynman kurallarına göre aşağıdaki sürecin saçılma matrisini yazalım.



Elektron-müon saçılması

p,σ: M kütleli gelen müonun momentumu ve spini

p',σ': Giden müonun momentumu ve spini

k,s : m kütleli gelen elektronun momentumu ve spini

k',s': Giden elektronun momentumu ve spini

Saçılma matrisi

$$<\mu(p',\sigma')e(k',s')|S_{fi}|\mu(p,\sigma)e(k,s)>$$

$$=\int d^4q(2\pi)^{-2}(i)^{-3}\;\bar{u}_\mu(p',\sigma')e\gamma_\lambda u_\mu(p,\sigma)\,\delta^4(p'-p-q)$$

$$\frac{-g^{\lambda\nu}}{q^2+i\varepsilon}\;\bar{u}_e(k',s')e\gamma_\nu\;u_e(k,s)$$

dır.

Ek-E

KULLANILAN FEYNMAN İNTEGRALLERİ VE DİĞER İNTEGRALLER

1. Feynman İntegralleri

a) Yakınsak İntegraller

Yakınsak integraller aşağıdaki standart forma getirilirler:

$$I_{mn} = \frac{(k^2)^{m-2} d^4 k}{(k^2+a^2)^n} \tag{1}$$

Dört boyutlu momentum vektörleri yazıldığında

$$k^\mu = (k^o, \vec{k})$$

$$k_\mu = (k_o, -\vec{k}) \tag{2}$$

$$k_\mu k^\mu = k_o^2 - \vec{k}^2 = k^2 \tag{3}$$

olur.

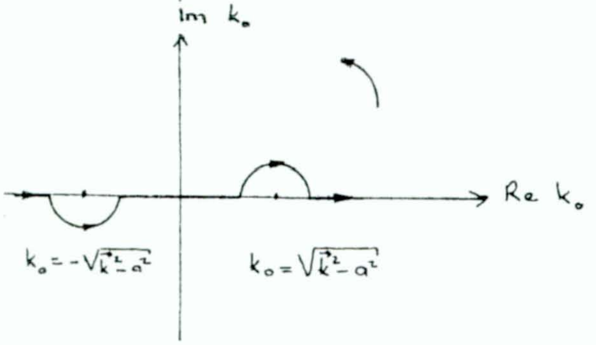
n. dereceden iki kutup noktasına sahip bu integralin kutup noktalarını bulalım.

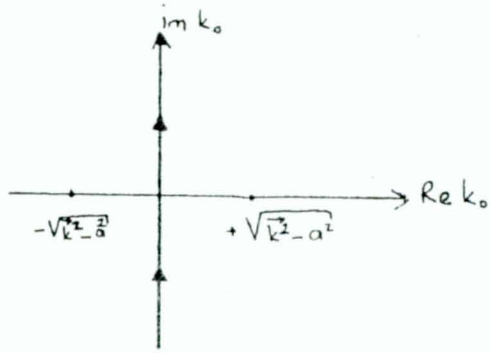
$$k^2 + a^2 = 0$$

$$k_o^2 - |k^2| + a^2 = 0 \tag{4}$$

$$k_o = \pm \sqrt{\vec{k}^2 - a^2}$$

dır.





k_o–kompleks düzlemi

k_o kompleks düzleminde integralin yolu pozitif yönde $\frac{\pi}{2}$ kadar döndürülürse integral kutup noktalarından kurtulur. İntegralin sınırları $-i\infty$ ve $+i\infty$ arasındadır. Bu döndürmeden sonra sınırlar $-\infty$ ve $+\infty$ arasında olur ve değişkenlerimiz

$$\vec{k} = \vec{k}'$$

ve

$$k^{\mu'} = (ik'^{o}, \vec{k}')$$

$$k_{\mu'} = (ik'_o, -\vec{k}')$$

olur.

$$k_{\mu'} k^{\mu'} = (ik'_o, -\vec{k}')(ik'^{o}, \vec{k}')$$

$$k'^2 = (-k'^2_o - \vec{k}'^2)$$

Bu dönüşümler (1) denkleminde yazılırsa

$$I_{mn} = i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(k'^2)^{m-2} d^4k'}{(k'^2+a^2)^n} \tag{5}$$

olur.

