KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FİZİK ANABİLİM DALI

FİZİK PROGRAMI

ELEKTROZAYIF ETKİLEŞMELERİN AYAR KURAMLARINDA LEPTONLARIN YAPI ÇARPANLARI

Coşkun AYDIN

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce

"Doktor"

Ünvanının Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 30 Mart 1989

Tezin Sözlü Savunma Tarihi : 09 Haziran 1989

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Mehmet ABAK

Jüri Üyesi : Prof.Dr. Z.Zekeriya AYDIN

Jüri Üyesi : Doç.Dr. Hüseyin DİRİM

Enstitü Müdürü: V. Doç.Dr. İlhan SUNGUR

MART 1989

TRABZON

ÖNSÖZ

Temel taneciklerin zayıf etkileşmelerinin ayar kuramları Weinberg ve Salam'ın çalışmaları ile başlamıştır. Bu kuramın renormalize bir kuram olması zayıf etkileşme süreçlerinin yüksek mertebe hesaplarını olanaklı yapmıştır.

Elektrozayıf kuram ile sağ-elli nötrinoyu da öngören genişletilmiş elektrozayıf kuramda leptonların yapı çarpanları (CP-korunumlu durumda) hesaplandı.

Problemi önererek gelişmesini yakından izleyen, yazıldıktan sonra okuma zahmetine katlanan ve lisans öğreniminden beri yetişmemde emeği geçen hocam Prof.Dr. Mehmet Abak'a sayısız yararlı tartışma ve yardımlarından ötürü teşekkürü borç bilirim.

Türkiye'de fiziğin uluslararası düzeyde gelişmesine büyük katkıları olduğu tartışmasız kabul edilen ve bu çalışmamızı da destekleyen hocaların hocası Prof.Dr. Asım Orhan Barut'a bize sağladığı olanaklar, Turan Barut Fizik Vakfına da mali desteği için, yetişmemde emeği geçen teşvik edici önerileri ile çalışmalarımızı destekleyen öğrenciliğimiz süresince yetişmemiz için hertürlü özveride bulunan değerli hocalarıma teşekkür ederim.

Ayrıca, bu tezi büyük bir sabır ve özenle daktilo eden Sayın Temel Tosun'a teşekkür ederim.

Trabzon, Mart 1989 Coşkun AYDIN

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Elektromagnetik ve zayıf etkileşmelerin birleştirilmiş zayıf ve elektromagnetik etkileşmeler şeklinde Weinberg ve Salam tarafından formüle edilmesi (Weinberg-Salam modeli, standart model, elektrozayıf kuram) ve bu kuramın renormalize olduğunun 't Hooft tarafından gösterilmesinden sonra yüksek enerji fiziğinde çok hızlı gelişmeler oldu. Kuramın renormalize bir kuram olması zayıf etkileşme süreçlerinin yüksek mertebe katkılarının hesaplanmasını olanaklı yapmaktadır.

Elektrozayıf kuramda sağ-elli nötrino olmadığından nötrinolar Dirac anlamında kütle kazanamazlar. Elektrozayıf kuramı sağ-elli nötrino içerecek şekilde genişleterek nötrinolara kütle kazandırılabilir (Dirac nötrinoları).

Bu tezde leptonların zayıf etkileşmeler sonucu kazandıkları elektromagnetik özellikleri CP'nin korunduğu ayar kuramında incelendi: Elektrozayıf kuramda nötrinonun anapol moment yapı çarpanı ve genişletilmiş elektrozayıf kuramda da yüklü ve yüksüz (nötrino) leptonların anapol ve magnetik moment yapı çarpanları 't Hooft-Feynman ayarında boyutsal düzenleme kullanılarak hesaplandı. Sayısal sonuç elde edebilme amacıyla uzun ve karışık analitik ifadeler yerine integrantları seriye açarak (m^2/M_W^2) mertebesinde terimlerle yetindik.

SUMMARY

Weak and electromagnetic interactions were unified as the electroweak theory by Weinberg and Salam. After 't Hooft showed that the theory is renormalizable rapid developments took place in high energy physics. Because of renormalizability higher-order effects can be calculated.

In the electroweak theory, the neutrinos are predicted to be massless (Weyl neutrinos). Most extensions of the electroweak theory predict non-zero neutrino masses: Extensions of the electroweak theory involving new SU(2) singlet neutral fermions (the right-handed neutrino partners needed for Dirac mass terms) or new Higgs representations (to generate Majorana masses).

We assume that the neutrinos have non-zero masses, there exists a mixing in the leptonic sector as in the quark sector of the electroweak theory. Thus, we introduce, the analogous of the Kōbayashi-Maskawa matrix, U mixing matrix in the leptonic sector.

In the CP-conserving theory the leptons are taken to have four static couplings with an external electromagnetic field. There are described by its charge (the charge of the neutrino is zero), charge radius, magnetic moment (which vanish for massless neutrino) and anapole moment (which is different from zero in the massless limit). The anapole moment term arises only as a result of the weak interaction and gives rise to a non-relativistic interaction energy of the form $a \cdot \vec{\sigma}$ Curl $\vec{B}$ in a magnetic field $\vec{B}$.

In this thesis, we study the electromagnetic properties of leptons arising from weak interactions. Using the dimensional regularization and 't Hooft-Feynman gauge, we calculated the form factors of the neutrinos in

the gauge theory of the electroweak interactions. Similarly, in the extented electroweak theory we calculated the form factors of the Dirac neutrinos and charged leptons. Also the magnetic moment of the Dirac neutrinos is calculated. In these calculations in order to obtain a numerical result we have retained only the terms up to the order of (m^2/M_W^2) in the series expansions of the integrands.

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Yüksek enerji veya parçacık fiziği maddenin en temel yapı taşlarının neler olduğunu ve bu yapı taşlarının kendi aralarında ve diğer parçacıklarla nasıl etkileştiklerini konu alan fizik dalıdır.

Bugün, doğada bilinen temel parçacıklar (foton, leptonlar, kuarklar,... olarak sınıflandırılırlar) arasında şiddet sırasına göre (beşinci kuvveti gözardı edersek) kuvvetli, elektromagnetik, zayıf ve gravitasyonel (kütleçekim) olmak üzere dört temel etkileşme vardır. Ancak bu etkileşmelerin abeliyen olmayan bir kuramda birleştirilmeleri çalışmaları devam etmektedir.

Etkileşmelerin birleştirilmesi fikri bir hayli eskidir. Nitekim elektrik ve magnetik etkileşmeler elektromagnetik etkileşmeler şeklinde birleştirildi. Elektromagnetizma denilen bu yeni bilim dalı, başta Faraday (1791-1867) olmak üzere birçok araştırıcı tarafından bir gelişme süreci içerisine sokulmuştur. Maxwell (1831-1879) elektromagnetizma yasalarını bugünkü bilinen şekli ile ifade etmiştir. Elektromagnetizmada Maxwell denklemleri olarak bilinen bu yasalar klasik mekanikte Newton denklemlerinin oynadığı rolü oynar. Maxwell denklemlerine dayanan fizik koluna klasik elektromagnetizma denir. Klasik elektromagnetizmanın, özel görelilik ve kuantum mekaniğinin uygun bir karışımından oluşan kuantum elektrodinamiği; çok küçük boyutlara kadar problemlere doğru yanıt veren bir bilim dalıdır. Klasik elektrodinamik, vektör potansiyelin temel bir alan olarak görüldüğü Maxwell denklemleri ile formüle edildi. Bilindiği gibi vektör potansiyel, kuramın yerel ayar değişmezliğine göre bir ayar alanı olarak düşünülür. Kuramın kovariyant kuantlanması işin içine belirsiz metriği sokarak uyumlu bir şekilde gösterilmiş ve kuram kuantum elektrodinamiği (QED) adını almıştır. QED renormalize ayar alan kuramıdır(Tati ve Tomonaga, 1948; Fukuda ve diğ.,1949; Schwinger, 1948,1949; Feynman, 1948,1949). Yüksek mertebeden hesaplar (magnetik moment,...vs.) çeşitli duyarlı deneylerle geniş ölçüde denenmiştir.

1967 yılına kadar zayıf etkileşmelerin elektromagnetik etkileşmeler kuramı gibi renormalize bir kuramı yoktu. Zayıf etkileşmelerin esasını Fermi'nin 1932'lerde çekirdeklerin β-bozunmalarını açıklamak için ileri sürdüğü evrensel Fermi etkileşmesi oluşturur. Nötrinoların varlığı ilk kez 1931'lerde çekirdeklerin β-bozunmalarında enerji-momentum korunumunu yerine getirmek için Pauli tarafından öngörüldü. Fermi, Pauli'nin bu öngörüsünü kullanarak kendi adıyla anılan ve çekirdeklerin β-bozunmalarını açıklayan ünlü kuramını ortaya koydu (Evrensel Fermi etkileşmesi).

T.D.Lee ve C.N.Yang'ın zayıf etkileşmelerde paritenin korunmadığını kuramsal ve C.S. Wu'nun bunu deneysel olarak göstermelerinden sonra Fermi kuramı vektör-eksenel (aksiyal) vektör (V-A) şeklinde formüle edildi (Gell-Mann ve Feynman, Sundarshan ve Marshak, 1958; Cabibbo,1963). Bu şekilde formüle edilen Fermi etkileşmesi renormalize değildi ve yalnız düşük enerji-momentum geçişleri için geçerlidir ve yüksek mertebeden süreçleri betimleyememektedir. V-A kuramında dört parçacık aynı bir uzay-zaman noktasında etkileşir. Fenomolojik anlamda oldukça başarılı olmasına karşın üniteritenin bozulması ve yüksek mertebeden zayıf etkileşmelerle uğraşmamızı engelleyen renormalize edilememesi nedeniyle Fermi kuramı doyurucu değildir.Dört fermiyon etkileşmesinin yerine evrenselliği elde etmek için kütleli arabozon olanları ile oluşturulan zayıf etkileşme kuramları önerilmiş (Lee ve diğ., 1949), üniterliğin yeniden kurulmasına karşın kuram bu hali ile renormalize değildir. Fakat aravektör parçacıklı iyi bilinen bir kuram (kuantum elektrodinamiği) vardır. Zayıf vektör alanları için renormalize bir kuramı ancak

QED'deki ayar alanı olan elektromagnetik alan gibi fakat abeliyen olmayan bir ayar alanı kullanılarak kurulabildi. Zayıf vektör alanlarının, dört fermiyon etkileşmesini etkin olarak yeniden oluşturmak için kütleli olmaları gerekirken, ayar alanları ayar değişmezliği için kütlesiz olmalıdırlar. Bu aykırılığı çözmek ve elektromagnetik ve zayıf etkileşmeleri birleştirmek için Glashow SU(2)xU(1) ayar simetrisini kullanarak bir görüş önermiştir (Glashow, 1961). Ayar alanlarına kütle kazandırma mekanizması (Higgs mekanizması) Higgs tarafından ayar simetrisinin kendiliğinden bozulması durumunda bulunmuştur (Higgs, 1964, 1966). Higgs mekanizmasının abeliyen olmayan bir ayar alan kuramına uygulanması ile zayıf etkileşmelerin gerçekçi bir modeli Weinberg ve ondan bağımsız olarak Salam tarafından ileri sürülmüştür (Weinberg,1967; Salam,1968). Zayıf etkileşmelerin gerçekçi bir modelini oluşturmak için zayıf ve elektromagnetik etkileşmeleri abeliyen olmayan bir ayar alan kuramında birleştirmenin gerekli olduğuna dikkat edilmelidir. Abeliyen olmayan ayar alan kuramlarının ayar simetrisinin kendiliğinden bozulması ile birlikte bakıldığında renormalize edilebilirliğini 't Hooft 1971'de kanıtladı. Weinberg ve Salam modeli deneysel olarak da kanıtlanmıştır. Weinberg-Salam modeline standart kuram ya da elektrozayıf kuram da denir.

Kuvvetli etkileşmelerde renkli kuarkların (fermiyon) ve renkli gluonların (ayar alanları) etkileşmesi abeliyen olmayan ayar kuramı ile betimlenir (Fritzsch ve diğ., 1973). Kuantum renk dinamiği (QCD) olarak bilinen bu kuramda kuarklar arasındaki etkileşmeler kısa mesafelerde sıfıra gidecek kadar zayıflamaktadır (asimtotik özgürlük). Bu model ile kuvvetli etkileşmelerde de (hiç olmazsa kısa-mesafe olaylarında) tedirgeme (pertürbasyon) hesabı kullanma olanağı doğmaktadır (Buras, 1981).

Elektromagnetik ve zayıf etkileşmelerin 100 GeV'lik enerji mertebesinde aynı şiddete sahip olmalarının yanında kısa bir hesap sonucunda elektrozayıf etkileşmeleri karakterize eden bağlanma (çiftlenim) sabiti ile kuvvetli etkileşmelerin çiftlenim sabitinin yaklaşık 10^{15} GeV'lik enerjilere ulaşıldığında aynı değerde oldukları görülür. Bu enerjilerden daha yüksek enerjilere gidilirse her üç etkileşme kuvvetini birleştiren bir kuramın varolacağı düşünülmüştür. Büyük birleştirme kuramı (GUT) adı verilen bu tür kuramların $SU(3)_C xSU(2)xU(1)$ simetrisinin içine yerleştirilebileceği bir G-simetri grubunu kabul eden kuantum ayar alan kuramı olması, en olası durumdur. Bugün en başarılı görülen büyük birleştirme kuramı Georgi ve Glashow tarafından inşa edilmiş olan SU(5), Fritzch ve Minkowski tarafından inşa edilmiş olan SO(10) ile Gürsey ve arkadaşları tarafından inşa edilmiş olan E_6 kuramıdır. Bunlardan en tutarlı görülen kuram SU(5)'dir.

Kuvvetli etkileşmelerin SU(3) renk ayar grubu (kuantum renk dinamiği), zayıf ve elektrodinamik etkileşmelerin ise zayıf SU(2)xU(1) grubu (Weinberg-Salam modeli) ayar dönüşümleri altında değişmezliği düşük enerjilerde parçacık fiziğindeki gözlemlerin pek çoğu ile uyuşmaktadır.

Günümüzde lepton ve kuarklardan (fermiyonlar) oluşan basit parçacıklar ve bunlar arasındaki dört temel etkileşme kuvveti aracılığı ile atom çekirdeklerinden galaksilere değin evrendeki tüm madde yapısının açıklanabilmesi ümit edilmektedir. Fizik tarihinde doğada bilinen parçacıklar arasındaki etkileşmeleri birleştirme eğilimi anımsandığında, varılan bu noktadan bir adım daha ileri giderek tüm parçacıkları bir sınıfa indirgeyerek bunlar arasında tek bir kuvvetin etkin olduğu birleşik modellerin araştırılması doğal karşılanmalıdır.

Büyük birleştirme kuramlarında gravitasyonel kuvvetler, çekirdek içi olayların betimlenmesinde tümden gözardı edilebileceği vasayılmaktadır.

Birleştirmeyi bir adım daha ileriye götürerek, gravitasyonu da içine alan ayar alan kuramlarının (süper büyük birleştirme kuramları) oluşturulması için çalışılmakta ve son yıllarda sicim ve süpersicim kuramları ve belki de bu kuramları içerecek 10^{19} GeV'lik enerjide tüm etkileşmeleri birleştirecek başka bir kuram doğayı betimleyecektir.

