KARADENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

TEZ NO:
Genel :
Anabilim Dalı :
Program :

NÖRLUND ORTALAMALARI

Birsen SAĞIR

Yönetici

Doç.Dr.Hüsnü KIZMAZ

Ocak 1987, TRABZON

İÇİNDEKİLER

Bu çalışmayı yaparken bana yol gösterip, her türlü yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Sayın Doç.Dr.Hüsnü KIZMAZ'a teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Ocak - 1987

Birsen SAĞIR

ÖZET

İki bölümden oluşan bu çalışmanın amacı, Np-Nörlund ortalamalarını incelemektir. Bu nedenle çalışmamızın birinci bölümünde; aslında bir limitleme metodu olan matris dönüşümleri ile ilgili temel teoremler (Toeplitz ve Schur Teoremi) verilmiştir.

Çalışmamızın esasını oluşturan ikinci bölümde ise; bir Nörlund Tipi Metod olan Ağırlıklı Aritmetik Ortalama ve Nörlund metodu ile ilgili tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Son olarak Np-Nörlund metodu ile C_k-Cesàro metodu (k.mertebeden Cesàro metodu) arasındaki ilişkiyi veren bir teorem ispat edilmiştir.

Ocak - 1987

Birsen SAĞIR

GİRİŞ

$A = (a_{nk})$; $(n,k \in \mathbb{N} = \{0,1..\})$ satır ve sütun sayısı sonsuz olan kompleks terimli bir matris ve U,V; bütün kompleks terimli dizilerin oluşturduğu $\mathcal{S}$ uzayının gerçek alt cümleleri olan $C_o := \{s = (S_k): \lim\limits_{k\to\infty} S_k = 0,\ S_k \in \mathbb{C}\}$, $C := \{s = (S_k): \lim\limits_{k\to\infty} S_k \text{ var},\ S_k \in \mathbb{C}\}$, $\ell_p := \{s = (S_k): \sum\limits_{k=0}^{\infty} |S_k|^p < \infty,\ S_k \in \mathbb{C}\}$ $(P \geq 1)$, $\ell_\infty := \{s = (S_k) \exists M > 0$ öyle ki $\forall k \in \mathbb{N}$ için $|S_k| \leq M,\ S_k \in \mathbb{C}\}$ dizi uzaylarından herhangi ikisini temsil etsin. Buradaki herbir cümle $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde birer lineer uzay olduğundan her $s = (S_n) \in U$ dizisini, $s = \begin{bmatrix} s_o \\ s_1 \\ \vdots \end{bmatrix}$ vektörel formda yazabiliriz. Böylece $A = (a_{nk})$ sonsuz matrisi ile (S_n) dizisine bildiğimiz klasik matris çarpımını uygulayarak,

$$\begin{bmatrix} a_{oo} & a_{o1} & a_{o2} & \cdots & a_{ok} & \cdots \\ a_{1o} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{no} & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_o \\ S_1 \\ \vdots \\ S_k \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{k=o}^{\infty} a_{ok}S_k \\ \sum\limits_{k=o}^{\infty} a_{1k}S_k \\ \vdots \\ \sum\limits_{k=o}^{\infty} a_{nk}S_k \\ \vdots \end{bmatrix} = (A_n(s))$$

dizisini elde ederiz. Burada $\forall n \in \mathbb{N}$ için $A_n(s) = \sum\limits_{k=o}^{\infty} a_{nk}S_k$ serilerinin yakınsak olduğunu kabul ediyoruz. Bu şekilde elde edilen $(A_n(s))$ dizisine, $s=(S_n)$ dizisinin A matrisi ile yapılan dönüşümü denir. Her $s = (S_n) \in U$ için herbir terimi bir sonsuz seri olan $(A_n(s))$ dizileri V dizi uzayının elemanları ise, $A = (a_{nk})$ sonsuz matrisine U dan V içine bir matris dönüşümü tanımlar denir ve $A \in (U,V)$ ile gösterilir.

Çalışmamız süresince $A = (a_{nk})$ matrisi, kompleks terimli bir matris ve $s = (S_n)$ dizisi, kompleks terimli bir dizi olarak alınacaktır.

Kolayca görüleceği gibi $\mathbb{C}$ de tanımlı bütün diziler uzayı olan $\mathcal{S}$, $\mathbb{C}$ üzerinde bir lineer uzaydır.

Yukarıda tanımladığımız biçimde bir dönüşüm için özel dönüşümler olan matrisler yerine, neden genel bir lineer dönüşüm alınmadığı sorusu aklımıza gelebilir. Matrisleri seçişimizin nedeni, çoğu hallerde iki dizi uzayı arasındaki en genel dönüşümün bir matrisle verilebilmesindendir.

Dizilerle matris dönüşümleri arasındaki ilgi, toplanabilme teorisiyle bulunan bazı özel sonuçlarla doğmuştur. Toplanabilme teorisindeki temel amaç, Cauchy anlamındaki yakınsaklık kavramını genişletmektir. Bu durumu, Euler'in verdiği şu klasik örnekle biraz daha açıklayalım :

Euler, $(1+x)^{-1} = 1-x+x^2-x^3+\ldots$ formülünde $x = 1$ koyarak, $1-1+1-1+\ldots = \frac{1}{2}$ garip sonucunu elde etti. Biz biliyoruz ki yukarıdaki formül $|x|<1$ için geçerlidir. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1-1+1-1 \ldots$ serisi veya kısmi toplamlar dizisi olan $s = (S_n) = (1,0,1,0,\ldots)$ dizisi Cauchy anlamında ıraksaktır. Bu durumda eskiden bildiğimiz (Cauchy anlamındaki) yakınsaklık tanımına göre $s = (1,0,1,0,\ldots)$ dizisinin limiti 1/2 olamaz. Euler'in yaptığı işlem garip görünmekte ise de bizim için başka bir yakınsaklık fikrini ortaya çıkarmaktadır.

Şimdi $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ serisinin toplamını $(S_n) = (\sum_{k=0}^{n} (-1)^k)$ dizisinin limiti olarak değil de,

$$(\sigma_n) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{n}{k}}{2^n} S_k \right)$$

dizisinin $n\to\infty$ için limiti olarak tanımlarsak, $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ serisi bu yeni tanıma göre yakınsak ve limiti 1/2 olur. Gerçekten;

$$\sigma_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=o}^{n} \binom{n}{k} S_k$$

$$= \frac{1}{2^n} \left[\binom{n}{o} S_o + \binom{n}{1} S_1 + \ldots + \binom{n}{n} S_n\right]$$

$$\sigma_n = \frac{1}{2^n} \left[\binom{n}{o} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{p}\right] \quad ; \qquad p = \begin{cases} n, & n \text{ çift} \\ n-1, & n \text{ tek} \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2^n} . 2^{n-1}$$

$$= \frac{1}{2}$$

dır. Yukarıdaki işleme dikkat edilirse (σ_n) dizisi, $s = (S_n) = (1,0,1,0,\ldots)$ olmak üzere (S_n) dizisinin,

$$a_{nk} = \begin{cases} \dfrac{\binom{n}{k}}{2^n}, & k \leq n \\ 0, & k > n \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmış $A = (a_{nk})$ matrisiyle, başta tanımladığımız biçimde dönüşümden ibarettir. Yine başta verdiğimiz gösterimlere göre $s = (S_n) \in \ell_\infty, (A_n(s)) \in C$ olduğundan özel bir A matrisiyle sınırlı (fakat ıraksak) bir diziyi, yakınsak bir diziye dönüştürmüş olduk. Bu durumda bizim esas amacımız ortaya çıkmış olmaktadır. Bizim problemimiz, $s = (S_n) \in U$ verildiğinde $A(s) = (A_n(s)) \in V$ olması için, A matrisi üzerine konulacak gerek ve yeter koşulları araştırmaktır. Bunun için ilgili temel teoremleri Bölüm I de vereceğiz.

Şimdi temel problem ile ilgili bazı tanımları verelim:

$A = (a_{nk})$ sonsuz matrisi verilsin. Bir (S_n) dizisi için $\sigma_n = \sum_{k=o}^{\infty} a_{nk} S_k$ ol-

olmak üzere $\lim_{n\to\infty} \sigma_n$ mevcut ve s ye eşit ise (S_n) dizisi s ye A-limitlenebilir denir ve $S_n \to s(A)$ (veya $A\text{-}\lim_{n\to\infty} S_n = s$) şeklinde gösterilir. Bu durumda A matrisine de bir "limitleme metodu" denir. Ayrıca (S_n) dizisi $\sum_{n=o}^{\infty} a_n$ serisinin kısmi toplam dizisi ve (S_n) bir A-metodu ile limitlenebilirse $\sum_{n=o}^{\infty} a_n$ serisi A-toplanabilir denir ve $\sum_{n=o}^{\infty} a_n = s(A)$ şeklinde gösterilir. Bu takdirde A matrisine bir"toplama metodu"denir.

Bir (S_n) dizisi ile bir s sayısını birleştirme amacını güden ve eski yakınsaklık kavramının yerini alabilen pek çok sayıda toplama metodu vardır. Bunların herbiri daha önce ifade ettiği anlamı koruyarak diğerinden ayrılır. Yukarıdaki örnekte olduğu gibi, Cauchy anlamında ıraksak olan en az bir dizi yeni tanımla yakınsak olmaktadır. Diğer taraftan; Cauchy anlamında yakınsak olan her (S_n) dizisi, yeni tanımla da yakınsaktır. Yani; $\lim_{n\to\infty} S_n = s$ ise $a_{nk} = \begin{cases} \frac{\binom{n}{k}}{2^n}, & k\leqslant n \\ 0 & k>n \end{cases}$ olmak üzere (S_n) dizisinin A-dönüşümü olan $(\sigma_n) = (\sum_{k=o}^{\infty} a_{nk}S_k)$ dizisi için $\lim_{n\to\infty}\sigma_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=o}^{n} \binom{n}{k} S_k \to s$ dır. Gerçekten; (S_n) dizisi Cauchy anlamında yakınsak olduğundan,

$\forall\varepsilon>0$ için $\exists N = N(\varepsilon)\in\mathbb{N} : \forall n\geqslant N$ için $|S_n - s|<\varepsilon$ dır. Ayrıca

$$\sigma_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=o}^{n} \binom{n}{k}(S_k - s) + s.\frac{1}{2^n}\sum_{k=o}^{n}\binom{n}{k} \quad \dots\dots \quad (*)$$

şeklinde yazılır. $U_n := \frac{1}{2^n} \sum_{k=o}^{n} \binom{n}{k}(S_k - s)$ ile tanımlansın.

$$|U_n| \leqslant \frac{1}{2^n} \sum_{k=o}^{N} \binom{n}{k} |S_k - s| + \frac{1}{2^n} \sum_{k=N+1}^{n} \binom{n}{k} |S_k - s|$$

$$\leqslant \frac{1}{2^n}.M.\sum_{k=o}^{N}\binom{n}{k} + \frac{1}{2^n}.\varepsilon.\left[\sum_{k=o}^{n}\binom{n}{k} - \sum_{k=o}^{N}\binom{n}{k}\right]; \quad (M := \sup_k |S_k - s| < \infty)$$

$$|U_n| \leqslant \frac{\sum_{k=o}^{N}\binom{n}{k}(M-\varepsilon)}{2^n} + \varepsilon$$

bulunur. O halde $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = 0$ dır. Öte yandan $\sum\limits_{k=o}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ olduğu (*) da kullanılırsa, $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = s$ elde edilir.

Böylece bu yeni tanımla Cauchy anlamında yakınsak olan her dizi limitlenebilmektedir. Yani yeni tanım, eskisinden daha geniş bir uygulama alanına sahiptir.

İşte bu durum bize, Cauchy anlamında ıraksak olan bu tür birtakım dizileri yakınsak yapabilen ve üstelik Cauchy anlamındaki yakınsaklığı da koruyan limitlenebilme metodları tanımlama fikrini vermiştir.

Genel olarak, tanımlanacak yeni metodların aşağıdaki özelliklere sahip olmaları istenir :

1) Cauchy anlamında yakınsak ve limiti s olan bir dizi, yeni anlamda da yakınsak olmalıdır. Özellikle aynı s limitine yakınsaması istenir.

2) Cauchy anlamında ıraksak olan en az bir dizi, yeni metodla limitlenebilir olmalıdır.

3) Eğer bir (S_n) dizisine farklı iki metod uygulanır ve bu dizi bu iki metodla da limitlenebilirse her iki metod için (S_n)in limiti aynı olmalıdır.

1) ve 2) koşulları temel koşullardır fakat bütün metodlar 3) koşulunu sağlamak zorunda değildir. Ancak biz bu üç koşulu sağlayan metodları ve bunlara ek olarak, Cauchy anlamında yakınsak serilerin cebirsel işlemlerinin elemanter kurallarının; yani :

A_1-) $\sum\limits_{n=o}^{\infty} a_n = s \Longrightarrow \sum\limits_{n=o}^{\infty} \lambda a_n = \lambda . s$ (her sabit λ için)

$$A_2-)\quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n = s,\quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n = t \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) = s \pm t$$

$$A_3-)\quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n = s \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s - a_0$$

aksiyomlarını sağlayan toplama metodlarını inceleyeceğiz.

Eski tanıma göre açıklık getirilmemiş bazı problemler yeni tanıma göre açıklığa kavuşturulmuştur. Şöyle ki;

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$ ve bu iki serinin Cauchy çarpımı $C_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$ olmak üzere $\sum_{n=0}^{\infty} C_n$ serisinin ne zaman yakınsayacağı, önemli güçlükler arzeden bir problemdir. Fakat 1890 yılında E.Cesàro ,"Cesàro Teoremi" olarak bilinen şu teoremi ispatlamıştır.

Cesàro Teoremi : $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$ ve bu iki serinin Cauchy çarpımı $C_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-k} b_k$ olsun. Bu takdirde, $T_n = \sum_{k=0}^{n} C_k$ olmak üzere, $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} T_k \to A.B (n \to \infty)$ dır([6],sayfa 8, 1.12 Teorem).

Görüldüğü gibi Cesàro burada Cauchy anlamında yakınsaklık tanımını kullanmamış, adına"Aritmetik Ortalama" diyeceğimiz yeni bir toplama metodu kullanmıştır.

Ünlü Alman matematikçisi O.Toeplitz (1881-1940) bize her toplanabilme metodunun özel bir matris dönüşümü olduğunu göstermiştir. Toeplitz, yakınsak diziler uzayını kendisine resmeden ve her bir yakınsak dizinin limitini değişmez bırakan bütün $A = (a_{nk})$ $(n,k = 0,1,\dots.)$ sonsuz matrislerini karakterize etmiştir. Yani, başta tanımladığımız biçimdeki $A_n(s) = \sum_{k=0}^{n} a_{nk} S_k$ serilerinin her bir $n = 0,1,2,\dots$ için yakınsaması durumunda $S_k \to \ell\ (k \to \infty)$ olduğunda $A_n(s) \to \ell(n\to\infty)$ olması için A üzerindeki gerekli ve yeterli koşulları (Teorem I.1.4°) araştırmıştır. Böylece matris dönüşümleri ile toplanabilme metodları arasındaki ilgi, 1911 yıllarında O.Toeplitz tarafından kurulmuştur.

Şimdi yukarıdaki örnekte tanımladığımız

$$a_{nk} := \begin{cases} \dfrac{\binom{n}{k}}{2^n}, & k\leq n \\ 0 & ; k>n \end{cases}$$

olmak üzere $A = (a_{nk})$ matrisini gözönüne alalım. Herhangi bir (S_n) dizisinin A-dönüşümü (σ_n) olmak üzere $\sigma_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} S_k$ idi. Dolayısıyla $\sigma_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S_k$ dır. Bu metod, Euler metodu(E_1-toplama metodu) olarak adlandırılır. Başta verilen örnekte bu metodun $(S_n) = (1,0,1,0,\ldots.)$ dizisini 1/2 ye limitlediğini görmüştük.

Aslında bu E_1-toplama metodu, adına Nörlund ortalaması diyeceğimiz başka bir toplama metodunun özel bir halidir. Şöyle ki; $((N_p)_{nk})$ ile göstereceğimiz Nörlund matrisi şu şekilde tanımlanır: $P_n = p_0 + \ldots + p_n \neq 0$ olmak üzere

$$(N_p)_{nk} = \begin{cases} \dfrac{p_{n-k}}{P_n} & , k\leq n \\ 0 & , k>n \end{cases} \qquad n,k = 0,1,\ldots.$$

dır. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $p_k = \binom{n}{k}$ seçilirse $P_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ olacağından,

$$(N_p)_{nk} = \begin{cases} \dfrac{p_{n-k}}{P_n} & , k\leq n \\ 0 & , k>n \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\binom{n}{k}}{2^n} & , k\leq n \\ 0 & , k>n \end{cases}$$

$$= (E_1)_{nk}$$

elde edilir. Bu ise E_1-metodunun, Np-Nörlund metodunun özel bir hali olduğunu gösterir. Np-Nörlund metodu üçgensel bir matristir. ($A = (a_{nk})$ matrisinde, her k>n için $a_{nk}=0$ ise A matrisine "üçgensel matris" denir). Bu çalışmanın temel konusu olan Nörlund Ortalamaları, Bölüm II.2 de incelenecektir.

Benzer şekilde, $A = (a_{nk})$ sonsuz matrisi değişik seçilerek başka toplama metodları elde edilir.

BÖLÜM I

TOEPLİTZ VE SCHUR TEOREMLERİ

Bu bölümde matris dönüşümleriyle ilgili teoremleri vereceğiz. İlgilendiğimiz matrisler sonlu olmayıp, sonsuz matrislerdir. Temelde iki önemli yakınsaklık problemi söz konusudur. Birincisi, yakınsak dizileri yakınsak dizilere dönüştüren; ikincisi ise herhangi bir yakınsak dizinin limitini değişmez bırakan matrisler ailesini belirlemektir. Ortaya çıkan bu yakınsaklık problemleri, konuyu cebirden ziyade analizin bir parçası haline getirmiştir. Her iki problem de, temel öneme sahip olan Teorem I.1.3° ve Teorem I.1.4° de ispatlanacaktır.

Teorem I.1.3°, ilk olarak 1917 de Kojima tarafından alt üçgensel matrisler için ispatlandı ve 1920 de Schur tarafından genel sonsuz matrislere genişletildi. Kojima-Schur Teoremi olarak bilinen bu teoremin koşullarını sağlayan matrise "yakınsaklık koruyan" matris denir. Teorem I.1.4° ün yeter koşulları alt üçgensel matrisler için ilk olarak Silverman tarafından, satır-sonlu matrisler için gerekliliği ve yeterliliği Toeplitz tarafından ispatlandı. Silverman-Toeplitz Teoremi olarak bilinen bu teoremin koşullarını sağlayan matrise de "regüler matris" (veya "Toeplitz matrisi") denir. Son olarak teorem tam genelliğiyle, genel sonsuz matrisler için Schur tarafından yayınlandı.

Teorem I.1.4°, özel öneme sahipse de sadece Teorem I.1.3° ün bir özel durumudur.

Yukarıda sözü edilen teoremlere geçmeden önce, bundan sonra sık sık kullanacağımız bazı sembolleri tanıtalım:

$f(x)$ ve $g(x)$ kompleks veya reel değerli fonksiyonlar ve a da sabit bir nokta olsun (a reel veya kompleks).

(i) $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ ise $f(x)$ ile $g(x)$ "asimtotik"tir denir ve $f(x) \sim g(x)\ (x\to a)$ şeklinde gösterilir.

(ii) $f(x) = O(g(x))\ (x\to a) :\Longleftrightarrow \limsup\limits_{(x\to a)} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \infty$

(iii) $f(x) = o(g(x))\ (x\to a) :\Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

dır. Özellikle

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ ise $f(x) = o(1)\ (x \to a)$

ve

$\limsup\limits_{(x\to a)} |f(x)| < \infty$ ise $f(x) = O(1)\ (x \to a)$

yazılır.

Yukarıdaki tanımlar $x \to \pm\infty$ için de geçerlidir.

Şimdi Toeplitz teoreminde kullanacağımız yardımcı Teorem I.1'i verelim.

Yardımcı Teorem I.1 [5] : $(a_{nv})(n,v = 0,1,\ldots)$ bir sonsuz matris ve

$$\sum_{v=0}^{\infty} |a_{nv}| < \infty \qquad (n = 0,1,2,\ldots) \tag{I.1}$$

$$\sum_{v=0}^{k} |a_{nv}| = o\left(\sum_{v=k+1}^{\infty} |a_{nv}|\right)(n\to\infty\ ,\ \text{sabit her } k \text{ için}) \tag{I.2}$$

olsun. Bu takdirde $0<v_1<v_2<\ldots.$, $0<n_1<n_2<\ldots..$ doğal sayı dizileri vardır öyle ki;

$$\sum_{v=v_i}^{v_{i+1}-1} |a_{n_i,v}| \geqslant \frac{i-1}{i} \sum_{v=0}^{\infty} |a_{n_i,v}| \qquad (i = 1,2,\ldots.) \tag{I.3}$$

dır.

İspat: Tümevarım metodunu kullanacağız. $i = 1$ için (I.3) doğrudur. Bu durumda v_1, v_2 ve n_1 doğal sayıları gelişigüzel seçilir. $i \in \mathbb{N}$ için doğru olsun. Yani, (I.1) ve (I.2) koşulları altında (I.3) eşitsizliği sağlanacak şekilde v_i, v_{i+1} ve n_i sayıları seçilsin. $i+1$ için doğru olduğunu gösterelim. v_i, v_{i+1} ve n_i sayıları verildiğine göre v_{i+2} ve n_{i+1} sayıları öyle seçilir ki

$$\sum_{v=v_{i+1}}^{\infty} |a_{n_{i+1},v}| \geq 2(i+1) \sum_{v=o}^{v_{i+1}-1} |a_{n_{i+1},v}| \tag{I.4}$$

$$\sum_{v=v_{i+1}}^{\infty} |a_{n_{i+1},v}| \geq 2(i+1) \sum_{v=v_{i+2}}^{\infty} |a_{n_{i+1},v}| \tag{I.5}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Gerçekten; (I.2)de k yerine v_i alınırsa n_{i+1} sayısı

$$\frac{\sum_{v=o}^{v_{i+1}-1} |a_{n_{i+1},v}|}{\sum_{v=v_{i+1}}^{\infty} |a_{n_{i+1},v}|} \leq \frac{1}{2(i+1)} \tag{I.6}$$

olacak şekilde seçilir.