Aşağıdaki özdeşlik yardımı ile dört boyutlu küresel koordinatlarda hacim elemanı d^4k' elde edilir.

$$\int d^n x\, f(x) = \int f(x) r^{n-1} dr \int_o^{\pi} \sin^{n-2}\theta_{n-1} d\theta \int_o^{\pi} \sin^{n-3}\theta_{n-2} d\theta \int_o^{2\pi} d\varphi \tag{6}$$

n=4 için

$$\int d^4 x\, f(x) = \int f(x) r^3 dr \int_o^{\pi} \sin\theta d\theta \int_o^{\pi} \sin^2\chi d\chi \int_o^{2\pi} d\varphi \tag{7}$$

Dört boyutlu hacim elemanı d^4k' 'nün argümanları k, θ, φ, χ dir. (7) denkleminin yardımı ile d^4k'

$$\int d^4k' = \int K^3 dK \int_o^{2\pi} d\varphi \int_o^{\pi} \sin\theta d\theta \int_o^{\pi} \sin^2\chi d\chi \tag{8}$$

$$\int d^4k' = 4\pi \int K^3 dK \int_o^{\pi} \sin^2\chi d\chi \tag{9}$$

bulunur.

$$\mathrm{Sin}^2\chi = \frac{1-\mathrm{Cos}\,2\chi}{2} \tag{10}$$

bağıntısı kullanıldığında

$$\int d^4k' = 2\pi^2 \int K^3 dK \tag{11}$$

olur. (11) denklemini (5) denkleminde yerine yazdığımızda

$$I_{mn} = 2\pi^2 i \int_0^\infty \frac{(K^2)^{m-2} K^3 dK}{(K^2+a^2)^n} \tag{12}$$

bulunur. Buradan

$$\frac{K^2}{K^2+a^2} = t \qquad \begin{array}{ll} K\to\infty \text{ için } & t\to 1 \\ K\to 0 \text{ için } & t\to 0 \end{array} \tag{13}$$

$$K^2 = K^2 t + a^2 t$$

$$K^2 = \frac{a^2 t}{1-t} \tag{14}$$

ve

$$\frac{K^2}{t} = K^2 + a^2$$

$$\frac{a^2}{(1-t)} = K^2 + a^2$$

$$2KdK = \frac{a^2 dt}{(1-t)^2} \tag{15}$$

değişken dönüşümü yaptığımızda ve bu değerleri (12) denkleminde yerine yazdığımızda

$$I_{mn} = 2\pi^2 i \int_0^1 \frac{\left(\frac{a^2 t}{1-t}\right)^{m-2} \frac{a^2 t}{1-t}\,\frac{1}{2}\,\frac{a^2 dt}{(1-t)^2}}{\left[\frac{a^2 t}{(1-t)} + a^2\right]^n} \tag{16}$$

$$I_{mn} = \pi^2 i \int_0^1 (a^2)^{m-n}\, t^{m-1}\, (1-t)^{-m+n-1}\, dt \tag{17}$$

$$I_{mn} = (a^2)^{m-n}\ \pi^2 i \int_0^1 t^{m-1} (1-t)^{n-m-1} dt \qquad (18)$$

bulunur. Bu integral formu Gauss Beta fonksiyonu yardımı ile hesaplanır.

$$\beta(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}\ (1-x)^{n-1}\ dx \qquad (19)$$

den

$$I_{mn} = (a^2)^{m-n}\ \pi^2 i\,\beta(m,n-m)$$

$$I_{mn} = \frac{i\pi^2}{(a^2)^{n-m}}\ \beta(m,n-m)$$

$$I_{mn} = \frac{i\pi^2}{(a^2)^{n-m}}\ \frac{\Gamma(m)\Gamma(n-m)}{\Gamma(n)} \qquad (20)$$

(20) integrali $n>m>0$ koşulunda geçerlidir. Böylece

$$I_{mn} = \int \frac{(k^2)^{m-2} d^4k}{(k^2+a^2)^n} = \frac{i\pi^2}{(a^2)^{n-m}}\ \frac{\Gamma(m)\Gamma(n-m)}{\Gamma(n)} \qquad (21)$$

kanıtlanır.

b) Iraksak İntegraller

Iraksak integrallerde k-uzayındaki orjinin kayması önemlidir. Aşağıdaki iki örnek bu noktayı açıklayacaktır.

