KARADENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS PROĞRAMI

TEZ NUMARASI
Genel :
Anabilim Dalı :
Proğram :

KOHOMOLOJİ GRUPLARI VE UYGULAMALARI

MEHMET YUMAK

Yönetici : Prof.Dr. Ergün BAYAR

TRABZON
OCAK 1987

ÖNSÖZ

Bu çalışmaya beni teşvik eden hocam, Sayın Prof.Dr.Ergün BAYAR'-a, her türlü yardımlarını esirgemeyen Sayın Doç.Dr.İsmail GÜLOĞLU'na ve yazım işini gerçekleştiren K.Ü.Deniz Bilimleri ve Teknolojisi Yüksekokulu elemanı Sayın Affan Nuri PEHLİVAN'a teşekkürü bir borç bilirim.

Trabzon, Ocak 1987

Mehmet YUMAK

ÖZET

Bu çalışmada; ilk olarak grup genişlemesi yardımıyla 2 - boyutlu kohomoloji grubunun tanımı, ardından $\mathbb{Z}$ nin bir serbest çözücüsü yardımıyla n - boyutlu kohomoloji grubunun tanımı ve bu gruplarla ilgili bazı özellikler verilmiş, daha sonra kohomoloji teorisinin grup teoriye bazı uygulamaları gösterilmiştir.

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ

Üç bölümden oluşan bu tezin birinci bölümünde, çalışmamızda kullanılacak bazı temel kavramlar ve teoremler verilmiştir. Bu bölümde verilen teoremlerin ispatları [1], [5], [6], ve [7] nolu kaynaklarda bulunabilir.

İkinci bölümde; önce grup genişlemesi tanımı ve bununla ilgili teoremler verilmiş ve bundan yararlanarak 2-boyutlu kohomoloji grubu oluşturulmuş, ardından n-boyutlu kohomoloji grubu tanımlanmış ve $\mathbb{Z}$ nin serbest çözücülerinin seçiminden bağımsız olduğu ispatlanmıştır. Kohomoloji gruplarını oluşturmak için $\mathbb{Z}$ nin özel bir çözücüsü olan standart çözücü teşkil edildikten sonra, bir grup ile onun bir altgrubunun kohomoloji grupları arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Bu çalışmada kohomoloji teorisinin detaylı bir incelemesinden ziyade, n-boyutlu kohomoloji grupları ve özellikle 1 ve 2-boyutlu kohomoloji grupları üzerinde durulmuş, bu gruplarla ilgili bazı özellikler ve örnekler verilmiştir.

Üçüncü bölüm kohomoloji teorisinin bazı uygulamaları ile Schur-Zassenhaus teoremine ayrılmıştır. İlk olarak, kohomoloji grupları yardımıyla komplementler elde edilmiş ve herhangi iki komplementin eşlenik olup olmadığı belirlenmiştir. Son olarak, Schur-Zassenhaus teoremi verildikten sonra, Gaschütz'ün [4] p-gruplarının otomorfiler grubu üzerine bir teoreminin ispatı verilmiştir.

BÖLÜM I

TEMEL KAVRAMLAR

1. GRUPLAR

1.1. TANIM

$G \neq \emptyset$ bir küme olsun. Her sıralanmış $(a,b) \in G$ elemanına bir $c \in G$ elemanını tekabül ettiren bir $\bullet : G\times G \to G$ dönüşümüne G de bir ikili işlem denir. "$\bullet$" dönüşümü altında (a,b) elemanının görüntüsü yerine $ab=c$ yazılır.

1.2. TANIM

Bir $G \neq \emptyset$ kümesinde bir ikili işlem verilmiş olsun. Aşağıdaki şartların gerçeklenmesi halinde, G'ye bir grup denir.

(i). Her $a,b,c \in G$ için,

$(ab)c=a(bc)$ (Asosiyatif kural)

verilir.

(ii). Her $a \in G$ için,

$ea=a$

olacak şekilde bir $e \in G$ elemanı vardır.

(iii). Her $a \in G$ elemanına karşılık,

$ba=e$

olacak şekilde bir $b \in G$ elemanı mevcuttur.

Bu tanımdaki $e \in G$ elemanına G'nin birim (veya idantik) elemanı, $b \in G$ elemanına da a'nın tersi (veya inversi) denir. G'nin birim elemanını 1 ve $a \in G$ elemanının tersini a^{-1} ile göstereceğiz.

1.3. TANIM

G bir grup ve her $a,b \in G$ için $ab=ba$ ise, G'ye bir Abel grup denir.

1.4. TEOREM

G bir grup ve $1 \in G$ birim eleman olsun.

(i). Her $a \in G$ için $a1=a$ dır.

(ii). $ba=1$ ise, $ab=1$ dır.

1.5. TANIM

G grubundaki elemanların sayısına G'nin mertebesi denir ve $|G|$ ile gösterilir. $|G|$ sonlu ise, G'ye sonlu bir grup denir.

1.6. TANIM

G bir grup ve K G'nin bir alt kümesi olsun. K G de tanımlanan ikili işleme göre bizzat bir grup ise, K'ya G'nin bir altgrubu denir ve $K \leq G$ yazılır.

1.7. TEOREM

G bir grup ve $H \subseteq G$ bir altküme olsun. $H \leq G$ olması için gerek ve yeter şart her $a,b \in H$ için $ab \in H$ ve $a^{-1} \in H$ olmasıdır.

Altgrup tanımına göre $G \leq G$ ve $\{1\} \leq G$ dır. Bu altgruplara G'nin trivial altgrupları denir. H G'nin bir altgrubu ve $H \neq G$ ise H'a G'nin öz altgrubu denir. Bu durumda $H < G$ yazılır.

1.8. TANIM

G bir grup ve H G'nin bir altgrubu olsun. $H < G$ ve $H \leq K \leq G$ den $K=G$ veya $H=K$ elde edilirse, H altgrubuna G'nin bir maksimal altgrubu denir. Buna karşılık $\{1\} < H$ ve $\{1\} \leq K \leq H$ dan $K=\{1\}$ veya $K=H$ elde ediliyorsa, H altgrubuna G'nin bir minimal altgrubu denir.

1.9. TEOREM

G bir grup, I bir indis kümesi ve $H_i \leq G$ $(i \in I)$ olsun. Bu takdirde,

$$\bigcap_{i \in I} H_i \leq G$$

dır.

1.10. TEOREM

G bir grup ve S G'nin bir alt kümesi olsun. Bu takdirde,

$$H = \{u_1 u_2 \ldots\ldots u_n \mid n \in \mathbb{N},\ u_i \in S \cup S^{-1}\}$$

kümesi G'nin bir altgrubudur ve $S \subseteq H$ dır. Burada

$$S^{-1} = \{s^{-1} \mid s \in S\}$$

dır. H altgrubuna S kümesi tarafından üretilen altgrup denir ve $\langle S\rangle$ ile gösterilir. S kümesine H'ın üreteci denir.

1.11. TANIM

G bir grup ve $S\subseteq G$ olsun. $G=\langle S\rangle$ ve $S=\{a\}$ ise G'ye devirli grup denir ve $G=\langle a\rangle$ şeklinde gösterilir. 1.10 a göre

$$G = \langle a\rangle = \{a^n \mid n\in \mathbb{Z} \}$$

dır.

1.12. TANIM

G bir grup ve $S\subseteq G$ olsun.

(a). $g \in G$ olmak üzere

$$S^g = g^{-1}Sg=\{g^{-1}sg \mid s\in S\}$$

altkümesine S'nin g - eşleniği denir.

(b). $N_G(S)= \{g \mid g\in G,\ S^g=S \}$

altkümesine S'nin G'deki normalliyeni denir.

(c). $C_G(S)=\{ g \mid gs=sg\ (\forall s\in S)\}$

altkümesine S'nin G'deki merkezliyeni denir.

(d). $C_G(G)=Z(G)$ altkümesine G'nin merkezi denir.

Açık olarak $N_G(S)$ ve $C_G(S)$ G'nin altgruplarıdır.

1.13. TEOREM

G bir grup, $G \neq \{1\}$ ve G'nin trivialden farklı altgrubu yoksa G asal mertebeden devirli olan sonlu bir gruptur.

1.14. TEOREM

Z(G), G'nin bir Abel altgrubudur. $H\leq Z(G)$ ise $x\in G$ olmak üzere $\langle H,x\rangle$ de Abeldir.

1.15. TANIM

G bir grup, $H\leq G$ ve $x\in G$ olsun

$$Hx= \{hx \mid h\in H \}$$

kümesine H'ın G'deki bir sağ yan sınıfı denir. Benzer şekilde xH sol yan sınıfı da tanımlanabilir. H'ın G'deki farklı sağ yan sınıflarının sayısına H'ın G'deki indeksi denir ve $[G:H]$ ile gösterilir.

1.16. TEOREM (LAGRANGE)

G bir grup ve $H\leq G$ olsun. Bu takdirde

$$|G| = |H|[G:H]$$

dır. G sonlu bir grup ise bir altgrubun mertebesi gibi indeks de G'nin mertebesini böler.

1.17. TANIM

G bir grup ve $H \leq G$ olsun. H'ın herbir sağ yan sınıfından bir eleman alınarak oluşturulan T altkümesine H'ın G'deki bir sağ transversali denir. Benzer şekilde sol transversal de tanımlanabilir. Açık olarak $|T| = [G:H]$ dır.

1.18. TANIM

G bir grup, H ve K G'nin iki altgrubu ve $x \in G$ olsun.

$$HxK = \{hxk \mid h \in H,\ k \in K\}$$

kümesine H ve K'ya göre bir çift yan sınıf denir.

1.19. TEOREM

G bir grup ve H ve K G'nin iki altgrubu olsun .

(i) G, H ve K ya göre çift yan sınıfların birleşimidir.

(ii) H ve K ya göre bir çift yan sınıf K'nın sol yan sınıflarının veya H'ın sağ yan sınıflarının birleşimidir. HxK kesinlikle $|K:K \cap H^x|$ tane H'ın sağ yan sınıfını içerir.

1.20. TEOREM

G bir grup ve H ve K G'nin sonlu mertebeli iki altgrubu ise

$$|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}$$

dır.

1.21. TEOREM (DEDEKİND KURALI)

G bir grup, $L \leq G$ ve U ve V G'nin iki alt kümesi olsun. $U \subseteq L$ ise,

$$UV \cap L = U(V \cap L)$$

dır. Burada;

$$UV = \{uv \mid u \in U,\ v \in V\}$$

şeklinde tanımlanır.

1.22. TANIM

G bir grup ve $H \leq G$ olsun. Her $x \in H$ için $Hx = xH$ ise, H'a G'nin normal altgrubu denir ve $H \trianglelefteq G$ şeklinde gösterilir.

Bir grubun maksimal ve minimal normal altgruplarının tanımı 1.8 deki gibi verilir.

1.23. TANIM

Bir G grubu verilsin. $G \neq \{1\}$ ve G'nin trivialden farklı normal altgrubu yoksa, G'ye basit grup denir.

1.24. TEOREM

G bir grup, $H \trianglelefteq G$ ve H'ın G deki sınıflarının kümesi $\bar{G}$ olsun. Bu takdirde $\bar{G}$

$$(Hx)(Hy) = Hxy \qquad (Hx, Hy \in \bar{G})$$

ile tanımlanan sınıfların çarpımı işlemine göre bir grup oluşturur.

1.25. TANIM

1.24'de tanımlanan $\bar{G}$ grubuna G'nin H normal altgrubuna göre bölüm grubu denir ve $\bar{G} = G/H$ yazılır.

1.26. TEOREM

G bir grup ve $H \trianglelefteq G$ olsun. G/H bölüm grubunun basit olması için gerek ve yeter şart H'ın G'de bir maksimal normal altgrup olmasıdır.

1.27. TANIM

G ve G' iki grup ve $f:G \rightarrow G'$ bir dönüşüm olsun.

(a). Her $x,y \in G$ için

$$f(xy) = f(x)\,f(y)$$

ise f e bir homomorfi denir.

(b) f homomorfisi bire-bir ise f e bir monomorfi denir.

(c) f homomorfisi üzerine; yani $f(G)=G'$ ise f e bir epimorfi denir.

(d) f homomorfisi bire-bir ve üzerine ise f e bir izomorfi denir ve $G \cong G'$ yazılır.

G bir grup ve $N \trianglelefteq G$ ise G den G/N e $x \mapsto xN$ ile tanımlanan dönüşüm bir homomorfidir. Bu homomorfiye doğal homomorfi adı verilir.

Verilen bir G grubuna izomorf olan bütün grupların kümesine G nin izomorfizm sınıfı denir.

1.28. TANIM

G ve G' iki grup ve $f:G \rightarrow G'$ bir homomorfi olsun.

$$\text{çekf} = \{x \mid x \in G,\ f(x)=1 \in G'\}$$

kümesine f in çekirdeği,

$$f(G)=\{f(x) \mid x\in G\}$$

kümesine f in görüntüsü (veya resmi) denir. Bazen, f(G) yerine resf gösterimini de kullanacağız.

Kolayca görülebileceği gibi, $çekf \trianglelefteq G$ ve $f(G)\leq G'$ dır.

1.29. TEOREM

G ve G' iki grup ve $f:G\rightarrow G'$ bir homomorfi ise,

$$G/çekf \cong f(G)$$

dır.

1.30. TEOREM

G bir grup, $K\leq G$ ve $N\trianglelefteq G$ olsun. Bu takdirde

$$K/(N\cap K) \cong NK/N$$

dır.

1.31. TEOREM

G bir grup, H ve K G nin normal altgrupları ve $K\leq H$ olsun. Bu takdirde

$$H/K\trianglelefteq G/K \quad ve \quad (G/K)\,/\,(H/K) \cong G/H$$

dır.

1.32. TANIM

Bir G grubu verilsin. Bir $f:G\rightarrow G$ homomorfisine G nin bir endomorfisi denir. f bir izomorfi ise f e G nin bir otomorfisi denir. G nin tüm otomorfilerinin kümesini O(G) ile gösterelim. Bu takdirde O(G)

$$(fg)(x)=g(f(x)) \qquad (f,g\in O(G),\ x\in G)$$

bileşke işlemine göre bir grup oluşturur. Bu gruba G nin otomorfiler grubu denir.

$g\in G$ olmak üzere her $x\in G$ için $x\mapsto g^{-1}xg=x^g$ dönüşümü G nin bir otomorfisidir. Bu otomorfiye G nin bir iç otomorfisi denir ve i_g ile gösterilir. G nin tüm iç otomorfilerinin kümesini İ(G) ile göstereceğiz.

1.33. TEOREM

$İ(G)\trianglelefteq O(G)$ ve $G/Z(G) \cong İ(G)$ dır.

$Z(G)=\{1\}$ ise $G \cong İ(G)$ olacağından $\sigma\in O(G)$ ve $g\in G$ olmak üzere

(1.34) $\qquad \sigma^{-1} i_g\, \sigma = İ_{\sigma(g)}$

formülü yerine

$$\sigma^{-1}g\sigma = \sigma(g) = g^{\sigma}$$

yazacağız.

1.35. TEOREM

G bir grup ve $H \leq G$ olsun. Bu takdirde

$$C_G(H) \trianglelefteq N_G(H)$$

ve $N_G(H)/C_G(H)$ bölüm grubu $O(H)$ ın bir altgrubuna izomorftur.

1.36 TANIM

G bir grup ve $H \leq G$ olsun. Her $\sigma \in O(G)$ için $\sigma(H)=H$ ise, H a G nin karakteristik altgrubu denir ve $H \lll G$ yazılır.

1.37 TEOREM

G bir grup, H ve K G nin iki altgrubu ve $H \lll K$ olsun. Bu takdirde

(i) $K \lll G \implies H \lll G$

(ii) $K \trianglelefteq G \implies H \trianglelefteq G$

dır.

1.38. TANIM

G ve H iki grup olsun. Bir $\varphi: G \longrightarrow O(H)$ homomorfisi varsa G ye H üzerinde bir operatör grup, φ homomorfisine de G nin H a etkisi denir.

Özellikle her $g \in G$ için $\varphi(g)=1$ ise φ ye trivial etki denir. Kolayca görülebileceği gibi

$$\{ h \mid h \in H, \ \varphi(g)(h)=h \ (\forall g \in G) \}$$

kümesi H ın bir altgrubudur. Bu altgrubu $C_H(G)$ ile göstereceğiz.

1.39. TEOREM

G ve H iki grup ve $\varphi: G \rightarrow O(H)$ bir homomorfi olsun. Bu takdirde

$$L = \{ (g,h) \mid g \in G, h \in H \}$$

kümesi

$$(g,h)(g',h')=(gg', \varphi(g')(h)h') \quad (g,g \in G;\ h,h' \in H)$$

şeklinde tanımlanan çarpma işlemine göre bir grup oluşturur.

$$\overline{G} = \{\gamma(g)=(g,1_H) \mid g \in G\} \text{ ve } \overline{H} = \{\eta(h)=(1_G,h) \mid h \in H\}$$

olsun. Bu durumda $G \cong \overline{G}$, $H \cong \overline{H}$ ve

$$\bar{H} \trianglelefteq L = \bar{G}\bar{H}, \quad \bar{G} \cap \bar{H} = \{1\}$$

dır.Daha fazla olarak

$$\gamma(g)^{-1}\, \eta(h)\, \gamma(g) = \eta(h^g) \qquad (g \in G,\ h \in H)$$

dır.

1.40. TANIM

1.39 daki L grubuna G ve H ın φ etkisine göre yarıdirekt çarpımı denir.

1.41. TANIM

X bir küme olsun. Bire-bir ve üzerine bir $f: X \rightarrow X$ dönüşümüne X kümesi üzerinde bir permütasyon denir. X kümesi üzerindeki bütün permütasyonların kümesini $\sum(X)$ ile göstereceğiz. $\sum(X)$, permütasyonların bileşkesi işlemine göre bir grup teşkil eder. Bu gruba X kümesi üzerinde simetrik grup denir.

1.42. TANIM

G bir grup, X herhangi bir küme ve $\rho: G \rightarrow \sum(X)$ bir homomorfi ise, (X,ρ) çiftine bir G- kümesi denir.

Herbir $g \in G$ elemanı X üzerinde bir permütasyon tanımlar. Her $x \in X$ için

$$\rho(g)(x) = x^g$$

yazacağız.

1.43. TANIM

X bir G- kümesi olsun.

$$\{x^g \mid g \in G\}$$

kümesine $x \in X$ i içeren bir yörünge denir ve O_x ile gösterilir. O_x deki elemanların sayısı olan $|O_x|$ e O_x yörüngesinin uzunluğu denir. $Y \subseteq X$ ve her $g \in G$ için

$$y \in Y \Longrightarrow y^g \in Y$$

ise Y ye bir G- invaryant altküme denir. X in herbir elemanına nokta adı verilir.

1.44. TANIM

p bir asal sayı olmak üzere mertebesi p nin bir kuvveti olan bir sonlu gruba p-grup denir.

1.45. TEOREM

G bir p-grup ve $X \neq \emptyset$ bir sonlu G-kümesi olsun. $|X| \not\equiv 0 \pmod p$ ise X bir G-invaryant nokta içerir.

1.46. SONUÇ

Bir Q p-grubunun bir diğer G p-grubu üzerine etki ettiğini kabul edelim. $G \neq \{1\}$ ise G nin birimden farklı olan bir Q-invaryant elemanı vardır.

1.47. TEOREM

G bir p-grup ve $H \trianglelefteq G$ olsun. $H \neq \{1\}$ ise $H \cap Z(G) \neq \{1\}$ dır. Özellikle $G \neq \{1\}$ ise $Z(G) \neq \{1\}$ dır.

1.48. TEOREM

G bir p-grup ve $H < G$ ise $N_G(H) \neq H$ dır. M,G nin bir maksimal altgrubu ise $M \trianglelefteq G$ ve G/M mertebesi p olan bir devirli gruptur. Özellikle $[G:M] = p$ dır.

1.49. TANIM

G bir sonlu grup ve

$$|G| = p^n m, \quad (p,m)=1$$

olsun. G nin mertebesi p^n olan bir altgrubuna G nin bir Sylow p-altgrubu (veya bir S_p-altgrubu) denir.

1.50. TEOREM

G bir sonlu grup olsun.

(i) G nin bir S_p-altgrubu vardır.

(ii) G nin herhangi iki S_p-altgrubu G de eşleniktir.

(iii) G nin herhangi bir p-altgrubu G nin bir S_p-altgrubunun içindedir.

(iv) S,G nin bir S_p-altgrubu olmak üzere G nin S_p-altgruplarının sayısı $[G:N_G(S)]$ dır. Daha fazla olarak

$$[G:N_G(S)] \equiv 1 \pmod p$$

dır.

1.51. TEOREM (CAUCHY)

G bir grup ve p bir asal sayı olmak üzere $p \mid |G|$ ise G mertebesi p olan bir eleman içerir.

1.52. TEOREM

G bir grup ve $H \trianglelefteq G$ olsun. S,H ın bir S_p-altgrubu ise $G = N_G(S)H$ dır.

1.53. TANIM

π asal sayıların bir kümesi ve n bir doğal sayı olsun. n sayısının bütün asal faktörleri π de ise n ye bir π-sayısı denir.

1.54. TANIM

G bir grup ve $g \in G$ bir sonlu mertebeli eleman olsun. $|g|$ bir π-sayısı ise g ye bir π-eleman denir.

Bütün elemanları π-eleman olan bir G grubuna bir π-grup denir.

G bir sonlu grup ise $|G|$ yi bölen asal sayıların kümesi $\pi(G)$ ile gösterilir.

$$\pi(G)=\{p \mid |G| \equiv 0 \pmod p\}$$

dır.

1.55. TEOREM

G bir sonlu grup ise aşağıdaki iki şart denktir.