Elektrozayıf etkileşmelerle ilgilendiğimizden elektrozayıf etkileşmeyi birazcık daha ayrıntılı olarak özetleyelim: Elemanter parçacıkların elektrozayıf etkileşmelerini betimleyen birçok model vardır. Modellerin farklılığı tipik olarak kuramın yüksüz akım yapısı ile yansıtılır. Yüksüz akım yapısının deneysel çözümlenmesinden sonra Weinberg-Salam'ın esas (orijinal) modeli sonuçta elektrozayıf kuramının biricik modeli olarak seçilmiştir. Önce yalnızca leptonlar için formüle edilen Weinberg-Salam modeli (o zaman iki tür nötrinonun bilinmesine karşın lepton-kuark eşleşmesi tam değildi) daha sonra kuarkları da içerecek şekilde genişletildi. Günümüzde lepton ve kuarkların istenilen sayıda nesillerini dizisel biçimde (seri olarak) kuramda toplamak olasıdır. Sol-elli (sağ-elli) lepton ve kuarklar SU(2)xU(1) grubunun bir ikilisine (ve birlisine) yerleştirilir. Günümüzde fermiyonların üç nesil olduğu biliniyor:

$$\begin{pmatrix}\nu_e\\ e\end{pmatrix}_L \qquad \begin{pmatrix}\nu_\mu\\ \mu\end{pmatrix}_L \qquad \begin{pmatrix}\nu_\tau\\ \tau\end{pmatrix}_L$$

$$\begin{matrix}\nu_{eR} & \qquad \nu_{\mu R} & \qquad \nu_{\tau R}\\ e_R & \qquad e_R & \qquad \tau_R\end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix}U\\ d'\end{pmatrix}_L \qquad \begin{pmatrix}C\\ s'\end{pmatrix}_L \qquad \begin{pmatrix}t\\ b'\end{pmatrix}_L$$

$$\begin{matrix}U_R & \qquad C_R & \qquad t_R\\ d_R & \qquad s_R & \qquad b_R\end{matrix}$$

R ve L sırasıyle sağ ve sol-elli izdüşümlere $(\frac{1\pm\gamma_5}{2})$ karşılık gelir ve ilk iki nesili alırsak d' ve s' karışmış Cabibbo durumlarını (Cabibbo, 1963), Üç nesli aldığımızda d', s' ve b' Kobayashi-Maskawa (1973) karışımını ifade eder.

Genelde nötrinolar kütle kazanabilecekleri için yukarıdaki sıralamada sağ-elli nötrinolar da alındı.

Madde ile zayıf etkileşmeleri sonucu nötrino süreçlerinin tesir kesitleri çok küçüktür ($\sigma \sim 10^{-44}$ cm^2). Bu nedenle nötrinolar deneysel olarak ancak 1953'lerde Reines ve Cowan tarafından büyük teknik güçlüklerle kanıtlanabildiler.

Astrofizikçilerin hesaplarına göre insan vücudunun her cm^2'sinden saniyede 70 milyar nötrino geçer. İnsanın bundan hiç etkilenmemesi nötrinoların madde ile zayıf etkileşmelerinin bir sonucudur. Yine 1 MeV enerjili nötrinolar 10^{22} cm'lik bir su tabakasını geçebilecek girginliktedirler.Nötrinoların madde ile zayıf etkileşmeleri her nekadar onları fizik için ilginç yapmakta ise de, diğer taraftan deneysel olarak kanıtlanmalarını zorlaştırmaktadır. (1931'de Pauli tarafından varlıkları öngörülen nötrinolar ancak 22 yıl sonra 1953 de Reines ve Cowan tarafından deneysel olarak kanıtlanabildiler). 15-20 yıldan beri fiziğe "Nötrino Astrofiziği" diye bir kavram girmiştir.

Nötrinolar yıldız evrimlerinin çeşitli evrelerinde yıldız maddesi ile zayıf etkileşme özelliği sonucu, önemli rol oynarlar. Yıldızda evrim sırasında meydana gelen nötrinolar madde ile etkileşmeksizin kolayca yıldızı terkederler. Küçük tesir kesitlerine karşın nötrinoların yıldızıl gelişmelerde önemli rol oynayabilecekleri daha 1941'lerde Gamow ve Schönberg tarafından gösterildi.

Nötrinoların kütleli olup olmadığı sorusu parçacık fiziği ve astrofiziğin en güncel konusunu oluşturmaktadır. Nötrino kütlesinin astrofizik ve kozmoloji için büyük önemi vardır.

V-A kuramında ve ayar kuramlarında nötrinoların özellikleri birçok fizikçi tarafından araştırılmıştır. V-A kuramında ve minimal SU(2)xU(1) modelinde nötrinolar iki bileşenli, sol-elli Weyl nötrinolarıdırlar.

Deneysel gözlemlerden nötrino kütlesinin sıfırdan farklı olacağı biliniyor. Böylece ayar kuramlarında karşımıza nötrinonun Dirac ya da Majorana parçacığı mı olduğu sorusu çıkıyor. SU(2) birlisi yüksüz fermiyon (Dirac kütle terimi için gereksinilen sağ-elli nötrino) ya da yeni Higgs temsilleri (Majorana kütlesi üreten) içeren standart modelin genişletilmesi sıfırdan farklı kütleye olarak verir. Gerçekten de büyük birleştirme kuramları bu mekanizmaların birini ya da ikisini içerir. Ayar kuramlarında kütleli nötrinolar ve nötrinoya kütle kazandırma modelleri birçok fizikçi tarafından araştırılmıştır (Langacker, 1988 a,b).

SU(2)xU(1) grubu elektrozayıf etkileşmelerin simetrisini yansıtır. SU(2)xU(1) grubunun yerel ayar değişmezliğinin gerekliliği ayar alanları γ-foton, $W^{\pm}$ ve Z olan ayar alanlarının varlığına yol açar. Zayıf etkileşmelerin kısa erişimli olması araparçacıkların çok büyük kütleye sahip olmalarını gerektirir. Bu nedenle zayıf bozanlara kütle kazandırmak için SU(2)xU(1) simetrisinin kendiliğinden bozulması ile birlikte Higgs mekanizması kullanılır. Bunu gerçekleştirmenin en pratik yolu boşluk beklenen değeri

$$<\Phi> = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$$

olan bir Higgs skalar alanı (Φ-ikilisi) kullanılır. Higgs alanının bu seçimi ile yalnızca elektrik yükü korunacak şekilde SU(2) x U(1) simetrisi U(1) simetrisine bozulmuştur. Bu model bir anlamda elektrozayıf etkileşmelerin minimal modelidir. Daha fazla değişkenli modeller de gözönüne alınabilir (Daha önce vurgulandığı gibi modellerin yüksüz akım yapılarını inceleyerek uygun bir model seçmek olasıdır). Nötrino yüksüz akım süreçlerinin ayrıntılı bir çözümlenmesi ile (deneysel verinin anımsanması için Baltay 1979'a bakınız) birinci nesil kuarklar gözönüne alındığında Weinberg-Salam modelinin kuark kesiminde de biricik çözüm olduğu sonucuna varılmıştı (Sehgal, 1977; Abbott ve Barnett,1978; Komatsu,1978; Hung ve Sakurai,1979). Kutuplanmış elektron-döteron saçılmasında (Prescott ve diğ., 1978) paritenin korunmaması deneyi zayıf yüksüz akım ve elektromagnetik akımın girişimi üzerine önemli bilgi vermiştir. Bu verilerin çözümlenmesi ile Weinberg-Salam modeli elektron kesiminde biricik olarak seçilmiştir (Konuma ve Oka, 1978; Abbott ve Barnett, 1978).

DESY'de yapılan deneysel verilerin sonuçları üç lepton neslini içine alan enerji bölgesinde Weinberg-Salam kuramının geçerliliğine yeni bilgiler eklemiştir (Davier,1982) ve nihayet 1983'te zayıf etkileşmeye aracılık eden arabozonlar kuramsal olarak öngörülen kütle değerine yakın değerle deneysel olarak CERN'de gözlenmişlerdir (UA1, UA2,1983).

Elektrozayıf kuram yerel SU(2)xU(1) ayar simetrisi üzerine kurulmuş abeliyen olmayan ayar alan kuramıdır. Abeliyen olmayan ayar alan kuramlarındaki kuantizasyon ve renormalizasyon işlemlerindeki zorluk QED'deki gibi abeliyen ayar kuramlarındakilerinin doğrudan bir genelleştirilmesi olmaması gerçeğinde saklıdır.

Feynman 1962'de abeliyen olmayan ayar alan kuramlarının kuantizasyonunda bir tek ilmek (loop) düzeyinde bile üniterlik ve ayar değişmezliği gereksiniminden hayalet (ghost) alanlarının gerekliliğini göstermiştir (Feynman, 1963). Bir tek ilmek Feynman diyagramlarına karşılık gelen ayar bozonlarının öz enerji kısmını hesaplayarak bu kolayca görülebilir (ayar değişmezliği sağlanmaz ve sürekli olmaması üniterlik gerekliliğini karşılamaz). Bu güçlük skalar bir alan olmasına karşın sıradeğişmezlik bağıntılarına uyan bir hayalet alanının katkısını getirerek ortadan kaldırılabilir. Feynman'ın fikri de Witt tarafından katlı (çoklu) ilmeklere genelleştirilmiştir (de Witt, 1967). 1967'de Faddev ve Popov yol integral yöntemine dayanan abeliyen olmayan ayar alan kuramlarının kuantizasyonu için güzel bir formülasyon verdiler (Faddeev ve Popov, 1967). Onların formülasyonuna göre abeliyen olmayan ayar alan kuramlarının kovariyant kuantizasyonunda hayaletlerin (Faddeev-Popov ghostları) ortaya çıkması şimdi açık olarak anlaşılmış ve kovariyant kuantizasyon sistematik olarak yazılmaktadır. Abeliyen olmayan ayar alan kuramlarının yapısını incelemek için yol integral formalizmi yerine kanonik işlemci formalizmi de kullanılır. 1978'de Kugo ve Ojima kanonik işlemci formalizmasında Becchi-Rouet-Stora (BRS) değişmezliğine (Becchi ve diğ.,1975, 1976) dayanan S-matrisinin üniterliğini garanti eden kovariyant kuantizasyonu gerçeklediler (Kugo ve Ojima, 1978,1979). Onların formülasyonu QED'de Nakanishi-Lautrup formalizminin doğal bir genelleştirilmesi olarak algılanabilir (Nakanishi, 1966; Lautrup,1967).

Kuantizasyon problemi aydınlığa kavuşturulduktan sonra tedirgeme hesapları sistematik olarak gerçekleştirilebilir. Fakat yüksek mertebeden etkileri hesaplarken ilmek integrallerinde morötesi ıraksaklıklarla karşılaşılır ve renormalizasyon işleminin geliştirilmesi gereklidir. Abeliyen olmayan ayar alan kuramlarının simetrinin kendiliğinden bozulması ile birlikte renormalize edilebilir olduğu 't Hooft, Lee ve Zin-Justin tarafından gösterilmiştir ('t Hooft, 1971 b; Lee ve Zin-Justin, 1972 a,b,c). Böylece elektrozayıf kuram renormalize bir kuramdır.

Elektrozayıf kuramın bu başarılarının yanında şunları vurgulamalıyız: Kuramın öngördüğü araparçacıkların gözlenmesinden sonra geriye kuramın öngördüğü gözlenemeyen t-kuarkı ve simetri bozulmasını sağlayan Higgs skaler bozonlarının gözlenmesi kalıyordu. 1984'de t kuarkı ile açıklanabilecek olayların gözlenmesine karşın kuramın öngörmediği parçacıklar da gözlenmeye başlandı (1988'de t-kuarkının gözlenemediğini de biliyoruz). Bu nedenle elektrozayıf kuramın ve onun uzantısı olan SU(3)xSU(2)xU(1) (kuvvetli SU(3) renk ayar grubu + Weinberg-Salam grubu) ile büyük birleştirme grubu SU(5)'in herşeyi açıklayamayacağına işaret eden başka bulgular da vardır.

Böylece büyük başarılarına karşın standart kuramın egemenliğini uzun süre sürdüremediği ortaya çıkıyor. SU(5) cinsinden kuramların bazı problemlerini (özellikle "hiyerarşi" problemini) çözmek için ortaya atılan süpersimetri ekleme fikri bilinen her parçacığa 1/2 spin farklı bir "eş" tayin etmeyi gerektiriyor. Yeni ilginç bulguların bu süpersimetrik parçacıklarla ilgili olabileceğini ileri süren çalışmalar ve bunların yanında sicim ve süpersicim çalışmaları sürüyor. Bugün doğada bilinen tüm etkileşmeleri tutarlı bir kuantum alanlar kuramı ile betimleyebilmenin ancak sicim modelleri ile olanaklı olduğu anlaşılmıştır. Sicim modelleri ve bunların uzay-zaman içinde uzantısı zar (membrane) modelleri üzerinde çalışılmakta ve olası çözümler aranmaktadır.

Oluşturulacak yeni kuramlar elektrozayıf kuramın düşük enerji momentum geçişlerinde Fermi kuramı ile uyuşması gibi 100 GeV'lik enerji mertebesinde elektrozayıf kuramı verecektir.

Elektrozayıf kuramın kuantizasyonu ve renormalizasyonu işlemlerine girmeden (daha ayrıntılı bilgi için Abers ve Lee,1973; Taylor,1976; Sakakibara,1979,1981; Abak,1980; Bailin,1982; Quigg,1983; Bilenky,1982, Aitchison ve Hey, 1982; Yndurái, 1983; Aoki ve diğ., 1982; Becher ve diğ., 1984; Nikolai, 1984; Pietschmann, 1983; Halzem ve Martin, 1983; Peccei, 1988; Langacker,1988 c' e bakınız) çalışmamızı aşağıdaki şekilde düzenliyoruz.

Fiziksel kuramla uygun olacak en genel gereklilik belli dönüşüm gruplarına göre değişmez Lagranjiyeni formüle etmek olduğundan Bölüm 2'de yerel değişmez lagranjiyen ve korunumlu akımlar genel olarak ve sonra U(1) ve SU(2) grupları için elde edilip, birinci ve ikinci tür simetrinin kendiliğinden bozulması ve Goldstone teoreminin sonuçları özetleniyor ve standart kuramın lagranjiyeninden sonra nötrinoların kütleli (Dirac nötrinoları) olmaları durumunda genişletilmiş standart (elektrozayıf) kuramın lagranjiyeni elde ediliyor (Elektrozayıf kuramdaki çiftlenim sabitleri kullanılıyor. Çeşitli çiftlenim parametre cümleleri seçebilme olanağı olmasına karşın ağaç diyagramı düzeyinde bunlar basit bağıntılarla birbirlerine bağlanabildiklerinden (birbirleri cinsinden ifade edilebildiklerinden) bu düzeyde birbirlerine üstünlükleri yoktur (Böhm ve diğ.,1984; Hollik, 1985, 1986, 1987)).

Bölüm 3'de leptonların yapı çarpanları tanımlanıp, CP-konumlu kuramdaki yapı çarpanlarından anapol moment yapı çarpanı elektrozayıf ve genişletilmiş elektrozayıf kuramda, magnetik moment yapı çarpanı genişletilmiş elektrozayıf kuramda nötrino için ve nötrinonun araparçacık olduğu yüklü lepton diyagramları için (hadron katkılarını gözönüne almıyoruz) hesaplanıyor.

Eklerde ise; EK A'da metrik ve gösterim, EK B'de katkılarını hesapladığımız diyagramların içerdiği parçacıkların ilerleticileri ve köşeler veriliyor (Bu ifadelerde $m_\nu \to 0$ ve U(karışım matrisi)=1 alınırsa standart kuramın öngördüğü ifadeler (Sakakibara, 1981) elde edilir. EK C'de 2ω-boyutlu momentum integralleri ('t Hooft ve Veltman, 1972, 1973; Leibbrandt, 1975) veriliyor.

BÖLÜM 2
DEĞİŞMEZ LAGRANJİYEN

2.1 GİRİŞ

Elemanter parçacıkların simetri özellikleri uzay-zaman özellikleri ve iç özellikler olmak üzere iki sınıfa ayrılabilir. Bu özellikler sırasıyla uzaysal ve iç simetri grupları ile betimlenir. Uzaysal simetri grupları için Lorentz ve Poincaré grubu, iç simetri grupları için U(1), SU(n) grupları örnek olarak verilebilir.