1) Logaritmik Iraksaklık

Logaritmik ıraksak integraller aşağıdaki şekilde görülecektir.

$$I_o = \int \frac{d^4k}{[(k-p)^2+a^2]^2} \qquad (1)$$

Bu integrali aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$I_o = \int \frac{d^4k}{[k^2+a^2]^2} + \left[\int \frac{d^4k}{[(k-p)^2+a^2]^2} - \frac{d^4k}{[k^2+a^2]^2}\right]$$

$$I_o = \int \frac{d^4k}{[k^2+a^2]^2} + \int d^4k \left[\frac{1}{[(k-p)^2+a^2]^2} - \frac{1}{[k^2+a^2]^2} \right] \quad (2)$$

İkinci kısımdaki integral yakınsak olduğundan regülarize etmeye gerek yoktur. Aşağıdaki integral formunun yardımı ile çözülebilir.

$$\frac{1}{\alpha^n} - \frac{1}{\beta^n} = - \int_o^1 \frac{n(\alpha-\beta)dz}{[(\alpha-\beta)z+\beta]^{n+1}} \quad (3)$$

$$(\alpha-\beta)z + \beta = u$$

$$(\alpha-\beta)dz = du$$

değişken dönüşümleri (3) denkleminde yazıldığında

$$\frac{1}{\alpha^n} - \frac{1}{\beta^n} = - n \int_\beta^\alpha \frac{du}{u^{n+1}}$$

$$\frac{1}{\alpha^n} - \frac{1}{\beta^n} = \frac{1}{[(\alpha-\beta)z+\beta]^n} \Big|_o^1$$

$$\frac{1}{\alpha^n} - \frac{1}{\beta^n} = \frac{1}{\alpha^n} - \frac{1}{\beta^n} \quad (4)$$

bulunur. Böylece

$$\frac{1}{\alpha^n} - \frac{1}{\beta^n} = - \int_o^1 \frac{n(\alpha-\beta)dz}{[(\alpha-\beta)z+\beta]^{n+1}} \quad (5)$$

kanıtlanmış olur. Bu integral formundan yararlanarak

$$\alpha = k^2+p^2 - 2p\,k + a^2$$

$$\beta = k^2 + a^2 \quad (6)$$

$$n = 2$$

değerlerini (5) denkleminde yazdığımızda (2) denkleminin ikinci kısmı

$$-2\int d^4k \int_0^1 \frac{(p^2-2pk)dz}{[(p^2-2pk)z+k^2+a^2]^3} \tag{7}$$

olur. (7) denklemini (2) denkleminde yerine yazdığımızda

$$I_o = \int \frac{d^4k}{[k^2+a^2]^2} - 2\int d^4k \int_0^1 \frac{(p^2-2pk)dz}{[(p^2-2pk)z+k^2+a^2]^3} \tag{8}$$

bulunur. (8) integral formunun ikinci kısmında

$$k_\mu \to k_\mu + p_\mu z$$

değişken dönüşümü yaptığımızda

$$-2 \int_0^1 dz \int \frac{p^2(1-2z)-2p\,k}{[k^2+a^2+p^2z(1-z)]^3} d^4k \tag{9}$$

olur. (9) integralinde simetrik integrallerden dolayı k'ya göre tek olan integraller sıfırdır. Buna göre

$$-2 \int_0^1 dz \int \frac{p^2(1-2z)\ d^4k}{[k^2+a^2+p^2z(1-z)]^3} \tag{10}$$

olur. (21) integralinin yardımı ile

$$-i\pi^2 \int_0^1 dz \frac{p^2(1-2z)}{[a^2+p^2z(1-z)]^3} \tag{11}$$

bulunur. (11) integralinin z 'e göre integralini aldığımızda değeri sıfır olur. Bu durumda (1) integrali aşağıdaki şekle dönüşür.