(i) G bir π-gruptur.

(ii) $|G|$ bir π-sayısıdır.

1.56. TANIM

G bir grup olsun.

(a). $x,y \in G$ olmak üzere

$$[x,y] = x^{-1}y^{-1}xy$$

elemanına x ile y nin komütatörü denir.

(b) $$G'=\langle [x,y] \mid x,y \in G \rangle$$

altgrubuna G nin komütatör altgrubu denir.

$$G^{(0)}=G,\ G^{(1)}=G' \text{ ve}$$

$$G^{(i+1)}=(G^{(i)})'$$

yardımı ile $G^{(i)}$ komütatör altgrubunu tanımlıyalım. Açık olarak her $\sigma \in O(G)$ için $\sigma(G^{(i)})=G^{(i)}$ olduğundan her $i=1,2,\ldots$ için $G^{(i)} \lll G$ ve

$$G^{(0)} \geq G^{(1)} \geq G^{(2)} \geq \ldots\ldots\ldots \geq G^{(i)} \geq G^{(i+1)} \geq \ldots\ldots$$

dır.

1.57. TANIM

G bir grup olsun Belli bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$G^{(n)}=\{1\}$$

ise, G ye çözülebilir grup denir.

Bu tanıma göre;trivialden farklı bir G grubu çözülebilirse, G Abel ve $\{1\}$ den farklı olan bir karakteristik altgrup içerir.

1.58. TANIM

$H_1, H_2, \ldots\ldots, H_n$ grupları verilsin.

$$G=H_1 x H_2 x \ldots\ldots x H_n=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n) \mid x_i \in H_i (i=1,2..,n)\}$$

kümesi

$$(x_1,x_2,\ldots,x_n)(y_1,y_2,\ldots,y_n)=(x_1y_1,x_2y_2,\ldots,x_ny_n),\ (x_i,y_i \in H_i)$$

çarpma işlemine göre bir grup teşkil eder. Bu gruba $H_1,H_2,\ldots,H_n$ gruplarının direkt çarpımı denir. Tanımdan görüldüğü gibi iki grubun direkt çarpımı trivial etkiye göre yarıdirekt çarpımdır.

1.59. TEOREM

$H_1,H_2,\ldots,H_n$ verilen gruplar ve $G=H_1xH_2x \ldots xH_n$ olsun. Her $i=1,2,\ldots,n$ için

$$K_i=\{(1,1,\ldots,x_i,\ldots,1) \mid x_i \in H_i\}$$

alt kümelerini tanımlayalım. Bu takdirde

(i). Her $i=1,2,\ldots,n$ için $K_i \trianglelefteq G$ ve $K_i \cong H_i$ dır.

(ii). Her $x_i \in K_i$ ve $x_j \in K_j$ $(i \neq j)$ için $x_ix_j=x_jx_i$ dır.

(iii). $G=K_1K_2\ldots K_n$ ve G nin her elemanı $x_1x_2 \ldots x_n$ $(x_i \in K_i)$ formunda tektürlü yazılabilir.

1.60. TANIM

G bir grup ve $H_1,H_2,\ldots,H_n$ G nin normal altgrupları olsun. $G=H_1H_2\ldots H_n$ ve her $i=1,2 \ldots,n$ için

$$H_1H_2\ldots H_{i-1} \cap H_i=\{1\}$$

ise G ye $H_1,H_2,\ldots,H_n$ normal altgruplarının iç direkt çarpımı denir.

1.61. TEOREM

G bir grup, $H_1,H_2,\ldots,H_n$ G nin normal altgrupları ve $G=H_1H_2 \ldots H_n$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki şartlar denktir.

(i). Her $i=1,2,\ldots,n$ için $H_1H_2 \ldots H_{i-1} \cap H_i=\{1\}$ dır.

(ii). G nin her elemanı $x_1x_2 \ldots x_n$ $(x_i \in H_i)$ formunda tektürlü olarak yazılabilir.

(iii). $G \cong H_1xH_2x\ldots xH_n$ dır.

1.62. TANIM

H,K iki grup ve $G=H\times K$ olsun. Her $(h,k)\in G$ için $\pi(h,k)=h$ ile tanımlanan $\pi: G\rightarrow H$ dönüşümüne G nin H üzerine izdüşümü denir.

1.63. TEOREM

H ve K iki grup, $G=H\times K$ ve π_1 ve π_2 sırasıyla H ve K üzerine izdüşümler olsun. Bu takdirde; G nin bir U altgrubu, $U\cap H$, $\pi_1(U)$, $U\cap K$, $\pi_2(U)$ altgruplarını ve $\pi_1(U)/(U\cap H)$ dan $\pi_2(U)/(U\cap K)$ üzerine bir φ_U izomorfisi belirler. Tersine olarak; H_1,H_2 H ın K_1,K_2 K nın $H_2\trianglelefteq H_1$ ve $K_2\trianglelefteq K_1$ olacak şekilde altgrupları ve Θ, H_1/H_2 den K_1/K_2 üzerine bir izomorfi olsun. Bu takdirde, $H_1=\pi_1(U)$, $H_2=U\cap H$, $K_1=\pi_2(U)$, $K_2=U\cap K$ ve $\Theta=\varphi_U$ olacak şekilde G nin bir U altgrubu vardır. U altgrubu H_1, H_2, K_1,K_2 ve Θ ile tektürlü olarak tanımlanır.

1.64. TEOREM

G bir grup ve H,K G nin iki normal altgrubu olsun. Bu takdirde $G/H\cap K$ bölüm grubu $(G/H)\times(G/K)$ direkt çarpımının bir altgrubuna izomorftur.

1.65. TEOREM

G sonlu üretenli bir Abel grup ise; yani sonlu tane eleman tarafından üretiliyorsa, G nin her altgrubu da sonlu üretenlidir.

1.66. TEOREM

Sonlu üretenli herhangi bir G Abel grubu devirli altgrupların bir direkt toplamı olarak ifade edilebilir. G deki sonlu mertebeden elemanların kümesi T(G) olsun. T(G) sonlu bir gruptur.

1.67. TANIM

Yukarıda tanımlanan T(G) altgrubuna G nin burulmalı altgrubu denir. G bir Abel grup ve $T(G)=G$ ise G ye bir burulmalı grup denir.

1.68. TANIM

G bir Abel burulmalı grup ve p bir asal sayı olsun. Mertebeleri p nin kuvvetleri şeklinde olan elemanların kümesini G_p ile gösterelim. $G_p\leq G$ dır. G_p ye G nin p-birincil bileşeni denir.

1.69. TEOREM

G bir sonlu Abel grup, f ve g G nin iki endomorfisi ve $fg=gf=0$ ise

$$[\text{çek} f : g(G)] = [\text{çek} g : f(G)]$$

dır.

1.70. TEOREM

G sonlu bir Abel p-grup olsun. Mertebesi en fazla p olan elemanların kümesini $\Omega_1(G)$ ile gösterelim. $|\Omega_1(G)|=p^d$ olsun. Bu takdirde aşağıdakiler sağlanır.

(i). G nin devirli olması için gerek ve yeter şart d=1 olmasıdır.

(ii). H,G nin $\Omega_1(G)$ yi içermeyen bir maksimal altgrubu ise H da içerilmeyen kesinlikle p^{d-1} tane p mertebeli altgrup vardır.

2. HALKA, CİSİM VE MODÜL

2.1. TANIM

R üzerinde toplama ve çarpma ikili işlemleri tanımlanmış boştan farklı bir küme olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa R ye bir halka denir.

(i) R toplama işlemine göre bir Abel gruptur.

(ii) Her $a,b,c \in R$ için

$$(ab)c=a(bc)$$

dır.

(iii) Her $a,\ b,\ c \in R$ için

$$a(b+c)=ab+ac$$
$$(a+b)c=ac+bc \qquad \text{(Distribütiflik Kuralı)}$$

dır.

Bunlara ek olarak her $a,b \in R$ için

$$ab = ba$$

ise R ye komütatif halka denir.

Eğer R halkasının çarpma işlemine göre birim elemanı varsa R ye birim elemanlı halka denir.

2.2. TANIM

F üzerinde toplama ve çarpma ikili işlemleri tanımlanmış boştan farklı bir küme olsun. Aşağıdaki şartlar gerçekleniyorsa F ye bir cisim denir.

(i). F toplama işlemine göre bir Abel gruptur.

(ii). Toplama işlemine göre birim eleman sıfır olmak üzere $F-\{0\}$ çarpma işlemine göre bir Abel gruptur.

(iii). Her $a,b,c \in F$ için

$$(a+b)c=ac+bc$$
$$a(b+c)=ab+ac$$

dır.

2.3. TANIM

F keyfi bir cisim ve n sabit bir tamsayı olsun. Matrislerin çarpımı işlemine göre bütün nxn-li singüler olmayan matrislerin oluşturduğu gruba F üzerinde n inci dereceden genel lineer grup denir ve GL(n,F) ile gösterilir.

F q elemanlı bir sonlu cisim olduğu zaman GL(n,q) ile gösterilir. F bir sonlu cisim ise GL(n,F) sonlu bir gruptur.

2.4. TEOREM

F karakteristiği p olan bir cisim ve $|F|=q=p^m (m \in \mathbb{N})$ ise

$$|GL(n,F)| = q^{n(n-1)/2} \prod_{i=1}^{n} (q^i-1)$$

dır.

2.5. TEOREM

p sabit bir asal sayı, E sonlu bir Abel grup ve $|E| = p^d (d \in \mathbb{N})$ ise $O(E) \cong GL(d,p)$ dır.

2.6. TANIM

R bir halka ve M toplamlı bir Abel grup olsun. Her $r,s \in R$ ve $m,m_1,m_2 \in M$ için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa, M ye bir R- modül denir.

(i) $m(r+s) = mr+ms$

(ii) $(m_1+m_2)r = m_1r+m_2r$

(iii) $m(rs) = (mr)s$.

R 1_R birim elemanlı bir halka ve her $m \in M$ için

(iv) $m1_R = m$

ise, M ye birimsel R-modül denir.

2.7. TANIM

R bir halka, A bir R-modül ve B,A nın boş olmayan bir altkümesi olsun. B,A nın bir toplamlı altgrubu ve her $r \in R$ ve $b \in B$ için $br \in B$ ise, B ye A nın bir altmodülü denir.

2.8. TEOREM

I bir indis kümesi ve her $i \in I$ için R nin R_i altmodülleri verilmiş olsun. Bu takdirde

$$\bigcap_{i \in I} R_i$$

de R nin bir altmodülüdür.

2.9. TANIM

R bir halka, A bir R-modül ve X A nın bir altkümesi olsun. X i içeren A nın bütün altmodüllerinin arakesitine X tarafından üretilen altmodül denir. X sonlu ve A yı üretiyorsa A ya sonlu üretenli denir.

2.10. TANIM

A bir R-modül ve B A nın bir altmodülü ise A/B bölüm grubu

$$(a+B)r=ar+B \qquad (r\in R, a+B\in A/B)$$

modül çarpımına göre bir R-modüldür. Bu modüle A nın B altmodülüne göre bölüm modülü denir.

2.11. TANIM

R bir halka, A ve B R-modüller ve $f:A\to B$ bir dönüşüm olsun. Her $a,b\in A$ ve $r\in R$ için

$$f(a+b)=f(a)+f(b) \quad \text{ve} \quad f(ar)=f(a)r$$

ise f e bir R-homomorfi denir.

Eğer f üzerine ve bire-bir ise f e bir R-izomorfi denir ve $A\cong B$ yazılır.

A ve B R-modüller olmak üzere A dan B ye bütün R-homomorfilerin kümesini $\mathrm{Hom}_R(A,B)$ ile gösterelim. $f,g\in \mathrm{Hom}_R(A,B)$ homomorfilerinin toplamını aşağıdaki gibi tanımlıyalım.

$$(f+g)(a) = f(a)+g(a) \qquad (a\in A)$$

Bu takdirde $\mathrm{Hom}_R(A,B)$ bir Abel gruptur.

2.12. TEOREM

R bir halka ve A,A',A" ve B R-modüller olsun. Bir $\alpha:A\to A'$ R-homomorfisi $\mathrm{Hom}_R(A',B)$ den $\mathrm{Hom}_R(A,B)$ ye bir α^* homomorfisi meydana getirir. Bu homomorfi $f\in \mathrm{Hom}_R(A',B)$ ve $a\in A$ olmak üzere

$$\alpha^*(f)(a)=f(\alpha(a))$$

ile verilir. $\alpha,\beta\in \mathrm{Hom}_R(A,A')$ ise $(\alpha+\beta)^*=\alpha^*+\beta^*$ dır. $\gamma:A'\to A''$ bir R-homomorfi ise, $(\alpha\gamma)^*=\gamma^*\alpha^*$ dır.

2.13. TANIM

X herhangi bir küme ve F bir Abel grup olsun. Aşağıdaki iki şart sağlanıyorsa, F ye X üzerinde bir serbest Abel grup denir.

(i) Bir $i:X\to F$ dönüşümü vardır.

(ii) G bir Abel grup olmak üzere $g:X\to G$ herhangi bir dönüşüm ise, $g=fi$ olacak şekilde birtek $f:F\to G$ homomorfisi vardır.

$i(X)$ e F nin serbest üretenlerinin kümesi adı verilir.

2.14 TANIM

F bir R-modül ve X herhangi bir küme olsun. Aşağıdaki iki şart sağlanıyorsa, F ye X üzerinde bir serbest R-modül denir.

(i) Bir $i:X \to F$ dönüşümü vardır.

(ii) A herhangi bir R-modül olmak üzere $\alpha:X \to A$ bir dönüşüm ise, $\alpha = i\beta$ olacak şekilde birtek $\beta:F \to A$ homomorfisi vardır.

Genellikle $X \subseteq F$ olarak alınır. Buradaki i dönüşümü bire-bir dir.

BÖLÜM II

GRUP GENİŞLEMESİ VE KOHOMOLOJİ TEORİSİ

3. GRUP GENİŞLEMESİ

3.1. TANIM

G bir grup ve $H \trianglelefteq G$ olsun. $F=G/H$ yazılır ve G ye H ın F ile bir genişlemesi denir.

Genişleme teorisi, H ın F ile bir genişlemesinin yapısı problemini ilgilendirir. Bunun için verilen H ve F gruplarının özelliklerini kullanır. Bu nedenle, esas problem H ın F ile mümkün bütün genişlemelerini bulmaktır.

H ve F grupları verilsin. F nin elemanlarını $1, \sigma, \tau, \rho, \ldots$ gibi harflerle göstereceğiz. H ın F ile bir genişlemesi G olsun. Bu durumda bir $\sigma \in F$ elemanı H ın G deki bir sol yan sınıfıdır. Herbir sınıftan bir temsilci seçelim. $\sigma \in F$ elemanının temsilcisi $t(\sigma)$ olsun. Notasyonu basitleştirmek için H sınıfının temsilcisinin birim elemanı; yani $t(1)=1$ olduğunu kabul edeceğiz. $t(\sigma)t(\tau) \in \sigma\tau$ dır. Bu nedenle

(3.2) $$t(\sigma)t(\tau)=t(\sigma\tau)f(\sigma,\tau)$$

olacak şekilde bir $f(\sigma,\tau) \in H$ elemanı bulabiliriz.

$H \trianglelefteq G$ olduğundan herbir $t(\sigma)$ elamanının eşleniği ile H ın bir $T(\sigma)$ otomorfisi meydana getirilir. Genelde, $T(\sigma)$ otomorfisi $t(\sigma)$ temsilcisinin seçimine bağlıdır. Tanıma göre,

(3.3) $$t(\sigma)^{-1}ht(\sigma)=T(\sigma)(h) \qquad (h \in H)$$

dır. $t(1)=1$ olduğundan her $\sigma,\tau \in F$ için aşağıdaki formüller sağlanır.

(3.4) $$T(1)=1, \quad f(\sigma,1)=f(1,\tau)=1$$

(3.2) formülünden

(3.5) $\quad T(\sigma)T(\tau) = T(\sigma\tau)i_{f(\sigma,\tau)}$

yazabiliriz. Burada $i_{f(\sigma,\tau)}$, $f(\sigma,\tau)$ elemanı ile oluşturulan H ın iç otomorfisidir. Yine (3.2) formülünden

$$(t(\sigma)t(\tau))t(\rho) = t(\sigma\tau)f(\sigma,\tau)t(\rho)$$
$$= t((\sigma\tau)\rho)f(\sigma\tau,\rho)T(\rho)(f(\sigma,\tau))$$

dır. Diğer yandan

$$t(\sigma)(t(\tau)t(\rho)) = t(\sigma(\tau\rho))f(\sigma,\tau\rho)f(\tau,\rho)$$

dır. Asosiyatif kurala göre

(3.6) $\quad f(\sigma,\tau\rho)f(\tau,\rho) = f(\sigma\tau,\rho)T(\rho)(f(\sigma,\tau))$

dır.

3.7 TANIM

H grubunun otomorfilerinin bir $\{T(\sigma)\}$ ailesi ve H ın elemanlarının bir $\{f(\sigma,\tau)\}$ ailesi (3.4), (3.5) ve (3.6) şartlarını sağlıyorsa, f ye T ailesine ait bir faktör kümesi denir. Yukarıdaki gibi, f faktör kümesi G genişlemesinden elde edilmiş ise, f e G genişlemesi ile ilgili faktör kümesi denir.

G genişlemesi ile ilgili faktör kümesi yalnızca G genişlemesine bağlı değildir. Aynı zamanda H ın bir t transversalinin seçimine de bağlıdır. ((3.4) şartları ilerdeki tartışmalar için gerekli değildir. Fakat bazı hesapların basitleştirilmesine yardım eder.)

Aşağıdaki teorem sağlanır.

3.8. TEOREM

$\{f(\sigma,\tau)\}$,H ın otomorfilerinin bir $\{T(\sigma)\}$ ailesine ait bir faktör kümesi olsun. Bu takdirde, H ın F ile bir G genişlemesi vardır, öyle ki H ın uygun bir transversalinin seçimine göre f G genişlemesi ile ilgili faktör kümesidir.

İSPAT.

FxH kümesinde aşağıdaki gibi bir işlem tanımlıyalım.

(3.9) $\quad (\sigma,x)(\tau,y)=(\sigma\tau,f(\sigma,\tau)\,T(\tau)(x)y)$

FxH kümesinin bu işlem altında bir grup oluşturduğunu göstereceğiz. Önce asosiyatif kuralı gösterelim. Tanıma göre,

$$((\sigma,x)(\tau,y))(\rho,z)=((\sigma\tau)\rho\;\; f(\sigma\tau,\rho)T(\rho)(f(\sigma,\tau)T(\tau)(x)y)z)$$

dır. (3.5) ve (3.6) dan dolayı sağ taraftaki ikinci terim

$f(\sigma\tau,\rho)T(\rho)(f(\sigma,\tau))T(\tau\rho)if(\tau,\rho)xT(\rho)(y)z=f(\sigma,\tau\rho)T(\tau\rho)(x)f(\tau,\rho)T(\rho)(y)z$
ifadesine eşittir. Gerçekten,

$$\begin{aligned}f(\sigma\tau,\rho)T(\rho)(f(\sigma,\tau)T(\tau)(x)y)z&=f(\sigma\tau,\rho)T(\rho)(f(\sigma,\tau))T(\rho)(T(\tau)(x))T(\rho)(y)z\\&=f(\sigma,\tau\rho)f(\tau,\rho)T(\tau)T(\rho)(x)T(\rho)(y)z\\&=f(\sigma,\tau\rho)f(\tau,\rho)T(\tau\rho)if(\tau,\rho)(x)T(\rho)(y)z\\&=f(\sigma,\tau\rho)f(\tau,\rho)f(\tau,\rho)^{-1}T(\tau\rho)(x)f(\tau,\rho)T(\rho)(y)z\\&=f(\sigma,\tau\rho)T(\tau\rho)(x)f(\tau,\rho)T(\rho)(y)z\end{aligned}$$

dır. Diğer yandan,

$$\begin{aligned}(\sigma,x)((\tau,y)(\rho,z))&=(\sigma,x)(\tau\rho,f(\tau,\rho)T(\rho)(y)z)\\&=(\sigma(\tau\rho),f(\sigma,\tau\rho)T(\tau\rho)(x)f(\tau,\rho)T(\rho)(y)z)\end{aligned}$$

dır. Bu FxH da tanımlanan işlemin asosiyatiflik kuralını sağladığını gösterir. Birim eleman $(1,1)$ çiftidir. (σ,x) elemanının tersi (σ^{-1},y) dır. Burada

$$y^{-1}=f(\sigma,\sigma^{-1})T(\sigma^{-1})(x)$$

dır. y nin tanımından

$$(\sigma,\ x)(\sigma^{-1},y)=(1,1)$$

dır. Diğer

$$(\sigma^{-1},y)(\sigma,x)=(1,1)$$

formülü (3.5) de $(\sigma\longrightarrow\sigma^{-1},\ \tau\longrightarrow\sigma)$, (3.4) ve (3.6) de $(\tau=\sigma^{-1},\rho=\sigma)$ alınarak ispat edilir.

FxH kümesi üzerinde (3.9) işlemi ile oluşturulan grup G olsun. Bu takdirde G ye, $\{T(\rho),f(\sigma,\tau)\}$ faktör kümesinden yapılmış grup diyeceğiz. (3.9) dan görüldüğü gibi $(\sigma,x)\longmapsto\sigma$ dönüşümü G den F üzerine bir homomorfidir. Bu homomorfinin çekirdeğini K ile gösterirsek,

$$K=\{(1,x)\mid x\in H\}$$

dır. Yine (3.9) dan $(1,x)\longmapsto x$ dönüşümünün K dan H üzerine bir izomorfi olduğu da görülür. Böylece, G grubu H a izomorf bir grubun F ile bir genişlemesidir. K nın herbir sınıfından bir $(\sigma,1)$ temsilcisi seçebiliriz. Bu takdirde aşağıdaki formülleri elde ederiz.

$$(\sigma,1)(\tau,1)=(\sigma\tau,f(\sigma,\tau))=(\sigma\tau,1)(1,f(\sigma,\tau))$$

$$(\sigma,1)^{-1}(1,x)(\sigma,1)=(1,T(\sigma)(x))$$

Bu formülleri (3.2) ve (3.3) ile karşılaştırırsak G genişlemesi ile ilgili faktör kümesinin kesinlikle $\{T(\rho),f(\sigma,\tau)\}$ olduğunu görürüz.