Dönüşümler birinci tür (başka bir deyişle global) ya da ikinci tür (yerel) olabilir. Birinci tür dönüşümler uzay-zamanın bütün noktaları için özdeş, yerel dönüşümler ise uzay-zaman koordinatlarına bağlıdır. Uzay-zaman ve iç simetri grupları yerel de olabilir. Biz global ve yerel iç simetri grupları ile ilgileniyoruz.

2.2 YEREL LAGRANJİYEN

Kuantum alan kuramını oluşturmanın Lagranjiyen ve Hamiltonyen formu olmak üzere iki yolu vardır (Lagranjiyen formunu kullanıyoruz).

$L(x_0,\vec{x})$ lagranjiyen yoğunluğu olmak üzere, lagranjiyen alanın belli bir noktasında tanımlanır ve dört-boyutlu uzay-zamanın belli bir Ω hacmi üzerinden integrali

$$I = \int_{\Omega} dx L(x)$$

eylem olarak adlandırılır.

Lagranjiyen aşağıdaki gereklilikleri sağlamalıdır:

i) Göreli (relativistik) değişmez olmalı,

ii) Gerçel bir fonksiyon olmalı,

iii) Yalnızca bir noktanın yani yerel etkileşmeleri betimleyen fonksiyonlar ve bunların türevlerini içermeli,

iv) Yalnız $U_i(x)$ dalga fonksiyonu ve $\partial_\mu U_i(x)$ türevine bağlı olmalı,

v) Açıkça x-koordinatına bağlı olmamalı.

Böylece lagranjiyen

$$L(x) = L(U_i(x),\ \partial_\mu U_i(x))$$

formundadır.

İsteksel global iç simetri grubu G'nin dönüşümleri altında lagranjiyenin değişmezliği için gerekli koşulu genel biçimde formüle edelim: İç simetri grupları halinde yalnız dalga fonksiyonları (ya da alanlar) dönüşüme uğrar:

$$x_\mu \to x'_\mu = x_\mu \tag{2.1}$$

Verilen grup için $U_i(x)$ dalga fonksiyonunun sonsuz küçük dönüşümleri T^k grubun üreticisi ve $\delta\theta_k$ grubun sonsuz küçük parametresi olmak üzere

$$\begin{aligned} U_i(x) \to U'_i(x) &= U_i(x) + \delta U_i(x) \\ \delta U_i(x) &\to -i\delta\theta_k T^k_{ij} U_j(x) \end{aligned} \tag{2.2}$$

ile verilir.

G-grubunun Lie cebiri

$$[T_i, T_k]_- = i f_{ik\ell} T_\ell \tag{2.3}$$

bağıntısı ile verilir. $f_{ik\ell}$'ler grubun yapı sabitleri olarak adlandırılır ve

$$f_{ik\ell}f_{\ell mn} + f_{km\ell}f_{\ell in} + f_{mi\ell}f_{\ell kn} = 0, \quad f_{ik\ell} = -f_{ki\ell} \tag{2.4}$$

özelliğine sahiptirler.

G-grubunun dönüşümleri altında lagranjiyenin değişmezliği (Ω integrasyon bölgesi olmak üzere)

$$\int_{\Omega} dx\, L(U_i'(x),\ \partial_\mu U_i'(x)) - \int_{\Omega} dx\, L(U_i(x),\ \partial_\mu U_i(x)) = 0 \tag{2.5}$$

sonucunu verir. Sonsuz küçük dönüşümler için

$$\delta I = 0 \tag{2.6}$$

olarak yazılabilir. Böylece lagranjiyenin değişmezliği G-grubunun dönüşümleri altında eylemin değişiminin (variyasyonunun) bu dönüşümler altında sıfır olması anlamındadır.

Eylemin variyasyonu (değişimi)

$$\delta I = \int dx \left[\frac{\partial L}{\partial U_i}\,\delta U_i + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu U_i)}\,\delta(\partial_\mu U_i)\right] = 0 \tag{2.7}$$

dır. İntegral bölgesinin isteksel olması nedeniyle

$$\frac{\partial L}{\partial U_i}\,\delta U_i + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu U_i)}\,\delta(\partial_\mu U_i) = 0 \tag{2.8}$$

ya da bu ifadede (2.2) yerine yazılırsa $\delta\theta_k$ 'nın keyfi olması nedeniyle

$$\frac{\partial L}{\partial U_i}\,T^k_{ij}U_j + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu U_i)}\,T^k_{ij}\partial_\mu U_j = 0 \tag{2.9}$$

elde edilir. Bu özdeşlikler isteksel global iç simetri grubu dönüşümleri altında lagranjiyenin değişmez olması için gerekli ve yeterli koşulları ifade eder.

Global dönüşümler grubunu ve bu grup altında lagranjiyenin değişmezliğini gözönüne aldık. Global değişmez lagranjiyen yerel dönüşüm grupları altında değişmez olmayabilir. Yerel değişmez lagranjiyen elde etmek için ayar alanları olarak adlandırılan yeni alanlar getirilmelidir.

İç simetri grubu altında değişmez yerel lagranjiyenin karşılık gelen global lagranjiyenden genel formda nasıl elde edilebileceğini gösterelim: Global dönüşümler grubu koordinatlardan bağımsız olan θ parametresi ile karakterize edilirler. Grubun parametrelerinin koordinatlara bağımlı olduğunu varsayalım. Bu durumda alan fonksiyonları

$$\delta U_i(x) = -i\delta\theta_k(x)T^k_{ij}U_j(x) \tag{2.10}$$

şeklinde dönüşür. Böyle yerel dönüşümler grubu yerel ya da ayar grubu olarak adlandırılır.

Global değişmez lagranjiyenin (2.10) yerel dönüşümler grubu altında değişmez olamayacağı kolayca kanıtlanabilir. (2.10)'dan

$$\delta(\partial_\mu U_i(x)) = -i\delta\theta_k(x)\, T^k_{ij}\partial_\mu U_j(x) - iT^k_{ij}U_j(x)\partial_\mu\delta\theta_k(x) \tag{2.11}$$

bağıntısı yardımı ile lagranjiyenin variyasyonu

$$\begin{aligned}\delta L &= \frac{\partial L}{\partial U_i}\,\delta U_i + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu U_i)}\,\delta(\partial_\mu U_i(x)) \\ &= \frac{\partial L}{\partial U_i}\,[-i\delta\theta_k(x)T^k_{ij}U_j(x)] + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu U_i)}\,[-i\delta\theta_k(x)T^k_{ij}\partial_\mu U_j(x) \\ &\qquad - iT^k_{ij}U_j(x)\partial_\mu\delta\theta_k(x)]\end{aligned} \tag{2.12}$$

elde edilir. Global değişmezlik nedeniyle (2.9) bağıntısı sağlanır ve

$$\delta L = -i\,\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu U_i)}\,T^k_{ij}U_j(x)\partial_\mu\delta\theta_k(x) \neq 0 \tag{2.13}$$

olur ($L(x)$'in variyasyonu sıfır olmaz, yani yerel dönüşümler altında değişmez değildir). Yerel dönüşümler altında lagranjiyenin değişmez olması için yeni bir

$$A'_\ell(x), \quad \ell = 1,2,\dots,n$$

alanı (2.13)'ün sağ-el yanını karşılamak için $U_i(x)$ alanına eklenir ve yeni lagranjiyen yerel dönüşümler altında değişmez olur.

Yeni $L(x)$ lagranjiyeninin $A'_\ell(x)$ ayar alanını içerdiğini (türevlerini içermediğini) varsayalım:

$$L = L(U_i, \partial_\mu U_i, A'_\ell)$$

Sonsuz küçük alan dönüşümleri

$$\delta U_i(x) = -i\delta\theta_k(x) T^k_{ij} U_j(x) \tag{2.14}$$

$$\delta A'_\ell(x) = -iP^k_{\ell i} A'_i(x)\delta\theta_k(x) - iR^k_{\ell\mu}\partial_\mu \delta\theta_k(x) \tag{2.15}$$

formunda alınır (P ve R sabit matrislerdir). (2.15)'deki ikinci terim (2.13)' ün sağ-el yanını karşılamak için getirilir. $L(U_i, \partial_\mu U_i, A'_\ell)$ lagranjiyeninin yerel değişmezliğinin koşulu

$$\partial L = \frac{\partial L}{\partial U_i}\,\delta U_i + \frac{\delta L}{\partial(\partial_\mu U_i)}\,\delta(\partial_\mu U_i) + \frac{\partial L}{\partial A'_\ell}\,\delta A'_\ell = 0$$

veya (2.14, 15) yerine yazılırsa

$$\frac{\partial L}{\partial U_i}\,\delta\theta_k(x) T^k_{ij} U_j(x) + \frac{\delta L}{\partial(\partial_\mu U_i)}[\delta\theta_k(x) T^k_{ij}\partial_\mu U_j(x) + T^k_{ij} U_j(x)\partial_\mu \delta\theta_k(x)]$$

$$+\frac{\partial L}{\partial A'_\ell}[P^k_{\ell i} A'_i(x)\delta\theta_k(x) + R^k_{\ell\mu}\partial_\mu \delta\theta_k(x)] = 0 \tag{2.16}$$

olur. $\theta_k(x)$ ve $\partial_\mu \theta_k(x)$'in isteksellığı nedeniyle katsayıları sıfıra eşitlenirse

$$\frac{\partial L}{\partial U_i}\,T^k_{ij} U_j(x) + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu U_i)}\,T^k_{ij}\partial_\mu U_j(x) + \frac{\partial L}{\partial A'_\ell}\,P^k_{\ell i}(x) = 0 \tag{2.17}$$

$$\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu U_i)} T^k_{ij} U_j(x) + \frac{\partial L}{\partial A'_\ell} R^k_{l\mu} = 0 \qquad (2.18)$$

sonuçları elde edilir.

(2.18) özdeşliğinin yeni L-lagranjiyenin ayar alanına bağlılığını açıkça bulmayı ve A'_ℓ 'de ℓ-indisinin anlamını açıklığa kuvaşturmayı olanaklı yaptığını görelim:

i) (2.18) denklemler cümlesi $\mu=0,1,2,3$; $k=1,2,\ldots n$ olduğundan 4n denklemden oluşur. L'nin A'_ℓ'ye bağlı bir tek değeri için A'_ℓ bileşenlerinin sayısı (burada $\ell=1,2,\ldots,M$) (2.18) denklemler cümlesinin sayısına eşit yani M=4n olacaktır. R^k-matrislerinin tekil (singüler) olmadıklarını ve terslerinin var olduğunu kabul edelim:

$$(R^k_{\ell\mu})^{-1} R^k_{m\mu} = \delta_{\ell\mu} \;, \; (R^k_{\ell\mu})^{-1} R^i_{\ell\nu} = \delta_{ki} \cdot g_{\mu\nu} \qquad (2.19)$$

Ayar alanı

$$A^k_\mu = (R^k_{\ell\mu})^{-1} A'_\ell \qquad (2.20)$$

olarak ifade edilir. Böylece Lorentz grubu altında $A^k_\mu(x)$ ayar alanı dörtlü vektör gibi dönüşür; k-indisi ayar grubuna göre bileşenlerin sayısını belirler (Bileşenlerin dönüşümü için (2.31)'e bakınız).

ii) (2.19, 20)'nin yardımı ile (2.18) denklemler cümlesi

$$\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu U_i)} T^k_{ij} U_j + \frac{\partial L}{\partial A^k_\mu} = 0 \qquad (2.21)$$

olur. Bu denklemler cümlesini sağlayan lagranjiyen için A^k_μ ayar alanları genellikle kovariyant türev olarak adlandırılan

$$D_\mu U_i \equiv \partial_\mu U_i - T^k_{ij} U_j A^k_\mu \qquad (2.22)$$

birleşimi olarak L'ye girmelidir. Yerel lagranjiyen

$$L(U_i,\ \partial_\mu U_i, A'_\ell) = L'(U_i,\ D_\mu U_i) \tag{2.23}$$

formunda yazılır. Böylece

$$\frac{\partial L}{\partial U_i} = \frac{\partial L'}{\partial U_i}\Bigg|_{DU_i=\text{Sabit}} - \frac{\partial L'}{\partial D_\mu U_j}\Bigg|_{U_i=\text{Sabit}} T^k_{ij}\ A^k_\mu\ ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu U_i)} = \frac{\partial L'}{\partial D_\mu U_i}\Bigg|_{U_i=\text{Sabit}}\ ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial A'_\ell} = -\frac{\partial L'}{\partial D_\mu U_i}\Bigg|_{U_i=\text{Sabit}} T^k_{ij} U_j (R^k_{\mu\ell})^{-1} \tag{2.24}$$

bağıntıları tanımlanır. Şu halde yerel değişmezliğin gerekliliği global lagranjiyendeki türevle (2.22) kovariyant türevinin yerdeğiştirilmesi ile sonuçlanır. Kovariyant türevdeki ikinci terim madde alanları olarak adlandırılabilen U_i alanı ile A^k_μ ayar alanlarının etkileşmesini belirler. Yukarıdaki işlemleri özetlersek yerel ayar dönüşümleri altındaki değişmezlik gereksinimi, sisteme ayar alanı denen bir vektör alanının eklenmesini şart koştuğu gibi, bu alanın madde alanları ile olan etkileşme biçimini de doğrudan doğruya belirlemektedir. A^k_μ ayar alanlarının sayısı ayar gruplarının üreticilerinin sayısına eşittir.

2.3 AYAR ALANLARI VE LAGRANJİYENLERİ

(2.15, 19) ve (2.20)'yi hesaba katarak

$$(C^k_\mu)^{jm}_\nu = (R^k_{i\mu})^{-1}(P^j_{i\ell})(R^m_{\ell\nu})$$

olmak üzere

$$\delta A_\mu^k = (C_\mu^k)_\nu^{jm} \, A_\nu^m \delta\theta^j(x) + \partial_k \delta\theta^k(x) \tag{2.25}$$

elde edilir. (2.24)'ü (2.17) 'de yerine yazıp (2.22) ve (2.25)'in kullanılması ile

$$\frac{\partial L'}{\partial U_i} T_{ij}^k U_j + \frac{\partial L'}{\partial D_\mu U_i} T_{ij}^k D_\mu U_j + \frac{\partial L'}{\partial D_\mu U_i} \Big[-T_{ij}^\ell T_{jn}^k A_\mu^\ell U_n + T_{ij}^k T_{jn}^\ell U_n A_\mu^\ell - (C_\mu^\ell)_\nu^{km} \, T_{ij}^\ell \, U_j A_\nu^m \Big] = 0 \tag{2.26}$$

elde edilir. $L'(U_i, D_\mu U_i)$ lagranjiyeni için değişmezlik koşulu (2.9)'a uygun olarak

$$\frac{\partial L'(U_i, D_\mu U_i)}{\partial U_i} T_{ij}^k U_j + \frac{\partial L'(U_i, D_\mu U_i)}{\partial D_\mu U_i} T_{ij}^k \, D_\mu U_j = 0 \tag{2.27}$$

geçerlidir. (2.26)'da kalan terim

$$\frac{\partial L'(U_i, D_\mu U_i)}{\partial D_\mu U_i} \Big[f_{kml} T_{ij}^\ell U_j A_\mu^m - (C_\mu^\ell)_\nu^{km} \, T_{ij}^\ell \, U_j A_\nu^m \Big] = 0 \tag{2.28}$$

olur. (2.28)'den

$$f_{kml} \, T_{ij}^\ell \, U_j \, A_\mu^m - (C_\mu^\ell)_\nu^{km} \, T_{ij}^\ell U_j A_\nu^m = 0 \tag{2.29}$$

ya da

$$(C_\mu^\ell)_\nu^{km} = f_{km\ell} g_{\mu\nu} \tag{2.30}$$

elde edilir. (2.30)'u (2.25) de yerine yazarsak ayar alanlarının sonsuz küçük dönüşümleri için

$$\delta A_\mu^k = A_\mu'^k - A_\mu^k = f_{\ell mk} A_\mu^m \, \delta\theta_\ell(x) + \partial_\mu \delta\theta_k(x) \tag{2.31}$$

elde edilir. Böylece global değişmez lagranjiyende adi türevle kovariyant türevin yerdeğiştirilmesi ile yerel değişmez lagranjiyen elde edilir ve ayar alanları (2.31)'ye uygun olarak dönüşür.

