KARADENİZ ÜNİVERSİTESİ × FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FİZİK ANA BİLİM DALI
FİZİK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

TEZ NUMARASI

Genel :

Anabilim Dalı:

Program :

DÖRDÜNCÜ MERTEBEDEN FOTON-FOTON SAÇILMASINDA DÖRT BOYUTLU FEYNMAN İNTEGRALLERİNİN HESABI

Harun KAYACI

Yönetici : Prof. Dr. Mehmet ABAK

Trabzon (Ocak 1986)

Ö N S Ö Z

Bu tezin yöneticiliğini üstlenen ve önerileri ile araştırmamı yönlendiren Hocam Sayın Prof.Dr. Mehmet ABAK'a teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, çalışmalarımda yardımcı olan Sayın Araş. Gör. Coşkun AYDIN, Uzman Araştırmacı Sayın Atilla AKAY'a, tezimin yazılma aşamasında bana yardımcı olan Sayın Hasan KARAGÖL'e ve tezimin bu aşamaya gelmesinde katkıları bulunanlara teşekkürlerimi sunarım.

Harun KAYACI

İ Ç İ N D E K İ L E R

Ö Z E T

Kuantum elektrodinamiği renormalize bir kuram olduğundan ayar değişmezliğini bozan ıraksaklıkların regülarize edilmeleri gerekir.

Bu çalışmada dördüncü mertebeden foton-foton saçılmasında karşılaşılan logaritmik ıraksak ve yakınsak dört boyutlu Feynman integralleri ile kuantum elektrodinamiğinin karesel ıraksak ve lineer ıraksak integralleri de hesaplanmıştır.

G İ R İ Ş

Kuantum elektrodinamiği, elektromağnetik ve elektron-pozitron alanlarının etkileşmelerini konu eder. Bu alanların kendi aralarında veya kendi kendileri ile etkileşmeleri saçılma matrisi (S-Matrisi) ile betimlenir.

Bölüm I de yüksek mertebeden saçılma matrisini veren en genel ifade verilmiştir. Bölüm II de dördüncü mertebeden foton-foton saçılmasının matris elemanı verilmiştir. Bölüm III de dördüncü mertebeden foton-foton saçılmasında karşılaşılan dört boyutlu Feynman integralleri hesaplanmiştir.

Eklerde gerekli matematiksel formalizma (Metrik, Gösterim, Dört boyutlu Feynman integralleri, İz teoremleri, Feynman kuralları) ile Bölüm II deki İzler ve Bölüm III deki Feynman integralleri hesaplanmıştır.

BÖLÜM I

I.1- YÜKSEK MERTEBEDEN SAÇILMA MATRİSİ

Kuantum Elektrodinamiği, elektromağnetik ve elektron-pozitron alanlarının her ikisini içeren dinamik sistemlerle ilgilenir. Bu sistemler H Hamiltonyen fonksiyonu ile karakterize edilir.

Sistem Hamiltonyeni

$$H = H_o + V \tag{1.1}$$

ile verilir. Burada $H_o = H_\gamma + H_e$ serbest alanların Hamiltonyenleri toplamıdır. V ise alanlar arasındaki etkileşme Hamiltonyenidir.

V(t) etkileşme işlemcisinin şekli aşağıdaki gibidir:

$$V(t) = -\int J_\mu(x)A_\mu(x)\, dr \tag{1.2}$$

Burada $J_\mu(x)$ etkileşme görünümünde elektron-pozitron ψ ve $\overline{\psi}$ alan işlemcileri için yazılan akım yoğunluk vektörüdür. A_μ ise etkileşme görünümünde elektromağnetik alanın potansiyel işlemcisidir.

$$J_\mu(x) = ieN(\overline{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)) \tag{1.3}$$

(1.3) de görüldüğü gibi V(t) etkileşme işlemcisi elektronun e yükü ile orantılıdır.

Etkileşme görünümünde elektrodinamiğin temel denklemi

$$i\,\frac{\partial\Phi(t)}{\partial t} = V(t)\Phi(t) \tag{1.4}$$

ifadesi ile verilir.

$$S^{(o)}(t,t_0) = 1 \qquad (1.10)$$

$$S^{(1)}(t,t_0) = 1-i \int_{t_0}^{t} V(t')dt' \qquad (1.11)$$

yazılabilir. (1.11) ifadesi (1.6) ifadesine uygulandığında

$$S^{(2)}(t,t_0) = 1-i \int_{t_0}^{t} V(t').dt' + (-i)^2 \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{t'} V(t').$$

$$. V(t'')dt''.dt' \qquad (1.12)$$

ifadesi bulunur. Bu işlem n defa yapıldığında,

$$S^{(n)} = S^{(o)} + S^{(1)} + S^{(2)} + \ldots + S^{(n-1)} + (-i)^n \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{t'} \ldots$$

$$\int_{t_0}^{t^{(n-1)}} V(t')V(t'')\ldots V(t^{(n)})dt^{(n)}\ldots dt' \qquad (1.13)$$

ifadesi elde edilir. (1.8) seri acılımının n. terimi

$$S_n(t,t_0) = (-i)^n \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{t'} \ldots \int_{t_0}^{t^{(n-1)}} V(t')V(t'')\ldots$$

$$V(t^{(n)})dt^{(n)}\ldots dt' \qquad (1.14)$$

olur. Böylece,

$$U^{(o)} = U_0 = 1$$

$$U^{(1)} = U_0 + U_1$$

$$U^{(2)} = U_0 + U_1 + U_2 \qquad (1.15)$$

.

.

.

$$U^{(n)} = U^{(n-1)} + U_n$$

bulunur. Eğer V(t') ve V(t") etkileşme potansiyelleri sıradeğişimli ise,

$$T(V(t_1)V(t_2)) = \begin{cases} V(t_1)V(t_2) & t_2<t_1 \\ V(t_2)V(t_1) & t_1<t_2 \end{cases} \tag{1.16}$$

ve

$$T(V_i(t_i)\ V_j(t_j)\ldots V_k(t_k)) = V_1(t_1)V_2(t_2)\ldots V_n(t_n) \tag{1.17}$$

olur. Burada $t_1 > t_2 > t_3 \ldots > t_n$ dir. Böylece (1.14) ifadesinden

$$S_n(t,t_o) = \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_o}^{t} \int_{t_o}^{t} \ldots \int_{t_o}^{t} T(V(t')V(t'')\ldots$$

$$V(t^{(n)}))dt^{(n)}\ldots dt \tag{1.18}$$

bulunur. Bu ifade, başlangıç durumunda verilen bir dalganın zamanla ilerlemesini betimleyen tanındaki işlemcisini gösterir.

Şimdi sistemin $t=-\infty$ da Φ_i^o durumundan $t=\infty$ da Φ_f^o durumuna geçişi için olasılık genliğini hesaplayalım:

Burada,

$$(\Phi_f^o, S\Phi_i^o) \equiv \langle f\ |S|\ i\rangle \tag{1.19}$$

ve

$$J_\mu(x) = \frac{ie}{2}\left(\overline{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x) - \overline{\psi}^c(x)\gamma_\mu\psi^c(x)\right)$$

$$J_\mu(x) = ieN\left(\overline{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)\right) \qquad (1.20)$$

dir.

$U(x)$ fonksiyonu

$$U(x) = -J_\mu(x)A_\mu(x) \qquad (1.21)$$

Şeklinde tanımlanır ve (1.20) ifadesi kullanılırsa,

$$U(x) = -ieN(\overline{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x))A_\mu(x) = -ieN(\overline{\psi}(x)A\!\!\!/_\mu(x)\psi(x)) \qquad (1.22)$$

ifadesi bulunur.

$$V(t) = \int U(x)dr \qquad (1.23)$$

ifadesi kullanıldığında (1.18) ifadesi aşağıdaki gibi olur.

$$S^{(n)} = S_n(t,t_0) = \frac{(-e)^n}{n!}\int d^4x_1 \ldots \int d^4x_n T(N(\overline{\psi}(x_1)A\!\!\!/(x)\psi(x_1))\ldots$$

$$.N(\overline{\psi}(x_n)A\!\!\!/(x_n)\psi(x_n))) \qquad (1.24)$$

S işlemcisi başlangıç durum $\Phi(-\infty)$ dalga fonksiyonunu, son durum $\Phi(\infty)$ dalga fonksiyonuna dönüştürür. Bu işlemci saçılma matrisi veya S-matrisi olarak adlandırılır.

(1.24) ifadesinde verilen saçılma matrisi doğrudan Feynman tarafından formüle edilen kurallar ile de yazılabilir (EK-D).

BÖLÜM II

2.1- DÖRDÜNCÜ MERTEBEDEN FOTON-FOTON SAÇILMA TENSÖRÜ

Işığın ışık tarafından saçılması özellikle kuantum elektrodinamiksal bir süreçtir. Elektromağnetik alanların, elektron-pozitron alanlarının vakumu ile etkileşmesi, bu alanların kendi kendileriyle etkileşmesine, özellikle fotonların kendi aralarındaki etkileşmesine götürür.

Enerjileri çift yaratmaya yetmeyen, momentumları k_1, k_2 olan iki foton gözönüne alalım. Bu fotonlar bir virtüel çift meydana getirebilirler. Sonra tekrar k_3 ve k_4 momentumlu iki fotona ayrılırlar. Bunların momentumları baştaki k_1 ve k_2 momentumlu fotonların momentumlarına,

$k_1 + k_2 = k_3 + k_4$ (enerji-momentum korunumu yasası) bağıntısı ile bağlıdırlar.

İşte bu süreç foton-foton saçılmasıdır. Klasik elektrodinamikte elektromağnetik dalgalar birbirilerinden bağımsız yayıldıklarından ve birbirlerini karşılıklı etkilemediklerinden bu süreç klasik alan eşitlikleri yardımıyla hesaplanamaz.

Foton-foton saçılması ve elektromağnetik alanlar arasındaki başka etkileşmeleri, alan denklemleri ile betimleyebilmemiz için Maxwell denklemlerinin tersine, lineer olmayan denklemleri almak zorundayız.

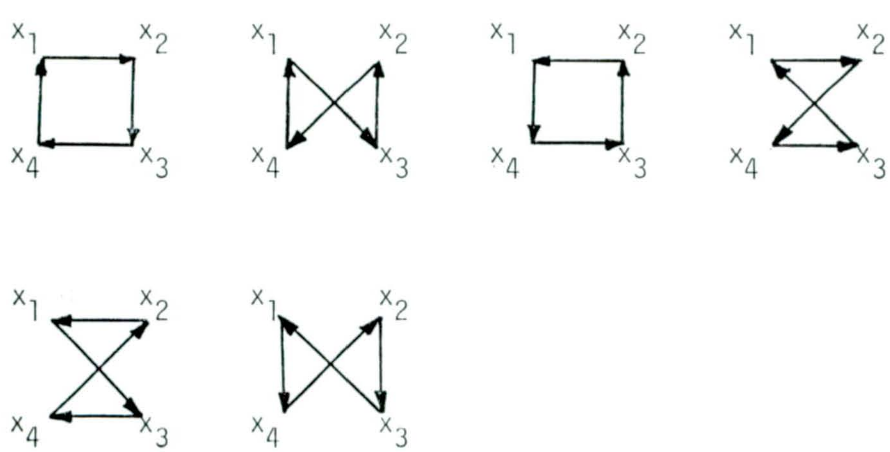
Yetindiğimiz tedirgeme (perturpasyon) yaklaşımının en düşük mertebesinde elektromağnetik alanlar arasındaki etkileşme, saçılma matrisinin $S^{(4)}$ kısmı ile verilir. $S^{(4)}$ matrisi aşağıdaki şekilde verilir (Bölüm I, denklem 24).

$$S^{(4)} = \frac{e^4}{4!} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \int d^4x_3 \int d^4x_4 \; T\{ N(\overline{\psi}(x_1) A\!\!\!/(x_1)\psi(x_1))$$

$$.N(\overline{\psi}(x_2) A\!\!\!/(x_2).\psi(x_2)).N(\overline{\psi}(x_3) A\!\!\!/(x_3)\psi(x_3)).N(\overline{\psi}(x_4) A\!\!\!/(x_4)$$

$$\psi(x_4))\} \qquad (2.1)$$

Bizi gerçek elektronların değil de sadece elektromağnetik alanların katıldığı süreçler ilgilendirdiğinden, bu ifadelerde elektron işlemcilerinin $\overline{\psi}(x)\psi(x)$ çarpımını bunların eşlenmeleri (kontraksiyonları) aracılığı ile veririz. Eşlenmelerin toplam sayısı altıdır. Bunlar aşağıda şematik olarak gösterilmiştir.



Şekil - 1

Eşlenmelerin hepsi aynı katkıyı verir. Bundan ötürü saçılma matrisinin aşağıda verilen $S^{(4)}$ kısmı ile ilgileneceğiz.

$$S^{(4)} = \frac{-e^4.6}{4.3.2.1} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \int d^4x_3 \int d^4x_4 N(A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)A_\lambda(x_3)$$

$$A_\sigma(x_4)).\dot{I}z\,\{\gamma_\mu.S(x_2-x_1)\gamma_\nu.S(x_3-x_2)\gamma_\lambda.S(x_4-x_3)$$

$$\gamma_\sigma.S(x_1-x_4)\} \qquad (2.2)$$

Burada yanlız

$$A_\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{ikx} A_\mu(k) d^4k$$

büyüklükleri işlemcidir. Momentum uzayında bu ifade şu şekli alır.

$$S^{(4)} = -\frac{i}{4} \left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^2 . \int d^4x e^{ix(k_1+k_2+k_3+k_4)} . \int d^4k_1 \int d^4k_2$$

$$\int d^4k_3 \int d^4k_4 . N\left(\frac{A_\mu(k_1)}{(2\pi)^4} . \frac{A_\nu(k_2)}{(2\pi)^4} . \frac{A_\lambda(k_3)}{(2\pi)^4} . \frac{A_\sigma(k_4)}{(2\pi)^4}\right).$$

$$.T_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1,k_2,k_3,k_4)$$

Burada,

$$\delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{ikx}$$

kullanıldığında

$$S^{(4)} = -\frac{i}{4} \left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^2 \int d^4k_1 \int d^4k_2 \int d^4k_3 \int d^4k_4 \, (2\pi)^4.$$

$$.\delta(k_1+k_2+k_3+k_4)\ N\left(\frac{A_\mu(k_1)}{(2\pi)^4} . \frac{A_\nu(k_2)}{(2\pi)^4} . \frac{A_\lambda(k_3)}{(2\pi)^4} . \frac{A_\sigma(k_4)}{(2\pi)^4}\right).$$

$$\cdot T_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1,k_2,k_3,k_4) \qquad (2.3)$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadede,

$$T_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1,k_2,k_3,k_4) = \frac{1}{i\pi^2} \int d^4P \,\{\gamma_\mu(i\not{P}+m)^{-1}\gamma_\nu(i\not{P}-i\not{K}_2+m)^{-1}.$$

$$.\gamma_\lambda(i\not{P}-i\not{K}_2-i\not{K}_3+m)^{-1}.\gamma_\sigma(i\not{P}-i\not{K}_2-i\not{K}_3-i\not{K}_4+m)^{-1}\} \qquad (2.4)$$

ve

$$A_\mu(k) = \int A_\mu(x)\, e^{-ikx} d^4k \quad \text{dır.}$$

$T_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1,k_2,k_3,k_4)$ tensörü yerine tensör indislerinin ve k_i değişkenlerinin değiş tokuşuna göre aynı andaki yerdeğiştirmeler için simetrik (bakışımlı) olan $J_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1,k_2,k_3,k_4)$ tensörünü alacağız. Bu tensör,

$$J_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1,k_2,k_3,k_4) = T_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1,k_2,k_3,k_4) + T_{\mu\nu\sigma\lambda}(k_1,k_2,k_4,k_3)$$

$$+T_{\mu\lambda\nu\sigma}(k_1,k_3,k_2,k_4) \qquad (2.5)$$

ifadesi ile verilir.

Denklem (2.4) deki $T_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1,k_2,k_3,k_4)$ yerine $\frac{1}{3}\, J_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1,k_2,k_3,k_4)$ alınabilir. Böylece (2.3) denklemi aşağıdaki formu alır:

$$S^{(4)} = -\frac{i}{12}\left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^2 \int d^4k_1 \int d^4k_2 \int d^4k_3 \int d^4k_4 .(2\pi)^4 \,.$$

$$\cdot\delta(k_1+k_2+k_3+k_4).N\left(\frac{A_\mu(k_1)}{(2\pi)^4}\cdot\frac{A_\nu(k_2)}{(2\pi)^4}\cdot\frac{A_\lambda(k_3)}{(2\pi)^4}\cdot\frac{A_\sigma(k_4)}{(2\pi)^4}\right)\cdot$$

$$\cdot J_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1,k_2,k_3,k_4) \qquad (2.6)$$

$J_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1,k_2,k_3,k_4)$ simetrik tensörü dördüncü mertebeden foton-foton saçılma tensörü olarak adlandırılır. Virtüel elektronların büyük momentum değerlerinde $T_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1,k_2,k_3,k_4)$ tensörü ıraksar. Bunu doğrulamak için $T_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1,k_2,k_3,k_4)$ tensörü P'lerin büyük değerleri için $T_{\mu\nu\lambda\sigma}(0,0,0,0)$ tensörü gibi davrandığını gözönünde bulundurmalıyız. Bu tensör,

$$T_{\mu\nu\lambda\sigma}(0,0,0,0) = \frac{1}{i\pi^2} \int \frac{d^4P}{(P^2+m^2)^4}\, \text{İz}\{\gamma_\mu(i\not{P}-m)\gamma_\nu(i\not{P}-m)\cdot$$

$$\cdot\,\gamma_\lambda(i\not{P}-m)\gamma_\sigma(i\not{P}-m)\} \tag{2.7}$$

ifadesiyle verilir.

Şimdi

$$\text{İz}\{\gamma_\mu(i\not{P}-m)\gamma_\nu(i\not{P}-m)\gamma_\lambda(i\not{P}-m)\gamma_\sigma(i\not{P}-m)\}$$

ifadesini hesaplayalım.

$$\text{İz}\{\gamma_\mu\not{P}\gamma_\nu\not{P}\gamma_\lambda\not{P}\gamma_\sigma\not{P}-\gamma_\mu\not{P}\gamma_\nu\not{P}m^2\gamma_\lambda\gamma_\sigma-m^2\gamma_\mu\not{P}\gamma_\nu\gamma_\lambda\not{P}\gamma_\sigma-m^2\gamma_\mu\not{P}\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\sigma\not{P}$$

$$-m^2\gamma_\mu\gamma_\nu\not{P}\gamma_\lambda\not{P}\gamma_\sigma-m^2\gamma_\mu\gamma_\nu\not{P}\gamma_\lambda\gamma_\sigma\not{P}-m^2\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda\not{P}\gamma_\sigma\not{P}+m^4\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\sigma\}$$

$$=\tau_1+\tau_2+\tau_3+\tau_4+\tau_5+\tau_6+\tau_7+\tau_8 \tag{2.8}$$

Burada

$\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4,\tau_5,\tau_6,\tau_7,\tau_8$

$$\tau_1 = \text{İz}(\gamma_\mu \not{P}\gamma_\nu \not{P}\gamma_\lambda \not{P}\gamma_\sigma \not{P})$$

$$\tau_2 = \text{İz}(-m^2\gamma_\mu \not{P}\gamma_\nu \not{P}\gamma_\lambda \gamma_\sigma)$$

$$\tau_3 = \text{İz}(-m^2\gamma_\mu \not{P}\gamma_\nu \gamma_\lambda \not{P}\gamma_\sigma)$$

$$\tau_4 = \text{İz}(-m^2\gamma_\mu \not{P}\gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_\sigma \not{P})$$

$$\tau_5 = \text{İz}\ (-m^2\gamma_\mu \gamma_\nu \not{P}\gamma_\lambda \not{P}\gamma_\sigma)$$

$$\tau_6 = \text{İz}(-m^2\gamma_\mu \gamma_\nu \not{P}\gamma_\lambda \gamma_\sigma \not{P})$$

$$\tau_7 = \text{İz}(-m^2\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda \not{P}\gamma_\sigma \not{P})$$

$$\tau_8 = \text{İz}(m^4\ \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_\sigma)$$

dır.

Şimdi bu terimleri hesaplayalım (EK.C):

$$\begin{aligned}\tau_1 = \text{İz}(\gamma_\mu \not{P}\gamma_\nu \not{P}\gamma_\lambda \not{P}\gamma_\sigma \not{P}) = {} & 32P_\mu P_\nu P_\lambda P_\sigma + 4p^2(\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\sigma} + \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\lambda} - \delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\sigma}) \\ & -8p^2(P_\mu P_\sigma \delta_{\nu\lambda} + P_\mu P_\nu \delta_{\lambda\sigma} - P_\nu P_\lambda \delta_{\mu\sigma} + \\ & +P_\lambda P_\sigma \delta_{\mu\nu})\end{aligned}$$

$$\tau_2 = \text{İz}(-m^2\gamma_\mu \not{P}\gamma_\nu \not{P}\gamma_\lambda \gamma_\sigma) = -m^2[\ P_\mu \text{İz}(\gamma_\nu \not{P}\gamma_\lambda \gamma_\sigma) - \delta_{\mu\nu}\text{İz}(\not{P}\not{P}\gamma_\lambda \gamma_\sigma) +$$

$$+\ P_\mu \text{İz}(\not{P}\gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_\sigma) - \delta_{\mu\lambda}\text{İz}(\not{P}\gamma_\nu \not{P}\gamma_\sigma) + \delta_{\mu\sigma}\text{İz}(\not{P}\gamma_\nu \not{P}\gamma_\lambda)]$$

$$\tau_3 = \text{İz}(-m^2\gamma_\mu \not{P}\gamma_\nu \gamma_\lambda \not{P}\gamma_\sigma) = -m^2[P_\mu \text{İz}(\gamma_\nu \gamma_\lambda \not{P}\gamma_\sigma) - \delta_{\mu\nu}\text{İz}(\not{P}\gamma_\lambda \not{P}\gamma_\sigma) +$$

$$+\ \delta_{\mu\nu}\text{İz}(\not{P}\gamma_\nu \not{P}\gamma_\sigma) - P_\mu \text{İz}(\not{P}\gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_\sigma) + \delta_{\mu\sigma}\text{İz}(\not{P}\gamma_\nu \gamma_\lambda \not{P})]$$

$$\tau_4 = \mathrm{tz}(-m^2\gamma_\mu \not{P}\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\sigma\not{P}) = -m^2[P_\mu \mathrm{tz}(\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\sigma\not{P}) - \delta_{\mu\nu}\mathrm{tz}(\not{P}\gamma_\lambda\gamma_\sigma\not{P}) +$$

$$+\delta_{\mu\lambda}\mathrm{tz}(\not{P}\gamma_\nu\gamma_\sigma\not{P}) - \delta_{\mu\sigma}\mathrm{tz}(\not{P}\gamma_\nu\gamma_\lambda\not{P}) + P_\mu \mathrm{tz}(\not{P}\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\sigma)]$$

$$\tau_5 = \mathrm{tz}(-m^2\gamma_\mu\gamma_\nu\not{P}\gamma_\lambda\not{P}\gamma_\sigma) = -m^2[\delta_{\mu\nu}\mathrm{tz}(\not{P}\gamma_\lambda\not{P}\gamma_\sigma) - P_\mu \mathrm{tz}(\gamma_\nu\gamma_\lambda\not{P}\gamma_\sigma) +$$

$$+\delta_{\mu\lambda}\ \mathrm{tz}(\gamma_\nu\not{P}\not{P}\gamma_\sigma) - P_\mu \mathrm{tz}(\gamma_\nu\not{P}\gamma_\lambda\gamma_\sigma) + \delta_{\mu\sigma}\mathrm{tz}(\gamma_\nu\not{P}\gamma_\lambda\not{P})]$$

$$\tau_6 = \mathrm{tz}(-m^2\gamma_\mu\gamma_\nu\not{P}\gamma_\lambda\gamma_\sigma\not{P}) = -m^2[\delta_{\mu\nu}\mathrm{tz}(\not{P}\gamma_\lambda\gamma_\sigma\not{P}) - P_\mu \mathrm{tz}(\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\sigma\not{P}) +$$

$$+\ \delta_{\mu\lambda}\mathrm{tz}(\gamma_\nu\not{P}\gamma_\sigma\not{P}) - \delta_{\mu\sigma}\mathrm{tz}(\gamma_\nu\not{P}\gamma_\lambda\not{P}) + P_\mu \mathrm{tz}(\gamma_\nu\not{P}\gamma_\lambda\gamma_\sigma)]$$

$$\tau_7 = \mathrm{tz}(-m^2\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda\not{P}\gamma_\sigma\not{P}) = -m^2[\delta_{\mu\nu}\mathrm{tz}(\gamma_\lambda\not{P}\gamma_\sigma\not{P}) - \delta_{\mu\lambda}\mathrm{tz}(\gamma_\nu\not{P}\gamma_\sigma\not{P}) +$$

$$+\ P_\mu \mathrm{tz}(\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\sigma\not{P}) - \delta_{\mu\sigma}\mathrm{tz}(\gamma_\nu\gamma_\lambda\not{P}\not{P}) +\ P_\mu \mathrm{tz}(\gamma_\nu\gamma_\lambda\not{P}\gamma_\sigma)]$$

$$\tau_8 = \mathrm{tz}\ (m^4\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\sigma) = 4m^4(\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\sigma} + \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\lambda} - \delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\sigma})$$

$$\tau_1 + \tau_8 = \mathrm{tz}(\gamma_\mu\not{P}\gamma_\nu\not{P}\gamma_\lambda\not{P}\gamma_\sigma\not{P}) + \mathrm{tz}(m^4\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\sigma) =$$

$$= 32\ P_\mu P_\nu P_\lambda P_\sigma + 4P^4(\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\sigma} + \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\lambda} - \delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\sigma}) - 8p^2(P_\mu P_\nu\delta_{\lambda\sigma} + $$

$$+ P_\nu P_\lambda\delta_{\mu\sigma} + P_\mu P_\sigma\delta_{\nu\lambda}\ \ + P_\lambda P_\sigma\delta_{\mu\nu}) + 4m^4\ (\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\sigma} + \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\lambda} - \delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\sigma})$$

$$\tau_2 + \tau_3 + \tau_4 + \tau_5 + \tau_6 + \tau_7 = \mathrm{tz}(-m^2\gamma_\mu\not{P}\gamma_\nu\not{P}\gamma_\lambda\gamma_\sigma) + \mathrm{tz}(-m^2\gamma_\mu\not{P}\gamma_\nu\gamma_\lambda\not{P}\gamma_\sigma) +$$

$$+\mathrm{tz}(-m^2\gamma_\mu\not{P}\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\sigma\not{P}) + \mathrm{tz}(-m^2\gamma_\mu\gamma_\nu\not{P}\gamma_\lambda\not{P}\gamma_\sigma) + \mathrm{tz}(-m^2\gamma_\mu\gamma_\nu\not{P}\gamma_\lambda\gamma_\sigma\not{P}) +$$

$$+\mathrm{tz}\ (-m^2\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda\not{P}\gamma_\sigma\not{P}) = -m^2[-8P^2(\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\sigma} + \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\lambda} - \delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\sigma}) +$$

$$+8(P_\mu P_\nu\delta_{\lambda\sigma} + P_\mu P_\sigma\delta_{\nu\lambda} + P_\nu P_\lambda\delta_{\mu\sigma} + P_\lambda P_\sigma\delta_{\mu\nu})]$$

$$\tau_1+\tau_2+\tau_3+\tau_4+\tau_5+\tau_6+\tau_7+\tau_8= \dot{I}z\{\gamma_\mu(i\not P-m)\gamma_\nu(i\not P-m)\gamma_\lambda(i\not P-m)\gamma_\sigma(i\not P-m)\}$$

$$=(4p^4+8m^2p^2+4m^4)(\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\sigma}+\delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\lambda}-\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\sigma})+ \tag{2.9}$$

$$+(-8m^2-8p^2)(P_\mu P_\nu\delta_{\lambda\sigma}+P_\nu P_\lambda\delta_{\mu\sigma}+P_\mu P_\sigma\delta_{\nu\lambda}+P_\lambda P_\sigma\delta_{\mu\nu})+32\ P_\mu P_\nu P_\lambda P_\sigma$$

Şimdide $T_{\mu\nu\lambda\sigma}(0,0,0,0)$ tensörünü hesaplayalım:

$$T_{\mu\nu\lambda\sigma}\ (0,0,0,0)=\frac{1}{i\pi^2}\int\frac{d^4P}{(P^2+m^2)^4}\ \dot{I}z[\gamma_\mu(i\not P-m)\gamma_\nu(i\not P-m)\gamma_\lambda(i\not P-m)\cdot$$

$$\cdot\gamma_\sigma(i\not P-m)]$$

Burada,

$$\int P_\mu P_\nu f(p^2)d^4P=\frac{1}{4}\,\delta_{\mu\nu}\int P^2 f(p^2)d^4P \tag{2.10}$$

ve

$$\int P_\mu P_\nu P_\lambda P_\sigma f(p^2)d^4P=\frac{1}{24}\,(\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\sigma}+\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\sigma}+\delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\lambda})\int p^4 f(p^2)d^4P$$

bağıntılarını kullanarak:

$$T_{\mu\nu\lambda\sigma}(0,0,0,0)=\frac{1}{i\pi^2}\Big\{\frac{4}{3}\,(\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\sigma}+\delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\lambda}-2\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\sigma})\int\frac{d^4P}{(P^2+m^2)^2}+$$

$$+\frac{4}{3}\,(\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\sigma}+\delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\lambda}-2\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\sigma})\int\frac{d^4P}{(P^2+m^2)^3}+\frac{4}{3}\,(\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\sigma}+\delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\lambda}+$$

$$+\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\sigma})m^4\int\frac{d^4P}{(P^2+m^2)^4}\Big\} \tag{2.11}$$

İfadesi elde edilir. ($P_\mu P^\mu=P^2=\vec{P}^{\,2}-E^2=-m^2$ koşulunu kullandık) Burada ilk integral, logaritmik ıraksaktır.