3.8 e göre verilen bir H grubunun bir F faktör grubu ile genişlemesi problemi, faktör kümeleri problemine indirgenir. Ancak, verilen bir G grubu için karşılık gelen faktör kümesi tek değildir. H ın diğer bir $\{t'(\sigma)\}$ transversalini $t'(1)=1$ olacak şekilde seçersek, her $\sigma \in F$ için

$$t'(\sigma)=t(\sigma)h(\sigma)$$

olacak şekilde H ın elemanlarının bir $\{h(\sigma)\}$ ailesi vardır. Bu nedenle, karşılık gelen $\{T'(\sigma)\}$ otomorfilerinin ailesi

$$(3.10) \qquad T'(\sigma)=T(\sigma)ih(\sigma) \qquad (\sigma \in F)$$

bağıntısını sağlar. Burada $ih(\sigma)$, $h(\sigma)$ elemanı ile oluşturulan iç otomorfiyi gösterir. Daha fazla olarak

$$(3.11) \qquad f'(\sigma,\tau)=h(\sigma\tau)^{-1}f(\sigma,\tau)T(\tau)(h(\sigma))\,h(\tau)$$

dır. Bu formül aşağıdaki gibi ispat edilir.

$$\begin{aligned}
t'(\sigma)t'(\tau) &= t(\sigma)h(\sigma)t(\tau)h(\tau) \\
&= t(\sigma)t(\tau)t(\tau)^{-1}h(\sigma)t(\tau)h(\tau) \\
&= t(\sigma\tau)f(\sigma,\tau)T(\tau)(h(\sigma))h(\tau) \\
&= t(\sigma\tau)f(\sigma,\tau)T(\tau)(h(\sigma))h(\tau) \\
&= t'(\sigma\tau)h(\sigma\tau)^{-1}f(\sigma,\tau)T(\tau)(h(\sigma))h(\tau) \\
&= t'(\sigma\tau)f'(\sigma,\tau)
\end{aligned}$$

Buradan

$$f'(\sigma,\tau)=h(\sigma\tau)^{-1}f(\sigma,\tau)T(\tau)(h(\sigma))h(\tau)$$

bulunur. Burada $h(1)=1$ olarak alınıyor.

3.12. TANIM

(3.10) ve (3.11) şartlarını sağlayan H ın elemanlarının bir $\{h(\sigma)\}$ ailesi varsa

$$\{T(\rho),f(\sigma,\tau)\} \quad \text{ve} \quad \{T'(\rho),f'(\sigma,\tau)\}$$

faktör kümelerine ilgilidir veya denktir denir.

3.13. TEOREM

İlgili faktör kümelerinde yapılmış iki genişleme izomorftur.

İSPAT.

FxH kümesi üzerinde (3.9) formülü ile tanımlanan işleme göre

$$\{T(\rho),f(\sigma,\tau)\}$$

faktör kümesinden yapılmış genişleme G grubu olsun. Benzer şekilde,

$$\{ T'(\rho),\ f'(\sigma,\tau) \}$$

faktör kümesinden yapılmış genişleme de G' olsun. İki faktör kümesi ilgili ise, (3.10) ve (3.11) şartlarını sağlayan H ın elemanlarının bir $\{ h(\sigma) \}$ ailesi vardır. Bir $\varphi : G \longrightarrow G'$ dönüşümünü $(\sigma,x) \longmapsto (\sigma,h(\sigma)^{-1}x)$ ile tanımlıyalım. Tanımdan ve (3.10) ve (3.11) formüllerinden φ nin G den G' içine bir izomorfi olduğu çıkar. Gerçekten aşağıdaki formül G' de sağlanır.

$$(\sigma,h(\sigma)^{-1}x)(\tau,h(\tau)^{-1}y)=(\sigma\tau,f'(\sigma,\tau)T'(\tau)(h(\sigma)^{-1}x)h(\tau)^{-1}y)$$

(3.10) ve (3.11) formüllerine göre sağ taraftaki ikinci terim

$$h(\sigma\tau)^{-1}f(\sigma,\tau)T(\tau)(\ x)y$$

ifadesine eşittir. G de de (3.9) formülü geçerli olduğundan

$$\begin{aligned}\varphi\ ((\sigma,x)(\tau,y)) &= \varphi((\sigma\tau,f(\sigma,\tau)T(\tau)(x)y))\\ &=(\sigma\tau,h(\sigma\tau)^{-1}f(\sigma,\tau)T(\tau)(x)y)\\ &= \varphi((\sigma,x)\ \varphi\ ((\tau,y))\end{aligned}$$

dır. Ohalde φ bir homomorfidir. φ aynı zamanda bire-bir ve üzerine olduğundan bir izomorfidir. Ayrıca $\varphi\ ((1,x))=(1,x)$ dır.

OutH=O(H)/İ(H) bölüm grubunda $T(\sigma)$ yı içeren sınıfın $t(\sigma)$ temsilcilerinin seçiminden bağımsız olduğu (3.10) formülünden görülür. F den OutH içine

$$\psi(\sigma)=T(\sigma)\dot{I}(H)$$

şeklinde tanımlanan bir ψ dönüşümü vardır. (3.5) formülüne göre ψ bir homomorfidir. Bu homomorfi yalnızca G ye bağlıdır. $\psi = \psi_G$ yazacağız. ψ_G nin G genişlemesini tektürlü olarak belirlediği bir hal vardır. Aşağıda bunu göstereceğiz.

3.14. TEOREM

H,F iki grup ve H ın F ile bir genişlemesi G olsun. $Z(H)=\{1\}$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde, G grubunun yapısı ψ_G homomorfisi ile tektürlü olarak belirlenir. Daha fazla olarak ψ F den OutH içine bir homomorfi ise $\psi_G=\psi$ olacak şekilde H ın F ile bir G genişlemesi vardır. Bu halde, G nin izomorfizm sınıfı tektürlü olarak belirlenir. Bütün genişlemeler FxO(H) direkt çarpımında gerçekleştirilir. Böylece, H ın F ile bir G genişlemesi FxO(H) ın $U\cap O(H)=\dot{I}(H)$ ve $\pi(U)=F$ şartlarını sağlayan bir U altgrubuna izomorftur. Burada π , FxO(H) dan birinci faktör F üzerine izdüşümdür.

İSPAT.

H ın F ile bir genişlemesi G olsun. $Z(H)=\{1\}$ olduğundan $H\cap C_G(H)=\{1\}$ dır. $H\trianglelefteq G$ olduğundan $C_G(H)\trianglelefteq G$ dır. Bu nedenle $G/C_G(H)$ bölüm grubu $O(H)$ ın bir L altgrubuna izomorftur. (1.35. Teorem) θ, $G/C_G(H)$ dan L altgrubu üzerine bu izomorfi olsun. θ aşağıdaki gibi tanımlanır. $g\in G$ elemanının eşleniği ile meydana getirilen H ın otomorfisi θ_g olsun. Bu takdirde $\theta, g\longmapsto\theta_g$ dönüşümü ile meydana getirilir. Açık olarak

$$\dot{I}(H)\subset L\subset O(H)$$

dır. $H\cap C_G(H)=\{1\}$ olduğundan, 1.64 e göre $G,(G/H)x(G/C_G(H))$ ın bir altgrubuna izomorftur.

Bu nedenle G, $FxO(H)$ ın bir U altgrubuna izomorftur. G nin bu gömüsünü daha detaylı belirleyeceğiz. 1.64 e göre $g\in G$ elemanının $FxO(H)$ daki görüntüsü (gH,θ_g) dır. $\sigma=gH$ ise $T(\sigma)=\theta_g i_h$ dır. ψ_G nın tanımına göre $\psi_G(F)=L/\dot{I}(H)$ yazabiliriz. Bir $\sigma\in F$ için, $\psi_G(\sigma)$, $\dot{I}(H)$ ın bir sınıfıdır. ρ, $\psi_G(\sigma)$ da içerilen L nin bir elemanı ise $\theta(G)\supset\dot{I}(H)$ olduğundan bir $g\in G$ elemanı vardır, öyle ki $\sigma=gH$ ve $\rho=\theta_g$ dır. Bu nedenle G nin $FxO(H)$ daki görüntüsü; F, çek ψ_G, L ve $\dot{I}(H)$ ve F/çek ψ_G dan $L/\dot{I}(H)$ üzerine ψ_G ile meydana getirilen f izomorfisi ile tanımlanan

$$U=\{(gH,\theta_g)\mid gH\in F,\theta_g\in L,\ f((gH)\text{çek }\psi_G)=\theta_g\dot{I}(H)\}$$

altgrubuna izomorftur. (1.62). Bu altgruplar ve izomorfi yalnızca ψ_G ile belirlenir. Dolayısı ile G nin yapısı ψ_G ile tektürlü olarak belirlenir.

ψ nın F den OutH içine bir homomorfi olduğunu kabul edelim. $L/\dot{I}(H)$, ψ altında F nin görüntüsü olsun. (1.62) ye göre F, çek ψ, L, $\dot{I}(H)$ altgrupları ve F/çek ψ dan $L/\dot{I}(H)$ üzerine ψ ile meydana getirilen izomorfi $FxO(H)$ ın tekbir G altgrubunu tanımlar. Tekrar 1.62 ye göre

$$G\cap O(H)=\dot{I}(H) \quad \text{ve} \quad G/\dot{I}(H)\cong F=\pi(G)$$

dır. Burada π, F üzerine izdüşümdür. $Z(H)=\{1\}$ olduğundan $\dot{I}(H)\cong H$ dır. Dolayısı ile G, H ın F ile bir genişlemesidir ve $\psi_G=\psi$ dır.

$\{T(\rho), f(\sigma,\tau)\}$ faktör kümesinden yapılmış G grubunun tanımından hemen görülebileceği gibi, her $\sigma,\tau \in F$ için $f(\sigma,\tau)=1$ ise G , T etkisine göre yarıdirekt çarpımdır. Genelde; G genişlemesi ile ilgili faktör kümesi trivial farktör kümesine denk ise, 3.13 e göre G genişlemesi H ve F nin yarıdirekt çarpımına izomorftur. Trivial faktör kümesi; her $\sigma,\tau \in F$ için $f(\sigma,\tau)=1$ olacak şekilde tanımlanan f faktör kümesidir. Tersine olarak bir yarıdirekt çarpım ile ilgili faktör kümesi trivial faktör kümesine denktir.

Bazen, grup genişlemesini çalışmak için tam dizi notasyonunu kullanmak daha uygun olabilir.

Grupların bir $\{G_n\}$ dizisi ve her n için bir $f_n : G_n \longrightarrow G_{n+1}$ homomorfisi verilmiş olsun. Bazen gruplar arasındaki homomorfileri oklarla göstereceğiz.

(3.15) $\ldots\ldots\ldots \longrightarrow G_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} G_n \xrightarrow{f_n} G_{n+1} \longrightarrow \ldots\ldots$

3.16. TANIM

Eğer her n için $\mathrm{res}f_{n-1} = \mathrm{çek}f_n$ ise yukarıdaki (3.15) dizisine tam dizi denir.

Buna göre; G nin H ın F ile bir genişlemesi olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$\{1\} \longrightarrow H \longrightarrow G \longrightarrow F \longrightarrow \{1\}$$

dizisinin tam olmasıdır.

Burada; $H \longrightarrow G$ H ın G deki injeksiyonu, yani H dan G ye $h \longmapsto h$ ile tanımlanan dönüşüm ve $G \longrightarrow F$ G den F üzerine doğal homomorfidir.

3.17. TANIM

$$\{1\} \longrightarrow A \xrightarrow{\varkappa} B \xrightarrow{\lambda} C \longrightarrow \{1\}$$

dizisini gözönüne alalım. B grubu $\varkappa(A)$ nın C ile bir genişlemesi ise bu diziye kısa tam dizi denir.

Aşağıda grup genişlemeleri yerine kısa tam dizileri kullanacağız.

Genel olarak bir diagram; grupların bir kolleksiyonu ile bu grupların bazıları arasındaki homomorfilerin bir kolleksiyonudur. Örneğin;

$$\begin{tikzcd}
\{1\} \arrow[r] & A \arrow[r, "\varkappa"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & \{1\} \\
\{1\} \arrow[r] & A' \arrow[r, "\sigma"] & B' \arrow[r, "\rho"] & C' \arrow[r] & \{1\}
\end{tikzcd}$$

bir diagramdır. Yukarıdaki diagramda A dan B' ye $\varkappa\beta$ ve $\alpha\sigma$ dönüşümleri vardır. Eğer $\alpha\sigma = \varkappa\beta$ ise, sol kare komütatif bir diagramdır diyeceğiz. Buna ek olarak $\lambda\gamma = \beta\rho$ ise yukardaki diagrama komütatif denir.

3.18 TEOREM

Yukarıdaki diagramın komütatif, üst ve alt satırların tam olduğunu kabul edelim. Eğer α ve γ monomorfi (epimorfi veya izomorfi) ise β da monomorfi (epimorfi veya izomorfi) dır.

İSPAT.

α ve γ monomorfi olsun β nın monomorfi olduğunu göstereceğiz. Bir $b \in B$ için $\beta(b)=1$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde,

$$1= \beta\rho(b)= \lambda\gamma(b)= \gamma(\lambda(b))$$

yazabiliriz. γ bir monomorfi olduğundan $\lambda(b)=1$ dır. Varsayıma göre üst satır tamdır. Buradan çek λ=res$\varkappa$ dır. Bu nedenle, $b= \varkappa(a)$ olacak şekilde bir $a \in A$ vardır. Buradan

$$1= \beta(b)= \varkappa\beta\ (a)$$

yazabiliriz. Diagramın komütatifliği

$$\varkappa\beta = \alpha\sigma \qquad \text{ve} \qquad \alpha\sigma(a)=1$$

eşitliklerini verir. Fakat varsayıma göre α ve σ bire-bir dir. Bu nedenle

$$a=1 \qquad \text{ve} \qquad b= \varkappa(a)=1$$

dır. Bu β nın monomorfi olduğunu ispatlar.

α ve γ nın üzerine olduğunu kabul edelim. $b' \in B'$ ise $b' \in \beta(B)$ olduğunu göstereceğiz. γ üzerine olduğundan $\rho(b')= \gamma(c)$ olacak şekilde bir $c \in C$ elemanı vardır. Varsayıma göre üst satır tamdır. Buradan bir $b \in B$ için $c= \lambda(b)$ dır. Böylece diagramın komütatifliğinden

$$\rho(b')= \lambda\gamma\ (b)= \rho(\ \beta(b)$$

yazabiliriz. $b'= \beta(b)\ b''$ olsun. Bu takdirde $\rho(b'')=1$ dır. Alt satır tam olduğundan çek ρ=res σ dır. Bu nedenle, $\sigma(a')=b''$ olacak şekilde bir $a' \in A'$ vardır. α üzerine olduğundan $\alpha(a)=a'$ olacak şekilde bir

$a \in A$ vardır. Buradan,

$$b'' = \alpha\sigma\,(a) = \beta(\varkappa(a)) \text{ ve } b' = \beta(b\varkappa(a)) \in \beta(B) \text{ bulunur.}$$

3.19.TANIM

H, F iki grup ve H ın F ile iki genişlemesi G ve G' olsun. Aşağıdaki diagramı komutatif yapacak şekilde bir $\varphi : G \longrightarrow G'$ homomorfisi varsa G genişlemesi G' genişlemesine denktir denir.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\{1\} & \longrightarrow & H & \longrightarrow & G & \longrightarrow & F & \longrightarrow & \{1\} \\
 & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \downarrow & & \\
\{1\} & \longrightarrow & H & \longrightarrow & G' & \longrightarrow & F & \longrightarrow & \{1\}
\end{array}$$

Yukarıdaki diagramda; iki satır G ve G' genişlemelerini gösteren kısa tam diziler, $H \longrightarrow H$ ve $F \longrightarrow F$ homomorfileri idantik dönüşümlerdir. G ve G' bir φ homomorfisi ile denk ise, 3.18 e göre φ bir izomorfidir. Böylece, φ^{-1} ters izomorfisi ile G' de G ye denktir. Bunun sonucu olarak 3.19, H ın F ile genişlemeleri arasında bir denklik bağıntısı tanımlar. Denk genişlemeler izomorftur.

3.20. TEOREM

G ve G' iki genişleme olsun. G genişlemesinin G' genişlemesine denk olabilmesi için gerek ve yeter şart, G ile ilgili faktör kümesinin G' ile ilgili faktör kümesine denk olmasıdır.

İSPAT.

G ve G' genişlemeleri denk ise 3.19 daki komütatif diagramı yazabiliriz. H ın G deki bir $\{t(\sigma)\}$ transversalini seçtiğimizi ve bir $\{T(\rho), f(\sigma,\tau)\}$ faktör kümesi aldığımızı kabul edelim. Diagramın komütatifliğinden, $\varphi\,(t(\sigma))$, σ ya karşılık gelen sınıfta içerilen G' nün bir elemanıdır. Bu nedenle; G' de $\{\varphi\,(t(\sigma))\}$ transversalini seçersek, (3.2) ve (3.3) formüllerine φ nin uygulanması ile G' ile ilgili faktör kümesinin gerçekten $\{T(\rho), f(\sigma,\tau)\}$ olduğu görülür. φ, H ın her elemanını invaryant bırakır. (Sol karenin komütatifliğinden). Böylece, denk genişlemeler denk faktör kümelerine neden olur.

Tersi de doğrudur. Eğer iki faktör kümesi denk ise, 3.13 ün ispatında yaptığımız G den G' üzerine bir φ izomorfisi vardır. φ nin 3.19 daki diagramı komütatif yaptığını görebiliriz.

4. GRUPLARIN KOHOMOLOJİSİ

Aşağıda bir Abel grubunun genişlemelerinin denklik sınıflarını gözönüne alacağız. F in kayfi bir grup olması yanında H grubunun Abel olduğunu kabul edeceğiz. Bu halde $\dot{I}(H)=\{1\}$ dır. Böylece, $T(\sigma)$ otomorfisi transversallerin seçiminden bağımsızdır ve

$$T(\sigma)\,T(\tau) = T(\sigma\tau)$$

sağlanır. Dolayısı ile F, H üzerine T etkisine göre etki eder. $T(\sigma)(x)=x^{\sigma}$ yazacağız. Bu şart bir $\{f(\sigma,\tau)\}$ faktör kümesi için

$$f(\sigma,\tau\rho)f(\tau,\rho) = f(\sigma\tau,\rho)f(\sigma,\tau)^{\rho}$$

dır.

Biz verilen T etkisine göre yalnızca faktör kümeleri ile ilgileneceğiz. Bunun için, keyfi H ve F grupları gibi T etkisini gözönüne alacağız.

H ın Abel olması durumunda, denklik sınıflarının kümesini bir Abel grubu yapmak için faktör kümeleri arasında bir işlem tanımlıyabiliriz. f ve g iki faktör kümesi ise f+g toplamını

$$(f+g)(\sigma,\tau)=f(\sigma,\tau)g(\sigma,\tau)$$

formülü ile tanımlıyalım. f+g de bir faktör kümesidir. Açık olarak faktör kümelerinin bütünü bir Abel grup oluşturur. Her $\sigma,\tau \in F$ için $f_0(\sigma,\tau)=1$ olacak şekilde tanımlanan f_0 faktör kümesi birim elemandır. f in inversi,

$$g(\sigma,\tau) = f(\sigma,\tau)^{-1}$$

şartını sağlayan g faktör kümesidir. Faktör kümelerinin bu Abel grubunu $Z^2(F,H)$ ile gösterelim.

$h:F \longrightarrow H$, $h(1)=1$ olacak şekilde bir dönüşüm olsun.

$$f(\sigma,\tau) = h(\sigma)^{\tau}\,h(\tau)h(\sigma\tau)^{-1}$$

ifadesi FxF den H a bir dönüşüm tanımlar. f aynı zamanda bir faktör kümesidir. $f=\delta h$ olsun. δh formundaki bütün faktör kümelerini $B^2(F,H)$ ile gösterelim.

$$\delta(h+k) = \delta h+\delta k$$

sağlandığından $B^2(F,H)$, $Z^2(F,H)$ ın bir altgrubunu oluşturur.

$$H^2(F,H) = Z^2(F,H)/B^2(F,H)$$

bölüm grubuna 2-boyutlu kohomoloji grubu denir. 3.11 e göre; iki faktör kümesinin denk olabilmesi için gerek ve yeter şart bu kümelerin $B^2(F,H)$ ın aynı bir sınıfına ait olmasıdır. 3.20 ye göre H ın F ile genişlemelerinin denklik sınıfları ile kohomoloji grubunun elemanları arasında bire-bir bir tekabül vardır.

Herhangi bir n pozitif tamsayısı için n-boyutlu kohomoloji grubu tanımlanabilir. Kohomoloji teorisi ile ilgili daha geniş bir incelemeye girmeyeceğiz. Biz,burada,kohomoloji teorisinin daha elemanter bazı durumlarını sunacağız ve grup teoriye bazı uygulamalarını vereceğiz.

$\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası olsun. Bir G grubunun $\mathbb{Z}$ üzerindeki grup halkasını aşağıdaki gibi tanımlayacağız.