$$I_o = \int \frac{d^4k}{[(k-p)^2+a^2]^2} = \int \frac{d^4k}{[k^2+a^2]^2} \tag{12}$$

2) Lineer Iraksaklık

Lineer ıraksak integraller aşağıdaki formdadır.

$$I_1 = \frac{\cancel{k}\, d^4k}{[(k-p)^2+a^2]^2} \tag{13}$$

Bu integral formunuda aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$I_1 = \int \frac{(\cancel{k}+\cancel{p})d^4k}{[k^2+a^2]} + S_1 \tag{14}$$

ve

$$S_1 = -\cancel{p} \int \frac{d^4k}{[k^2+a^2]^2} + \int \cancel{k} d^4k \left(\frac{1}{[(k-p)^2+a^2]^2} - \frac{1}{[k^2+a^2]^2}\right) \tag{15}$$

(5) denkleminin yardımı ile S_1 ifadesinin ikinci kısmı

$$-2 \int \cancel{k}\, d^4k \int_0^1 \frac{p^2-2pk}{[k^2+a^2+(p^2-2pk)z]^3} \tag{16}$$

bulunur. (16) integrali logaritmik ıraksayan integraldir. Bunun için orjinini

$k \to k+pz$

olarak değiştirdiğimizde

$$-2 \int (\cancel{k}+\cancel{p}z)d^4k \int_0^1 dz \frac{p^2(1-2z)-2p\,k}{[k^2+a^2+p^2z(1-z)]^3} \tag{17}$$

olur. Simetrik integrallerden dolayı k'nın tekli durumları için integraller sıfır olur. Buna göre

$$4\int \not{k}\, d^4k \int_0^1 dz \frac{\not{p}\, k}{[k^2+a^2+p^2 z(1-z)]^3} - 2\int \not{p} z\, d^4k \int_0^1 dz \frac{p^2(1-2z)}{[k^2+a^2+p^2 z(1-z)]^3}$$

$$4\int d^4k \int_0^1 \frac{k_\mu \gamma^\mu p_\nu k^\nu dz}{[k^2+a^2+p^2 z(1-z)]^3} - 2\not{p} z \int d^4k \int_0^1 \frac{p^2(1-2z)dz}{[k^2+a^2+p^2 z(1-z)]^3}$$

$$4\int d^4k \int_0^1 dz \frac{\frac{1}{4} g_{\mu\nu} k^2 \gamma^\mu p_\nu dz}{[k^2+a^2+p^2 z(1-z)]^3} - 2\not{p}\int d^4k \int_0^1 \frac{p^2 z(1-2z)dz}{[k^2+a^2+p^2 z(1-z)]^3}$$

$$\not{p}\int d^4k \int_0^1 dz \frac{k^2}{[k^2+a^2+p^2 z(1-z)]^3} - 2\not{p}\int d^4k \int_0^1 \frac{p^2 z(1-2z)dz}{[k^2+a^2+p^2 z(1-z)]^3} \tag{18}$$

Bu sonucu (15) denkleminde yerine yazdığımızda

$$S_1 = -\not{p}\int \frac{d^4k}{[k^2+a^2]^2} - 2\not{p}\int d^4k \int_0^1 \frac{p^2 z(1-2z)}{[k^2+a^2+p^2 z(1-z)]^3}$$

$$+\not{p}\int k^2\, d^4k \int_0^1 \frac{dz}{[k^2+a^2+p^2 z(1-z)]^3} \tag{19}$$

bulunur. İkinci integrali kısmi integrasyon ile hesaplarız.

$$z = u\ , \quad dz = du$$

$$\frac{p^2(1-2z)dz}{[k^2+a^2+p^2 z(1-z)]^3} = dv\ , \quad v = -\frac{1}{2[k^2+a^2+p^2 z(1-z)]^2} \tag{20}$$

yardımı ile

$$\not{p} \int \frac{d^4k}{[k^2+a^2]^2} - \not{p}\int d^4k \int_o^1 \frac{dz}{[k^2+a^2+p^2z(1-z)]^2} \tag{21}$$