Simetrik $J_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1,k_2,k_3,k_4)$ tensörü için şu söylenebilir.: (2.5) ifadesinin sağ tarafındaki toplamda ortaya çıkan ıraksak integraller birbirini götürür; $J_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1,k_2,k_3,k_4)$ tensörü buna rağmen $T_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1,k_2,k_3,k_4)$ tensörü gibi regülarize edilmelidir. Çünkü $k_1=k_2=k_3=k_4=0$ için $T_{\mu\nu\lambda\sigma}(0,0,0,0)$ ve $J_{\mu\nu\lambda\sigma}(0,0,0,0)$ tensörleri ayar değişmezliği nedeniyle sıfır olmalıdır. Fakat $J_{\mu\nu\lambda\sigma}(0,0,0,0)$ ifadesi sıfırdan farklıdır. Ayar değişmezliğinin bu kaybı kuantum elektrodinamiğinin ıraksaklıkları ile ilgilidir.

$J_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1,k_2,k_3,k_4)$ tensörünün regülarize edilmiş değerini elde etmek için $J_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1,k_2,k_3,k_4)$ tensöründen $k_1=k_2=k_3=k_4=0$ için olan $J_{\mu\nu\lambda\sigma}(0,0,0,0)$ tensör değerini çıkartmalıyız. Bu yöntemle elde ettiğimiz regülarize $J_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1,k_2,k_3,k_4)$ tensörünü $I_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1,k_2,k_3,k_4)$ ile gösterelim.

$$I_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1,k_2,k_3,k_4) = J_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1,k_2,k_3,k_4) - J_{\mu\nu\lambda\sigma}(0,0,0,0) \qquad (2.12)$$

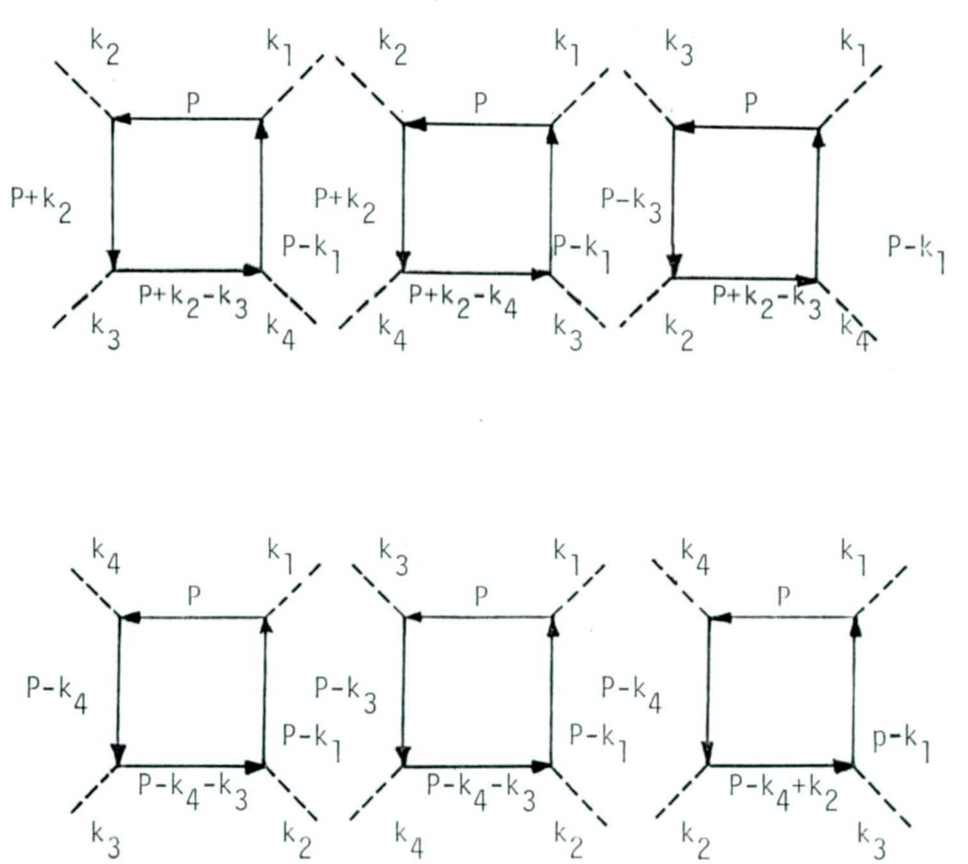
Regülarize $S^{(4)}$ matrisi aşağıdaki gibi yazılır.

$$S^{(4)} = -\frac{i}{12}\left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^2 \int d^4k_1 \int d^4k_2 \int d^4k_3 \int d^4k_4 (2\pi)^4 \delta(k_1+k_2+k_3+k_4)$$
$$N\left(\frac{A_\mu(k_1)}{(2\pi)^4} \cdot \frac{A_\nu(k_2)}{(2\pi)^4} \cdot \frac{A_\lambda(k_3)}{(2\pi)^4} \cdot \frac{A_\sigma(k_4)}{(2\pi)^4}\right) \cdot$$
$$\cdot I_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1,k_2,k_3,k_4) \qquad (2.13)$$

2.2- FOTON-FOTON SAÇILMASI

Şimdi dördüncü mertebeden foton-foton saçılma sürecinin $J_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1,k_2,k_3,k_4)$ tensöründeki ıraksak integralleri hesaplayalım.

Bunun için elektron-pozitron vakumunda k_1,k_2 momentumlu ve e_1,e_2 polarizasyonlu fotonların soğrulduğu ve k_3,k_4 momentumlu ve e_3,e_4 polarizasyonlu fotonların salındığı bir süreç gözönüne alıyoruz.



Şekil-2

Altı diyagram bu sürece aittir. 1,2,3 ve 4,5,6 diyagramları sadece elektron kapalı ilmeklerinin akış yönleri bakımından farklıdırlar. Bundan dolayı bunların matris elemanları ayrıdır. Foton-Foton saçılmasının bütün matris elemanları şu formülle verilmiştir.

$$S^{(4)}_{i\to j} = -\frac{e^4}{2}\,\frac{\delta(k_1+k_2+k_3+k_4)}{(w_1w_2w_3w_4)^{1/2}}\{\,e_{1\mu}e_{2\nu}e_{3\lambda}e_{4\sigma}\int \mathrm{Iz}[\gamma_\mu(i\not{P}-m)^{-1}.$$

$$\gamma_\nu(i\not{P}+i\not{K}_2+m)^{-1}_{\cdot}$$

$$.\gamma_\lambda(i\not{P}+i\not{K}_2-i\not{K}_3+m)^{-1}\gamma_\sigma(i\not{P}-i\not{K}_1+m)^{-1}]\ d^4P+e_{1\mu}e_{2\nu}e_{4\sigma}e_{3\lambda}.$$

$$.\int \mathrm{Iz}[\gamma_\mu(i\not{P}+m)^{-1}\gamma_\nu(i\not{P}+ik_2+m)^{-1}\gamma_\sigma(i\not{P}+i\not{K}_2-i\not{K}_4+m)^{-1}.$$

$$.\gamma_\lambda(i\not{P}-i\not{K}_1+m)^{-1}]\ d^4P+e_{1\mu}e_{3\lambda}e_{2\nu}e_{4\sigma}\int \mathrm{Iz}[\gamma_\mu(i\not{P}+m)^{-1}\gamma_\lambda(i\not{P}-i\not{K}_3+m)^{-1}.$$

$$.\gamma_\nu(i\not{P}-i\not{K}_3+i\not{K}_2+m)^{-1}\gamma_\sigma(i\not{P}-i\not{K}_1+m)^{-1}]d^4P\} \qquad (2.14)$$

Şimdi

$$J_{\mu\nu\lambda\sigma}(0,0,0,0)= T_{\mu\nu\lambda\sigma}(0,0,0,0)+T_{\mu\nu\sigma\lambda}(0,0,0,0)+$$

$$+T_{\mu\lambda\nu\sigma}(0,0,0,0)$$

tensörünü

$$J_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1,k_2,k_3,k_4)= T_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1,k_2,k_3,k_4)+ T_{\mu\nu\sigma\lambda}(k_1,k_2,k_4,k_3)+$$

$$+T_{\mu\lambda\nu\sigma}(k_1,k_3,k_2,k_4)$$

tensöründen çıkartarak regülarize $I_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1,k_2,k_3,k_4)$ tensörünü yazalım:

$$I_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1,k_2,k_3,k_4)= T_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1,k_2,k_3,k_4)-T_{\mu\nu\lambda\sigma}(0,0,0,0)$$

$$+T_{\mu\nu\sigma\lambda}(k_1,k_2,k_4,k_3) \quad - T_{\mu\nu\sigma\lambda}(0,0,0,0)+ T_{\mu\lambda\nu\sigma}(k_1,k_3,k_2,k_4)-$$

$$-T_{\mu\lambda\nu\sigma}(0,0,0,0) \tag{2.15}$$

Böylece regülarize saçılma matrisi

$$S^{(4)}_{i\to f} =- \frac{i}{2}\left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^2 (2\pi)^4 \frac{\delta(k_3+k_4-k_1-k_2)}{(w_1w_2w_3w_4)^{1/2}} \; e_{1\mu}e_{2\nu}e_{3\lambda}e_{4\sigma}\cdot$$

$$\cdot\, I_{\mu\nu\lambda\sigma}(-k_1,-k_2,k_3,k_4)$$

şeklini alır. Burada,

$$T_{\mu\nu\lambda\sigma}(-k_1,-k_2,k_3,k_4) = \frac{1}{i\pi^2}\int d^4P.\,\mathrm{İz}\{\gamma_\mu(i\not{P}+m)^{-1}\gamma_\nu(i\not{P}+i\not{K}_2+m)^{-1}.$$

$$.\gamma_\lambda(i\not{P}+i\not{K}_2-i\not{K}_3+m)^{-1}\gamma_\sigma(i\not{P}-i\not{K}_1+m)^{-1}\}$$

$$T_{\mu\nu\lambda\sigma}(-k_1,-k_2,k_3,k_4)= \frac{1}{i\pi^2}\int d^4P \;\; \mathrm{İz}\{\gamma_\mu\frac{i\not{P}-m}{P^2+m^2}\gamma_\nu\frac{i\not{P}+i\not{K}_2-m}{(P+k_2)^2+m^2}\cdot$$

$$\cdot\,\gamma_\lambda \frac{i\not{P}+i\not{K}_2-i\not{K}_3-m}{(P+k_2-k_3)^2+m^2}\gamma_\sigma\frac{i\not{P}-i\not{K}_1-m}{(P-k_1)^2+m^2}$$

$$T_{\mu\nu\lambda\sigma}(-k_1,-k_2,k_3,k_4)=\frac{1}{i\pi^2}\int d^4P\; \frac{\mathrm{İz}\{\gamma_\mu(i\not{P}-m)\gamma_\nu(i\not{P}+i\not{K}_2-m)\gamma_\lambda(i\not{P}+i\not{K}_2-i\not{K}_3-m)}{(P^2+m^2)[(P+k_2)^2+m^2][(P+k_2-k_3)^2+m^2]}\cdot$$

$$\cdot\frac{\gamma_\sigma(i\not{P}-i\not{K}_1-m)\}}{[(P-k_1)^2+m^2]} \tag{2.16}$$

ifadesiyle verilir.

Bu ifade (EK.B-Denklem (2)) de verilen Feynman parametreleri yöntemi ile aşağıdaki forma dönüşür.

$$T_{\mu\nu\lambda\sigma}(-k_1,-k_2,k_3,k_4)=\frac{3!}{i\pi^2}\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^y dz\int d^4P.$$

$$\cdot\frac{Iz\{\gamma_\mu(i\not P-m)\gamma_\nu(i\not P+i\not K_2-m)\gamma_\lambda(i\not P+i\not K_2-i\not K_3-m)}{[(P+K)^2+a^2]^4}\cdot$$

$$\cdot\gamma_\sigma(i\not P-i\not K_1-m) \qquad (2.17)$$

Burada,

$$K=k_2(x-z)-k_3(x-y)-k_1(1-x)$$

ve (2.18)

$$a^2=m^2+k_2^2(x-z)(1+z-x)+k_1^2(1-x)x+k_3^2(x-y)(1+y-x)+$$

$$+2\,[\,k_1.k_2(x-z)(1-x)-k_1.k_3(1-x)(x-y)+k_2.k_3(x-y)(x-z-1)]$$

dır.

(2.17) ifadesinin izi yetmiş iki terim içerir. Ellidört terim tek sayılı γ matrislerinin izinin sıfır koşulundan ve Simetrik integrasyon koşulundan sıfır olur. Geri kalan onsekiz terimin bir terimi P^4, onbir terimi P^2 içerir. Altı terimi ise P li ifade içermez. Böylece iz ifadesi aşağıdaki forma dönüşür.

$$Iz\{\gamma_\mu(i\not P-m)\gamma_\nu(i\not P+i\not K_2-m)\gamma_\lambda(i\not P+i\not K_2-i\not K_3-m)\gamma_\sigma(i\not P-i\not K_1-m)\}=$$

$$=Iz\{\gamma_\mu\not P\gamma_\nu\not P\gamma_\lambda\not P\gamma_\sigma\not P+\gamma_\mu\not P\gamma_\nu\not P\gamma_\lambda\not K_2\gamma_\sigma\not K_1+\gamma_\mu\not P\gamma_\nu\not P\gamma_\lambda\not K_3\gamma_\sigma\not K_1-$$

$$-\gamma_\mu\not P\gamma_\nu\not P\gamma_\lambda\gamma_\sigma m^2-\gamma_\mu\not P\gamma_\nu\not K_2\gamma_\lambda\not P\gamma_\sigma\not K_1-\gamma_\mu\not P\gamma_\nu\not K_2\gamma_\lambda\not K_2\gamma_\sigma\not P-$$

$$-\gamma_\mu \not{P}\gamma_\nu \not{K}_2\gamma_\lambda \not{K}_3\gamma_\sigma \not{P} + m^2\gamma_\mu \not{P}\gamma_\nu\gamma_\lambda \not{P}\gamma_\sigma - m^2\gamma_\mu \not{P}\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\sigma \not{P} -$$

$$-m^2\gamma_\mu\gamma_\nu \not{P}\gamma_\lambda \not{P}\gamma_\sigma - m^2\gamma_\mu\gamma_\nu \not{P}\gamma_\lambda\gamma_\sigma \not{P} + m^2\gamma_\mu\gamma_\nu \not{K}_2\gamma_\lambda \not{K}_2\gamma_\sigma +$$

$$+m^2\gamma_\mu\gamma_\nu \not{K}_2\gamma_\lambda \not{K}_3\gamma_\sigma + m^2\gamma_\mu\gamma_\nu \not{K}_2\gamma_\lambda\gamma_\sigma \not{K}_1 - m^2\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda \not{P}\gamma_\sigma \not{P} -$$

$$-m^2\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda \not{K}_2\gamma_\sigma \not{K}_1 + m^2\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda \not{K}_3\gamma_\sigma \not{K}_1 + m^4\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\sigma\} \qquad (2.19)$$

Burada P^4 içeren terimi $X^{(4)}_{\mu\nu\lambda\sigma}$, P^2 içeren terimleri $X^{(2)}_{\mu\nu\lambda\sigma}$ ve P içermeyen terimleri $X^{(0)}_{\mu\nu\lambda\sigma}$ ile gösterirsek (2.17) ifadesi

$$T_{\mu\nu\lambda\sigma}(-k_1,-k_2,k_3,k_4) = \frac{3!}{i\pi^2}\int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y dz \int d^4P \,.$$

$$\cdot \frac{X^{(4)}_{\mu\nu\lambda\sigma} + X^{(2)}_{\mu\nu\lambda\sigma} + X^{(0)}_{\mu\nu\lambda\sigma}}{[(P+K)^2 + a^2]^4} \qquad (2.20)$$

olur.

Gösterildiği gibi dördüncü dereceden foton-foton saçılmasında karşılaşacağımız integraller logaritmik ıraksak ve yakınsak integrallerdir. Böylece P→P-K dönüşümü yapılabilir. Bu dönüşüm yapıldığında (2.20) ifadesi

$$T_{\mu\nu\lambda\sigma}(-k_1,-k_2,k_3,k_4) = \frac{3!}{i\pi^2}\int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y dz \int d^4P.$$

$$\cdot \frac{H^{(4)}_{\mu\nu\lambda\sigma} + H^{(2)}_{\mu\nu\lambda\sigma} + H^{(0)}_{\mu\nu\lambda\sigma}}{(P^2+a^2)^4} \qquad (2.21)$$

olur.

Burada $H_{\mu\nu\lambda\sigma}$ fonksiyonları P→P-K dönüşümü yapıldıktan sonraki değişkenleri gösterir.

Verilen bir sürecin ıraksaklığının nasıl davrandığını aşağıda verilen bağıntı ile de görebiliriz.

$$K = 4\ (E_i+F_i-n+1)-E_i-2F_i \qquad (2.22)$$

$K > 0$ ise ıraksak integral

$K = 0$ ise logaritmik ıraksak

$K = 1$ ise lineer ıraksak

Burada sürecin derecesini gösteren n aşağıdaki ifade ile verilir.

$$n = E_i + \frac{1}{2} E_a = 2F_i + F_a$$

ve

E_i : İç elektron çizgisi

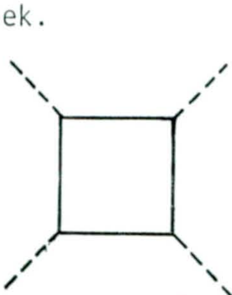
F_i : İç foton çizgisi

E_a : Dış elektron çizgisi

F_a : Dış foton çizgisi

ile verilir.

Aşağıda şematik olarak gösterilen foton-foton saçılma sürecini örnek olarak verirsek.



Şekil-3

$$n = 4 + 0 = 0 + 4 = 4$$

$$K = 4(4 + 0 - 4 + 1) - 4 = 0$$

$$K = 0$$

olduğu görülür.

Dördüncü dereceden foton-foton saçılmasında karşılaşacağımız logaritmik ıraksak ve yakınsak integralleri hesaplayacağımız gibi kuantum elektrodinamiğinde önemli olan lineer ıraksak ve karesel-ıraksak integralleri de hesaplayacağız

B Ö L Ü M III

3.1- DÖRDÜNCÜ MERTEBEDEN FOTON-FOTON SAÇILMASINDA İNTEGRALLERİN HESABI

Dördüncü mertebeden foton-foton saçılmasında S-matris elemanlarının hesaplanmasında ıraksak integrallerle karşılaşırız. Bu integrallerin çözümü için en uygun yöntem Feynman tarafından geliştirilmiştir.

Iraksak integrallerin genel bağıntısı aşağıda verilmiştir.

$$J(x_1,\ldots,x_{n-1})=\int\frac{f(P)d^4P}{[(P-a)^2+\ell]^n} \tag{3.1}$$

Biz önce aşağıdaki forma dönüşebilen yakınsak integralleri hesaplayalım.

$$K=\int\frac{f(P)d^4P}{(P^2+\ell)^n} \tag{3.2}$$

P_0 üzerinden C integral yolunun $\frac{\pi}{2}$ kadar döndürülmesiyle öklidyen (Euclidean) P-uzayına geçilmiş olur. Bu uzayda hacım elemanı

$$d^4P = id^4P' = idP.dP_0 = 2\pi^2 iq^3dq \tag{3.3}$$

ifadesiyle verilir. (EK.B)

Böylece öklidyen (Euclidean) uzayda dört boyutlu integral bir boyuta indirgenmiş olur.

$$\int f(P^2)d^4P = 2\pi^2 i \int_0^\infty f(q^2)q^3 dq \tag{3.4}$$

$z = q^2$ dönüşümü yapılırsa

$$\int f(P^2)d^4P = i\pi^2 \int_0^\infty zf(z)\, dz \tag{3.5}$$

ifadesi bulunur.

Şimdi aşağıda verilen yakınsak integralleri hesaplayalım (3.3) ve (3.5) bağıntılarını kullanarak

$$\int \frac{d^4P}{(P^2+\ell)^3} = i\pi^2 \int_0^\infty \frac{zdz}{(z+\ell)^3} = \frac{\pi^2 i}{2\ell} \tag{3.6}$$

$$\int \frac{d^4P}{(P^2+\ell-2pk)^3} = \int \frac{d^4P}{[(p-k)^2+\ell-k^2]^3} = i\pi^2 \int_0^\infty \frac{zdz}{(z+\ell-k^2)^3} = \frac{i\pi^2}{2(\ell-k^2)}$$

$$\int \frac{P_\sigma d^4P}{(P^2+\ell-2pk)^3} = \int \frac{(P_\sigma+k_\sigma)d^4P}{(p^2+\ell-k^2)^3} = k_\sigma \int \frac{d^4P}{(p^2+\ell-k^2)^3} = i\pi^2 k_\sigma \int \frac{zdz}{(z+\ell-k^2)^3}$$

$$\int \frac{P_\sigma d^4P}{(p^2+\ell-2pk)^3} = \frac{\pi^2 i k_\sigma}{2(\ell-k^2)}$$

ifadeleri bulunur.

Burada $q^2=z$, $p-k\rightarrow p$ dönüşümleri ve simetrik integrasyon koşulu kullanıldı.

Şimdi (3-1) tipindeki ıraksak integralleri gözönüne alalım. Fakat kuantum elektrodinamiğinde karesel ıraksaklıktan daha yüksek ıraksaklıklar yer almadığından aşağıdaki ıraksak integrallerle ilgileneceğiz.

$$J^{(2)}(k,\ell)= \int\frac{d^4P}{(P^2-2pk+\ell)^2}$$

$$J^{(2)}_{\mu}(k,\ell)= \int\frac{P_{\mu}d^4P}{(P^2-2pk+\ell)^2} \qquad (3.7)$$

$$J^{(2)}_{\mu\nu}(k,\ell) = \int\frac{P_{\mu}P_{\nu}d^4P}{(P^2-2pk+\ell)^2}$$

$$J^{(3)}_{\mu\nu}(k,\ell) =\int\frac{P_{\mu}P_{\nu}d^4P}{(P^2-2pk+\ell)^3}$$

Bütün bu integralleri ve diğer benzer ıraksak integralleri, N sayısı ile karakterize edilen değişmez ve bilinen bir sonlu N bölgesi üzerinden integre edeceğiz. Öyleki $N\to\infty$ da bütün dört-boyutlu sonsuz P-uzayına karşılık gelir. (Böylece sonlu bir değişmez bölge $(P^2)\leq N^2$ ve $\frac{(Ps)^2}{s^2}\leq N^2$ eşitsizlikleri ile tanımlanabilir. Burada S keyfi bir zamansal (time-like) dört vektördür.)

Yakınsak dört boyutlu integrallerin hesaplanmasında olduğu gibi, P_0 üzerinden integral yolunun $\frac{\pi}{2}$ kadar döndürülmesiyle dördüncü koordınatı reel olan dört boyutlu Öklidyen P-uzayı elde edildiğinde uzayın hacım elemanı d^4P' (3.3) ile orjinal P-uzayına bağlıdır. Bu durumda integral bölgesi dört boyutlu bir küredir. Kürenin yarıçapını L ile göstereceğiz. L momentum katofu ile bir tutulur.

Bu ıraksak integrallerin hesaplanmasına, logaritmik ıraksak integral ile başlayalım;

$$J^{(2)}(0,\ell) = \int \frac{d^4P}{(P^2+\ell)^2} \qquad (3.8)$$

P_0 üzerinde C integral yolunun $\frac{\pi}{2}$ kadar dönmesi ve (3.3) ifadesinin kullanılması ile

$$\int \frac{d^4P}{(P^2+\ell)^2} = i\int \frac{d^4P'}{(P'^2+\ell)^2} = 2\pi^2 i \int_0^L \frac{q^3 dq}{(q^2+\ell)^2} \qquad (3.9)$$

elde edilir. $q^2+\ell=t$ dönüşümü kullanılırsa

$$J^{(2)}(0,\ell) = \int \frac{d^4P}{(P^2+\ell)^2} = \pi^2 i\ [\ell n t + \frac{\ell}{t}]$$

$$J^{(2)}(0,\ell) = \pi^2 i(\ell n\ (q^2+\ell) + \frac{\ell}{q^2+\ell}\ )\Big|_0^L$$

$$= \pi^2 i(\ell n(L^2+\ell) - \ell n \ell + \frac{\ell}{L^2+\ell} - 1)$$

$$J^{(2)}(0,\ell) = \pi^2 i\ (\ell n \frac{L^2}{\ell} + \ell n(1 + \frac{\ell}{L^2}) - 1 + \frac{\ell}{1+\frac{\ell}{L^2}} \cdot \frac{1}{L^2})$$

$$J^{(2)}(0,\ell) = \pi^2 i(\ell n \frac{L^2}{\ell} - 1 + 0\ (\frac{1}{L^2})) \qquad (3.10)$$

ifadesi bulunur.

Burada

$$0\ (\frac{1}{L^2}) = \ell n\ (1 + \frac{\ell}{L^2}) + \frac{\ell}{1+\frac{\ell}{L^2}} \cdot \frac{1}{L^2}$$

ifadesiyle verilir. $0\ (\frac{1}{L^2})$ ilk terimle karşılaştırıldığında veya

L'nin yeterince büyük olduğu limit değerinde $O(\frac{1}{L^2})$ sıfıra gider. Böylece,

$$J^{(2)}(0,\ell) = i\pi^2 \left(\ell n \frac{L^2}{\ell} - 1\right) \qquad (3.11)$$

ifadesi elde edilir.