4.1. TANIM

G bir grup ve $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası olsun. $\sum n_g g$ $(n_g \in \mathbb{Z}, g \in G)$ formundaki bütün sonlu toplamların kümesi $\mathbb{Z}(G)$ olsun.

$$\mathbb{Z}(G) = \{ \sum n_g g \mid n_g \in \mathbb{Z} \ , \ g \in G \}$$

Bu küme üzerindeki toplama ve çarpma işlemlerini aşağıdaki gibi tanımlıyalım.

$$\sum n_g g + \sum m_g g = \sum (n_g + m_g) g, \ (\sum n_g g)\ (\sum m_g g) = \sum_g (\sum_x n_x m_{x^{-1}g}) g$$

Bu durumda $\mathbb{Z}(G)$ bir halka olur. Bu halkaya G nin $\mathbb{Z}$ üzerindeki grup halkası denir.

$\Gamma = \mathbb{Z}(G)$ olsun. Genellikle Γ -modüllerle çalışacağız. Aksi kesinlikle belirtilmedikçe Γ -modüller arasındaki homomorfiler daima Γ -homomorfiler olarak alınacak.

4.2. TEOREM

Bir Γ -modül F nin bir X altkümesinin aşağıdaki özellikleri denktir.

(i) X den bir Γ -modül A ya bir dönüşüm tek türlü olarak F nin A içine bir homomorfisine genişletilir.

(ii) Her $x \in X$ için, $x\gamma \longmapsto \gamma$ dönüşümü $x\Gamma$ ve Γ arasında bir Γ -izomorfidir. Ayırca F, $x\Gamma$ altmodüllerinin direkt toplamıdır.

İSPAT.

(ii)$\Rightarrow$(i). $F = \bigoplus_{x \in X} x\Gamma$, $i: X \longrightarrow F$ her $x \in X$ için $i(x)=x$ ile tanımlanan dönüşüm, $f:X \longrightarrow A$ bir dönüşüm ve $a \in F$ olsun.

$$a = \sum_{x \in X} x\gamma_x$$

şeklinde yazılabilir. Bu toplamda sonlu tane γ_x sıfırdan farklıdır.
Şimdi bir $\varphi : F \longrightarrow A$ dönüşümünü

$$\varphi(a) = \sum_{x \in X} f(x)\gamma_x$$

ile tanımlayalım. Bu dönüşümün bir Γ-homomorfi olduğunu göstereceğiz. $a,b \in F$ ve $\gamma \in \Gamma$ olsun. Tanıma göre,

$$\begin{aligned}\varphi(a+b) &= \varphi\Big(\sum_{x \in X} x\gamma_x + \sum_{x \in X} x\gamma_x\Big) = \varphi\Big(\sum_{x \in X} x(\gamma_x+\gamma_x)\Big)\\ &= \sum_{x \in X} f(x)(\gamma_x+\gamma_x) = \sum_{x \in X} f(x)\gamma_x + \sum_{x \in X} f(x)\gamma_x\\ &= \varphi(a) + \varphi(b)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\varphi(a\gamma) &= \varphi\Big(\Big(\sum_{x \in X} x\gamma_x\Big)\gamma\Big) = \varphi\Big(\sum_{x \in X} x(\gamma_x\gamma)\Big)\\ &= \sum_{x \in X} f(x)(\gamma_x\gamma) = \Big(\sum_{x \in X} f(x)\gamma_x\Big)\gamma\\ &= \varphi(a)\gamma\end{aligned}$$

dır. O halde φ bir Γ-homomorfidir.

(i)$\Longrightarrow$(ii). $x\Gamma$ dan Γ ya $x\gamma \longmapsto \gamma$ şeklinde tanımlanan ψ dönüşümü bir Γ-izomorfidir. Gerçekten $x\gamma_1, x\gamma_2 \in x\Gamma$ ve $\gamma \in \Gamma$ için

$$\psi(x\gamma_1+x\gamma_2) = \psi(x(\gamma_1+\gamma_2)) = \gamma_1+\gamma_2 = \psi(x\gamma_1) + \psi(x\gamma_2)$$

ve

$$\psi((x\gamma_1)\gamma) = \psi(x(\gamma_1\gamma)) = \gamma_1\gamma = \psi(x\gamma_1)\gamma$$

sağlanır. ψ nın üzerine ve bire-bir olduğu açıktır. Bu nedenle ψ bir Γ-izomorfidir.

Şimdi F nın $x\Gamma$ altmodüllerinin direkt toplamı olduğunu gösterelim. $F_0 = \bigoplus_{x \in X} x\Gamma$ olsun. Aşağıdaki diagrama dikkat edersek, hipoteze göre $if=i$ olacak şekilde birtek $f:F \longrightarrow F_0$ homomorfisi vardır.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"'] & F \arrow[d, "i_F"] \arrow[dl, "f"'] \\ F_0 \arrow[r, "f_0"] & F \end{tikzcd}$$

Diğer yandan $F_0 \subseteq F$ dır. f_0 ile F_0 ın F içine injeksiyonunu gösterirsek, ff_0, F den F e bir homomorfidir ve $iff_0=i$ şartını sağlar. Fakat, i_F idantik dönüşümü de $ii_F=i$ şartını sağlar. Hipoteze göre tektürlülükten $ff_0=i_F$ dır. Dolayısı ile $f_0=i_F$, yani $F_0=F$ olmalıdır.

Bu şartlardan birini sağlayan bir Γ -modül, X tarafından serbest olarak üretilen serbest Γ -modüldür.

4.3. TEOREM

Herhangi bir Γ -modül, bir serbest Γ -modülün bir homomorf resmidir.

İSPAT.

A herhangi bir Γ -modül olsun. $Y \subseteq A$ ve Y A yı üretsin. Bu takdirde Y üzerinde serbest olan bir F Γ -modülü vardır. 2.14 e göre her $y \in Y$ için $f(i(y))=y$ olacak şekilde bir $f:F \longrightarrow A$ homomorfisi mevcuttur. Y, A yı ürettiğinden f üzerinedir. Dolayısı ile $f(F) = A \cong F/\text{çek}f$ dır.

4.4. TEOREM

Γ-modüllerin aşağıdaki diagramında; satırın tam, $f\beta=0$ ve F nin serbest olduğunu kabul edelim. Bu takdirde bir $g:F \longrightarrow A$ homomorfisi $g\alpha = f$ olacak şekilde mevcuttur.

$$
\begin{tikzcd}
& F \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "f"] & \\
A \arrow[r, "\alpha"] & B \arrow[r, "\beta"] & C
\end{tikzcd}
$$

İSPAT.

X, F nin üretenlerinin bir kümesi olsun. $x \in X$ ise $\beta(f(x))=0$ dır. Buradan $f(x) \in \text{çek}\,\beta$ dır. Satır tam olduğundan $\text{çek}\beta = \alpha(A)$ dır. Bu nedenle, $\alpha(a_x)=f(x)$ olacak şekilde bir $a_x \in A$ vardır. 4.2 ye göre $x \longmapsto a_x$ dönüşümü F den A ya bir g homomorfisine genişletilebilir. $g(x)=a_x$ olduğundan her $x \in X$ için $g\alpha(x)=f(x)$ dır. Tekrar 4.2 ye göre F, $x\Gamma$ altmodüllerinin bir direkt toplamıdır. Bu nedenle, $g\alpha=f$ dır.

4.5. TANIM

$\gamma = \sum n_g g \in \Gamma$ ve $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$n(\sum n_g g) = (\sum n_g)n$$

yazarak $\mathbb{Z}$ yi bir Γ -modül olarak gözönüne alabiliriz. Buna trivial Γ -modül $\mathbb{Z}$ denir.

4.6. TANIM

X_i $(i=0,1,2,\ldots\ldots)$ serbest Γ -modüllerinde oluşan bir $\mathfrak{X}$ dizisi ve her i için bir $d_i : X_i \longrightarrow X_{i-1}$ homomorfisi verilmiş olsun. Eğer,

$$\mathfrak{X} : \ldots\ldots \longrightarrow X_n \xrightarrow{d_n} X_{n-1} \longrightarrow \ldots\ldots \longrightarrow X_1 \xrightarrow{d_1} X_0 \xrightarrow{d} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

dizisi tam ise $\mathfrak{X}$'e $\mathbb{Z}$ nin bir serbest çözücüsü denir.

A herhangi bir Γ-modül ve $\mathfrak{X}$, $\mathbb{Z}$ nin bir serbest çözücüsü ise,

$$\ldots\ldots \longleftarrow \mathrm{Hom}_\Gamma\ (X_1,A) \longleftarrow \mathrm{Hom}_\Gamma\ (X_0,A) \longleftarrow \mathrm{Hom}_\Gamma\ (\mathbb{Z},A) \longleftarrow 0$$

dizisini yazabiliriz. Burada

$$\mathrm{Hom}_\Gamma\ (X_{i-1},A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Gamma\ (X_i,A)$$

d_i^*, 2.12 deki gibi tanımlanır. 2.12 ye göre $d_i^*\, d_{i+1}^* = 0$ dır. Buradan $\mathrm{resd}_i^* \subset \mathrm{çekd}_{i+1}^*$ çıkar.

$$H^n(G,A) = \mathrm{çekd}_{n+1}^* / \mathrm{resd}_n^*$$

bölüm grubuna Γ ya (veya G nin etkisine) göre A nın n-boyutlu kohomoloji grubu denir. Kohomoloji gruplarındaki işlem genellikle toplama alınır.

$\mathbb{Z}$ nin serbest çözücülerinin seçiminden bağımsız, tektürlü olarak kohomoloji grubunu tanımlamak önemlidir. Bu iddiayı ispatlamak için aşağıdaki teoremi verelim.

4.7. TEOREM

$\mathfrak{X}$ ve $\mathfrak{Y}$ trivial Γ-modül $\mathbb{Z}$ nin iki serbest çözücüsü olsun.

$$\begin{array}{lccccccccc}
\mathfrak{X} : & \ldots\longrightarrow & X_2 & \longrightarrow & X_1 & \longrightarrow & X_0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\mathfrak{Y} : & \ldots\longrightarrow & Y_2 & \longrightarrow & Y_1 & \longrightarrow & Y_0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow 0
\end{array}$$

Bu takdirde, $\mathbb{Z}$ den $\mathbb{Z}$ ye idantik dönüşüm ile başlayan ve yukarıdaki diagramı komütatif yapan $f_i : X_i \longrightarrow Y_i$ homorfilerinin bir ailesi vardır. Eğer $\{f_i\}$ ve $\{f_i'\}$ diagramı komütatif yapan homomorfilerin iki ailesi ise $\{f_i\}$ ve $\{f_i'\}$ homotopiktir. Yani;

$$f_i - f_i' = h_i d_{i+1}' + d_i h_{i-1}$$

olacak şekilde X_i den Y_{i+1} içine h_i homomorfilerinin bir ailesi vardır. Burada $\{d_i\}$ $\mathfrak{X}$ in homomorfilerinin kümesi, $\{d_i'\}$ $\mathcal{Y}$ nin homomorfilerinin kümesidir.

İSPAT.

Bir i için yukarıdaki diagramın bir bölümünü komütatif yapan $f_0, f_1, \ldots, f_i$ homomorfilerini tanımladığımızı kabul edelim. Aşağıdaki diagrama bakalım.

$$\begin{tikzcd} X_{i+1} \arrow[r] & X_i \arrow[r] \arrow[d, "f_i"] & X_{i-1} \arrow[d, "f_{i-1}"] \\ Y_{i+1} \arrow[r] & Y_i \arrow[r] & Y_{i-1} \end{tikzcd}$$

$f=d_{i+1}f_i$ olsun. Bu takdirde komütatiflik ve üst satırın tamlığından

$$fd_i' = d_{i+1}f_id_i' = d_{i+1}d_if_{i-1} = 0$$

dır. Alt satır da tam olduğundan 4.4 e göre $f_{i+1}d_{i+1}'=f$ olacak şekilde bir $f_{i+1}: X_{i+1} \longrightarrow Y_{i+1}$ homomorfisi vardır. İndüksiyona göre komütatiflik şartlarını sağlayan homomorfilerin bir $\{f_i\}$ ailesi vardır.

Homomorfilerin bir $\{h_i\}$ ailesinin vardığı da i üzerine indüksiyonla ispatlanır.

$$f_{i-1}-f_{i-1}' = h_{i-1}d_i'+d_{i-1}h_{i-2}$$

bağıntısını sağlayan $h_0, h_1, \ldots, h_{i-1}$ homomorfilerini tanımladığımızı kabul edelim. $f=f_i-f_i'-d_ih_{i-1}$ olsun. Bu takdirde komutatiflik ve tamlıktan

$$\begin{aligned} fd_i' &= (f_i-f_i')d_i'-d_ih_{i-1}d_i \\ &= d_i(f_{i-1}-f_{i-1}') - d_ih_{i-1}d_i' = d_i(d_{i-1}h_{i-2}) = 0 \end{aligned}$$

dır. Yine 4.4 e göre $f = h_id_{i+1}'$ olacak şekilde bir $h_i: X_i \longrightarrow Y_{i+1}$ homomorfisi vardır.

4.8. TEOREM

$H^n(G,A)$ kohomoloji grubu tektürlü olarak belirlenir ve $\mathbb{Z}$ nin serbest çözücülerinin seçiminden bağımsızdır.

İSPAT.

$\mathfrak{X}$ ve $\mathcal{Y}$ iki serbest çözücü olsun. Bu takdirde 4.7 ye göre $\mathfrak{X}$ den $\mathcal{Y}$ ye homomorfilerin bir $\{f_i\}$ ailesi ve $\mathcal{Y}$ den $\mathfrak{X}$ e homomorfilerin bir $\{g_i\}$ ailesi vardır.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\mathfrak{X} : \dots \arrow[r] & X_i \arrow[r] \arrow[d, "f_i g_i"'] & X_{i-1} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, "h_{i-1}"'] & \dots \arrow[r] & X_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2 g_2"'] & X_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1 g_1"'] & X_0 \arrow[r] \arrow[d, "f_0 g_0"'] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \\
\mathfrak{X} : \dots \arrow[r] & X_i \arrow[r] & X_{i-1} \arrow[r] & \dots \arrow[r] & X_2 \arrow[r] & X_1 \arrow[r] & X_0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$\{f_i g_i\}$, $\mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{X}$ diagramını komütatif yapan homomorfilerin bir ailesidir. İdantik dönüşümlerin ailesi de $\mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{X}$ diagramını komütatif yaptığından, 4.7 ye göre bu iki aile homotopiktir. Yani

$$f_i g_i - 1 = h_i d_{i+1} + d_i h_{i-1}$$

bağıntısını sağlayan homomorfilerin bir $\{h_i\}$ ailesi vardır. ($h_{-1}=0$ alırsak, $i=0$ için bağıntı sağlanır) 2.12 ye göre g_i^* , $\mathrm{Hom}_\Gamma(X_i,A)$ yı $\mathrm{Hom}_\Gamma(Y_i,A)$ içine resmeder ve $g_i^*(d'_{i+1})^* = d_{i+1}^* g_{i+1}^*$ dır. Bu nedenle,

$$g_i^*(\text{çek}d_{i+1}^*) \subset \text{çek}(d'_{i+1})^*$$

ve

$$g_i^*(\text{res}d_i^*) \subset \text{res}(d'_i)^*$$

dır. Bu g_i^* ın

$$\text{çek}d_{i+1}^*/\text{res}d_i^* \quad \text{grubunu} \quad \text{çek}(d'_{i+1})^*/\text{res}(d'_i)^*$$

içine resmettiğini gösterir. Bunun sonucu olarak g_i^*, $\mathfrak{X}$ ile tanımlanan kohomoloji grubunu $\mathcal{Y}$ ile tanımlanan kohomoloji grubu içine resmeder. Benzer şekilde f_i^* ters yönde bir homomorfi verir.

$\{f_i g_i\}$ ve $\{1\}$ homotopik olduğundan

$$g_i^* f_i^* - 1^* = d_{i+1}^* h_i^* + h_{i-1}^* d_i^*$$

dır. $x \in \text{çek}d_{i+1}^*$ ise $(g_i^* f_i^*)(x) - x = d_i^*(h_{i-1}^*(x))$ dır. Bu, $g_i^* f_i^*$ ın $\mathfrak{X}$ ile tanımlanan kohomoloji grubu üzerinde idantik olduğunu gösterir. Benzer şekilde, $f_i^* g_i^*$ da $\mathcal{Y}$ ile tanımlanan kohomoloji grubu üzerinde idantiktir. Bu nedenle $H^n(G,A)$ kohomoloji grubu $\mathbb{Z}$ nin serbest çözücülerinin seçiminden bağımsızdır.

Trivial Γ-modül $\mathbb{Z}$ nin bir serbest çözücüsünün varlığı oldukça açıktır. 4.3 e göre, Γ-modül $\mathbb{Z}$ bir serbest Γ-modül X_0 ın bir homomorf resmidir. $X_0/K_1 \cong \mathbb{Z}$ olsun. K_1 çekirdeğini diğer serbest Γ-modül X_1 in X_1/K_2 bölüm modülü olarak ifade edebiliriz. Yani $K_1 \cong X_1/K_2$ olarak alınabilir. Bu işlemin tekrarlanmasıyla $\mathbb{Z}$ nin bir

$$\longrightarrow X_n \longrightarrow X_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

serbest çözücüsünü alabiliriz.

Kohomoloji gruplarını oluşturmak için özel bir çözücü faydalıdır. Aşağıdaki gibi $\mathbb{Z}$ nin bar çözücüsünü (standart çözücüsünü) tanımlayacağız.

n negatif olmayan bir tamsayı olsun. Sabit bir n için $[x_1|x_2|\ldots|x_n]$ sembollerini gözönüne alalım. Burada; $x_1,x_2,\ldots,x_n$ G nin birim olmayan elemanlarıdır. Eğer $x_1,x_2,\ldots,x_n$ elemanlarından herhangi biri G nin birim elemanı ise $[x_1|x_2|\ldots|x_n] = 0$ yazalım. B_n, böyle sembollerin tümü tarafından serbestçe üretilen serbest Γ-modül olsun. n=0 ise, B_0 içinde eleman olmayan köşeli parantez, yani [ ] ile serbestçe üretilen bir serbest Γ-modüldür. $B_0 \cong \Gamma$ dır. Bu nedenle, Γ dan $\mathbb{Z}$ içine $\varepsilon(\sum n_g g)=\sum n_g$ ile tanımlanan ε dönüşümüne karşılık B_0 dan $\mathbb{Z}$ içine bir ∂_0 Γ-homomorfisi vardır.

$$\begin{array}{ccc} B_0 & \xrightarrow{\varphi} & \Gamma \\ & \searrow^{\partial_0} & \downarrow \varepsilon \\ & & \mathbb{Z} \end{array}$$

$\partial_0 = \varphi\varepsilon$ olarak alınabilir. $n>0$ için B_n den B_{n-1} içine bir ∂_n Γ-homomorfisini aşağıdaki gibi tanımlayalım. B_n, $[x_1|x_2|\ldots|x_n]$ elemanlarının kümesi üzerinde serbest olduğundan bu semboller üzerinde yalnız $\partial=\partial_n$ yı aşağıdaki şekilde tanımlamak yeterli olacaktır.

$$\partial([x_1|x_2|\ldots|x_n]) = [x_2|x_3|\ldots|x_n] + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i[x_1|\ldots|x_ix_{i+1}|\ldots|x_n] + (-1)^n[x_1|\ldots|x_{n-1}]x_n$$

$\{B_n\}$ ve $\{\partial_n\}$ nin $\mathbb{Z}$ nin bir serbest çözücüsünü tanımladığını göstereceğiz. Her n için B_n den B_{n+1} içine bir s_n homomorfisini tanımlayacağız. (Bunlar Abel gruplarının homomorfileridir). Herbir B_n bir serbest Γ-modüldür. Bu nedenle, $x\in G$ olmak üzere $[x_1|\ldots|x_n]x$ elemanları ile serbestçe üretilen bir serbest Abel gruptur. s_n i aşağıdaki gibi tanımlayalım

$n=-1$ ise s_{-1} , $\mathbb{Z}$ den B_0 içine $n \longrightarrow n[\,]$ ile tanımlanan dönüşümdür. $n \geq 0$ ise

$$s_n([x_1|x_2|\ldots|x_n]x) = (-1)^{n+1}[x_1|x_2|\ldots|x_n|x]$$

şeklinde tanımlanır. Aşağıdaki formüller sağlanır.

$$s_{-1}\,\partial_0=1, \quad s_i\,\partial_{i+1}+\partial_i s_{i-1}=1 \quad (i \geqq 0)$$

Gerçekten,

$$(s_i\,\partial_{i+1}+\partial_i s_{i-1})([x_1|x_2|\ldots|x_i]x) = \partial_{i+1}((-1)^{i+1}[x_1|x_2\ldots|x_i|x])$$

$$+ s_{i-1}\{[x_2|\ldots|x_i]\,x+\sum_{n=1}^{i-1}(-1)^n[x_1|\ldots|x_n x_{n+1}|\ldots|x_i]x$$

$$+ (-1)^i[x_1|\ldots|x_{i-1}]\,x_i x\}$$

$$= (-1)^{i+1}[x_2|x_3|\ldots|x_i|x] + (-1)^i[x_2|\ldots|x_i|x]$$

$$+ (-1)^{i+1}(-1)^i[x_1|\ldots|x_{i-1}|x_i x] + [x_1|\ldots|x_{i-1}|x_i x]$$

$$+ (-1)^{i+1}\sum_{n=1}^{i-1}(-1)^n[x_1|\ldots|x_n x_{n+1}|\ldots|x_i|x]$$

$$+ (-1)^i\sum_{n=1}^{i-1}(-1)^n[x_1|\ldots|x_n x_{n+1}|\ldots|x_i|x]+[x_1|x_2|\ldots|x_i]\,x$$

$$= [x_1|x_2|\ldots|x_i]\,x$$

dır. Bu formüle göre $i \geqq 0$ için çek $\partial_i \subset$ res ∂_{i+1} dır.

$$\partial_i = s_i\,\partial_{i+1}\,\partial_i+\partial_i\,s_{i-1}\,\partial_i$$

formülünü de yazabiliriz. $i=0$ ise, $s_{-1}\,\partial_0=1$ olduğundan

$$s_0\,\partial_1\,\partial_0 = 0$$

dır. S_0 ın tanımına göre $S_0(B_0)$, B_1 in serbest üretenlerinin hepsini içerir. Bu nedenle; $\partial_1\,\partial_0 = 0$ alabiliriz. $i > 0$ ise,

$$\partial_i\,s_{i-1}\,\partial_i+\partial_i\,\partial_{i-1}\,s_{i-2} = \partial_i$$

ve

$$\partial_i\,\partial_{i-1}\,s_{i-2} = s_i\,\partial_{i+1}\,\partial_i$$

dır. Böylece, i üzerine indüksiyonla $\partial_{i+1}\cdot\partial_i= 0$ olduğu gösterilmiş olur. Buradan res $\partial_{i+1} \subset$ çek ∂_i yazabiliriz. Ters içermenin sağlandığını daha önce gösterdik. Ohalde res ∂_{i+1} = çek ∂_i, yani $\{\partial_n\}$ homomorfileri ile $\{B_n\}$ dizisi Γ-modül $\mathbb{Z}$ nin bir çözücüsüdür.