Kovariyant türevin sonsuz küçük dönüşümleri için (2.3),(2.22) ve (2.31) ifadeleri kullanılarak

$$\delta(D_\mu U_i) = -i\delta\theta_k(x)\, T^k_{ij} D_\mu U_j \tag{2.32}$$

elde edilir. (2.4) ve (2.32)'in karşılaştırılması ayar grubu altında $D_\mu U_i$ nin U_i ile aynı şekilde dönüştüğünü gösterir. (2.23) lagranjiyeni U_i madde alanının serbest lagranjiyeni ve A^k_μ ayar alanları ile U_i madde alanları arasındaki etkileşme lagranjiyenlerinin toplamıdır.

Yerel iç simetri grubu altında ayar alanlarının değişmez lagranjiyenini elde etmek istiyoruz. Bu lagranjiyen ayar alanları ve türevlerine bağlıdır: $L_o(A^k_\mu, \partial_\mu A^k_\nu)$'nın değişmezlik koşulu

$$\delta L_o = \frac{\partial L_o}{\partial A^k_\mu}\, \delta A^k_\mu + \frac{\partial L_o}{\partial(\partial_\nu A^k_\mu)}\, \delta(\partial_\nu A^k_\mu) = 0 \tag{2.33}$$

ya da (2.7)'den

$$\left[\frac{\partial L_o}{\partial A^k_\mu} f_{\ell mk} A^m_\mu + \frac{\partial L_o}{\partial(\partial_\nu A^k_\mu)} f_{\ell mk}\partial_\nu A^m\right]\delta\theta_\ell(x) + \left[\frac{\partial L_o}{\partial A^\ell_\nu} + \frac{\partial L_o}{\partial(\partial_\nu A^k_\mu)} f_{\ell mk} A^m_\mu\right]\partial_\nu \delta\,\theta_\ell(x)$$

$$+ \frac{\partial L_o}{\partial(\partial_\nu A^k_\mu)}\partial_\nu\partial_\mu\delta\theta_k(x) = 0 \tag{2.34}$$

elde edilir. $\theta_k(x)$ fonksiyonunun isteksel olması nedeniyle

$$\frac{\partial L_o}{\partial A^k_\mu} f_{\ell mk} A^m_\mu + \frac{\partial L_o}{\partial(\partial_\nu A^k)} f_{\ell mk}\partial_\nu A^m_\mu = 0 \;, \quad \ell=1,2,\ldots,n \tag{2.35}$$

$$\frac{\partial L_o}{\partial A_\nu^\ell} + \frac{\partial L_o}{\partial(\partial_\nu A_\mu^k)} f_{\ell mk} A_\mu^m = 0 \tag{2.36}$$

ve

$$\frac{\partial L_o}{\partial(\partial_\nu A_\mu^k)} \partial_\nu \partial_\mu \delta\theta_k(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial L_o}{\partial(\partial_\mu A_\nu^k)} + \frac{\partial L_o}{\partial(\partial_\nu A_\mu^k)}\right] \partial_\mu \partial_\nu \delta\theta_k(x) \tag{2.37}$$

bağıntısını kullanarak

$$\frac{\partial L_o}{\partial(\partial_\mu A_\nu^k)} + \frac{\partial L_o}{\partial(\partial_\nu A_\mu^k)} = 0 \ , \quad k=1,2,\ldots,n \tag{2.38}$$

özdeşlikleri elde edilir. (2.38)'den A_μ^k alanının türevi

$$A_{\mu\nu}^k = -A_{\nu\mu}^k \tag{2.39}$$

olmak üzere

$$A_{\mu\nu}^k = \partial_\mu A_\nu^k - \partial_\nu A_\mu^k \tag{2.40}$$

birleşimi olarak lagranjiyene girebileceği çıkar.

$$\frac{\partial L_o}{\partial(\partial_\nu A_\mu^k)} = -2\frac{\partial L_o}{\partial A_{\mu\nu}^k} \ , \ \frac{\partial L_o}{\partial(\partial_\mu A_\nu^k)} = 2\frac{\partial L_o}{\partial A_{\mu\nu}^k} \tag{2.41}$$

eşitliklerini hesaba katıp (2.39) eşitliği kullanılırsa (2.35, 2.36)'nın yerine

$$\frac{\partial L_o}{\partial A_\mu^k} f_{\ell mk} A_\mu^m - 2\frac{\partial L_o}{\partial A_{\mu\nu}^k} f_{\ell mk} \partial_\nu A_\mu^k = 0 \tag{2.42}$$

$$\frac{\partial L_o}{\partial A_\mu^\ell} - 2\frac{\partial L_o}{\partial A_{\nu\mu}^k} f_{\ell mk} A_\nu^m = 0 \tag{2.43}$$

elde edilir. (2.43) denklemler cümlesini gözönüne alalım: ($\mu=0,1,2,3$) dört bağımsız cümleye bölünür. (2.43) denklemler cümlesi saptanmış bir μ için n-denklemden oluşur ve A_μ^k ve $A_{\mu\nu}^k$ $k=1,2,\ldots,n$; $\nu=0,1,2,3$; $\nu\neq\mu$ değişkenlerine bağlıdır. L_o lagranjiyeninin (2.43) denklemler cümlesini sağlaması için A_μ^k ve $A_{\mu\nu}^k$ alanları

$$F_{\mu\nu}^k = A_{\mu\nu}^k - \frac{1}{2} f_{\ell mk}(A_\mu^\ell A_\nu^m - A_\nu^\ell A_\mu^m), \quad k=1,2,\ldots,n \; ; \quad \nu \neq \mu \tag{2.44}$$

birleşimleri aracılığı ile L_o 'a girmelidirler:

$$L_o(A_\mu^k, \partial_\nu A_\mu^k) = L'_o(F_{\mu\nu}^k) \tag{2.45}$$

Buradan

$$\frac{\partial L_o}{\partial(\partial_\mu A_\nu^k)} = 2\frac{\partial L'_o}{\partial F_{\mu\nu}^k}, \quad \frac{\partial L_o}{\partial A_\mu^k} = 2\frac{\partial L'_o}{\partial F_{\mu\nu}^\ell} f_{mk\ell}A_\nu^m \tag{2.46}$$

elde edilir. (2.42) özdeşliği cümlesini gözönüne alıp (2.4) ve (2.46) hesaba katılırsa ayar alanları lagranjiyenine

$$\frac{\partial L'_o}{\partial F_{\mu\nu}^k} f_{\ell mk}F_{\mu\nu}^\ell = 0 \tag{2.47}$$

ek zorlayıcı koşulu ile varılır. O halde ayar alanlarının yerel değişmez lagranjiyeni yalnız $F_{\mu\nu}^k$ 'nın fonksiyonudur ve (2.47) koşuluna uyar. Bu gereklilikleri sağlayan lagranjiyenin seçimi bir tek değildir. $F_{\mu\nu}^k$'ye göre ikinci mertebeden en basit lagranjiyen

$$F_{\mu\nu}^k = \partial_\mu A_\nu^k - \partial_\nu A_\mu^k - f_{\ell mk}A_\mu^\ell A_\nu^m \tag{2.48}$$

olmak üzere

$$L_{YM} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^k F^{\mu\nu,k} \tag{2.49}$$

Yang ve Mills tarafından önerildi. Bu lagranjiyenin (2.47) koşulunu sağladığını ($f_{ijk} = f_{jki} = -f_{ikj}$) yapı sabitlerinin karşıt bakışımlı (antisimetrik) olduğu hesaba katılarak gösterilebilinir.

(2.31) ve (2.45)'i kullanarak $F^k_{\mu\nu}$ tensörünün sonsuz küçük dönüşümleri için

$$\delta F^k_{\mu\nu} = f_{\ell mk}\,\delta\theta_\ell(x)F^m_{\mu\nu} \tag{2.50}$$

ifadesi elde edilir. $U_i(x)$ madde alanları ve ayar alanları sisteminin lagranjiyeni L, madde alanları yerel lagranjiyeni L' (madde alanları ve ayar alanları arasındaki etkileşmeyi de içerecek şekilde) ve ayar alanları lagranjiyeni L'_o 'nün toplamı olarak

$$L = L'_o + L' \tag{2.51}$$

ile verilir.

2.4 KORUNUMLU AKIMLAR

Noether teoremine göre sürekli dönüşümler grubu altında lagranjiyenin değişmezliği bazı büyüklüklerin korunumuna neden olur. Yerel dönüşümler altında lagranjiyenin değişmezliği akım korunumu ile ilişkilidir. Akım ifadesini elde edebilme ereği için önce yerel dönüşümler grubu altında lagranjiyenin değişmezliği koşulunu yazalım:

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial U_i}\,\delta U_i + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu U_i)}\,\delta(\partial_\mu U_i) + \frac{\partial L}{\partial A^k_\mu}\,A^k_\mu + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu A^k_\mu)}\,\delta(\partial_\nu A^k_\mu) = 0 \tag{2.52}$$

$U_i(x)$ ve $A^k_\mu(x)$'in alan denklemleri için Euler-Lagrange denklemi kullanılarak (2.52) denklemi

$$\delta L = \partial_\mu \left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu A^k_\nu)} \delta A^k_\nu + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu U_i)} \delta U_i \right] = 0 \tag{2.53}$$

olur. U_i, $D_\mu U_i$, A^k_μ ve $F^k_{\mu\nu}$ yeni değişkenleri ve (2.10) ve (2.31) (2.46) ve (2.24)'ün yardımı ile (2.53) denklemi

$$\delta L = \partial_\mu \left[\frac{\partial L}{\partial D_\mu U_i} T^k_{ij} U_j + 2 \frac{\partial L}{\partial F^m_{\mu\nu}} f_{k\ell m} A^\ell_\nu \right] \delta\theta_k(x)$$

$$+ \left[\frac{\partial L}{\partial D_\mu U_i} T^k_{ij} U_j + 2 \frac{\partial L}{\partial F^m_{\mu\nu}} f_{k\ell m} A^l_\nu + 2\partial_\nu \left(\frac{\partial L}{\partial F^k_{\mu\nu}} \right) \right] \partial_\mu \delta\theta_k(x)$$

$$+ \left[\frac{\partial L}{\partial F^k_{\mu\nu}} + \frac{\partial L}{\partial F^k_{\nu\mu}} \right] \partial_\mu \partial_\nu \delta\theta_k(x) = 0 \tag{2.54}$$

olur. $\theta_k(x)$ fonksiyonunun keyfi olması nedeniyle (2.54) denkleminden

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial L}{\partial D_\mu U} T^k_{ij} U_j + 2 \frac{\partial L}{\partial F^m_{\mu\nu}} f_{k\ell m} A^\ell_\nu \right] = 0 \tag{2.55}$$

ve (2.46) ve Euler-Lagrange denklemine uygun olarak

$$\partial_\nu \frac{\partial L}{\partial F^k_{\mu\nu}} = \frac{1}{2} \partial_\nu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu A^k_\mu)} = \frac{1}{2} \frac{\partial L}{\partial A^k_\mu}$$

olduğu gözönüne alınırsa

$$\frac{\partial L}{\partial D_\mu U_i} T^k_{ij} U_j + 2 \frac{\partial L}{\partial F^m_{\mu\nu}} f_{k\ell m} A^\ell_\nu + \frac{\partial L}{\partial A^k_\mu} = 0 \tag{2.56}$$

elde edilir.

$$J^{\mu,k}(x) = \frac{\partial L}{\partial A^k_\mu(x)} \tag{2.57}$$

akım olarak adlandırılırsa (2.56)'dan akım

$$J^{\mu,k} = -\frac{\partial L}{\partial D_\mu U_i} T_{ij}^{k} U_j - 2\frac{\partial L}{\partial F_{\mu\nu}^{m}} f_{k\ell m} A_\nu^\ell \tag{2.58}$$

ve (2.55)'den akım korunum yasası

$$\partial_\mu J^{\mu,k} = 0 \;, \quad (k=1,2,\ldots,n) \tag{2.59}$$

elde edilir.

Elde edilen genel sonuçları U(1) ve SU(2) yerel grupları için gösterelim:

2.4.1 U(1) Grubu

Kütlesi m olan ψ-spinör alanı için lagranjiyen

$$L = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \tag{2.60}$$

ile verilir. Bu lagranjiyen

$$\psi \to \psi' = e^{-ig\varepsilon}\psi \;, \quad \bar{\psi} \to \bar{\psi}' = \bar{\psi}\, e^{ig\varepsilon} \tag{2.61}$$

faz dönüşümleri altında değişmezdir. ε-grubun parametresi (sabit) ve g çiftlenim sabitidir. (2.61)'den sonsuz küçük dönüşümler için

$$\delta\psi = -ig\varepsilon\psi \;, \quad \delta\bar{\psi} = ig\varepsilon\bar{\psi} \tag{2.62}$$

elde edilir. (2.10) ve (2.62) karşılaştırılırsa

$$T_{11} = -ig \;, \quad T_{22} = +ig \;, \quad T_{12} = T_{21} = 0 \tag{2.63}$$

olduğu görülür (1 ve 2 indisleri sırasiyle ψ ve $\bar{\psi}$'yi betimliyor). Ayrıca U(1) grubu için yapı sabitleri $f_{k\ell m}=0$ koşuluna uyar.

Yerel faz dönüşümleri grubunu gözönüne alalım. $\varepsilon(x)$, x-koordinatının fonksiyonudur. Spinör alanları için yerel ayar dönüşümleri grubu altında değişmez lagranjiyen (2.22) ile tanımlandığı gibi kovariyant türevle türetilen yerdeğiştirme ile

$$\partial_\mu\psi \rightarrow D_\mu\psi = \partial_\mu\psi - ig\psi A_\mu$$

$$\partial_\mu\bar{\psi} \rightarrow D_\mu\bar{\psi} = \partial_\mu\bar{\psi} + ig\bar{\psi}A_\mu$$

olarak elde edilir. Bu durumda ayar alanı $A_\mu(x)$ elektromagnetik alanı temsil eder ve spinör ile ayar alanlarının etkileşme lagranjiyeni

$$L_{et.} = g\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \tag{2.64}$$

ile verilir. (2.48, 49)'a uygun olarak

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

elektromagnetik alan tensörü olmak üzere A_μ ayar alanları için lagranjiyen

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{2.65}$$

olarak ifade edilir. (2.65) serbest elektromagnetik ayar alanı lagranjiyenidir, A_μ alanının sonsuz küçük dönüşümü (2.31) ile tanımlanır; abeliyen grup için $f_{k\ell m}=0$ olduğundan

$$\delta A_\mu = \partial_\mu\varepsilon(x) \tag{2.66}$$

dir. Yerel değişmez lagranjiyen

$$L = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + g\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \tag{2.67}$$

kuantum elektrodinamiğinin lagranjiyenine uyar. (2.58)'e uygun korunumlu akım

$$J^\mu = g\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \tag{2.68}$$

dir. Bu akım g-sabiti elektromagnetik etkileşme sabiti e-ile özdeşleştirildiğinde bilinen elektromagnetik akım olur.