$\sum_{v=o}^{\infty} |a_{nv}| < \infty$ olduğundan yakınsak serilerde kalan terim özelliğine göre v_{i+2} sayısı,

$$\sum_{v=o}^{v_{i+1}-1} |a_{n_{i+1},v}| \geq \sum_{v=v_{i+2}}^{\infty} |a_{n_{i+1},v}| \tag{I.7}$$

olacak şekilde seçilir.

(I.6) dan (I.4), (I.6) ve (I.7) den de (I.5) elde edilir.

(I.4) ve (I.5) kullanılırsa,

$$\sum_{v=v_{i+1}}^{v_{i+2}-1} |a_{n_{i+1},v}| = \frac{i}{i+1}\sum_{v=v_{i+1}}^{v_{i+2}-1} |a_{n_{i+1},v}| + \frac{1}{i+1}\sum_{v=v_{i+1}}^{v_{i+2}-1} |a_{n_{i+1},v}|$$

$$= \frac{i}{i+1}\sum_{v=v_{i+1}}^{v_{i+2}-1} |a_{n_{i+1},v}| + \frac{1}{i+1}\sum_{v=v_{i+1}}^{\infty} |a_{n_{i+1},v}| - \frac{1}{i+1}\sum_{v=v_{i+2}}^{\infty} |a_{n_{i+1},v}|$$

$$= \frac{i}{i+1}\sum_{v=v_{i+1}}^{v_{i+2}-1} |a_{n_{i+1},v}| + \frac{1}{2(i+1)}\sum_{v=v_{i+1}}^{\infty} |a_{n_{i+1},v}| + \frac{1}{2(i+1)}\sum_{v=v_{i+1}}^{\infty} |a_{n_{i+1},v}| - \frac{1}{i+1}\sum_{v=v_{i+2}}^{\infty} |a_{n_{i+1},v}|$$

$$\geq \frac{i}{i+1}\sum_{v=v_{i+1}}^{v_{i+2}-1} |a_{n_{i+1},v}| + \sum_{v=o}^{v_{i+1}-1} |a_{n_{i+1},v}| + \sum_{v=v_{i+2}}^{\infty} |a_{n_{i+1},v}| - \frac{1}{i+1}\sum_{v=v_{i+2}}^{\infty} |a_{n_{i+1},v}|$$

$$= \frac{i}{i+1}\sum_{v=v_{i+1}}^{v_{i+2}-1} |a_{n_{i+1},v}| + \sum_{v=o}^{v_{i+1}-1} |a_{n_{i+1},v}| + \left(1-\frac{1}{i+1}\right)\sum_{v=v_{i+2}}^{\infty} |a_{n_{i+1},v}|$$

$$= \frac{i}{i+1}\sum_{v=v_{i+1}}^{v_{i+2}-1} |a_{n_{i+1},v}| + \sum_{v=o}^{v_{i+1}-1} |a_{n_{i+1},v}| + \frac{i}{i+1}\sum_{v=v_{i+2}}^{\infty} |a_{n_{i+1},v}|$$

$$= \frac{i}{i+1}\sum_{v=v_{i+1}}^{\infty} |a_{n_{i+1},v}| + \sum_{v=o}^{v_{i+1}-1} |a_{n_{i+1},v}|$$

$$\geq \frac{i}{i+1}\sum_{v=v_{i+1}}^{\infty} |a_{n_{i+1},v}| + \frac{i}{i+1}\sum_{v=o}^{v_{i+1}-1} |a_{n_{i+1},v}|$$

$$= \frac{i}{i+1}\sum_{v=o}^{\infty} |a_{n_{i+1},v}|$$

bulunur. Bu ise isteneni verir.

Teorem I.1.[5] (O.Toeplitz Teoremi): $A := (a_{nv})(n,v = 0,1,\ldots)$ sonsuz matrisi aşağıdaki koşulları sağlasın.

(RN) $\quad \sum_{v=0}^{\infty} |a_{nv}| = O(1) \quad$ ($n\to\infty$; Satır-Norm koşulu),

(RS_α) $\quad \sum_{v=0}^{\infty} a_{nv} \to \alpha \quad$ ($n\to\infty$; Satır-Toplam koşulu),

(C_{α_v}) $\quad a_{nv} \to \alpha_v \quad$ ($n\to\infty$, v sabit; Sütün koşulu).

Ayrıca $\sigma_n = \sum_{v=0}^{\infty} a_{nv}s_v$ her bir $n = 0,1,\ldots$ için var olsun. Bu takdirde;

(1^o) $s_n = O(1)(n \to \infty)$ olduğunda $\sigma_n = O(1)(n \to \infty) \Longleftrightarrow$ (RN) koşulu var.

(2^o) $s_n = o(1)(n \to \infty)$ olduğunda $\sigma_n = O(1)(n \to \infty) \Longleftrightarrow$ (RN) koşulu var.

(3^o) (s_n) yakınsak olduğunda (σ_n) yakınsak $\Longleftrightarrow$ (RN), (RS_α) ve (C_{α_v}) koşulları var.

(4^o) $\lim_{n\to\infty} s_n = \ell$ olduğunda $\lim_{n\to\infty}\sigma_n = \ell \Longleftrightarrow$ (RN), (RS_1) ve (C_o) koşulları var.

(5^o) $s_n = o(1)(n \to \infty)$ olduğunda (σ_n) yakınsak $\Longleftrightarrow$ (RN) ve (C_{α_v}) koşulları var.

İspat: "Yeterli koşullar" :

(1^o) (RN) koşulu sağlansın. $s_n = O(1)(n \to \infty)$ olduğunda $\sigma_n = O(1)(n\to \infty)$ olduğunu gösterelim.

$$|\sigma_n| = \Big|\sum_{v=0}^{\infty} a_{nv}s_v\Big|$$

$$\leq \sum_{v=0}^{\infty} |a_{nv}|\,|s_v|$$

$$\leq M.\sum_{v=0}^{\infty} |a_{nv}| \;;\; (M := \sup|s_v|)$$

dır. Buradan (RN) koşulu gözönüne alınırsa, $\sigma_n = O(1)(n \to \infty)$ elde edilir.

(2^o) (RN) koşulu sağlansın. $Sn = o(1)(n \to \infty)$ olduğunda $\sigma_n = 0(1)(n \to \infty)$ olduğunu gösterelim.

$s_n = o(1)$ ise, yakınsak her dizi sınırlı olacağından (S_n) sınırlıdır. O halde ispat (1^o) deki gibi yapılır.

(3^o) (RN), (RS_α) ve (C_{α_v}) koşulları sağlansın. (S_n) yakınsak olduğunda (σ_n) dizisinin yakınsak olduğunu gösterelim.

(S_n) yakınsak ve $\lim\limits_{n\to\infty} S_n =: \ell$ olsun. (RN) den;

$$\sigma_n = \sum_{v=o}^{\infty} a_{nv}(S_v - \ell) + \ell . \sum_{v=o}^{\infty} a_{nv}$$

olarak yazılır.

$$Un: = \sum_{v=o}^{\infty} a_{nv}(S_v - \ell), \quad Vn: = \ell . \sum_{v=o}^{\infty} a_{nv}$$

olsun. Bu takdirde $\sigma_n = Un + Vn$ olur. (RS_α) dan ;

$$\lim_{n\to\infty} V_n = \ell.\alpha$$

dır. (RN)den; her $n = 0,1,\dots$ için $\sup\limits_n \sum\limits_{v=o}^{\infty} |a_{nv}| =: M<\infty$ olduğu gözönüne alınırsa keyfi bir $m \in \mathbb{N}$ için,

$$\sum_{v=o}^{m} |\alpha_v| = \sum_{v=o}^{m} \lim_{n\to\infty} |a_{nv}|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{v=o}^{m} |a_{nv}|$$

$$\leq \sup_n \sum_{v=o}^{m} |a_{nv}|$$

$$\leq \sup_n \sum_{v=o}^{\infty} |a_{nv}| =: M < \infty$$

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{v=o}^{m} |\alpha_v| \leqslant \lim_{m\to\infty} (\sup_n \sum_{v=o}^{\infty} |a_{nv}|) \leqslant M \quad , \quad \sum_{v=o}^{\infty} |\alpha_v| < \infty \text{ dır.}$$

Şimdi $U_n \to \sum_{v=o}^{\infty} \alpha_v (S_v - \ell)(n\to\infty)$ olduğunu gösterelim.

$$U_n - \sum_{v=o}^{\infty} \alpha_v (S_v - \ell) = \sum_{v=o}^{\infty} a_{nv}(S_v - \ell) - \sum_{v=o}^{\infty} \alpha_v (S_v - \ell)$$

$$= \sum_{v=o}^{\infty} (a_{nv} - \alpha_v)(S_v - \ell)$$

dır. Öte yandan $\sup_n \sum_{v=o}^{\infty} |a_{nv}| = :M < \infty$ ve $\sum_{v=o}^{\infty} |\alpha_v| = :a < \infty$ olduğu gözönüne alınırsa,

$$\sum_{v=o}^{\infty} |a_{nv} - \alpha_v| \leqslant \sum_{v=o}^{\infty} |a_{nv}| + \sum_{v=o}^{\infty} |\alpha_v|$$

$$\sup_n \sum_{v=o}^{\infty} |a_{nv} - \alpha_v)| \leqslant \sup_n (\sum_{v=o}^{\infty} |a_{nv}| + \sum_{v=o}^{\infty} |\alpha_v|)$$

$$\leqslant \sup_n \sum_{v=o}^{\infty} |a_{nv}| + \sup_n \sum_{v=o}^{\infty} |\alpha_v|$$

$$\leqslant M + a < \infty \tag{I.8}$$

bulunur. O halde $\sup_n \sum_{v=o}^{\infty} |a_{nv} - \alpha_v)| < \infty$ ve $S_n \to \ell(n \to \infty)$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $\sum_{v=o}^{\infty} (a_{nv} - \alpha_v)(S_v - \ell)$ serileri yakınsaktır. Bu nedenle $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\tau_n : = \sum_{v=o}^{\infty} (a_{nv} - \alpha_v)(S_v - \ell)$$

vardır. Şimdi $\tau_n = o(1)(n \to \infty)$ olduğunu göstereceğiz. $s = (S_n) = (\ell, \ell, \ldots)$ ise $S_n \to \ell(n \to \infty)$ olduğundan, açık olarak $(\tau_n) = (0,0,\ldots)$ dır. Dolayısıyla $s \neq (\ell, \ldots)$ kabul edebiliriz. $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. (C_{α_v}) koşuluna göre

$a_{nv}-\alpha_v \to 0(n \to \infty, v$ sabit) olduğundan $\exists N(\varepsilon) = N \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n>N$ ve $0 \leq v \leq N$ için

$$|a_{nv} - \alpha_v| < \frac{\varepsilon}{2.L.(N+1)} \quad ; \qquad L: = \sup_v |S_v - \ell|$$

dır. Ayrıca $S_v - \ell \to 0(n \to \infty)$ olduğundan, $\exists N'(\varepsilon) = N' \in \mathbb{N}$ öyle ki

$$\underset{v>N'}{\text{Maks}} |S_v - \ell| < \frac{\varepsilon}{2(M+a)}$$

dır. m: $=$ Maks$\{N,N'\}$ alalım. Bu takdirde her $n>m$ ve $0 \leqslant v \leqslant m$ için,

$$|a_{nv}-\alpha_v| < \frac{\varepsilon}{2.L.(m+1)} \ , \ \underset{v>m}{\text{Maks}} |S_v - \ell| < \frac{\varepsilon}{2(M+a)} \tag{I.9}$$

elde edilir. Böylece her $n>m$ için,

$$|\tau_n| = \left| \sum_{v=0}^{\infty} (a_{nv}-\alpha_v)(S_v-\ell) \right|$$

$$\leqslant \sum_{v=0}^{\infty} |a_{nv}-\alpha_v| \, |S_v-\ell|$$

$$= \sum_{v=0}^{m} |a_{nv}-\alpha_v| \, |S_v-\ell| + \sum_{v=m+1}^{\infty} |a_{nv}-\alpha_v| \, |S_v-\ell|$$

yazılır, (I.8) ve (I.9) kullanılırsa,

$$|\tau_n| < \varepsilon$$

olduğu görülür. Bu ise $U_n \to \sum_{v=0}^{\infty} \alpha_v(S_v-\ell)(n \to \infty)$ olduğunu gösterir. $\sum_{v=0}^{\infty} \alpha_v(S_v-\ell)$ mutlak yakınsak olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} U_n + \lim_{n\to\infty} V_n$$

$$= \sum_{v=0}^{\infty} \alpha_v(S_v-\ell) + \ell.\alpha$$

olup (σ_n) yakınsaktır.

(4^o) (RN), (RS_1) ve (C_o) koşulları sağlansın. $\lim_{n\to\infty} S_n = \ell$ olduğunda $\lim_{n\to\infty}\sigma_n = \ell$ olduğunu gösterelim. (3^o) de elde ettiğimiz

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n = \sum_{v=o}^{\infty} \alpha_v(S_v-\ell) + \ell.\alpha$$

eşitliğinde, $\alpha_v = 0$ ve $\alpha = 1$ alınırsa $\lim_{n\to\infty}\sigma_n = \ell$ olur.

(5^o) (RN) ve (C_{α_v}) koşulları sağlansın. $S_n = o(1)$ $(n \to \infty)$ olsun. (σ_n) nin yakınsak olduğunu gösterelim. (RN) den ;

$$\sigma_n = \sum_{v=o}^{\infty} (a_{nv}-\alpha_v)S_v + \sum_{v=o}^{\infty} \alpha_v S_v$$

olarak yazılır. Diğer taraftan (RN) ve (C_{α_v}) koşulları kullanılarak, $\sum_{v=o}^{\infty}|\alpha_v|<\infty$ olduğu (3^o) deki gibi görülür. $S_n = o(1)(n \to \infty)$ olduğundan $\sup_n|S_n| =: L < \infty$ dır.

Şimdi $T_n := \sum_{v=o}^{\infty} (a_{nv}-\alpha_v)S_v$ olmak üzere $T_n \to 0(n\to\infty)$ olduğunu göstereceğiz. $s = (S_n) = (0,0,\ldots)$ ise açık olarak $(T_n) = (0,0,0,\ldots)$ dır. Bu nedenle $s \neq (0,0,\ldots)$ ve $S_n = o(1)(n \to \infty)$ kabul edebiliriz. $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. (C_{α_v}) koşuluna göre $a_{nv} - \alpha_v \to 0(n \to \infty, v$ sabit) olduğundan $\exists N(\varepsilon) = N\in\mathbb{N}$ öyle ki $\forall n>N$ ve $0\leq v\leq N$ için

$$|a_{nv}-\alpha_v| < \frac{\varepsilon}{2.L.(N+1)} \quad ; \quad L := \sup_v|S_v|$$

dır. Ayrıca $S_n = o(1)(n \to \infty)$ olduğundan $\exists N'(\varepsilon) = N'\in\mathbb{N}$ öyle ki

$$\operatorname{Maks}_{v>N'}|S_v| < \frac{\varepsilon}{2(M+a)}$$

dır. $m := \operatorname{Maks}\{N,N'\}$ alalım. Bu takdirde her $n>m$ ve $0\leq v\leq m$ için

$$|a_{nv}-\alpha_v| < \frac{\varepsilon}{2.L.(m+1)} \quad , \quad \underset{v>m}{\text{Maks}}|S_v| < \frac{\varepsilon}{2(M+a)} \tag{I.10}$$

elde edilir. Böylece her n>m için,

$$|T_n| \leqslant \sum_{v=0}^{\infty} |a_{nv}-\alpha_v||S_v|$$

$$= \sum_{v=0}^{m} |a_{nv}-\alpha_v||S_v| + \sum_{v=m+1}^{\infty} |a_{nv}-\alpha_v||S_v|$$

yazılır. (I.8) ve (I.10) kullanılırsa,

$$|T_n| < \varepsilon$$

olduğu görülür. O halde $\sum_{v=0}^{\infty} \alpha_v S_v$ mutlak yakınsak olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n = \lim_{n\to\infty}(T_n + \sum_{v=0}^{\infty} \alpha_v S_v)$$

olup (σ_n) yakınsaktır.

"Gerekli Koşullar" :

(1^o) $S_n = O(1)(n \to \infty)$ olduğunda $\sigma_n = O(1)(n \to \infty)$ olsun. (RN) koşulunun sağlandığını göstereceğiz. Önce $S_n = O(1)(n \to \infty)$ olduğunda $\sigma_n = O(1)(n \to \infty)$ ise her $n = 0,1,...$ için $\sum_{v=0}^{\infty} |a_{nv}| < \infty$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki en az bir $n_o \in \mathbb{N}$ için $\sum_{v=0}^{\infty} |a_{n_o,v}| = \infty$ olsun. Bu takdirde

$$A_n: = |a_{n_o,0}| + |a_{n_o,1}|+...+|a_{n_o,n}| + 1$$

ile tanımlayalım. Abel-Dini Teoreminden (4 , sayfa 290)

$$\sum_{v=0}^{\infty} \frac{|a_{n_o,v}|}{A_v} = \infty \tag{I.11}$$

dır. $S_v := \frac{\operatorname{sgn} a_{n_o,v}}{A_v}$ olarak tanımlansın. Burada $Z \in \mathbb{C}$ için

$$\operatorname{sgn} Z := \begin{cases} \frac{|Z|}{Z} & , \quad Z \neq 0 \\ 0 & , \quad Z = 0 \end{cases}$$

dır. Dolayısıyla $|S_v| \leq \frac{1}{A_v} \leq 1$ olur. Özellikle bu (S_v) için de;

$$\sigma_{n_o} = \sum_{v=o}^{\infty} a_{n_o,v} \frac{\operatorname{sgn} a_{n_o,v}}{A_v} = \sum_{v=o}^{\infty} \frac{|a_{n_o,v}|}{A_v}$$

nın sınırlı olması gerekir. Bu ise (I.11) ile çelişir. O halde

$$n = 0,1,\dots \text{ için } \quad \sum_{v=o}^{\infty} |a_{nv}| < \infty \qquad (I.12)$$

dır. Bundan başka, hipoteze göre (S_n) sınırlı olduğunda (σ_n) sınırlı olacağından, özellikle k.terimi 1, diğer terimleri 0 olan $(S_n) = (0,0,\dots,1,0\dots)$ dizisi içinde $\sigma_n = 0(1)(n \to \infty)$ olmak zorundadır. Dolayısıyla

$$a_{nk} = 0(1) \quad (n \to \infty, \ k \text{ sabit}) \qquad (I.13)$$

dır. Kabul edelim ki (RN) koşulu sağlanmasın. Yani; $\sup\limits_n \sum\limits_{v=o}^{\infty} |a_{nv}| = \infty$ olsun. Bu takdirde $\exists n \in \mathbb{N}$ öyle ki $\sum\limits_{v=o}^{\infty} |a_{nv}| \geq n^2$ dir. (I.12) ve (I.13) den yardımcı teorem I.1'in koşulları sağlanır. Dolayısıyla (I.3) eşitsizliği sağlanacak şekilde $0<v_1<v_2<\dots$, $0<n_1<n_2<\dots$ doğal sayı dizileri vardır. En az bir $n \in \mathbb{N}$ için $\sum\limits_{v=o}^{\infty} |a_{nv}| \geq n^2$ olduğundan n_i sayısı, $\sum\limits_{v=o}^{\infty} |a_{n_i,v}| \geq i^2$ olacak şekilde seçilir.

$$S_v := \begin{cases} \frac{2}{i} \operatorname{sgn} a_{n_i,v} & , \quad v_i \leq v < v_{i+1} \\ 0 & , \quad \text{diğer haller} \end{cases}$$

ile tanımlayalım. $|S_v| \leqslant \frac{2}{i}$ dir. $i = 2,3,\ldots$ alınırsa $|S_v| \leqslant 1$ olur. Dolayısıyla bu (S_v) dizisi için,

$$\left|\sum_{v=o}^{\infty} a_{n_i,v} S_v\right| = \left|\sum_{v=v_i}^{v_{i+1}-1} a_{n_i,v} \cdot \frac{2}{i} \cdot \operatorname{sgn} a_{n_i,v}\right|$$

$$= \frac{2}{i} \sum_{v=v_i}^{v_{i+1}-1} |a_{n_i,v}|$$

$$\geqslant \frac{2}{i} \sum_{v=v_i}^{v_{i+1}-1} |a_{n_i,v}| - \sum_{v=o}^{v_i-1} |a_{n_i,v}| - \sum_{v=v_{i+1}}^{\infty} |a_{n_i,v}|$$

$$= \frac{2}{i} \sum_{v=v_i}^{v_{i+1}-1} |a_{n_i,v}| + \sum_{v=v_i}^{v_{i+1}-1} |a_{n_i,v}| - \sum_{v=v_i}^{v_{i+1}-1} |a_{n_i,v}| - \sum_{v=o}^{v_i-1} |a_{n_i,v}|$$

$$- \sum_{v=v_{i+1}}^{\infty} |a_{n_i,v}|$$

$$= \left(\frac{2}{i} + 1\right) \sum_{v=v_i}^{v_{i+1}-1} |a_{n_i,v}| - \sum_{v=o}^{\infty} |a_{n_i,v}|$$

$$\geqslant \left(\frac{2+i}{i}\right) \left(\frac{i-1}{i} \sum_{v=o}^{\infty} |a_{n_i,v}|\right) - \sum_{v=o}^{\infty} |a_{n_i,v}|$$

$$= \left[\left(\frac{2+i}{i}\right)\left(\frac{i-1}{i}\right) - 1\right] \sum_{v=o}^{\infty} |a_{n_i,v}|$$

$$= \frac{i-2}{i^2} \sum_{v=o}^{\infty} |a_{n_i,v}|$$

$$|\sigma_{n_i}| \geqslant \frac{i-2}{i^2} . i^2 = i-2$$

elde edilir. $i \to \infty$ için (σ_{n_i}) sınırlı değildir. (σ_{n_i}) altdizisi sınırlı olmadığından (σ_n) sınırlı değildir. Bu ise hipotezle çelişir. O halde (RN) koşulu sağlanır.