B_n yukarıda tanımlanan serbest Γ-modül ve A herhangi bir Γ-modül olmak üzere, $\mathrm{Hom}_\Gamma(B_n,A)$ aşağıda tanımlanan $C^n(G,A)$ toplamlı grubuna izomorftur. $C^n(G,A)$; $x_1,x_2,\dots,x_n \in G$ olmak üzere bütün n değişkenli $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ fonksiyonlarından oluşur. Burada; $f(x_1,x_2,\dots,x_n)\in A$ ve $x_1,x_2,\dots x_n$ elemanlarından herhangi biri G nin birim elemanı ise $f(x_1,x_2,\dots,x_n)=0$ dır. $C^n(G,A)$ nın elemanlarına normalize edilmiş ko-zincirler denir. $\delta = \partial^*$ homomorfisi

$$\delta f(x_1,x_2,\dots,x_n,x_{n+1}) = f(x_2,\dots,x_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(x_1,\dots,x_i x_{i+1},\dots,x_{n+1}) + (-1)^{n+1} f(x_1,\dots,x_n)x_{n+1} \tag{4.9}$$

formülü ile verilir. n=0 için $C^0(G,A)=A$ alırız ve her $a\in A$ için $\delta_1=\partial_1^*$ homomorfisini

$$(\delta_1 a)(x) = a-ax$$

formülü ile tanımlarız. çek$\delta_{n+1}=Z^n(G,A)$ ve res$\delta_n=B^n(G,A)$ yazalım. Bu grupların elemanlarına sırasıyla ko-devreler ve ko-sınırlar denir. Tanıma göre

$$H^n(G,A) = Z^n(G,A)/B^n(G,A)$$

dır.

Küçük boyutlu kohomoloji grupları ko-zincirler kullanılarak kolayca tanımlanabilir.

1-boyutlu kohomoloji grubu $H^1(G,A)$:

$$\text{çek}\,\delta_2=\{f \mid f(xy) = f(x)y+f(y)\}$$

ve

$$\text{res}\,\delta_1=\{g \mid g(x) = a-ax \ (a\in A)\}$$

olmak üzere verilir.

çekδ_2 nin bir elemanına bir türev (veya bir geçişli homomorfi) adı verilir. resδ_1 in elemanlarına iç türevler (veya esas geçişli homomorfiler) denir.

2-boyutlu kohomoloji grubu $H^2(G,A)$:

çek δ_3 ün bir elamanı,

$$f(x_2,x_3)-f(x_1x_2,x_3)+f(x_1,x_2x_3)-f(x_1,x_2)x_3 = 0$$

idantikliğini sağlar. Böylece f, G nin A üzerindeki etkisine göre bir faktör kümesinden başka birşey değildir. res δ_2,

$$f(x,y)=g(y)-g(xy)+g(x)y$$

formundaki dönüşümlerin kümesidir. A, üzerine G grubunun etki ettiği bir Abel grup olduğu zaman, $H^2(G,A)$, A nın G ile genişlemelerinin denklik sınıflarının grubudur.

G bir grup ve $K \leq G$ olsun. G ve K nın kohomoloji grupları arasındaki ilişkiyi belirleyeceğiz. $\mathbb{Z}$ üzerindeki G nin grup halkası $\Gamma = \mathbb{Z}(G)$ ve K nın grup halkası $\Delta = \mathbb{Z}(K)$ olsun. Bu notasyonlar ile aşağıdaki teoremi ispatlayacağız.

4.10. TEOREM

Δ-modül Γ bir serbset Δ -modüldür. Genelde, herhangi bir serbest Γ-modül bir serbest Δ -modüldür.

İSPAT.

Açık olarak, herhangi bir Γ-modül bir Δ -modüldür. $\{t_\lambda\}$, K nın bir sol transversali olsun. Bu takdirde G, $t_\lambda K$ sınıflarının birleşimidir. Bu nedenle $\Gamma = \sum t_\lambda \Delta$ dır. Açık olarak, $t_\lambda \Delta$, Δ ya Δ -izomorftur. 4.2 den Γ nın serbest olduğu sonucunu çıkarırız. Herhangi bir serbest Γ-modül F, Γ ya izomorf altmodüllerin direkt toplamı olduğundan F serbest Δ-modüllerin bir direkt toplamıdır. Bu teoremin birinci bölümüne göre de serbesttir.

$$\mathfrak{X} : \ldots \longrightarrow X_2 \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

trivial Γ-modül $\mathbb{Z}$ nin bir serbest çözücüsü olsun. Bu takdirde herbir X_i bir serbest Γ-modüldür. 4.10 a göre X_i bir serbest Δ-modüldür. Daha fazla olarak, herbir d_i homomorfisi bir Γ -homomorfi olduğundan d_i bir Δ-homomorfidir. Bu nedenle, $\mathfrak{X}$ trivial Δ-modül $\mathbb{Z}$ nin bir serbest çözücüsüdür. Dolayısı ile birtek $\mathfrak{X}$ çözücüsünü kullanarak G ve K nın kohomoloji gruplarını bir arada çalışabiliriz. $\mathfrak{X}$ i trivial Γ-modül $\mathbb{Z}$ nin bir sabit çözücüsü olarak alacağız.

ρ kısıtlanış dönüşümünü şöyle tanımlarız. A bir Γ -modül olsun. A aynı zamanda bir Δ-modüldür. Bu nedenle bir $f \in \mathrm{Hom}_\Gamma\,(X_n, A)$ elemanı, Δ-modül X_n den Δ-modül A içine bir Δ-homomorfidir. Ohalde $f \in \mathrm{Hom}_\Delta\,(X_n, A)$ dır. ρf bir Δ-homomorfi olarak görünen f elemanı olsun. ρf ye f nin kısıtlanışı diyeceğiz. Aşağıdaki teorem oldukça açıktır.

4.11. TEOREM

(i) ρ kısıtlanışı $\mathrm{Hom}_\Delta\,(X_n, A)$ dan $\mathrm{Hom}_\Gamma\,(X_n, A)$ içine bir homomorfidir.
(ii) $\delta\rho = \rho\delta$ dır.

(i), $\rho\,(f+g)=\rho f+\rho g$ olduğunu iddia eder. (ii) deki δ sembolü Hom dizilerinde d_n ile meydana getirilen homomorfileri toplu olarak gösterir. Eşitlik aşağıdaki diagramın komütatifliğini söyler.

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_\Gamma\,(X_n, A) & \xleftarrow{\;d_n^*\;} & \mathrm{Hom}_\Gamma\,(X_{n-1}, A) \\
\big\downarrow{\scriptstyle \rho_n} & & \big\downarrow{\scriptstyle \rho_{n-1}} \\
\mathrm{Hom}_\Delta\,(X_n, A) & \xleftarrow{\;(d_n^*)'\;} & \mathrm{Hom}_\Delta\,(X_{n-1}, A)
\end{array}$$

(ii) den ρ kısıtlanış dönüşümünün $H^n(G,A)$ dan $H^n(K,A)$ içine bir homomorfi meydana getirdiği çıkar.

Gerçekten, $f \in \text{çek}\,d_{n+1}^*$ ise $d_{n+1}^*\,\rho_{n+1} = \rho_n(d_{n+1}^*)'$ olduğundan $\rho_n(f) \in \text{çek}(d_{n+1}^*)'$ dır. Diğer yandan $g \in \mathrm{res}\,d_n^*$ ise $d_n^*\,\rho_n = \rho_{n-1}(d_n^*)'$ olduğundan $\rho_n(g) \in \mathrm{res}(d_n^*)'$ dır. Dolayısı ile $H^n(G,A)$ dan $H^n(K,A)$ ya $f+\mathrm{res}\,d_n^* \longmapsto \rho_n(f)+\mathrm{res}(d_n^*)'$ ile tanımlanan dönüşüm bir homomorfidir. Bu homomorfiyi $\rho^* = \rho^*\,(G,K)$ ile göstereceğiz.

[G:K] indeksi sonlu ise, ters yönde giden ve ko-kısıtlanış adı verilen bir homomorfi tanımlayabiliriz. T, K nın G deki bir sol transversali olsun. Herhangi bir $f \in \mathrm{Hom}_\Delta\,(X_n, A)$ için, τf, X_n den A ya

$$\tau f(x) = \sum_{t \in T} f(xt)t^{-1}$$

ile tanımlanan dönüşüm olsun.

4.12. TEOREM

(i) τ dönüşümü T transversalinin seçiminden bağımsızdır.

(ii) $\tau f \in \mathrm{Hom}_{\Gamma}(X_n, A)$ dır.

(iii) τ dönüşümü $\mathrm{Hom}_{\Delta}(X_n, A)$ dan $\mathrm{Hom}_{\Gamma}(X_n, A)$ içine bir homomorfidir.

(iv) $\delta\tau = \tau\delta$ dır.

İSPAT.

(i) $T = \{t_\lambda\}$ olsun. $t_\lambda K$ dan diğer bir t'_λ temsilcisini seçersek, $t'_\lambda = t_\lambda k$ $(k \in K)$ şeklindedir. f bir Δ-homomorfi olduğundan

$$f(xt'_\lambda)t'^{-1}_\lambda = f(xt_\lambda k)(t_\lambda k)^{-1} = f(xt_\lambda)kk^{-1}t_\lambda^{-1} = f(xt_\lambda)t_\lambda^{-1}$$

dır. Bu nedenle τ dönüşümü T transversalinin seçiminden bağımsızdır.

(ii) $g \in G$ olsun. $\tau f(xg) = (\tau f(x))g$ olduğunu göstermek yeter. $T = \{t_\lambda\}$ bir transversal ise $\{gt_\lambda\}$ da bir transversaldir. (i) ye göre

$$\tau f(xg) = \sum_t f(xgt)t^{-1} = \sum_{gt} f(xgt)(gt)^{-1}g = (\tau f(x))g$$

dır.

(iii)
$$\begin{aligned}\tau(f+g)(x) &= \sum_t (f+g)(xt)t^{-1} \\ &= \sum_t f(xt)t^{-1} + \sum_t g(xt)t^{-1} \\ &= \tau f(x) + \tau g(x) = (\tau f + \tau g)(x)\end{aligned}$$

dır. Buradan $\tau(f+g) = \tau f + \tau g$ bulunur.

(iv) d_n bir Γ-homomorfi olduğundan her $x \in X_n$ ve $t \in T$ için $d_n(xt) = (d_n(x))t$ dır. Bu nedenle

$$\begin{aligned}\delta(\tau f)(x) = (\tau f)(d(x)) &= \sum_t f(d(x)t)t^{-1} \\ &= \sum_t f(d(xt))t^{-1} = \sum_t \delta f(xt)t^{-1} = \tau(\delta f)(x)\end{aligned}$$

dır. Bu $\tau\delta = \delta\tau$ olduğunu ispatlar.

4.12 (iii) ve (iv) ye göre ko-kısıtlanış dönüşümü τ, $H^n(K,A)$ dan $H^n(G,A)$ içine $\tau^* = \tau^*(K,G)$ ile göstereceğimiz bir homomorfi meydana getirir. Bunun ispatı ρ^* tasvirinde olduğu gibi yapılır.

Bu notasyonlar ile Gaschütz-Eckmann'ın aşağıdaki teoremini vereceğiz.

4.13. TEOREM

G bir grup, $K \trianglelefteq G$ ve $[G:K] = j < \infty$ olsun. Bu takdirde; herhangi bir $c \in H^n(G,A)$ için

$$\tau^*(\rho^*(c)) = jc$$

dır.

İSPAT.

f kohomoloji sınıfı c yi gösteren, yani $c=f+resd_n^*$ olacak şekilde $Hom_\Gamma(X_n,A)$ nın bir elemanı olsun. Bu takdirde, her $t\in G$ için $\rho f(xt)=f(x)t$ alabiliriz. τ nun tanımına göre

$$\tau(\rho f)(x)=\sum \rho f(xt)t^{-1}=\sum f(x)=jf(x)$$

dır. Yani $\tau(\rho f)=jf$ dır. Bu teoremi ispatlar.

4.14.- SONUÇ

$[G:K]=j<\infty$ ise $\rho^*(G,K)$ kısıtlanış dönüşümünün çekirdeğindeki bir c elemanı için $jc=0$ dır.

İSPAT.

$c\in$ çekρ^* ise 4.13 e göre

$$jc=\tau^*(\rho^*(c))=0$$

dır.

4.15. SONUÇ

G mertebesi g olan bir sonlu grup olsun. Bu takdirde, herhangi bir $c\in H^n(G,A)$ elemanı için $gc=0$ dır. Böylece, G sonlu bir π-grup ise $H^n(G,A)$ da bir π-gruptur.

İSPAT.

$K=\{1\}$ ise bar çözücünün herbir terimi trivialdir. Dolayısı ile $K=\{1\}$ için $H^n(K,A)=\{0\}$ dır. 4.14 e göre $gc=0$ dır. G bir π-grup ise, g bir π-sayısıdır. $|c|\,\big|\,g$ olduğundan c bir π-elemandır. Ohalde $H^n(G,A)$ bir π-gruptur.

4.16. SONUÇ

G sonlu bir grup, K bir p asal sayısı için G nin en az bir S_p-altgrubunu içeren G nin bir altgrubu olsun. Bu takdirde, $H^n(G,A)$ nın p-birincil bileşeni $H^n(K,A)$ nın p-birincil bileşeninin bir altgrubuna izomorftur. $\rho^*(G,K)$ dönüşümü onlar arasındaki izomorfiyi verir. Herhangi bir $p\in\pi(G)$ için, S G nin bir S_p-altgrubu olsun. Bu takdirde, $H^n(S,A)$ bir p-gruptur ve $H^n(G,A)$ nın p-birincil bileşeni $H^n(S,A)$ nın bir altgrubuna izomorftur. Her $p\in\pi(G)$ için $H^n(S,A)=\{0\}$ ise $H^n(G,A)=\{0\}$ dır.

İSPAT.

Varsayımlar altında $[G:K]=j$, p ye asaldır. 4.14 e göre çekρ^* birim hariç p-eleman içermez. $(H^n(G,A))_p=P$ olsun. Bu durumda $P\cap$ çek$\rho^*=\{0\}$ dır.

Diğer yandan,

$$P \cong P/P \cap \text{çek}\,\rho^* \cong P\text{çek}\,\rho^*/\text{çek}\,\rho^* \leq H^n(G,A)/\text{çek}\,\rho^* \cong \rho^*(H^n(G,A))$$

dır. Dolayısı ile P, $H^n(K,A)$ nın p-birincil bileşeninin bir altgrubuna izomorftur. S bir p-grup olduğundan 4.15 e göre $H^n(S,A)$ da bir p-gruptur ve bu sonucun birinci bölümüne göre P, $H^n(S,A)$ nın bir altgrubuna izomorftur.

G bir π (G)-grup olduğundan 4.15 e göre $H^n(G,A)$ da bir π (G)-gruptur. $c \in H^n(G,A)$ ise, $|c|$nin asal faktörleri $\pi(G)$ de dir. Her $p \in \pi$ (G) için $H^n(S,A)=\{0\}$ olduğundan çek $\rho^*=H^n(G,A)$dır. 4.14 e göre $[G:S]=j$ olmak üzere $jc=0$ dır. $(p,j)=1$ olduğundan $(|c|,p)=1$ dır. Buradan her $p \in \pi(G)$ için $(|c|,p)=1$ sonucunu çıkarırız. Dolayısı ile $c=0$, yani $H^n(G,A)=\{0\}$ dır.

4.17. SONUÇ

G sonlu bir grup olsun. A sonlu üretenli bir Γ-modül ise $H^n(G,A)$ sonludur.

İSPAT.

G sonlu bir grup olduğundan bar çözücünün herbir X_n terimi üretenleri sonlu bir küme olan bir serbest Γ-modüldür. Daha fazla olarak, bir sonlu üretenli Γ-modül A, bir sonlu üretenli Abel gruptur. $\text{Hom}_\Gamma(X_n,A)$ nın sonlu üretenli olduğunu göstereceğiz. X_n bir sonlu $\{u_i\}$ kümesi üzerinde serbest ve A (bir Abel grup olarak gözönüne alındığı zaman) bir sonlu $\{v_j\}$ kümesi ile üretilmiş olsun. Bu takdirde X_n den A içine herhangi bir f Γ-homomorfisi

$$f(u_i) = \sum n_{ij} v_j$$

olacak şekilde n_{ij} tamsayılarının kümesi ile tam olarak belirlenir. f_{ij} X_n den A içine

$$f_{ij}(u_k) = \delta_{ik} v_j, \quad \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i=k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$$

ile tanımlanan Γ-homomorfi olsun. Bu durumda $\{f_{ij}\}$ kümesi $\text{Hom}_\Gamma(X_n,A)$ yı üretir. Gerçekten $\text{Hom}_\Gamma(X_n,A)$ sonlu üretenli bir Abel gruptur. 1.65 e göre çekd^*_{n+1} da sonlu üretenlidir. Bu nedenle $H^n(G,A)$ da sonlu üretenlidir. 4.15 e göre $H^n(G,A)$ bir burulmalı gruptur. 1.66 ya göre $H^n(G,A)$ sonludur.

K^{σ} eşlenik grubu K ya izomorftur. Şüphesiz, $H^n(K\ ,A)$ kohomoloji grubu da $H^n(K^{\sigma}_,A)$ ya izomorftur. Bu izomorfiyi açık olarak yazacağız. Herhangi bir $f \in Hom_{\Delta}(X_n,A)$ için

$$f^{\sigma}(x) = f(x\sigma^{-1})\sigma$$

olsun. Bu takdirde $k \in K$ için

$$f^{\sigma}(xk^{\sigma}) = f(xk^{\sigma}\sigma^{-1})\sigma = f(x\sigma^{-1}k\sigma\sigma^{-1})\sigma = f(x\sigma^{-1}k)\sigma$$
$$= f(x\sigma^{-1})k\sigma = f^{\sigma}(x)k^{\sigma}$$

dır. Bu nedenle, f^{σ} bir $\mathbb{Z}(K^{\sigma})$-homomorfidir. $\delta(f^{\sigma}) = (\delta f)^{\sigma}$ sağlandığından, $f \longmapsto f^{\sigma}$ dönüşümü $H^n(K,A)$ dan $H^n(K^{\sigma},A)$ içine bir homomorfi meydana getirir. Gerçekten

$$(\delta f)^{\sigma}(x) = (\delta f(x\sigma^{-1}))\sigma = (f(\delta(x\sigma^{-1})))\sigma$$
$$= f(\delta(x)\sigma^{-1})\sigma = f^{\sigma}(\delta(x)) = (\delta f^{\sigma})(x)$$

dır. Bu homomorfi I_{σ} olsun. Açık olarak

$$I_1 = 1 \text{ ve } I_{\sigma\tau} = I_{\sigma} I_{\tau}$$

dır. Bu nedenle her $\sigma \in G$ için I_{σ} bir izomorfidir.

4.18. TEOREM

G bir grup, K ve L G nin altgrupları ve $S = \{\sigma\}$ K ve L ye göre çift yan sınıflardan temsilcilerin kümesi olsun. $[G:K] < \infty$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde, herhangi bir Γ-modül A için aşağıdaki formülü yazabiliriz.

$$\tau^{*}(K,G)\rho^{*}(G,L) = \sum_{\sigma} I_{\sigma}\, \rho^{*}(K^{\sigma},K^{\sigma}\cap L)\, \tau^{*}(K^{\sigma}\cap L,L)$$

İSPAT.

1.19 a göre, $K\sigma L$ çift yan sınıfı K nın $[L:L\cap K^{\sigma}]$ tane sağ yan sınıfını içerir. $R^{(\sigma)} = \{l_i^{(\sigma)}\}$, $L\cap K^{\sigma}$ nın L deki bir sağ transversali olsun. Bu takdirde, $\{\sigma\, l_i^{(\sigma)}\}$, $K\sigma L$ de içerilen K nın sağ yan sınıflarının temsilcilerinin bir kümesidir. Böylece,

$$T = \{\ (l_i^{(\sigma)})^{-1}\ \sigma^{-1}\ \}$$

K nın bir sol transversalidir. Burada σ, S üzerinde dolaşır. Tanıma göre $\tau f(x) = \sum f(xt)t^{-1} (t \in T)$ dır. Buradan,

$$\sum_{t\in T} f(xt)t^{-1} = \sum_{\sigma}\sum_{l} f(xl^{-1}\sigma^{-1})\sigma l = \sum_{\sigma}\sum_{l} f^{\sigma}(xl^{-1})l$$

yazarız. Sağ taraf

$$\sum_{\sigma} \tau(L\cap K^{\sigma},L)(\ \rho(K^{\sigma},L\cap K^{\sigma})(f^{\sigma}))$$

ifadesine eşittir. Bu ispatı tamamlar.