Aşağıdaki integral daha dikkat çekicidir.

$$J^{(2)}(k,\ell) = \int \frac{d^4P}{(P^2-2pk+\ell)^2} \qquad (3.12)$$

Bu integral $J^{(2)}(0,\ell)$ integrali gibi logaritmik ıraksaktır. Bu integrali aşağıdaki formda tekrar yazalım.

$$\int \frac{d^4P}{(P^2-2pk+\ell)^2} = \int \frac{d^4P}{((P-k)^2+\ell-k^2)^2}$$

Burada $p-k \rightarrow p$ dönüşümünü yapabiliriz. (EK.B) Bu durumda integral farklı bir N' integral alanı ile (3.11) bağıntısına eşit olur. Öyleki $J^{(2)}(k,\ell)$ integrali

$\pi^2 i\left(\ell n \frac{L'^2}{\ell-k^2} - 1\right)$ olur. Fakat L', L den sonlu bir büyüklük

ile farklıdır, yani L' yeterince büyük ise, $\ell nL'$ ℓnL den $\frac{1}{L}$ mertebesinden küçük bir büyüklük kadar farklıdır.

Böylece

$$J^{(2)}(\ell,k) = \int \frac{d^4P}{(P^2-2pk+\ell)^2} = \pi^2 i\left(\ell n \frac{L^2}{\ell-k^2} - 1\right) \qquad (3.13)$$

ifadesi bulunur. Elemanter olarak $J^{(2)}(k,\ell)$ integralini ele alırsak,

$$J^{(2)}(k,\ell) = \int \frac{d^4P}{(P^2-2pk+\ell)^2} = \int_N \frac{d^4P}{[(P-k)^2+\ell-k^2]^2} = \int_{N'} \frac{d^4P}{(P^2+\ell-k^2)^2}$$

$$J^{(2)}(k,\ell) = 2\pi^2 i \int_0^{L'} \frac{q^3dq}{(q^2+\ell-k^2)^2} = \pi^2 i(\ell n\frac{L'^2}{\ell-k^2} + \ell n(1+\frac{\ell-k^2}{L'^2}) -$$

$$- 1+\frac{\ell-k^2}{L'^2+\ell-k^2})$$

$$J^{(2)}(k,\ell) = \int \frac{d^4P}{(P^2-2pk+\ell)^2} = \pi^2 i(\ell n \frac{L^2}{\ell-k^2} - 1) \qquad (3.13')$$

ifadesi bulunur.

Şimdi aşağıdaki logaritmik ıraksak integrali hesaplayalım.

$$J^{(3)}_{\sigma\tau}(k,\ell) = \frac{P_\sigma P_\tau d^4P}{(P^2-2pk+\ell)^3} \qquad (3.14)$$

(3.13) integralinin hesaplanmasında olduğu gibi integralde yeni bir p-k→P değişkeni alınabilir.

$$\int_{(N)} \frac{P_\sigma P_\tau d^4P}{(P^2-2pk+\ell)^3} = \int_{(N')} \frac{(P_\sigma+k_\sigma)(P_\tau+k_\tau)d^4P}{(P^2+\ell-k^2)^3} \qquad (3.15)$$

$$J^{(3)}_{\sigma\tau}(k,\ell) = \int_{(N')} \frac{P_\sigma P_\tau d^4P}{(P^2+\ell-k^2)^3} + \int_{(N')} \frac{k_\sigma k_\tau d^4P}{(P^2+\ell-k^2)^3} +$$

$$+ \int_{(N')} \frac{P_\sigma k_\tau d^4P}{(P^2+\ell-k^2)^3} + \int_{(N')} \frac{P_\tau k_\sigma d^4P}{(P^2+\ell-k^2)^3}$$

ifadenin birinci integrali ele alınırsa

$$\int \frac{P_\sigma P_\tau d^4P}{(P^2+\ell')^3} = \frac{1}{4}\delta_{\sigma\tau}\int \frac{P^2 d^4P}{(P^2+\ell')^3} = \pi^2 i \frac{\delta_{\sigma\tau}}{2}\int_0^L \frac{q^3 dq}{(q^2+\ell')^3} =$$

$$=\delta_{\sigma\tau}\frac{\pi^2 i}{4}\left(\ell n \frac{L^2}{\ell-k^2} - \frac{3}{2}\right) \qquad (3.16)$$

ifadesi bulunur. Burada $\ell'=\ell-k^2$ dir.

Simetrik integrasyon koşulundan aşağıdaki integraller sıfır olur.

$$\int \frac{P_\sigma d^4P}{(P^2+\ell')^3} = \int \frac{P_\tau d^4P}{(P^2+\ell')^3} = 0 \qquad (3.17)$$

Aşağıdaki yakınsak integral,

$$k_\sigma k_\tau \int \frac{d^4P}{(P^2+\ell')^3} = \frac{\pi^2 i}{2}\frac{k_\sigma k_\tau}{\ell-k^2} \qquad (3.18)$$

olur.

(3.16), (3.17), (3.18) bağıntılarından,

$$\int \frac{P_\sigma P_\tau d^4P}{(P^2-2pk+\ell)^3} = \frac{\pi^2 i}{4}\delta_{\sigma\tau}\left(\ell n \frac{L^2}{\ell-k^2} - \frac{3}{2}\right) + \frac{\pi^2 i}{2}\frac{k_\sigma k_\tau}{\ell-k^2} \qquad (3.19)$$

ifadesi bulunur. (EK.B)

Şimdi aşağıdaki lineer ıraksak integrali hesaplayalım.

$$J^{(2)}(k,\ell) = \int \frac{P_\sigma d^4P}{(P^2-2pk+\ell)^2} \tag{3.20}$$

Aşağıdaki bağıntı yardımı ile (3.20) integralini hesaplayalım.

$$\int \frac{P_\sigma P_\tau d^4P}{(P^2-2pk+\ell)^3} = \frac{\partial U_\sigma}{\partial k_\tau} \tag{3.21}$$

Burada,

$$U_\sigma = \frac{1}{4} \int \frac{P_\sigma d^4P}{(P^2-2pk+\ell)^2}$$

dır.

$k_\tau = 0$ noktasından k_τ noktasına, k_τ üzerinden (3.19) ifadesini integre edelim.

$$\sum_\tau \int \frac{\partial U_\sigma}{\partial k_\tau} dk_\tau = -\frac{\pi^2 i}{4} \sum_\tau \delta_{\sigma\tau} \int [\ell n(\ell-k^2)+A_0+\frac{1}{2}]dk_\tau +$$

$$+\frac{\pi^2 i}{2} \sum_\tau \int \frac{k_\sigma k_\tau}{\ell-k^2} dk_\tau \tag{3.22}$$

Burada $A_0 = -\ell n\ L^2+1$

Bu eşitliğin sol tarafı aranan integralin dörtte birine eşittir.

Böylece,

$$U_\sigma = -\frac{\pi^2 i}{4} \sum_\tau \delta_{\sigma\tau}[\ell n\ (\ell-k^2)+\frac{1}{2}+A_0]\ k_\tau + \frac{\pi^2 i}{8} \frac{k^2}{\ell-k^2} \sum_\tau \delta_{\sigma\tau} \int dk_\tau$$

$$U_\sigma = \frac{1}{4}\left[\pi^2 i k_\sigma \left(\ell n \frac{L^2}{\ell - k^2} - \frac{3}{2}\right) + \frac{\pi^2 i}{2} k_\sigma \lim_{k \to 0} \frac{k^2}{k^2\left(\frac{\ell}{k^2} - 1\right)}\right]$$

$$J_\sigma^{(2)}(k,\ell) = \int \frac{P_\sigma d^4P}{(P^2 - 2pk + \ell)^2} = \pi^2 i k_\sigma \left\{\ell n \frac{L^2}{\ell - k^2} - \frac{3}{2}\right\} \tag{3.23}$$

bulunur (EK.B)

(Aynı N integral alanı için) $p-k \to p$ ötelemesi ile bu integrali hesaplanırsa

$$\pi^2 i k_\sigma \left(\ell n \frac{L^2}{(\ell - k^2)} - 1\right)$$

ifadesi elde edilmiş olur. (Bu aşağıda kanıtlanacaktır.). Böylece $P \to P-k$ dönüşümünün bir sınucu olarak (orjinin k kadar ötelenmesi) (3.23) ıraksak integrali $\frac{\pi^2 i k_\sigma}{2}$ lik bir ek katkı alır.

Bu katkıyı matematiksel olarak görmek için lineer ıraksak integrali $p-k \to P$ ötelemesiyle hesaplayalım.

$$\int \frac{P_\sigma d^4P}{(P^2 - 2pk + \ell)^2} = \int \frac{P_\sigma d^4P}{[(P-k)^2 + \ell - k^2]^2} = \int \frac{(P_\sigma + k_\sigma) d^4P}{(P^2 + \ell - k^2)^2}$$

$$\int \frac{P_\sigma d^4P}{(P^2 - 2pk + \ell)^2} = k_\sigma \int \frac{d^4P}{(P^2 + \ell - k^2)^2} = \pi^2 i k_\sigma \left(\ell n \frac{L^2}{\ell - k^2} - 1\right) \tag{3.24}$$

Görüldüğü gibi katkı terimi ötelemekten doğmaktadır (EK.B)

Son olarak karesel ıraksak integrali hesaplayalım.

$$J^{(2)}_{\sigma\tau}(k,\ell)=\int\frac{P_\sigma P_\tau d^4P}{(P^2-2pk+\ell)^2} \tag{3.25}$$

üzerinden (3.23) ifadesi integre edilirse aşağıdaki ifade bulunur.

$$\int\left[\int\frac{P_\sigma d^4P}{(P^2-2pk+\ell)^2}\right]d\ell=\pi^2 ik_\sigma\int(\ell nL^2-\ell n(\ell-k^2)-\frac{3}{2})d\ell$$

$$-\int\frac{P_\sigma d^4P}{P^2-2pk+\ell}=\pi^2 ik_\sigma\{\ell.\ell nL^2-\frac{3}{2}\ell-\ell.\ell n(\ell-k^2)+\frac{\ell d\ell}{\ell-k^2}\}$$

$$\int\frac{P_\sigma d^4P}{P^2-2pk+\ell}=\pi^2 ik_\sigma\{(A_0+\frac{1}{2})\ell+\ell.\ell n(\ell-k^2)-(\ell-k^2)-k^2\ell n(\ell-k^2)+\varepsilon(N.k^2)\}$$

$$\int\frac{P_\sigma d^4P}{P^2-2pk+\ell}=\pi^2 ik_\sigma\{(\ell-k^2)\ell n(\ell-k^2)-(\ell-k^2)+(A_0+\frac{1}{2})\ell+\varepsilon(N,k^2)\} \tag{3.26}$$

Burada ε,k^2 ve N'nin bir fonksiyonudur. Bu fonksiyon $N\to\infty$ için karesel ıraksaklıkları verir. Gösterilebilir ki ε, k^2'nin lineer bir fonksiyonudur. Gerçekten (3.26) ifadesinin sol tarafı, $k\to nk$, $P\to np$,$\ell\to n^2\ell$ dönüşümlerinin bir sonucu olarak bir n^3 faktörünü alır. Burada n keyfi bir sayıdır. Bu sabit ancak ε'un aşağıdaki değeri için olasıdır.

$$\varepsilon=\frac{1}{2}A_2+k^2(aA_0+b) \tag{3.27}$$

Burada A_2 karesel ıraksak bir sabittir. Ve a ve b sabitlerdir. (k^2, logaritmik ıraksak sabit A_0 ile çarpıldı. Fakat A_2 ile çarpılmadı. Böylece sadece bu koşul altında ε'daki terimler aynı boyuta sahip olur.)

$$\int \frac{P_\sigma d^4P}{P^2-2pk+\ell} = \pi^2 i k_\tau \delta_{\sigma\tau}[(\ell-k^2)\ell n(\ell-k^2)-(\ell-k^2)+(A_0+\frac{1}{2})\ell+\varepsilon(N,k^2)]$$

k_τ ya göre (3.26) ifadesinin diferansiyeli alındığında aranılan integral elde edilir.

$$2\int \frac{P_\sigma P_\tau d^4P dk_\tau}{(P^2-2pk+\ell)^2} = \pi^2 i\delta_{\sigma\tau} dk_\tau\{(\ell-k^2)\ell n(\ell-k^2)-(\ell-k^2)+(A_0+\frac{1}{2})\ell+$$

$$+\frac{1}{2}A_2+k^2(aA_0+b)\}$$

$$\int \frac{P_\sigma P_\tau d^4P}{(P^2-2pk+\ell)^2} = \frac{\pi^2 i}{2}\delta_{\sigma\tau}\{(\ell-k^2)\ell n(\ell-k^2)-(\ell-k^2)+(A_0+\frac{1}{2})\ell+\frac{1}{2}A_2+$$

$$+k^2(aA_0+b)\} \tag{3.28}$$

a,b ve A_2 yi L cinsinden elde etmek için aşağıdaki ifadeyi kullanabiliriz.

$$J^{(2)}_{\sigma\tau}(k,\ell) = K_{\sigma\tau}(k,\ell) + \int \frac{P_\sigma P_\tau d^4P}{(P^2+\ell)^2} \tag{3.29}$$

Burada,

$$K_{\sigma\tau}(k,\ell) = \int \frac{P_\sigma P_\tau d^4P}{(P^2-2pk+\ell)^2} - \int \frac{P_\sigma P_\tau d^4P}{(P^2+\ell)^2} \tag{3.30}$$

dır.

(3.29) ifadesindeki ikinci terim aşağıdaki gibi bulunur.

$$\int \frac{P_\sigma P_\tau d^4P}{(P^2+\ell)^2} = \frac{1}{4}\delta_{\sigma\tau}\int \frac{P^2 d^4P}{(P^2+\ell)^2} = \pi^2 i \frac{\delta_{\sigma\tau}}{2} \int_0^L \frac{q^5 dq}{(q^2+\ell)^2} =$$

$$= \frac{\pi^2 i}{4} \delta_{\sigma\tau} \int \frac{t^2-2t\,\ell+\ell^2}{t^2} dt$$

$$\int \frac{P_\sigma P_\tau d^4P}{(P^2+\ell)^2} = \frac{\pi^2 i}{4} \delta_{\sigma\tau} \left[(q^2+\ell) - 2\ell.\ell n\,(q^2+\ell) - \frac{\ell^2}{q^2+\ell} \right]_0^L$$

$$\int \frac{P_\sigma P_\tau d^4P}{(P^2+\ell)^2} = \frac{\pi^2 i}{4} \delta_{\sigma\tau} [L^2 - 2\ell.\ell n \frac{L^2}{\ell} + \ell - \frac{\ell^2}{L^2+\ell} - 2\ell.\ell n\,(1+\frac{\ell}{L^2})]$$

$$\int \frac{P_\sigma P_\tau d^4P}{(P^2+\ell)^2} = \frac{\pi^2 i}{4} \delta_{\sigma\tau} \{ L^2 - 4\ell.\ell n\, L^2 + 2\ell.\ell n \ell + \ell \} \qquad (3.31)$$

Burada $q^2+\ell = t$ dönüşümü kullanıldı.

Aşağıdaki formülasyonun kullanımı ile

$$\frac{1}{\alpha^n} - \frac{1}{\beta^n} = - \int_0^1 \frac{n(\alpha-\beta)\,dz}{[(\alpha-\beta)\,z+\beta]^{n+1}} \qquad (3.32)$$

$$K_{\sigma\tau}(k,\ell) = \int \frac{P_\sigma P_\tau d^4P}{(P^2-2pk+\ell)^2} - \int \frac{P_\sigma P_\tau d^4P}{(P^2+\ell)^2} =$$

$$= 4k_\mu \int_0^1 dz \int \frac{P_\sigma P_\tau P_\mu d^4P}{(P^2-2pkz+\ell)^3} \qquad (3.33)$$

ifadesi bulunur.

veya

$\int \frac{P_\sigma P_\tau P_\mu d^4P}{(P^2+\ell)^3} = 0$ koşulunu kullanarak (3.32) ifadesi bir defa daha uygulanırsa,

$$K_{\sigma\tau}(k,\ell) = 24\, k_\mu k_\nu \int_0^1 dz.z \int_0^1 dt \int \frac{P_\mu P_\nu P_\lambda P_\sigma d^4P}{[P^2-2pkzt+\ell]^4} \qquad (3.34)$$

elde edilir.

P üzerinden logaritmik ıraksak olan bu integral (3.23) ve (3.28) integrallerinde olduğu gibi aynı yöntemle hesaplanabilir.

$$K_{\sigma\tau}(k,\ell) = 4\, k_\mu \int_0^1 dz \int \frac{P_\sigma P_\tau P_\mu d^4P}{(P^2-2pkz+\ell)^3}$$

Şimdi yukarıdaki ifadeyi hesaplayalım.

$$\frac{\partial K_{\sigma\tau}(k,\ell)}{\partial\ell} = -12k_\mu \int_0^1 dz \int \frac{P_\sigma P_\tau P_\mu d^4P}{(P^2-2pkz+\ell)^4}$$

P-kz→P dönüşümünü yaptıktan sonra,

$$\frac{\partial K'_{\sigma\tau}(k,\ell)}{\partial\ell} = -12k_\mu \int_0^1 dz \int \frac{(P_\sigma+k_\sigma z)(P_\tau+k_\tau z)(P_\mu+k_\mu z)}{(P^2+\ell-k^2 z^2)^4}\, d^4P$$

$$\frac{\partial K'_{\sigma\tau}(k,\ell)}{\partial\ell} = -12k_\mu \int_0^1 zdz \int \frac{P_\mu P_\sigma k_\tau + P_\mu P_\tau k_\sigma + P_\sigma P_\tau k_\mu}{(P^2+\ell-k^2z^2)^4} d^4P \; -$$

$$- 12\, k_\mu \int_0^1 z^3 dz . k_\mu k_\sigma k_\tau \int \frac{d^4 P}{(P^2 + \ell - k^2 z^2)^4}$$

olur.

$$\int \frac{\partial K'}{\partial \ell} d\ell = \frac{3}{2}\, \delta_{\sigma\tau} k^2 i\pi^2 \left[\frac{z^2}{2}(\ell n\, L^2 - \frac{3}{2}) \right]_0^1 - \int_0^1 z dz \ell n(\ell - k^2 z^2) -$$

$$- \frac{i\pi^2}{4}\, \delta_{\sigma\tau} [\ell . \ell n\, (\ell - k^2) - \ell . \ell n \ell]$$

$$K' = i\pi^2 k_\sigma k_\tau (3 \ell n L^2 - \frac{9}{2}) + \frac{i\pi^2}{4}\, \delta_{\sigma\tau} [\frac{3}{2}\, (\ell - k^2) \ell n (\ell - k^2) - \frac{3}{2}\, (\ell - k^2) +$$

$$+ \frac{3}{2} \ell + \frac{3}{2}\, \ell . \ell n \ell] + \frac{i\pi^2}{4}\, \delta_{\sigma\tau} [\ell . \ell n \ell - \ell . \ell n (\ell - k^2)] \qquad (3.35)$$

Burada,

$$A_0 = - \ell n\, L^2 + 1$$

alınarak (3.29) ifadesine benzer ifade aşağıdaki gibi verilir.

$$J' = K' + \delta_{\sigma\tau}\, \frac{i\pi^2}{4}\, (L^2 - 4\ell \ell n L + 2 \ell \ell n \ell + \ell) \qquad (3.36)$$

$$J' = \delta_{\sigma\tau}\, \frac{i\pi^2}{2}\, [(\ell - k^2) \ell n (\ell - k^2) - (\ell - k^2) + \ell (A_0 + \frac{1}{2}) + k^2 (-A_0 - \frac{5}{6}) + \frac{L^2}{2}] -$$

$$- k_\sigma k_\tau i\pi^2 [\ell n (\ell - k^2) - A_0 - \frac{5}{6}] + \frac{i\pi^2}{4} \delta_{\sigma\tau}\, [2k^2 \ell n L^2 + \frac{3k^2}{2}\, \ell n (\ell + k^2) -$$

$$- \frac{19}{6}\, k^2 + \frac{3}{2}\, \ell .\; \ell n\, \frac{\ell}{\ell - k^2}\,] \qquad (3.37)$$

Burada,

$$N = \frac{i\pi^2}{4}\delta_{\sigma\tau}[2k^2 \ell n L^2 + \frac{3k^2}{2}\ \ell n(\ell+k^2) - \frac{19}{6}k^2 + \frac{3}{2}\ell.\ell n \frac{\ell}{\ell-k^2}] \qquad (3.38)$$

ötelemeden doğan katkı terimidir. Böylece J ifadesi,

$$J' = J+N$$

$$J = J'-N$$

$$J = J^{(2)}_{\sigma\tau}(k,\ell) = -\frac{\pi^2 i}{2}\delta_{\sigma\tau}\{(\ell-k^2)\ell n \frac{L^2}{\ell-k^2} + \frac{5k^2-3\ell}{6} - L^2\} +$$

$$+\pi^2 i k_\sigma k_\tau \left(\ell n \frac{L^2}{\ell-k^2} - \frac{11}{6}\right) \qquad (3.39)$$

bulunur. (EK.B)

Son olarak hesaplanan yakınsak, logaritmik ıraksak, lineer ve karesel ıraksak integrallerin listesini verelim.

$$\int \frac{d^4P}{(P^2+\ell)^3} = \frac{\pi^2 i}{2\ell}$$

$$\int \frac{d^4P}{(P^2+\ell-2pk)^2} = \frac{\pi^2 i}{2(\ell-k^2)}$$

$$\int \frac{P_\sigma d^4P}{(P^2+\ell-2pk)^3} = \frac{\pi^2 i k_\sigma}{2(\ell-k^2)} \qquad (3.40)$$

$$J^{(2)}(0,\ell) = \int \frac{d^4P}{(P^2+\ell)^2} = \pi^2 i\left(\ell n \frac{L^2}{\ell-k^2} - 1\right)$$

$$J^{(3)}_{\sigma\tau}(k,\ell)=\int \frac{P_\sigma P_\tau d^4P}{(P^2-2pk+\ell)^3} = \frac{\pi^2 i}{4}\,\delta_{\sigma\tau}\left(\ell n\,\frac{L^2}{\ell-k^2}-\frac{3}{2}\right)+\frac{\pi^2 i}{2}\,\frac{k_\sigma k_\tau}{\ell-k^2}$$

$$J^{(2)}_{\sigma}(k,\ell)=\int \frac{P_\sigma d^4P}{(P^2-2pk+\ell)^2}=\pi^2 ik_\sigma\left(\ell n\,\frac{L^2}{\ell-k^2}-\frac{3}{2}\right)$$

$$J^{(2)}_{\sigma\tau}(k,\ell)=\int \frac{P_\sigma P_\tau d^4P}{(P^2-2pk+\ell)^2}=-\frac{\pi^2 i}{2}\delta_{\sigma\tau}\left[(\ell-k^2)\ell n\frac{L^2}{\ell-k^2}+\frac{5k^2-3\ell}{6}-L^2\right]+$$

$$+\pi^2 ik_\sigma k_\tau\left(\ell n\,\frac{L^2}{\ell-k^2}-\frac{11}{6}\right)$$

Burada birinci, ikinci ve üçüncü integraller yakınsak, dördüncü ve beşinci integraller logaritmik ıraksak, altıncı integral lineer ıraksak, yedinci integral ise karesel ıraksak bir integraldir.

E K L E R

EK.A- METRİK. GÖSTERİM, DİRAC DENKLEMİ

1. Schweber, Bogoliubov, Shırkov, James D. Bjorken, Sidney D. Drell'in kullandığı gösterim ve metrik aşağıdaki gibidir.

Kullanılanrelativistik metrik tensör,

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

şeklinde verilir.

$c=\hbar=1$ alındığında uzay-zaman koordinatları aşağıdaki gibi verilir.

$$(t,x,y,z) \equiv (t,\vec{x})$$

Uzay-zaman koordinatlarının kovaryant ve kontravaryant şekli aşağıdaki gibidir.

a- Kovaryant şekli

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) \equiv (t,-x,-y,-z)$$

b- Kontravaryant şekli

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (t,x,y,z)$$

c- Skaler çarpım

$$x^2 = x_\mu x^\mu = (t,-x,-y,-z)(t,x,y,z) = t^2 - \vec{x}^{\,2}$$

Momentum vektörünün kovaryant ve kontravaryant şekli aşağıdaki gibidir.

a'- Kovaryant şekli

$$P_\mu = (P_0, P_1, P_2, P_3) \equiv (E, -P_x, P_y, P_z)$$

b'- Kontravaryant şekli

$$P^\mu = (P^0, P^1, P^2, P^3) \equiv (E, P_x, P_y, P_z)$$

c'- Skaler çarpım

$$P^2 = P_\mu P^\mu = (E, -P_x, -P_y, -P_z).(E, P_x, P_y, P_z) = E^2 - \vec{p}^2$$

$$P_1.P_2 = P_{1\mu} P_2^\mu = E_1.E_2 - \vec{P}_1.\vec{P}_2$$

d - Bu gösterimde γ matrislerinin sıradeğişmez (antikomutatif) bağıntısı

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$$

ile verilir. γ'lar $\vec{\alpha}$ ve β matrislerine $\vec{\gamma} = \beta\vec{\alpha}$, $\gamma^0 = \beta$ şeklinde bağlıdır.

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\{\gamma^i\} = \gamma = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

Burada ,

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \; ; \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \; ; \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2x2 lik Puuli matris ailesidir ve

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dir.

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}] \quad \text{ve} \quad \gamma^{5} = i\gamma^{o}\gamma^{1}\gamma^{2}\gamma^{3} = \gamma_{5}$$

e- Keyfi dörtlü vektörün γ matrisi ile çarpımı:

$$\gamma_{\mu}A^{\mu} \equiv \not{A} = \gamma_{0}A^{0} - \vec{\gamma}\vec{A}$$

$$P_{\mu}\gamma^{\mu} \equiv \not{P} \quad E\gamma^{0} - \vec{P}.\vec{\gamma}$$

f- Matris elemanlarının Hermityen eşleniği

$$[\overline{U}(P',S')\,\Gamma U(P,S)]^{+} = \overline{U}(P.S)\,\overline{\Gamma}U(P',S')$$

$$\overline{\Gamma} = \gamma^{o}\Gamma^{+}\gamma^{o}$$

$$\overline{\gamma}^{\mu} = \gamma^{o}\gamma^{\mu +}\gamma^{o} = \gamma^{\mu}$$

$$\overline{\sigma}^{\mu\nu} = \gamma^{o}.\sigma^{\mu\nu +}.\gamma^{o} = \sigma^{\mu\nu}$$

$$i\overline{\gamma}^{5} = \gamma^{o}(i\gamma^{5})^{+}\gamma^{o} = i\gamma^{5}$$

2. Jauch ve Rohrlich, Thivring'in kullandığı metrik ve gösterim aşağıdaki gibidir.

Bu gösterim ve metrikte kullanılan relativistik metrik tensör,

$$g_{\mu\nu}=g^{\mu\nu}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

şeklinde verilir.