(2^o) $S_n = o(1)(n \to \infty)$ olduğunda $\sigma_n = O(1)(n \to \infty)$ olşun. (RN)nin sağlandığını göstereceğiz. Yakınsak her dizi sınırlı olduğundan, (1^o)in gerekliliğinde olduğu gibi yapılarak (RN) koşulunun sağlandığı görülür.

(3^o) (S_n) yakınsak olduğunda (σ_n) yakınsak olsun. (RN),(RS_α) ve (C_{α_v})koşullarının sağlandığını göstereceğiz. (RN)nin sağlandığı, (1^o)in gerekliliği gibi yapılarak görülür. Yakınsak her (S_n) dizisi için (σ_n) yakınsak olacağından, özellikle $(S_n) := (1,1,\ldots)$ dizisi için de (σ_n) yakınsaktır. O halde $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{v=o}^{\infty} a_{nv} =: \alpha$ dır. Böylece (RS_α) sağlanır. Diğer taraftan k.terimi 1, diğer terimleri 0 olan $(S_n) := (0,0,\ldots,0,1,0,\ldots)$dizisi için de $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n$ var olacağından, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{nk} =: \alpha_k$ (k sabit) dır. Dolayısıyla (C_{α_v}) sağlanır.

(4^o) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \ell$ olduğunda $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n = \ell$ olsun. (RN),(RS_1) ve (C_o) koşullarının sağlandığını göstereceğiz. (RN) koşulu, (1^o) in gerekliliği gibi yapılarak görülür. Dolayısıyla (RN)den;

$$\sigma_n = \sum_{v=o}^{\infty} a_{nv}(S_v - \ell) + \ell . \sum_{v=o}^{\infty} a_{nv}$$

olarak yazılır. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \ell$ olduğundan $S_n - \ell = o(1)(n \to \infty)$ olduğu gözönüne alınırsa hipotezden dolayı,

$$\sum_{v=o}^{\infty} a_{nv}(S_v - \ell) \to 0 \ (n \to \infty)$$

olur. O halde,

$$\ell = \lim \sigma_n = \ell . \sum_{v=o}^{\infty} a_{nv} , \quad \sum_{v=o}^{\infty} a_{nv} = 1$$

elde edilir. Böylece (RS_1) sağlanır.

Hipoteze göre, $(S_n): = (0,\dots,0,1,0,\dots)$ olarak tanımlanan bu (S_n) dizisi için,

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{v=0}^{\infty} a_{nv} S_v = \lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0$$ (k sabit) olacağından (C_o) koşulu sağlanır.

(5^o) $S_n = o(1)(n \to \infty)$ olduğunda (σ_n) yakınsak olsun. (RN) ve (C_{α_v}) koşullarının sağlandığını göstereceğiz. Yakınsak her dizi sınırlı olduğundan (RN) nin sağlandığı, (1^o) in gerekliliğinde olduğu gibi yapılarak görülür. $S_n \to 0$ $(n \to \infty)$ olan her (S_n) dizisi için $\lim_{n\to\infty} \sigma_n$ var olacağından, özellikle k.terimi 1, diğer terimleri 0 olan $(S_n) = (0,\dots,0,1,0,\dots)$dizisi için de $\lim_{n\to\infty} \sigma_n$ vardır. Yani sabit her k için

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} a_{nk} = :\alpha_k$$

dır. Dolayısıyla (C_{α_v}) koşulu sağlanır.

Toeplitz Teoreminde (a_{nk}) sonsuz matrisinde n yerine pozitif ve reel değerli w sürekli değişkeni alınırsa genellikle a_{wk} yerine $a_k(w)$ yazılır. Bu takdirde Kojima-Schur Teoremi ve Silverman-Toeplitz Teoremi aşağıdaki şekli alır.

Teorem I.2 (Kojima-Schur Teoremi)([1], sayfa 60, (4.1.I)):
(S_k) yakınsak bir kompleks sayı dizisi olsun.

$$\sigma(w) = \sum_{k=o}^{\infty} a_k(w) S_k \qquad (w>w_o)$$

nın $w \to \infty$ iken sonlu bir limite yaklaşması için gerekli ve yeterli koşul,

$$(RN)' \quad \sum_{k=o}^{\infty} |a_k(w)| \le M \quad (w>w_o\ ,\ M;\ w \text{ den bağımsız})$$

$$(RS_\alpha)' \quad \sum_{k=o}^{\infty} a_k(w) = A(w) \to \alpha \quad (w \to \infty)$$

$$(C_{\alpha_k})' \quad a_k(w) \to \alpha_k \qquad (w \to \infty, \text{her sabit } k \text{ için})$$

dır.

Teorem I.3 (Silverman-Toeplitz Teoremi)([1],sayfa 64, (4.1.II)) :

$\lim\limits_{k\to\infty} S_k = s$ olan (S_k) dizisi verilsin. Bu durumda

$$\lim_{w\to\infty}\sigma(w) = \lim_{w\to\infty} \sum_{k=o}^{\infty} a_k(w) S_k = s$$

olması için gerekli ve yeterli koşul

$$(RN)' \quad \sum_{k=o}^{\infty} |a_k(w)| \leqslant M \qquad (w>w_o,\ M;\ w \text{ den bağımsız})$$

$$(RS_1)' \quad \sum_{k=o}^{\infty} a_k(w) = A(w) \to 1 \quad (w \to \infty)$$

$$(C_o)' \quad a_k(w) \to 0 \ (w \to \infty, \text{ her sabit } k \text{ için})$$

olmasıdır.

Şimdi Schur tarafından 1921 de ispatlanan bir teorem vereceğiz. Teorem I.1 de yakınsak dizileri, yakınsak dizilere dönüştüren matrisleri karakterize ettik. "Schur Teoremi" olarak bilinen bu teoremde ise, sınırlı dizileri yakınsak dizilere dönüştüren matrisleri karakterize edeceğiz.

Teorem I.4 [5] (Schur Teoremi):

$S_n = O(1)\,(n \to \infty)$ olduğunda $(\sigma_n) = (\sum_{v=o}^{\infty} a_{nv} S_v)$ dizisinin yakınsak olması için gerekli ve yeterli koşul (RN), (C_{α_v}) ve $\sum_{v=o}^{\infty} |a_{nv} - \alpha_v| \to 0 \ (n \to \infty)$ olmasıdır.

İspat: "Yeterli Koşul" : (RN), (C_{α_v}) ve $\sum_{v=0}^{\infty} |a_{nv} - \alpha_v| \to 0$ $(n \to \infty)$ koşulları sağlansın. $S_n = O(1)$ $(n \to \infty)$ olduğunda (σ_n) nin yakınsak olduğunu göstereceğiz. (RN) den, her $n \in \mathbb{N}$ için $\sup_n \sum_{v=0}^{\infty} |a_{nv}| =: M < \infty$ dır. Keyfi bir $m \in \mathbb{N}$ için,

$$\sum_{v=0}^{m} |\alpha_v| = \sum_{v=0}^{m} \lim_{n\to\infty} |a_{nv}| = \lim_{n\to\infty} \sum_{v=0}^{m} |a_{nv}| \leqslant \sup_n \sum_{v=0}^{m} |a_{nv}| \leqslant M$$

olduğundan $m \to \infty$ için $\sum_{v=0}^{\infty} |\alpha_v| < \infty$ dır.

$\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. $\sum_{v=0}^{\infty} |a_{nv} - \alpha_v| \to 0$ $(n \to \infty)$ olduğundan,

$\exists N(\varepsilon) = N \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n > N$ için $\sum_{v=0}^{\infty} |a_{nv} - \alpha_v| < \varepsilon$ dır. Ayrıca $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\sum_{v=0}^{\infty} |a_{nv} - \alpha_v| \leqslant \sum_{v=0}^{\infty} |a_{nv}| + \sum_{v=0}^{\infty} |\alpha_v| < \infty$ olduğundan,

$0 \leqslant n \leqslant N$ için $\exists m = m(n,\varepsilon)$ öyle ki $\sum_{v=m}^{\infty} |a_{nv} - \alpha_v| < \varepsilon$

dır. O halde $M := \underset{0 \leqslant n \leqslant N}{\text{Maks}} \{m(n,\varepsilon)\}$ olarak tanımlanırsa,

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $\sum_{v=M}^{\infty} |a_{nv} - \alpha_v| < \varepsilon$ olur. $M = M(\varepsilon)$ olduğundan $\sum_{v=0}^{\infty} |a_{nv} - \alpha_v|$ serisi n ye göre düzgün yakınsaktır. Diğer taraftan,

$$\sum_{v=0}^{\infty} |a_{nv}| \leqslant \sum_{v=0}^{\infty} |a_{nv} - \alpha_v| + \sum_{v=0}^{\infty} |\alpha_v|$$

olduğu gözönüne alınırsa $\sum_{v=0}^{\infty} |a_{nv}|$, n ye göre düzgün yakınsak olur. Bundan başka $S_n = O(1)$ $(n \to \infty)$ ve $\sum_{v=0}^{\infty} |\alpha_v| < \infty$ olduğundan $\sum_{v=0}^{\infty} \alpha_v S_v$ serisi mutlak yakınsaktır. O halde düzgün yakınsaklığın sonucu olarak,

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{v=0}^{\infty} a_{nv} S_v = \sum_{v=0}^{\infty} \lim_{n\to\infty} a_{nv} S_v = \sum_{v=0}^{\infty} \alpha_v S_v$$

olup (σ_n) yakınsaktır.

"Gerek Koşul" : $S_n = O(1)$ $(n \to \infty)$ olduğunda (σ_n) yakınsak olsun. Bu durumda sınırlı her (S_n) dizisi için $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n$ vardır. Özel olarak k.terimi 1, diğer terimleri 0 olan $(S_n) := (0,\ldots 0,1,0,\ldots)$ dizisi için de $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n$ var olacağından, bu dizi için

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{v=0}^{\infty} a_{nv}S_v = \lim_{n\to\infty} a_{nk} =: \alpha_k \qquad \text{(k sabit)}$$

dır. Böylece (C_{α_v}) koşulu sağlanır. Yakınsak her dizi sınırlı olduğundan, (RN) koşulu Teorem I.1.1^o den sağlanır. Son olarak $\sum\limits_{v=0}^{\infty}|a_{nv}-\alpha_v| \to 0(n \to \infty,$ v sabit) olduğunu gösterelim: $b_{nv} := a_{nv} - \alpha_v$ (v sabit) olarak tanımlayalım. (RN) ve (C_{α_v}) koşulları sağlandığından, keyfi bir $m \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{v=0}^{m}|\alpha_v| = \sum_{v=0}^{m}\lim_{n\to\infty}|a_{nv}| = \lim_{n\to\infty}\sum_{v=0}^{m}|a_{nv}| \leqslant \sup_n \sum_{v=0}^{m}|a_{nv}| \leqslant M$$

olduğundan $m \to \infty$ için $\sum\limits_{v=0}^{\infty}|\alpha_v| < \infty$ dır. Diğer taraftan,

$$\sum_{v=0}^{\infty} b_{nv}S_v = \sum_{v=0}^{\infty}(a_{nv}-\alpha_v)S_v = \sum_{v=0}^{\infty} a_{nv}S_v - \sum_{v=0}^{\infty}\alpha_v S_v .$$

Hipoteze göre $(\sigma_n) = (\sum\limits_{v=0}^{\infty} a_{nv}S_v)$ yakınsak ve $\sum\limits_{v=0}^{\infty}\alpha_v S_v$ mutlak yakınsak olduğundan $(\sum\limits_{v=0}^{\infty} b_{nv}S_v)$ yakınsaktır.

Şimdi $\sum\limits_{v=0}^{\infty}|b_{nv}| \to 0$ $(n \to \infty)$ olduğunu gösterelim. $\sum\limits_{v=0}^{\infty}|\alpha_v| < \infty$ ve (RN) koşulu sağlandığından, $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{v=0}^{\infty}|b_{nv}| = \sum_{v=0}^{\infty}|a_{nv}-\alpha_v| \leqslant \sum_{v=0}^{\infty}|a_{nv}| + \sum_{v=0}^{\infty}|\alpha_v| < \infty \qquad \text{(I.14)}$$

ve üstelik $\sup\limits_n \sum\limits_{v=0}^{\infty}|b_{nv}| < \infty$ dır. O halde $(\sum\limits_{v=0}^{\infty}|b_{nv}|)$, sınırlı bir dizidir. Kabul edelim ki $\sum\limits_{v=0}^{\infty}|b_{nk}| \not\to 0$ $(n \to \infty)$ dır. Bu takdirde $\limsup\limits_n(\sum\limits_{v=0}^{\infty}|b_{nv}|) =: \delta > 0$ olmak üzere, doğal sayıların bir (n_i) alt dizisi vardır öyle ki,

$$\sum_{v=o}^{\infty} |b_{n_i,v}| \geqslant \delta \qquad (I.15)$$

dır. (I.15) den $\sum_{v=k+1}^{\infty} |b_{nv}| \neq 0$ (k sabit) dır. Ayrıca $\lim_{n\to\infty} b_{nv} = 0$ olduğundan,

$$\frac{\sum_{v=o}^{k} |b_{nv}|}{\sum_{v=k+1}^{\infty} |b_{nv}|} \to 0 \ (n \to \infty,\ k \text{ sabit}) \qquad (I.16)$$

dır. (I.14) ve (I.16) dan Yardımcı Teorem I.1 in koşulları sağlanır. O halde doğal sayıların (n_i) ve (v_i) $(i = 1,2,\ldots)$ altdiziler vardır öyle ki

$$\sum_{v=v_i}^{v_{i+1}-1} |b_{n_i,v}| \geqslant \left(\frac{i-1}{i}\right) \sum_{v=o}^{\infty} |b_{n_i,v}| \qquad (i = 1,2,\ldots) \qquad (I.17)$$

dır. Bu (n_i) ve (v_i) dizileri için,

$$S_v := \begin{cases} (-1)^i \operatorname{sgn} b_{n_i v} & , v_i \leqslant v < v_{i+1} \\ 0 & , \text{diğer haller} \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa $|S_v| \leqslant 1$ olur. Bu (S_v) dizisi için, (I.17) ve (I.15) kullanılarak,

$$\sum_{v=o}^{\infty} b_{n_i,v} S_v = \sum_{v=v_i}^{v_{i+1}-1} b_{n_i,v} (-1)^i . \operatorname{sgn} b_{n_i,v}$$

$$= \sum_{v=v_i}^{v_{i+1}-1} |b_{n_i,v}| . (-1)^i$$

$$(-1)^i \sum_{v=o}^{\infty} b_{n_i,v} S_v \geqslant \sum_{v=v_i}^{v_{i+1}-1} |b_{n_i,v}| - \sum_{v=o}^{v_i-1} |b_{n_i,v}| - \sum_{v=v_{i+1}}^{\infty} |b_{n_i,v}|$$

$$= 2 \sum_{v=v_i}^{v_{i+1}-1} |b_{n_i,v}| - \sum_{v=o}^{\infty} |b_{n_i,v}|$$

$$\geqslant 2 \left(\frac{i-1}{i}\right) \sum_{v=o}^{\infty} |b_{n_i,v}| - \sum_{v=o}^{\infty} |b_{n_i,v}|$$

$$= \left(\frac{2i-2}{i} - 1\right) \sum_{v=o}^{\infty} |b_{n_i,v}|$$

$$\geqslant \left(1 - \frac{2}{i}\right)\delta$$

elde edilir. O halde $\left(\sum_{v=o}^{\infty} b_{n_i,v} S_v\right)$ dizisi yakınsak değildir. $\left(\sum_{v=o}^{\infty} b_{n_i,v} S_v\right)$ dizisi, $\left(\sum_{v=o}^{\infty} b_{nv} S_v\right)$ nin altdizisi olduğundan $\left(\sum_{v=o}^{\infty} b_{nv} S_v\right)$ dizisi de yakınsak değildir. Bu ise başta bulduğumuz sonuçla çelişir. O halde $\sum_{v=o}^{\infty} |a_{nv} - \alpha_v| \to 0$ $(n \to \infty)$ dır.

Teorem I.4 ün koşullarını sağlayan $A = (a_{nv})$ matrisine "Schur matrisi" veya "yakinsaklık üreten matris" denir. $A = (a_{nv})$ regüler bir matris ise A yakınsaklık üretmez.

Gerçekten; $A = (a_{nv})$ regüler bir matris ise $\sum_{v=o}^{\infty} a_{nv} \to 1$ $(n \to \infty)$ ve $a_{nv} \to 0$ $(n \to \infty$, v sabit) dır. Kabul edelim ki A yakınsaklık üretsin. Bu takdirde Teorem I.4'e göre $\sum_{v=o}^{\infty} |a_{nv}|$ n ye göre düzgün yakınsaktır. Dolayısıyla,

$$\lim_{n\to\infty} \left|\sum_{v=o}^{\infty} a_{nv}\right| \leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{v=o}^{\infty} |a_{nv}| = \sum_{v=o}^{\infty} \lim_{n\to\infty} |a_{nv}| = 0$$

olur. Bu ise $\sum_{v=o}^{\infty} a_{nv} \to 1 (n \to \infty)$ olmasıyla çelişir. O halde $A = (a_{nv})$ matrisi yakınsaklık üretmez.

O halde bir matris hem regüler, hemde Schur matrisi olamaz.

B Ö L Ü M II

NÖRLUND VE NÖRLUND TİPİ METODLAR

Bu bölümde, özel bir limitleme metodu olan Nörlund ortalamasını inceleyeceğiz. Bölüm I'de verdiğimiz Toeplitz Teoremi ile, regüler matrisleri ka-karakterize etmiştik. Şimdi bu teoreme göre, tanımlayacağımız metodların regülerlik koşullarını ve bunlara ek olarak diğer önemli özelliklerini vereceğiz. Nörlund ortalamasının ilk tanımı, G.F.Voronoi(1902) tarafından verilmiştir. Daha sonra N.E.Nörlund (1920) aynı tanımı, Voronoi'den bağımsız olarak ortaya koymuştur.

Tanım II.1 : Kısmi toplamlar dizisi $s=(S_n)$ olan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi verilsin. $P_n = p_0+p_1+\dots+p_n \neq 0$ $(n=0,1,2,\dots)$ ve

$$\sigma_n = N_p(s) := \frac{p_n s_0 + p_{n-1}s_1+\dots+p_0 s_n}{P_n} = \frac{1}{P_n}\sum_{v=0}^{n} p_{n-v}S_v$$

olmak üzere $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = s$ ise (S_n) dizisi s değerine Np-limitlenebilir(Nörlund limitlenebilir) denir ve $S_n \to s(N_p)$ şeklinde gösterilir. Ayrıca, $S_n = \sum_{v=0}^{n} a_v$ ve $S_n \to s(N_p)$ ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi s ye Np-toplanabilir(Nörlund toplanabilir) denir ve $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s(Np)$ şeklinde gösterilir.

Tanımdan görüldüğü gibi, $((Np)_{nv})$ Nörlund matrisi,

$$(Np)_{nv} = \begin{cases} \dfrac{p_{n-v}}{P_n} & , \quad v\leqslant n \\ 0 & , \quad v>n \end{cases}$$

ile verilir.

(p_n) dizisi özel seçilmek suretiyle Nörlund metodundan, başka adlarla anılan metodlar elde edilebilir. Örneğin;

Her $n \in \mathbb{N}$ için $p_n = 1$ seçilirse $P_n = n+1$ olur ki, bu C_1-metodu (1.mertebeden Cesàro metodu) olarak bilinir. C_1-metoduna aynı zamanda "Aritmetik Ortalama" da denir. Aynı şekilde özel olarak, her $n \in \mathbb{N}$ için $p_n = \binom{n+k-1}{k-1}$, $(k>-1,\ k \in \mathbb{R})$ seçilerek C_k-metodunun (k.mertebeden Cesa'ro metodu) elde edildiği II.2.3'de verilmiştir. Girişte sözü edilen E_1-metodu (1.mertebeden Euler metodu) da her $n \in \mathbb{N}$ için $p_n = \binom{n}{v}$ seçilerek elde edilmiştir.

Bundan başka, $((Np)_{nv})$ Nörlund matrisiyle aynı yapıda olan fakat başka adlarla anılan bir takım limitleme metodları vardır. Bu tür metodlara "Nörlund Tipi Metodlar" denir. Birinci kısımda inceleyeceğimiz Ağırlıklı Aritmetik Ortalama, bir Nörlund Tipi metoddur.

Şimdi yukarıda sözü edilen metodlar hakkında bilgiler verelim.

II.1. AĞIRLIKLI ARİTMETİK ORTALAMA

M_p ile gösterilen Ağırlıklı Aritmetik Ortalamanın tanımı aşağıdaki gibidir.

Tanım II.2. Kısmi toplamlar dizisi $s = (S_n)$ olan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi verilsin. $P_n = p_0+p_1+\dots+p_n \neq 0$ $(n = 0,1,2,\dots)$ olmak üzere,

$$t_n := \frac{p_0 s_0 + p_1 s_1 + \dots + p_n s_n}{P_n} = \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^{n} p_k s_k \to s \quad (n \to \infty)$$

ise (S_n) dizisi s değerine Mp-limitlenebilir denir ve $S_n \to s(M_p)$ şeklinde gösterilir. Ayrıca $S_n \to s(M_p)$ ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisi, s-ye M_p-toplanabilirdir denir ve $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s(M_p)$ şeklinde gösterilir.

Tanım II.2 den görüldüğü gibi, $((M_p)_{nk})$, Ağırlıklı Aritmetik Ortalamanın matrisi,

$$(M_p)_{nk} = \begin{cases} \dfrac{p_k}{P_n} & , \quad k\leqslant n \\ 0 & , \quad k>n \end{cases}$$

ile verilir. $((M_p)_{nk})$ matrisi üçgensel bir matristir.

Şimdi M_p-metodunun regülerlik koşullarını belirleyen Teorem II.1'i verelim.

Teorem II.1 [5]: M_p-metodunun regüler olması için gerekli ve yeterli koşul,

$$\sum_{k=o}^{n} |p_k| = 0(P_n)(n \to \infty) \quad \text{ve} \quad P_n \to \pm\,\infty(n \to \infty)$$

olmasıdır.