4.19. TEOREM

G bir sonlu grup ve S G nin aşağıdaki özelliği sağlayan bir S_p-altgrubu olsun. $S \cap S^x \neq \{1\} \Longrightarrow S=S^x$. Bu takdirde, $H^n(G,A)$ nın p-birincil bileşeni $H^n(N_G(S),A)$ nın p-birincil bileşenine izomorftur.

İSPAT.

$K=N_G(S)$ ve $L=S$ alarak 4.18 i uygulayalım. Bu durumda, K^σ kesinlikle bir S^σ S_p-altgrubu içerir. $S\cap S^\sigma \neq \{1\}$ ise $S=S^\sigma$ ve $\sigma \in K$ dır. $\rho^*(K^\sigma,\{1\})=0$ olduğundan $\sigma=1$ terimi hariç 4.18 deki formülün sağ yanı sıfıra eşittir. Böylece,

$$\tau^*(K,G)\rho^*(G,S)=\rho^*(K,S)$$

alabiliriz. 4.16 ya göre $\rho^*(G,S)$ ve $\rho^*(K,S)$ p-birincil bileşen üzerinde bire-bir dir. Bu nedenle, $\tau^*(K,G)$ da bire-bir dir. Diğer yandan 4.13 e göre, $\tau^*(K,G)$, $H^n(K,A)$ grubunun p-birincil bileşenini $H^n(G,A)$ nın p-birincil bileşeni üzerine resmeder. Buradan, $\tau^*(K,G)$ onlar arasındaki izomorfiyi verir.

G bir toplamlı A grubu üzerine etki eden bir operatör grup olsun. K, G nin bir altgrubu ise K da G üzerinde bir operatör gruptur. $C_A(K)=A^K$ yazalım. $K \trianglelefteq G$ ise K nın bir sınıfının elemanları A^K üzerinde aynı etkiyi meydana getirir. Bu nedenle; G/K grubu A^K üzerine etki eder. Bu şartlar altında aşağıdaki dizinin tam olduğunu göstereceğiz.

4.20. TEOREM

$$0 \longrightarrow H^1(G/K,A^K) \xrightarrow{\alpha} H^1(G,A) \xrightarrow{\beta} H^1(K,A)^G \xrightarrow{\gamma} H^2(G/K,A^K)$$

dizisi tamdır.

İSPAT.

Bu dizideki dönüşümlerin ve grupların tanımları ispat içinde verilecektir.

α dönüşümüne inflation denir. Aşağıdaki gibi tanımlanır.

$f \in C^n(G/K,A^K)$ ise f

$$g(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n) = f(K\sigma_1,K\sigma_2,\ldots,K\sigma_n)$$

olacak şekilde bir g ko-zinciri tanımlar. Bu durumda δg, δf ye karşılık gelir. f nin değeri A^K da olduğundan

$$f(K\sigma_1,\ldots,K\sigma_{n-1})\sigma_n=f(K\sigma_1,\ldots,K\sigma_{n-1})K\sigma_n$$

olduğuna dikkat edersek, bu (4.9) formülünden açıktır. Bu durumda $f \mapsto g$ dönüşümü $H^n(G/K,A^K)$ dan $H^n(G,A)$ içine bir homomorfi meydana getirir. Bu α inflationudur.

$f \in C^1(G/K,A^K)$ bir ko-sınıra karşılık geliyorsa,her $\sigma \in G$ için $f(K\sigma)=a-a\sigma$ olacak şekilde bir $a \in A$ vardır. Fakat $\sigma \in K$ ise $f(K\sigma)=f(K)=0$ dır. Bu her $\sigma \in K$ için $a\sigma=a$ olduğunu gösterir. Bu nedenle $a \in A^K$ ve $f \in B^1(G/K,A^K)$ dır. Böylece α bire-bir dır ve (4.20) dizisi ikinci terime kadar tamdır.

$K \trianglelefteq G$ olduğundan I_σ dönüşümü $H^1(K,A)$ nın bir otomorfisidir. Dolayısı ile G grubu $H^1(K,A)$ üzerine $\sigma \longmapsto I_\sigma$ dönüşümüne göre etki eder. Dördüncü terim bu etkinin sabit elemanlarının kümesidir. β dönüşümü $\rho^*(G,K)$ kısıtlanış dönüşümü ile meydana getirilir. ρ^* ın görüntüsünün $H^1(K,A)^G$ da içerildiği açıktır. α nın görüntüsü K üzerinde 0 olan bir ko-zincir ile gösterildiğinden $\alpha\beta=0$ dır. çek$\beta \subset$ resα olduğunu göstereceğiz. f,çekβ nın bir elemanını gösteren bir geçişli homomorfi olsun. δ ile 4.9 dönüşümünü gösterelim. Bir $a \in A$ için $\rho f=\delta a$ dır. $g=f-\delta a$ olsun. Bu takdirde g, her $\sigma \in K$ için $g(\sigma)=0$ olacak şekilde bir geçişli homomorfidir. g bir geçişli homomorfi olduğundan

$$g(\sigma\tau)=g(\sigma)\tau+g(\tau)$$

dır.$\sigma \in K$ ise her $\tau \in G$ için $g(\sigma\tau)=g(\tau)$ dır. Diğer yandan $\tau \in K$ ise

$$g(\sigma)=g(\sigma\tau)=g(\sigma)\tau$$

dır. Bu g nin değerinin daima A^K da olduğunu ve $K\tau$ sağ yan sınıfının bütün σ elamanları için sabit olduğunu gösterir. Bu nedenle, g,α nın görüntüsündeki bir elemanı gösterir. Buradan, resα = çek β bulunur.

Önce γ dönüşümünü tanımlayacağız. Ko-devrelere dayanarak I_σ izomorfisini ifade edelim. Burada K nın normal olmasına gerek yoktur. Trivial Γ-modül $\mathbb{Z}$ nin bar çözücüsünü gözönüne alalım. Bir $f \in \mathrm{Hom}_\Delta(B_1,A)$ elemanı $\delta f=0$ şartını sağlıyorsa her $\sigma,\rho \in G$ için

$$f([\sigma]\rho)-f([\sigma\rho])+f([\rho])=0$$

dır. $\rho \in K$ ise formüle göre

$$f^\sigma([\rho^\sigma])=f([\rho^\sigma]\sigma^{-1})\sigma=f([\sigma^{-1}\rho])-f([\sigma^{-1}])\sigma$$
$$=f([\rho])\sigma+a-a\rho^\sigma \qquad (a=-f([\sigma^{-1}])\sigma)$$

dır. Buradan şu sonucu çıkarabiliriz. Bir $\alpha \in H^1(K,A)$ elemanı bir φ

geçişli homomorfisi ile gösterilirse, $I_\sigma(\alpha) \in H^1(K^\sigma, A)$ elemanı

$$\varphi^\sigma(\rho^\sigma) = \varphi(\rho)\sigma$$

olacak şekildeki φ^σ geçişli homomorfisi ile gösterilir. γ dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanır. T, K nın $T \cap K = \{1\}$ olacak şekilde bir transversali olsun. $\varphi, H^1(K,A)^G$ nin bir elemanını gösteren bir geçişli homomorfi ise herhangi bir $\tau \in T$ için φ^τ, φ ile aynı kohomoloji sınıfındadır. Bu nedenle, her $\rho \in K$ için

$$\varphi^\tau(\rho) = \varphi(\rho) + a_\tau \rho - a_\tau$$

olacak şekilde bir $a_\tau \in A$ vardır. $\tau = 1$ ise $a_1 = 0$ alabiliriz. $\{a_\tau\}$ elemanlarını sabit olarak göz önüne alacağız. Her $\sigma \in G$ elemanı $\sigma = \varkappa\tau$ $(\varkappa \in K, \tau \in T)$ şeklinde tektürlü olarak yazılabileceğinden her $\sigma \in G$ için bir

$$a_\sigma = a_\tau + \varphi(\varkappa)\tau$$

tanımlıyalım. Bu takdirde, $\{a_\sigma\}$ ailesi her $\lambda \in K$ ve $\sigma \in G$ için aşağıdaki iki özelliği sağlar.

$$a_{\lambda\sigma} = a_\sigma + \varphi(\lambda)\sigma, \qquad \varphi^\sigma(\lambda) = \varphi(\lambda) + a_\sigma\lambda - a_\sigma$$

Bu formüller aşağıdaki gibi ispatlanır. $\sigma = \varkappa\tau (\varkappa \in K, \tau \in T)$ olsun. $\lambda\sigma = (\lambda\varkappa)\tau$ dır. Tanıma göre

$$a_{\lambda\sigma} = a_\tau + \varphi(\lambda\varkappa)\tau$$

dır. φ bir geçişli homomorfi olduğundan

$$\varphi(\lambda\varkappa) = \varphi(\lambda)\varkappa + \varphi(\varkappa)$$

sağlanır. Buradan

$$a_{\lambda\sigma} = a_\tau + \varphi(\varkappa)\tau + \varphi(\lambda)\sigma = a_\sigma + \varphi(\lambda)\sigma$$

bulunur. İkinci formül $\varphi^\sigma(\lambda) = \varphi(\sigma\lambda\sigma^{-1})\sigma$ formülünün genişletilmesi ile ispatlanır. φ geçişli homomorfi olduğundan

$$\begin{aligned}
\varphi^\sigma(\lambda) &= \varphi(\varkappa\tau\lambda\tau^{-1}\varkappa^{-1})\sigma \\
&= \varphi(\varkappa)\tau\lambda + \varphi(\tau\lambda\tau^{-1})\tau + \varphi(\varkappa^{-1})\varkappa\tau \\
&= a_\sigma\lambda - a_\tau\lambda + \varphi^\tau(\lambda) - \varphi(\varkappa)\tau \\
&= \varphi(\lambda) + a_\sigma\lambda - a_\sigma
\end{aligned}$$

dır. Burada, herhangi bir φ geçişli homomorfisi için sağlanan $\varphi(\varkappa^{-1})\varkappa = -\varphi(\varkappa)$ eşitliğini kullandık.

$\alpha(\sigma,\rho) = a_{\sigma\rho} - a_\sigma\rho - a_\rho$ yazalım. Açıkça $\alpha \in Z^2(G,A)$ ve $\lambda, \mu \in K$ ise $\alpha(\lambda\sigma, \mu\rho) = \alpha(\sigma,\rho)$ dır.

Gerçekten,

$$(\delta_3\alpha)(\sigma,\rho,\tau) = \alpha(\rho,\tau)-\alpha(\sigma\rho,\tau)+\alpha(\sigma,\rho\tau)-\alpha(\sigma,\rho)\tau$$
$$=a_{\rho\tau}-a_{\rho}\tau-a_{\tau}-(a_{\sigma\rho\tau}-a_{\sigma\rho}\tau-a_{\tau})$$
$$+a_{\sigma\rho\tau}-a_{\sigma}\rho\tau-a_{\rho\tau}-(a_{\sigma\rho}-a_{\sigma}\rho-a_{\rho})\tau$$
$$=0$$

olduğundan $\alpha \in Z^2(G,A)$ ve

$$\alpha(\lambda\sigma,\mu\rho)=a_{\lambda\sigma\mu\rho}-a_{\lambda\sigma\mu\rho}-a_{\mu\rho}$$
$$=a_{\sigma\mu\rho}+\varphi(\lambda)\sigma\mu\rho-(a_{\sigma}+\varphi(\lambda)\sigma)\mu\rho-a_{\mu\rho}$$
$$=a_{\sigma\mu\rho}-a_{\sigma}\mu\rho-a_{\mu\rho}$$
$$=a_{\sigma\mu\sigma^{-1}\sigma\rho}-a_{\sigma}\mu\rho-a_{\mu\rho}$$
$$=a_{\sigma\rho}+\varphi(\sigma\mu\sigma^{-1})\sigma\rho-a_{\sigma}\mu\rho-(a_{\rho}+\varphi(\mu)\rho)$$
$$=a_{\sigma\rho}-a_{\rho}+(\varphi^{\sigma}(\mu)-a_{\sigma\mu}-\varphi(\mu))\rho$$
$$=a_{\sigma\rho}-a_{\rho}+(\varphi(\mu)+a_{\sigma}\mu-a_{\sigma}-a_{\sigma}\mu+\varphi(\mu))\rho$$
$$=a_{\sigma\rho}-a_{\sigma}\rho-a_{\rho}$$
$$=\alpha(\sigma,\rho)$$

dır. $\varphi^{\sigma\rho}(\varkappa)$ nın farklı iki yoldan hesaplanması ile $\alpha(\sigma,\rho)\in A^K$ alabiliriz.

$$\varphi^{\sigma\rho}(\varkappa)=\varphi^{\sigma}(\varkappa^{\rho^{-1}})\rho=(\varphi(\varkappa^{\rho^{-1}})+a_{\sigma}\varkappa^{\rho^{-1}}-a_{\sigma})\rho$$
$$=\varphi(\varkappa)+a_{\rho\varkappa}-a_{\rho}+a_{\sigma}\rho\varkappa-a_{\sigma}\rho$$
$$=\varphi(\varkappa)+a_{\sigma\rho}\varkappa-a_{\sigma\rho}$$

dır. Buradan $(a_{\sigma\rho}-a_{\sigma}\rho-a_{\rho})\varkappa=a_{\sigma\rho}-a_{\sigma}\rho-a_{\rho}$ yazarız. O halde $\alpha(\sigma,\rho)\in A^K$ dır. φ nin kohomoloji sınıfından diğer bir $\tilde{\varphi}$ geçişli homomorfisi seçtiğimizi kabul edelim. Bu takdirde, her $\varkappa \in K$ için

$$\tilde{\varphi}(\varkappa)=\varphi(\varkappa)+b-b\varkappa$$

olacak şekilde bir $b\in A$ vardır. φ ile ilgili elemanların ailesi $\{a_{\sigma}\}$ olduğuna benzer şekilde $\tilde{\varphi}$ ile ilgili elemanların ailesi $\{\tilde{a}_{\sigma}\}$ olsun. Bu durumda,

$$\tilde{\varphi}^{\sigma}(\varkappa)=\tilde{\varphi}(\varkappa)+\tilde{a}_{\sigma}\varkappa-\tilde{a}_{\sigma}$$

dır. Kolay bir hesaplama bir $c_{\sigma}\in A^K$ için $\tilde{a}_{\sigma}=a_{\sigma}+b-b\sigma+c_{\sigma}$ olduğunu gösterir. Bunu aşağıdaki şekilde gösteririz.

$$\tilde{\varphi}^{\sigma}(\varkappa)=\tilde{\varphi}(\varkappa^{\sigma^{-1}})\sigma=(\varphi(\varkappa^{\sigma^{-1}})+b-b\varkappa^{\sigma^{-1}})\sigma$$
$$=\varphi(\varkappa^{\sigma^{-1}})\sigma+b\sigma-b\sigma\varkappa=\varphi^{\sigma}(\varkappa)+b\sigma-b\sigma\varkappa$$

$$= \varphi(\varkappa)+b\sigma-b\sigma\varkappa+a_{\sigma}\varkappa-a_{\sigma}=\tilde{\varphi}(\varkappa)+\tilde{a}_{\sigma}\varkappa-\tilde{a}_{\sigma}$$
$$= \varphi(\varkappa)+b-b\varkappa+\tilde{a}_{\sigma}\varkappa-\tilde{a}_{\sigma}$$

dır. Buradan $(a_{\sigma}+b-b\sigma-\tilde{a}_{\sigma})\varkappa=a_{\sigma}+b-b\sigma-\tilde{c}_{\sigma}$ bulunur. $-c_{\sigma}=a_{\sigma}+b-b_{\sigma}-\tilde{a}_{\sigma}$ dersek $c_{\sigma}\in A^{K}$ ve $\tilde{a}_{\sigma}=a_{\sigma}+b-b\sigma+c_{\sigma}$ olur. Bu nedenle $\{\tilde{a}_{\sigma}\}$ dan yapılmış $\tilde{\alpha}$ elemanı

$$\tilde{\alpha}(\sigma,\rho)=\alpha(\sigma,\rho)+c_{\sigma\rho}-c_{\sigma}\rho-c_{\rho}$$

eşitliğini sağlar. Gerçekten,

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}(\sigma,\rho)&=\tilde{a}_{\sigma\rho}-\tilde{a}_{\sigma}\rho-\tilde{a}_{\rho}\\&=a_{\sigma\rho}+b-b\sigma\rho+c_{\sigma\rho}-(a_{\sigma}+b-b\sigma-c_{\sigma})\rho-(a_{\rho}+b-b\rho+c_{\rho})\\&=a_{\sigma\rho}-a_{\sigma}\rho-a_{\rho}+c_{\sigma\rho}-c_{\sigma}\rho-c_{\rho}\\&=\alpha(\sigma,\rho)+c_{\sigma\rho}-c_{\sigma}\rho-c_{\rho}\end{aligned}$$

dır. Bu nedenle, α ve $\tilde{\alpha}$ aynı kohomoloji sınıfına attir. γ tasviri $\{\varphi\}$ sınıfının $\{\alpha\}$ sınıfına gönderilmesiyle tanımlanır. Açıkca γ, $H^{1}(K,A)^{G}$ dan $H^{2}(G/K,A^{K})$ içine bir homomorfidir.

$\{\varphi\}$ sınıfı β nın görüntüsünde ise φ G üzerinde tanımlanan bir $\tilde{\varphi}$ geçişli homomorfinin kısıtlanışı olarak seçilebilir. Buradan,

$$\tilde{\varphi}^{\sigma}(\varkappa)=\tilde{\varphi}(\sigma\varkappa\sigma^{-1})\sigma=[(\tilde{\varphi}(\sigma)\varkappa+\tilde{\varphi}(\varkappa)\sigma^{-1}+\tilde{\varphi}(\sigma^{-1})]\sigma$$
$$=\tilde{\varphi}(\sigma)\varkappa+\tilde{\varphi}(\varkappa)+\tilde{\varphi}(\sigma^{-1})\sigma$$

dır. Böylece her $\sigma\in G$ için $\tilde{a}_{\sigma}=\tilde{\varphi}(\sigma)$ seçebiliriz. Bu halde $\tilde{\alpha}(\sigma,\rho)=0$ dır ve $\beta\gamma=0$ alabiliriz. Tersine olarak $\gamma(\{\varphi\})=\{\alpha\}=\{0\}$ olsun. Bu takdirde bir $c\in C^{1}(G/K,A^{K})$ için $\alpha=\delta c$ yazabiliriz. İnflation dönüşümü altında c nin görüntüsü $\{c_{\sigma}\}$ olsun. Bu takdirde,

$$\alpha(\sigma,\rho)=c_{\sigma\rho}-c_{\sigma}\rho-c_{\rho}$$

dır. Her $\rho\in K$ için $c_{\rho}=0$ dır. Önceki gibi φ ile ilgili elemanların ailesi $\{a_{\sigma}\}$ olsun. $\Theta(\sigma)=a_{\sigma}-c_{\sigma}$ yazalım.

$$a_{\sigma\rho}-a_{\sigma}\rho-a_{\rho}=\alpha(\sigma,\rho)=c_{\sigma\rho}-c_{\sigma}\rho-c_{\rho}$$

olduğundan Θ G üzerinde bir geçişli homomorfidir. a_{σ} nın tanımına göre $\rho\in K$ ise $a_{\rho}=\varphi(\rho)$ alırız. Bu nedenle $\rho\in K$ ise

$$\Theta(\rho)=a_{\rho}-c_{\rho}=\varphi(\rho)$$

dır. Bu G üzerinde tanımlanan Θ geçişli homomorfisinin kısıtlanışının φ olduğunu ifade eder. Buradan çek$\gamma\subset$ resβ dır. Bu 4.20 dizisinin tam olduğunu ispatlar.

4.21.TEOREM.

G bir grup ve $K \trianglelefteq G$ olsun. $H^1(K,A)=\{0\}$ ise aşağıdaki dizi tamdır.

$$0 \longrightarrow H^2(G/K,A^K) \xrightarrow{\alpha} H^2(G,K) \xrightarrow{\beta} H^2(K,A)$$

Burada; α dönüşümü inflation, β öncesi tam dizinin ispatında tanımlanan kısıtlanıştır.

İSPAT.

$f \in C^2(G/K,A^K)$ ve inflation dönüşümü altındaki f nin g görüntüsü bir ko-sınır olsun. δ ile 4.9 dönüşümünü gösterelim. Bir h dönüşümü için $g=\delta h$ dır. $\alpha,\tau \in K$ ise $f(K\alpha,K\tau)=0$ dır. Böylece

$$0=g(\alpha,\tau)=h(\tau)-h(\alpha\tau)+h(\alpha)\tau$$

dır. Bu formül h ın K üzerinde bir geçişli homomorfi tanımladığını gösterir. $H^1(K,A)=\{0\}$ olduğundan her $\sigma \in K$ için,

$$h(\sigma)=a-a\sigma$$

olacak şekilde bir $a \in A$ vardır. $k=h-\delta a$ koyalım. Buradan $\delta k=\delta h=g$ ve $\sigma \in K$ için $k(\sigma)=0$ dır. $\sigma \in K$ ise $g=\delta k$ dan $k(\tau)=k(\sigma\tau)$ yazabiliriz. Bu nedenle, k inflation dönüşümünün görüntüsündedir. $\tau \in K$ ise $k(\sigma\tau)=k(\sigma)\tau$ alırız. $\tau \in K$ için $k(\sigma\tau)=k(\sigma)$ olduğundan her $\sigma \in G$ için $k(\sigma) \in A^K$ dır. Böylece f bir ko-sınırdır ve α dönüşümü bire-bir dır.