2.4.2 SU(2) Grubu, Yang-Mills Alanı

Spinör alanının bir SU(2) ikilisini (izoçift) gözönüne alalım:

$$\psi^a = \begin{pmatrix}\psi^1 \\ \psi^2\end{pmatrix} \tag{2.69}$$

ψ^1 ve ψ^2 örneğin m-kütleli protonu ve nötronu betimlesin. Böyle bir ikili için serbest lagranjiyen

$$L = \bar{\psi}^a \left[i\gamma^\mu \partial_\mu - m \right] \psi^a \tag{2.70}$$

ile verilir. Bu lagranjiyen

$$\begin{aligned} \psi^a \to \psi'^a &= \left[\exp(-\tfrac{i}{2} g\varepsilon^k \tau_k)\right]_{ab}\psi^b \\ \psi^b \to \bar{\psi}'^a &= \bar{\psi}^b \left[\exp(\tfrac{i}{2} g\varepsilon^k \tau_k)\right] \end{aligned} \tag{2.71}$$

şeklinde dönüşen abeliyen olmayan SU(2) grubu altında değişmezdir.Buradaki ε_k'lar grubun parametrelerini ve τ_k'lar Pauli matrislerini gösterir ve g sabittir.

(2.71)'in sonsuz küçük dönüşümleri

$$\begin{aligned} \delta\psi^a &= -i\,\tfrac{g}{2}\delta\varepsilon^k (\tau_k)_{ab}\psi^b \\ \delta\bar{\psi}^a &= i\,\tfrac{g}{2}\delta\varepsilon^k\, \bar{\psi}^b(\tau_k)_{ba} \end{aligned} \tag{2.72}$$

dir. Sonuç olarak,dönüşümlerin üreticileri için

$$T^k_{ab} = -i\,\frac{g}{2}\,(\tau_k)_{ab} \tag{2.73}$$

dir.

$$[T^k, T^\ell]_- = -\frac{g^2}{4}[\tau^k, \tau^\ell]_- = ig\varepsilon_{k\ell m}T^m \tag{2.74}$$

bağıntısından

$$f_{k\ell m} = g\varepsilon_{k\ell m} \tag{2.75}$$

elde edilir. $\varepsilon_{k\ell m}$ karşıt bakışımlı (antisymmetric) tensördür.

Yerel dönüşümler grubuna dönelim; (2.70) lagranjiyeni (2.22)'ye uygun olarak

$$\partial_\mu\psi^a \to D_\mu\psi^a = \partial_\mu\psi^a + i\,\frac{g}{2}(\tau_k)_{ab}\psi^b A^k_\mu\,, \quad k=1,2,3 \tag{2.76}$$

alındığında ayar değişmez olacaktır. Görüldüğü gibi bu durumda A^k_μ ayar alanı üç tane ayar alanıdır (ayar alanlarının sayısı grubun üreticileri sayısına eşittir).

(2.48, 49)'a uygun olarak Yang-Mills ayar alan tensörü

$$F^k_{\mu\nu} = \partial_\mu A^k_\nu - \partial_\nu A^k_\mu + g\varepsilon_{k\ell m}A^\ell_\mu A^m_\nu \tag{2.77}$$

olmak üzere ayar alanı lagranjiyeni

$$L_{YM} = -\frac{1}{4}F^k_{\mu\nu}F^{\mu\nu,k} \tag{2.78}$$

formundadır. (2.78) denklemi A^k_μ cinsinden ikinci dereceden terimlerin yanında üçüncü ve dördüncü dereceden terimleri de içerir.

A^k_μ ayar alanı (2.31)'e uygun olarak

$$\delta A^k_\mu = g\varepsilon_{k\ell m}A^m_\mu\varepsilon_\ell(x) + \partial_\mu\varepsilon_k(x) \tag{2.79}$$

şeklinde dönüşür.

Yerel değişmez toplam lagranjiyen için

$$L = \bar\psi^a(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi^a - \frac{1}{4}F^k_{\mu\nu}F^{\mu\nu,k} - \frac{g}{2}\bar\psi^a\gamma^\mu(\tau_k)_{ab}\psi^b A^k_\mu \tag{2.80}$$

elde edilir. g-sabiti spinör alanları ile ayar alanları arasındaki çiftlenim sabitidir. (2.80) lagranjiyeni için korunan akım (2.48) yardımı ile

$$J^{\mu,k} = -\frac{g}{2}\bar\psi^a\gamma^\mu(\tau_k)_{ab}\psi^b - g\varepsilon_{k\ell m}A^m_\nu[\partial_\mu A^\ell_\nu - \partial_\mu A^\ell_\nu - \frac{g}{2}\varepsilon_{\ell ij}(A^i_\mu A^j_\nu - A^i_\nu A^j_\mu)] \tag{2.81}$$

elde edilir.

2.5 SİMETRİNİN KENDİLİĞİNDEN BOZULMASI

L-Lagranjiyeni ya da H- hamiltonyeni ile betimlenen ve

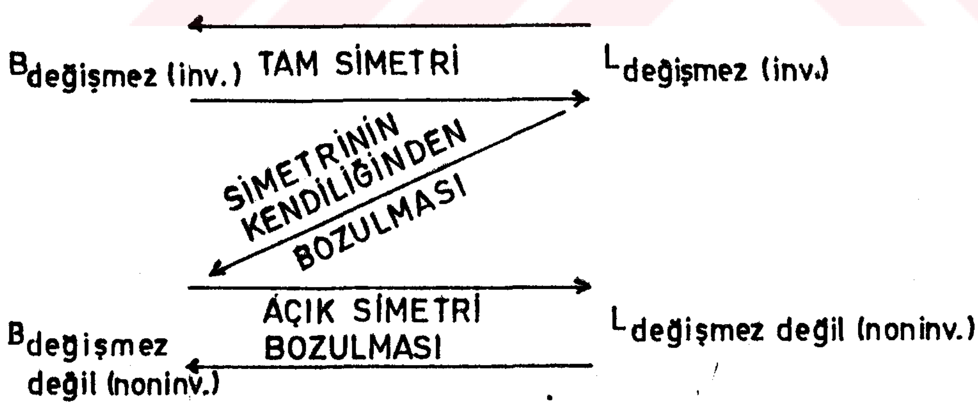
$$H\psi_n = E_n\psi_n \tag{2.82}$$

denklemi ile belirlenen değişik enerji durumlarında olabilen kuantum mekaniksel bir sistem gözönüne alalım.

Herbir durum belli bir E_n enerjisi ve ψ_n dalga fonksiyonu ile belirlenir. E_0 en düşük enerjili (minimum enerjili) durum boşluk (vakum) durumu olarak adlandırılır. E_0 değerine yalnızca bir tek boşluk durumu karşılık geliyorsa katmerli (dejenere) olmayan, birden çok boşluk durumu karşılık geliyorsa katmerli boşluk durumu olarak adlandırılır.

Belli bir G dönüşüm grubu verilsin. G-grubu altında boşluk durumu kendisine dönüşürse değişmezdir, kendisine dönüşmezse değişmez değildir.

Yerel, göreli kuantum alanlar kuramı çerçevesinde dönüşüm grubu altında boşluk durumlarının değişmezliği ve aynı grup altında lagranjiyenin değişmezliği arasında ilişki vardır (Coleman teoremi).



Şekil 2.1: B-Boşlük (vakum) durumları ve L-Lagranjiyenler arasındaki ilişki.

Boşluk durumları değişmez ise lagranjiyen de değişmez olmalıdır (Boşluk durumunun değişmezliği evrenselliğin değişmezliğidir). Boşluk durumu ve lagranjiyenin her ikisinin değişmez olması tam simetri olarak adlandırılır.

Boşluk durumu değişmez değilse lagranjiyen değişmez olabilir de olmayabilir de. Her iki halde de simetri bozulur. Boşluk durumu ve lagranjiyenin her ikisinin değişmez olmaması açık simetri bozulması olarak ifade edilir. Boşluk durumu değişmez değil buna karşın lagranjiyen değişmez ise simetri bozulması kendiliğinden simetri bozulması olarak adlandırılır.

Simetrinin kendiliğinden bozulması sıfır kütleli parçacıkların ortaya çıkmasına neden olur. Bu durum Goldstone teoremi olarak bilinir ve kütlesiz parçacıklar goldston olarak adlandırılır.

Boşluk durumunun değişmez olmaması kütlesiz ayar alanlarının bir kısmını kütleli yapan bir mekanizma verir.

2.5.1. Birinci Tür Ayar Simetrisinin Kendiliğinden Simetri Bozulması

Karmaşık $\phi(x)$ alanının öz-etkileşmesini betimleyen Goldstone modelini inceleyelim (Goldstone, 1961). Bunun

$$\phi(x) \to e^{-i\theta}\phi(x), \quad \phi^+(x) \to \phi^+(x)e^{i\theta} \quad (\theta=\text{Sabit}) \tag{2.83}$$

birinci tür (global) faz dönüşümleri altında değişmez olan lagranjiyen yoğunluğu

$$L = (\partial^\mu\phi^+)\partial_\mu\phi - V(\phi) \quad , \; V(\phi) = \frac{\lambda}{4}\left(|\phi|^2 - \frac{\varepsilon\mu^2}{\lambda}\right)^2 \tag{2.84}$$

dir. λ çiftlenim sabiti pozitiftir (çünkü böyle olmasaydı enerji aşağıdan sınırlı olmayacaktı). (2.84) denkleminde $\mu^2(>0)$'nin ε işareti için iki olası durum vardır: i) $\varepsilon=-1$ için, $\varepsilon\mu^2$ terimi kütle terimidir. $V(\phi)$ potansiyeli bir tek klasik boşluk (= en düşük enerjili olan şekillenim) değerine sahiptir (tam simetri). (Şekil 2.2 a'ya bakınız).

$$\phi(x) \equiv 0 \tag{2.85}$$

ii) $\varepsilon = +1$ için; bu durumda (2.83) kendiliğinden simetrisi bozulan bir fazı betimler; bütün alanlar

$$\phi(x) = v\,e^{-i\theta}\ , \quad v = \sqrt{\mu^2/\lambda}\ , \quad \theta = \text{Sabit}, \quad 0 \leqq \theta \leqq 2\pi \qquad (2.86)$$

en düşük enerjinin şekillenmelerini betimler (Şekil 2.3'e bakınız). Burada alanın θ fazı istekseldir ve birinci tür ayar dönüşümleri (2.83) aracılığı ile değiştirilebilir. $\varepsilon = +1$ halinde ϕ alanının öz-etkileşmesini tedirgeme (pertürbasyon) kuramı olarak incelemek için katmerli klasik bir durumdan hareket edilir, yani (2.86) denkleminin alan şekillenmesinden gidilir ve

$$\phi(x) = \left[v + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\eta(x)\right] \exp\left[-i(\theta + \xi(x)/2\,v\right] \qquad (2.87)$$

alınır. Burada $\eta(x)$ ve $\xi(x)$ gerçel alanlar olup temel durumdan modul ve fazın sapmalarını betimler. $\eta(x) = \xi(x) = 0$ için temel durum (2.86) elde edilir.

(2.84) lagranjiyeninde (2.87) yerine yazılırsa

$$L = \frac{1}{2}(\partial_\mu\xi)(\partial^\mu\xi) + \frac{1}{2}\,(\partial_\mu\eta)(\partial^\mu\eta) - \frac{1}{2}\,\mu^2\eta^2 - \frac{\lambda v}{2\sqrt{2}}\,\eta^3 - \frac{\lambda}{16}\,\eta^4 \qquad (2.88)$$

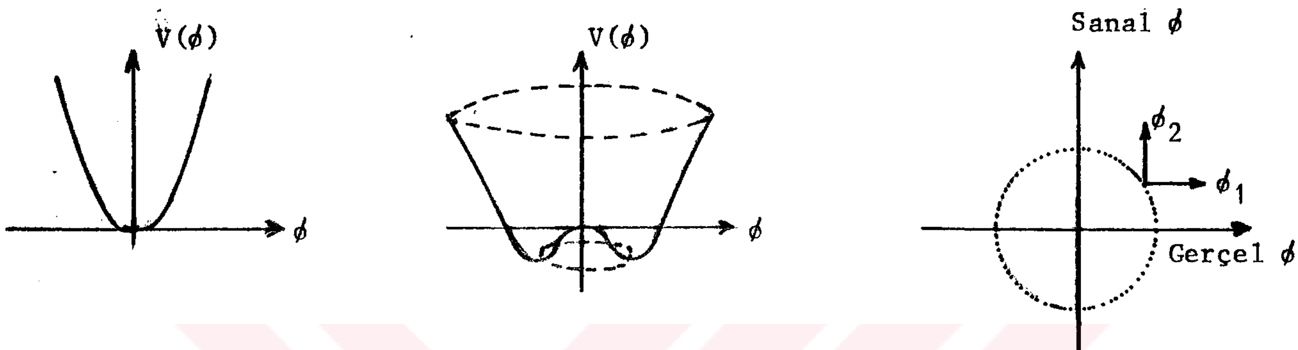
$$+ (\xi \text{ ve } \eta \text{ alanları arasındaki çiftlenim terimleri})$$

elde edilir. Sonuç olarak

i) $\eta(x)$ kütlesi μ olan bir skaler alandır, bu alan v-boşluk değeri etrafında alanın radyal titreşimlerini betimler (Şekil 2.3'e bakınız) ve sonlu kütle radyal doğrultu boyunca kaybolmayan potansiyel bükülmesinden doğar.

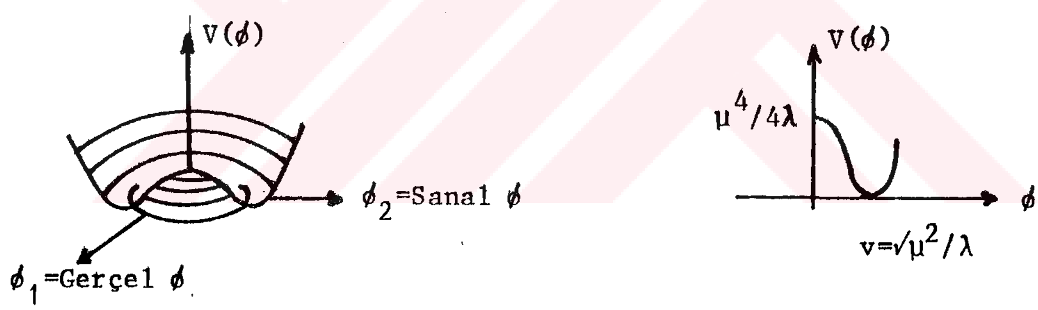
ii) $\xi(x)$ skaler, kütlesiz Goldstone alanıdır. Bunun kütlesizliği potansiyel minimumları vadisi boyuncaki eğriliğin kaybolmasından çıkar. Çünkü (2.87) alanı bu doğrultuda klasik olarak titreşmez, $\xi(x)$ bununla ilgili sıfır öz frekanslı normal titreşimi betimler (Şekil 2.3'e bakınız).

Goldstone modeli birinci tür bir sürekli ayar simetrisinin kendiliğinden bozulan kuramlarının genel bir özelliğini gösterir; bu da kütlesiz skaler alan uyarılmalarının ortaya çıkmasıdır.



a)Katmerli olmayan b) Katmerli c) Saptanmış

Şekil 2.2: Boşluk (vakum) durumları



Şekil 2.3: $\varepsilon=+1$ kendiliğinden simetri bozulmalı fazda Goldstone modeli potansiyeli

Goldstone modelinin ayar grubu (2.83) faz dönüşümlerinin abeliyen U(1) grubudur. Abeliyen olmayan gruplara genelleştirilmesi açıktır. Bu erek için G grubunun bir gerçel temsili altında

$$\phi_i(x) \rightarrow [\exp(-i\theta_k T^k_{ij})]\,\phi_j(x) \;, \quad \theta_k = \text{Sabit}$$
$$\delta\phi_i(x) \rightarrow -i\delta\theta_k T^k_{ij}\phi_j(x) \tag{2.89}$$

olarak dönüşen skaler alanın gerçel bir çoklusunu alalım (Karmaşık temsiller benzer şekilde gözönüne alınırlar).

$$L = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_i)(\partial^\mu \phi^i) - V(\phi) \tag{2.90}$$

lagranjiyeninin $V(\phi)$ potansiyeli (2.89) ayar dönüşümüne göre değişmez olmaktadır.

$$0 = \delta V = \frac{\partial V}{\partial \phi_i}\delta\phi_i = -i\frac{\partial V}{\partial \phi_i}\delta\theta_k T^k_{ij}\phi_j \tag{2.91}$$

$\delta\theta_k$'nin isteksel olması nedeniyle

$$\frac{\partial V}{\partial \phi_i} T^k_{ij}\phi_j = 0 \tag{2.92}$$

olmalıdır. Bu denklemin ϕ_ℓ'ye göre türevi alınırsa

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_\ell} T^k_{ij}\phi_j + \frac{\partial V}{\partial \phi_i} T^k_{i\ell} = 0 \tag{2.93}$$

elde edilir.