İspat : "Gerekli Koşul" : M_p-metodu regüler olsun. Bu takdirde Teorem I.1.4^o e göre (RN), (RS_1) ve (C_o) koşulları sağlanır. O halde (RN) den;

$$\sum_{k=o}^{\infty} |(M_p)_{nk}| = \sum_{k=o}^{n} |\frac{p_k}{P_n}| = 0(1) \quad (n \to \infty)$$

$$\sum_{k=o}^{n} |p_k| = 0(P_n) \quad (n \to \infty)$$

elde edilir. (C_o) dan;

$(M_p)_{nk} \to 0(n \to \infty, k$ sabit) dır. Buradan $\frac{p_k}{P_n} \to 0$ $(n \to \infty, k$ sabit) olur ki bu ise $P_n \to \pm\infty(n \to \infty)$ ile mümkündür.

"Yeter Koşul": $\sum_{k=o}^{n} |p_k| = O(P_n)(n \to \infty)$ ve $P_n \to \pm\infty (n \to \infty)$ olsun. $((Mp)_{nk})$ matrisinin Teorem I.1.4° deki (RN),(RS_1) ve (C_o) koşullarını sağladığını gösterelim :

$$(RN) : \sum_{k=o}^{\infty} |(M_p)_{nk}| = \sum_{k=o}^{n} \left|\frac{p_k}{P_n}\right| = O(1) \quad (n \to \infty)$$

$$(RS_1): \lim_{n\to\infty} \sum_{k=o}^{\infty} (M_p)_{nk} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=o}^{n} p_k}{P_n} = 1$$

(C_o) : $P_n \to \pm\infty$ olduğundan

$$(M_p)_{nk} = \frac{p_k}{P_n} \to 0 \quad (n \to \infty \ , \ k \text{ sabit})$$

dır. Bu üç koşul sağlandığından Teorem I.1.4° e göre M_p-metodu regülerdir.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $p_n \geqslant 0$ seçilerek elde edilen M_p-metoduna "pozitif M_p-metodu" denir.

Şimdi yukarıdaki teoremin bir sonucu olarak, pozitif M_p-metodunun regülerlik koşulunu vereceğiz.

Sonuç II.1 : Her $n \in \mathbb{N}$ için $p_n \geqslant 0$ ise

M_p-metodu regülerdir $\Longleftrightarrow P_n \to \pm\infty (n \to \infty)$ dır.

$$\sum_{k=o}^{\infty} |(M_p)_{nk}| = \sum_{k=o}^{\infty} (M_p)_{nk}$$

olduğundan ispat açıktır.

Regüler olmayan Ağırlıklı Aritmetik Ortalamalar da vardır. Örneğin ;

Her $n \in \mathbb{N}$ için $p_n = 1/2^n$ seçilirse $P_n \to 2(n \to \infty)$ olur. $(S_n) := (\frac{1}{n+1})$ dizisini gözönüne alalım. (S_n) nin M_p-dönüşümü (t_n) olmak üzere,

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=o}^{n} \frac{1}{(k+1)2^k} > 0$$

dır. $S_n \to 0(n \to \infty)$ olduğu halde $t_n \not\to 0(n \to \infty)$ olur ki bu ise $((M_p)_{nk})$ matrisinin regüler olmadığını gösterir.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $p_n = 1$ seçilirse $P_n = n+1$ olur ki bu durumda (S_n) dizisinin M_p-dönüşümü

$$t_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=o}^{n} S_k$$

dır. Bu şekilde seçilen Mp-metoduna "Aritmetik Ortalama" denildiğini Bölüm II. nin başında söylemiştik.

Şimdi M_p-metodu hakkında özellikler vereceğiz. Aşağıda vereceğimiz Teorem II.2. M_p-limitlenebilen dizilerin sınıfı ile ilgili önemli bilgiler verecektir.

Teorem II.2. [3]: Her $n \in \mathbb{N}$ için $p_n \neq 0$ ve $S_n \to s(M_p)$ ise,

$$S_n - s = o\left(\frac{P_n}{p_n}\right) \quad (n \to \infty)$$

dır.

İspat: Verilen bir (S_n) dizisinin M_p-dönüşümü (t_n) olmak üzere,

$$t_n = \frac{1}{P_n} \sum_{k=o}^{n} p_k s_k \quad , \quad t_{n-1} = \frac{1}{P_{n-1}} \sum_{k=o}^{n-1} p_k s_k$$

dır. Bu iki eşitlikten,

$$P_n t_n - P_{n-1} t_{n-1} = p_n s_n$$

elde edilir. $S_n \to s(M_p)$ olduğundan $t_n \to s$ $(n \to \infty)$ dır. Dolayısıyla

$$t_n = s + o(1)(n \to \infty), \quad t_{n-1} = s + o(1) \quad (n \to \infty)$$

yazılır. Böylece,

$$\begin{aligned} p_n s_n &= P_n t_n - P_{n-1} t_{n-1} \\ &= P_n(s+o(1)) - P_{n-1}(s+o(1)) \\ &= s(P_n - P_{n-1}) + o(P_n) - o(P_n) \\ &= s\, p_n + o(P_n) \end{aligned}$$

bulunur. Bu ise $S_n - s = o(\frac{P_n}{p_n})$ $(n \to \infty)$ olduğunu gösterir.

Şimdi, özel olarak M_1-limitlenebilen dizileri gözönüne alalım. $((M_1)_{nk})$ Aritmetik Ortalamanın matrisi,

$$(M_1)_{nk} := \begin{cases} \frac{1}{n+1} & , \quad k \leq n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

ile verilir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $p_n = 1 \neq 0$ olduğundan Teorem II.2 ye göre

$$S_n \to s(M_1) \Longrightarrow S_n - s = o(\frac{P_n}{p_n})$$

dır. Dolayısıyla,

$$S_n - s = o(n+1) \Longrightarrow S_n = o(n+1)$$

ve üstelik

$$a_n = S_n - S_{n-1} = o(n+1) - o(n) = O(n+1)$$

$(n+1) \sim (n)$ $(n \to \infty)$ olduğundan

$$a_n = o(n) \quad (n \to \infty)$$

dır. O halde Teorem II.2 gösteriyor ki; (Sn) dizisi $\sum_{n=o}^{\infty} a_n$ serisinin kısmi toplam dizisi olmak üzere, M_1-limitlenebilen her dizi için $S_n = o(n)(n\to\infty)$ ve $a_n = o(n)(n \to \infty)$ dır.

Aşağıda vereceğimiz teoremde; M_p-Ağırlıklı Aritmetik Ortalamasının, Cauchy anlamındaki yakınsaklığa denk olması için gerekli koşulu vereceğiz.

Teorem II.3 [5]: M_p-metodu regüler, her $n \in \mathbb{N}$ için $p_n \neq 0$ ve $\frac{P_n}{p_n} = O(1)(n\to\infty)$ ise M_p-metodu yakınsaklığa denktir.

İspat: Önce $S_n \to s(M_p)$ ise $S_n \to s(n \to \infty)$ olduğunu gösterelim. $S_n \to s(M_p)$ ise Tanım II.2 den $t_n \to s(n \to \infty)$ dır. Dolayısıyla $t_n = s+o(1)(n \to \infty)$ ve $t_{n-1} = s+o(1)$ $(n \to \infty)$ yazılır.

$$S_n = \frac{P_n}{p_n} t_n - \frac{P_{n-1}}{p_n} t_{n-1}$$

$$= \frac{P_n}{p_n} (s+o(1)) - \frac{P_{n-1}}{p_n} (s + o(1))$$

$$= s\left(\frac{P_n}{p_n} - \frac{P_{n-1}}{p_n}\right) + \frac{P_n}{p_n} o(1) - \frac{P_{n-1}}{p_n} o(1)$$

$$= s + o(1)$$

dır. Bu ise $S_n \to s(n \to \infty)$ olduğunu gösterir.

Tersine, $S_n \to s(n \to \infty)$ olsun. M_p-metodu regüler olduğundan

$$t_n = \sum_{k=o}^{n} \frac{p_k}{P_n} S_k \to s(n \to \infty)$$

dır. Tanım II.2 ye göre $S_n \to s(M_p)$ elde edilir.

Aşağıda;"daha az hızlı ıraksaklık" ve "daha çok hızlı ıraksaklık" kavramlarını tanımlayıp, bu kavramlarla ilgili bir teorem vereceğiz. Bunları izleyen teoremlerde ise, iki farklı (p_n) ve (q_n) dizilerine karşılık gelen M_p ve M_q toplama metodları arasındaki ilişkileri inceleyeceğiz.

$\sum_{n=o}^{\infty} a_n$ ve $\sum_{n=o}^{\infty} a'_n$, kısmi toplamları sırasıyla S_n ve S'_n olan pozitif terimli ıraksak iki seri olsun.

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S'_n}{S_n} = +\infty$ ise $\sum_{n=o}^{\infty} a'_n$, $\sum_{n=o}^{\infty} a_n$ den daha çok hızlı ıraksar;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S'_n}{S_n} = 0$ ise $\sum_{n=o}^{\infty} a'_n$, $\sum_{n=o}^{\infty} a_n$ den daha az hızlı iraksar;

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S'_n}{S_n} = \ell \neq 0$ ise bu iki serinin ıraksaklık hızları aynıdır.

Teorem II.4 ([4],sayfa 280,Teorem 2): $\sum_{n=o}^{\infty} a_n$ ve $\sum_{n=o}^{\infty} a'_n$ pozitif terimli iki ıraksak seri olsun.

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a'_n}{a_n} = 0$ ise $\sum_{n=o}^{\infty} a'_n$, $\sum_{n=o}^{\infty} a_n$ den daha az hızlı ıraksar;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a'_n}{a_n} = +\infty$ ise $\sum_{n=o}^{\infty} a'_n$, $\sum_{n=o}^{\infty} a_n$ den daha çok hızlı ıraksar;

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a'_n}{a_n} = \ell \neq 0$ ise bu iki serinin ıraksaklık hızları aynıdır.

Teorem II.5 [3]: (p_n) ve (q_n) aşağıdaki koşulları sağlayan iki dizi olsunlar.

$$p_n > 0,\ q_n > 0\ ,\ \sum_{n=o}^{\infty} p_n = \infty\ ,\ \sum_{n=o}^{\infty} q_n = \infty\ .$$ ve

ya

$$\frac{q_{n+1}}{q_n} \leqslant \frac{p_{n+1}}{p_n} \qquad \text{(II.1)}$$

ya da

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} \leqslant \frac{q_{n+1}}{q_n} \qquad \text{(II.2)}$$

ve

$$\frac{P_n}{p_n} \leqslant H.\ \frac{Q_n}{q_n} \quad (H,n \text{ den bağımsız}) \qquad \text{(II.3)}$$

ise bu takdirde,

$$S_n \to s(M_p) \text{ ise } S_n \to s(M_q)$$

dır.

İspat : $S_n \to s(M_p)$ olsun. Bu takdirde Tanım II.2 den,

$$t_n = \frac{1}{P_n} \sum_{k=o}^{n} p_k \to s\ (n \to \infty)$$

dır. $S_n \to s(M_q)$ olduğunu göstermek için $Q_n = q_o + q_1 + \ldots + q_n$ olmak üzere,

$$U_n = \frac{q_o s_o + q_1 s_1 + \ldots + q_n s_n}{Q_n} = \frac{1}{Q_n} \sum_{k=o}^{n} q_k s_k \to s\ (n \to \infty)$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

$$p_n s_n = P_n t_n - P_{n-1} t_{n-1} \Longrightarrow s_n = \frac{1}{P_n}[P_n t_n - P_{n-1} t_{n-1}],\ P_{-1}, t_{-1} = 0$$

olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla,

$$U_n = \frac{1}{Q_n}\left[\frac{q_o}{p_o}.P_o t_o + \frac{q_1}{p_1}(P_1 t_1 - P_o t_o) + \ldots + \frac{q_n}{p_n}(P_n t_n - P_{n-1} t_{n-1})\right]$$

$$= \frac{1}{Q_n}\left[\left(\frac{q_o}{p_o} - \frac{q_1}{p_1}\right)P_o t_o + \left(\frac{q_1}{p_1} - \frac{q_2}{p_2}\right)P_1 t_1 + \ldots + \frac{q_n}{p_n} P_n t_n\right]$$

$$= \frac{1}{Q_n}\left[\sum_{k=o}^{n-1}\left(\frac{q_k}{p_k} - \frac{q_{k+1}}{p_{k+1}}\right)P_k t_k + \frac{q_n}{p_n} P_n t_n\right]$$

elde edilir.

$$C_{nk} := \begin{cases} \left(\frac{q_k}{p_k} - \frac{q_{k+1}}{p_{k+1}}\right) \frac{P_k}{Q_n} &, \quad k < n \\ \frac{q_n P_n}{p_n Q_n} &, \quad k = n \\ 0 &, \quad k > n \end{cases}$$

olmak üzere $U_n = \sum_{k=o}^{n} C_{nk} t_k$ olarak yazılır. O halde (C_{nk}) matrisinin regüler olduğu gösterilirse ispat biter.

$Q_n \to \infty (n \to \infty)$ olduğundan $C_{nk} \to 0 (n \to \infty,\ k \text{ sabit})$ olur ki bu ise Teorem I.1.4^{o} deki (C_o) koşulunun sağlandığını gösterir.

$(S_n) := (1,1,\ldots,1,\ldots)$ olarak tanımlanan (S_n) dizisi için $U_n = 1$ ve $t_n = 1$ dir. Dolayısıyla her $n \in \mathbb{N}$ için

$$U_n = \sum_{k=o}^{n} C_{nk} t_k \Longrightarrow 1 = \sum_{k=o}^{n} C_{nk} t_k$$

olur ki bu da (RS_1) koşulunun sağlandığını gösterir. Son olarak (RN) koşulunun sağlandığını gösterelim :

(II.1) durumunda ;

$$\frac{q_{n+1}}{q_n} \leqslant \frac{p_{n+1}}{p_n} \Longrightarrow \frac{q_{n+1}}{p_{n+1}} \leqslant \frac{q_n}{p_n}$$

olduğundan $C_{nk} \geqslant 0$ dır. Dolayısıyla

$$\sum_{k=o}^{\infty} |C_{nk}| = \sum_{k=o}^{\infty} C_{nk} = 1$$

elde edilir. Böylece (RN) sağlanır.

(II.2) durumunda,

$n = k$ dışında $C_{nk} \leqslant 0$, $n = k$ için $C_{nk} > 0$ dır. O halde

$$\sum_{k=o}^{\infty} |C_{nk}| = - \sum_{k=o}^{n-1} C_{nk} + \frac{q_n P_n}{p_n Q_n}$$

$$1 = \sum_{k=o}^{n} C_{nk} = \sum_{k=o}^{n-1} C_{nk} + \frac{q_n P_n}{p_n Q_n}$$

$$- \sum_{k=o}^{n} C_{nk} = \frac{q_n P_n}{p_n Q_n} - 1$$

$$\sum_{k=o}^{\infty} |C_{nk}| = 2\,\frac{q_n P_n}{p_n Q_n} - 1$$

bulunur. (II.3) den $\frac{q_n P_n}{p_n Q_n} \leqslant H$ olduğu kullanılırsa;

$$\sum_{k=o}^{\infty} |C_{nk}| \leqslant 2H - 1$$

olur ki bu ise (RN) nin sağlandığını gösterir.

Bu üç koşul sağlandığından Teorem I.1.4^{o} e göre (C_{nk}) matrisi regülerdir.

Kabaca (II.1) durumunda $\sum_{n=o}^{\infty} q_n$, $\sum_{n=o}^{\infty} p_n$ den daha az hızlı ıraksarken,(II.2) durumunda daha çok hızlı ıraksar fakat çok fazla hızlı değil. Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için $p_n = n^{\alpha}$, $q_n = n^{\beta}$ ise bu takdirde;

$\alpha > \beta > -1$ ise :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q_n}{p_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\beta}}{n^{\alpha}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\alpha-\beta}} = 0$$

olur ki bu durumda Teorem II.4 e göre $\sum_{n=o}^{\infty} q_n$, $\sum_{n=o}^{\infty} p_n$ den daha az hızlı ıraksar.

$\beta > \alpha > -1$ ise :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q_n}{p_n} = \lim_{n\to\infty} n^{\beta-\alpha} = +\infty$$

olur ki bu durumda da $\sum_{n=o}^{\infty} q_n$, $\sum_{n=o}^{\infty} p_n$ den daha çok hızlı ıraksar. Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için $p_n := 1$, $q_n = 2^n$ ise bu takdirde

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q_n}{p_n} = \lim_{n\to\infty} 2^n = +\infty$$

olur. Bu durumda teorem kullanılmaz.

Gerçekten $\sum_n q_n$ hızlı ıraksadığı zaman M_q-metodu sadece yakınsak serileri toplar. Bu aşağıda vereceğimiz Teorem II.6 ile daha kesin olarak gösterilmektedir.

Teorem II.6[3]: $q_n > 0$, $Q_n = q_o+q_1+\ldots+q_n$ olmak üzere $\frac{Q_{n+1}}{Q_n} \geqslant 1+\delta > 1$ ise bu takdirde $\sum_n a_n$ yakınsak olmadıkça M_q-toplanamaz.

İspat : (S_n), $\sum_n a_n$ serisinin kısmi toplam dizisi olsun. (S_n) dizisinin M_q-dönüşümü (U_n) olmak üzere

$$U_n = \frac{1}{Q_n} \sum_{k=o}^{n} q_k$$

ve

$$S_n = \frac{1}{q_n} [Q_n U_n - Q_{n-1} U_{n-1}]$$

dır.

$$C_{nk} = \begin{cases} -\dfrac{Q_{n-1}}{q_n} & , \quad k = n-1 \\[2ex] \dfrac{Q_n}{q_n} & , \quad k = n \\[2ex] 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

olmak üzere

$$S_n = \sum_{k=o}^{n} C_{nk} U_k$$

olarak yazılır. O halde (C_{nk}) matrisinin regüler olduğu gösterilirse ispat biter. Bunun için de Teorem I.1.4^{o} deki (C_o), (RS_1) ve (RN) koşullarının sağlandığını göstermeliyiz.

(C_o): açık olarak $C_{nk} \to 0$ $(n \to \infty$, k sabit) dır.

(RS_1): $\sum_{k=o}^{\infty} C_{nk} = \dfrac{Q_n - Q_{n-1}}{q_n} = 1$

(RN): $\dfrac{Q_{n+1}}{Q_n} \geqslant 1+\delta$ olduğundan, $\dfrac{Q_n + q_{n+1}}{Q_n} \geqslant 1+\delta$

ve buradan da $\dfrac{Q_n}{q_{n+1}} \leqslant \delta^{-1}$ bulunur. Böylece,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=o}^{\infty} |C_{nk}| &= \left|\frac{-Q_{n-1}}{q_n}\right| + \frac{Q_n}{q_n} \\
&= \frac{Q_{n-1}}{q_n} + \frac{Q_n}{q_n} \\
&= \frac{Q_{n-1}}{q_n} + \frac{Q_{n-1}+q_n}{q_n} \\
&= 2\,\frac{Q_{n-1}}{q_n} + 1 \\
&\leqslant 2\delta^{-1} + 1
\end{aligned}$$

elde edilir.

Örneğin, $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ serisini gözönüne alalım. Bu seri M_1-toplanabilir fakat M_{2^n}-toplanamaz. Gerçekten;

(S_n), $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ serisinin kısmi toplam dizisi olmak üzere, $S_n = \frac{1}{2}(1+(-1)^n)$ şeklinde ifade edilir. O halde bu dizinin M_1-dönüşümü (t_n) olmak üzere

$$t_n = \sum_{k=0}^{n} (M_1)_{nk}\, S_k = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(1+(-1)^0)+\frac{1}{2}(1+(-1)^1)+\ldots+\frac{1}{2}(1+(-1)^n)}{n+1}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(n+1) + \frac{1}{2}(1-1+1-1+\ldots)}{n+1}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(n+1) + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(1+(-1)^n)\right]}{n+1}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1+(-1)^n}{4(n+1)},$$

dır. Dolayısıyla,

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \frac{1}{2}$$

elde edilir ki bu ise $S_n \to \frac{1}{2}\ (M_1)$ olduğunu gösterir. Yani,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = \frac{1}{2}\ (M_1) \qquad \text{dir.}$$

Şimdi de, $\sum_{n}(-1)^n$ serisinin M_{2^n}-toplanamadığını gösterelim. Her $n \in \mathbb{N}$ için $q_n := 2^n$ ise,

$$Q_n = \sum_{k=o}^{n} p_k = \sum_{k=o}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$$

dir. Dolayısıyla $((M_{2^n})_{nk})$ matrisi,

$$(M_{2^n})_{nk} := \begin{cases} \dfrac{2^k}{2^{n+1}-1} & ; \quad k \leqslant n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

dır. (S_n) dizisinin M_{2^n}-dönüşümü (t_n) olmak üzere,

$$t_n = \sum_{k=o}^{n} (M_{2^n})_{nk} S_k$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}-1} \sum_{k=o}^{n} 2^k \left[\frac{1}{2}(1+(-1)^k)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{2^{n+1}-1} \sum_{k=o}^{n} 2^k(-1)^k\right]$$

dır. $U_n := \dfrac{1}{2^{n+1}-1} \sum_{k=o}^{n} 2^k(-1)^k$ olarak tanımlanırsa $t_n = \frac{1}{2}[1+U_n]$ olur.

$$(2^{n+1}-1)U_n = 1-2+2^2+2^3+\ldots+(-1)^n 2^n$$

$$2(2^{n+1}-1)U_n = 2-2^2+2^3-2^4+\ldots+(-1)^n 2^{n+1}$$

eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$U_n = \frac{1+(-1)^n 2^{n+1}}{3(2^{n+1}-1)}$$

şeklinde ifade edilir. Açık olarak $\lim\limits_{n\to\infty} U_n$ var olmadığından $\lim\limits_{n\to\infty} t_n$ var olamaz. Dolayısıyla $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ serisi M_{2^n}-toplanamaz.

O halde Teorem II.6 genel bir prensibi göstermektedir.