$c=\hbar=1$ alındığında uzay-zaman koordinatları aşağıdaki gibi verilir.

$$(-t,x,y,z) \equiv (-t,x)$$

Uzay-zaman koordinatlarının kovaryant ve kontravayant şekli aşağıdaki gibidir:

a- Kovaryant şekli

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) \equiv (-t,x,y,z)$$

b- Kontravaryant şekli:

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (t,x,y,z)$$

c- Skaler çarpımı:

$$x^2 = x_\mu x^\mu = (-t,x,y,z).(t,x,y,z) = -t^2 + \vec{x}^2$$

Genel halde iki dört boyutlu vektörlerin skaler çarpımı

$$A_\mu B^\mu = -A_o.B_o + A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$$

Momentum vektörünün kovaryant ve kontravaryant şekli aşağıdaki gibidir.

a'- Kovaryant şekli:

$$P_\mu = (P_o, P_1, P_2, P_3) \equiv (-E, P_x, P_y, P_z)$$

b'- Kontravaryant şekli:

$$P^\mu = (P^o, P^1, P^2, P^3) \equiv (E, P_x, P_y, P_z)$$

c'- Skaler çarpım:

$$P^2 = P_\mu P^\mu = (-E, P_x, P_y, P_z).(E, P_x, P_y, P_z) = -E^2 + \vec{P}^2$$

$$P_1.P_2 = P_{1\mu}.P_2^\mu = (-E_1, P_{1x}, P_{1y}, P_{1z}).(E_2, P_{2x}, P_{2y}, P_{2z}) = -E_1.E_2 + \vec{P}_1.\vec{P}_2$$

$$x.P = x_\mu P^\mu = -tE + \vec{x}.\vec{p}$$

d - Bu gösterimde γ matrislerinin antikomutatif bağıntısı:

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = \gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}$$

Şeklinde verilir.

e - Keyfi dörtlü-vektörün γ matrisleri ile çarpımı:

$$\gamma_\mu A^\mu \equiv \not{A} = -\gamma_o A^o + \vec{\gamma}.\vec{A}$$

$$P_\mu \gamma^\mu \equiv \not{P} = -E\gamma^o + \vec{P}.\vec{\gamma}$$

3. Eisele'nin kullandığı metrik ve gösterim aynı zamanda tezde kullanılan metrik ve gösterimdir.

Bu gösterimde metrik tensör,

$$\delta_{\mu\nu} = \delta^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde verilir.

$c=\hbar=1$ alındığında uzay-zaman koordinatları aşağıdaki gibi verilir.

$$(x,y,z,it) \equiv (\vec{x},it)$$

Uzay-zaman koordinatlarının kovaryant ve kontravaryant şekli aşağıdaki gibidir.

a- Kovaryant şekli:

$$x_\mu = (x_1,x_2,x_3,x_4) = (x,y,z,it)$$

veya

$$x_\mu = (x_1,x_2,x_3,ix_o) = (x,y,z,it)$$

b- Kontravaryant şekli:

$$x^\mu = x_\mu = (x^1,x^2,x^3,x^4) = (x_1,x_2,x_3,x_4) = (x,y,z,it)$$

c- Skaler çarpım:

$$x^2 = x_\mu \cdot x^\mu = x_\mu \cdot x_\mu = (x,y,z,it)(x,y,z,it) = \vec{x}^2 - t^2$$

Momentum vektörünün kovaryant ve kontravaryant şekli aşağıdaki gibidir.

a'- Kovaryant şekli:

$$P_\mu=(P_x,P_y,P_z,iE)$$

b'- Kontravaryant şekli:

$$P^\mu= P_\mu = (P_x,P_y,P_z,iE)$$

c'- Skaler çarpım:

$$P_\mu . P^\mu= P_\mu . P_\mu=(P_x,P_y,P_z,iE)(P_x,P_y,P_z,iE)= \vec{P}^2-E^2$$

$$P_1.P_2= P_{1\mu}P_{2\mu}=\vec{P}_1.\vec{P}_2-E_1.E_2$$

$$x.P =x_\mu P_\mu= \vec{x}.\vec{P} -tE$$

d - Bu gösterimde γ matrislerinin antikomutatif bağıntısı:

$$\{\gamma_\mu,\gamma_\nu\}= \gamma_\mu\gamma_\nu+ \gamma_\nu\gamma_\mu= 2\ \delta_{\mu\nu}$$

şeklinde verilir.

e - Keyfi dört vektörün γ matrisleri ile çarpımı:

$$\gamma_\mu A_\mu \equiv \not{A} = \vec{\gamma}\vec{A} +i\gamma_o A_o$$

$$P_\mu \gamma_\mu \equiv \not{P} = \vec{P}.\vec{\gamma}+iP_o\gamma_o$$

3. gösteriminden 2. gösterimine,

$$x^o = -x_o =-ix_4 =t$$

bağıntısı ile gecilir.

Kovaryant ve Kontravaryant arasında aşağıdaki bağıntılar vardır. $A^\mu=g^{\mu\nu}A_\nu \quad ; \quad A_\mu= g_{\mu\nu}A^\nu$

4. Dirac Denklemi

Kullanılan gösterim,

$c=\hbar=1$

$(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x,y,z,it)=(x,y,z,ix_o)$

Pozitif olasılık yoğunluğunu betimleyen m kütleli $\frac{1}{2}$ spinli serbest bir parçacık için Dirac Hamiltonyeni aşağıdaki ifade ile verilir;

$H_D=\vec{\alpha}c\vec{p}+\beta mc^2$

$H_D=\vec{\alpha}.\vec{p}+\beta m$

Hareket denklemini yazarsak

$H_D\psi = i\frac{\partial\psi}{\partial t}$

buradan,

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = (\alpha_x\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}+\alpha_y\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}+\alpha_z\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial z}+\beta m)\psi$$

olur. Her iki tarafı i ye bölersek

$$i\frac{\partial\psi}{\partial it} =[-i(\alpha_k\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_k}) - i\beta m]\psi$$

Burada k=1,2,3 dır. Her iki tarafı β ile çarparsak,

$$[-i\beta(\alpha_k\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_k})-im+\beta\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_4}]\psi=0$$

ifadesi bulunur. Her iki tarafı i ile çarpıp γ bağıntılarını kullanırsak,

$$(\gamma_k \frac{\partial}{\partial x_k} + \gamma_4 \frac{\partial}{\partial x_4} + m)\psi = 0$$

ifadesi elde edilir. $\mu = 1,2,3,4$ alınarak Dirac denkleminin kovaryant formu aşağıdaki gibi elde edilir.

$$(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m)\psi = 0$$

Dirac Hamiltonyeni aşağıdaki gibidir.

$$H_D = \gamma_4(\gamma_k \frac{\partial}{\partial x_k} + m) = i \frac{\partial}{\partial t}$$

EK.B- DÖRT BOYUTLU FEYNMAN İNTEGRALLERİNİN VE BÖLÜM III'DEKİ İNTEGRALLERİN HESABI

1. Dört Boyutlu Feynman İntegrallerinin Hesabı:

S- matrisi elemanlarının hesaplanmasında ıraksak integrallerle karşılaşılır. Bu integrallerin çözümü için en uygun yöntem Feynman tarafından geliştirilmiştir. Çeşitli Feynman diyagramlarına karşılık gelen büyüklüklerin hesaplanmasında aşağıda verilen integral formuyla karşılaşırız.

$$I = \int \frac{F(P)d^4P}{a_1a_2\ldots a_n} \qquad (1)$$

Burada a_i ler P'ye göre ikinci dereceden ve F(p) ise P' ye göre n'inci dereceden bir polinomdur. Feynman (1) eşitliğini bilinen bir integral formuna dönüştürmek için, aşağıdaki yardımcı skaler değişkenler içeren bağıntıyı kullanmıştır.

$$\frac{1}{a_1a_2\ldots a_n} = (n-1)! \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \ldots \int_0^{x_{n-2}} dx_{n-1} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{[a_1x_{n-1}+a_2(x_{n-2}-x_{n-1})+\ldots+a_n(1-x_1)]^n} \qquad (2)$$

Burada x_i skaler parametrelerdir.

n=2 için

$$N_1 = \int_0^1 \frac{dx_1}{[a_1x_1+a_2(1-x_1)\,]^2}$$

$a_1x_1+a_2(1-x_1)=t$ dönüşümü kullanıldığında,

$$N_1 = \int \frac{dt}{(a_1-a_2)t^2} = \frac{1}{a_2-a_1} \cdot \frac{a_2-a_1}{a_1a_2} = \frac{1}{a_1a_2} \qquad (3)$$

bulunur.

n=3 için

$$N_2 = 2! \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \frac{1}{[a_1x_2+a_2(x_1-x_2)+a_3(1-x_1)]^3}$$

$a_1x_2+a_2(x_1-x_2)+a_3(1-x_1) = t$ dönüşümü kullanıldığında,

$$N_2 = \frac{1}{a_2-a_1} \left\{ \int_0^1 \frac{dx_1}{[a_1x_1+a_3(1-x_1)]^2} - \int_0^1 \frac{dx_1}{[a_2x_1+a_3(1-x_1)]^2} \right\}$$

bulunur.

$t_1 = a_1x_1+a_3(1-x_1)$ ve $t_2 = a_2x_1+a_3(1-x_1)$ dönüşümleri kullanılırsa,

$$N_2 = 2! \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} \frac{dx_2}{[a_1x_2+a_2(x_1-x_2)+a_3(1-x_1)]^3} = \frac{1}{a_1a_2a_3} \qquad (4)$$

ifadesi elde edilir.

n=4 için

$$N_3 = 3! \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \int_0^{x_2} dx_3 \frac{1}{[a_1x_3+a_2(x_2-x_3)+a_3(x_1-x_2)+a_4(1-x_1)]^4}$$

ifadesinde $a_1x_3+a_2(x_2-x_3)+a_3(x_1-x_2)+a_4(1-x_1)$ dönüşümü kullanılırsa,

$$N_3 = \frac{-2}{a_1-a_2} \int_0^1 dx_1 \left\{ \int_0^{x_1} \frac{dx_2}{[a_1x_2+a_3(x_1-x_2)+a_4(1-x_1)]^3} - \right.$$

$$\left. - \int_0^{x_1} \frac{dx_2}{[a_2x_2+a_3(x_1-x_2)+a_4(1-x_1)]^3} \right\}$$

olur.

Yeni dönüşümler uygulayarak,

$$N_3 = 3! \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \int_0^{x_2} \frac{dx_3}{[a_1x_3+a_2(x_2-x_3)+a_3(x_1-x_2)+a_4(1-x_1)]^4} =$$

$$= \frac{1}{a_1a_2a_3a_4} \tag{5}$$

ifadesi elde edilir.

(2) eşitliğini(1) de yerine yazarsak,

$$J(x_1, x_2, \ldots x_{n-1}) = \int \frac{F(P)d^4P}{[(P-a)^2+\ell]^n} \tag{6}$$

elde edilir. Burada a ve ℓ $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ parametrelerine bağlıdır. O halde (1) eşitliği,

$$I = (n-1)! \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \ldots \int_0^{x_{n-2}} dx_{n-1} J(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \tag{7}$$

olur.

Şimdi (6) daki integrali hesaplayalım. İlk olarak integralin yakınsak olduğunu kabul edelim. Bu durumda $p-a \to P$ dönüşümü yapılabilir. Bu dönüşüm yapıldıktan sonra (6) ifadesi,

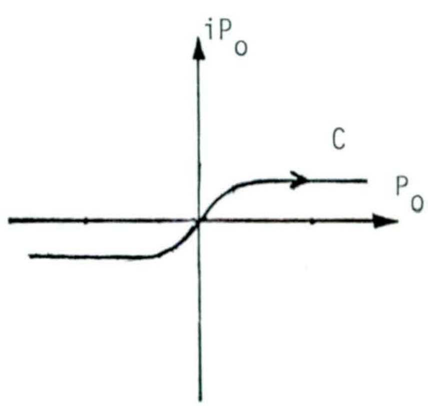
$$K = \int \frac{f(P)d^4P}{(P^2+\ell)^n} \tag{8}$$

olur. Bu skaler integralin çözümü için bazı olası sınırlamalar yapılmıştır. Eğer $f(p) = P_\mu f(p^2)$ ise simetrik integrasyondan $K=0$, eğer $f(p) = P_\mu P_\nu f_2(p^2)$ ise

$$K = \int \frac{P_\mu P_\nu f_2(P^2)}{(P^2+\ell)^n} d^4P = \frac{1}{4}\delta_{\mu\nu} \int \frac{P^2 f_2(P^2) d^4P}{(P^2+\ell)^n} \tag{9}$$

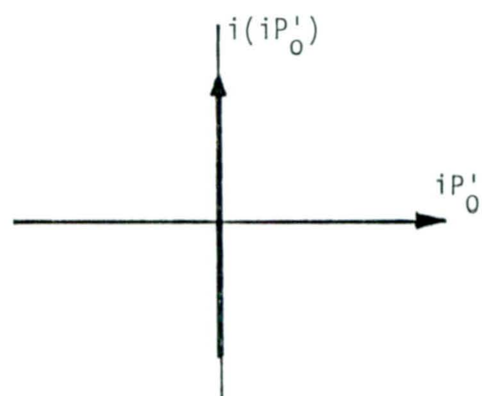
olur.

Şimdi (8) deki integralin nasıl hesaplanacağını göstereceğiz. Şekil-4 de gösterilen C çevre eğrisi boyunca P_o üzerinden integralin hesaplanması için eğri $\frac{\pi}{2}$ kadar döndürülür. Döndürülen eğri Şekil-5 de gösterilmiştir. Bu durumda P_o yerine iP_o ve $P^2 = P^2-P_o^2$ de $P'^2+P_o'^2$ olur. Bu dönüşüm ile üslü P_o' -düzlemine geçilmiş olur.



P_o-Düzlemi

Şekil -4



P_o' -Düzlemi

Şekil -5

Burada,

$P=(\vec{P},iP_o)$

$P^2=\vec{P}^2-P_o^2$

$P_o=iP'_o$ dönüşümü yapıldığında (9')

$P'=(\vec{P}',iiP'_o)=(\vec{P}',-P'_o)$

$P'^2=\vec{P}'^2+P'^2_o$ ve $dP_o=idP'_o$

olur.

Şimdi öklidyen (Euclidean) P-uzaydaki hacim elemanını hesaplayalım.

n-boyutlu öklidyen uzayın koordinatları aşağıda verilmiştir.

$$x_1=r\sin\theta_1.\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1}$$

$$x_2=r\sin\theta_1.\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1}$$

$$x_3=r\sin\theta_1.\sin\theta_2\ldots\cos\theta_{n-2} \qquad (10)$$

.

.

.

$$x_m=r\sin\theta_1.\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{n-m}.\cos\theta_{n-m+1}$$

.

.

.

$$x_n=r\cos\theta_1$$

Burada r, θ_{n-1} ve θ_k aşağıdaki değerler arasındadır.

$$r \in [0,\infty)$$
$$\theta_{n-1} \in [0,2\pi) \tag{11}$$
$$\theta_k \in [0,\pi)$$
$$0<k<n-1$$

Öklidyen uzayın koordinatlarını n=2, n=3 ve n=4 için yazalım.

n=2 için

$x_1 = r\operatorname{Sin}\theta$

$x_2 = r\operatorname{Cos}\theta$

Bu koordinatlar iki boyutlu polar koordinatlarını verir.

$x_1=y$

$x_2=x$

alınırsa

$x=r \operatorname{Cos}\theta$

$y=r \operatorname{Sin}\theta$

olur.

n=3 için

$x_1 = r\operatorname{Sin}\theta_1 \operatorname{Sin}\theta_2$

$x_2 = r\operatorname{Sin}\theta_1 \operatorname{Cos}\theta_2$

$x_3 = r\operatorname{Cos}\theta_1$

Burada $x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=z$ ve $\theta_1=\psi$, $\theta_2=\theta$ alınırsa üç boyutlu küresel koordinatları buluruz.

$$x = r\mathrm{Sin}\psi\ \mathrm{Sin}\ \theta$$

$$y = r\mathrm{Sin}\psi\ \mathrm{Cos}\ \theta$$

$$z = r\mathrm{Cos}\psi$$

n=4 için

$$x_1 = r\mathrm{Sin}\theta_1\mathrm{Sin}\theta_2\mathrm{Sin}\theta_3$$

$$x_2 = r\mathrm{Sin}\theta_1\mathrm{Sin}\theta_2\mathrm{Cos}\theta_3$$

$$x_3 = r\mathrm{Sin}\theta_1\mathrm{Cos}\theta_2$$

$$x_4 = r\mathrm{Cos}\ _1$$

Öklidyen uzaya geçmemizi sağlayan jakopyen

$$J^{(n)} = \frac{\partial x_1,\ldots,\partial x_n}{\partial(\theta_{n-1},\ldots,\theta_1,r)} = r^{n-1}\mathrm{Sin}^{n-2}\theta_1\mathrm{Sin}^{n-3}\theta_2\ldots\mathrm{Sin}^{n-m-1}\theta_m\ldots$$

$$\ldots\ \mathrm{Sin}\theta_{n-2} \qquad (12)$$

ifadesiyle verilir.
Şimdi dört boyutlu Jakopyeni hesaplayalım:

$$J^{(4)} = \frac{\partial x_1,\partial x_2,\partial x_3,\partial x_4}{\partial(\theta_3,\theta_2,\theta_1,r)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial r} & \frac{\partial x_3}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial x_4}{\partial r} & \frac{\partial x_4}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x_4}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x_4}{\partial \theta_3} \end{vmatrix} \qquad (13)$$

Buradan,

$$J^{(4)} = r^3 \mathrm{Sin}\theta_2 \mathrm{Sin}^2\theta_1$$

elde edilir. Dört boyutlu hacim elemanı ise aşağıdaki gibidir.

$$\int d^4x = \int_0^\infty r^3 dr \int_0^\pi \mathrm{Sin}\theta_2 d\theta_2 \int_0^\pi \mathrm{Sin}^2\theta_1 d\theta_1 \int_0^{2\pi} d\theta_3 \tag{14}$$

Buradan,

$$\int f(x^2) d^4x = \int_0^\infty r^3 f(r^2) dr \int_0^\pi \mathrm{Sin}\theta_2 d\theta_2 \int_0^\pi \mathrm{Sin}^2\theta_1 d\theta_1 \cdot$$

$$\cdot \int_0^{2\pi} d\theta_3 = 2\pi^2 \int_0^\infty f(r^2) r^3 dr \tag{15}$$

ifadesi elde edilir. Momentum uzayına geçildiğinde

$$\int f(P^2) d^4P = 2\pi^2 \int_0^\infty q^3 f(q^2) dq \tag{16}$$

elde edilir. Böylece,

$$d^4P = 2\pi^2 q^3 dq \tag{17}$$

bulunur.

Burada,

$$\begin{aligned} P_1 &= q\mathrm{Sin}\theta_1 \mathrm{Sin}\theta_2 \mathrm{Sin}\theta_3 \\ P_2 &= q\mathrm{Sin}\theta_1 \mathrm{Sin}\theta_2 \mathrm{Cos}\theta_3 \\ P_3 &= q\mathrm{Sin}\theta_1 \mathrm{Cos}\theta_2 \\ P_4 &= q\mathrm{Cos}\theta_1 \end{aligned} \tag{18}$$

ve

$0 \leq \theta_1 \leq \pi$

$0 \leq \theta_2 \leq \pi$

$0 \leq \theta_3 \leq 2\pi$

$0 \leq q \leq \infty$

$q^2 = \vec{P}^2 + P_0^2$

ifadeleri kullanıldı.

Şimdi integralimize dönelim. C integral yolunun $\frac{\pi}{2}$ kadar döndürülmesi ile alışılmış öklidyen (Euclidean) metrik P-uzayına geçilmiş olur. Bu uzayda uzunluğun karesi reel dördüncü koordinat ile bütün dört koordinatın karelerinin toplamına eşittir. Böylece,

$$d^4P = id^4P' = idP'dP_0 = 2\pi^2 iq^3 dq \qquad (19)$$

elde edilir.

Burada d^4P', P_0 üzerinden integral yolunun $\frac{\pi}{2}$ kadar döndürülmesinden sonra P-uzayındaki hacim elemanıdır. $P' = P$ ve $q = \sqrt{P'^2 + P_0'^2}$ dir. Böylece dört boyutlu integrali bir boyuta indirgemiş oluruz.

$$\int f(P^2)d^4P = i \int f(P'^2)d^4P' = 2\pi^2 i \int_0^\infty q^3 dq f(q^2)$$

$z = q^2$ dönüşümünü yaparsak,

$$\int f(P^2)d^4P = i\pi^2 \int_0^\infty zf(z)dz \qquad (20)$$

ifadesi bulunmuş olur.

a- Logaritmik ıraksak integraller:

Aşağıda verilen integral logaritmik ıraksak bir integraldir.

$$I_o = \int \frac{d^4P}{[(P-k)^2+a^2]^2} \qquad (21)$$

ilk olarak aşağıdaki bağıntıyı kanıtlayalım:

$$\frac{1}{\alpha^n} - \frac{1}{\beta^n} = -\int_0^1 \frac{n(\alpha-\beta)dz}{[(\alpha-\beta)z+\beta]^{n+1}} \qquad (22)$$

Burada $(\alpha-\beta)z+\beta=u$ dönüşümü yapıldığında,

$$-\int_0^1 \frac{n(\alpha-\beta)}{[(\alpha-\beta)z+\beta]^{n+1}}dz = -n\int\frac{du}{u^{n+1}} = \frac{1}{[(\alpha-\beta)z+\beta]^n}\Big|_0^1 = \frac{1}{\alpha^n} - \frac{1}{\beta^n}$$

ifadesi elde edilir.

Yukarıda verilen logaritmik ıraksak integrale dönelim:

$$I_o = \int\frac{d^4P}{(P^2+a^2)^2} + \int\frac{d^4P}{[(P-k)^2+a^2]^2} - \int\frac{d^4P}{(P^2+a^2)^2} \qquad (23)$$

Bu ifadeye (22) bağıntısı uygulandığında aşağıdaki ifade elde edilir.

$$I_o = \int\frac{d^4P}{(P^2+a^2)^2} + \int d^4P \int_0^1 \frac{-2(k^2-2pk)}{[P^2+a^2+(k^2-2pk)z]^3}dz \qquad (24)$$

İkinci integral yakınsak olduğundan $P_\mu \to P_\mu + k_\mu z$ dönüşümü yapılabilir. Böylece ikinci integral aşağıdaki gibi olur.

$$-2\int d^4P \int_0^1 \frac{(k^2-2pk)dz}{[P^2+a^2+(k^2-2pk)z]^3} = -2\int_0^1 dz \int \frac{k^2(1-2z)-2pk}{[P^2+a^2+k^2z(1-z)]^3}\, d^4P$$

Simetrik integrasyon koşulundan

$$-2\int d^4P \int_0^1 \frac{(k^2-2pk)dz}{[P^2+a^2+(k^2-2pk)z]^3} = -2\int_0^1 dz \int \frac{k^2(1-2z)d^4P}{[P^2+a^2+k^2z(1-z)]^3} \qquad (25)$$

ifadesi bulunur. d^4P üzerinden yakınsak integral alındığında,

$$-2\int d^4P \int_0^1 \frac{(k^2-2pk)dz}{[P^2+a^2+(k^2-2pk)z]^3} = -\, i\pi^2 \int_0^1 \frac{k^2(1-2z)dz}{a^2+k^2z(1-z)} =$$

$$= i\pi^2 \ell n\, [a^2+k^2z(1-z)] \Big|_0^1 = -i\pi^2 \ell n a^2 + i\pi^2 \ell n a^2 = 0 \qquad (26)$$

ifadesi bulunur. Böylece aşağıdaki integral bulunmuş olur.

$$I_o = \int \frac{d^4P}{[(P-k)^2+a^2]^2} = \int \frac{d^4P}{(P^2+a^2)^2} \qquad (27)$$

Yukarıda gösterildiği gibi logaritmik ıraksak integrallerde $p-k \rightarrow p$ dönüşümü yapılabilir.

b- Lineer Iraksak İntegraller.

Lineer ıraksak integraller,

$$I_1 = \int \frac{\not{P} d^4P}{[(P-k)^2+a^2]^2}$$

ifadesiyle verilir. Bu integrali

$$I_1 = \int \frac{(\not{P}+\not{K})d^4P}{(P^2+a^2)^2} + S_1 \qquad (28)$$

ve

$$S_1 = -\not{K}\int \frac{d^4P}{(P^2+a^2)} + \int \not{P} d^4P\left(\frac{1}{[(p-k)^2+a^2]^2} - \frac{1}{(P^2+a^2)^2}\right) \qquad (29)$$

şeklinde yazabiliriz. Aşağıdaki eşitlik kullanılarak

$$\frac{1}{\alpha^n} - \frac{1}{\beta^n} = -\int_0^1 \frac{n(\alpha-\beta)dz}{[(\alpha-\beta)z+\beta]^{n+1}}$$

S_1 ifadesinin ikinci kısmı,

$$-2\int \not{P}\, d^4P \int_0^1 \frac{(k^2-2pk)dz}{[P^2+a^2+(k^2-2pk)z]^3}$$

olur. Bu integral logaritmik ıraksak olduğundan P= p + kz dönüşümünü yapabiliriz. Bu dönüşüm yapıldığında,

$$-2\int \not{P}\, d^4P \int_0^1 \frac{(k^2-2pk)dz}{[P^2+a^2+(k^2-2pk)z]^3} = -2\int(\not{P}+\not{K}z)d^4P \cdot$$

$$\cdot \int_0^1 \frac{(k^2(1-2z)-2pk)dz}{[P^2+a^2+k^2z(1-z)]^3}$$

ifadesi elde edilir. Simetrik integrasyon koşulundan

$$4\int \not{P}\, d^4P \int_0^1 \frac{P.k dz}{[P^2+a^2+k^2z(1-z)]^3} - 2\int \not{k} z d^4P \int_0^1 \frac{k^2(1-2z)dz}{[P^2+a^2+k^2z(1-z)]^3}$$

ifadesi elde edilir.

$$P\gamma = \not{P}$$

$$k_\mu k_\nu = \frac{1}{4}\,\delta_{\mu\nu} k^2$$

eşitlikleri kullanıldığında

$$-2\int \not{P} d^4P \int_0^1 \frac{(k^2-2pk)dz}{(P^2+a^2+(k^2-2pk)z)^3} = \not{k}\int d^4P \int_0^1 \frac{P^2 dz}{[P^2+a^2+k^2z(1-z)]^3} -$$

$$-2\not{k}\int d^4P \int_0^1 \frac{k^2z(1-2z)dz}{[P^2+a^2+k^2z(1-z)]^3}$$

ifadesi bulunur.

Bu integrali (29) bağıntısında yerine yazdığımızda,

$$s_1 = -\not{k}\int \frac{d^4P}{(P^2+a^2)^2} - 2\not{k}\int d^4P \int_0^1 \frac{k^2z(1-2z)dz}{[P^2+a^2+k^2z(1-z)]^3} +$$

$$+\not{k}\int d^4P \int_0^1 \frac{P^2 dz}{[P^2+a^2+k^2z(1-z)]^3} \qquad (30)$$

ifadesini buluruz. İkinci integrali hesaplamak için

$$z = u$$

ve

$$\frac{k^2(1-2z)dz}{[P^2+a^2+k^2z(1-z)]^3} = dv$$

dönüşümlerini kullanırsak,

$$-2\not{k}\int d^4P \int_0^1 \frac{k^2 z(1-2z)dz}{[P^2+a^2+k^2 z(1-z)]^3} = \not{k}\int \frac{d^4P}{(P^2+a^2)^2} -$$

$$- \not{k}\int d^4P \int_0^1 \frac{dz}{[P^2+a^2+k^2 z\ (1-z)]^2}$$

ifadesi bulunur. Bu ifadeyi (30) da yerine yazarsak,

$$S_1 = \not{k}\int d^4P \int_0^1 \frac{-a^2-k^2 z\ (1-z)}{[P^2+a^2+k^2 z(1-z)]^3}\ dz$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadeden,

$$S_1 = -\frac{i\pi^2}{2}\ \not{k}$$

bulunur. Bulunan S_1 değerini (28) de yerine yazılırsa,

$$\int \frac{\not{P} d^4P}{[(P-k)^2+a^2]^2} = \int \frac{(\not{P}+\not{k})d^4P}{(P^2+a^2)^2} - \frac{i\pi^2}{2}\ \not{k} \tag{31}$$

ifadesi bulunur. Simetrik integrasyon koşulundan,

$$\int \frac{\not{P} d^4P}{[(P-k)^2+a^2]^2} = \not{k}\int \frac{d^4P}{(P^2+a^2)^2} - \frac{i\pi^2}{2}\ \not{k} \tag{32}$$

ifadesi bulunur. Gösterildiği gibi lineer ıraksak bir integral S_1 katkısı ile logaritmik integrale dönüşür.

c- Simetrik İntegraller

Simetrik integraller Feynman integrallerinin hesaplanmasında önemli rol oynar. Aşağıdaki integraller simetrik integrallerdir.

$$\int P_\mu P_\nu P_\lambda f(P^2) d^4P = 0$$
$$\int P_\mu f\,(P^2) d^4P = 0 \qquad (33)$$

Görüldüğü gibi simetrik integrallerin sol tarafı bir dörtlü vektördür. Fakat denklemin sağ tarafını dörtlü vektör yapacak sıfırdan başka bir ifade yoktur.