bulunur. Bu sonucu (19) denkleminde yerine yazdığımızda

$$S_1 = -\not{p}\int \frac{d^4k}{[k^2+a^2]^2} + \not{p}\int \frac{d^4k}{[k^2+a^2]^2} - \not{p}\int d^4k \int_o^1 \frac{dz}{[k^2+a^2+p^2z(1-z)]^2}$$

$$+ \not{p}\int k^2 \, d^4k \int_o^1 \frac{dz}{[k^2+a^2+p^2z(1-z)]^3}$$

$$S_1 = \not{p} \int d^4k \int_o^1 dz \left[\frac{k^2}{[k^2+a^2+p^2z(1-z)]^3} - \frac{1}{[k^2+a^2+p^2z(1-z)]^2}\right]$$

$$S_1 = -\not{p} \int d^4k \int_o^1 dz \, \frac{a^2+p^2z(1-z)}{[k^2+a^2+p^2z(1-z)]^3} \tag{22}$$

olur. (21) yakınsak integralinin yardımı ile

$$S_1 = -\not{p} \int_o^1 dz \, [a^2+p^2z(1-z)] \, \frac{i\pi^2}{2[a^2+p^2z(1-z)]}$$

$$S_1 = -\frac{i\pi^2}{2} \not{p} \tag{23}$$

bulunur. (23) değerini (14) denkleminde yerine yazarsak

$$\int \frac{\not{k} \, d^4k}{[(k-p)^2+a^2]^2} = \int \frac{(\not{k}+\not{p})d^4k}{(k^2+a^2)^2} - \frac{i\pi^2}{2}\not{p} \tag{24}$$

şekline dönüşür.

c)

$$I = \frac{F(\ell)d^4\ell}{a_1 a_2 \dots a_n} \tag{25}$$

(25) deki integrallerle, çeşitli diyagramlara karşılık gelen büyüklüklerin hesaplanmasında karşılaşılır. Burada $a_1, a_2, \dots a_n$ ler ikinci dereceden polinomlardır. $F(\ell)$ ℓ_μ'nün n. dereceden bir polinomudur. Aşağıdaki eşitliğin uygulanmasıyla bu integraller hesaplanır.

$$\frac{1}{a_1 \cdot a_2 \dots a_n} = (n-1)! \int_0^1 dx_1 \int_0^x dx_2 \dots \int_0^{x_{n-2}} \frac{dx_{n-1}}{[a_1 x_{n-1} + a_2(x_{n-1} - x_{n-2}) + \dots + a_n(1-x_1)]} \tag{26}$$

Denklem (3.11) deki köşe fonksiyonunun hesabı için yararlandığımız integral formu

$$\frac{1}{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3} = (3-1)! \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{1}{[a_1 y + a_2(x-y) + a_3(1-x)]^3} \tag{27}$$

dır. (27) denkleminin paydasını düzenlediğimizde

$$a_1 y + a_2(x-y) + a_3(1-x)$$

$$y(a_1 - a_2) + x(a_2 - a_3) + a_3$$

olur.

ve

$$x(a_2 - a_3) + a_3 = t$$

$$t + y(a_1 - a_2) = u \tag{28}$$

$y = 0$ için $u = t$

$y = x$ için $u = t + x(a_1 - a_2)$

değişken dönüşümünü yaptığımızda (27) denklemi

$$\frac{1}{a_1 . a_2 . a_3} = 2 \int_o^1 dx \int_t^{t+x(a_1-a_2)} \frac{du}{(a_1-a_2)[u]^3} \tag{29}$$

$$\frac{1}{a_1 a_2 a_3} = \frac{2}{a_1-a_2} \int_o^1 dx \left\{ \frac{1}{2[x(a_1-a_3)+a_3]^2} + \frac{1}{2[x(a_2-a_3)+a_3]^2} \right\}$$

$$\frac{1}{a_1 a_2 a_3} = -\frac{1}{a_1-a_2} \left[\int_o^1 \frac{dx}{[x(a_1-a_3)+a_3]^3} - \frac{dx}{[x(a_2-a_3)+a_3]^2} \right] \tag{30}$$

şekline dönüşür.