II.2 NÖRLUND ORTALAMALARI

Bu kısımda, Bölüm II nin başında tanımladığımız Np-Nörlund metodunu inceleyeceğiz.

$$(Np)_{nv} := \begin{cases} \dfrac{p_{n-1}}{P_n} & , \quad v \leqslant n \\ 0 & , \quad v > n \end{cases} \quad ; P_n = p_o+p_1+\ldots+p_n \neq 0,$$

ile verilen $((Np)_{nv})$ Nörlund matrisi, üçgensel matristir.

Bir $A = (a_{nk})$ matrisi üçgensel ve her $n \in \mathbb{N}$ için $a_{nn} \neq 0$ ise A matrisine "normal matris" denir. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için $(Np)_{nn} = p_o/P_n \neq 0$ olduğundan, $((Np)_{nv})$ matrisi normal matristir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $p_n \in \mathbb{R}$ ise, bu şekilde seçilen Np-metoduna "Reel Nörlund Metodu" denir. Benzer şekilde, her $n \in \mathbb{N}$ için $p_n \geqslant 0$ seçilirse, bu durumda Np-metoduna "Pozitif Nörlund Metodu" denir.

Şimdi Nörlund ortalamasına ilişkin bazı kuvvet serilerini inceleyeceğiz.

Np-metodu regüler ise, $\sum\limits_{n=o}^{\infty} p_n z^n$ ve $\sum\limits_{n=o}^{\infty} P_n z^n$ kuvvet serileri $|z|<1$ için yakınsaktır. Gerçekten;

II.2.1 de vereceğimiz Teorem II.7 ye göre, Np-metodu regüler olduğundan $p_n = o(P_n)(n \to \infty)$ dır. Buna göre,

$$\frac{P_n}{P_{n+1}} = \frac{P_{n+1}-p_{n+1}}{P_{n+1}} = 1 - \frac{p_{n+1}}{P_{n+1}} = 1-o(1)(n \to \infty)$$

olduğundan $\sum_{n=o}^{\infty} P_n z^n$ serisi $|z|<1$ için yasınsaktır. O halde $P(z) := \sum_{n=o}^{\infty} P_n z^n$ olsun. Diğer taraftan, $|z|<1$ için

$$(1-z)\ P(z) = \sum_{n=o}^{\infty} p_n z^n$$

olduğundan $\sum_{n=o}^{\infty} p_n z^n$ serisi de $|z|<1$ için yakınsaktır. O halde $p(z) := \sum_{n=o}^{\infty} p_n z^n$ olsun. Dolayısıyla,

$$a(z) := \sum_{n=o}^{\infty} a_n z^n = \frac{p(z)}{q(z)} \quad ;$$

$$b(z) := \sum_{n=o}^{\infty} b_n z^n = \frac{q(z)}{p(z)} \quad ;$$

$$k(z) := \sum_{n=o}^{\infty} k_n z^n = \frac{1}{p(z)} \quad ;$$

olarak tanımlanan serilerin her üçü de, yeteri kadar küçük $|z|$ ler için yakınsaktır.

Nörlund matrisi normal matris olduğundan tersi vardır. Şimdi $((Np)_{nv}^{-1})$, $((Np)_{nv})$ matrisinin tersini göstermek üzere ispat edeceğiz ki $\sum_{n=o}^{\infty} k_n z^n = k(z) = 1/p(z)$ olmak üzere,

$$(N_p^{-1})_{nv} := \begin{cases} k_{n-v}P_v &, \quad v \leqslant n \\ 0 &, \quad v > n \end{cases}$$

dır.

Verilen bir (S_n) dizisine $((Np)_{nv})$ matrisi uygulandığında

$$\sigma_n = \sum_{v=o}^{n} (N_p)_{nv} S_v \qquad \text{ve} \qquad S_n = \sum_{v=o}^{n} (N_p^{-1})_{nv}\sigma_v$$

olur. $\sum\limits_{v=o}^{n} k_{n-v}P_v\sigma_v$ serisi gözönüne alınırsa,

$$\sum_{v=o}^{n} k_{n-v}P_v\sigma_v = \sum_{v=o}^{n} k_{n-v}\left(\sum_{\mu=o}^{v} p_{v-\mu}S_\mu\right)$$

$$= k_n p_o s_o + k_{n-1}(p_1 s_o + p_o s_1) + \ldots + k_o(p_n s_o + p_{n-1}s_1 + \ldots + p_o s_n)$$

$$= s_o(k_n p_o + \ldots + k_o p_n) + \ldots + s_n p_o k_o$$

$$= \sum_{\mu=o}^{n} s_\mu\left(\sum_{v=\mu}^{n} k_{n-v}P_{v-\mu}\right) \tag{II.4}$$

olur. Öte yandan $k(z).p(z) = 1$ olduğundan

$$\left(\sum_{n=o}^{\infty} k_n z^n\right)\left(\sum_{n=o}^{\infty} p_n z^n\right) = 1$$

ve böylece Cauchy çarpımı ile

$$\sum_{n=o}^{\infty}\left(\sum_{v=o}^{n} k_{n-v}p_v\right)z^n = 1$$

elde edilir. Dolayısıyla kuvvet serilerinin özdeşlik teoreminden ([4],sayfa 172),

$$\sum_{v=o}^{n} k_{n-v} p_v = \begin{cases} 1 & , \quad n = 0 \\ 0 & , \quad n > 0 \end{cases}$$

dır. Bu son eşitlik (II.4) de kullanılırsa

$$\sum_{v=o}^{n} k_{n-v} P_v \sigma_v = S_n \qquad \text{(II.5)}$$

bulunur. Bu ise isteneni verir.

Şimdi aşağıdaki şekilde seçilen Nörlund metodu için Np-limitlenebilen dizileri karakterize edeceğiz.

Nörlund matrisini $p_o = 1$, $p_1 = -2$, $n \geqslant 2$ için $p_n = 0$ olarak seçelim. Bu durumda bir (S_n) dizisinin Np-dönüşümü (σ_n) olmak üzere

$$\sigma_n = \frac{1}{P_n} \sum_{v=o}^{n} p_{n-v} S_v = 2\, S_{n-1} - S_n$$

olur. Üstelik,

$$S_n \to s(n \to \infty) \Longrightarrow \sigma_n \to s(n \to \infty)$$

olduğundan metod regülerdir. Diğer taraftan yeteri kadar küçük $|z|$ ler için,

$$p(z) = \sum_{n=o}^{\infty} p_n z^n = 1 - 2z$$

ve

$$k(z) = \frac{1}{p(z)} = \frac{1}{1-2z} = \sum_{n=o}^{\infty} 2^n z^n = \sum_{n=o}^{\infty} k_n z^n$$

dır. Kuvvet serilerinin özdeşlik teoreminden

$$k_n = 2^n \text{ ve açık olarak } k_{n-v} = 2^{n-v}$$

dır. Dolayısıyla (II.5) den

$$S_n = \sum_{v=o}^{n} 2^{n-v} P_v \sigma_v$$

$$= 2^n(\sigma_o - \sum_{v=1}^{n} \frac{\sigma_v}{2^v}) \quad (n \geq 1)$$

bulunur. Bu şekilde seçilen Nörlund metodu için Np-limitlenebilen bütün dizilerin kümesi E ile gösterilirse,

$$E: = \{(S_n) : S_n = 2^n(\sigma_o - \sum_{v=1}^{n} \frac{\sigma_v}{2^v})(n \geq 1), (\sigma_n) \text{ yakınsak}\}$$

dır. Öte yandan

$$S_n - 2^n(\sigma_o - \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\sigma_v}{2^v}) = \sum_{v=n+1}^{\infty} 2^{n-v} \sigma_v \qquad \text{(II.6)}$$

dır. Ayrıca $\sigma_n \to 0(n \to \infty)$ ise

$$a_{nv} : = \begin{cases} 2^{n-v} & , \quad v \geq n+1 \\ 0 & , \quad v < n+1 \end{cases}$$

ile tanımlanan $A = (a_{nv})$ matrisi regüler olduğundan

$$\sum_{v=n+1}^{\infty} 2^{n-v}\sigma_v \to 0(n \to \infty) \tag{II.7}$$

dır. Dolayısıyla (II.6) ve (II.7) den,

$S_n \to 0(Np) \Longleftrightarrow S_n = C.2^n + C_n$; C sabit, $\lim_{n\to\infty} C_n = 0$ elde edilir. Buradan açık olarak $2^n \to 0(Np)$ dir.

II.2.1 Nörlund Metodlarının Regülerliği ve Uyumluluğu

Önce Nörlund metodunun regülerlik koşullarını belirleyen aşağıdaki teorem II.7 yi verelim.

Teorem II.7[5]: Np-metodunun regüler olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\sum_{v=o}^{n} |p_v| = 0(P_n)(n \to \infty) \quad , \quad p_n = o(P_n)(n \to \infty)$$

olmasıdır.

İspat : "Gerekli koşul": Np-metodu regüler olsun. Bu takdirde Teorem I.1.4^o e göre (RN), (RS_1) ve (C_o) koşulları sağlanır. (RN) den;

$$\sum_{v=o}^{\infty} |(Np)_{nv}| = \sum_{v=o}^{n} \left|\frac{p_{n-v}}{P_n}\right| = \frac{1}{P_n} \sum_{v=o}^{n} |p_v| = 0(1) \quad (n \to \infty)$$

$$\sum_{v=o}^{n} |p_v| = 0(P_n)(n \to \infty),$$

(C_o) dan;

$$(Np)_{nv} = \frac{p_{n-v}}{P_n} \to 0 \ (n \to \infty, \ v \text{ sabit})$$

$$p_n = o(P_n) \ (n \to \infty)$$

elde edilir.

"Yeter Koşul": $\sum_{v=o}^{\infty} |p_v| = 0(P_n)(n \to \infty)$ ve $p_n = o(P_n)(n \to \infty)$ olsun.

$$(RN): \quad \sum_{v=o}^{\infty} |(Np)_{nv}| = \sum_{v=o}^{n} \left|\frac{p_{n-v}}{P_n}\right| = \frac{\sum_{v=o}^{n} |p_v|}{P_n} = 0(1) \ (n \to \infty)$$

$$(RS_1): \quad \sum_{v=o}^{\infty} (Np)_{nv} = \sum_{v=o}^{n} \frac{p_{n-v}}{P_n} = \frac{\sum_{v=o}^{n} p_v}{P_n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{v=o}^{\infty} (Np)_{nv} \to 1(n \to \infty)$$

(C_o): $\quad p_n = o(P_n)$ olduğundan,

$$\frac{P_{n-1}}{P_n} = \frac{P_{n-1}}{P_{n-1}} \cdot \frac{P_n - p_n}{P_n} \to 0 \ (n \to \infty)$$

$$\frac{P_{n-2}}{P_n} = \frac{P_{n-2}}{P_{n-2}} \cdot \frac{P_n - (p_n + p_{n-1})}{P_n} \to 0 \ (n \to \infty)$$

. . . .

$$\frac{P_{n-v}}{P_n} = \frac{P_{n-v}}{P_{n-v}} \cdot \frac{P_n - (p_n + \ldots + p_{n-v+1})}{P_n} \to 0 \ (n \to \infty)$$

dır. Dolayısıyla (RN),(RS_1) ve (C_o) koşulları sağlanır. Teorem I.1.4^o e göre Np-metodu regülerdir.

Pozitif Nörlund metodunun regülerlik koşulu ise, Teorem II.7 nin bir sonucu olarak verilir.

Sonuç II.2. Her $n \in \mathbb{N}$ için $p_n \geq 0$ seçilirse,

Np-metodu regülerdir $\Longleftrightarrow p_n = o(P_n)(n \to \infty)$.

$$\sum_{v=o}^{\infty} |(Np)_{nv}| = \sum_{v=o}^{\infty} (Np)_{nv} = \sum_{v=o}^{n} \frac{p_{n-v}}{P_n} = 1$$

olduğu gözönüne alınırsa ispat açıktır.

$A = (a_{nv})$ ve $B = (b_{nv})$ iki metod olsun. $S_n \to s(A)$ ve $S_n \to s'(B)$ olan her (S_n) dizisi için $s = s'$ oluyorsa "A ve B metodları uyumludur" denir.

Reel ve regüler Nörlund metodlarının uyumluluğu, aşağıda vereceğimiz Teorem II.8 nin önemli bir sonucudur.

Teorem II.8[5]: Np bir reel ve regüler Nörlund metodu ve $S_n \to s(Np)$ olsun. Bu takdirde $s(z) = \sum_{n=o}^{\infty} s_n z^n$ pozitif bir yakınsaklık yarıçapına sahiptir. Bir $\varepsilon>0$ vardır öyle ki $s(z)$ fonksiyonu $1-\varepsilon<z<1$ için regülerdir ve $\lim_{x \to 1^-}(1-x)s(x)=s$ $(1-\varepsilon<x<1)$ dır.

İspat : $S_n \to s(Np)$ ise $\sigma_n := \frac{1}{P_n} \sum_{v=o}^{n} p_{n-v} S_v \to s(n \to \infty)$ dır.

Np-metodu regüler olduğundan $\frac{P_n}{P_{n+1}} \to 1(n \to \infty)$ dır. O halde

$$(1-z)\sum_{n=o}^{\infty} P_n z^n = \sum_{n=o}^{\infty} p_n z^n \qquad (P_n = p_o+\dots+p_n \neq 0)$$

eşitliği gözönüne alınırsa $\sigma_n \to s(n\to\infty)$ ve $\frac{P_n}{P_{n+1}} \to 1$ $(n\to\infty)$ olduğundan $\sum_{n=o}^{\infty} p_n z^n$ ve $\sum_{n=o}^{\infty} P_n\sigma_n z^n$ serileri $|z|<1$ için mutlak yakınsaktır. $p(z) := \sum_{n=o}^{\infty} p_n z^n$ ve $T(z) = \sum_{n=o}^{\infty} P_n\sigma_n z^n$ olsun. Diğer taraftan, yeteri kadar küçük $|z|$ler için Cauchy çarpımı ve $\sum_{n=o}^{\infty} k_n z^n = k(z) = \frac{1}{p(z)}$ olmak üzere $s_n = \sum_{v=o}^{n} k_{n-v}P_v\sigma_v$ olduğu kullanılırsa,

$$\sum_{n=o}^{\infty} s_n z^n = \sum_{n=o}^{\infty}\left(\sum_{v=o}^{n} k_{n-v}P_v\sigma_v\right)z^n$$

$$=\left(\sum_{n=o}^{\infty} k_n z^n\right)\left(\sum_{n=o}^{\infty} P_n\sigma_n z^n\right)$$

$$= k(z).T(z)$$

$$= \frac{T(z)}{p(z)}$$

elde edilir. $T(z)$ ve $p(z)$ $|z|<1$ için yakınsak dolayısıyla regüler olduğundan, $s(z)$ fonksiyonu kutup noktaları dışında $|z|<1$ için regülerdir. $p(0) = p_o \neq 0$ olduğundan $s(z)$ fonksiyonu $z = 0$ da da regülerdir. Öte yandan,

$$\sum_{v=o}^{n} |p_v| = 0(P_n) \text{ ve } \frac{P_n}{P_{n+1}} \to 1 \ (n\to\infty)$$

olduğundan $\exists N\in\mathbb{N}$, $\exists\delta>0$ öyle ki $\forall n \geqslant N$ için

$$P_n \geqslant \delta > 0 \quad \text{veya } P_n \leqslant -\delta < 0 \quad (P_n \in \mathbb{R})$$

dır.

$\forall n \geqslant N$ için $P_n \geqslant \delta>0$, $0<1-\varepsilon<x<1$ ise bu durumda;

$$\sum_{v=o}^{\infty} |P_v| x^v = \sum_{v=o}^{N} |P_v| x^v + \sum_{v=N+1}^{\infty} P_v x^v$$

$$\sum_{v=o}^{\infty} |P_v| x^v = \sum_{v=o}^{N} |P_v| x^v + \sum_{v=o}^{\infty} P_v x^v - \sum_{v=o}^{N} P_v x^v$$

$$\leqslant \left| \sum_{v=o}^{\infty} P_v x^v \right| + 2 \sum_{v=o}^{N} |P_v| x^v$$

olur. $\forall n \geqslant N$ için $P_n \leqslant -\delta<0$, $0<1-\varepsilon<0<1$ ise bu durumda;

$$\sum_{v=o}^{\infty} |P_v| x^v = \sum_{v=o}^{N} |P_v| x^v - \sum_{v=N+1}^{\infty} P_v x^v$$

$$= \sum_{v=o}^{N} |P_v| x^v - \sum_{v=o}^{\infty} P_v x^v + \sum_{v=o}^{N} P_v x^v$$

$$\leqslant \left| \sum_{v=o}^{\infty} P_v x^v \right| + 2 \sum_{v=o}^{N} |P_v| x^v$$

dır. Sonuç olarak her iki durumda da $0<1-\varepsilon<x<1$ için

$$\sum_{v=o}^{\infty} |P_v| x^v \leqslant \left| \sum_{v=o}^{\infty} P_v x^v \right| + 2 \sum_{v=o}^{N} |P_v| x^v$$

bulunur. Buradan,

$$\frac{\sum_{v=o}^{\infty} |P_v| x^v}{|P(x)|} \leqslant 1+2 \frac{\sum_{v=o}^{N} |P_v| x^v}{|P(x)|}$$

dır. $|P(x)| \to \infty (x \to 1-)$ olduğundan

$$\frac{\sum\limits_{\nu=o}^{\infty} |P_\nu| x^\nu}{|P(x)|} \leq 1+o(1) \quad (x \to 1^-) \tag{II.8}$$

dır. Ayrıca $0<1-\varepsilon<x<1$ için $(1-x)\ P(x) = p(x)$ olduğundan

$$(1-x)s(x) = (1-x)\ \frac{T(x)}{p(x)}$$

$$= \frac{T(x)}{P(x)}$$

$$= \frac{\sum\limits_{\nu=o}^{\infty} P_\nu \sigma_\nu x^\nu}{P(x)}$$

dır. $a_\nu(x) := \dfrac{P_\nu x^\nu}{P(x)}$ $(0<1-\varepsilon<x<1)$ olmak üzere

$$(1-x)s(x) = \sum_{\nu=o}^{\infty} a_\nu(x)\sigma_\nu \quad (0<1-\varepsilon<x<1)$$

dır. Şimdi $\sigma_n \to s\,(n \to \infty)$ olduğundan $A = (a_\nu(x))$ in Teorem I.3 deki $(RN)'$, $(RS_1)'$ ve $(C_o)'$ koşullarını sağladığı gösterilirse ispat biter.

$(RN)'$: (II.8) den;

$$\sum_{\nu=o}^{\infty} |a_\nu(x)| = \sum_{\nu=o}^{\infty} \left|\frac{P_\nu x^\nu}{P(x)}\right| = O(1)\,(x \to 1-)$$

$(RS_1)'$: $\displaystyle\sum_{\nu=o}^{\infty} a_\nu(x) = \sum_{\nu=o}^{\infty} \frac{P_\nu x^\nu}{P(x)} = 1$

$(C_o)'$: $P_\nu x^\nu = o(\sum\limits_{n=o}^{\infty} P_n x^n)$ olduğundan

$a_\nu(x) \to 0(x \to 1^-,\ \nu$ sabit) dır.

O halde $\lim_{x\to 1-} (1-x)s(x) = s \quad (0<1-\varepsilon<x<1)$ dır.

Teorem II.9[5]: Bütün regüler ve reel Nörlund metodları uyumludur.

İspat : Np ve Nq herhangi iki regüler ve reel Nörlund metodu olsun. Bir (S_n) dizisi için

$$S_n \to s(Np) \text{ ve } S_n \to s'(Nq) \qquad s = s'$$

olduğu gösterilirse ispat biter. Teorem II.8 e göre,

$$S_n \to s(Np) \text{ ise } \lim_{x\ 1-} (1-x)s(x) = s$$

$$S_n \to s'(Nq) \text{ ise } \lim_{x\ 1-} (1-x)s(x) = s'$$

dır. Bu ikisinden $s = s'$ elde edilir.

Regüler ve pozitif Nörlund metodlarının uyumlu olmaları, aşağıda vereceğimiz problemin bir sonucu olarak kolayca görülür.

Problem II.1 : Np ve Nq regüler ve pozitif Nörlund metodu ve $r_n := \sum_{v=o}^{n} p_{n-v}q_v$ olmak üzere Nr-metodunu tanımlayalım. Gösteriniz ki Nr-metodu regülerdir ve $S_n \to s(Np)$ ise $S_n \to s(Nr)$ dır.

Çözüm : Önce Nr-metodunun regüler olduğunu gösterelim.

$$R_n = r_o+r_1+\dots+r_n$$

$$= p_oq_o+(p_1q_o+p_oq_1)+\dots+(p_nq_o+p_{n-1}q_1+\dots+p_oq_n)$$

$$= q_o(p_o+p_1+\ldots+p_n)+q_1(p_o+\ldots+p_{n-1})+\ldots+q_np_o$$

$$= q_oP_n+q_1P_{n-1}+\ldots+q_nP_o$$

$$= \sum_{v=o}^{n} q_{n-v}P_v \tag{II.9}$$

dır. Diğer taraftan $R_n \sim P_nQ_n$ $(n \to \infty)$ olduğu kolayca görülür. O halde,

$$\frac{r_n}{P_nQ_n} = \frac{1}{P_nQ_n} \cdot \sum_{v=o}^{n} P_{n-v}q_v < \sum_{v=o}^{n} \frac{P_{n-v}}{P_n} \cdot \frac{q_v}{Q_v}$$

olur. Np ve Nq metodları regüler olduğundan $(Np)_{nv} = \begin{cases} \frac{P_{n-v}}{P_n}, & v \leqslant n \\ o, & v > n \end{cases}$

olmak üzere $((Np)_{nv})$ matrisi regüler ve Sonuç II.2 den $q_n = o(Q_n)$ $(n \to \infty)$ dır. Dolayısıyla

$$\frac{r_n}{R_n} \sim \frac{r_n}{P_nQ_n} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

elde edilir. Yine sonuç II.2 den Nr-metodu regülerdir.

Şimdi $S_n \to s(Np)$ ise $S_n \to s(Nr)$ olduğunu gösterelim.