2. Bölüm III'deki İntegrallerin Hesabı

Aşağıdaki integrali hesaplayalım:

$$K_{\sigma\tau}(k,\ell) = 4k_\mu \int_0^1 dz \frac{P_\sigma P_\tau P_\mu d^4P}{(P^2-2pkz+\ell)^3} \tag{34}$$

Heriki tarafın ℓ ye göre türevini alırsak,

$$\frac{\partial K_{\sigma\tau}(k,\ell)}{\partial \ell} = -12\, k_\mu \int_0^1 dz \int \frac{P_\sigma P_\tau P_\mu d^4P}{(P^2-2pkz+\ell)^4}$$

ifadesini elde ederiz.

$P \to P+kz$ dönüşümünü yaptığımızda $K_{\sigma\tau}(k,\ell) \to K'_{\sigma\tau}(k',\ell)$ olur.

$$\frac{\partial K'_{\sigma\tau}(k',\ell)}{\partial \ell} = -12k_\mu \int_0^1 dz \int \frac{(P_\sigma+k_\sigma z)(P_\tau+k_\tau z)(P_\mu+k_\mu z)d^4P}{(P^2+\ell-k^2z^2)^4}$$

Simetrik integrasyon koşulu kullanıldığında,

$$\frac{\partial K'}{\partial \ell} = -12k_\mu \int_0^1 zdz \int \frac{P_\mu P_\sigma k_\tau + P_\mu P_\tau k_\sigma + P_\sigma P_\tau k_\mu}{(P^2+\ell-k^2z^2)^4} d^4P -$$

$$-12k_\mu \int_0^1 z^3 k_\mu k_\sigma k_\tau \int \frac{d^4P}{(P^2+\ell-k^2z^2)^4}$$

ifadesi elde edilir. Adım adım ara işlemleri yapalım:

$$\frac{\partial K'}{\partial \ell} = -3k_\mu \int_0^1 zdz(\delta_{\mu\sigma}k_\tau + \delta_{\mu\tau}k_\sigma + \delta_{\sigma\tau}k_\mu) \int \frac{P^2 d^4P}{(P^2+\ell-k^2z^2)^4} -$$

$$-2k^2 i\pi^2 \int_0^1 \frac{k_\sigma k_\tau z^3 dz}{(\ell-k^2z^2)^2}$$

Burada,

$$k_\sigma k_\tau = \frac{1}{4}\,\delta_{\sigma\tau} k^2$$

ve

$$\ell - k^2 z^2 = u$$

dönüşümü kullanıldığında,

$$\frac{\partial K'}{\partial \ell} = -\frac{9}{2}\delta_{\sigma\tau}\, k^2 \int_0^1 z dz \int \frac{P^2 d^4 P}{(P^2+\ell-k^2z^2)^4} -$$

$$-\frac{i\pi^2}{4}\,\delta_{\sigma\tau}\left(\ln(\ell-k^2)-\ln\ell-1+\frac{\ell}{\ell-k^2}\right)$$

ifadesi bulunur.

Yukarıdaki ifadeyi ℓ üzerinden integre edersek,

$$\int \frac{\partial K'}{\partial \ell}\, d\ell = \frac{3}{2}\,\delta_{\sigma\tau} k^2 \int_0^1 z dz \int \frac{P^2 d^4 P}{(P^2+\ell-k^2)^3} - \frac{i\pi^2}{4}\delta_{\sigma\tau}[\ell\ \ln(\ell-k^2)-$$

$$-\int \frac{\ell d\ell}{\ell-k^2} - \ell\cdot\ln\ell+\ell\ -\ell+\int \frac{\ell d\ell}{\ell-k^2}]$$

$$= \frac{3}{2}\,\delta_{\sigma\tau} k^2 \int_0^1 z dz\ [i\pi^2(\ln L^2-\ln(\ell-k^2z^2)\ -\frac{3}{2}] -$$

$$-\frac{i\pi^2}{4}\,\delta_{\sigma\tau}[\ell\cdot\ln(\ell-k^2)-\ell\ln\ell]$$

$$= \frac{3}{2}\,\delta_{\sigma\tau} k^2\ i\pi^2[\frac{z^2}{2}\,(\ln L^2 - \frac{3}{2})\Big|_0^1 - \int_0^1 z\ln(\ell-k^2z^2)dz]-$$

$$-\frac{i\pi^2}{4}\,\delta_{\sigma\tau}[\ell.\ln(\ell-k^2)-\ell.\ln\ell]$$

$$K'= \frac{3}{4}\,\delta_{\sigma\tau}k^2 i\pi^2[\ell nL^2 - \frac{3}{2} - \int_0^1 z\ell n\,(\ell - k^2z^2)dz - \frac{i\pi^2}{4}\,\delta_{\sigma\tau}$$

$$(\ell\ell n(\ell - k^2) - \ell\ell n\ell)$$

$$K'= \frac{3}{4}\,\delta_{\sigma\tau}k^2 i\pi^2[\ell nL^2 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2k^2}\,((\ell-k^2)\ell n(\ell-k^2) - (\ell-k^2) + \ell - \ell.\ell n\ell] -$$

$$- \frac{i\pi^2}{4}\,\delta_{\sigma\tau}[\ell.\ell n(\ell-k^2) - \ell\ell n\ell]$$

$$= \frac{3}{4}\,i\pi^2\delta_{\sigma\tau}k^2(\ell nL^2 - \frac{3}{2}) + \frac{3}{8}\,i\pi^2\delta_{\sigma\tau}[(\ell-k^2)\ell n(\ell-k^2) - (\ell-k^2) + \ell - \ell\ell n\ell] -$$

$$-\frac{i\pi^2}{4}\,\delta_{\sigma\tau}[\ell.\ell n\,(\ell-k^2) - \ell.\ell n\ell]$$

$$K'= i\pi^2 k_\sigma k_\tau(3\ell nL^2 - \frac{9}{2}) + \frac{i\pi^2}{4}\,\delta_{\sigma\tau}[\frac{3}{2}\,(\ell-k^2)\ell n(\ell-k^2) - \frac{3}{2}\,(\ell-k^2) + \frac{3}{2}\ell -$$

$$- \frac{3}{2}\,\ell.\ell n\ell] + \frac{i\pi^2}{4}\,\delta_{\sigma\tau}\,[\ell.\ell n\ell - \ell.\ell n(\ell-k^2)] \qquad (35)$$

ifadesi bulunur. Burada,

$$A_o = -\ell n\ L^2 + 1$$

alınırsa ve (35) bağıntısına aşağıdaki ifade eklenirse,

$$\delta_{\sigma\tau}\frac{i\pi^2}{4}\,(L^2 - 4\ell\ell nL + 2\ell.\ell n\ell + \ell]$$

$$J'= K' + \delta_{\sigma\tau}\,\frac{i\pi^2}{4}\,(L^2 - 4\ell\ell nL + 2\ell\ell n\ell + \ell\,) \qquad (36)$$

ifadesi elde edilir.

J' ifadesi aşağıdaki gibi olur.

$$J'=\delta_{\sigma\tau}\frac{i\pi^2}{4}\{L^2-4\ell\ell nL+2\ell.\ell n\ell+\ell+\frac{3}{2}(\ell-k^2)\ell n(\ell-k^2)-\frac{3}{2}(\ell-k^2)+\frac{3}{2}\ell-$$

$$-\frac{3}{2}\ell.\ell n\ell+\ell\ell n\ell-\ell.\ell n(\ell-k^2)\}-i\pi^2k_\sigma k_\tau(\frac{9}{2}-3\ell nL^2)$$

$$=\delta_{\sigma\tau}\frac{i\pi^2}{2}\{\frac{L^2}{2}-\ell.\ell nL^2+\frac{\ell}{2}\ell n\ell+\frac{1}{4}\ell\ell n\ell+\frac{\ell}{2}+\frac{\ell-k^2}{2}\ell n(\ell-k^2)$$

$$+\frac{1}{4}(\ell-k^2)\ell n(\ell-k^2)-\frac{\ell-k^2}{2}-\frac{1}{4}(\ell-k^2)+\frac{3}{4}\ell-\frac{\ell}{2}\ell n(\ell-k^2)-$$

$$-i\pi^2k_\sigma k_\tau(\frac{9}{2}-3\ell nL^2)$$

$$=\delta_{\sigma\tau}\frac{i\pi^2}{2}\{\frac{3}{4}(\ell-k^2)\ell n(\ell-k^2)-\frac{3}{4}(\ell-k^2)+\ell(-\ell n\,L^2+\frac{5}{4})+\frac{L^2}{2}+\frac{3}{4}\ell.\ell n\ell-$$

$$-\frac{\ell}{2}\ell n(\ell-k^2)\}-i\pi^2k_\sigma k_\tau(\frac{9}{2}-3\ell nL^2)$$

$$=\delta_{\sigma\tau}\frac{i\pi^2}{2}\{(\ell-k^2)\ell n(\ell-k^2)-\frac{1}{4}(\ell-k^2)\ell n(\ell-k^2)-(\ell-k^2)+\frac{1}{4}(\ell-k^2)+$$

$$+\ell(-\ell nL^2+\frac{3}{2}-\frac{1}{4})+\frac{L^2}{2}+\frac{3}{4}\ell\ell n\ell-\frac{\ell}{2}\cdot\ell n(\ell-k^2)\}-\frac{i\pi^2}{4}\delta_{\sigma\tau}k^2(\frac{9}{2}-3\ell nL^2)$$

$$=\delta_{\sigma\tau}\frac{i\pi^2}{2}\{(\ell-k^2)\ell n(\ell-k^2)-(\ell-k^2)+\ell(A_0+\frac{1}{2})-\frac{\ell}{4}+\frac{L^2}{2}+\frac{\ell}{4}-\frac{k^2}{4}-$$

$$-\frac{\ell}{4}\cdot\ell n(\ell-k^2)+\frac{k^2}{4}\ell n(\ell-k^2)+\frac{3}{4}\ell.\ell n\ell-\frac{\ell}{2}\cdot\ell n(\ell-k^2)\}-$$

$$-\frac{i\pi^2\delta_{\sigma\tau}}{2}(\frac{9}{2}k^2-3k^2\ell nL^2)$$

$$=\delta_{\sigma\tau}\frac{i\pi^2}{2}\{(\ell-k^2)\ell n(\ell-k^2)-(\ell-k^2)+\ell(A_0+\frac{1}{2})+\frac{L^2}{2}+k^2(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\ell n(\ell-k^2))-$$

$$- \frac{3}{4}\, \ell.\ell n(\ell-k^2) + \frac{3}{4}\, \ell.\ell n\ell\ \} - \frac{i\pi^2 \delta_{\sigma\tau}}{2} \left(\frac{9}{4} k^2 - \frac{3}{2} k^2 \ell n L^2\right)$$

$$= \delta_{\sigma\tau} \frac{i\pi^2}{2} \{(\ell-k^2)\ell n(\ell-k^2) - (\ell-k^2) + \ell(A_o + \frac{1}{2}) + \frac{L^2}{2} - \frac{k^2}{4} +$$

$$+ \frac{k^2}{4} \ell n(\ell-k^2) - \frac{3}{4}\, \ell.\ell n(\ell-k^2) + \frac{3}{4}\, \ell.\ell n\ell - \frac{9}{4} k^2 + \frac{3}{2} k^2\ \ell n L^2\}$$

$$J' = \delta_{\sigma\tau} \frac{i\pi^2}{2} \{(\ell-k^2)\ell n(\ell-k^2) - (\ell-k^2) + \ell(A_o + \frac{1}{2}) + \frac{L^2}{2} - \frac{5}{6} k^2 - \frac{10}{6} k^2 +$$

$$+ k^2 \ell n L^2 + \frac{1}{2} k^2 \ell n L^2 + \frac{k^2}{4} \ell n(\ell-k^2) + \frac{3}{4}\, \ell(\ell n\ell - \ell n(\ell-k^2))\}$$

$$= \delta_{\sigma\tau} \frac{i\pi^2}{2} \{(\ell-k^2)\ell n(\ell-k^2) - (\ell-k^2) + \ell(A_o + \frac{1}{2}) + \frac{L^2}{2} + k^2(\ell n L^2 - \frac{5}{6} + 1) -$$

$$- \frac{4}{6} k^2 + \frac{1}{2} k^2 \ell n L^2 + \frac{k^2}{4} \ell n\ (\ell-k^2) + \frac{3}{4}\, \ell(\ell n\ell - \ell n(\ell-k^2))\}$$

$$= \delta_{\sigma\tau} \frac{i\pi^2}{2} \{(\ell-k^2)\ell n(\ell-k^2) - (\ell-k^2) + \ell(A_o + \frac{1}{2}) + k^2(-A_o - \frac{5}{6}) + \frac{L^2}{2}\} +$$

$$+ \frac{\delta_{\sigma\tau}\ i\pi^2}{2} \{\ \frac{1}{2} k^2 \ell n L^2 + \frac{k^2}{4} \ell n\ (\ell-k^2) - \frac{4}{6} k^2\} + \delta_{\sigma\tau} \frac{i\pi^2}{2}\ \frac{3}{4} \ell \cdot \ell n \frac{\ell}{\ell-k^2}$$

$$J' = \delta_{\sigma\tau} \frac{i\pi^2}{2} \{(\ell-k^2)\ell n(\ell-k^2) - (\ell-k^2) + \ell(A_o + \frac{1}{2}) + k^2(-A_o - \frac{5}{6}) + \frac{L^2}{2}\} -$$

$$- k_\sigma k_\tau i\pi^2[\ln(\ell-k^2)-A_o-\frac{5}{6}]+\frac{i\pi^2}{4}\delta_{\sigma\tau}\{2k^2\ln L^2+$$

$$+\frac{3k^2}{2}\ln(\ell-k^2)-\frac{19}{6}k^2+\frac{3}{2}\ell.\ln\frac{\ell}{\ell-k^2} \qquad (37)$$

Burada orjinin kaydırılmasından doğan terime S dersek ve aşağıdaki gibi ifade edersek,

$$S=\frac{i\pi^2}{4}\delta_{\sigma\tau}\{2k^2\ln L^2+\frac{3k^2}{2}\ln(\ell-k^2)-\frac{19}{6}k^2+\frac{3}{2}\ell.\ln\frac{\ell}{\ell-k^2}\} \qquad (38)$$

$$J'=\delta_{\sigma\tau}\frac{i\pi^2}{2}\{(\ell-k^2)\ln(\ell-k^2)-(\ell-k^2)+\ell(A_o+\frac{1}{2})+$$

$$+k^2(-A_o-\frac{5}{6})+\frac{L^2}{2}\}+S \qquad (39)$$

ifadesi elde edilir. J'yi aşağıdaki gibi tanımlarsak,

$$J=J'-S$$

$$J=\delta_{\sigma\tau}\frac{i\pi^2}{2}\{(\ell-k^2)\ln(\ell-k^2)-(\ell-k^2)+\ell(A_o+\frac{1}{2})+$$

$$+k^2(-A_o-\frac{5}{6})+\frac{L^2}{2}\} \qquad (40)$$

ifadesi elde edilir.

Aşağıdaki integrali hesaplayalım:

$$J^{(3)}_{\sigma\tau}(k,\ell)=\int\frac{P_\sigma P_\tau d^4P}{(P^2-2pk+\ell)^3} \qquad (41)$$

ifade logaritmik ıraksak olduğu için orjini (p-k→P) değiştirebiliriz. Böylece aşağıdaki ifade elde edilir.

$$J^{(3)}_{\sigma\tau}(k,\ell)=\int\frac{P_\sigma P_\tau d^4P}{(P^2+\ell-k^2)^3}+\int\frac{k_\sigma k_\tau d^4P}{(P^2+\ell-k^2)^3}+\int\frac{P_\sigma k_\tau d^4P}{(P^2+\ell-k^2)^3}+$$

$$+\int\frac{P_\sigma k_\tau d^4P}{(P^2+\ell-k^2)^3} \qquad (42)$$

Simetrik integrasyon koşulundan,

$$J^{(3)}_{\sigma\tau}(k,\ell)=\int\frac{P_\sigma P_\tau d^4P}{(P^2+\ell-k^2)^3}+\int\frac{k_\sigma k_\tau d^4P}{(P^2+\ell-k^2)^3} \qquad (43)$$

olur. İlk olarak birinci integrali hesaplayalım:

$$\int\frac{P_\sigma P_\tau d^4P}{(P^2+\ell-k^2)^3}=\frac{\delta_{\sigma\tau}}{4}\int\frac{P^2d^4P}{(P^2+\ell-k^2)^3}=\frac{\pi^2 i}{2}\delta_{\sigma\tau}\int_0^L\frac{q^5dq}{(q^2+\ell-k^2)^3} \qquad (44)$$

$q^2+\ell-k^2=t$ dönüşümü kullanılırsa,

$$=\frac{\pi^2 i}{2}\delta_{\sigma\tau}\int\frac{(t-\ell+k^2)^2dt}{2t^3}$$

ifadesi elde edilir. Böylece,

$$\int\frac{P_\sigma P_\tau d^4P}{(P^2+\ell-k^2)^3}=\frac{\pi^2 i}{4}\delta_{\sigma\tau}\int\frac{t^2-2t(\ell-k^2)+(\ell-k^2)^2}{t^3}dt$$

$$=\pi^2 i\,\frac{\delta_{\sigma\tau}}{4}\left[\ln(q^2+\ell-k^2)+\frac{2(\ell-k^2)}{q^2+\ell-k^2}-\frac{(\ell-k^2)^2}{2(q^2+\ell-k^2)^2}\right]\Bigg|_0^L$$

$$= \frac{\pi^2 i}{4}\,\delta_{\sigma\tau}\{\ell n(L^2+\ell-k^2)-\ell n(\ell-k^2)+\frac{2(\ell-k^2)}{L^2+\ell-k^2}-2-\frac{(\ell-k^2)^2}{2(L^2+\ell-k^2)^2}+\frac{1}{2}\}$$

$$\int\frac{P_\sigma P_\tau d^4P}{(P^2+\ell-k^2)^3}=\pi^2 i\,.\,\frac{\delta_{\sigma\tau}}{4}[\ell n\frac{L^2}{\ell-k^2}-\frac{3}{2}+\ell n\,(1+\frac{\ell-k^2}{L^2})+$$

$$+\frac{2(\ell-k^2)}{L^2(1+\frac{\ell-k^2}{L^2})}-\frac{(\ell-k^2)^2}{2\,[L^2(1+\frac{\ell-k^2}{L^2})]^2}]$$

L'nin oldukça büyük değeri için,

$$\int\frac{P_\sigma P_\tau d^4P}{(P^2+\ell-k^2)^3}=i\pi^2\,.\,\frac{\delta_{\sigma\tau}}{4}\,.\,(\ell n\frac{L^2}{\ell-k^2}-\frac{3}{2}) \qquad (45)$$

(43) ifadesinin ikinci integralini hesaplayalım:

$$\int\frac{k_\sigma k_\tau d^4P}{(P^2+\ell-k^2)^3}=2\pi^2 i\,k_\sigma k_\tau\int_o^L\frac{q^3dq}{(q^2+\ell-k^2)^3}$$

$q^2+\ell-k^2=t$ dönüşümü yapılırsa,

$$\int\frac{k_\sigma k_\tau d^4P}{(P^2+\ell-k^2)^3}=\pi^2 i\,k_\sigma k_\tau\int\frac{t-\ell+k^2}{t^3}\,dt$$

$$\int \frac{k_\sigma k_\tau d^4P}{(P^2+\ell-k^2)^3} = \pi^2 i\ k_\sigma k_\tau \left(- \frac{1}{q^2+\ell-k^2} + \frac{\ell-k^2}{2(q^2+\ell-k^2)^2}\right) \Big|_0^L$$

$\ell-k^2 = n$ dersek

$$\int \frac{k_\sigma k_\tau d^4P}{(P^2+n)^3} = \pi^2 i\ k_\sigma k_\tau \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n} + \frac{n}{2(L^2+n)^2} - \frac{1}{L^2+n}\right)$$

ifadesi elde edilir. Burada,

$$\int \frac{k_\sigma k_\tau}{(P^2+\ell-k^2)^3} d^4P = \frac{\pi^2 i}{2} \frac{k_\sigma k_\tau}{\ell-k^2} + \pi^2 i k_\sigma k_\tau \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{n}{2L^4\left(1+\frac{n}{L^2}\right)^2} - \frac{1}{L^2} \frac{1}{\left(1+\frac{n}{L^2}\right)}\right]$$

L'nin oldukça büyük değeri için,

$$\int \frac{k_\sigma k_\tau}{(P^2+\ell-k^2)^3} d^4P = \frac{\pi^2 i}{2} \frac{k_\sigma k_\tau}{\ell-k^2} \tag{46}$$

ifadesi bulunur.

Şimdi (45) ve (46), (43) ifadesinde yerine yazıldığında aranan integral,

$$J^{(3)}_{\sigma\tau}(k,\ell) = \frac{i\pi^2}{4}\delta_{\sigma\tau}\left(\ell n\frac{L^2}{\ell-k^2} - \frac{3}{2}\right) + \frac{\pi^2 i}{2}\frac{k_\sigma k_\tau}{\ell-k^2} \tag{47}$$

bulunur. Şimdi,

$$J^{(2)}_{\sigma}(k,\ell) = \int\frac{P_\sigma d^4P}{(P^2-2pk+\ell)^2} \tag{48}$$

integralini hesaplayalım:

$$U_\sigma = \frac{1}{4}\int\frac{P_\sigma d^4P}{(P^2-2kp+\ell)^2} \tag{49}$$

ifadesi verildiğinde,

$$\int\frac{P_\sigma P_\tau d^4P}{(P^2-2pk+\ell)^3} = \frac{\partial U_\sigma}{\partial k_\sigma} \tag{50}$$

olur. Şimdi (50) ifadesini k_τ üzerinden integre edelim.

$$\sum_\tau\int\frac{\partial U_\sigma}{\partial k_\tau}dk_\sigma = \sum_\tau\int\left\{\frac{\pi^2 i}{4}\delta_{\sigma\tau}\left(\ell n\frac{L^2}{\ell-k2} - \frac{3}{2}\right) + \frac{\pi^2 i}{2}\frac{k_\sigma k_\tau}{\ell-k^2}\right\}dk_\tau$$

$$= -\frac{\pi^2 i}{4}\sum_\tau\delta_{\sigma\tau}\int\left[\ell n(\ell-k^2) + \frac{1}{2} + A_0\right]dk_\tau + \frac{\pi^2 i}{2}\sum_\tau\int\frac{k_\sigma k_\tau}{\ell-k^2}dk_\tau$$

Burada $A_0 = -\ell n L^2 + 1$ dir. Bu ifadeden,

$$U_\sigma = \frac{1}{4}\left\{\pi^2 i k_\sigma\left(\ell n\frac{L^2}{\ell-k^2} - \frac{3}{2}\right) + \frac{\pi^2 i}{2}k_\sigma\left(\frac{k^2}{\ell-k^2}\right)\right\}$$

$$U_\sigma = \frac{1}{4}\left\{\pi^2 i\, k_\sigma \left(\ln\frac{L^2}{\ell-k^2} - \frac{3}{2}\right) + \frac{\pi^2 i}{2}\, k_\sigma \lim_{k\to o}\left(\frac{k^2}{k^2\left(-1+\frac{\ell}{k^2}\right)}\right)\right\}$$

$$\int \frac{P_\sigma d^4P}{(P^2-2pk+\ell)^2} = \pi^2 i k_\sigma \left(\ln\frac{L^2}{\ell-k^2} - \frac{3}{2}\right) \qquad (51)$$

elde edilir. Aynı integral $p-k\to P$ ötelemesiyle hesaplandığında $\frac{i\pi^2}{2} k_\sigma$ ek katkı alır.

EK.C- İz Teoremleri ve Bölüm II deki İzlerin Hesabi

1- İz teoremleri

γ'lerin sıradeğişmez (antikomutatif) bağıntısı.