Goldstone modeli örneğinde görüldüğü gibi eğer $V(\phi)$, $\phi_i(x)\equiv v_i \neq 0$ için bir minimuma sahip ise simetrinin kendiliğinden bozulması ortaya çıkar. $V(\phi)$'nin (2.89)'daki dönüşümler altında değişmezliği nedeniyle $(\exp(-i\theta_k T^k)v$ de bir minimumdur):

$$\left.\frac{\partial V}{\partial \phi_i}\right|_{\phi_i \equiv v_i} = 0 \;, \qquad \left.\frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_\ell}\right|_{\phi_i \equiv v_i} = (M^2)_{i\ell} \geq 0 \tag{2.94}$$

Minimumda V'nin ikinci türevinin simetrik matrisi $(M^2)_{i\ell}$ negatif özdeğerli değildir.

Goldstone modeline paralel olarak boşluk alan şekillenmesi $\phi_i(x)$ ($=v_i$=Sabit)'ten sapmaları tedirgeme (pertürbasyon) yöntemi ile inceleyelim. Bunun için $\eta_i(x)=\phi_i(x)-v_i$ alanlarını getirelim. (2.90) lagranjiyenindeki potansiyel enerji için

$$V(\phi) = V_o + \frac{1}{2}(M^2)_{i\ell}\eta_i(x)\eta_\ell(x) + \ldots \tag{2.95}$$

kuvvet serisi ile

$$L = \frac{1}{2}(\partial_\mu\eta(x))\partial^\mu\eta(x) - \frac{1}{2}(M^2)_{i\ell}\eta_i(x)\eta_\ell(x) + \ldots \tag{2.96}$$

olur. Buradan $(M^2)_{i\ell}$'nin fiziksel yorumu çıkar: $(M^2_{i\ell})$ $\eta_i(x)$ alanı için kütle karesinin matrisidir. M^2'nin özdeğerleri hakkında fikir yürütebilmek için (2.93) denklemini $\phi_i(x) \equiv v_i$ şeklinde yazalım:

$$(M^2)_{i\ell}\ T^k v = 0 \ , \quad k=1,2,\ldots,N \tag{2.97}$$

Genel olarak v,G'nin bir H alt grubu altında değişmezdir. H'nın Lie cebiri üreticilerini $\bar{T}^{\bar{k}}$, $\bar{k}=1,2,\ldots\bar{N}$ ile gösterelim. v'nin H dönüşümü altındaki değişmezliği

$$\bar{T}^{\bar{k}}_{ij}\ v_j = 0 \tag{2.98}$$

demektir. Sonuç olarak N denklemin $\bar{N}$'si sağlanır. Geriye kalan N-$\bar{N}$ denklem M^2 için özdeğerleri sıfıra götürür. Bu irdeleme bizi Goldstone teoremine (Goldstone, 1961; Goldstone ve diğ.,1962; Bludman ve Klein, 1963) götürür: Kütle karesinin matrisi (N-$\bar{N}$) sıfır özdeğerine sahiptir. Buna ait olan uyarılmalar Goldstone alanları olarak adlandırılır ve kendiliğinden simetri bozulmasının bir sonucudur. M^2'nin geriye kalan değerleri pozitiftir.

Şimdiye kadar incelediğimiz modelleri klasik alan kuramları olarak kabul ettik. Şimdi de kuantize abeliyen olmayan Goldstone modeli için de Goldstone teoreminin geçerli olduğunu görelim. Bağlantısız Green fonksiyonlarının üretici fonksiyonelini gözönüne alarak yol integrali kuantizasyonundan hareket edelim (Jona-Lasinio, 1964):

$$Z\{j\} = \int \mathcal{D}[\phi]\ \exp[i\int dx\ (L + j_i(x)\phi^i(x))]$$
$$T\{j\} = Z\{j\}/Z\{o\} \tag{2.99}$$

Birinci tür sonsuz küçük bir ayar dönüşümünü $Z\{j\}$ integralinde kullanalım: $\phi_i(x) \to \phi_i(x) + \delta\phi_i(x)$, L ve $\mathcal{D}[\phi]$ 'nin ayar değişmezliğinin sonucu olarak

$$\int dx j_i(x)\ T^k_{i\ell} \frac{\delta T\{j\}}{i\delta j_\ell(x)} = 0 \tag{2.100}$$

veya bağlantılı Green fonksiyonlarının $\phi\{j\}=\log T\{j\}$ üretici fonksiyonlarını kullanarak

$$\int dx j_i(x)\ T^k_{i\ell} \frac{\delta \phi\{j\}}{i\,\delta j_\ell(x)} = 0 \tag{2.101}$$

elde edilir. Köşelerin üretici fonksiyoneli ile ilgili Legendre dönüşümü

$$\Gamma\{\varphi\} = -i\int dx j_i(x)\,\varphi^i(x) + \phi\{j\}$$
$$\varphi_i(x) = \delta\phi\{j\}/i\delta j_i(x)\ , \qquad j_i(x) = i\,\frac{\delta\Gamma\{\varphi\}}{\delta\varphi_i(x)} \tag{2.102}$$

ile (2.101) denklemi

$$\int dx\ \frac{\delta\Gamma\{\varphi\}}{\delta\varphi_i(x)}\ T^k_{i\ell}\varphi_\ell(x) = 0 \tag{2.103}$$

olur. Simetrinin kendiliğinden bozulması halinde alan, temel durumda sabit fakat sıfırdan farklıdır, yani

$$v = \langle 0|\phi_i(x)|0\rangle = \left.\frac{\delta\phi\{j\}}{i\delta j_i(x)}\right|_{j=0} \neq 0 \tag{2.104}$$

dır. ϕ alanının ters ilerleticisi için

$$\left.\frac{\delta^2\Gamma\{\varphi\}}{\delta\varphi_i(x)\delta\varphi_\ell(y)}\right|_{\varphi=v} = -(\mathcal{D}'^{-1})_{i\ell}(x-y) \qquad (2.105)$$

elde edilir. (2.103) denkleminin φ_ℓ'ye göre türevi alınır, φ_i yerine v_i yazılır [$\varphi_i \to v_i$ limiti $\int dx$ integrasyonu ile değiştirildi; ancak tekillikler ortaya çıkıyorsa bu yapılamaz. Buradan Goldstone teoreminin geçerliliği için sınırlamalar da ortaya çıkabilir (Becher ve diğ.,1984, s.259)] ve momentum uzayında dönüşümü yapılırsa (2.105) ile

$$(\mathcal{D}'^{-1})_{ji}(p=0)(T^k_{i\ell})\, v_\ell = 0 \qquad (2.106)$$

elde edilir. Bu,klasik yaklaşımda Goldstone teoreminin kanıtı için kullanılan (2.97) formülünün aynısıdır. Bu, birinci tür ayar simetrili kuantumlu kuramlarda ve simetrinin kendiliğinden bozulması aracılığı ile kütle üretilmesinde kütlesiz Goldstone alanı ortaya çıkıyor demektir.

2.5.2 İkinci Tür Ayar Simetrisinin Kendiliğinden Simetri Bozulması

$V(\phi)$ Goldstone potansiyelli bir ϕ-Higgs alanına minimal olarak çiftlenen ikinci tür ayar simetrili bir ayar alan kuramında simetrinin kendiliğinden bozulmasının sonucunda ayar alanlarının bir kısmı kütleli olur. Bu durumda kütlesiz Goldstone bozonları görülmez.

Kütle üretme mekanizmasını Higgs-Kibble modeli (Higgs, 1964;Englert ve Brout, 1964;Guralnik ve diğ.,1964;Kibble,1967; Bernstein, 1974) olarak adlandırılan modelde ele alalım. Bu modelin lagranjiyeni yüklü alan olarak Higgs alanlarını alan abeliyen olmayan bir ayar kuramı betimler:

$$L = -\frac{1}{4} F^k_{\mu\nu} F^{\mu\nu,k} + \frac{1}{2} (D_\mu \phi_i)(D^\mu \phi^i) - V(\phi)$$
$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4} (\phi_i \phi^i - \frac{\varepsilon\mu^2}{\lambda})^2 \quad , \; D_\mu = \partial_\mu + i g A^k_\mu T_k \qquad (2.107)$$

Grup kuramını işin içine katmak için SO(n) grubu ile yetinelim (Simetrinin bozulmasının grup kuramı için (Kibble,1967)'ye bakınız). Simetrinin korunduğu H alt grubu SO(n-1)'dir ((2.98) denklemine bakınız).

Örneğimizde ϕ_i skaler alanları ve SO(n) grubunun adjoint temsiline karşılık gelen N=n(n-1)/2 ayar alanları tanımlanan temsile uygun olarak dönüşürler. L - ikinci tür ayar dönüşümleri altında değişmezdir. Klasik temel durum (en düşük toplam enerjili durum) bütün ϕ_i sabit alanları için $\phi_i \phi^i = \mu^2/\lambda = v$ alarak temel durumun küçük uyarılmalarını

$$\phi_i(x) = \exp(-i T_{\bar{k}} \xi^{\bar{k}}(x)/v) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v+\eta(x) \end{pmatrix}, \; T_{\bar{k}} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v \end{pmatrix} \neq 0 \; , \; \bar{k}=1,\ldots,N-\bar{N} \qquad (2.108)$$

ile parametrize edeceğiz ((2.87, 98) denklemine bakınız). SO(n) grubu için $N-\bar{N} = n(n-1)/2 - (n-1)(n-2)/2 = n-1$ 'dir.

Yukarıda gözönüne alınan modellerden ayrı olarak şimdi $\xi^{\bar{k}}(x)$ Goldstone alanı $\exp[-i T_{\bar{k}}\, \xi^{\bar{k}}(x)/v]$ ikinci tür ayar dönüşümü parametresi olarak görülebilir (yani fiziksel anlamı yok demektir). (2.107) lagranjiyeninin ayar simetrisinden ötürü $\exp[-i T_{\bar{k}}\, \xi^{\bar{k}}(x)/v]$ ayar dönüşümünü işin içine sokmak suretiyle Goldstone serbestlik derecesinden ayrılabilinir (İkinci tür ayar dönüşümlerine karşı değişmez bir lagranjiyen yoğunluğunda simetri kendiliğinden bozuluyorsa istenmeyen Goldstone bozonlarından sakınmak için ayar serbestliğinden yararlanılabilir. Bu arada başlangıçta kütlesiz olan ayar alanları kütleli olurlar). Buna göre (2.108) denklemindeki $\phi_i(x)$ Higgs alanı

$$\phi_i(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ v+\eta(x) \end{pmatrix} \tag{2.109}$$

ile verilir.

Ayar alanlarının formuna belli kısıtlamalar getirerek örneğin $A_\mu^k(x)$ için $\partial^\mu A_\mu^k(x)=0$ olacak şekilde ayarlar saptanır. Ayar saptanması başka alanları kullanarak da yapılabilir. (Bu durumda bunlar kolay dönüşmezler). ϕ_i' nin denklem (2.109)'da verilen forma sahip olma isteği bir ayar saptar. Bu ayar fiziksel olmayan serbestlik derecesinin ortaya çıkmadığı ve S-matrisinin üniter olduğu üniter ayardır. (2.109) ayarında (2.107) lagranjiyeni

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^k F^{\mu\nu,k} + \frac{1}{2} M^2_{\tilde{k}\tilde{k}'} A^{\tilde{k}} A^{\mu,\tilde{k}} + \frac{1}{2} (\partial_\mu\eta)(\partial^\mu\eta) - \mu^2\eta^2$$

$$+ \{\text{Üç ve dört alanları arasındaki çiftlenim terimleri}\}$$

$$M^2_{\tilde{k}\tilde{k}'} = g^2v^2(\tilde{T}_{\tilde{k}}\,\tilde{T}_{\tilde{k}'})_{nn} = \text{Kütlenin karesi matrisi} \tag{2.110}$$

dir. Buradan aşağıdaki sonuçlara varılır:

i) $N-\tilde{N}$ (SO(n) için n-1) ξ alanı böylece ayarlanır. Ayar kuramında simetrinin kendiliğinden bozulması halinde Goldstone bozonları görülmezler.

ii) Kuantumları Higgs parçacığı olarak adlandırılan η alanı $M=\mu\sqrt{2}$ kütleli, yüksüz, skaler alandır.

iii) $N-\tilde{N}$ (SO(n) için n-1) vektör alanı kütle (M=gv) kazanır ve kütlesiz vektör alanlarının sahip olmadığı boyuna fiziksel polarizasyonlu durumlara da sahiptirler.

iv) Geriye kalan $\tilde{N}(=(n-1)(n-2)/2)$ vektör alanları kütlesiz kalırlar.

Goldstone modlarının kütleli vektör bozonların boyuna polarizasyonlu durumlara değiştirilmesi Higgs mekanizması olarak bilinir.

(2.107) denklemi ile betimlenen ayar alan kuramı kuantize ve renormalize edilebilirdir. Bu $\varepsilon = -1$ için kesinlikle doğrudur, fakat simetrinin kendiliğinden bozulmasında da ($\varepsilon = +1$ için de) uygulanabilirdir ('t Hooft, 1971; S.W.Lee, 1974). (2.110) denklemi aynı kuramın yalnızca eşdeğer bir formülasyonunu temsil ettiğinden Higgs mekanizması ile kütleli vektör alanlı renormalize bir kuramın formüle edilmesinde kullanılabilir. Bu nedenle ağaç diyagram yaklaşımı ötesinde uygun kuantizasyon ve geliştirme aşağıdaki iki esas gözönüne alınarak yapılabilir:

i) Bir ayar saptanması (gauge fixing),

ii) kuantizasyon yöntemine uygun olarak Faddeev-Popov alanları getirilmesi.

Simetrinin kendiliğinden bozulduğu ayar alan kuramlarının kuantizasyonu bir ayar saptanmasını gerektirir. Üniter ayarla vektör bozonların kanonik formu elde edilir ve fiziksel olmayan skaler bozonlar mevcut olmazlar. Bu ayarda S-matrisinin üniterliği açıktır fakat Green fonksiyonları renormalize edilemeyebilirler. Ancak S-matrisinin hesaplanmasından sonra ıraksaklıklar gider (Weinberg,1972; S.Y.Lee,1972; Appelquist ve Quinn, 1972). Ayrıca S matrisinin sonlu kısmının tamamı belli koşullar altında biricik olmayabilir (Jackiw ve Weinberg, 1972; Bars ve Yoshimura, 1972). Bu nedenle simetri bozulmasının olmadığı durumda olduğu gibi renormalize bir ayar saptanması uygundur.