$S_n \to s(Np)$ ise $\sigma_n = \frac{1}{P_n} \sum_{v=o}^{n} p_{n-v}S_v \to s$ $(n \to \infty)$ dır.

$$H_n := \frac{1}{R_n} \sum_{v=o}^{n} r_{n-v}S_v$$

olarak tanımlayalım.

$$H_n = \frac{r_o s_n + r_1 s_{n-1} + \ldots + r_n s_n}{R_n}$$

$$= \frac{1}{R_n}[(p_o q_o s_n + (p_1 q_o + p_0 q_1) S_{n-1} + \ldots + (p_0 q_n + \ldots + p_n q_o) S_o]$$

$$= \frac{1}{R_n}[q_o (p_0 s_n + p_1 s_{n-1} + \ldots + p_n s_o) + \ldots + q_{n-1}(p_o s_1 + p_1 s_o) + q_n p_o s_o]$$

$$= \frac{1}{R_n}[q_o P_n \sigma_n + \ldots + q_{n-1} P_1 \sigma_1 + q_n P_o \sigma_o]$$

$$= \frac{1}{R_n} \sum_{v=o}^{n} q_{n-v} P_v \sigma_v$$

$$C_{nv} := \begin{cases} \dfrac{q_{n-v} P_v}{R_n} &, \quad v \leqslant n \\ 0 &, \quad v > n \end{cases}$$

olmak üzere $H_n = \sum_{v=o}^{n} C_{nv} \sigma_v$ olarak yazılır. $\sigma_n \to s (n \to \infty)$ olduğundan,(C_{nv}) matrisinin regüler olduğu gösterilirse $\lim_{n\to\infty} H_n = s$ elde edilir.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $p_n \geqslant 0$ ve $q_n \geqslant 0$ olduğundan $C_{nv} \geqslant 0$ dır. Dolayısıyla(II.9) kullanılarak,

$$\sum_{v=o}^{\infty} |C_{nv}| = \sum_{v=o}^{\infty} C_{nv} = \frac{\sum_{v=o}^{n} q_{n-v} P_v}{R_n} = 1$$

elde edilir. Böylece (RN) ve (RS_1) koşulları sağlanır.

$$C_{nv} = \frac{q_{n-v}P_v}{q_nP_o+q_{n-1}P_1+\ldots+q_{n-v}P_{n-v}+\ldots+q_oP_n}$$

$$\leqslant \frac{q_{n-v}P_v}{q_{n-v}P_v+q_{n-v-1}P_{v+1}+\ldots+q_oP_n}$$

$$\leqslant \frac{q_{n-v}P_v}{p_o(q_{n-v}+q_{n-v-1}+\ldots+q_o)}$$

$$= \frac{q_{n-v}P_v}{Q_{n-v}p_o}$$

dır. N_q-metodu regüler olduğundan

$$C_{nv} \leqslant \frac{q_{n-v}}{Q_{n-v}} \cdot \frac{P_v}{p_o} \to 0 \quad (n \to \infty, \ v \text{ sabit})$$

dır. Dolayısıyla (C_o) sağlanır. Teorem I.1.4^o e göre (C_{nv}) matrisi regülerdir. O halde $S_n \to s(N_r)$ elde edilir.

Teorem II.10 : Regüler ve pozitif Nörlund metodları uyumludur.

İspat : Np ve Nq pozitif ve regüler herhangi iki Nörlund metodu olsun. Bunlar yardımıyla $r_n := \sum_{v=o}^{n} p_{n-v}q_v$ Nr-Nörlund metodunu tanımlayalım. Bu takdirde problem II.1 den,

$$S_n \to s(N_p) \implies S_n \to s(N_r)$$

ve benzer şekilde

$$S_n \to s'(Nq) \Longrightarrow S_n \to s'(Nr)$$

dir. O halde $s = s'$ elde edilir.

II.2.2 Kapsama ve Denklik

Bu kısımda "kapsama" ve "denklik" kavramlarını tanıtıp, Nörlund metodunun bu kavramlarla ilgili özelliklerini vereceğiz. $A = (a_{nv})$ ve $B = (b_{nv})$ iki metod olsun. Eğer $S_n \to s(A)$ olan her (S_n) dizisi için, $S_n \to s'(B)$ oluyorsa bu durumda "B metodu A yı kapsar" denir ve $A \subseteq B$ şeklinde gösterilir. Eğer $A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ oluyorsa "A ve B metodlarına denktir" denir ve $A \approx B$ (veya $A \equiv B$) şeklinde gösterilir. Burada şunu ayrıca belirtelim ki, $A \subseteq B$ fakat A ve B metodları denk değilse bu takdirde "B metodu A dan daha kuvvetlidir" (veya "A metodu B den daha zayıftır") denir.

İki matrisin değişik şekilde çarpımları tanımlanabilir. Bunlardan bir tanesi aşağıdaki gibidir. Bu çarpıma "alışılmış matris çarpımı" diyeceğiz.

$A = (a_{nk})$, $B = (b_{nk})$ iki matris olsun.

$$C_{nk} = \sum_{i=o}^{\infty} a_{ni} b_{ik} \quad (n,k = 0,1,..)$$

olmak üzere tanımlanan $C = (C_{nk})$ matrisine A ile B nin çarpımı denir ve $A.B=C$ şeklinde gösterilir. Burada her bir $n \in \mathbb{N}$ için $\sum_{i=o}^{\infty} a_{ni} b_{ik}$ serilerinin yakınsak olduğu kabul edilmiştir.

Şimdi Teorem II.11 de $A \subseteq B$ olması için gerekli ve yeterli koşulları vereceğiz.

Teorem II.11[5]: $A=(a_{nk})$ normal ve $B=(b_{nk})$ üçgensel matris olsun. Bu takdirde A metodunun B tarafından kapsanması için gerekli ve yeterli koşul $C=B.A^{-1}$ matrisinin yakınsaklık koruyan olmasıdır.

İspat : "Gerekli Koşul": $A\subseteq B$ olsun. Bu takdirde bir (S_n) dizisi için $S_n\to s(A)$ ise $S_n\to s'(B)$ dır. Buna göre,

$$\sigma_n := \sum_{k=o}^{n} a_{nk}S_k \to s \quad (n\to\infty)$$

ve

$$\tau_n := \sum_{k=o}^{n} b_{nk}S_k \to s \quad (n\to\infty)$$

dır. A bir normal matris olduğundan $A^{-1}=(a'_{nk})$ ters matrisi vardır. Buradan,

$$\sigma_n = \sum_{k=o}^{n} a_{nk}S_k \quad \text{ise} \quad S_n = \sum_{k=o}^{n} a'_{nk}S_k$$

olur. O halde

$$\tau_n = \sum_{k=o}^{n} b_{nk}S_k$$

$$= \sum_{k=o}^{n} b_{nk}\Big(\sum_{i=o}^{k} a'_{ki}\sigma_i\Big)$$

$$= b_{no}(a'_{oo}\sigma_o)+b_{n1}(a'_{1o}\sigma_o+a'_{11}\sigma_1)+\ldots+b_{nn}(a'_{no}\sigma_o+a'_{n1}\sigma_1+\ldots+a'_{nn}\sigma_n)$$

$$\tau_n = \sigma_o(b_{no}a'_{oo}+b_{n1}a'_{1o}+\ldots+b_{nn}a'_{nn})+\sigma_1(b_{n1}a'_{11}+b_{n2}a'_{21}+\ldots+b_{nn}a'_{nn})$$

$$+\ldots+\sigma_n b_{nn}a'_{nn}$$

$$= \sigma_o \left(\sum_{k=o}^{n} b_{nk} a'_{ko} \right) + \sigma_1 \left(\sum_{k=1}^{n} b_{nk} a'_{k1} \right) + \ldots + \sigma_n b_{nn} a'_{nn}$$

$$= \sum_{i=o}^{n} \sigma_i \left(\sum_{k=i}^{n} b_{nk} a'_{ki} \right)$$

dır. $B = (b_{nk})$ ve $A^{-1} = (a'_{nk})$ matrislerine alışılmış matris çarpımı uygulanırsa,

$$C_{ni} = \sum_{k=i}^{n} b_{nk} a'_{ki} ,$$

olmak üzere $B.A^{-1} = C = (C_{ni})$ dır. O halde,

$$\tau_n = \sum_{i=o}^{n} C_{ni} \sigma_i ,$$

olarak yazılır. Böylece, $\sigma_n \to s$ $(n \to \infty)$ ve $\tau_n \to s'$ $(n \to \infty)$ olduğundan $C=(C_{ni})$ matrisi yakınsaklık korur.

"Yeterli Koşul": $C = B.A^{-1}$ matrisi yakınsaklık korusun. Bu durumda $A \subseteq B$ olduğunu gösterelim: Bir (S_n) dizisi için $S_n \to s(A)$ olsun. Bu takdirde

$$\sigma_n : = \sum_{k=o}^{n} a_{nk} S_k \to s \ (n \to \infty)$$

dır. $(C_{nk}) = C = BA^{-1}$ matrisi yakınsaklık koruduğundan

$$\sum_{k=o}^{n} C_{nk} \sigma_k \to s' \ (n \to \infty)$$

dır. O halde ispat için

$$\sum_{k=o}^{n} C_{nk}\sigma_k = \sum_{k=o}^{n} b_{nk}S_k = :\tau_n$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\sum_{k=o}^{n} C_{nk}\sigma_k = \sum_{k=o}^{n} \left(\sum_{i=k}^{n} b_{ni}a'_{ik} \right)\sigma_k$$

$$= \left(\sum_{i=o}^{n} b_{ni}a'_{io} \right)\sigma_o + \left(\sum_{i=1}^{n} b_{ni}a'_{i1} \right)\sigma_1 + \ldots + b_{nn}a'_{nn}\sigma_n$$

$$= (b_{no}a'_{oo}\sigma_o + b_{n1}a'_{1o}\sigma_o + \ldots + b_{nn}a'_{no}\sigma_o) + (b_{n1}a'_{11}\sigma_1 + b_{n2}a'_{21}\sigma_1 +$$

$$+ \ldots + b_{nn}a'_{n1}\sigma_1 + \ldots + b_{nn}a'_{n1}\sigma_1) + \ldots + b_{nn}a'_{nn}\sigma_n$$

$$= b_{no}(a'_{oo}\sigma_o) + b_{n1}(a'_{1o}\sigma_o + a'_{11}\sigma_1) + \ldots + b_{nn}(a'_{no}\sigma_o + a'_{n1}\sigma_1 + \ldots + a'_{nn}\sigma_n)$$

$$= b_{no}S_o + b_{n1}S_1 + \ldots + b_{nn}S_n$$

$$= \sum_{k=o}^{n} b_{nk}S_k = \tau_n$$

Teorem II.11 i, reel ve regüler Nörlund metodlarının denkliğini veren Teorem II.14 in ispatında kullanacağız. Bundan sonra A yerine Np, B yerine Nq-metodlarını alarak kapsama ve denklik kavramlarıyla ilgili teoremler vereceğiz.

Teorem II.12 [3]: Np ve Nq herhangi iki regüler Nörlund metodu olsun. Bu takdirde $\sum_{n=o}^{\infty} b_n z^n = b(z) = \frac{q(z)}{p(z)}$ olmak üzere, $S_n \to s(Np)$ olduğunda $S_n \to s(Nq)$ olması için gerekli ve yeterli koşul,

i) $|b_o||P_n|+|b_1||P_{n-1}|+\ldots+|b_n||P_o| \leqslant HQ_n$

olacak şekilde n den bağımsız bir H sayısının var olması

ii) $b_n = o(Q_n)$ $(n \to \infty)$

olmasıdır.

İspat: "Gerekli Koşul": $S_n \to s(N_P)$ olduğunda $S_n \to s(N_q)$ olsun. Bu takdirde (S_n) dizisinin Np ve Nq dönüşümleri, sırasıyla (σ_n) ve (τ_n) olmak üzere,

$$\sigma_n := \frac{1}{P_n}\sum_{k=o}^{n} p_{n-k}S_k \to s \quad (n \to \infty)$$

ve

$$\tau_n := \frac{1}{Q_n}\sum_{k=o}^{n} q_{n-k}S_k \to s(n \to \infty)$$

dır. Ayrıca Np ve Nq metodları regüler olduğundan $\sum_{n=o}^{\infty} Q_n\tau_n z^n$ ve $\sum_{n=o}^{\infty} P_n\sigma_n z^n$ serileri $|z|<1$ için yakınsaktır. O halde $|z|<1$ için $s(z) = \sum_{n=o}^{\infty} S_n z^n$ olmak üzere Cauchy çarpımı kullanılarak,

$$\sum_{n=o}^{\infty} Q_n\tau_n z^n = \sum_{n=o}^{\infty}\left(\sum_{k=o}^{n} q_{n-k}S_k\right)z^n$$

$$=\left(\sum_{n=o}^{\infty} q_n z^n\right)\left(\sum_{n=o}^{\infty} S_n z^n\right)$$

$$= q(z).s(z)$$

bulunur. Benzer şekilde $|z|<1$ için,

$$\sum_{n=o}^{\infty} P_n \tau_n z^n = p(z).s(z)$$

elde edilir. Dolayısıyla $|z|<1$ için

$$\sum_{n=o}^{\infty} Q_n \tau_n z^n = q(z).s(z)$$

$$= \frac{q(z)}{p(z)} \cdot p(z).s(z)$$

$$= \left(\sum_{n=o}^{\infty} b_n z^n\right)\left(\sum_{n=o}^{\infty} P_n \sigma_n z^n\right)$$

$$= \sum_{n=o}^{\infty} \left(\sum_{k=o}^{n} b_{n-k} P_k \sigma_k\right) z^n$$

ve kuvvet serilerinin özdeşliği teoreminden,

$$Q_n \tau_n = \sum_{k=o}^{n} b_{n-k} P_k \sigma_k$$

bulunur.

$$C_{nk} := \begin{cases} \dfrac{b_{n-k} P_k}{Q_n} & , \quad k \leqslant n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

olmak üzere $\tau_n = \sum_{k=o}^{n} C_{nk} \sigma_k$ olarak yazılır. $\sigma_n \to s$ $(n \to \infty)$ ve $\tau_n \to s$ $(n \to \infty)$ olduğundan (C_{nk}) matrisi regülerdir. O halde Teorem I.1.4^{o} e göre (RN) ve (C_o) koşulları sağlanır.

(RN) koşuluna göre ;

$$\sum_{k=o}^{\infty} |C_{nk}| = \sum_{k=o}^{n} |b_{n-k}||P_k| = 0(Q_n) \quad (n \to \infty)$$

bulunur ve i)koşulu sağlanır. (C_o) koşuluna göre; $Q_{n-k} \sim Q_n (n \to \infty,$ k sabit) olduğu gözönüne alınırsa sabit her k için

$$\lim_{n\to\infty} C_{nk} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n-k}P_k}{Q_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n-k}P_k}{Q_{n-k}} = P_k \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n-k}}{Q_{n-k}}$$

$$0 = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{Q_n}$$

olur ve ii) koşulu sağlanır.

"Yeterli Koşul": i) ve ii) koşulları sağlansın. Bu takdirde ispat için

$$C_{nk} := \begin{cases} \dfrac{b_{n-k}P_k}{Q_n} & , \quad k \leqslant n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

olmak üzere (C_{nk}) matrisinin regüler olduğunu göstermek yeterlidir. Hipotezden (RN) ve (C_o) koşulları sağlanır. (RS_1) koşulunun sağlandığını gösterelim: $|z|<1$ için Cauchy çarpımı kullanılarak,

$$q(z) = p(z).b(z)$$

$$\sum_{n=o}^{\infty} q_n z^n = \left(\sum_{n=o}^{\infty} p_n z^n\right).\left(\sum_{n=o}^{\infty} b_n z^n\right)$$

$$= \sum_{n=o}^{\infty} \left(\sum_{k=o}^{n} p_k b_{n-k}\right) z^n$$

ve kuvvet serilerinin özdeşliği teoreminden

$$q_n = \sum_{k=o}^{n} p_k b_{n-k} \tag{II.10}$$

bulunur. Ayrıca,

$$Q_n = \sum_{k=o}^{n} q_k = \sum_{k=o}^{n} \left(\sum_{i=o}^{k} p_i b_{k-i} \right)$$

$$= p_o b_o + (p_o b_1 + p_1 b_o) + \ldots + (p_o b_n + p_1 b_{n-1} + \ldots + p_n b_o)$$

$$= b_o (p_o p_1 + \ldots + p_n) + b_1 (p_o + \ldots + p_{n-1}) + \ldots + b_n p_o$$

$$= b_o P_n + b_1 P_{n-1} + \ldots + b_n P_o$$

$$= \sum_{k=o}^{n} b_{n-k} P_k \tag{II.11}$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\sum_{k=o}^{n} C_{nk} = \sum_{k=o}^{n} \frac{b_{n-k} P_k}{Q_n} = 1$$

dır. (RS_1) sağlanır. Bu üç koşul sağlandığından Teorem I.1.4^{o}e göre (C_{nk}) matrisi regülerdir.

Şimdi kapsama ile ilgili başka bir teorem vereceğiz. Bunun için de önce, bu teoremin ispatında kullanacağımız aşağıdaki yardımcı teoremi verelim.

Yardımcı Teorem II.1.[3]: $p(x) = \sum_{n=o}^{\infty} p_n x^n$, $|x|<1$ için yakınsak ve

$$p_o = 1,\ p_n > 0,\ \frac{p_{n+1}}{p_n} \geqslant \frac{p_n}{p_{n-1}} \qquad (n>0)$$

ise $C_n \geqslant 0$, $\Sigma C_n \leqslant 1$ olacak şekilde

$$\{p(x)\}^{-1} = \frac{1}{p(x)} = 1-C_1x-C_2x^2 \ \ldots.$$

dır. Eğer $\sum_n p_n = \infty$ ise $\sum_n C_n = 1$ dir.

İspat : Yeteri kadar küçük x ler için

$$\{p(x)\}^{-1} = \gamma_o+\gamma_1x+\gamma_2x^2+\ldots..$$

olduğunu kabul edelim. İspat edeceğiz ki

$$\gamma_o = 1,\ C_n := -\gamma_n \geqslant 0 \ (n>0) \text{ ve } \sum_n C_n \leqslant 1$$

dır. Yeteri kadar küçük x ler için, Cauchy çarpımı kullanılarak,

$$p(x).\{p(x)\}^{-1} = 1$$

$$\left(\sum_{n=o}^{\infty} p_n x^n\right)\left(\sum_{n=o}^{\infty} \gamma_n x^n\right) = 1$$

$$\sum_{n=o}^{\infty} \left(\sum_{k=o}^{n} p_{n-k}\gamma_k\right)x^n = 1$$

ve kuvvet serilerinin özdeşliği teoreminden

$$\sum_{k=o}^{n} p_{n-k}\gamma_k = \begin{cases} 1 \ , \ n = 0 \\ \\ 0 \ , \ n > 0 \end{cases} \tag{II.12}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\gamma_o p_o = 1$ ve $p_o = 1$ olduğundan $\gamma_o = 1$ bulunur. Şimdi $C_n := -\gamma_n \geqslant 0$ olduğunu gösterelim. (II.12) den;

$$\begin{aligned} &\gamma_o p_n + \gamma_1 p_{n-1} + \cdots + \gamma_n p_o = 0 \qquad (n > 0) \\ &\gamma_o p_{n+1} + \gamma_1 p_n + \cdots + \gamma_n p_1 + \gamma_{n+1} p_o = 0 \qquad (n > 0) \end{aligned} \tag{II.13}$$

dır. (II.13) den;

$$\begin{aligned} p_{n+1}(\gamma_1 p_{n-1} + \gamma_2 p_{n-2} + \cdots + \gamma_n p_o) &= p_{n+1}(-\gamma_o p_n) \\ &= p_n(-\gamma_o p_{n+1}) \\ &= p_n(\gamma_1 p_n + \gamma_2 p_{n-1} + \cdots + \gamma_{n+1} p_o); \end{aligned}$$

$$(p_{n+1}p_{n-1} - p_n p_n)\gamma_1 + (p_{n+1}p_{n-2} - p_n p_{n-1})\gamma_2 + \cdots + (p_{n+1}p_o - p_n p_1)\gamma_n = p_n p_o \gamma_{n+1}$$

$$\gamma_{n+1} = \left(\frac{p_{n+1}p_{n-1}}{p_n p_o} - \frac{p_n}{p_o}\right)\gamma_1 + \left(\frac{p_{n+1}p_{n-2}}{p_n p_o} - \frac{p_{n-1}}{p_o}\right)\gamma_2 + \cdots + \left(\frac{p_{n+1}}{p_n p_o} - \frac{p_1}{p_o}\right)\gamma_n$$

elde edilir.

$$a_{m,n} = \frac{p_{n+1}p_{n-m}}{p_n p_o} - \frac{p_{n-m+1}}{p_o} = \frac{p_{n-m}}{p_o}\left(\frac{p_{n+1}}{p_n} - \frac{p_{n-m+1}}{p_{n-m}}\right) \geqslant 0$$

olmak üzere

$$\gamma_{n+1} = a_{1,n}\gamma_1 + a_{2,n}\gamma_2+\cdots+a_{n,n}\gamma_n$$

olarak yazılır. $\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n$ aynı işarete sahip ise γ_{n+1} de bunlarla aynı işarete sahiptir. (II.12) den;

$$\gamma_1 = \frac{-\gamma_o p_1}{p_o} = -p_1 \leqslant 0$$

dır. Diğer taraftan $\gamma_2 = a_{1,1}\gamma_1$ dır. $a_{1,1} \geqslant 0$ ve $\gamma_1 \leqslant 0$ olduğundan $\gamma_2 \leqslant 0$ bulunur. Bu şekilde devam edilirse $n = 1,2,..$ için $\gamma_n \leqslant 0$ olduğu görülür. Son olarak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n \leqslant 1$ olduğunu gösterelim. Yeteri kadar küçük x ler için

$$\frac{1}{p(x)} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n$$

idi. $x = 1$ için $p(x) = \sum\limits_{n=o}^{\infty} p_n x^n$ serisi ya yakınsaktır ya da yakınsak değildir.

i) $x = 1$ için $p(x) = \sum\limits_{n=o}^{\infty} p_n x^n$ yakınsak olsun. Bu durumda $\frac{1}{p(1)} = A > 0$ olur. Buradan $1-\sum\limits_{n=o}^{\infty} C_n = A > 0$ dır. Bu ise $\sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n<1$ olması ile mümkündür.

ii) $x=1$ için $p(x) = \sum\limits_{n=o}^{\infty} p_n x^n$ yakınsak olmasın. Bu durumda $\sum\limits_{n=o}^{\infty} p_n = \infty$ olduğundan $\lim\limits_{x\to 1} \sum\limits_{n=o}^{\infty} p_n x^n = \infty$ dır.