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = \gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}$$

$\mu = \nu$ için

$$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2$$

$\mu \neq \nu$ için

$$\gamma_\mu\gamma_\nu = -\gamma_\nu\gamma_\mu$$

$$\gamma_\mu\gamma_\nu = \delta_{\mu\nu}$$

$$\gamma_\mu\gamma^\mu = 4$$

a- Tek sayılı γ matrislerin izi sıfırdır. n tek sayı için

$$iz(\not{a}_1 \dots \not{a}_n) = iz(\not{a}_1 \dots \not{a}_n\gamma_5\gamma_5) = iz(\gamma_5\not{a}_1 \dots \not{a}_n\gamma_5)$$

$$iz(\not{a}_1 \dots \not{a}_n) = (-1)^n\, iz(\not{a}_1 \dots \not{a}_n\gamma_5\gamma_5) = 0$$

Burada $iz\,AB = iz\,BA$ ve $\gamma_\mu\gamma_5 + \gamma_5\gamma_\mu = 0$ eşitlikleri kullanıldı.

b- dört boyutlu birim matrisin izi 4 dür.

$$iz\,I = 4$$

$$iz\,\not{a}\not{b} = \frac{1}{2}\, iz(\not{a}\not{b} + \not{b}\not{a}) = \frac{1}{2}\, z(\not{a}\not{b} + 2b.a - \not{a}\not{b}) = 4ab$$

Burada $\not{a}\not{b} = 2ab - \not{b}\not{a}$ ifadesi kullanıldı.

c- çift sayılı γ matrislerinin izi aşağıda verilmiştir.

n çift sayı için

$$\text{iz}(\not{a}_1 \ldots \not{a}_n) = a_1.a_2\,\text{iz}(\not{a}_3 \ldots \not{a}_n) - a_1.a_3\,\text{iz}(\not{a}_2.\not{a}_4 \ldots \not{a}_n) +$$

$$+ \ldots + a_1.a_n\,\text{iz}(\not{a}_2 \ldots \not{a}_{n-1})$$

Bu bağıntının özel bir durumu için,

$$\text{iz}(\not{a}_1\not{a}_2\not{a}_3\not{a}_4) = 4(a_1.a_2\,a_3.a_4 + a_1.a_4\,a_2.a_3 - a_1.a_3\,a_2.a_4)$$

ifadesini kanıtlayalım:

$$\text{iz}(\not{a}_1\not{a}_2\not{a}_3\not{a}_4) = 2a_1.a_2\,\text{iz}(\not{a}_3\not{a}_4) - \text{iz}(\not{a}_2\not{a}_1\not{a}_3\not{a}_4) = 2a_1.a_2.$$

$$.\,\text{iz}(\not{a}_3\not{a}_4) - 2a_1.a_3\,\text{iz}(\not{a}_2\not{a}_4) + \text{iz}(\not{a}_2\not{a}_3\not{a}_1\not{a}_4) =$$

$$= 2a_1.a_2\,\text{iz}(\not{a}_3\not{a}_4) - 2a_1.a_3\,\text{iz}(\not{a}_2\not{a}_4) + 2a_1.a_4.$$

$$.\,\text{iz}(\not{a}_2\not{a}_3) - \text{iz}(\not{a}_2\not{a}_3\not{a}_4\not{a}_1) =$$

$$= 8(a_1.a_2\,a_3.a_4 + a_1.a_4\,a_2.a_3 - a_1.a_3\,a_2.a_4) -$$

$$- \text{iz}(\not{a}_1\not{a}_2\not{a}_3\not{a}_4)$$

$$2\,\text{iz}(\not{a}_1\not{a}_2\not{a}_3\not{a}_4) = 8(a_1.a_2\,a_3.a_4 + a_1.a_4\,a_2.a_3 - a_1.a_3\,a_2.a_4)$$

$$iz(\not a_1 \not a_2 \not a_3 \not a_4) = 4(a_1 \cdot a_2\, a_3 \cdot a_4 + a_1 \cdot a_4\, a_2 \cdot a_3 - a_1 \cdot a_3\, a_2 \cdot a_4)$$

Burada

$$\not a \not b + \not b \not a = 2ab \quad \text{ve} \quad iz\, \not a \not b = 4ab$$

kullanıldı.

$$iz\, \gamma_\mu \gamma_\nu = 4\delta_{\mu\nu}$$

2- Bölüm III deki izlerin hesabı

$$iz\{\gamma_\mu(i\not p - m)\gamma_\nu(i\not p - m)\gamma_\lambda(i\not p - m)\gamma_\sigma(i\not p - m)\} =$$

$$= iz\{\gamma_\mu \not p \gamma_\nu \not p \gamma_\lambda \not p \gamma_\sigma \not p - \gamma_\mu \not p \gamma_\nu \not p\, m^2 \gamma_\lambda \gamma_\sigma - m^2 \gamma_\mu \not p \gamma_\nu \gamma_\lambda \not p \gamma_\sigma -$$

$$- m^2 \gamma_\mu \not p \gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_\sigma \not p - m^2 \gamma_\mu \gamma_\nu \not p \gamma_\lambda \not p \gamma_\sigma - m^2 \gamma_\mu \gamma_\nu \not p \gamma_\lambda \gamma_\sigma \not p -$$

$$- m^2 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda \not p \gamma_\sigma \not p + m^4 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_\sigma \} =$$

$$= \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4 + \tau_5 + \tau_6 + \tau_7 + \tau_8$$

Burada,

$$\tau_1 = iz(\gamma_\mu \not p \gamma_\nu \not p \gamma_\lambda \not p \gamma_\sigma \not p)$$

$$\tau_2 = iz(-m^2 \gamma_\mu \not p \gamma_\nu \not p \gamma_\lambda \gamma_\sigma)$$

$$\tau_3 = iz(-m^2 \gamma_\mu \not p \gamma_\nu \gamma_\lambda \not p \gamma_\sigma)$$

$$\tau_4 = iz(-m^2 \gamma_\mu \not p \gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_\sigma \not p)$$

$$\tau_5 = iz(-m^2 \gamma_\mu \gamma_\nu \not p \gamma_\lambda \not p \gamma_\sigma)$$

$$\tau_6 = \mathrm{iz}\,(-m^2\gamma_\mu\gamma_\nu\not{p}\gamma_\lambda\gamma_\sigma\not{p})$$

$$\tau_7 = \mathrm{iz}\,(-m^2\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda\not{p}\gamma_\sigma\not{p})$$

$$\tau_8 = \mathrm{iz}\,(m^4\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\sigma)$$

dır.

Şimdi bu terimleri hesaplayalım.

$$\tau_1 = \mathrm{iz}\,(\gamma_\mu\not{p}\gamma_\nu\not{p}\gamma_\lambda\not{p}\gamma_\sigma\not{p}) = \delta_{\mu\alpha}P_\alpha\,\mathrm{iz}\,(\gamma_\nu\not{p}\gamma_\lambda\not{p}\gamma_\sigma\not{p}) -$$

$$-\delta_{\mu\nu}\,\mathrm{iz}\,(\not{p}\not{p}\gamma_\lambda\not{p}\gamma_\sigma\not{p}) + \delta_{\mu\beta}P_\beta\,\mathrm{iz}\,(\not{p}\gamma_\nu\gamma_\lambda\not{p}\gamma_\sigma\not{p}) -$$

$$-\delta_{\mu\lambda}\,\mathrm{iz}\,(\not{p}\gamma_\nu\not{p}\not{p}\gamma_\sigma\not{p}) + \delta_{\mu\gamma}P_\gamma\,\mathrm{iz}\,(\not{p}\gamma_\nu\not{p}\gamma_\lambda\gamma_\sigma\not{p}) -$$

$$-\delta_{\mu\sigma}\,\mathrm{iz}\,(\not{p}\gamma_\nu\not{p}\gamma_\lambda\not{p}\not{p}) + \delta_{\mu\delta}P_\delta\,\mathrm{iz}\,(\not{p}\gamma_\nu\not{p}\gamma_\lambda\not{p}\gamma_\sigma) =$$

$$= P_\mu[\delta_{\nu\beta}P_\beta\,\mathrm{iz}\,(\gamma_\lambda\not{p}\gamma_\sigma\not{p}) - \delta_{\nu\lambda}\,\mathrm{iz}\,(\not{p}\not{p}\gamma_\sigma\not{p}) + \delta_{\nu\gamma}P_\gamma\,\mathrm{iz}\,(\not{p}\gamma_\lambda\gamma_\sigma\not{p}) -$$

$$-\delta_{\nu\sigma}\, iz(\not{p}\gamma_\lambda\not{p}\not{p}) + \delta_{\nu\delta}P_\delta\, iz(\not{p}\gamma_\lambda\not{p}\gamma_\sigma)\Big] - \delta_{\mu\nu}\Big[\delta_{\alpha\beta}P_\alpha P_\beta\, iz(\gamma_\lambda\not{p}\gamma_\sigma\not{p}) -$$

$$-\delta_{\alpha\lambda}P_\alpha\, iz(\not{p}\not{p}\gamma_\sigma\not{p}) + \delta_{\alpha\gamma}P_\alpha P_\gamma\, iz(\not{p}\gamma_\lambda\gamma_\sigma\not{p}) - \delta_{\alpha\sigma}P_\alpha\, iz(\not{p}\gamma_\lambda\not{p}\not{p}) +$$

$$+\delta_{\alpha\delta}P_\alpha P_\delta\, iz(\not{p}\gamma_\lambda\not{p}\gamma_\sigma)\Big] + P_\mu\Big[\delta_{\alpha\nu}P_\alpha\, iz(\gamma_\lambda\not{p}\gamma_\sigma\not{p}) - \delta_{\alpha\lambda}P_\alpha\, iz(\gamma_\nu\not{p}\gamma_\sigma\not{p}) +$$

$$+\delta_{\alpha\gamma}P_\alpha P_\gamma\, iz(\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\sigma\not{p}) - \delta_{\alpha\sigma}P_\alpha\, iz(\gamma_\nu\gamma_\lambda\not{p}\not{p}) + \delta_{\alpha\delta}P_\alpha P_\delta\, iz(\gamma_\nu\gamma_\lambda\not{p}\gamma_\sigma)\Big] -$$

$$-\delta_{\mu\lambda}\Big[\delta_{\alpha\nu}P_\alpha\, iz(\not{p}\not{p}\gamma_\sigma\not{p}) - \delta_{\alpha\beta}P_\alpha P_\beta\, iz(\gamma_\nu\not{p}\gamma_\sigma\not{p}) + \delta_{\alpha\lambda}P_\alpha P_\lambda\, iz(\gamma_\nu\not{p}\gamma_\sigma\not{p}) -$$

$$-\delta_{\alpha\sigma}P_\alpha\, iz(\gamma_\nu\not{p}\not{p}\not{p}) + \delta_{\alpha\delta}P_\alpha P_\delta\, iz(\gamma_\nu\not{p}\not{p}\gamma_\sigma)\Big] + P_\mu\Big[\delta_{\alpha\nu}P_\alpha\, iz(\not{p}\gamma_\lambda\gamma_\sigma\not{p}) -$$

$$-\delta_{\alpha\beta}P_\alpha P_\beta\, iz(\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\sigma\not{p}) + \delta_{\alpha\lambda}P_\alpha\, iz(\gamma_\nu\not{p}\gamma_\sigma\not{p}) - \delta_{\alpha\sigma}P_\alpha\, iz(\gamma_\nu\not{p}\gamma_\lambda\not{p}) +$$

$$+\delta_{\alpha\delta}P_\alpha P_\delta\, iz(\gamma_\nu\not{p}\gamma_\lambda\gamma_\sigma)\Big] - \delta_{\mu\sigma}\Big[\delta_{\alpha\nu}P_\alpha\, iz(\not{p}\gamma_\lambda\not{p}\not{p}) - \delta_{\alpha\beta}P_\alpha P_\beta\, iz(\gamma_\nu\gamma_\lambda\not{p}\not{p}) +$$

$$+\delta_{\alpha\lambda}P_\alpha\, iz(\gamma_\nu\not{p}\not{p}\not{p}) - \delta_{\alpha\gamma}P_\alpha P_\gamma\, iz(\gamma_\nu\not{p}\gamma_\lambda\not{p}) + \delta_{\alpha\delta}P_\alpha P_\delta\, iz(\gamma_\nu\not{p}\gamma_\lambda\not{p})\Big] +$$

$$+P_\mu\Big[\delta_{\alpha\nu}\, iz(\not{p}\gamma_\lambda\not{p}\gamma_\sigma) - \delta_{\alpha\beta}P_\alpha P_\beta\, iz(\gamma_\nu\gamma_\lambda\not{p}\gamma_\sigma) + \delta_{\alpha\lambda}P_\alpha\, iz(\gamma_\nu\not{p}\not{p}\gamma_\sigma) -$$

$$-\delta_{\alpha\gamma}P_\alpha P_\gamma\, iz(\gamma_\nu\not{p}\gamma_\lambda\gamma_\sigma) + \delta_{\alpha\sigma}P_\alpha\, iz(\gamma_\nu\not{p}\gamma_\lambda\not{p})\Big]$$

$$\tau_1 = P_\mu\Big[\delta_{\nu\beta}P_\beta\, 4(\delta_{\lambda\gamma}P_\gamma\delta_{\sigma\delta}P_\delta + \delta_{\lambda\delta}P_\delta\delta_{\gamma\sigma}P_\gamma - \delta_{\lambda\sigma}\delta_{\gamma\delta}P_\gamma P_\delta) -$$

$$-4\delta_{\nu\lambda}(\delta_{\beta\gamma}P_\beta P_\gamma\delta_{\sigma\delta}P_\delta + \delta_{\beta\delta}P_\beta P_\delta\delta_{\gamma\sigma}P_\gamma - \delta_{\beta\sigma}P_\beta\delta_{\gamma\delta}P_\gamma P_\delta) +$$

$$+4\delta_{\nu\gamma}P_\gamma(\delta_{\beta\lambda}P_\beta\delta_{\sigma\delta}P_\delta + \delta_{\beta\delta}P_\beta P_\delta\delta_{\lambda\sigma} - \delta_{\beta\sigma}P_\beta\delta_{\lambda\delta}P_\delta) -$$

$$- \delta_{\nu\sigma} 4 \left(\delta_{\beta\lambda} P_\beta \delta_{\gamma\delta} P_\gamma P_\delta + \delta_{\beta\delta} P_\beta P_\delta \delta_{\lambda\gamma} P_\gamma - \delta_{\beta\gamma} P_\beta P_\gamma \delta_{\lambda\delta} P_\delta \right) +$$

$$+ 4 \delta_{\nu\delta} P_\delta \left(\delta_{\beta\lambda} P_\beta \delta_{\gamma\sigma} P_\gamma + \delta_{\beta\sigma} P_\beta \delta_{\lambda\gamma} P_\gamma - \delta_{\beta\gamma} P_\beta P_\gamma \delta_{\lambda\sigma} \right) \Big] -$$

$$- \delta_{\mu\nu} \Big[\delta_{\alpha\beta} P_\alpha P_\beta 4 \left(\delta_{\lambda\gamma} P_\gamma \delta_{\sigma\delta} P_\delta + \delta_{\lambda\delta} P_\delta \delta_{\gamma\sigma} P_\gamma - \delta_{\lambda\sigma} \delta_{\gamma\delta} P_\gamma P_\delta \right) -$$

$$- \delta_{\alpha\lambda} P_\alpha 4 \left(\delta_{\beta\gamma} P_\beta P_\gamma \delta_{\sigma\delta} P_\delta + \delta_{\beta\delta} P_\beta P_\delta \delta_{\gamma\sigma} P_\gamma - \delta_{\beta\sigma} P_\beta \delta_{\gamma\delta} P_\gamma P_\delta \right) +$$

$$+ \delta_{\alpha\gamma} P_\alpha P_\gamma 4 \left(\delta_{\beta\lambda} P_\beta \delta_{\sigma\delta} P_\delta + \delta_{\beta\delta} P_\beta P_\delta \delta_{\lambda\sigma} - \delta_{\beta\sigma} P_\beta \delta_{\lambda\delta} P_\delta \right) -$$

$$- \delta_{\alpha\sigma} P_\alpha 4 \left(\delta_{\beta\lambda} P_\beta \delta_{\gamma\delta} P_\gamma P_\delta + \delta_{\beta\delta} P_\beta P_\delta \delta_{\lambda\gamma} P_\gamma - \delta_{\beta\gamma} P_\beta P_\gamma \delta_{\lambda\delta} P_\delta \right) +$$

$$+ \delta_{\alpha\delta} P_\alpha P_\delta 4 \left(\delta_{\beta\lambda} P_\beta \delta_{\gamma\sigma} P_\gamma + \delta_{\beta\sigma} P_\beta \delta_{\lambda\gamma} P_\gamma - \delta_{\beta\gamma} P_\beta P_\gamma \delta_{\lambda\sigma} \right) \Big] +$$

$$+ P_\mu \Big[\delta_{\alpha\nu} P_\alpha 4 \left(\delta_{\lambda\gamma} P_\gamma \delta_{\sigma\delta} P_\delta + \delta_{\lambda\delta} P_\delta \delta_{\gamma\sigma} P_\gamma - \delta_{\lambda\sigma} \delta_{\gamma\delta} P_\gamma P_\delta \right) -$$

$$- \delta_{\alpha\lambda} P_\alpha 4 \left(\delta_{\nu\gamma} P_\gamma \delta_{\sigma\delta} P_\delta + \delta_{\nu\delta} P_\delta \delta_{\gamma\sigma} P_\gamma - \delta_{\nu\sigma} \delta_{\gamma\delta} P_\gamma P_\delta \right) +$$

$$+ \delta_{\alpha\gamma} P_\alpha P_\gamma 4 \left(\delta_{\nu\lambda} \delta_{\sigma\delta} P_\delta + \delta_{\nu\delta} P_\delta \delta_{\lambda\sigma} - \delta_{\nu\sigma} \delta_{\lambda\delta} P_\delta \right) -$$

$$- \delta_{\alpha\sigma} P_\alpha 4 \left(\delta_{\nu\lambda} \delta_{\gamma\delta} P_\gamma P_\delta + \delta_{\nu\delta} P_\delta \delta_{\lambda\gamma} P_\gamma - \delta_{\nu\gamma} P_\gamma \delta_{\lambda\delta} P_\delta \right) +$$

$$+ \delta_{\alpha\delta} P_\alpha P_\delta 4 \left(\delta_{\nu\lambda} \delta_{\gamma\sigma} P_\gamma + \delta_{\nu\sigma} \delta_{\lambda\gamma} P_\gamma - \delta_{\nu\gamma} P_\gamma \delta_{\lambda\sigma} \right) \Big] -$$

$$- \delta_{\mu\lambda} \Big[\delta_{\alpha\nu} P_\alpha 4 \left(\delta_{\beta\gamma} P_\beta P_\gamma \delta_{\sigma\delta} P_\delta + \delta_{\beta\delta} P_\beta P_\delta \delta_{\gamma\sigma} P_\gamma - \delta_{\beta\sigma} P_\beta \delta_{\gamma\delta} P_\gamma P_\delta \right) -$$

$$- \delta_{\alpha\beta} P_\alpha P_\beta 4 \left(\delta_{\nu\gamma} P_\gamma \delta_{\sigma\delta} P_\delta + \delta_{\nu\delta} P_\delta \delta_{\gamma\sigma} P_\gamma - \delta_{\nu\sigma} \delta_{\gamma\delta} P_\gamma P_\delta \right) +$$

$$+ \delta_{\alpha\gamma} P_\alpha P_\gamma 4 (\delta_{\nu\beta} P_\beta \delta_{\sigma\delta} P_\delta + \delta_{\nu\delta} P_\delta \delta_{\beta\sigma} P_\beta - \delta_{\nu\sigma} \delta_{\beta\delta} P_\beta P_\delta) -$$

$$- \delta_{\alpha\sigma} P_\alpha 4 (\delta_{\nu\beta} P_\beta \delta_{\gamma\delta} P_\gamma P_\delta + \delta_{\nu\delta} P_\delta \delta_{\beta\gamma} P_\beta P_\gamma - \delta_{\nu\gamma} P_\gamma \delta_{\beta\delta} P_\beta P_\delta) +$$

$$+ \delta_{\alpha\delta} P_\alpha P_\delta 4 (\delta_{\nu\beta} P_\beta \delta_{\gamma\sigma} P_\gamma + \delta_{\nu\sigma} \delta_{\beta\gamma} P_\beta P_\gamma - \delta_{\nu\gamma} P_\gamma \delta_{\beta\sigma} P_\beta)] +$$

$$+ P_\mu \Big[\delta_{\alpha\nu} P_\alpha 4 (\delta_{\beta\lambda} P_\beta \delta_{\sigma\delta} P_\delta + \delta_{\beta\delta} P_\beta P_\delta \delta_{\lambda\sigma} - \delta_{\beta\sigma} P_\beta \delta_{\lambda\delta} P_\delta) -$$

$$- \delta_{\alpha\beta} P_\alpha P_\beta 4 (\delta_{\nu\lambda} \delta_{\sigma\delta} P_\delta + \delta_{\nu\delta} P_\delta \delta_{\lambda\sigma} - \delta_{\nu\sigma} \delta_{\lambda\delta} P_\delta) +$$

$$+ \delta_{\alpha\lambda} P_\alpha 4 (\delta_{\nu\beta} P_\beta \delta_{\sigma\delta} P_\delta + \delta_{\nu\delta} P_\delta \delta_{\beta\sigma} P_\beta - \delta_{\nu\sigma} \delta_{\beta\delta} P_\beta P_\delta) -$$

$$- \delta_{\alpha\sigma} P_\alpha 4 (\delta_{\nu\beta} P_\beta \delta_{\lambda\delta} P_\delta + \delta_{\nu\delta} P_\delta \delta_{\beta\lambda} P_\beta - \delta_{\nu\lambda} \delta_{\beta\delta} P_\beta P_\delta) +$$

$$+ \delta_{\alpha\delta} P_\alpha P_\delta 4 (\delta_{\nu\beta} P_\beta \delta_{\lambda\sigma} + \delta_{\nu\sigma} \delta_{\beta\lambda} P_\beta - \delta_{\nu\lambda} \delta_{\beta\sigma} P_\beta) \Big] -$$

$$- \delta_{\mu\sigma} \Big[\delta_{\alpha\nu} P_\alpha 4 (\delta_{\beta\lambda} P_\beta \delta_{\gamma\delta} P_\gamma P_\delta + \delta_{\beta\delta} P_\beta P_\delta \delta_{\lambda\gamma} P_\gamma - \delta_{\beta\gamma} P_\beta P_\gamma \delta_{\lambda\delta} P_\delta) -$$

$$- \delta_{\alpha\beta} P_\alpha P_\beta 4 (\delta_{\nu\lambda} \delta_{\gamma\delta} P_\gamma P_\delta + \delta_{\nu\delta} P_\delta \delta_{\lambda\gamma} P_\gamma - \delta_{\nu\gamma} P_\gamma \delta_{\lambda\delta} P_\delta) +$$

$$+ \delta_{\alpha\lambda} P_\alpha 4 (\delta_{\nu\beta} P_\beta \delta_{\gamma\delta} P_\gamma P_\delta + \delta_{\nu\delta} P_\delta \delta_{\beta\gamma} P_\beta P_\gamma - \delta_{\nu\gamma} P_\gamma \delta_{\beta\gamma} P_\beta P_\gamma) -$$

$$- \delta_{\alpha\gamma} P_\alpha P_\gamma 4 (\delta_{\nu\beta} P_\beta \delta_{\lambda\delta} P_\delta + \delta_{\nu\delta} P_\delta \delta_{\beta\lambda} P_\beta - \delta_{\nu\lambda} \delta_{\beta\delta} P_\beta P_\delta) +$$

$$+ \delta_{\alpha\delta} P_\alpha P_\delta 4 (\delta_{\nu\beta} P_\beta \delta_{\lambda\gamma} P_\gamma + \delta_{\nu\gamma} P_\gamma \delta_{\beta\lambda} P_\beta - \delta_{\nu\lambda} \delta_{\beta\gamma} P_\beta P_\gamma) \Big] +$$

$$+ \delta_{\mu\delta} P_\delta \Big[\delta_{\alpha\nu} P_\alpha 4 (\delta_{\beta\lambda} P_\beta \delta_{\gamma\sigma} P_\gamma + \delta_{\beta\sigma} P_\beta \delta_{\lambda\gamma} P_\gamma - \delta_{\beta\gamma} P_\beta P_\gamma \delta_{\lambda\sigma}) -$$

$$- \delta_{\alpha\beta} P_\alpha P_\beta 4 (\delta_{\nu\lambda} \delta_{\delta\sigma} P_\delta + \delta_{\nu\sigma} \delta_{\lambda\gamma} P_\gamma - \delta_{\nu\gamma} P_\gamma \delta_{\lambda\sigma}) +$$

$$+ \delta_{\alpha\lambda} P_\alpha 4 (\delta_{\nu\beta} P_\beta \delta_{\gamma\sigma} P_\gamma + \delta_{\nu\sigma} \delta_{\beta\gamma} P_\beta P_\gamma - \delta_{\nu\gamma} P_\gamma \delta_{\beta\sigma} P_\beta) -$$

$$- \delta_{\alpha\gamma} P_\alpha P_\gamma 4 (\delta_{\nu\beta} P_\beta \delta_{\lambda\sigma} + \delta_{\nu\sigma} \delta_{\beta\lambda} P_\beta - \delta_{\nu\lambda} \delta_{\beta\sigma} P_\beta) +$$

$$+ \delta_{\alpha\sigma} P_\alpha 4 (\delta_{\nu\beta} P_\beta \delta_{\nu\gamma} P_\gamma + \delta_{\nu\gamma} P_\gamma \delta_{\beta\lambda} P_\beta - \delta_{\nu\lambda} \delta_{\beta\gamma} P_\beta P_\gamma)]$$

$$\tau_1 = P_\mu \Big[4P_\nu (P_\lambda P_\sigma + P_\lambda P_\sigma - P^2 \delta_{\lambda\sigma}) - 4 \delta_{\nu\lambda} (P^2 P_\delta \delta_{\sigma\delta} + P^2 P_\sigma -$$

$$- P^2 P_\beta \delta_{\beta\sigma}) + 4 P_\nu (P_\lambda P_\sigma + P^2 \delta_{\lambda\sigma} - P_\sigma P_\lambda) - 4 \delta_{\nu\sigma} (P^2 P_\lambda + P^2 P_\lambda -$$

$$- P^2 P_\lambda) + 4 P_\nu (P_\lambda P_\sigma + P_\sigma P_\lambda - P^2 \delta_{\lambda\sigma}) \Big] - \delta_{\mu\nu} \Big[4P^2 (P_\lambda P_\sigma + P_\lambda P_\sigma -$$

$$- P^2 \delta_{\lambda\sigma}) - 4 P_\lambda (P^2 P_\sigma + P^2 P_\sigma - P^2 P_\sigma) + 4 P^2 (P_\lambda P_\sigma + P^2 \delta_{\lambda\sigma} - P_\sigma P_\lambda) -$$

$$- 4 P_\sigma (P^2 P_\lambda + P^2 P_\lambda - P^2 P_\lambda) + 4 P^2 (P_\lambda P_\sigma + P_\sigma P_\lambda - P^2 \delta_{\lambda\sigma}) \Big] +$$

$$+ P_\mu \Big[4 P_\nu (P_\lambda P_\sigma + P_\lambda P_\sigma - P^2 \delta_{\lambda\sigma}) - 4 P_\lambda (P_\nu P_\sigma + P_\nu P_\sigma - P^2 \delta_{\nu\sigma}) +$$

$$+ 4 P^2 (P_\sigma \delta_{\nu\lambda} + P_\nu \delta_{\lambda\sigma} - P_\lambda \delta_{\nu\sigma}) - 4 P_\sigma (P^2 \delta_{\nu\lambda} + P_\nu P_\lambda - P_\nu P_\lambda) +$$

$$+ 4 P^2 (P_\sigma \delta_{\nu\lambda} + P_\lambda \delta_{\nu\sigma} - P_\nu \delta_{\lambda\sigma}) \Big] - \delta_{\mu\lambda} \Big[4 P_\nu (P^2 P_\sigma + P^2 P_\sigma - P^2 P_\sigma) -$$

$$- 4 P^2 (P_\nu P_\sigma + P_\nu P_\sigma - P^2 \delta_{\nu\sigma}) + 4 P^2 (P_\nu P_\sigma + P_\nu P_\sigma - P^2 \delta_{\nu\sigma}) -$$

$$- 4 P_\sigma (P^2 P_\nu + P^2 P_\nu - P^2 P_\nu) + 4 P^2 (P_\nu P_\sigma + P^2 \delta_{\nu\sigma} - P_\nu P_\sigma) \Big] +$$

$$P_\mu\Big[4P_\nu(P_\lambda P_\sigma + P^2\delta_{\lambda\sigma} - P_\sigma P_\lambda) - 4P^2(P_\sigma\delta_{\nu\lambda} + P_\nu\delta_{\lambda\sigma} - P_\lambda\delta_{\nu\sigma}) +$$

$$+ 4P_\lambda(P_\nu P_\sigma + P_\nu P_\sigma - P^2\delta_{\nu\sigma}) - 4P_\sigma(P_\nu P_\lambda + P_\nu P_\lambda - P^2\delta_{\nu\lambda}) +$$

$$+ 4P^2(P_\nu\delta_{\lambda\sigma} + P_\lambda\delta_{\nu\sigma} - P_\sigma\delta_{\nu\lambda})\Big] - \delta_{\mu\sigma}\Big[4P_\nu(P^2P_\lambda + P^2P_\lambda - P^2P_\lambda) -$$

$$- 4P^2(P^2\delta_{\nu\lambda} + P_\nu P_\lambda - P_\nu P_\lambda) + 4P_\lambda(P^2P_\nu + P^2P_\nu - P^2P_\nu) -$$

$$- 4P^2(P_\nu P_\lambda + P_\nu P_\lambda - P^2\delta_{\nu\lambda}) + 4P^2(P_\nu P_\lambda + P_\nu P_\lambda - P^2\delta_{\nu\lambda})\Big] +$$

$$+ P_\mu\Big[4P_\nu(P_\lambda P_\sigma + P_\lambda P_\sigma - P^2\delta_{\lambda\sigma}) - 4P^2(P_\sigma\delta_{\nu\lambda} + P_\lambda\delta_{\nu\sigma} - P_\nu\delta_{\lambda\sigma}) +$$

$$+ 4P_\lambda(P_\nu P_\sigma + P^2\delta_{\nu\sigma} - P_\nu P_\sigma) - 4P^2(P_\nu\delta_{\lambda\sigma} + P_\lambda\delta_{\nu\sigma} - P_\sigma\delta_{\nu\lambda}) +$$