$$x(a_1-a_3)+a_3 = z$$

$$dx = \frac{dz}{a_1-a_3} \tag{31}$$

$$x = 0 \quad \text{için} \quad z = a_3$$

$$x = 1 \quad \text{için} \quad z = a_1$$

ve

$$x(a_2-a_3)+ a_3 = k$$

$$dx = \frac{dk}{a_2-a_3}$$

$$x = 0 \quad \text{için} \quad k = a_3$$

$$x = 1 \quad \text{için} \quad k = a_2 \tag{32}$$

Tekrar (31) ve (32) değişken dönüşümlerini (30) denkleminde yerine yazdığımızda

$$\frac{1}{a_1 a_2 a_3} = -\frac{1}{a_1-a_2} \left[\frac{1}{(a_1-a_3)} \int_{a_3}^{a_1} \frac{dz}{[z]^2} - \int_{a_3}^{a_2} \frac{dk}{(a_2-a_3)[k]^2} \right]$$

$$\frac{1}{a_1 a_2 a_3} = -\frac{1}{a_1-a_2} \left[\frac{1}{a_1-a_3} \left(\frac{-a_3+a_1}{a_1 a_3} \right) - \frac{1}{a_2-a_3} \left(\frac{-a_3+a_2}{a_2 a_3} \right) \right]$$

$$\frac{1}{a\,a\,a} = \frac{1}{a\,a\,a} \tag{33}$$

bulunur. Böylece

$$\frac{1}{a_1 . a_2 . a_3} = (3-1)! \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{1}{\left[a_1 y + a_2 (x-y) + a_3 (1-x)\right]^3} \tag{34}$$

olur.

2) Diğer İntegraller

$$\int \frac{x\, dx}{cx^2+bx+a} = \frac{1}{2c} \ln \left[cx^2+bx+a \right] - \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{cx^2+bx+a}$$

yardımı ile

$$\int_0^1 \frac{x\, dx}{m^2x^2-\lambda^2x+\lambda^2} = \frac{1}{2m^2} \ln \left[m^2x^2-\lambda^2x+\lambda^2\right]_0^1 + \frac{\lambda^2}{2m^2} \int_0^1 \frac{dx}{m^2x^2-\lambda^2x+\lambda^2} \tag{35}$$

bulunur.

$$\int \frac{x^3\, dx}{(cx^2+bx+a)^2} = \frac{1}{2c^2} \ln \left[cx^2+bx+a\right] + \frac{a(2ac-b^2)+b(3ac-b^2)x}{c^2\ \Delta R}$$

$$- \frac{b(6ac-b^2)}{2c^2\ \Delta} \int \frac{dx}{(cx^2+bx+a)}$$

$R = cx^2+bx+a \quad ; \quad R = m^2x^2-\lambda^2x+\lambda^2$

$\Delta = 4ac-b^2 \quad ; \quad \Delta = 4m^2\lambda^2-\lambda^4$

olarak tanımlanır.

$$\int \frac{x^3\, dx}{(m^2x^2-\lambda^2x+\lambda^2)^2} = \frac{1}{2m^4} \ln \left[m^2x^2-\lambda^2x+\lambda^2\right]_0^1 + \left.\frac{\lambda^2(2\lambda^2m^2-\lambda^4)-\lambda^2(3\lambda^2m^2-\lambda^4)x}{m^4(4m^2\lambda^2-\lambda^4)(m^2x^2-\lambda^2x+\lambda^2)}\right|_0^1$$

$$+ \frac{\lambda^2(6\lambda^2m^2-\lambda^4)}{2m^4(4m^2\lambda^2-\lambda^4)} \int_0^1 \frac{dx}{m^2x^2-\lambda^2x+\lambda^2} \tag{36}$$

olur.