O halde $\frac{1}{p(x)} \to 0(x \to 1)$ ve $1-\sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n x^n \to 0(x \to 1)$ olur ki bu ise $\sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n = 1$ olmasıyla mümkündür.

Aşağıda vereceğimiz Teorem II.13 de, bazı koşulları sağlayan (p_n) ve (q_n) dizilerine karşılık gelen Np ve Nq metodları arasındaki ilişkiyi inceleyeceğiz.

Teorem II.13 3 : i) Np ve Nq regüler Nörlund metodları;

ii) $p_o = 1$, $p_n > 0$, $\dfrac{p_{n+1}}{p_n} \geqslant \dfrac{p_n}{p_{n-1}}$ $(n > 0)$;

iii) $q_n > 0$;

iv) $\dfrac{p_n}{p_{n-1}} \leqslant \dfrac{q_n}{q_{n-1}}$ $(n > n_o)$;

olsun. Bu takdirde $S_n \to s(Np)$ ise $S_n \to s(Nq)$ dır.

İspat: $n_o = 0$ özel hali için ispat edilim. Bu durumda iv)koşulu her $n>0$ için sağlanır. Yardımcı Teorem II.1 e göre, yeteri kadar küçük x ler için

$$\frac{1}{p(x)} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n = \sum_{n=o}^{\infty} \gamma_n x^n ,$$

dır. $\sum\limits_{n=o}^{\infty} b_n x^n = b(x) := \dfrac{q(x)}{p(x)}$ olmak üzere Cauchy çarpımı kullanılarak,

$$\left(\sum_{n=o}^{\infty} b_n x^n\right) = \left(\sum_{n=o}^{\infty} \gamma_n x^n\right)\left(\sum_{n=o}^{\infty} q_n x^n\right)$$

$$= \sum_{n=o}^{\infty} \left(\sum_{k=o}^{n} q_{n-k}\gamma_k\right) x^n$$

ve kuvvet serilerinin özdeşliği teoreminden,

$$b_o = q_o ,$$

$$b_n = q_n\gamma_o + q_{n-1}\gamma_1 + \cdots + q_o\gamma_n \qquad (n > 0)$$

bulunur. $\gamma_o = 1$ ve $C_n := -\gamma_n (n=1,2,..)$ olduğu gözönüne alınırsa

$$b_n = q_n - C_1 q_{n-1} - C_2 q_{n-2} - \dots - C_n q_o \qquad (n > 0) ;$$

$$\frac{b_n}{q_n} = 1 - C_1 \cdot \frac{q_{n-1}}{q_n} - C_2 \cdot \frac{q_{n-2}}{q_n} - \dots - C_n \cdot \frac{q_o}{q_n} \qquad (n > 0)$$

dır. Ayrıca (II.12) eşitliğinde $p_o = 1$ ve $C_n := -\gamma_n \ (n = 1,2,..)$ olduğu kullanılırsa

$$p_n - C_1 p_{n-1} - \dots - C_n p_o = 0 \qquad (n > 0)$$

elde edilir. Diğer taraftan iv)koşuluna göre,

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} \leqslant \frac{q_n}{q_{n-1}} \Rightarrow \frac{q_{n-1}}{q_n} \leqslant \frac{p_{n-1}}{p_n} ;$$

$$\frac{q_{n-2}}{q_n} = \frac{q_{n-1}}{q_n} \cdot \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}} \leqslant \frac{p_{n-1}}{p_n} \cdot \frac{p_{n-2}}{p_{n-1}} = \frac{p_{n-2}}{p_n}$$

. . . .

elde edilir. O halde

$$\frac{b_n}{q_n} = 1 - C_1 \cdot \frac{q_{n-1}}{q_n} - C_2 \cdot \frac{q_{n-2}}{q_n} - \dots - C_n \cdot \frac{q_o}{q_n}$$

$$\geqslant 1 - C_1 \cdot \frac{p_{n-1}}{p_n} - C_2 \cdot \frac{p_{n-2}}{p_n} - \dots - C_n \cdot \frac{p_o}{p_n} = 0$$

elde edilir. $q_n > 0$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $b_n > 0$ dır. Şimdi Teorem II.12 deki i) ve ii) koşullarının sağlandığını gösterelim.

(II.11) den ;

$$\text{i}): |b_o||P_n|+\ldots+|b_n||P_o| = b_oP_n+\ldots+b_nP_o = Q_n \; ;$$

ve (II.10) dan da;

$$\text{ii}): b_op_o \leqslant b_np_o+\ldots+b_op_n = q_n$$

dır. Nq regüler olduğundan sonuç II.1 e göre,

$$b_n = O(q_n) = o(Q_n) \quad (n \to \infty)$$

elde edilir. O halde Teorem II.12 ye göre $S_n \to s(Np)$ ise $S_n \to s(Nq)$ dır. Böylece $n_o = 0$ özel hali için ispat biter. Şimdi genel durum için ispat edelim.

$$r_n := p_n \quad (n = n_o, n_o+1, \ldots)$$

ve eğer gerekli ise n_o sayısına kadar olan n ler için

$$\frac{r_{n_o}}{r_{n_o-1}} \leqslant \frac{r_{n_o+1}}{r_{n_o}} \quad , \quad \frac{r_{n_o}}{r_{n_o-1}} \leqslant \frac{q_{n_o}}{q_{n_o-1}} \quad ;$$

$$\frac{r_{n_o-1}}{r_{n_o-2}} \leqslant \frac{r_{n_o}}{r_{n_o-1}} \quad , \quad \frac{r_{n_o-1}}{r_{n_o-2}} \leqslant \frac{q_{n_o-1}}{q_{n_o-2}} \quad ;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{r_1}{r_o} \leqslant \frac{r_2}{r_1} \quad , \quad \frac{r_1}{r_o} \leqslant \frac{q_1}{q_o}$$

olsun. Bu takdirde $n > 0$ için

$$\frac{r_n}{r_{n-1}} \leqslant \frac{r_{n+1}}{r_n} \quad , \quad \frac{r_n}{r_{n-1}} \leqslant \frac{q_n}{q_{n-1}}$$

olur. $\rho_n := \frac{r_n}{r_o}$ olarak tanımlayalım. Bu takdirde

$$\rho_o = 1, \quad \rho_n = 0 \ , \quad \frac{\rho_{n+1}}{\rho_n} \geqslant \frac{\rho_n}{\rho_{n-1}} \quad , \quad \frac{\rho_n}{\rho_{n-1}} \leqslant \frac{q_n}{q_{n-1}} \qquad (n > o)$$

sağlanır. Dolayısıyla ρ_n, $n_o = 0$ özel hali için hipotezdeki koşulları sağlar.

$n_o = 0$ için ispat yapıldığından

$$S_n \to s(N\rho) \Longrightarrow S_n \to s(N_q)$$

dır. Ayrıca ρ_n nin tanımı gereği

$$S_n \to s(N_r) \Longrightarrow S_n \to s(N\rho)$$

dır. O halde

$$S_n \to s(N_p) \Longrightarrow S_n \to s(N_r)$$

olduğu gösterilirse ispat biter.

$$r_n := p_n + \delta_n \qquad (n = 0,1,\ldots,n_o - 1)$$

ile tanımlayalım öyle ki

$$r(x) = \sum_{n=o}^{\infty} r_n x^n = p(x) + \sum_{n=o}^{n_o - 1} \delta_n x^n$$

olsun. $\delta(x) = \sum_{n=o}^{n_o - 1} \delta_n x^n$ olmak üzere

$$r(x) = p(x) + \delta(x)$$

olur. Yardımcı Teorem II.1 e göre $\sum_{n=1}^{\infty} C_n \leqslant 1$ olmak üzere

$$\frac{1}{p(x)} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n = \sum_{n=o}^{\infty} \gamma_n x^n$$

olduğundan

$$\sum_{n=o}^{\infty} |\gamma_n| \leqslant 1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \leqslant 2$$

dır.

$$b(x) := \frac{r(x)}{p(x)} = \sum_{n=o}^{\infty} b_n x^n$$

olarak tanımlayalım. $r(x) = p(x)+\delta(x)$ olduğu kullanılarak,

$$\sum_{n=o}^{\infty} b_n x^n = 1+\frac{\delta(x)}{p(x)} = 1+\sum_{n=o}^{n_o-1} \delta_n x^n . \sum_{n=o}^{\infty} \gamma_n x^n$$

ve buradan da

$$\sum_{n=o}^{\infty} |b_n| \leqslant 1+\sum_{n=o}^{n_o-1} \delta_n . \sum_{n=o}^{\infty} |\gamma_n| \leqslant 1+2 \sum_{n=o}^{n_o-1} \delta_n =: H$$

elde edilir. O halde

$$\sum_{n=o}^{\infty} |b_n| \leqslant H$$

dır. Dolayısıyla $b_n = o(1) (n \to \infty)$ olur. Üstelik $R_n = r_o + r_1 + \ldots + r_n \neq 0$ olduğundan $b_n = o(R_n)$ $(n \to \infty)$ bulunur. Böylece Teorem II.12 nin ii) koşulu sağlanır. Diğer taraftan,

$$|b_o||P_n|+\dots+|b_n||P_o| = |b_o|P_n+\dots+|b_n|P_o \leqslant HP_n \leqslant HR_n$$

olur ki bu ise i) koşulunun sağlandığını gösterir. O halde Teorem II.12 ye göre $S_n \to s(N_r) \Longrightarrow S_n \to s(N_p)$ dir.

Aşağıdaki Teorem II.14 de, (p_n) ve (q_n) dizilerine karşılık gelen Np ve Nq Nörlund metodlarının denk olması için gerekli koşulları vereceğiz.

Teorem II.14 5 : Np ve Nq regüler Nörlund metodlar olsun. Bu takdirde Np≈Nq olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \;, \quad \frac{q(z)}{p(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

olmak üzere $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| < \infty$ olmasıdır.

İspat: "Gerekli Koşul": Np ≈ Nq olsun. Bu takdirde Np ⊆ Nq ve Nq ⊆ Np dir. Np ⊆ Nq olduğunu gözönüne alalım.

$$(Nq)_{nv} = \begin{cases} \dfrac{q_{n-v}}{Q_n} & , \quad v \leqslant n \\ 0 & , \quad v > n \end{cases} \qquad (Q_n = q_o+\dots+q_n \neq 0)$$

ve $\dfrac{1}{p(z)} = k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n z^n$ olmak üzere

$$(N_p^{-1})_{nv} = \begin{cases} k_{n-v} P_v & , \quad v \leqslant n \\ 0 & , \quad v > n \end{cases} \qquad , \qquad (P_n = p_o+\dots+p_n \neq 0)$$

olmak üzere $((Nq)_{nv})$ ve $((N_p^{-1})_{nv})$ matrislerine alışılmış matris çarpımı uygulanarak,

$$(N_q N_p^{-1})_{nv} = \sum_{\rho=v}^{n} \frac{q_{n-\rho}}{Q_n} . k_{\rho-v} P_v$$

$$= \frac{P_v}{Q_n} . \sum_{\rho=v}^{n} q_{n-\rho} k_{\rho-v} \quad , \quad (v \leqslant n) \qquad \text{(II.14)}$$

elde edilir. Yeteri kadar küçük $|z|$ ler için, Cauchy çarpımı kullanılarak

$$k(z).q(z) = \sum_{n=o}^{\infty} b_n z^n$$

$$\left(\sum_{n=o}^{\infty} k^n z^n \right) \left(\sum_{n=o}^{\infty} q_n z^n \right) = \sum_{n=o}^{\infty} b_n z^n$$

$$\sum_{n=o}^{\infty} \left(\sum_{v=o}^{n} q_{n-v} k_v \right) z^n = \sum_{n=o}^{\infty} b_n z^n$$

bulunur. Kuvvet serilerinin özdeşliği teoreminden,

$$b_n = \sum_{v=o}^{n} q_{n-v} k_v$$

$$b_{n-v} = \sum_{\rho=o}^{n-v} q_{n-v-\rho} k_\rho = \sum_{\rho=v}^{n} q_{n-\rho} k_{\rho-v} \qquad \text{(II.15)}$$

dır. (II.15), (II.14) de yerine yazılırsa,

$$(N_q N_p^{-1})_{nv} = \frac{P_v}{Q_n} . b_{n-v} \qquad (v \leqslant n)$$

elde edilir. Teorem II.11 e göre, $N_p \subseteq N_q$ olduğundan $((N_q N_p^{-1})_{nv})$ matrisi yakınsaklık korur. Dolayısıyla Teorem I.1.3^o e göre $((N_q N_p^{-1})_{nv})$ matrisi (RN) koşulunu sağlar. Yani;

$$\sum_{v=o}^{\infty} |(N_q N_p^{-1})_{nv}| = \sum_{v=o}^{n} |\frac{P_v}{Q_n}||b_{n-v}| = O(1) \quad (n \to \infty)$$

$$\sum_{v=o}^{n} |P_v||b_{n-v}| = O(Q_n) \quad (n \to \infty)$$

bulunur. $v = n$ için $P_n = O(Q_n)$ $(n \to \infty)$ olur. Aynı düşünce ile $N_q \subseteq N_p$ olduğu gözönüne alınır ve benzer işlemler yapılırsa $Q_n = O(P_n)$ $(n \to \infty)$ bulunur. $Np \simeq Nq$ olduğundan

$$\sum_{v=o}^{n_o} |b_v| |\frac{P_{n-v}}{P_n}| = O(\frac{Q_n}{P_n}) \leq K \quad (0 \leq n_o \leq n;\ K,\ n_o \text{ ve } n \text{ den bağımsız}) \quad (\text{II}.16)$$

dır. Diğer taraftan, regüler bir Nq-metodu için $\frac{P_{n-1}}{P_n} \to 1$ $(n \to \infty)$ olduğu gözönüne alınırsa;

$$\frac{P_{n-v}}{P_n} = \frac{P_{n-v}}{P_{n-v+1}} \cdot \frac{P_{n-v+1}}{P_{n-v+2}} \cdot \frac{P_{n-v+3}}{P_{n-v+3}} \cdot \cdot \cdot \frac{P_{n-1}}{P_n} \to 1 \quad (n \to \infty)$$

dır. Ayrıca her $n \in \mathbb{N}$ için $P_n \neq 0$ olduğundan

$$|\frac{P_n}{P_n}|, |\frac{P_{n-1}}{P_n}|, \ldots, |\frac{P_o}{P_n}| \neq 0$$

dır. O halde (II.16) dan ;

$$\sum_{v=o}^{n_o} |b_v| \leq K \text{ ve } (n \to \infty) \text{ için } \sum_{v=o}^{\infty} |b_v| < \infty \text{ elde edilir.}$$

Benzer işlemlerle $\sum_{v=o}^{\infty} |a_v| < \infty$ olduğu görülür.

"Yeterli Koşul": $\frac{q(z)}{p(z)} = \sum_{n=o}^{\infty} b_n z^n$, $\frac{p(z)}{q(z)} = \sum_{n=o}^{\infty} a_n z^n$ olmak üzere $\sum_{n=o}^{\infty} |a_n| < \infty$ ve $\sum_{n=o}^{\infty} |b_n| < \infty$ olsun. Önce $N_p \subseteq N_q$ olduğunu gösterelim. Bunun için de Teorem II.11'e göre,

$$(N_q N_p^{-1})_{nv} = \begin{cases} \frac{P_v b_{n-v}}{Q_n} & , \quad v \leqslant n \\ 0 & , \quad v > n \end{cases}$$

matrisinin regüler olduğunu göstermek yeterlidir.

$$p(z) = q(z) . \sum_{n=o}^{\infty} a_n z^n$$

$$= (\sum_{n=o}^{\infty} q_n z^n) (\sum_{n=o}^{\infty} a_n z^n)$$

$$\sum_{n=o}^{\infty} p_n z^n = \sum_{n=o}^{\infty} (\sum_{v=o}^{n} a_{n-v} q_v) z^n$$

dır. Kuvvet serilerinin özdeşliği teoreminden

$$p_n = \sum_{v=o}^{n} a_{n-v} q_v$$

bulunur. $A = a_o + a_1 + \ldots + a_n$ olmak üzere

$$P_n = \sum_{v=o}^{n} p_v = \sum_{v=o}^{n} (\sum_{\rho=o}^{v} a_{v-\rho} q_\rho)$$

$$= a_o q_o + (a_1 q_o + a_o q_1) + \ldots . + (a_n q_o + \ldots . + a_o q_n)$$

$$= q_o (a_o + \ldots + a_n) + \ldots + q_n a_o$$

$$= q_oA_n + \dots + q_nA_o$$

$$= \sum_{v=o}^{n} q_v A_{n-v}$$

$$|P_n| = |\sum_{v=o}^{n} A_{n-v} q_v|$$

$$\leqslant \sum_{v=o}^{n} |A_{n-v}||q_v|$$

$$\leqslant M. \sum_{v=o}^{n} |q_v| \qquad (M: = \sup|A_{n-v}|)$$

dır. Nq-metodu regüler olduğundan Teorem II.6 ya göre $\sum_{v=o}^{n} |q_v| = 0(Q_n)(n \to \infty)$ dır. Dolayısıyla $|P_n| = 0(Q_n)$ elde edilir. O halde

$$\sum_{v=o}^{n} |P_v||b_{n-v}| = \sum_{v=o}^{n} (|b_{n-v}||\sum_{\mu=o}^{v} p_\mu|)$$

$$< \sum_{v=o}^{n} (|b_{n-v}| \cdot \sum_{\mu=o}^{v} |p_\mu|)$$

$$= |b_n||p_o| + |b_{n-1}|(|p_o|+|p_1|) + \dots + |b_o|(|p_o|+\dots+|p_n|)$$

$$= |p_o|(|b_n|+\dots+|b_o|) + |p_1|(|b_{n-1}|+\dots+|b_o|) + \dots + |b_o||p_n|$$

$$= \sum_{\mu=o}^{n} |p_\mu| \sum_{v=\mu}^{n} |b_{n-v}|$$

$$= 0(P_n)$$

$$= 0(Q_n)$$

olur. Böylece (RN) koşulu sağlanır. Öte yandan (II.11) den; $\dfrac{\sum_{v=o}^{n} p_v b_{n-v}}{Q_n} = 1$

dır. Dolayısıyla (RS_1) sağlanır. $\sum_{n=o}^{\infty} |b_n| < \infty$ olduğundan $b_n = o(1)$ $(n \to \infty)$dır. Ayrıca Nq-regüler olduğundan $Q_n \neq o(1)(n \to \infty)$ dır. O halde $b_n = o(Q_n)(n \to \infty)$ olur. Buradan da $\dfrac{b_{n-v}P_v}{Q_n} \to 0$ $(n \to \infty$, v sabit) olur ki bu ise (C_o) koşulunun sağlandığını gösterir. (RN),(RS_1) ve (C_o) koşulları sağlandığından Teorem I.1.4^{o}e göre $((N_q N_p^{-1})_{nv})$ matrisi regülerdir. Böylece $Np \subseteq N_q$dır. Aynı düşünce ile $Nq \subseteq N_q$ olduğu elde edilir. O halde $Np \approx Nq$ dır.

II.2.3 Nörlund ve Cesàro Metodları

Çalışmamızın son kısmında Np-Nörlund metodu ile k.mertebeden Cesàro metodu (C_k-metodu) arasındaki ilişkileri vereceğiz. Buna geçmeden önce, kullanacağımız bazı tanım ve teoremleri verelim:

Z^-; Negatif tamsayıları göstermek üzere $n \in \mathbb{N}$ ve $r \in \mathbb{R}$ (veya $r \in \mathbb{C}$) keyfi sayılar olsun. Bu takdirde

$$A_n^r : = \frac{(r+1)(r+2)\ldots(r+n)}{n!} = \binom{n+r}{r} = \binom{n+r}{n}$$

olarak tanımlanır.

$|x|<1$ ve $p \in \mathbb{R} \setminus Z^-$ ise $\sum_{n=o}^{\infty} A_n^p x^n$ serisi mutlak yakınsak ve $\sum_{n=o}^{\infty} A_n^p x^n = \dfrac{1}{(1-x)^{p+1}}$ olduğu bilinir. Mutlak yakınsak iki serinin Cauchy çarpımı mutlak yakınsak ([2], sayfa 75, Teorem 27) olduğundan, $C_n = \sum_{v=o}^{n} A_{n-v}^p A_v^r$ olmak üzere $\sum_{n=o}^{\infty} C_n x^n$, $|x|<1$ için mutlak yakınsak ve

$$\left(\sum_{n=o}^{\infty} A_n^p x^n\right)\left(\sum_{n=o}^{\infty} A_n^r x^n\right) = \sum_{n=o}^{\infty} C_n x^n = \sum_{n=o}^{\infty}\left(\sum_{v=o}^{n} A_{n-v}^p A_v^r\right) x^n$$

dır. Ayrıca $\sum_{n=o}^{\infty} A_n^p x^n = \frac{1}{(1-x)^{p+1}}$ olduğu gözönüne alınırsa,

$$\sum_{n=o}^{\infty} A_n^{p+r+1} x^n = \sum_{n=o}^{\infty} \Big(\sum_{v=o}^{n} A_{n-v}^p A_v^r \Big) x^n$$

elde edilir. Kuvvet serilerinin özdeşlik teoreminden,

$$A_n^{p+r+1} = \sum_{v=o}^{n} A_{n-v}^p A_v^r$$

bulunur. Özel olarak p = o ise

$$\sum_{v=o}^{n} A_v^r = A_n^{r+1} \qquad \text{(II.17)}$$

dır. Şimdi, sonuç II.3 de kullanacağımız tanım ve teorem verelim.