4.20 nin ispatındaki gibi açıkca $\alpha\beta=0$ dır. Bir f faktör kümesinin kısıtlanışının $B^2(K,A)$ da bulunduğunu varsayalım. Bu takdirde bir g dönüşümü vardır öyle ki K üzerinde $f=\delta g$ dır. G-K nın bütün elemanları için onun değerlerini keyfi tanımlıyarak g yi G üzerinde bir dönüşüme genişleteceğiz. $f-\delta g$ yi göz önüen alalım. Bu f nin kohomoloji sınıfında bir faktör kümesidir. Bu nedenle, baştan f nin K üzerindeki kısıtlanışının sıfır olduğunu varsayabiliriz. $T \cap K=\{1\}$ olacak şekilde bir $T=\{\tau_i\}$ transversali seçelim. Bir $\rho=\varkappa\tau_i$ $(\varkappa \in K, \tau_i \in T)$ elemanı için $g(\rho)=f(\varkappa,\tau_i)$ koyalım. $\lambda \in K$ ise $g(\lambda\rho)=f(\lambda\varkappa,\tau_i)$ ve $g(\lambda)=0$ dır. Böylece,

$$\delta g(\lambda,\rho)+f(\lambda,\rho)=f(\varkappa,\tau_i)-f(\lambda\varkappa,\tau_i)+f(\lambda,\varkappa\tau_i)$$
$$=f(\lambda,\varkappa)\tau_i=0$$

dır. $h=f+\delta g$ olsun. $\lambda \in K$ ise $h(\lambda,\rho)=0$ alırız. h bir faktör kümesi olduğundan

$$h(\sigma,\rho)-h(\lambda\sigma,\rho)+h(\lambda,\sigma\rho)-h(\lambda,\sigma)\rho=0$$

dır. Bu formül $\lambda \in K$ için $h(\sigma,\rho)=h(\lambda\sigma,\rho)$ dır. $\sigma \in K$ ise $\lambda\sigma=(\lambda\sigma\lambda^{-1})\lambda$ ve yukarıdaki formülden

$$h(\lambda,\sigma\rho)=h(\lambda,\sigma)\rho + h(\lambda,\rho)$$

çıkar. Böylece herhangi bir $\lambda \in G$ için, $h(\lambda,\sigma)$, σ nın bir fonksiyonu olarak bir geçişli homomorfidir. $H^1(K,A)=\{0\}$ olduğundan her $\tau \in K$ için

$$h(\sigma,\tau)=a(\sigma)-a(\sigma)\tau$$

olacak şekilde bir $a(\sigma)\in A$ vardır. $\lambda \in K$ ise $h(\lambda,\tau)=0$ ve $h(\lambda\sigma,\tau)=h(\sigma,\tau)$ dır. Böylece, $\lambda \in K$ ve $\sigma \in G$ için $a(\lambda)=0$ ve $a(\lambda\sigma)=a(\sigma)$ olacak şekilde A nın bir elemanını seçebiliriz. $k=h+\delta a$ koyalım. k nın inflation dönüşümünün görüntüsünde olduğunu göstereceğiz. Önce σ veya $\tau \in K$ ise $k(\sigma,\tau)=0$ olduğunu ispatlayacağız. $\sigma \in K$ ise,

$$k(\sigma,\tau)=h(\sigma,\tau)+a(\tau)-a(\sigma\tau)+a(\sigma)\tau =0$$

dır. Diğer yandan $\tau \in K$ ise

$$a(\sigma\tau)=a(\sigma\tau\sigma^{-1}\sigma)=a(\sigma) \text{ ve } h(\sigma,\tau)=a(\sigma)-a(\sigma)\tau \text{ olduğundan}$$

$k(\sigma,\tau)=0$ dır. k bir ko-devre olduğundan $\lambda, \mu \in K$ için aşağıdaki formülü yazabiliriz.

$$k(\lambda\sigma,\mu\tau)=k(\sigma,\tau)=k(\sigma,\tau)\lambda$$

Böylece inflation dönüşümü altında $C^1(G/K,A^K)$ nın bir elemanının görüntüsü k dır. Bu ispatı tamamlar.

4.22. ÖRNEK

G mertebesi m olan bir devirli grup ve σ G nin üreticisi olsun. G nin kohomoloji gruplarını belirleyeceğiz. $\Gamma = \mathbb{Z}(G)$ grup halkasında

$$\tau = 1-\sigma \text{ ve } \mu = 1+\sigma+\sigma^2+\ldots\ldots+\sigma^{m-1}$$

elemanlarını gözönüne alalım. Her $\gamma \in \Gamma$ için Γ dan Γ ya f ve g Γ - homomorfilerini

$$f(\gamma)=\gamma\mu \text{ ve } g(\gamma)=\gamma\tau$$

şeklinde tanımlıyalım. Kolaylık olması bakımından f ve g homomorfilerini sırasıyla μ ve τ ile göstereceğiz. Ayrıca $\gamma = \sum_{i=0}^{m-1} a_i\sigma^i \in \Gamma$ olmak üzere Γ dan $\mathbb{Z}$ ye

$$\varepsilon\left(\sum_{i=0}^{m-1} a_i\sigma^i\right)=\sum_{i=0}^{m-1} a_i \quad (a_i \in \mathbb{Z})$$

homomorfisini tanımlıyalım. Bu takdirde

$$\gamma\mu = \varepsilon(\gamma)\mu \quad \text{ve} \quad \gamma\tau = \sum_{i=0}^{m-1}(a_i-a_{i-1})\sigma^i$$

dır. Burada $a_{-1}=a_{m-1}$ dır. Buradan

$$\text{çek}\,\tau = \{\ \gamma = \sum_{i=0}^{m-1} a_i\sigma^i \ \mid\ \gamma\tau = \sum_{i=0}^{m-1} (a_i - a_{i-1})\ \sigma^i = 0\ \}$$

$$= \{ \sum_{i=0}^{m-1} a_i\sigma^i \ \mid\ a_0 = a_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots = a_{m-1} \}$$

$$= \{\ a\mu \ \mid\ a \in \mathbb{Z}\ \} \quad = \text{res}\,\mu = \ \mathbb{Z}\mu$$

ve

$$\text{çek}\,\varepsilon = \{\ \sum_{i=0}^{m-1} a_i\sigma^i \ \mid\ \sum_{i=0}^{m-1} a_i = 0\ \} = \text{çek}\,\mu$$

$$= \{ (a_0 + (a_0+a_1)\sigma + \ldots\ldots + (a_0+a_1+\ldots\ldots + a_{m-1})\ \sigma^{m-1})\tau \mid a_i \in \mathbb{Z}\ \}$$

$$= \text{res}\,\tau$$

eşitliklerini yazabiliriz.

Şimdi her $n \geq 0$ için $X_n = \Gamma$, $d_0 = \varepsilon$ ve her $i > 0$ için $d_{2i-1} = \tau$ ve $d_{2i} = \mu$ olsun. Bu takdirde

$$\cdots \xrightarrow{\mu} \Gamma \xrightarrow{\tau} \Gamma \xrightarrow{\mu} \Gamma \xrightarrow{\tau} \Gamma \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

dizisi trivial Γ -modül $\mathbb{Z}$ nin bir serbest çözücüsüdür. Bu nedenle, bir sonlu devirli grubun kohomoloji grupları peryodiktir (2 peryotlu). Burada her $n \geq 0$ için $\text{Hom}_\Gamma\ (X_n, A)$ grupları A ya izomorf olduğundan, bu gruplar yerine A yı alabiliriz. $a \in A$ olmak üzere μ^* ve τ^* dönüşümlerini

$$\mu^*(a) = a\mu \quad \text{ve} \quad \tau^*(a) = a\tau$$

şeklinde tanımlayacağız. Tanıma göre $i > 0$ için

$$H^{2i-1}(G,A) = \text{çek}\ \mu^*/\text{res}\ \tau^*$$

ve

$$H^{2i}(G,A) = \text{çek}\ \tau^*/\text{res}\ \mu^*$$

dır.

Örneğin; $G, A = \mathbb{Z}$ üzerine trivial etki ediyorsa herhangi bir $n \in \mathbb{Z}$ için

$$n\mu = nm \quad \text{ve}\ n\tau = 0$$

dır. Bu nedenle

$$H^{2i-1}(G,\mathbb{Z}) = \{0\} \ \text{ve}\ H^{2i}(G,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$$

dır. Diğer yandan A bir sonlu Abel grup ise

$$|H^{2i-1}(G,A)| = |H^{2i}(G,A)|$$

sağlanır. Bu eşitlik 1.69 dan çıkar.

p bir asal sayı olsun. p inci mertebeden $\mathbb{Z}_p$ devirli grubu $\mathbb{Z}_p$ üzerine trivial olarak etki ederse , μ^* ve τ^* sıfır dönüşümleridir. Buradan her $k > 0$ için

$$H^k(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p$$

dır.

4.23.ÖRNEK

G bir sonlu A Abel grubu üzerine etki eden bir sonlu p-grup olsun. Eğer $H^1(G,A)=\{0\}$ ise G nin her K altgrubu için

$$H^1(K,A)=H^2(K,A)=\{0\}$$

dır.

İSPAT.

Bu önermeyi $|G|$ üzerine indüksiyonla ispatlayacağız. M, G nin bir maksimal altgrubu olsun. 1.48 e göre $M \trianglelefteq G$ ve G/M p inci mertebeden devirlidir. 4.20 ye göre tam olan aşağıdaki diziyi gözönüne alalım.

$$0 \longrightarrow H^1(G/M,A^M) \longrightarrow H^1(G,A) \longrightarrow H^1(M,A)^G \longrightarrow H^2(G/M,A^M)$$

Varsayıma göre $H^1(G,A)=\{0\}$dır. Böylece tamlıktan $H^1(G/M,A^M)=\{0\}$ dır. G/M devirli ve A sonlu olduğundan 1.69 a göre $H^2(G/M,A^M)=\{0\}$ dır. Tekrar tamlıktan $H^1(M,A)^G=\{0\}$dır. M bir p-grup olduğundan 4.15 ve 4.17 ye göre $H^1(M,A)$ bir sonlu p-gruptur. Bu nedenle G, $H^1(M,A)$ üzerine sabit noktasız etki eder. Yani $H^1(M,A)$ nın birimden farklı hiçbir G-invaryant elemanı yoktur. 1.46 ya göre $H^1(M,A)=\{0\}$ dır. K, G nin bir öz altgrubu olsun. K, G nin bir M maksimal altgrubunda içerilir. İndüksiyon hipotezine göre $H^1(K,A)=H^2(K,A)=\{0\}$ alabiliriz. Geriye $H^2(G,A)=\{0\}$ olduğunu ispatlamak kalır. M için 4.21 tam dizisini yazalım.

$$0 \longrightarrow H^2(G/M,A^M) \longrightarrow H^2(G,A) \longrightarrow H^2(M,A)$$

Bu takdirde $H^2(G,A)$ nın yanındaki terimler sıfırdır. Dizinin tam oluşu $H^2(G,A)=\{0\}$ olduğunu ispatlar.

BÖLÜM III

KOHOMOLOJİ TEORİSİNİN UYGULAMALARI

5. KOMPLEMENT

5.1.TANIM

H ve F iki grup olsun. G nin bir K altgrubu $HK=G$ ve $H\cap K=\{1\}$ olacak şekilde mevcutsa H ın F ile bir G genişlemesine parçalayıcı genişleme denir. Bu halde, G genişlemesi H üzerinde parçalanır ifadesi de kullanılır. K altgrubuna H ın bir komplementi denir.

Bir parçalayıcı genişleme H ve K nın yarıdirekt çarpımından başka birşey değildir. İzomorfizm teoremine göre

$$K \cong HK/H = G/H = F$$

dır. Bu nedenle, bir K komplementi F ye izomorftur.

5.2. TEOREM

H ın F ile bir genişlemesi G olsun. G nin bir L altgrubu H ı içeriyorsa L, H ile L/H ın bir genişlemesidir. G genişlemesi H üzerinde parçalanırsa, L genişlemesi de H üzerinde parçalanır. K, H ın G deki bir komplementi ise $K\cap L$,H ın L deki bir komplementidir.

İSPAT.

Birinci bölümün ispatı açıktır. Kalan kısmı ispatlamak için, G nin H üzerinde parçalandığını kabul edelim. K, H ın bir komplementi olsun. Bu durumda, $G=HK$ olduğundan $L=HK\cap L$ dır. 1.21 e göre $L=H(L\cap K)$ sağlanır. $H\cap(L\cap K)=\{1\}$ olduğundan $L\cap K$, H ın L deki bir komplementidir.

5.3. TEOREM

H ın F ile bir genişlemesi G ve G genişlemesi ile ilgili faktör kümesi f olsun. G genişlemesinin H üzerinde parçalanması için gerek ve yeter şart f nin her $\sigma, \tau \in F$ için $g(\sigma,\tau)=1$ şeklinde tanımlanan trivial faktör kümesi g ye denk olmasıdır. H Abel ise, G genişlemesinin H üzerinde parçalanması için gerek ve yeter şart f faktör kümesinin bir ko-sınır olmasıdır.

İSPAT

G genişlemesi parçalanıyorsa, bir K komplementi vardır. Bu halde K yı bir transversal olarak seçebiliriz. K ya göre g faktör kümesi her $\sigma, \tau \in F$ için $g(\sigma,\tau)=1$ şartını sağlar. Böylece, f trivial faktör kümesine denktir.

Tersi de sağlanır. f trivial faktör kümesine denk ise 3.13 e göre G bir parçalı genişlemeye izomorftur. H Abel ise, f ve g $B^2(F,H)$ ın aynı sınıfına aittir. g trivial faktör kümesi olduğundan f bir ko-sınırdır.

5.4. TEOREM

G bir grup, A G nin bir Abel normal altgrubu ve L G nin

$$A \subset L \subset G \quad \text{ve} \quad [G:L]=j$$

olacak şekilde bir altgrubu olsun. $a \longmapsto a^j$ dönüşümünün A nın bir otomorfisi olduğunu kabul edelim. Bu takdirde; G genişlemesinin A üzerinde parçalanması için gerek ve yeter şart L nin A üzerinde parçalanmasıdır.

İSPAT.

G, A üzerinde parçalanırsa L nin de A üzerinde parçalandığı 5.2 den çıkar. Tersine olarak L nin A üzerinde parçalandığını kabul edelim. Varsayıma göre $\Theta(a)=a^j$ dönüşümü A nın bir otomorfisidir. $g \in G$ olmak üzere her $a \in A$ için $\pi_g(a)=g^{-1}ag$ ile tanımlanan dönüşüm A nın bir otomorfisidir. Açık olarak G, A üzerine $g \longmapsto \pi_g$ dönüşümüne göre etki eder. A Abel olduğundan, bu G/A nın A üzerine bir etkisini meydana getirir. Daha fazla olarak Θ, A nın bir G/A-izomorfisidir ve bu $H^2(G/A,A)$ nın bir Θ_* otomorfisini meydana getirir. G genişlemesi ile ilgili faktör kümesini içeren sınıf c olsun. Bu takdirde, $\rho^*(G/A,L/A)$ kısıtlanış dönüşümü altında $\rho^*(c)$ görüntüsü sıfırdır. Buradan $c \in$ çekρ^* dır. 4.14 e göre $jc=0$ dır. Bu nedenle $\Theta_*(c)=jc=0$ dır. Θ_* bir otomorfi olduğundan $c=0$ olmalıdır. 5.3 e göre G genişlemesi A üzerinde parçalanır.

5.5. TEOREM

G sonlu bir grup ve $H \trianglelefteq G$ olsun. Eğer

$$(|H|,[G:H])=1$$

ise genişleme H üzerinde parçalanır.

İSPAT.

5.5 in sağlanmadığını kabul edelim. G, 5.5. e minimal mertebeli karşı örnek olsun. G nin $(|H|,[G:H])=1$ olacak şekilde bir H normal altgrubu vardır. Fakat H ın bir komplementi yoktur. Daha fazla olarak $|G|$ den küçük mertebeden herhangi bir sonlu grup için 5.5 sağlanır. Bu varsayımlar altında bir seri lemma ispatlıyacağız.

(a) H Abel değildir.

H Abel olsaydı, 5.5 uyarısına göre genişleme H üzerinde parçalanırdı.

(b) Bir L altgrubu G=HL özelliğini sağlıyorsa L=G dır.

Kabul edelim ki bir L öz altgrubu için G=HL olsun. Bu takdirde, izomorfizm teoremine göre

$$L\cap H \trianglelefteq L \quad \text{ve} \quad L/L\cap H \cong G/H$$

dır. Buradan

$$(|L\cap H|,[L:L\cap H])=1$$

bulunur. L, G nin bir öz altgrubu olduğundan $|L|<|G|$ dır. Ohalde $L\cap H$ ın L de bir komplementi mevcuttur. K, $L\cap H$ ın bir komplementi ise

$$(L\cap H)K = L \quad \text{ve} \quad K\cap(L\cap H) = \{1\}$$

dır. Buradan

$$G = HL = H(L\cap H)K = HK \quad \text{ve} \quad K\cap H = \{1\}$$

bulunur. Bu K nın H ın G deki bir komplementi olduğunu ifade eder. Bu varsayımla çelişir. Buradan L=G sonucunu çıkarırız.

(c) H, G nin bir minimal normal altgrubudur.

M G nin $M\subset H$ olacak şekilde bir minimal normal altgrubu olsun. $M\neq\{1\}$ olduğundan 5.5 i G/M e uygulayalım.

$$(|H/M|,\ [G/M:H/M]) = 1$$

olduğundan H/M in bir komplementi mevcuttur. Bu komplement L/M biçimindedir ve HL = G dir. (b) ye göre L = G dır. Fakat, $L\cap H = M$ olduğundan

$$M = L\cap H = G\cap H = H$$

dır.

(d) Bir p asal sayısı için H bir p-gruptur.

p, $|H|$ ı bölen bir asal sayı ve S H ın bir S_p-altgrubu olsun. 1.52 ye göre $G = HN_G(S)$ dır. (b) ye göre $N_G(S)=G$ dır. Buradan $S \trianglelefteq G$ elde edilir. (c) ye göre $H = S$ dır.

(e) H Abeldir.

1.48 ve (d), $Z(H) \neq \{1\}$ olduğunu gösterir. $Z(H) \leq\leq H$ olduğundan 1.37 ye göre $Z(H) \trianglelefteq G$ dır. (c) ye göre $Z(H)=H$ dır. Böylece, H Abeldir. (e), (a) ile çeliştiğinden böyle bir G karşı örneği yoktur. O halde, 5.5 sağlanır.

5.6. TEOREM

G bir sonlu grup, A G nin bir Abel normal altgrubu olsun. Genişlemenin A üzerinde parçalanması için gerek ve yeter şart $|G|$ nin herhangi bir p asal böleni için G nin herhangi bir S S_p-altgrubunun $S \cap A$ üzerinde parçalanmasıdır.

İSPAT.

G genişlemesinin A üzerinde parçalandığını kabul edelim. K A nın G deki bir komplementi olsun. A_p, A nın S_p-altgrubu ve P K nın bir S_p-altgrubu olsun. A Abel olduğundan A_p, A nın bir karakteristik altgrubudur. Bu nedenle, $A_p \trianglelefteq G$ ve A_pP, G nin bir altgrubudur. Buradan

$$A_p \cap P \subset A \cap K = \{1\}$$

yazabiliriz. Dolayısı ile A_pP bir parçalayıcı genişlemedir. 1.20 ye göre A_pP, G nin bir S_p-altgrubudur. S G nin herhangi bir S_p-altgrubu ise S, A_pP ye eşlenik ve $S \supset A_p$ dır. Bu durumda S, A_p nin bir parçalayıcı genişlemesidir. $S \cap A$, A nın bir S_p-altgrubu olduğundan $S \cap A = A_p$ dır.

Tersine olarak herhangi bir $p \mid |G|$ için herhangi bir S S_p-altgrubunun $S \cap A$ üzerinde parçalandığını kabul edelim. T, $S \cap A$ nın S deki bir komplementi olsun. Bu takdirde,

$$(S \cap A)T = S \quad \text{ve} \quad T \cap (S \cap A) = T \cap A = \{1\}$$

dır. Buradan

$$AT = A(S \cap A)T = AS$$

yazabiliriz. Bu nedenle T, A nın AS deki bir komplementidir. Genişleme ile ilgili faktör kümesinin kohomoloji sınıfı c olsun. Bu takdirde $\rho^*(G/A, AS/A)(c) = 0$ dır. 4.14 e göre $jc = 0$ dır. Burada $j = [G:AS]$ dır. S bir S_p-altgrup olduğundan j, p ye asaldır. Bu c sınıfının mertebesinin

$|G|$ nin bütün asal bölenleri için p ye asal olduğunu ifade eder. c nin mertebesi yalnızca $\pi(G)$ deki asal sayılar ile bölünebildiğinden $c = 0$ alabiliriz. 5.3 e göre G genişlemesi A üzerinde ayrılır.

Yukarıdaki teorem, daha sonra ispatlayacağımız 5.10 gibi Gaschütz'ün [3] teoremlerinden biridir.

Grup genişlemeleri ve 1-boyutlu kohomoloji grupları arasındaki bir ilişki aşağıdaki teorem ile verilir.