't Hooft ayarında Higgs modelini kısaca abeliyen SO(2) ayar grubu için tartışalım. $\phi = (\phi_1\ ,\ v+\eta)$'li form ile (2.107) ayar değişmez lagranjiyen

$$
\begin{aligned}
L = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} g^2 v^2 A_\mu A^\mu + \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta)\partial^\mu \eta - \mu^2 \eta^2 \\
& + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_1)\partial^\mu \phi_1 + g v (\partial^\mu A_\mu)\, \phi_1 \qquad (2.111) \\
& + (\text{üç ve dört alanları arasındaki çiftlenim terimleri})
\end{aligned}
$$

olur. 't Hooft ayarında bütün bilineer karışım terimleri (örneğimizde $gv(\partial^\mu A)\phi_1$) alanlarda görülmeyecek şekilde lagranjiyenin ayarı saptayan kısmı L_{fix} seçilir:

$$C\,[A(x)] = \sqrt{\xi}\,\partial^\mu A_\mu(x) + \frac{1}{\sqrt{\xi}} M\phi_1(x) \;, \quad M = g\,v \tag{2.112}$$

$$L_{fix} = -\frac{1}{2}\,(C\,[A\,(x)])^2 = -\frac{1}{2}\,\xi\,[\partial^\mu A_\mu(x) + \frac{1}{\xi} M\phi_1(x)]^2 \tag{2.113}$$

Böylece $L + L_{fix}$'nin kütle matrisi alanlarda köşegeneldir. Bu durumda, p momentum olmak üzere ϕ_1 'in ilerleticisi

$$\frac{i}{p^2 - M^2/\xi} \tag{2.114}$$

ve ayar alanı ilerleticisi

$$i.\frac{-g_{\mu\nu} + p_\mu p_\nu(\xi-1)/(\xi p^2 - M^2)}{p^2 - M^2} \tag{2.115}$$

dir. 't Hooft-Feynman ayarında, ϕ_1 'in ilerleticisi

$$\frac{i}{p^2 - M^2} \tag{2.116}$$

ve ayar alanı ilerleticisi

$$\frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2 - M^2} \tag{2.117}$$

olur.

Faddeev-Popov hayalet alanlarının lagranjiyeni ayarı saptayan $C[A_\mu(x)]$'den hesaplanır. Ayarı saptayan terim genel olarak $C^k[A_\mu^\theta]$ şeklinde alınırsa ayarı saptayan (gauge fixing) lagranjiyen

$$L_{fix} = -\frac{1}{2}\,(C^k[A_\mu^\theta(x)])^2 \tag{2.118}$$

dir. $C^k[A_\mu(x)]$ 'nin sonsuz küçük ayar dönüşümü

$$\delta C^k[A_\mu^\theta(x)] = K^{k\ell}\delta\theta^\ell(x) \tag{2.119}$$

şeklinde yazılabilir:

$$\frac{\delta C^k[A_\mu^\theta(x)]}{\delta\theta^\ell(x)} = K^{k\ell} \tag{2.120}$$

ve u^k hayalet alanları olmak üzere Faddeev-Popov hayalet alanları lagranjiyeni

$$\begin{aligned} L_{FP} &= \bar{u}^k(x)\,\frac{\delta C^k}{\delta\theta^\ell(x)}\,u^\ell(x) \\ &= \bar{u}^k(x)\,K^{k\ell}u^\ell(x) \end{aligned} \tag{2.121}$$

dir (Hollik, 1988; Becher ve diğ.,1984, s.111). Böylece klasik lagranjiyene $L_{fix} + L_{FP}$ eklendiğinde

$$L = L_{klasik} + L_{fix} + L_{FP} \tag{2.122}$$

olur.

Ayar saptanma teriminin getirilmesi ile ayar değişmezliği kaybolur. Bununla birlikte bütün fiziksel sonuçlar için ayar değişmezliği sonuçları ile birlikte (2.122) lagranjiyeninin simetrisi ayar dönüşümlerinin hayalet alanlarını da içerecek şekilde genişletilmesi ile yeniden tanımlanabilir.

Genişletilmiş ayar dönüşümleri Becchi-Rouet-Stora dönüşümleridirler (Yndurain, 1983, s.23; Aoki ve diğ., 1982).

Ağaç diyagramı yaklaşımı hesaplarında (2.122) lagranjiyeni ile yetinilir.

Kuantizasyon tekniği ayrıntılarına (ve renormalizasyona) girmeden kuramı oluşturmaya devam edelim.

Kütleli ayar vektör bozonlar aracılığı ile etkileşen spinör ve skalar alanların abeliyen olmayan ayar kuramı elektrozayıf fenomolojileri betimler. Higgs mekanizması bu türde renormalize edilebilir bir kuramı oluşturmamıza olanak sağlar. Skaler Higgs alanları simetrinin kendiliğinden bozulması aracılığı ile ayar bozonlarına kütle kazandırır. Böyle bir kuramın Lagrange fonksiyonunun genel ve ayar değişmez kısmı için bir inşa ilkesi aşağıdaki şekilde verilir:

i) Ayar alanları G'nin adjoint temsiline (boyutu grubun mertebesine eşit olan temsil) göre dönüştüklerinden ve ayar alanlarının sayısı ($W_k = W^+, W^-, Z, \gamma, \ldots$) buradan çıktığından bir G ayar grubu seçilir. Ayar alanı çiftlenimleri $f_{k\ell m}$ yapı sabitleri ile verilir.

ii) Sol- ve sağ-elli fermiyonlar $\psi_i = (\nu_e, e, \nu_\mu, \mu, \ldots, u, d, s, c, \ldots)$ ve skaler ϕ^r'ler sırasıyle

$$[L_k, L_\ell] = i f_{k\ell m} L_m \;, \quad [R_k, R_\ell] = i f_{k\ell m} R_m \,, \quad [P_k, P_\ell] = i f_{k\ell m} P_m$$

olarak dönüşecek şekilde G'nin L_k, R_k ve P_k temsilleri seçilir (Temsiller seçilirken γ_5 anomalisinin ortaya çıkmayacağına dikkat edilmelidir!)

iii) Ayar değişmez, yerel ve renormalize edilebilir lagranjiyenin genel formu skaler ve fermiyonlar arasındaki çiftlenimleri ve skaler alanların öz çiftlenimi $V(\phi)$'yi de içerecek şekilde

$$L = -\frac{1}{4} F^{k}_{\mu\nu}F^{\mu\nu,k} + \bar{\psi}_i(i\gamma^{\mu}D_{\mu}-M)\psi_j + \frac{1}{2}(D^{rs}_{\mu}\phi_s)(D^{\mu,rs'}\phi^{s'}) - V(\phi)$$

$$+ g\bar{\psi}_i\phi^r\left(X^{ij}_{L,r}\frac{1-\gamma_5}{2} + X^{ij}_{R,s}\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\psi_j \qquad (2.123)$$

ile verilir. Burada

$$F^{k}_{\mu}(x) = \partial_{\mu}A^{k}(x) - \partial_{\nu}A^{k}(x) - g\, f_{k\ell m}\, A^{\ell}_{\mu}\, A^{m}_{\nu} \qquad (2.124)$$

$$D^{ij}_{\mu}\psi_j(x) = \left[\delta^{ij}\partial_{\mu} + igA^{k}_{\mu}(x)\left(L^{ij}_{k}\frac{1-\gamma_5}{2} + R^{ij}_{k}\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\right]\psi_j(x) \qquad (2.125)$$

$$D^{rs}_{\mu}\phi_s(x) = \left[\delta^{rs}\partial_{\mu} + igA^{k}_{\mu}(x)P^{rs}_{k}\right]\phi_s(x) \qquad (2.126)$$

dir. (L^{ij}_{k} ve R^{k}_{ij} sırasiyle sol-elli ve sağ-elli fermiyon ayar bozon çiftlenim sabitleridirler). $V(\phi)$ ϕ 'ye göre en yüksek derecesi dört olan bir polinomdur. Daha yüksek dereceden terimler diğer çiftlenimler halinde de ortaya çıkmaz (Böyle olmasaydı eksi boyutlu kütle çiftlenim sabitleri kuramın renormalizeliliğini bozardı). $V(\phi)$'nin uygun seçimi ile G-grubunun simetrisi kendiliğinden bozulabilirdir ve böylece Higgs-Kibble mekanizması uygulanabilir. Klasik boşluk vektörü ϕ_0'ı değişmez bırakan $H\subset G$ simetri grubunun ayar bozonları kütlesiz kalırlar, geri kalanlar kütleli olurlar. Ayar kuramında Higgs yapısı aracılığı ile $G\rightarrow H$ simetrisine kendiliğinden bozulan denir. Eğer matris yazımı

$$[L_k, X^{r}_{L}] = X_{L,s}P^{sr}_{k}, \qquad [R_k, X^{s}_{R}] = X_{R,s}P^{sn}_{k}$$

geçerli ise $\bar{\psi}\phi\psi$ çiftlenimi ayar değişmezdir.

Elektrozayıf etkileşmelerin fenomolojik analizinden elektrozayıf izospin ve zayıf üstün yükün G=SU(2)xU(1) ayar grubu ve W^{+}_{μ} , W^{-}_{μ} , Z_{μ} , A_{μ} dört ayar alanının minimal bir kuram için temel olarak gereksinildiğini biliyoruz (Yukarıdaki şemayı temel alan daha karmaşık modeller bu yapıyı içermelidir).

2.6 ELEKTROZAYIF ETKİLEŞMELERİN AYAR KURAMI

Ayar alanları temel parçacık etkileşmelerinin birleşik kuramını oluşturmayı olanaklı yapar. Bu bölümde [illegible]leştirilmiş elektromagnetik ve zayıf etkileşmeleri gözönüne alacağız

Elektromagnetik ve zayıf etkile[illegible]in birleştirilmesinde ana zorluk bunların temel özelliklerindeki farklardan doğar. Elektromagnetik etkileşmeler uzun erişimli, zayıf etkileşmeler kısa erişimlidir. Bu nedenle zayıf etkileşmelerin aracıları (ara vektör bozonlar) elektromagnetik etkileşmenin araparçacığı olan (kütlesiz) fotondan farklı olarak kütleli olmalıdırlar. Elektromagnetik etkileşmelerde paritenin korunmasına karşın zayıf etkileşmelerde parite korunmaz.

Bu zorluk her iki etkileşmenin araparçacığı olarak ayar alanları varsayılması ve simetrinin kendiliğinden bozulmasının kullanılması ile giderilebilir. Simetrinin kendiliğinden bozulmasının uygun seçimi, pariteyi koruyan akımla etkileşen ve kütlesiz kalan ayar alanı (foton) ve buna karşın geriye kalan ayar alanları (ara bozonlar) pariteyi korumayan etkileşme için kütle kazanırlar.

Leptonların elektrozayıf etkileşmelerini içeren çok sayıda birleşik modellerin olduğu biliniyor. Bunlardan en başarılısı Glashow, Salam ve Weinberg'in ileri sürdüğü standart model olarak adlandırılanıdır. Bu model Glashow, Illipoulos ve Maiami tarafından kuarkların zayıf etkileşmelerini içerecek şekilde genişletilmiştir (GIM-WS modeli).

Birleşik modellerin lagranjiyenini kurmak için aşağıdaki adımlar gereklidir:

i) Etkileşmeye aracılık eden alanları belirleyen ayar grupları seçilir; ayar alanlarının sayısı bu grubun adjoint temsillerinin boyutuna eşittir.

ii) Modelin temsil ettiği fermiyonlar seçilir.

iii) Fermiyonların yerleştirildiği ayar gruplarının temsilleri (genellikle en düşük temsil) seçilir.

iv) Parçacıkları kütleli yapmak için uygun sayıda mezon çokluları getirilir.

v) Modelin son bileşimi belirlenir.

vi) Modelin global değişmez lagranjiyeni yazılır.

vii) Karşılık gelen yerel değişmez lagranjiyen yazılır.

viii) Ayar alanlarını kütleli yapmak için simetrinin kendiliğinden bozulması ve Higgs mekanizması kullanılır.

Elektromagnetik ve zayıf etkileşmelerin en basit modelini (elektro-zayıf kuram) oluşturalım:

Kuramın oluşturulmasında fenomolojik Fermi modelinin yapısından hareket edilir. Fermiyonlar arasındaki zayıf etkileşmeleri sağlamak için üç ayar alanı (üç ara vektör bozon) getirilir. Üç boyutlu adjoint temsile sahip minimal üniter grup SU(2) grubudur. Fermiyonlar arasındaki elektromagnetik etkileşmeleri açıklamak için bir ayar alanı (izotekli) yeterlidir. Adjoint temsilinin boyutu bir olan grup U(1)'dir. Böylece modelin ayar grubu SU(2) ve U(1) gruplarının çarpımları şeklinde SU(2)xU(1) olarak alınır. Grup SU(2) ile U(1) gruplarının çarpımı olması nedeni ile iki çiftlenim sabiti (SU(2) zayıf izospin için g ve zayıf üstün yük U(1) için g') ile verilir. ($G=G_1 \times G_2$ olmak üzere sırası ile üreticiler T_a ve S_b ile G nin potansiyelinin Lie cebiri değeri $A_\mu(x)=gA_\mu^aT_a + g'B_\mu^bS_b$ 'dir).

Ayar alanları minimal ayar grubu SU(2) x U(1)'in adjoint temsillerine karşılık dört tane vektör alanıdır (Ayar alanları zayıf izospin I_W^k , k=1,2,3 için $A_\mu^k(x)$ ve zayıf üstün yük için $B_\mu(x)$'dir):

$$F^k_{\mu\nu} = \partial_\mu A^k_\nu - \partial_\nu A^k_\mu + g\epsilon_{k\ell m} A^\ell_\mu A^m_\nu \quad \text{ve} \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$$

olmak üzere ayar alanı lagranjiyeni ($\epsilon_{k\ell m}$ ≡ izospin yapı sabitleridir)

$$L_G = -\frac{1}{4} F^k_{\mu\nu} F^{\mu\nu,k} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tag{2.127}$$

dir.

Fermiyonları (leptonlar (e^-, μ^-, τ ve bunların nötrinoları) ve kuarklar) parçacık ikililerine göre (i - ikilileri sayısal olarak belirlemek üzere) düzenleyelim:

$$\{(\nu_e,e),\ (\nu_\mu,\mu),\ (\nu_\tau,\tau),\ldots,(u,d'),\ (c,s'),(t,b'),\ldots\}=\{(a^i,b^i)\}=\{\psi_f\} \tag{2.128}$$

Leptonlar için bu bireysel olarak korunumlu lepton sayıları (L_e, L_μ, L_τ, ...) ile önerilir. Kuarklar için kütleye göre (u,d) hafif kuarklar, (c,s) orta ağırlıkta kuarklar, vs. olarak görülebilir. Kuarklardaki üslü durumlar ilk iki nesil için Cabibbo dönüşümü ile dönüşmüş alanları, üç nesil (d',s',t') olduğunda Kobayashi-Maskawa dönüşümü ile dönüşmüş alanları gösterir:

$$h^{(+)}_\mu = (\bar{u}\ ,\ \bar{c},\ \bar{t},\ldots)\ \gamma_{\mu L}\ U \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \\ \vdots \end{pmatrix} = (\bar{u},\bar{c},\ldots)\ \gamma_{\mu L} \begin{pmatrix} d' \\ s' \\ \vdots \end{pmatrix} \tag{2.129}$$

Bu ikililerde sol-elli alanlar

$$\psi_L(x) = \frac{1}{2}\,(1-\gamma_5)\,\psi(x) \tag{2.130}$$

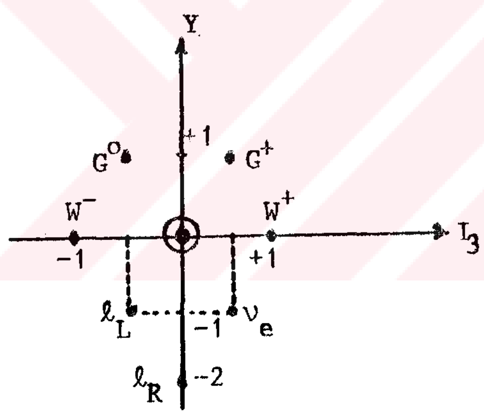
zayıf izospin $I^k_W = \frac{\tau^k}{2}$ 'nin (τ^k ≡ Pauli matrisleri) temel iki boyutlu temsillerinde birleştirilir: $\psi^i_L(x) = (a^i_L(x),\ b^i_L(x))$. Sağ-elli alanlar

$$\psi_R(x) = \frac{1}{2}\,(1+\gamma_5)\,\psi(x) \tag{2.131}$$

bir boyutlu trivial temsile yerleştirilir. Diğer bir deyişle sol-elli fermiyon alanları bir ikili oluştururken sağ-elli fermiyon alanları birli oluştururlar. (Weinberg-Salam modelinde, standart kuramda sağ-elli nötrinolar yoktur). Zayıf üstün yük, fermiyon elektrik yükü Q ve izospin arasındaki bağıntı (Gell-Mann Nishijima formülü), I_3 zayıf izospinin üçüncü bileşeni olmak üzere

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}\,Y \tag{2.132}$$

dir. Standart kuramda, Y, I_3 uzayında leptonların ve öngörülen araparçacıklar ve fiziksel olmayan Goldstonların yerleşimi Şekil 2.4'te veriliyor.