$$+ 4P_\sigma(P_\nu P_\lambda + P_\nu P_\lambda - P^2\delta_{\nu\lambda})\Big]$$

$$\tau_1 = P_\mu(8P_\nu P_\lambda P_\sigma - 4P^2P_\nu\delta_{\lambda\sigma} - 8P^2P_\sigma\delta_{\nu\lambda} + 4P^2P_\sigma\delta_{\nu\lambda} + 4P_\nu P_\lambda P_\sigma -$$

$$- 4P_\nu P_\sigma P_\lambda + 4P^2P_\nu\delta_{\lambda\sigma} - 4P^2P_\lambda\delta_{\nu\sigma} + 4P_\nu P_\lambda P_\sigma + 4P_\nu P_\sigma P_\lambda -$$

$$- 4P^2P_\nu\delta_{\lambda\sigma}) - \delta_{\mu\nu}(8P^2P_\lambda P_\sigma - 4(P^2)^2\delta_{\lambda\sigma} - 4P^2P_\lambda P_\sigma + 4P^2P_\lambda P_\sigma +$$

$$+ 4(P^2)^2\delta_{\lambda\sigma} - 4P^2P_\sigma P_\lambda - 4P^2P_\sigma P_\lambda + 4P^2P_\lambda P_\sigma + 4P^2P_\sigma P_\lambda - 4(P^2)^2\delta_{\lambda\sigma})$$

$$+ P_\mu(8P_\nu P_\lambda P_\sigma - 4P^2P_\nu\delta_{\lambda\sigma} - 8P_\lambda P_\nu P_\sigma + 4P^2P_\lambda\delta_{\nu\sigma} + 4P^2P_\sigma\delta_{\nu\lambda} +$$

$$+ 4P^2P_\nu\delta_{\lambda\sigma} - 4P^2P_\lambda\delta_{\nu\sigma} - 4P^2P_\sigma\delta_{\nu\lambda} - 4P_\sigma P_\nu P_\lambda + 4P_\sigma P_\nu P_\lambda +$$

$$+ 4P^2P_\sigma\delta_{\nu\lambda} + 4P^2P_\lambda\delta_{\nu\sigma} - 4P^2P_\nu\delta_{\lambda\sigma}) - \delta_{\mu\lambda}(4P^2P_\nu P_\sigma - 8P^2P_\nu P_\sigma +$$

$$+ 4(P^2)^2\delta_{\nu\sigma} + 8P^2P_\nu P_\sigma - 4(P^2)^2\delta_{\nu\sigma} - 4P^2P_\sigma P_\nu + 4(P^2)^2\delta_{\nu\sigma}) +$$

$$+ P_\mu(4P_\nu P_\lambda P_\sigma + 4P^2P_\nu\delta_{\lambda\sigma} - 4P_\nu P_\sigma P_\lambda - 4P^2P_\sigma\delta_{\nu\lambda} - 4P^2P_\nu\delta_{\lambda\sigma} +$$

$$+ 4P^2P_\lambda\delta_{\nu\sigma} + 8P_\lambda P_\nu P_\sigma - 4P^2P_\lambda\delta_{\nu\sigma} - 8P_\sigma P_\nu P_\lambda + 4P^2P_\sigma\delta_{\nu\lambda} +$$

$$+ 4P^2P_\nu\delta_{\lambda\sigma} + 4P^2P_\lambda\delta_{\nu\sigma} - 4P^2P_\sigma\delta_{\nu\lambda}) - \delta_{\mu\sigma}(4P^2P_\nu P_\lambda - 4(P^2)^2\delta_{\nu\lambda} +$$

$$+ 4P^2P_\lambda P_\nu - 8P^2P_\nu P_\lambda + 4(P^2)^2\delta_{\nu\lambda} + 8P^2P_\nu P_\lambda - 4(P^2)^2\delta_{\nu\lambda}) +$$

$$+ P_\mu(4P_\nu P_\lambda P_\sigma + 4P_\nu P_\sigma P_\lambda - 4P^2P_\sigma\delta_{\nu\lambda} - 4P^2P_\lambda\delta_{\nu\sigma} + 4P^2P_\nu\delta_{\lambda\sigma} +$$

$$+ 4P^2P_\lambda\delta_{\nu\sigma} - 4P^2P_\nu\delta_{\lambda\sigma} - 4P^2P_\lambda\delta_{\nu\sigma} + 4P^2P_\sigma\delta_{\nu\lambda} + 8P_\sigma P_\nu P_\lambda -$$

$$- 4P^2P_\sigma\delta_{\nu\lambda})$$

$$\tau_1 = P_\mu(16P_\nu P_\lambda P_\sigma - 4P^2P_\sigma\delta_{\nu\lambda} - 4P^2P_\lambda\delta_{\nu\sigma} - 4P^2P_\nu\delta_{\lambda\sigma}) -$$

$$- \delta_{\mu\nu}(12P^2P_\lambda P_\sigma - 4P^4\delta_{\lambda\sigma} - 4P^2P_\sigma P_\lambda) + P_\mu(8P_\nu P_\lambda P_\sigma - 8P_\lambda P_\nu P_\sigma -$$

$$- 4P^2P_\nu\delta_{\lambda\sigma} + 4P^2P_\lambda\delta_{\nu\sigma} + 4P^2P_\sigma\delta_{\nu\lambda}) - \delta_{\mu\lambda}(4P^2P_\nu P_\sigma + 4P^4\delta_{\nu\sigma} -$$

$$- 4P^2P_\sigma P_\nu) + P_\mu(4P_\nu P_\lambda P_\sigma - 4P_\nu P_\sigma P_\lambda + 8P_\lambda P_\nu P_\sigma + 4P^2P_\nu\delta_{\lambda\sigma} +$$

$$+ 4P^2P_\lambda\delta_{\nu\sigma} - 4P^2P_\sigma\delta_{\nu\lambda}) - \delta_{\mu\nu}(4P^2P_\nu P_\lambda + 4P^2P_\lambda P_\sigma - 4P^4\delta_{\nu\sigma}) +$$

$$+ P_\mu \left(4P_\nu P_\lambda P_\sigma + 4P_\nu P_\sigma P_\lambda + 8P_\sigma P_\nu P_\lambda - 4P^2 P_\sigma \delta_{\nu\lambda} - 4P^2 P_\lambda \delta_{\nu\sigma} - \right.$$

$$\left. - 4P^2 P_\nu \delta_{\lambda\sigma} \right)$$

$$\tau_1 = 16 P_\mu P_\nu P_\lambda P_\sigma + 8 P_\mu P_\nu P_\lambda P_\sigma - 8 P_\mu P_\lambda P_\nu P_\sigma + 4 P_\mu P_\nu P_\lambda P_\sigma -$$

$$- 4 P_\mu P_\nu P_\sigma P_\lambda + 8 P_\mu P_\lambda P_\nu P_\sigma - 8 P_\mu P_\sigma P_\nu P_\lambda + 4 P_\mu P_\nu P_\lambda P_\sigma +$$

$$+ 4 P_\mu P_\nu P_\sigma P_\lambda + 8 P_\mu P_\sigma P_\nu P_\lambda + 4 P^4 \delta_{\mu\nu} \delta_{\lambda\sigma} - 4 P^4 \delta_{\mu\lambda} \delta_{\nu\sigma} +$$

$$+ 4 P^4 \delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\lambda} - 4P^2 P_\nu P_\sigma \delta_{\mu\lambda} - 4P^2 P_\mu P_\sigma \delta_{\nu\lambda} - P P^2 P_\mu P_\lambda \delta_{\nu\sigma} -$$

$$- 4P^2 P_\mu P_\nu \delta_{\lambda\sigma} - 12 P^2 P_\lambda P_\sigma \delta_{\mu\nu} + 4P^2 P_\sigma P_\lambda \delta_{\mu\nu} - 4P^2 P_\mu P_\nu \delta_{\lambda\sigma} +$$

$$+ 4P^2 P_\mu P_\lambda \delta_{\nu\sigma} + 4P^2 P_\mu P_\sigma \delta_{\nu\lambda} + 4P^2 P_\sigma P_\nu \delta_{\mu\lambda} + 4P^2 P_\mu P_\nu \delta_{\lambda\sigma} +$$

$$+ 4P^2 P_\mu P_\lambda \delta_{\nu\sigma} - 4P^2 P_\mu P_\sigma \delta_{\nu\lambda} - 4P^2 P_\nu P_\lambda \delta_{\mu\sigma} - 4P^2 P_\lambda P_\nu \delta_{\mu\sigma} -$$

$$- 4P^2 P_\mu P_\sigma \delta_{\nu\lambda} - 4P^2 P_\mu P_\lambda \delta_{\nu\sigma} - 4 P^2 P_\mu P_\nu \delta_{\lambda\sigma}$$

$$\tau_1 = 32 P_\mu P_\nu P_\lambda P_\sigma + 4P^4 \left(\delta_{\mu\nu} \delta_{\lambda\sigma} + \delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\lambda} - \delta_{\mu\lambda} \delta_{\nu\sigma} \right) -$$

$$- 8P^2 P_\mu P_\sigma \delta_{\nu\lambda} - 8P^2 P_\mu P_\nu \delta_{\lambda\sigma} - 4P^2 P_\nu P_\lambda \delta_{\mu\sigma} - 4P^2 P_\lambda P_\nu \delta_{\mu\sigma} -$$

$$- 4P^2 P_\nu P_\sigma \delta_{\mu\lambda} + 4P^2 P_\sigma P_\nu \delta_{\mu\lambda} - 12 P^2 P_\lambda P_\sigma \delta_{\mu\nu} + 4 P^2 P_\sigma P_\lambda \delta_{\mu\nu}$$

Böylece

$$\tau_1 = iz(\gamma_\mu \not{p} \gamma_\nu \not{p} \gamma_\lambda \not{p} \gamma_\sigma \not{p}) = 32 P_\mu P_\nu P_\lambda P_\sigma + 4P^4(\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\sigma} +$$

$$+ \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\lambda} - \delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\sigma}) - 8P^2(P_\mu P_\sigma \delta_{\nu\lambda} + P_\mu P_\nu \delta_{\lambda\sigma} +$$

$$+ P_\nu P_\lambda \delta_{\mu\sigma} + P_\lambda P_\sigma \delta_{\mu\nu})$$

bulunur.

$$\tau_2 = iz(-\gamma_\mu \not{p} \gamma_\nu \not{p} m^2 \gamma_\lambda \gamma_\sigma) = -m^2 iz(\gamma_\mu \not{p} \gamma_\nu \not{p} \gamma_\lambda \gamma_\sigma) =$$

$$= -m^2 \Big[\delta_{\mu\alpha} P_\alpha iz(\gamma_\nu \not{p} \gamma_\lambda \gamma_\sigma) - \delta_{\mu\nu} iz(\not{p}\not{p}\gamma_\lambda\gamma_\sigma) +$$

$$+ \delta_{\mu\beta} P_\beta iz(\not{p}\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\sigma) - \delta_{\mu\lambda} iz(\not{p}\gamma_\nu\not{p}\gamma_\sigma) + \delta_{\mu\sigma} iz(\not{p}\gamma_\nu\not{p}\gamma_\lambda)\Big] =$$

$$= -m^2 \Big[\delta_{\mu\alpha} P_\alpha 4(\delta_{\nu\beta} P_\beta \delta_{\lambda\sigma} + \delta_{\nu\sigma}\delta_{\beta\lambda} P_\beta - \delta_{\nu\lambda}\delta_{\beta\sigma} P_\beta) -$$

$$- \delta_{\mu\nu} 4(\delta_{\alpha\beta} P_\alpha P_\beta \delta_{\lambda\sigma} + \delta_{\alpha\sigma} P_\alpha \delta_{\beta\lambda} P_\beta - \delta_{\alpha\lambda} P_\alpha \delta_{\beta\sigma} P_\beta) +$$

$$+ \delta_{\mu\beta} P_\beta 4(\delta_{\alpha\nu} P_\alpha \delta_{\lambda\sigma} + \delta_{\alpha\sigma} P_\alpha \delta_{\nu\lambda} - \delta_{\alpha\lambda} P_\alpha \delta_{\nu\sigma}) -$$

$$- \delta_{\mu\lambda} 4(\delta_{\alpha\nu} P_\alpha \delta_{\beta\sigma} P_\beta + \delta_{\alpha\sigma} P_\alpha \delta_{\nu\beta} P_\beta - \delta_{\alpha\beta} P_\alpha P_\beta \delta_{\nu\sigma}) +$$

$$+ \delta_{\mu\sigma} 4(\delta_{\alpha\nu} P_\alpha \delta_{\beta\lambda} P_\beta + \delta_{\alpha\lambda} P_\alpha \delta_{\nu\beta} P_\beta - \delta_{\alpha\beta} P_\alpha P_\beta \delta_{\nu\lambda})\Big] =$$

$$= -m^2 \Big[4P_\mu \delta_{\nu\beta} P_\beta \delta_{\lambda\sigma} + 4P_\mu \delta_{\nu\sigma}\delta_{\beta\lambda} P_\beta - 4P_\mu \delta_{\nu\lambda}\delta_{\beta\sigma} P_\beta -$$

$$- 4\delta_{\mu\nu}\delta_{\alpha\beta}P_\alpha P_\beta \delta_{\lambda\sigma} - 4\delta_{\mu\nu}\delta_{\alpha\sigma}P_\alpha \delta_{\beta\lambda}P_\beta + 4\delta_{\mu\nu}\delta_{\alpha\lambda}P_\alpha \delta_{\beta\sigma}P_\beta +$$

$$+ 4P_\mu \delta_{\alpha\nu}P_\alpha \delta_{\lambda\sigma} + 4P_\mu \delta_{\alpha\sigma}P_\alpha \delta_{\nu\lambda} - 4P_\mu \delta_{\alpha\lambda}P_\alpha \delta_{\nu\sigma} - 4\delta_{\mu\lambda}\delta_{\alpha\nu}P_\alpha \delta_{\beta\sigma}P_\beta -$$

$$- 4\delta_{\mu\lambda}\delta_{\alpha\sigma}P_\alpha \delta_{\nu\beta}P_\beta + 4\delta_{\mu\lambda}\delta_{\alpha\beta}P_\alpha P_\beta \delta_{\nu\sigma} + 4\delta_{\mu\sigma}\delta_{\alpha\nu}P_\alpha \delta_{\beta\lambda}P_\beta +$$

$$+ 4\delta_{\mu\sigma}\delta_{\alpha\lambda}P_\alpha \delta_{\nu\beta}P_\beta - 4\delta_{\mu\sigma}\delta_{\alpha\beta}P_\alpha P_\beta \delta_{\nu\lambda}\Big]$$

$$\tau_2 = \mathrm{iz}(-\gamma_\mu \not p \gamma_\nu \not p\, m^2 \gamma_\lambda \gamma_\sigma) = -m^2\Big[4P_\mu P_\nu \delta_{\lambda\sigma} + 4P_\mu P_\lambda \delta_{\nu\sigma} -$$

$$- 4P_\mu P_\sigma \delta_{\nu\lambda} - 4P^2\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\sigma} - 4P_\sigma P_\lambda \delta_{\mu\nu} + 4P_\lambda P_\sigma \delta_{\mu\nu} + 4P_\mu P_\nu \delta_{\lambda\sigma} +$$

$$+ 4P_\mu P_\sigma \delta_{\nu\lambda} - 4P_\mu P_\lambda \delta_{\nu\sigma} - 4P_\nu P_\sigma \delta_{\mu\lambda} - 4P_\sigma P_\nu \delta_{\mu\lambda} + 4P^2\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\sigma} +$$

$$+ 4P_\nu P_\lambda \delta_{\mu\sigma} + 4P_\lambda P_\nu \delta_{\mu\sigma} - 4P^2\delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\lambda}\Big]$$

$$\tau_3 = -m^2\,\mathrm{iz}(\gamma_\mu \not p \gamma_\nu \gamma_\lambda \not p \gamma_\sigma) = -m^2\Big[\delta_{\mu\alpha}P_\alpha\,\mathrm{iz}(\gamma_\nu \gamma_\lambda \not p \gamma_\sigma) -$$

$$- \delta_{\mu\nu}\,\mathrm{iz}(\not p \gamma_\lambda \not p \gamma_\sigma) + \delta_{\mu\lambda}\,\mathrm{iz}(\not p \gamma_\nu \not p \gamma_\sigma) - \delta_{\mu\gamma}P_\gamma\,\mathrm{iz}(\not p \gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_\sigma) +$$

$$+ \delta_{\mu\sigma}\,\mathrm{iz}(\not p \gamma_\nu \gamma_\lambda \not p)\Big]$$

$$\tau_4 = -m^2\,\mathrm{iz}(\gamma_\mu \not p \gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_\sigma \not p) = -m^2\Big[\delta_{\mu\alpha}P_\alpha\,\mathrm{iz}(\gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_\sigma \not p) -$$

$$- \delta_{\mu\nu}\,\mathrm{iz}(\not p \gamma_\lambda \gamma_\sigma \not p) + \delta_{\mu\lambda}\,\mathrm{iz}(\not p \gamma_\nu \gamma_\sigma \not p) - \delta_{\mu\sigma}\,\mathrm{iz}(\not p \gamma_\nu \gamma_\lambda \not p) +$$

$$+ \delta_{\mu\delta}P_\delta\,\mathrm{iz}(\not p \gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_\sigma)\Big]$$

$$\tau_5 = -m^2\,\mathrm{iz}(\gamma_\mu\gamma_\nu \not{p}\gamma_\lambda \not{p}\gamma_\sigma) = -m^2\Big[\delta_{\mu\nu}\,\mathrm{iz}(\not{p}\gamma_\lambda\not{p}\gamma_\sigma) -$$

$$- \delta_{\mu\beta}P_\beta\,\mathrm{iz}(\gamma_\nu\gamma_\lambda\not{p}\gamma_\sigma) + \delta_{\mu\lambda}\,\mathrm{iz}(\gamma_\nu\not{p}\not{p}\gamma_\sigma) - \delta_{\mu\gamma}P_\gamma\,\mathrm{iz}(\gamma_\nu\not{p}\gamma_\lambda\gamma_\sigma) +$$

$$+ \delta_{\mu\sigma}\,\mathrm{iz}(\gamma_\nu\not{p}\gamma_\lambda\not{p})\Big]$$

$$\tau_6 = -m^2\,\mathrm{iz}(\gamma_\mu\gamma_\nu\not{p}\gamma_\lambda\gamma_\sigma\not{p}) = -m^2\Big[\delta_{\mu\nu}\,\mathrm{iz}(\not{p}\gamma_\lambda\gamma_\sigma\not{p}) -$$

$$- \delta_{\mu\beta}P_\beta\,\mathrm{iz}(\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\sigma\not{p}) + \delta_{\mu\lambda}\,\mathrm{iz}(\gamma_\nu\not{p}\gamma_\sigma\not{p}) - \delta_{\mu\sigma}\,\mathrm{iz}(\gamma_\nu\not{p}\gamma_\lambda\not{p}) +$$

$$+ \delta_{\mu\delta}P_\delta\,\mathrm{iz}(\gamma_\nu\not{p}\gamma_\lambda\gamma_\sigma)\Big]$$

$$\tau_7 = -m^2\,\mathrm{iz}(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda\not{p}\gamma_\sigma\not{p}) = -m^2\Big[\delta_{\mu\nu}\,\mathrm{iz}(\gamma_\lambda\not{p}\gamma_\sigma\not{p}) -$$

$$- \delta_{\mu\lambda}\,\mathrm{iz}(\gamma_\nu\not{p}\gamma_\sigma\not{p}) + \delta_{\mu\gamma}P_\gamma\,\mathrm{iz}(\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\sigma\not{p}) -$$

$$- \delta_{\mu\sigma}\,\mathrm{iz}(\gamma_\nu\gamma_\lambda\not{p}\not{p}) + \delta_{\mu\delta}P_\delta\,\mathrm{iz}(\gamma_\nu\gamma_\lambda\not{p}\gamma_\sigma)\Big]$$

$$\tau_8 = m^4\,\mathrm{iz}(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\sigma) = 4m^4(\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\sigma} + \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\lambda} - \delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\sigma})$$

$$\tau_1 + \tau_8 = \mathrm{iz}(\gamma_\mu\not{p}\gamma_\nu\not{p}\gamma_\lambda\not{p}\gamma_\sigma\not{p}) + \mathrm{iz}(m^4\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\sigma) =$$

$$= 32P_\mu P_\nu P_\lambda P_\sigma + 4P^4(\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\sigma} + \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\lambda} - \delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\sigma}) -$$

$$- 8P^2(P_\mu P_\nu\delta_{\lambda\sigma} + P_\nu P_\lambda\delta_{\mu\sigma} + P_\mu P_\sigma\delta_{\nu\lambda} + P_\lambda P_\sigma\delta_{\mu\nu}) +$$

$$+ 4m^4(\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\sigma} + \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\lambda} - \delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\sigma})$$

$$\tau_2+\tau_3+\tau_4+\tau_5+\tau_6+\tau_7 = -m^2\Big[\, p_\mu \mathrm{iz}(\gamma_\nu \not{p}\gamma_\lambda\gamma_\sigma) -$$

$$-\delta_{\mu\nu}\mathrm{iz}(\not{p}\not{p}\gamma_\lambda\gamma_\sigma) + p_\mu \mathrm{iz}(\not{p}\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\sigma) - \delta_{\mu\lambda}\mathrm{iz}(\not{p}\gamma_\nu\not{p}\gamma_\sigma) +$$

$$+\delta_{\mu\sigma}\mathrm{iz}(\not{p}\gamma_\nu\not{p}\gamma_\lambda) + p_\mu \mathrm{iz}(\gamma_\nu\gamma_\lambda\not{p}\gamma_\sigma) - \delta_{\mu\nu}\mathrm{iz}(\not{p}\gamma_\lambda\not{p}\gamma_\sigma) +$$

$$+\delta_{\mu\lambda}\mathrm{iz}(\not{p}\gamma_\nu\not{p}\gamma_\sigma - p_\mu \mathrm{iz}(\not{p}\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\sigma) + \delta_{\mu\sigma}\mathrm{iz}(\not{p}\gamma_\nu\gamma_\lambda\not{p}) -$$

$$-p_\mu \mathrm{iz}(\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\sigma\not{p}) - \delta_{\mu\nu}\mathrm{iz}(\not{p}\gamma_\lambda\gamma_\sigma\not{p}) + \delta_{\mu\lambda}\mathrm{iz}(\not{p}\gamma_\nu\gamma_\sigma\not{p}) -$$

$$-\delta_{\mu\sigma}\mathrm{iz}(\not{p}\gamma_\nu\gamma_\sigma\not{p}) + p_\mu \mathrm{iz}(\not{p}\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\sigma) + \delta_{\mu\nu}\mathrm{iz}(\not{p}\gamma_\lambda\not{p}\gamma_\sigma) -$$

$$-p_\mu \mathrm{iz}(\gamma_\nu\gamma_\lambda\not{p}\gamma_\sigma) + \delta_{\mu\lambda}\mathrm{iz}(\gamma_\nu\not{p}\not{p}\gamma_\sigma) - p_\mu \mathrm{iz}(\gamma_\nu\not{p}\gamma_\lambda\gamma_\sigma) +$$

$$+\delta_{\mu\sigma}\mathrm{iz}(\gamma_\nu\not{p}\gamma_\lambda\not{p}) + \delta_{\mu\nu}\mathrm{iz}(\not{p}\gamma_\lambda\gamma_\sigma\not{p}) - p_\mu \mathrm{iz}(\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\sigma\not{p}) -$$

$$-\delta_{\mu\lambda}\mathrm{iz}(\gamma_\nu\not{p}\gamma_\sigma\not{p}) - \delta_{\mu\sigma}\mathrm{iz}(\gamma_\nu\not{p}\gamma_\lambda\not{p}) + p_\mu \mathrm{iz}(\gamma_\nu\not{p}\gamma_\lambda\gamma_\sigma) +$$

$$+\delta_{\mu\nu}\mathrm{iz}(\gamma_\lambda\not{p}\gamma_\sigma\not{p}) - \delta_{\mu\lambda}\mathrm{iz}(\gamma_\nu\not{p}\gamma_\sigma\not{p}) + p_\mu \mathrm{iz}(\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\sigma\not{p}) -$$

$$-\delta_{\mu\sigma}\mathrm{iz}(\gamma_\nu\gamma_\lambda\not{p}\not{p}) + p_\mu \mathrm{iz}(\gamma_\nu\gamma_\lambda\not{p}\gamma_\sigma)\Big] =$$

$$= -m^2\Big[-\delta_{\mu\nu}\mathrm{iz}(\not{p}\not{p}\gamma_\lambda\gamma_\sigma) -$$

$$-\delta_{\mu\lambda}\mathrm{iz}(\not{p}\gamma_\nu\not{p}\gamma_\sigma) + \delta_{\mu\sigma}\mathrm{iz}(\not{p}\gamma_\nu\not{p}\gamma_\lambda) - \delta_{\mu\nu}\mathrm{iz}(\not{p}\gamma_\lambda\not{p}\gamma_\sigma) +$$

$$+\delta_{\mu\lambda}\mathrm{iz}(\not{p}\gamma_\nu\not{p}\gamma_\sigma) + \delta_{\mu\sigma}\mathrm{iz}(\not{p}\gamma_\nu\gamma_\lambda\not{p}) - \delta_{\mu\nu}\mathrm{iz}(\not{p}\gamma_\lambda\gamma_\sigma\not{p}) +$$

$$+ \delta_{\mu\lambda} iz(\not{p}\gamma_\nu\gamma_\sigma\not{p}) - \delta_{\mu\sigma} iz(\not{p}\gamma_\nu\gamma_\lambda\not{p}) + \delta_{\mu\nu} iz(\not{p}\gamma_\lambda\not{p}\gamma_\sigma) +$$

$$+ \delta_{\mu\lambda} iz(\gamma_\nu\not{p}\not{p}\gamma_\sigma) + \delta_{\mu\sigma} iz(\gamma_\nu\not{p}\gamma_\lambda\not{p}) + \delta_{\mu\nu} iz(\not{p}\gamma_\lambda\gamma_\sigma\not{p}) +$$

$$+ \delta_{\mu\lambda} iz(\gamma_\nu\not{p}\gamma_\sigma\not{p}) - \delta_{\mu\sigma} iz(\gamma_\nu\not{p}\gamma_\lambda\not{p}) + \delta_{\mu\nu} iz(\gamma_\lambda\not{p}\gamma_\sigma\not{p}) -$$

$$- \delta_{\mu\lambda} iz(\gamma_\nu\not{p}\gamma_\sigma\not{p}) - \delta_{\mu\sigma} iz(\gamma_\nu\gamma_\lambda\not{p}\not{p}) + P_\mu iz(\not{p}\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\sigma) +$$

$$+ P_\mu iz(\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\sigma\not{p}) + P_\mu iz(\gamma_\nu\gamma_\lambda\not{p}\gamma_\sigma) + P_\mu iz(\gamma_\nu\not{p}\gamma_\lambda\gamma_\sigma)\Big] =$$

$$= -m^2\Big[- \delta_{\mu\nu}\big(4\delta_{\alpha\beta}P_\alpha P_\beta\delta_{\lambda\sigma} + 4\delta_{\alpha\sigma}P_\alpha\delta_{\beta\lambda}P_\beta - 4\delta_{\alpha\lambda}P_\alpha\delta_{\beta\sigma}P_\beta +$$

$$+ 4\delta_{\alpha\lambda}P_\alpha\delta_{\gamma\sigma}P_\gamma + 4\delta_{\alpha\sigma}P_\alpha\delta_{\lambda\gamma}P_\gamma - 4\delta_{\alpha\gamma}P_\alpha P_\gamma\delta_{\lambda\sigma} + 4\delta_{\alpha\lambda}P_\alpha\delta_{\sigma\delta}P_\delta +$$