Tanım II.3: $\Gamma(x)$ ile gösterilen ve

$$\Gamma(x) := \int_{o}^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \; ; \qquad 0<x<\infty$$

olarak tanımlanan fonksiyona Gamma fonksiyonu denir. Γ fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir:

i) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$; $0<x<\infty$

ii) $\Gamma(x+p) = (x+p-1)(x+p-z)\ldots x\Gamma(x)$; $x>0$, $p = 1,2,\ldots$

iii) $\Gamma(n+1) = n!$; $n = 0,1,2,\ldots$

Ayrıca Γ fonksiyonunun tanımı genişletilerek

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)} \quad ; \qquad -n<x<-n+1$$
$$n = 1,2,3,\ldots$$

şeklinde verilir ([7], sayfa 368-369).

Teorem II.16 :

i) $0\leqslant x\leqslant 1 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(n).n^x} = 1$ ([7], sayfa 389, Lemma 18.1)

ii) $0\leqslant x<\infty \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(n)n^x} = 1$ ([7], sayfa 390, Lemma 18.2)

iii) $-1<x<0 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(n)n^x} = 1$

İspat iii) $-1<x<0 \Rightarrow 0<x+1<1$ dır. i) den ;

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma((x+1)+n)}{\Gamma(n)n^{x+1}} = 1$$

dır. Diğer taraftan $n\geq 1$ için $x+n>0$ olduğundan,

$$\frac{\Gamma((x+1)+n)}{\Gamma(n)n^{x+1}} = \frac{\Gamma((x+n)+1)}{\Gamma(n)n^{x+1}} = \frac{(x+n)\Gamma(x+n)}{\Gamma(n)n^{x+1}}$$

dır. Böylece

$$\frac{(x+n)\Gamma(x+n)}{\Gamma(n)n^{x+1}} = \frac{\Gamma((x+1)+n)}{\Gamma(n)n^{x+1}} \to 1 \quad (n \to \infty)$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(n)n^x} \sim \frac{n}{x+n} \to 1 \quad (n \to \infty),$$

$$\frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(n)n^x} \to 1 \quad (n \to \infty)$$

bulunur.

Teorem II.16 ve Tanım II.3'den yararlanılarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç II.3 $r>-1$ ve $r \in \mathbb{R}$ ise $A_n^r \sim \dfrac{n^r}{\Gamma(r+1)}$ $(n \to \infty)$ dır.

İspat: $r>-1$ ise $r+1>0$ dır. Diğer taraftan Tanım II.3.ii)de $x: = r+1$ alınırsa,

$$\frac{\Gamma(r+1+n)}{\Gamma(r+1)} = (r+1)(r+2)\ldots(r+n) \tag{*}$$

elde edilir. Ayrıca $\Gamma(n+1) = n!$ olduğundan

$$\frac{A_n^r}{n^r} = \frac{(r+1)(r+2)\ldots(r+n)}{\Gamma(n+1)n^r} \tag{**}$$

dır. (*), (**) da yerine yazılırsa

$$\frac{A_n^r}{n^r} = \frac{\Gamma(r+1+n)}{\Gamma(r+1)\Gamma(n+1)n^r}$$

elde edilir. $m: = n+1$ olarak tanımlanırsa,

$$\frac{A_n^r}{n^r} = \frac{\Gamma(m+r)}{\Gamma(r+1)\Gamma(m)(m-1)^r} = \frac{\Gamma(m+r)}{\Gamma(r+1)\Gamma(m)m^r}\left(\frac{m}{m-1}\right)^r$$

bulunur. Böylece Teorem II.16 dan,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_n^r}{n^r} = \lim_{m\to\infty}\frac{\Gamma(m+r)}{\Gamma(r+1)\Gamma(m)m^r}\left(\frac{m}{m-1}\right)^r = \frac{1}{\Gamma(r+1)}$$

elde edilir. O halde $r>-1$, $r\in\mathbb{R}$ için $A_n^r \sim \dfrac{n^r}{\Gamma(r+1)}$ $(n\to\infty)$ dır.

Şimdi C_k-metodunu (k.mertebeden Cesàro metodunu tanımlayalım.

Tanım II.4 : Bir $s=(S_n)$ dizisi verilsin. $k>-1$ ve $k\in\mathbb{R}$ olmak üzere

$$C_n^k(s) := \frac{\sum\limits_{v=o}^{n}\binom{n-v+k+1}{n-v}S_v}{\binom{n+k}{n}} \to s \ (n\to\infty)$$

ise (S_n) dizisi s değerine C_k-limitlenebilir(k.mertebeden Cesàro limitlenebilir) denir ve $S_n \to s(C_k)$ şeklinde gösterilir. Eğer (S_n), $\sum\limits_{n=o}^{\infty} a_n$ serisinin kısmi toplam dizisi ve $S_n \to s(C_k)$ ise $\sum\limits_{n=o}^{\infty} a_n$ serisi s ye C_k-toplanabilir(k.mertebeden Cesàro toplanabilir) denir ve $\sum\limits_{n=o}^{\infty} a_n = s(C_k)$ şeklinde gösterilir.

Özel olarak $k>-1$ ve $k\in\mathbb{R}$ olmak üzere her $n\in\mathbb{N}$ için $p_n := \binom{n+k-1}{k-1} = A_n^{k-1}$ seçelim. (II.17)den, $P_n = \sum\limits_{v=o}^{n} p_v = A_n^k$ dır. O halde Tanım II.4 e göre, bu şekilde seçilen Np-metodundan C_k-metodu elde edilir. Ancak şu önemli noktaya işaret edelim: Öyle (p_n) dizileri bulabiliriz ki Np-metodu, C_k-metodundan daha zayıf ve daha kuvvetli olabilir. Yani (p_n) dizisinin durumuna göre Np ve C_k-metodları, farkli farklı metodlardır. Bu durumu aşağıdaki teoremle gerçekleyelim.

Teorem 17 [3]:

a) Herhangi bir C_k-Cesàro ortalamasından $(k>-1,\ k\in\mathbb{R})$ daha kuvvetli;

b) Pozitif mertebeden herhangi bir Cesàro ortalamasından daha zayıf Nörlund ortalaması bulunabilir.

İspat : a) $k>-1$ ve $k\in\mathbb{R}$ olmak üzere her $n\in\mathbb{N}$ için

$$p_n := \binom{n+k-1}{k-1} = A_n^{k-1}\ ,\quad q_n = e^{\sqrt{n}}$$

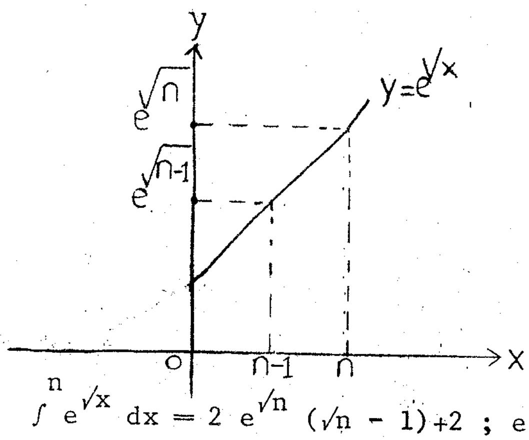
olarak tanımlayalım. (II.17) ve Teorem 15 birlikte düşünülürse

$$P_n = O(n^k)\quad (n\to\infty) \tag{II.18}$$

elde edilir. $Q_n = q_o+q_1+\dots+q_n$ olmak üzere

$$Q_n \sim (2\sqrt{n}\, e^{\sqrt{n}})\quad (n\to\infty) \tag{II.19}$$

dır. Gerçekten;



$$\int_o^n e^{\sqrt{x}}\,dx = 2\,e^{\sqrt{n}}(\sqrt{n}-1)+2\ ;\quad e^{\sqrt{n-1}} \leqslant \int_{n-1}^{n} e^{\sqrt{x}}\,dx \leqslant e^{\sqrt{n}}$$

olduğu kullanılır ve

$$\int_0^n e^{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,dx + \int_1^2 e^{\sqrt{x}}\,dx + \ldots + \int_{n-1}^n e^{\sqrt{x}}\,dx$$

eşitliği gözönüne alınırsa

$$e^{\sqrt{o}} + e^{\sqrt{1}} + \ldots + e^{\sqrt{n-1}} \leqslant 2e^{\sqrt{n}}(\sqrt{n}-1)+2 \leqslant e^{\sqrt{1}} + e^{\sqrt{2}} + \ldots + e^{\sqrt{n}}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan da

$$Q_n - e^{\sqrt{n}} \leqslant 2e^{\sqrt{n}}(\sqrt{n}-1)+2 \leqslant Q_n - e^{\sqrt{o}}$$

$$\frac{Q_n - e^{\sqrt{n}}}{2\sqrt{n}e^{\sqrt{n}}} \leqslant \frac{2e^{\sqrt{n}}(\sqrt{n}-1)+2}{2\sqrt{n}\, e^{\sqrt{n}}} \leqslant \frac{Q_n - e^{\sqrt{o}}}{2\sqrt{n}\, e^{\sqrt{n}}}$$

olur. Bu son eşitsizlikte $(n \to \infty)$ için limit alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Q_n}{2\sqrt{n}\, e^{\sqrt{n}}} \leqslant 1 \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{Q_n}{2\sqrt{n}\, e^{\sqrt{n}}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Q_n}{2\sqrt{n}\, e^{\sqrt{n}}} = 1$$

olur ki bu ise $Q_n \sim (2\sqrt{n}\, e^{\sqrt{n}})(n \to \infty)$ olduğunu gösterir.

Diğer taraftan $|x|<1$ için $p(x) = \sum_{n=o}^{\infty} p_n x^n$, $q(x) = \sum_{n=o}^{\infty} q_n x^n$ olmak üzere,

$$b(x) := \sum_{n=o}^{\infty} b_n x^n = \frac{q(x)}{p(x)}$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda $p(x) = \sum_{n=o}^{\infty} A_n^{k-1} x^n = \frac{1}{(1-x)^k}$ olduğundan,

$$b(x) = (1-x)^k q(x)$$

$$= \left(\sum_{n=o}^{\infty} (-1)^n \binom{k}{n} x^n\right)\left(\sum_{n=o}^{\infty} e^{\sqrt{n}} x^n\right)$$

dır. Cauchy çarpımı ile,

$$b(x) = \sum_{n=o}^{\infty}\left(\sum_{v=o}^{n} (-1)^v \binom{k}{v} e^{\sqrt{n-v}}\right)x^n$$

bulunur. Kuvvet serilerinin özdeşliği teoreminden,

$$b_n = \sum_{v=o}^{n} (-1)^v \binom{k}{v} e^{\sqrt{n-v}}$$

elde edilir. $n>k$ için $\binom{k}{n} = 0$ olduğundan

$$b_n = \sum_{v=o}^{\infty} (-1)^v \binom{k}{v} e^{\sqrt{n-v}} \tag{II.20}$$

dır. Öte yandan

$$\left(1 - e^{-\frac{1}{2\sqrt{n}}}\right) \sim \frac{1}{2\sqrt{n}} \quad (n \to \infty)$$

olduğundan

$$\left(1 - e^{-\frac{1}{2\sqrt{n}}}\right)^k \sim 2^{-k}\, n^{-\frac{1}{2}k} \quad (n \to \infty) \tag{II.21}$$

dır. Ayrıca

$$(1-e^{-\frac{1}{2\sqrt{n}}})^k = \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \binom{k}{v} e^{-\frac{v}{2\sqrt{n}}}$$

olduğu (II.21) de kullanılırsa,

$$\left(\sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \binom{k}{v} e^{-\frac{v}{2\sqrt{n}}}\right) \sim 2^{-k} n^{-\frac{1}{2}k} \qquad (n \to \infty) \qquad \text{(II.22)}$$

dır. $\dfrac{1}{2\sqrt{n}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{n-v}+\sqrt{n}}$ $(n \to \infty)$ olduğundan,

$$\left(\sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \binom{k}{v} e^{-\frac{v}{2\sqrt{n}}}\right) \sim \left(\sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \binom{k}{v} e^{-\frac{-v}{\sqrt{n-v}+\sqrt{n}}}\right) \; (n \to \infty) \qquad \text{(II.23)}$$

dır. $e^{-\frac{v}{\sqrt{n-v}+\sqrt{n}}} \sim e^{\sqrt{n-v}-\sqrt{n}}$ $(n \to \infty, v \text{ sabit})$ olduğundan

$$\left(\sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \binom{k}{v} e^{\frac{-v}{\sqrt{n-v}+\sqrt{n}}}\right) \sim \left(\sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \binom{k}{v} e^{\sqrt{n-v}-\sqrt{n}}\right) (n \to \infty,\ v \text{ sabit}) \qquad \text{(II.24)}$$

dır.

(II.23) ve (II.24) den;

$$\left(\sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \binom{k}{v} e^{-\frac{v}{2\sqrt{n}}}\right) \sim \left(\sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \binom{k}{v} e^{\sqrt{n-v}-\sqrt{n}}\right) (n\to\infty, v \text{ sabit}) \qquad \text{(II.25)}$$

dır. (II.22) ve (II.25) den;

$$\left(\sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \binom{k}{v} e^{\sqrt{n-v}-\sqrt{n}}\right) \sim 2^{-k} n^{-\frac{1}{2}k} \qquad (n \to \infty,\ v \text{ sabit})$$

ve buradan da

$$\left(\sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \binom{k}{v} e^{\sqrt{n-v}} \right) \sim e^{\sqrt{n}}\, 2^{-k}\, n^{-\frac{1}{2}k} \qquad (n \to \infty, v \text{ sabit})$$

olur. Bu ise (II.20) den;

$$b_n \sim e^{\sqrt{n}}\, 2^{-k}\, n^{-\frac{1}{2}k} \tag{II.26}$$

olduğunu gösterir.

Yukarıdaki şekilde seçilen Np-metodunun k.mertebeden Cesaro ortalaması olduğunu daha önce söylemiştik. O halde $N_p \subseteq N_q$ olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için de Teorem II.12 den yararlanacağız.

(II.19) ve (II.26) dan ;

$$\frac{b_n}{Q_n} \sim \frac{2^{-k}\, n^{-\frac{1}{2}k}\, e^{\sqrt{n}}}{2\sqrt{n}\; e^{\sqrt{n}}} = \frac{1}{2^{k+1}\, n^{\frac{1}{2}(k+1)}} \to \quad (n \to \infty)$$

dır. Dolayısıyla Teorem II.12 nin ii)koşulu sağlanır. Şimdi de i) koşulunun sağlandığını gösterelim: (II.18) ve (II.26) dan;

$$\left(\sum_{m=1}^{n-1} |b_{n-m}|\,|P_m| \right) \sim \left(\sum_{m=1}^{n-1} 2^{-k}\, (n-m)^{-\frac{1}{2}k}\, m^k \right) \quad (n \to \infty)$$

dır. O halde

$$\left(\sum_{m=1}^{n-1} 2^{-k} (n-m)^{-\frac{1}{2}k}\, m^k \right) = O(\sqrt{n}\; e^{\sqrt{n}}) \quad (n \to \infty)$$

olduğunu gösterirsek ispat tamamlanır.

$$\sqrt{n}-\sqrt{n-m} > \frac{m}{2\sqrt{n}} \Longrightarrow e^{\sqrt{n-m}} < e^{\sqrt{n}}\, e^{\frac{-m}{2\sqrt{n}}}$$

olduğu gözönüne alınırsa,

$$\frac{\sum_{m=1}^{n-1} e^{\sqrt{n-m}}\,(n-m)^{-\frac{1}{2}k}\, m^k}{e^{\sqrt{n}}\, n^{-\frac{1}{2}k} \sum_{m=1}^{n-1} m^k\, e^{\frac{-m}{2\sqrt{n}}}} < \frac{\sum_{m=1}^{n-1} e^{\sqrt{n}}\, e^{\frac{-m}{2\sqrt{n}}}\,(n-m)^{-\frac{1}{2}k}\, m^k}{e^{\sqrt{n}}\, n^{-\frac{1}{2}k} \sum_{m=1}^{n-1} m^k\, e^{\frac{-m}{2\sqrt{n}}}}$$

$$< \frac{e^{\sqrt{n}}\, n^{-\frac{1}{2}k} \sum_{m=1}^{n-1} m^k\, e^{\frac{-m}{2\sqrt{n}}}}{e^{\sqrt{n}}\, n^{-\frac{1}{2}k} \sum_{m=1}^{n-1} m^k\, e^{\frac{-m}{2\sqrt{n}}}} = 1$$

bulunur. Böylece, (II.21) kullanılarak;

$$\sum_{m=1}^{n-1} e^{\sqrt{n-m}}\,(n-m)^{-\frac{1}{2}k}\, m^k = 0\Big(e^{\sqrt{n}}\, n^{-\frac{1}{2}k} \sum_{m=1}^{n-1} m^k\, e^{\frac{-m}{2\sqrt{n}}}\Big)$$

$$= 0\Big(e^{\sqrt{n}}\, n^{-\frac{1}{2}k} \sum_{m=1}^{\infty} m^k\big(e^{\frac{-1}{2\sqrt{n}}}\big)^m\Big)$$

$$= 0\Big(e^{\sqrt{n}}\, n^{-\frac{1}{2}k}\big(1-e^{\frac{-1}{2\sqrt{n}}}\big)^{-k-1}\Big)$$

$$= 0\Big(e^{\sqrt{n}}\, n^{-\frac{1}{2}k}\, 2^{-(-k-1)}\, n^{-\frac{1}{2}(-k-1)}\Big)$$

$$= 0\Big(e^{\sqrt{n}}\, n^{-\frac{1}{2}k}\, n^{\frac{1}{2}(k+1)}\Big)$$

$$= 0\big(\sqrt{n}\, e^{\sqrt{n}}\big)$$

elde edilir. Bu ise gösterilmesi gerekeni verir.

b) $k>0$, $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için

$$p_n := \frac{1}{n+1} \quad \text{ve} \quad q_n := \binom{n+k-1}{k-1} \; (k<1)$$

olarak tanımlayalım. Bu şekilde seçilen Nq-metodunun C_k-metodu olduğunu biliyoruz. Buna göre $N_p \subseteq N_q$ olduğunu göstermeliyiz. Bunun için de Teorem II.13 ün koşullarının sağlandığını göstermek yeterlidir.

i) Np ve Nq-metodları regülerdir.

ii) $p_o = 1$, $p_n > 0$ ve

$$n<n+1 \Longrightarrow n+n(n+1) < (n+1)+n(n+1)$$

$$\Longrightarrow n(n+2) < (n+1)^2$$

$$\Longrightarrow p_n^2 < p_{n-1}\, p_{n+1}$$

dır.

iii) $k>0$ olduğundan $q_n>0$ dır.

iv) $n_o := [[\frac{1-k}{k}]]$ (n_o, $\frac{1-k}{k}$ nın tam kısmını gösterir).

olarak tanımlayalım.

$$n > \frac{1-k}{k} \Longrightarrow k(n+1) > 1$$

$$\Longrightarrow n^2 + k(n+1) > 1+n^2$$

$$\Longrightarrow n^2 - 1+k(n+1) > n^2$$

$$\Rightarrow (n+1)(n-1+k) > n^2$$

$$\Rightarrow \frac{n}{n+1} < \frac{n+k-1}{n}$$

$$\Rightarrow \frac{p_n}{p_{n-1}} < \frac{q_n}{q_{n-1}}$$

dır. Yukarıdaki koşullar sağlandığından Teorem II.13 e göre C_k-metodundan $(k>0)$ daha zayıf Np-metodu bulunabilir.

Aşağıda vereceğimiz sonuç, Nq-Nörlund ortalamasının C_1-Cesàro ortalamasından daha kuvvetli olmasının koşulunu vermektedir.

Sonuç II.4[3]: Nq bir regüler Nörlund metodu ve (q_n) artan bir dizi olsun. Bu takdirde

$$S_n \to s(C_1) \quad \text{ise} \quad S_n \to s(N_q)$$

dır.

İspat: Her $n \in \mathbb{N}$ için $p_n = 1$ seçilirse $P_n = n+1$ olur ki bu durumda N_p-metodu, C_1-metodu olur. O halde $S_n \to s(Np)$ ise $S_n \to s(Nq)$ olduğunu göstermeliyiz. Bunun için de Teorem II.12 nin koşullarının sağlandığını göstermek yeterlidir. $|x|<1$ için $p(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n x^n$ ve $q(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} q_n x^n$ olmak üzere $p(x) = \frac{1}{1-x}$ dır. Ayrıca

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b(x) := \frac{q(x)}{p(x)}$$

$$= (1-x).q(x)$$

$$= (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

$$= \sum_{n=o}^{\infty} (q_n - q_{n-1})x^n \qquad (q_{-1} = 0)$$

olur. Kuvvet serilerinin özdeşliği teoreminden

$$b_o = q_o \quad , \quad b_n = q_n - q_{n-1} \qquad (n = 1,2,\ldots)$$

dır. Üstelik (q_n) artan bir dizi olduğundan

$$|b_o|P_n+|b_1|P_{n-1}+\ldots+|b_n|P_o = q_o(n+1)+(q_1- q_o)n+\ldots+(q_n - q_{n-1})$$
$$= q_o+\ldots+q_1 = Q_n$$

elde edilir. Dolayısıyla i)koşulu sağlanır. Nq regüler olduğundan Sonuç II.2 den,

$$\frac{b_n}{Q_n} = \frac{q_n- q_{n-1}}{Q_n} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

dır. Böylece ii) sağlanır.

KAYNAKLAR

[1] Cooke,R.G., "Infinite Matrices and Sequence Spaces" - Dover Publications Inc. New York.-1955

[2] Ferrar,W.L.,"Convergence"- Oxford University Press, Amen House, London E.C.4.-1963

[3] Hardy,G.H., "Divergent Series"- Oxford University Press, Amen House, London E.C.4.-1963

[4] Knopp,K., "Theory and Application of Infinite Series"-English ed., London, 1964.

[5] Peyerimhoff,A.,"Lecture Notes in Mathematics"-Springer Verlag-1969

[6] Powel,R.E.; Shah,S.M., "Summability Theory and Its Applications"-Van Nostrand Reinhold Company-1972

[7] Widder,David V.,"Advanced Calculus"-Prentice-Hall,Inc.-1961