Ek-F
GORDON AYRILMASI

Gordon ayrılmasını Dirac denklemlerinden yararlanarak bulabiliriz.

$$(\not{p}-m)\ u(p) = 0 \tag{1}$$

$$\bar{u}(p')(\not{p}'-m) = 0 \tag{2}$$

(1) denklemini soldan $\bar{u}(p')\not{a}$ ile (2) denklemini sağdan $\not{a}u(p)$ ile çarptığımızda

$$\bar{u}(p')\not{a}(\not{p}-m)u(p) = 0 \tag{3}$$

$$\bar{u}(p')(\not{p}'-m)\not{a}u(p) = 0 \tag{4}$$

olur. (3) ve (4) denklemleri toplandığında

$$\bar{u}(p')\not{a}(\not{p}-m)u(p) + \bar{u}(p')(\not{p}'-m)\not{a}u(p) = 0 \tag{5}$$

bulunur. (5) denklemini düzenlediğimizde

$$\bar{u}(p')\not{a}\not{p}u(p)+\bar{u}(p')\not{p}'\not{a}u(p)-2m\bar{u}(p')\not{a}u(p) = 0 \tag{6}$$

olur.

Dörtlü $\not{a}$ ve $\not{p}$ vektörleri arasında aşağıdaki bağıntılar vardır.

$$\not{a}\not{p} = \gamma^{\mu}a_{\mu}\ \gamma^{\nu}p_{\nu} = a_{\mu}p_{\nu}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} \tag{7}$$

$$\not{a}\not{p} = a_{\mu}p_{\nu}\left[\frac{1}{2}(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} + \gamma^{\nu}\gamma^{\mu}) + \frac{1}{2}(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}-\gamma^{\nu}\gamma^{\mu})\right] \tag{8}$$

$$\not{a}\not{p} = a_{\mu}p_{\nu}g^{\mu\nu}-ia_{\mu}p_{\nu}\sigma^{\mu\nu}$$

$$\not{a}\not{p} = a_{\mu}p^{\mu} -ia_{\mu}p_{\nu}\sigma^{\mu\nu} \tag{9}$$

ve

$$\not{a}\not{p}' + \not{p}'\not{a} = 2ap' \tag{10}$$

$$\not{p}'\not{a} = 2ap'-\not{a}\not{p}'$$

$$\not{p}'\not{a} = 2a\,p'-a_{\mu}p'^{\mu} + ia_{\mu}p'_{\nu}\sigma^{\mu\nu}$$

$$\not{p}'\not{a} = a_{\mu}p'^{\mu} + ia_{\mu}\,p'_{\nu}\,\sigma^{\mu\nu} \tag{11}$$

(9) ve (11) denklemlerini (6) denkleminde yerine yazdığımızda

$$\bar{u}(p')\left[a_{\mu}p^{\mu} - ia_{\mu}p_{\nu}\sigma^{\mu\nu} + a_{\mu}p'^{\mu} + ia_{\mu}p'_{\nu}\sigma^{\mu\nu}\right]u(p)$$

$$- 2m\bar{u}(p')\gamma^{\mu}\,a_{\mu}\,u(p) = 0 \tag{12}$$

olur. (12) denklemi a_{μ} ile bölünürse

$$\bar{u}(p')\left[(p^{\mu}+p'^{\mu})-(p_{\nu}-p'_{\nu})i\sigma^{\mu\nu}\right]u(p)-2m\bar{u}(p')\gamma^{\mu}u(p) = 0 \tag{13}$$

olur.

(13) denkleminden

$$\bar{u}(p')\gamma^{\mu}\,u(p) = \frac{1}{2m}\,\bar{u}(p')\left[(p^{\mu}+p'^{\mu})-(p_{\nu}-p'_{\nu})i\sigma^{\mu\nu}\right]u(p) \tag{14}$$

veya

$$\bar{u}(p')\gamma^{\mu}\,u(p) = \frac{1}{2m}\,\bar{u}(p')\left[(p^{\mu}+p'^{\mu})+(p_{\nu}-p'_{\nu})i\sigma^{\nu\mu}\right]u(p) \tag{15}$$

bulunur.

KAYNAKLAR

1. J.D. BJORKEN, S.D. DRELL, Relativistische Quantenmechanik, B.I., Mannheim, (1966)
2. W.GREİNER, J.REİNHARDT, Quantenelektrodynamik, H.Deutsch, Frankfurt/Main (1984)
3. J.M. JAUCH, F. ROHRLİCH, Theory of Photons and Electrons Springer-Verlag, New York (1980)
4. R.P. FEYNMAN, Quantenelektrodynamik, B.I. Mannheim, (1969)
5. F. PENZİLİN, Fortschr. Phys. 11, 357 (1963)