$$+ 4\delta_{\alpha\delta}P_\alpha P_\delta\delta_{\lambda\sigma} - 4\delta_{\alpha\sigma}P_\alpha\delta_{\lambda\delta}P_\delta\big) + \delta_{\mu\nu}\big(4\delta_{\beta\lambda}P_\beta\delta_{\gamma\sigma}P_\gamma +$$

$$+ 4\delta_{\beta\sigma}P_\beta\delta_{\lambda\gamma}P_\gamma - 4\delta_{\beta\gamma}P_\beta P_\gamma\delta_{\lambda\sigma} + 4\delta_{\beta\lambda}P_\beta\delta_{\sigma\delta}P_\delta + 4\delta_{\beta\delta}P_\beta P_\delta\delta_{\lambda\sigma} -$$

$$- 4\delta_{\beta\sigma}P_\beta\delta_{\lambda\delta}P_\delta + 4\delta_{\lambda\gamma}P_\gamma\delta_{\sigma\delta}P_\delta + 4\delta_{\lambda\delta}P_\delta\delta_{\gamma\sigma}P_\gamma - 4\delta_{\lambda\sigma}\delta_{\gamma\delta}P_\gamma P_\delta\big] +$$

$$+ \delta_{\mu\lambda}\big(4\delta_{\alpha\nu}P_\alpha\delta_{\gamma\sigma}P_\gamma + 4\delta_{\alpha\sigma}P_\alpha\delta_{\nu\gamma}P_\gamma - 4\delta_{\alpha\gamma}P_\alpha P_\gamma\delta_{\nu\sigma} +$$

$$+ 4\delta_{\alpha\nu}P_\alpha\delta_{\sigma\delta}P_\delta + 4\delta_{\alpha\delta}P_\alpha P_\delta\delta_{\nu\sigma} - 4\delta_{\alpha\sigma}P_\alpha\delta_{\nu\delta}P_\delta + 4\delta_{\nu\beta}P_\beta\delta_{\gamma\sigma}P_\gamma +$$

$$+ 4\delta_{\nu\sigma}\delta_{\beta\gamma}P_\beta P_\gamma - 4\delta_{\nu\gamma}P_\gamma\delta_{\beta\sigma}P_\beta + 4\delta_{\nu\beta}P_\beta\delta_{\sigma\delta}P_\delta + 4\delta_{\nu\delta}P_\delta\delta_{\beta\sigma}P_\beta -$$

$$- 4\delta_{\nu\sigma}\delta_{\beta\delta}P_\beta P_\delta\big) - \delta_{\mu\lambda}\big(4\delta_{\alpha\nu}P_\alpha\delta_{\beta\sigma}P_\beta + 4\delta_{\alpha\sigma}P_\alpha\delta_{\nu\beta}P_\beta -$$

$$- 4\delta_{\alpha\beta}P_\alpha P_\beta \delta_{\nu\sigma} + 4\delta_{\nu\gamma}P_\gamma \delta_{\sigma\delta}P_\delta + 4\delta_{\nu\delta}P_\delta \delta_{\gamma\sigma}P_\gamma - 4\delta_{\nu\sigma}\delta_{\gamma\delta}P_\gamma P_\delta \Big) +$$

$$+ \delta_{\mu\sigma}\Big(4\delta_{\alpha\nu}P_\alpha \delta_{\beta\lambda}P_\beta + 4\delta_{\alpha\lambda}P_\alpha \delta_{\nu\beta}P_\beta - 4\delta_{\alpha\beta}P_\alpha P_\beta \delta_{\nu\lambda} + 4\delta_{\alpha\nu}P_\alpha \delta_{\lambda\gamma}P_\gamma +$$

$$+ 4\delta_{\alpha\gamma}P_\alpha P_\gamma \delta_{\nu\lambda} - 4\delta_{\alpha\lambda}P_\alpha \delta_{\nu\gamma}P_\gamma + 4\delta_{\nu\beta}P_\beta \delta_{\lambda\gamma}P_\gamma + 4\delta_{\nu\gamma}P_\gamma \delta_{\beta\lambda}P_\beta -$$

$$- 4\delta_{\nu\lambda}\delta_{\beta\gamma}P_\beta P_\gamma\Big) - \delta_{\mu\sigma}\Big(4\delta_{\alpha\nu}P_\alpha \delta_{\lambda\delta}P_\delta + 4\delta_{\alpha\delta}P_\alpha P_\delta \delta_{\nu\lambda} - 4\delta_{\alpha\lambda}P_\alpha \delta_{\nu\delta}P_\delta +$$

$$+ 4\delta_{\nu\beta}P_\beta \delta_{\lambda\delta}P_\delta + 4\delta_{\nu\delta}P_\delta \delta_{\beta\lambda}P_\beta - 4\delta_{\nu\lambda}\delta_{\beta\delta}P_\beta P_\delta + 4\delta_{\nu\lambda}\delta_{\gamma\delta}P_\gamma P_\delta +$$

$$+ 4\delta_{\nu\delta}P_\delta \delta_{\lambda\gamma}P_\gamma - 4\delta_{\nu\gamma}P_\gamma \delta_{\lambda\delta}P_\delta\Big) + P_\mu\Big(4\delta_{\alpha\nu}P_\alpha \delta_{\lambda\sigma} + 4\delta_{\alpha\sigma}P_\alpha \delta_{\nu\lambda} -$$

$$- 4\delta_{\alpha\lambda}P_\alpha \delta_{\nu\sigma} + 4\delta_{\nu\lambda}\delta_{\sigma\delta}P_\delta + 4\delta_{\nu\delta}P_\delta \delta_{\lambda\sigma} - 4\delta_{\nu\sigma}\delta_{\lambda\delta}P_\delta + 4\delta_{\nu\lambda}\delta_{\gamma\sigma}P_\gamma +$$

$$+ 4\delta_{\nu\sigma}\delta_{\lambda\gamma}P_\gamma - 4\delta_{\nu\gamma}P_\gamma \delta_{\lambda\sigma} + 4\delta_{\nu\beta}P_\beta \delta_{\lambda\sigma} + 4\delta_{\nu\sigma}\delta_{\beta\lambda}P_\beta - 4\delta_{\nu\lambda}\delta_{\beta\sigma}P_\beta\Big)\Big] =$$

$$= -m^2\Big[-\delta_{\mu\nu}\Big(4P^2\delta_{\lambda\sigma} + 4P_\sigma P_\lambda - 4P_\lambda P_\sigma + 4P_\lambda P_\sigma + 4P_\sigma P_\lambda - 4P^2\delta_{\lambda\sigma} +$$

$$+ 4P^2\delta_{\lambda\sigma} + 4P_\lambda P_\sigma - 4P_\sigma P_\lambda\Big) + \delta_{\mu\nu}\Big(4P_\lambda P_\sigma + 4P_\sigma P_\lambda - 4P^2\delta_{\lambda\sigma} + 4P_\lambda P_\sigma +$$

$$+ 4P^2\delta_{\lambda\sigma} - 4P_\sigma P_\lambda + 4P_\lambda P_\sigma + 4P_\lambda P_\sigma - 4P^2\delta_{\lambda\sigma}\Big) + \delta_{\mu\lambda}\Big(4P_\nu P_\sigma +$$

$$+ 4P_\sigma P_\nu - 4P^2\delta_{\nu\sigma} + 4P_\nu P_\sigma + 4P^2\delta_{\nu\sigma} - 4P_\sigma P_\nu + 4P_\nu P_\sigma + 4P^2\delta_{\nu\sigma} -$$

$$- 4P_\nu P_\sigma + 4P_\nu P_\sigma + 4P_\nu P_\sigma - 4P^2\delta_{\nu\sigma}\Big) - \delta_{\mu\lambda}\Big(4P_\nu P_\sigma + 4P_\sigma P_\nu -$$

$$- 4P^2\delta_{\nu\sigma} + 4P_\nu P_\sigma + 4P_\nu P_\sigma - 4P^2\delta_{\nu\sigma}\Big) + \delta_{\mu\sigma}\Big(4P_\nu P_\lambda + 4P_\lambda P_\nu -$$

$$- 4P^2\delta_{\nu\lambda} + 4P_\nu P_\lambda + 4P^2\delta_{\nu\lambda} - 4P_\lambda P_\nu + 4P_\nu P_\lambda + 4P_\nu P_\lambda - 4P^2\delta_{\nu\lambda}) -$$

$$- \delta_{\mu\sigma}(4P_\nu P_\lambda + 4P^2\delta_{\nu\lambda} - 4P_\lambda P_\nu + 4P_\nu P_\lambda + 4P_\nu P_\lambda - 4P^2\delta_{\nu\lambda} + 4P^2\delta_{\nu\lambda} +$$

$$+ 4P_\nu P_\lambda - 4P_\nu P_\lambda) + P_\mu(4P_\nu\delta_{\lambda\sigma} + 4P_\sigma\delta_{\nu\lambda} - 4P_\lambda\delta_{\nu\sigma} + 4P_\sigma\delta_{\nu\lambda} +$$

$$+ 4P_\nu\delta_{\lambda\sigma} - 4P_\lambda\delta_{\nu\sigma} + 4P_\sigma\delta_{\nu\lambda} + 4P_\lambda\delta_{\nu\sigma} - 4P_\nu\delta_{\lambda\sigma} + 4P_\nu\delta_{\lambda\sigma} +$$

$$+ 4P_\lambda\delta_{\nu\sigma} - 4P_\sigma\delta_{\nu\lambda})\Big] =$$

$$= -m^2\Big[-\delta_{\mu\nu}(4P_\sigma P_\lambda + 4P_\lambda P_\sigma + 4P^2\delta_{\lambda\sigma}) + \delta_{\mu\nu}(4P_\lambda P_\sigma + 4P_\lambda P_\sigma +$$

$$+ 4P_\lambda P_\sigma + 4P_\lambda P_\sigma - 4P^2\delta_{\lambda\sigma}) + \delta_{\mu\lambda}(4P_\nu P_\sigma + 4P_\nu P_\sigma + 4P_\nu P_\sigma + 4P_\nu P_\sigma) -$$

$$- \delta_{\mu\lambda}(4P_\nu P_\sigma + 4P_\sigma P_\nu - 4P^2\delta_{\nu\sigma} + 4P_\nu P_\sigma + 4P_\nu P_\sigma - 4P^2\delta_{\nu\sigma}) +$$

$$+ \delta_{\mu\sigma}(4P_\nu P_\lambda + 4P_\nu P_\lambda + 4P_\nu P_\lambda + 4P_\nu P_\lambda - 4P^2\delta_{\nu\lambda}) - \delta_{\mu\sigma}(4P_\nu P_\lambda -$$

$$- 4P_\lambda P_\nu + 4P_\nu P_\lambda + 4P_\nu P_\lambda + 4P^2\delta_{\nu\lambda} + P_\mu(8P_\sigma\delta_{\nu\lambda} + 8P_\nu\delta_{\lambda\sigma})\Big] =$$

$$= -m^2\Big[\delta_{\mu\nu}(-4P_\sigma P_\lambda - 4P_\lambda P_\sigma - 4P^2\delta_{\lambda\sigma} + 4P_\lambda P_\sigma + 4P_\lambda P_\sigma + 4P_\lambda P_\sigma -$$

$$- 4P^2\delta_{\lambda\sigma}) + \delta_{\mu\lambda}(4P_\nu P_\sigma + 4P_\nu P_\sigma + 4P_\nu P_\sigma + 4P_\nu P_\sigma - 4P_\nu P_\sigma - 4P_\sigma P_\nu +$$

$$+ 4P^2\delta_{\nu\sigma} - 4P_\nu P_\sigma - 4P_\nu P_\sigma + 4P^2\delta_{\nu\sigma}) + \delta_{\mu\sigma}(4P_\nu P_\lambda + 4P_\nu P_\lambda + 4P_\nu P_\lambda +$$

$$+ 4P_\nu P_\lambda - 4P^2\delta_{\nu\lambda} - 4P_\nu P_\lambda + 4P_\lambda P_\nu - 4P_\nu P_\lambda - 4P_\nu P_\lambda - 4P^2\delta_{\nu\lambda}) +$$

$$- 8P_\mu P_\sigma \delta_{\nu\lambda} + 8P_\mu P_\nu \delta_{\lambda\sigma} \Big] =$$

$$= -m^2 \big(8P_\lambda P_\sigma \delta_{\mu\nu} - 8P^2 \delta_{\lambda\sigma}\delta_{\mu\nu} + 8P^2 \delta_{\nu\sigma}\delta_{\mu\lambda} + 8P_\nu P_\lambda \delta_{\mu\sigma} + 8P_\mu P_\sigma \delta_{\nu\lambda} +$$

$$+ 8P_\mu P_\nu \delta_{\lambda\sigma} \big) =$$

$$= -m^2 \Big[-8P^2 (\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\sigma} + \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\lambda} - \delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\sigma}) + 8 (P_\mu P_\nu \delta_{\lambda\sigma} + P_\mu P_\sigma \delta_{\nu\lambda} +$$

$$+ P_\nu P_\lambda \delta_{\mu\sigma} + P_\lambda P_\sigma \delta_{\mu\nu}) \Big]$$

$$\tau_2 + \tau_3 + \tau_4 + \tau_5 + \tau_6 + \tau_7 = \mathrm{Iz}\big\{ -\gamma_\mu \not{p} \gamma_\nu \not{p}\, m^2 \gamma_\lambda \gamma_\sigma -$$

$$- m^2 \gamma_\mu \not{p} \gamma_\nu \gamma_\lambda \not{p} \gamma_\sigma - m^2 \gamma_\mu \not{p} \gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_\sigma \not{p} - m^2 \gamma_\mu \gamma_\nu \not{p} \gamma_\lambda \not{p} \gamma_\sigma - m^2 \gamma_\mu \gamma_\nu \not{p} \gamma_\lambda \gamma_\sigma \not{p} -$$

$$- m^2 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda \not{p} \gamma_\sigma \not{p} \big\} = 8m^2 P^2 (\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\sigma} + \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\lambda} - \delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\sigma}) +$$

$$+ 8 (P_\mu P_\nu \delta_{\lambda\sigma} + P_\mu P_\sigma \delta_{\nu\lambda} + P_\nu P_\lambda \delta_{\mu\sigma} + P_\lambda P_\sigma \delta_{\mu\nu}) (-m^2)$$

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4 + \tau_5 + \tau_6 + \tau_7 + \tau_8 = \mathrm{Iz}\big\{ \gamma_\mu (i\not{p} - m) \cdot$$

$$\cdot \gamma_\nu (i\not{p} - m) \gamma_\lambda (i\not{p} - m) \gamma_\sigma (i\not{p} - m) \big\} = (4P^4 + 8m^2P^2 + 4m^4) \cdot$$

$$\cdot (\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\sigma} + \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\lambda} - \delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\sigma}) + (-8m^2 - 8P^2) (P_\mu P_\nu \delta_{\lambda\sigma} + P_\nu P_\lambda \delta_{\mu\sigma} +$$

$$+ P_\mu P_\sigma \delta_{\nu\lambda} + P_\lambda P_\sigma \delta_{\mu\nu}) + 32 P_\mu P_\nu P_\lambda P_\sigma =$$

$$= \mathrm{Iz}\big\{ \gamma_\mu (i\not{p} - m) \gamma_\nu (i\not{p} - m) \gamma_\lambda (i\not{p} - m) \gamma_\sigma (i\not{p} - m) \big\} = 4\big\{ (P^2 + m^2)^2 .$$

$$\cdot\left(\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\sigma}+\delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\lambda}-\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\sigma}\right)-2\left(P^2+m^2\right)\cdot\left(P_\mu P_\nu\delta_{\lambda\sigma}+P_\nu P_\lambda\delta_{\mu\sigma}+\right.$$

$$\left.+P_\mu P_\sigma\delta_{\nu\lambda}+P_\lambda P_\sigma\delta_{\mu\nu}\right)+8P_\mu P_\nu P_\lambda P_\sigma\Big\}$$

şimdi,

$$T_{\mu\nu\lambda\sigma}(0,0,0,0)=\frac{1}{i\pi^2}\int\frac{d^4P}{(P^2+m^2)^4}\cdot \operatorname{iz}\left\{\gamma_\mu(i\not{P}-m)\gamma_\nu(i\not{P}-m)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\gamma_\lambda(i\not{P}-m)\gamma_\sigma(i\not{P}-m)\right\}$$

ifadesini hesaplayalım.

$$T_{\mu\nu\lambda\sigma}(0,0,0,0)=\frac{4}{i\pi^2}\left(\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\sigma}-\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\sigma}+\delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\lambda}\right)\int\frac{d^4P}{(P^2+m^2)^2}$$

$$-\frac{8}{i\pi^2}\int\frac{d^4P}{(P^2+m^2)^3}\left(P_\mu P_\nu\delta_{\lambda\sigma}+P_\nu P_\lambda\delta_{\mu\sigma}+P_\mu P_\sigma\delta_{\nu\lambda}+P_\lambda P_\sigma\delta_{\mu\nu}\right)+$$

$$+\frac{32}{i\pi^2}\int P_\mu P_\nu P_\lambda P_\sigma\frac{d^4P}{(P^2+m^2)^4}$$

Burada,

$$\int P_\mu P_\nu f(P^2)\,d^4P=\frac{1}{4}\delta_{\mu\nu}\int P^2 f(P^2)\,d^4P$$

$$\int P_\mu P_\nu P_\lambda P_\sigma f(P^2)\,d^4P=\frac{1}{24}\left(\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\sigma}+\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\sigma}+\delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\lambda}\right)\int P^4 f(P^2)\,d^4P$$

dır.

$$T_{\mu\nu\lambda\sigma}(0,0,0,0)=\frac{4}{i\pi^2}\left(\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\sigma}+\delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\lambda}-2\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\sigma}\right)\int\frac{d^4P}{(P^2+m^2)^2}+$$

$$+\frac{4}{i\pi^2}\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\sigma}\int\frac{d^4P}{(P^2+m^2)^2}-\frac{8}{i\pi^2}\int\frac{d^4P}{(P^2+m^2)^3}\cdot\frac{P^2}{2}(\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\sigma}+\delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\lambda})+$$

$$+\frac{32}{24}\cdot\frac{1}{i\pi^2}(\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\sigma}+\delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\lambda}+\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\sigma})\int\frac{d^4P\cdot P^4}{(P^2+m^2)^4}$$

$$T_{\mu\nu\lambda\sigma}(0,0,0,0)=\frac{1}{i\pi^2}\Big\{\frac{4}{3}(\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\sigma}+\delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\lambda}-2\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\sigma})\int\frac{d^4P}{(P^2+m^2)^2}+$$

$$+\frac{8}{3}(\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\sigma}+\delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\lambda}-2\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\sigma})\int\frac{d^4P}{(P^2+m^2)^2}+4\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\sigma}\int\frac{d^4P}{(P^2+m^2)^2}-$$

$$-4(\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\sigma}+\delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\lambda})\int\frac{P^2d^4P}{(P^2+m^2)^3}+\frac{4}{3}(\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\sigma}+\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\sigma}+\delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\lambda})\,.$$

$$\cdot\int\frac{P^4\cdot d^4P}{(P^2+m^2)^4}\Big\}$$

$$T_{\mu\nu\lambda\sigma}(0,0,0,0)=\frac{1}{i\pi^2}\Big\{\frac{4}{3}(\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\sigma}+\delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\lambda}-2\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\sigma})\int\frac{d^4P}{(P^2+m^2)^2}+$$

$$+\Big[\frac{8}{3}(\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\sigma}+\delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\lambda})-\frac{16}{3}\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\sigma}+4\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\sigma}\Big]\int\frac{d^4P}{(P^2+m^2)^2}-$$

$$-4(\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\sigma}+\delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\lambda})\int\frac{P^2d^4P}{(P^2+m^2)^3}+\frac{4}{3}(\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\sigma}+\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\sigma}+\delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\lambda})\,.$$

$$\cdot\int\frac{P^4d^4P}{(P^2+m^2)^4}\Big\}$$

$$T_{\mu\nu\lambda\sigma}(0,0,0,0)=\frac{1}{i\pi^2}\Big\{\frac{4}{3}(\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\sigma}+\delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\lambda}-2\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\sigma})\int\frac{d^4P}{(P^2+m^2)^2}+$$

$$+\frac{8}{3}(\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\sigma}+\delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\lambda}-\frac{1}{2}\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\sigma})\int\frac{d^4P}{(P^2+m^2)^2}-4(\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\sigma}+$$

$$+\delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\lambda})\int\frac{P^2d^4P}{(P^2+m^2)^3}+\frac{4}{3}(\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\sigma}+\delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\lambda}+\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\sigma})\int\frac{P^4d^4P}{(P^2+m^2)^4}\Big\}$$

$$T_{\mu\nu\lambda\sigma}(0,0,0,0)=\frac{1}{i\pi^2}\Big\{\frac{4}{3}(\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\sigma}+\delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\lambda}-2\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\sigma})\,.$$

$$\cdot \int \frac{d^4P}{(P^2+m^2)^2} + \frac{8}{3}\left(\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\sigma} + \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\lambda} - \frac{1}{2}\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\sigma}\right) m^2 \int \frac{d^4P \, . \, P^2}{(P^2+m^2)^3} -$$

$$- 4\left(\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\sigma} + \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\lambda}\right) \int \frac{P^2 d^4P}{(P^2+m^2)^3} + \frac{8}{3}\left(\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\sigma} + \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\lambda} - \frac{1}{2}\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\sigma}\right) .$$

$$\cdot \, m^2 \int \frac{d^4P}{(P^2+m^2)^3} + \frac{4}{3}\left(\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\sigma} + \delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\sigma} + \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\lambda}\right) \int \frac{P^4 d^4P}{(P^2+m^2)^4} \Big\}$$

$$T_{\mu\nu\lambda\sigma}(0,0,0,0) = \frac{1}{i\pi^2}\Big\{ \frac{4}{3}\left(\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\sigma} + \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\lambda} - 2\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\sigma}\right) \int \frac{d^4P}{(P^2+m^2)^2} -$$

$$- \frac{4}{3}\left(\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\sigma} + \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\lambda}\right) \int \frac{P^2 d^4P}{(P^2+m^2)^3} - \frac{4}{3}\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\sigma} \int \frac{P^2 d^4P}{(P^2+m^2)^3} +$$

$$+ \frac{8}{3}\left(\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\sigma} + \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\lambda} - \frac{1}{2}\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\sigma}\right) m^2 \int \frac{d^4P}{(P^2+m^2)^3} +$$

$$+ \frac{4}{3}\left(\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\sigma} + \delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\sigma} + \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\lambda}\right) \int \frac{P^4 d^4P}{(P^2+m^2)^4}$$

$$T_{\mu\nu\lambda\sigma}(0,0,0,0) = \frac{1}{i\pi^2}\Big\{ \frac{4}{3}\left(\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\sigma} + \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\lambda} - 2\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\sigma}\right) .$$

$$\cdot \int \frac{d^4P}{(P^2+m^2)^2} - \frac{4}{3}\left(\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\sigma} + \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\lambda} - 2\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\sigma}\right) \int \frac{P^2 d^4P}{(P^2+m^2)^3} +$$

$$+ \frac{4}{3}\left(\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\sigma} + \delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\sigma} + \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\lambda}\right) \int \frac{P^4 d^4P}{(P^2+m^2)^4} \Big\} + \frac{1}{i\pi^2}\Big\{ -4\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\sigma} \, .$$

$$\cdot \int \frac{P^2(P^2+m^2) d^4P}{(P^2+m^2)^4} + \frac{8}{3}\left(\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\sigma} + \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\lambda} - \frac{1}{2}\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\sigma}\right) . \, m^2 .$$

$$\cdot \int \frac{(P^2+m^2) \, d^4P}{(P^2+m^2)^4} \Big\}$$

sonuç olarak,

$$T_{\mu\nu\lambda\sigma}(0,0,0,0) = \frac{1}{i\pi^2}\Big\{ \frac{4}{3}\left(\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\sigma} + \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\lambda} - 2\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\sigma}\right) .$$

$$\cdot\int \frac{d^4p}{(p^2+m^2)^2} + \frac{4}{3}\left(\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\sigma} + \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\lambda} - 2\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\sigma}\right) m^2 \int \frac{d^4p}{(p^2+m^2)^3} +$$

$$+ \frac{4}{3}\left(\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\sigma} + \delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\sigma} + \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\lambda}\right) m^4 \int \frac{d^4p}{(p^2+m^2)^4} \Big\}$$

ifadesi elde edilir. Burada, $p_\mu p^\mu = p^2 = \vec{p}^2 - E^2 = m^2$

koşulunu kullandık.

İlk integral logaritmik olarak ıraksaktır.

EK.D- FEYNMAN KURALLARI

1. Her bir dış elektron çizgisi $U^r(p)$, $\overline{U}^r(p)$, $\overline{\upsilon}^r(-p)$, $\upsilon^r(-p)$ sipinör türüne karşılık gelir. Burada $U^r(p)$ ve $\overline{U}^r(p)$ polarizasyonu r momentumu p olan elektronun yaratılması veya yokedilmesine karşılık gelir. Bununla birlikte $\upsilon^r(-p)$ ve $\overline{\upsilon}^r(-p)$ polarizesi r momentumu p olan pozitronun yaratılması ve yokedilmesine karşılık gelir.

2. Her bir dış foton çizgisi için $\not{e}/\sqrt{2w}$ çarpanı gelir. Burada w fotonun frekansı ve e_μ de birim polarizasyon vektördür. ($\not{e} = e_\mu \gamma_\mu$) Her bir dış foton çizgisini gösteren bir dış elektromoğnetik alan için $\not{A}^{(e)}(q)/(2\pi)^4$ çarpanı gelir.

3. p-momentumlu her bir iç elektron çizgisi için $-i(1/i\not{p}+m)$ çarpanı gelir.

4. k-momentumlu her bir iç foton çizgisi için $-\frac{i}{k^2}\,\delta_{\mu\nu}$ faktörü gelir.

5. Diyagramın her bir köşesi (verteks) katkısı için δ-fonksiyonu (gelen ve giden tüm parçacıkların momentumlarını içerecek şekilde) verilir.

Burada $\delta(\Sigma P_i - \Sigma P_f)$ dir.

$\Sigma P_i \equiv$ Giren momentum sayısı

$\Sigma P_f \equiv$ Çıkan momentum sayısı

6. Eğer diyagram kapalı bir lepton ilmik (loop)'ı içeriyorsa $-i/(i\not{p}+m)$ ve γ_μ matrislerinin çarpımının İz'i negatif bir işaret alır. Şayet kapalı ilmik'in köşelerinin sayısı tek ise S-matris elemanı sıfır olur. (Furry Teoremi)

7. Ara durumlarının dörtlü momentumları üzerinden integral alır.

K A Y N A K L A R

1- A.I.AKHIEZER,V.B. BERESTETSKII, Quantum Elektrodynamics (Traslated from the second Russian) John Wiley Sons, NewYork, 1965.

2- H.EULER. Ann.d.Phys. 26, 398 (1936).

3- J.M.JAUCH, F.ROHRLICH, Theory of Photons and Electrons. Springen-Verlag, NewYork. Second-Corrected Printing 1980.

4- R. KARPLUS, M. NEUMAN, Phys. Rev. 80, 380 (1950).

5- R. KARPLUS, M.NEUMAN, Phys. Rev. 83, 776 (1951).

6- J.D. BJORKEN, S.D.DRELL, Relativistic Quantum Mechanics Mc Graw-Hill, (1964).

7- N.N.BOGOLIUBOV, D.V. SHIRKOV, Introduction to the Theory of Quantized fields. Wiley-İnterscience John Willey Sons, NewYork, (1958).