5.7. TEOREM

A bir Abel grup ve A nın bir F grubu ile genişlemesi G olsun. A nın her elemanını ve A nın her sınıfını sabit bırakan G nin otomorfilerinin tümü A_0 olsun.

$$A_0=\{ \varphi \in O(G) \mid \varphi(a)=a \quad (a\in A), \quad \varphi(xA) = xA \ (x\in G)\}$$

Bu takdirde , $A_0 \cong Z^1(F,A)$ ve bu izomorfi ile $B^1(F,A)$, A nın elemanlarıyla iç otomorfilerin kümesine karşılık gelir.

İSPAT.

Açık olarak $A_0 \leq O(G)$ dır. T, A nın G deki bir transversali olsun. $\varphi \in A_0$ ise herbir $\sigma \in F$ için

$$\varphi(t(\sigma)) = t(\sigma)d(\sigma)$$

olacak şekilde A nın bir $d(\sigma)$ elemanı vardır. (3,2) formülüne φ yi uygularsak

$$d(\sigma)^{\tau} d(\tau) = d(\sigma\tau)$$

yazabiliriz. Böylece d bir geçişli homomorfidir. $\varphi \longmapsto d$ dönüşümü A_0 dan $Z^1(F,A)$ içine bir homomorfidir. Bu aşağıdaki gibi ispatlanır. $\varphi' \longmapsto d'$ ise

$$(\varphi\varphi')(t(\sigma)) = \varphi'(\varphi(t(\sigma))) = t(\sigma)d'(\sigma)\, d(\sigma)$$

dır. Tersine olarak, $d\in Z^1(F,A)$ ise $\varphi(t(\sigma)a)=t(\sigma)d(\sigma)a$ ile tanımlanan φ dönüşümü G nin bir otomorfisidir ve $\varphi \in A_0$ dır. Bu nedenle, $Z^1(F,A)\cong A_0$ dır. Bir $\varphi \in A_0$ otomorfisi $a\in A$ elemanının eşleniği ile meydana getirilmiş ise

$$\varphi(t(\sigma)) = a^{-1}t(\sigma)a = t(\sigma)a^{-\sigma}a$$

dır. Bu nedenle $d(\sigma) = a^{-\sigma}a \in B^1(F,A)$ dır. Tersine olarak $d(\sigma)=a^{-\sigma}a$ ise karşılık gelen otomorfi a elemanı ile iç otomorfidir.

5.8. SONUÇ

G bir A Abel grubunun bir genişlemesi olsun. K_1 ve K_2 A nın iki komplementi ise $\varphi(K_1)=K_2$ olacak şekilde bir $\varphi \in A_0$ otomorfisi vardır.

İSPAT.

Herbir $\sigma \in G/A$ için $t(\sigma)$, σ sınıfında içerilen K_1 in tek elemanı olsun. Benzer şekilde σ da içerilen K_2 nin tek elemanı vardır. Bu eleman $d(\sigma) \in A$ için $t(\sigma)d(\sigma)$ biçimindedir. Bu takdirde

$$t(\sigma)t(\tau)=t(\sigma\tau)$$

ve

$$t(\sigma)d(\sigma)t(\tau)d(\tau)=t(\sigma\tau)d(\sigma\tau)$$

dır. Böylece $d(\sigma)^{\tau}\, d(\tau) = d(\sigma\tau)$, yani $d \in Z^1(F,A)$ dır. 5.7 ye göre $\varphi(K_1)=K_2$ olacak şekilde bir $\varphi \in A_0$ otomorfisi vardır.

5.9. TEOREM

G bir A Abel grubunun bir parçalayıcı genişlemesi ve $F=G/A$ olsun. A nın G deki herhangi iki komplementinin eşlenik olabilmesi için gerek ve yeter şart $H^1(F,H)=\{0\}$ olmasıdır.

İSPAT.

K_1 ve K_2 A nın iki komplementi olsun. Bu takdirde 5.8 e göre bir $\varphi \in A_0$ için $K_2= \varphi(K_1)$ dır. 5.7 ye göre φ bir $d \in Z^1(F,A)$ elemanına karşılık gelir. $H^1(F,A)=\{0\}$ ise $d \in B^1(F,A)$ dır. Bu nedenle φ bir $a \in A$ elemanının eşleniği ile verilir. Buradan $K_2= \varphi(K_1)=a^{-1}K_1a$ bulunur.

Tersine olarak K_2, K_1 e eşlenik ise $K_2=a^{-1}K_1a$ olacak şekilde bir $a \in A$ vardır. Bu halde $\varphi = \delta a$ ve $H^1(F,A)= \{0\}$ dır.

5.10. TEOREM

G bir A Abel grubunun bir genişlemesi ve L G nin

$$A \subset L \subset G \quad \text{ve} \quad [G:L] = j < \infty$$

olacak şekilde bir altgrubu olsun. $a \longmapsto a^j$ $(a \in A)$ dönüşümünün A nın bir otomorfisi olduğunu kabul edelim. L genişlemesi A üzerinde parçalanır ve A nın L deki iki komplementi L de eşlenik ise, G genişlemesi de A üzerinde parçalanır ve herhangi iki komplement G de eşleniktir. Bu halde, H, A nın L deki bir komplementi ise G de $H=L \cap K$ olacak şekilde bir K komplementi vardır.

İSPAT.

5.4 e göre G , A üzerinde parçalanır. Varsayım ve 5.9 a göre $H^1(L/A,A)=\{0\}$ dır. Bu nedenle $H^1(G/A,A)$ nın herhangi bir c kohomoloji sınıfı kısıtlanış dönüşümünün çekirdeğindedir. 4.14 e göre jc=0 dır. Bu ise 5.4 ün ispatındaki gibi c=0 olmasını gerektirir. Böylece, $H^1(G/A,A)=\{0\}$ alabiliriz. 5.9 a göre A nın herhangi iki komplementi G de eşleniktir.

H,A nın L deki bir komplementi ve K,A nın G deki bir komplementi olsun. Bu takdirde, 5.2 ye göre $K \cap L$,A nın L deki bir komplementidir. Varsayıma göre $K \cap L$, L de H a eşleniktir. Buradan $H=(L \cap K)^x$ olacak şekilde bir $x \in L$ elemanı vardır.

$$(L \cap K)^x = L \cap K^x$$

olduğundan $H=L \cap K^x$ dır. Diğer yandan K^x de A nın G deki bir komplementi olduğundan son iddia ispatlanmış olur.

6. SCHUR - ZASSENHAUS TEOREMİ

Şimdi ispatlıyacağımız teorem sonlu grup teorinin temel teoremlerinden biridir. N nin Z(G) de içerilmesi durumunda teoremin bir özel hali gerekli bazı metodlar kullanılarak 1902 yılında Schur tarafından ispatlanmıştır.

5.11. TEOREM

G sonlu bir grup, $N \trianglelefteq G$ ve $(|N|,[G:N])=1$ olsun. Bu takdirde genişleme N üzerinde parçalanır ve herhangi iki komplement G de eşleniktir.

İSPAT.

Genişlemenin N üzerinde parçalandığını 5.5 de gördük. K_1 ve K_2 N nin iki komplementi olsun. K_1 in K_2 ye eşlenik olduğunu göstermek istiyoruz. Teoremin sağlanmadığını kabul edelim. G, K_1 ve K_2 eşlenik olmayacak biçimde teoreme minimal karşı örnek olsun. Bu hipotezler altında bir seri lemma ispatlıyacağız.

(a) N, G nin minimal normal altgrubudur.

M, N de içerilen bir minimal normal altgrup olsun. $N \neq \{1\}$ olduğundan $M \neq \{1\}$dır. Bu takdirde,

$$N/M \trianglelefteq G/M \quad \text{ve} \quad (|N/M|, [G/M:N/M]) = 1$$

dır. Daha fazla olarak MK_1/M ve MK_2/M altgrupları N/M in komplementleridir. |G|nin minimalliğine göre bunlar eşleniktir. O halde bir $Mx \in G/M$ için

$$(MK_1/M)^{Mx} = MK_2/M$$

dır. Buradan $MK_1^x = MK_2$ elde edilir. MK_2 altgrubu $(|M|,[MK_2:M]) = 1$ olacak şekilde M nin bir genişlemesidir. Ayrıca MK_2, K_1^x ve K_2 komplementlerini içerir. Fakat varsayıma göre K_1^x ve K_2 G de eşlenik değildir. Bu teoremin MK_2 için sağlanmadığını ifade eder. |G| nin minimalliği $MK_2=G$ ve M=N olmasını gerektirir.

(b) N çözülemezdir ve Abel değildir.

N çözülebilir olsaydı, N , {1} den farklı Abel ve karakteristik bir A altgrubu içerirdi. (a) ya göre A=N dır. N Abel olsaydı 5.10 a göre

K_1 ve K_2 eşlenik olurdu. Bu ise hipotezle çelişir.

(c) G/N basittir.

L, G nin $N\subset L$ olacak şekilde bir maksimal normal altgrubu olsun. Tanıma göre $L \neq G$ dır. 5.2 ye göre, $L\cap K_1$ ve $L\cap K_2$, N in L deki komplementleridir. Böylece $|G|$ nin minimalliğine göre bunlar eşleniktir. O halde,

$$L\cap K_2 = (L\cap K_1)^x = L\cap K_1^x$$

olacak şekilde bir $x\in L$ vardır. $D=L\cap K_2=L\cap K_1^x$ olsun. Bu takdirde D, K_2 ve K_1^x in bir normal altgrubudur. Böylece $N_G(D)$, K_2 ve K_1^x altgruplarının her ikisini de içerir. 1.21 e göre,

$$N_G(D) = N_0K_2 = N_0K_1^x$$

dır. Burada $N_0=N\cap N_G(D)\trianglelefteq N_G(D)$ dır. Buradan K_2/D ve K_1^x/D, N_0D/D nin $N_G(D)/D$ deki komplementleridir. $N_G(D)/D$ grubu ve onun N_0D/D normal altgrubu teoremin bütün hipotezlerini sağlar. Fakat K_2/D ve K_1^x/D eşlenik değildir. Bu nedenle tekrar $|G|$ nin minimalliğine göre $G=N_G(D)/D$ dır. Özellikle $D=\{1\}$ dır. Bu yalnız $L=N$ olmasıyla mümkündür. Böylece N bir maksimal normal altgruptur ve 1.26 ya göre G/N basittir.

(d) Bir p asal sayısı için, G/N mertebesi p olan bir devirli gruptur ve K_1 ve K_2 G nin S_p-altgruplarıdır.

(b) ye göre N çözülemezdir. Bu nedenle Feit-Thompson Teoremi [2] $|N|$ nın çift olduğunu söyler. Varsayıma göre $(|G/N|, |N|)= 1$ olduğundan $|G/N|$ tek olmalıdır. Tekrar Feit-Thompson Teoremine göre G/N çözülebilirdir. Diğer yandan (c) ye göre G/N basittir. Bu nedenle, mertebesi p olan bir devirli grup olmalıdır (1.13 ve çözülebilirlikten).

Açıkca, K_1 ve K_2, G nin S_p-altgruplarıdır. Bu takdirde, Sylow teoremine göre K_1 ve K_2 G de eşleniktir. Bu hipotezimize çelişkidir. Böylece 5.11 sağlanır.

7. p-GRUPLARININ OTOMORFİLER GRUBU

Kohomoloji teorisinin grup teoriye bir uygulaması olarak Gaschütz'ün [4] p-gruplarının otomorfileri üzerine aşağıdaki teoremini ispatlayacağız.

7.1. TEOREM

G bir p-grup olsun. Eğer $|G|>p$ ise

$$[O(G):\dot{I}(G)] \equiv 0(\mathrm{mod}\,p)$$

dır.

İSPAT.

Teoremi üç adımda ispatlıyacağız.

(a) G nin $C_G(M)=Z(G)$ olacak şekilde bir M maksimal altgrubu içerdiğini kabul edelim.

1.48 e göre $M \trianglelefteq G$ ve G/M mertebesi p olan bir devirli gruptur. $M \cap Z(G) \neq \{1\}$ olduğundan G den $M \cap Z(G)$ içine çekφ =M olacak şekilde bir φ homomorfisi vardır. Her $x \in G$ için $\sigma(x)=x\ \varphi(x)$ şeklinde tanımlanan dönüşümü gözönüne alalım. σ mertebesi p olan bir otomorfidir. σ nın iç otomorfi olmadığını göstereceğiz. Kabul edelim ki σ bir iç otomorfi olsun. Bu durumda $x\varphi\ (x)=x^g$ olacak şekilde bir $g \in G$ vardır. $x \in M$ ise $\varphi\ (x)=1$ dır. Böylece her $x \in M$ için $x^g=x$ dır. Bu ise $g \in C_G(M)$ olduğunu gösterir. Fakat varsayıma göre $C_G(M)=Z(G)$ dır. Buradan $g \in Z(G)$ ve her x için $x\ \varphi(x)=x$ elde edilir. Bu φ nin tanımı ile çelişir. O halde σ iç otomorfi değildir.

(b) A G nin Abel normal altgrupları arasında maksimal olan bir Abel normal altgrup olsun. A yı devirli olmayacak şekilde seçelim.

Bu durumda $C_G(A)=A$ dır. $H^1(G/A,A) \neq \{0\}$olsun. Bu takdirde bir d geçişli homomorfisi vardır ve $d \notin B^1(G/A,A)$ dır. 5.7 ye göre d, 5.7 nin A_0 grubuna ait olan bir φ homomorfisine karşılık gelir. φ nin mertebesi p nin bir kuvveti şeklindedir. φ nin bir iç otomorfi olmadığını göstereceğiz. φ,G nin bir iç otomorfisi olsaydı, bir $x \in G$ için $\varphi(x)=x^g$ olurdu. $\varphi \in A_0$ olduğundan her $a \in A$ için $\varphi(a)=a$ dır. Böylece her $a \in A$ için $a^g=a$, yani $g \in C_G(A)$ olurdu. $C_G(A)=A$ olduğundan $g \in A$ dır.

Fakat bu 5.7 ye göre $d \in B^1(G/A,A)$ olduğunu ifade eder. Bu d nin tanımı ile çelişir. Böylece φ iç otomorfi değildir.

(c) $H^1(G/A,A)=\{0\}$ olsun. 4.23 e göre G/A nın herhangi bir U altgrubu için

$$H^1(U,A)=H^2(U,A)=\{0\}$$

dır. Özellikle $H^2(G/A,A)=\{0\}$ dır. Bu ise G nin A üzerinde parçalandığını gösterir. Böylece A nın G de bir K komplementi vardır. M, K yı içeren bir maksimal altgrup olsun. (a) ya göre $C_G(M)\neq Z(G)$ kabul edebiliriz. Bu hipotezler altında G nin yapısının tektürlü olarak belirlendiğini göstereceğiz.

Önce, $C_G(M)$ nin A da içerilmediğini gösterelim. $C_G(M)\leq A$ olsaydı, $C_G(M)$ hem M yi hemde A yı merkezlerdi. Bu nedenle $C_G(M)$, $G=AK=AM$ nin merkezinde bulunurdu. Bu varsayımla çelişir. Buradan $A\,C_G(M)\neq A$ dır. Bu takdirde

$$A\subset B\subset C_G(M) \quad \text{ve} \quad [B:A]=p$$

olacak şekilde G nin bir B normal altgrubu vardır.

Açık olarak $B\cap M\trianglelefteq G$ dir. Göstereceğiz ki $B\cap M$ Abel, fakat devirli değildir. $P=B\cap K$ olsun. Bu durumda $G=AK$ olduğundan 1.21 e göre $B=AP$ ve $|P|=p$ dır. Tekrar 1.21 e göre $B\cap M=(A\cap M)P$ dır. Açık olarak $A\cap M$, $AC_G(M)$ yi merkezler ve $(A\cap M)P=(A\cap M)\times P$ dır. Bu $B\cap M$ nin devirli olmayan bir Abel normal altgrup olduğunu ispatlar. A nın tanımından A nın devirli olmadığı çıkar.

Şimdi $A\cap M$ nin devirli ve B nin maksimal altgruplarından birinin devirli olduğunu ispatlayacağız. $B=AP$ ve $A\cap P=\{1\}$ olduğundan, P, A nın B deki bir komplementidir. Varsayımlarımız altında $H^1(B/A,A)=\{0\}$ olduğunu gösterdik. Bu nedenle bütün komplementler eşleniktir. $B\cap M$ nin B nin bir Abel normal altgrubu ve $[B:B\cap M]=p$ olduğunu da gösterdik. Bu takdirde P nin B de kesinlikle p tane eşleniği vardır ve P nin bütün eşlenik altgrupları $B\cap M$ de içerilir. 1.70 (i) ve (ii) yi $B\cap M$ Abel grubuna uygularsak

$$|\Omega_1(B\cap M)|=p^2 \quad \text{ve} \quad |\Omega_1(A\cap M)|=p$$

alabiliriz. Daha fazla olarak $A\cap M$ devirlidir. Daha önce gösterildiği gibi $A\cap M$, B nin merkezinde içerilir. $B/A\cap M$ devirli olmadığından B nin

A ve $B\cap M$ den farklı bir C maksimal altgrubu vardır. 1.14 e göre C Abeldir. Fakat, A nın bütün komplementleri $B\cap M$ de içerildiğinden $\Omega_1(C)\subset A\cap M$ dır. 1.70 (i) ye göre C devirlidir.

B nin devirli olmayan A ve $B\cap M$ Abel maksimal altgrupları gibi devirli olan bir C maksimal altgrubu içerdiğini gösterdik. B=G ve G nin mertebesi 8 olan dihedral grup olduğunu göstereceğiz.

A devirli olmadığından, mertebesi p olan bir $a\in A-M$ elemanı vardır. $x=ay^{-1}\in C$ olacak şekilde P nin uygun bir y üreticisini seçelim. Bu mümkündür ve $\langle x\rangle=C$ dır. x in mertebesi p^n olsun. Bu takdirde $n\geq 2$ dır. $C\trianglelefteq B$ olduğundan $y^{-1}xy=x^m$ olacak şekilde bir m tamsayısı vardır. $y^p=(xy)^p=1$ olduğundan

$$(xy)^p=y^{-p}xy^py^{-(p-1)}xy^{p-1} \;\ldots\ldots\; y^{-1}xy = 1$$

dır. Bu nedenle m tamsayısı $m^p\equiv 1(\mathrm{mod}\,p^n)$ ve

$$1+m+m^2+\;\ldots\ldots+m^{p-1}\equiv 0\;(\mathrm{mod}\,p^n)$$

bağıntılarını sağlar. Fermat teoremine göre $m^p\equiv m(\mathrm{mod}\,p)$ olduğundan

$$m=1+kp^{\lambda}\;,\quad (k,p)=1$$

alabiliriz. B Abel değildir. Bu nedenle $1\leq\lambda<n$ dır. Binom teoremine göre

$$m^p\equiv 1+kp^{\lambda+1}+k^2((p-1)/2)p^{2\lambda+1}\,(\mathrm{mod}\,p^{\lambda+2})$$

kongrüansını yazabiliriz. p tek olsaydı

$$m^p\equiv 1+kp^{\lambda+1}(\mathrm{mod}\,p^{\lambda+2})$$

olurdu. $m^p\equiv 1(\mathrm{mod}\,p^n)$ olduğundan $n=\lambda+1$ olurdu. Diğer yandan, $n\geq 2$ ve $2\lambda\geq n$ dır. Bu nedenle

$$0\equiv 1+m+m^2+\ldots\ldots+m^{p-1}\equiv p+k(p-1)/2\;p^n(\mathrm{mod}\,p^n)$$

olurdu. Bu açıkca bir çelişkidir. Böylece, p=2 dır.

Bu halde, $1+m$, p^n ile bölünebilir. Böylece $x^y=x^{-1}$ dır. Diğer yandan x^2 B nin merkezinde içerilen $A\cap M$ nin elemanıdır. Bu $x^2=x^{-2}$ ve n=2 olmasını gerektirir. Böylece $|A|=4$ dır. A, $C_G(A)=A$ özelliğini sağlayan bir Abel normal altgrup olduğundan G/A bölüm grubu O(A) nın bir altgrubuna izomorftur. (1.35) 2.5 e göre O(A), GL(2,2) ye izomorftur. Böylece $[G:A]=2$ ve G=B dır. Açık olarak G grubu mertebesi 8 olan dihedral grup, yani

$$G=\langle x,y\mid x^4=y^2=1,\quad x^y=x^{-1}\rangle$$

dır.

Mertebesi 8 olan dihedral grup için 7.1 in sağlandığını kolayca görebiliriz.

$$x \longrightarrow x^{-1} , \qquad y \longrightarrow xy$$

dönüşümü mertebesi 2 olan ve iç olmayan G nin bir otomorfisine genişletilebilir. Bu nedenle, mertebesi 8 olan dihedral gruplar için 7.1 sağlanır. Bu 7.1 in ispatını tamamlar.

KAYNAKLAR

[1]. BAYAR,E.

Gruplar Teorisi. Karadeniz Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Genel Yayın No.96,Fakülte Yayın No.39, Trabzon (1986).

[2]. FEIT,W. and J.G.THOMPSON

Solvability of groups of odd order. Pacific J.Math. 13,775-1029 (1963).

[3]. GASCHÜTZ,W.

Zur Erweiterungstheorie der endlichen Gruppen. J.Reine Angew. Math.190,93-107 (1952).

[4]. GASCHÜTZ, W.

Nichtabelsche p-Gruppen besitzen äussere p-Automorphismen. J. Algebra 4, 1-2 (1966).

[5]. HUNGERFORD, T.W.

Algebra, Holt, Rinehart-Winston (1973).

[6]. HUPPERT,B.

Endliche Gruppen I. Springer-Varlag, Berlin-Heidelberg (1967).

[7]. SUZUKİ,M.

Group Theory I. Springer-Varlag,Berlin-Heidelberg-New York (1982).