ν_L için; I_3=1/2, Y=1
ν_R için; I_3=0, Y=0

Şekil 2.4: Y,I_3 Uzayında parçacıkların konumları.

Fermiyonların lagranjiyeni

$$\begin{aligned} L_F = \sum_i \Big[& \bar{\psi}^i_L \gamma^\mu \big(i\partial_\mu + g\,\frac{\tau^k}{2} A^k_\mu - g'\,\frac{Y_L}{2} B_\mu\big)\,\psi^i_L \\ & + \bar{a}^i_R \gamma^\mu \big(i\partial_\mu - g'\,\frac{Y_{aR}}{2} B_\mu\big)\, a^i_R + \bar{b}^i_R \gamma^\mu \big(i\partial_\mu - g'\,\frac{Y_{bR}}{2} B_\mu\big)\, b^i_R \Big] \end{aligned} \tag{2.133}$$

(Leptonlar için lagranjiyen yazılırken ikinci satırın ilk terimi sağ-elli nötrino alanları standart kuramda içerilmediğinden yazılmaz).

Ayar alanlarının üçü (iki yüklü, bir yüksüz) kütleli olurken, dördüncü ayar alanının (foton'un) kütlesi kesinlikle sıfır olmalıdır. Bunu gerçeklemek için SU(2)x(U(1) simetrisinin kendiliğinden bozulması ve Higgs mekanizması, kalan simetri olarak elektromagnetik ayar grubu $U(1)_{em}$ korunumlu kalacak şekilde uygulanmalıdır. Bu erek için zayıf izospin ikilisi formunda olan vektör bozonlara ayar değişmez olarak çiftlenen $\Phi(x)=(\phi^{+},\phi^{0})$ karmaşık skaler alanı seçilir. (Higgs-Kibble mekanizmasını uygulayabilmek için lagranjiyene bir Higgs alanı eklenmelidir. Bir vektör alanı kütleli yapmak için bir tek karmaşık Higgs alanı yeterli gelmiyor. Bundan sonra gelen olanak bir Higgs ikilisidir).

Doğada bütün fermiyonların kütleli ve zayıf etkileşmelerde ortaya çıkan ayar bozonlarının çok büyük kütleye sahip olmaları gerekliliğine karşın L_G ve L_F lagranjiyenleri ile betimlenen ayar alanları ve madde alanlarının hepsi kütlesizdir (Simetrinin kendiliğinden bozulması aracılığı ile kütle kazanacaklar).

L- lagranjiyeninin sürekli bir simetrisini gözönüne alalım. Noether teoremine göre

$$[Q\,,\Phi] = i\,\delta\Phi \qquad (2.134)$$

simetri dönüşümünü üreten ve hamiltonyen ile sıradeğiştiren

$$[Q\,,H] = 0 \qquad (2.135)$$

korunan bir Q yükü vardır. Serbestlik derecelerinin sonlu olduğu kuantum mekaniği durumunda minimum enerjili durum bir tanedir ve H ve Q'nun aynı anda özdurumudur. Sonsuz serbestlik dereceli kuantum alan kuramında minimum enerjili durumlar arasında geçişler sonsuz sayıda işlem ile olanaklı olduğundan katmerli boşluk durumlarının olması olasıdır. Bütün durumlar Q yükünün özdurumu olmayan bir boşluk (vakum) üzerine inşa edilmiştir.

$$Q\,|\,0> \neq 0 \qquad (2.136)$$

Diğer bir deyişle lagranjiyenin simetrisi vakum katmerliliği olarak gerçekleştirilir ve vakum üzerine inşa edilmiş gerçek evrende açık değildir.(Bu simetrinin kendiliğinden bozulmasıdır). Bununla birlikte simetrinin kalanı (2.136) durumuna karşılık gelen Goldstone parçacığı denen skalar mod aracılığı ile gözlenir. Q ile H'nın sıradeğişme bağıntısı hesaba katıldığında bu modun kütlesiz bir uyarılma olduğu bulunur. Simetrinin kendiliğinden bozulmasını betimlemek için (2.134) eşitliğindeki gibi dönüşen skalar alanları getirmek en uygunudur. $\delta\Phi$'nın boşluk beklenen değerinin sıfır olmadığı varsayılır:

$$<0|\,\delta\Phi\,|\,0> \neq 0 \qquad (2.137)$$

Bu simetrinin kendiliğinden bozulmasıdır. Sıfır olmayan boşluk beklenen değerine sahip olmak için bu boşluğun kararlılığını garantileyen bir $\delta\Phi$ potansiyel terimi L'ye eklenmelidir. Bu skaler, elementer bir alan veya simetrinin kendiliğinden bozulmasının etkin ifadesine yardımcı olarak kabul edilebilir. Bu boşlukta oluşturulmuş Hilbert uzayında $\delta\Phi$'yi beklenen değeri komşuluğunda açmak ve klasik ve kuantumsal salınan kısımlarını ayırmak uygundur. Böylece bu boşlukta etkin lagranjiyen elde edilir.

Simetrinin bir yerel ayar simetrisi olduğu durumda Goldstone modu ayar bozonunun boyuna bileşeni olarak soğurulur ve sonuç olarak ayar bozonları kütleli olurlar (Buna Higgs mekanizması denir). Yukarıdaki olay aşağıdaki gibi açıklanabilir: Higgs skaleri olarak adlandırılan Φ-skalerinin ayar değişmez kinetik terimi

$$|D_\mu \Phi|^2 \equiv |(\partial_\mu - i\, g \frac{\tau^k}{2} A_\mu^k)\Phi|^2 \tag{2.138}$$

biçimini alır. Q^k yükü ile üretilen simetrinin kendiliğinden bozulduğunu kabul edelim:

$$Q^k \,|\, 0 > \neq 0 \tag{2.139}$$

Bu, Φ-skaları cinsinden aşağıdaki gibi yazılır:

$$<\delta^k \Phi> = i\tau^k <\Phi> \neq 0 \tag{2.140}$$

Q^k'ya karşılık gelen ayar bozonu A_μ^k'nın bu boşlukta (2.138)'den üretilen kütle matrisi

$$L_{kütle} = M_{k\ell}\, A_\mu^k\, A^{\ell,\mu} \tag{2.141}$$

$$M_{k\ell} = <\Phi^+ > \tau^k\, \tau^\ell < \Phi > \tag{2.142}$$

dir.

Fermiyonlar da simetrinin kendiliğinden bozulması aracılığı ile kütle kazanabilirler. Ayar değişmez bir şekilde Φ-skaları ile ψ etkileşirse

$$L_{etk.} = \sum_f \bar{\psi}\, \psi\, \Phi \tag{2.143}$$

ve kütle terimi

$$L_{kütle} = \sum_f \bar{\psi}\, \psi < \Phi > \tag{2.144}$$

ortaya çıkar.

Higgs lagranjiyeni

$$\begin{aligned} L_H = &\,|(\partial_\mu - ig \frac{\tau^k}{2} A_\mu^k - ig' \frac{1}{2} B_\mu)\Phi|^2 - \frac{\lambda}{4}(\Phi^+\Phi - \frac{v^2}{2})^2 \\ &- \sum_{i,j} (h_{ij}\, \bar{\psi}_L^j\, \Phi\, b_R^i + \tilde{h}_{ij}\, \bar{\psi}_L^j\, \tilde{\Phi}\, a_R^i + h.c) \ , \ \tilde{\Phi} = i\tau_2 \Phi^* \end{aligned} \tag{2.145}$$

dir.

GSW kuramındaki klasik L_{GSW} lagranjiyeni

$$L_{GSW} = L_G + L_F + L_H \tag{2.146}$$

dir.

GSW kuramında skalar alanın öz-etkileşmesi $V(\Phi)$, ikinci tür simetrinin kendiliğinden bozulması olacak şekilde seçilir ve Higgs mekanizması ikinci tür ayar simetrisinin kendiliğinden simetri bozulmasında olduğu gibi uygulanır.

$V(\Phi)$'nin kendi minimum değerini aldığı vektörler arasında $|\Phi|^2 = v^2/2$ olacak şekilde öyle bir ϕ_0 seçilir ki geri kalan simetri elektrik yükünü üreten $U(1)_{em}$ ayar dönüşümü olsun:

$$Q\phi_0 = (I_3 + \frac{1}{2} Y)\,\phi_0 = \frac{1}{2}(\tau^3 + 1)\,\phi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{01} \\ \phi_{02} \end{pmatrix} = 0 \tag{2.147}$$

Simetrinin kendiliğinden bozulduğu $SU(2)xU(1) \rightarrow U(1)_{em}$ için klasik boşluk ϕ_0 de görülür:

$$\phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix} \tag{2.148}$$

Fermiyonlara kütle kazandırmak için SU(2) ikilisi Higgs alanlarını getirmek gereklidir (çünkü $\bar{\psi}_L \psi_R$ terimleri ikili gösterime aittir ve $\bar{\psi}_L \psi_R \Phi$ Yukawa (Higgs-Fermiyon) etkileşmesi ayar değişmez olmalıdır).

Tek bir Higgs ikili alanının zorunlu olarak SU(2)xU(1)'in U(1)'e bozulmasına neden olduğuna dikkat edilmelidir. Kalan U(1) simetrisi yük işlemcisinin uygun bir şekilde tanımlanması ile QED olarak yorumlanabilir.

Φ'nin ifadesi H, G_1, G_2 ve $G_3 \equiv G^0$ hermitiyen alanları cinsinden

$$\Phi = \begin{pmatrix} G^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v + H + iG^0) \end{pmatrix}, \quad \tilde{G}^+ = G^-, \quad G^{\pm} = (G_1 \pm iG_2)/\sqrt{2} \tag{2.149}$$

olarak verilir.

L_H'den ayar bozon kütle matrisi

$$L_{kütle} = M_{k\ell} A^k_\mu A^{\mu,\ell} \tag{2.150}$$

ve

$$M_{k\ell} = \begin{bmatrix} g^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g^2 & gg' \\ 0 & 0 & gg' & g'^2 \end{bmatrix} \frac{v^2}{4} \tag{2.151}$$

üretilir.

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g/\sqrt{g^2+g'^2} & -g'/\sqrt{g^2+g'^2} \\ 0 & 0 & g'/\sqrt{g^2+g'^2} & g/\sqrt{g^2+g'^2} \end{bmatrix} \tag{2.152}$$

olmak üzere $R^T M R$ dönüşümü ile kütle matrisi köşegenel olur.

$$L_{kütle} = M_W^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{1}{2} M_Z^2 Z_\mu Z^\mu \;,\; W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^1 \pm i A_\mu^2) \tag{2.153}$$

$$Z_\mu = (g A_\mu^3 - g' B_\mu)/\sqrt{g^2+g'^2} \;,\; A_\mu = (g' A_\mu^3 + g B_\mu)/\sqrt{g^2+g'^2}$$

olmak üzere

$$M_W = g\, v/2 \;,\; M_Z = \sqrt{g^2+g'^2}\; v/2 \tag{2.154}$$

elde edilir. Burada $W_\mu^\pm$, Z_μ ve A_μ sırası ile yüklü, yüksüz zayıf bozon ve foton alanlarını gösterir. Kalan simetri Q yüküne çiftlendiği için foton'a karşılık gelen kütle terimi yoktur.

$W_\mu^\pm$ ve Z_μ'ye karşılık gelen goldstonlar $G^\pm$ ve G^o ile temsil edilir. $G^\pm$ ve G^o alanları fiziksel olmayan serbestlik derecelidirler. $G^\pm \equiv G^o \equiv 0$ özel durumu (üniter ayar) için $(L_H)_{üniter}$ elde edilir ve fiziksel durumların özellikleri buradan çıkar: H, kütlesi $M_H = v\sqrt{\lambda/2}$ olan fiziksel parçacıktır ve henüz gözlenememesine karşın gözlenebilirdir.

Φ Higgs alanı ile birlikte fermiyonların Yukawa etkileşmesi fermiyonların kütle terimini üretir:

$$L_{kütle} = -m_f \bar{\psi}\psi \tag{2.155}$$

Böylece L_{GSW} lagranjiyenine $L_{kütle}$ lagranjiyenini de eklemeliyiz:

$$L = L_G + L_F + L_H + L_M \tag{2.156}$$

Burada elektromagnetik çiftlenime karşılık gelen lagranjiyen terimi

$$L_{em} = (gg'/\sqrt{g^2+g'^2}\,)\,\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \tag{2.157}$$

dir. Bu etkileşmenin QED'ni yeniden oluşturmak için elektromagnetik çiftlenim sabiti

$$e \equiv gg'/\sqrt{g^2+g'^2} \tag{2.158}$$

olarak belirlenir.

Fermiyonlar için elde edilen L lagranjiyeni yalnızca leptonları (yüklü leptonlar ve nötrinoları) içerecek şekilde yazılırsa

$$\begin{aligned} L_\ell = {} & \bar{\nu}_\ell i\partial\!\!\!/\nu_\ell + \bar{\ell}(i\partial\!\!\!/-m_\ell)\ell + e\bar{\ell}\gamma^\mu\ell A_\mu + \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\nu}_\ell\gamma^\mu\ell_L W^+_\mu + \bar{\ell}_L\gamma^\mu\nu_\ell W^-_\mu) \\ & + \left[\frac{\sqrt{g^2+g'^2}}{2}\,\bar{\nu}_\ell\gamma^\mu\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\nu_\ell + \left(-\frac{g^2-g'^2}{2\sqrt{g^2-g'^2}}\,\bar{\ell}_L\gamma^\mu\ell_L + \frac{g'^2}{\sqrt{g^2+g'^2}}\,\bar{\ell}_R\gamma^\mu\ell_R\right)\right]Z_\mu \\ & - \frac{g}{\sqrt{2}}\frac{m_\ell}{M_W}(\bar{\nu}_\ell\ell_R G^+ + \bar{\ell}_R\nu_\ell G^-) - \frac{g}{2}\frac{m_\ell}{M_W}(\bar{\ell}\ell H + i\bar{\ell}\gamma_5\ell G^0) \end{aligned} \tag{2.159}$$

$$L_{II} = -\frac{1}{2}\left|\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+ - ie(W_\mu^+ A_\nu - W_\nu^+ A_\mu) + i\frac{g^2}{\sqrt{g^2+g'^2}}(W_\mu^+ Z_\nu - W_\nu^+ Z_\mu)\right|^2$$

$$-\frac{1}{4}\left[\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu + i\frac{g^2}{\sqrt{g^2+g'^2}}(W_\mu^- W_\nu^+ - W_\mu^+ W_\nu^-)\right]^2$$

$$-\frac{1}{4}\left[\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ie(W_\mu^- W_\nu^+ - W_\mu^+ W_\nu^-)\right]^2 \qquad (2.160)$$

$$L_{III} = \left|\partial_\mu G^+ - i\frac{g^2-g'^2}{2\sqrt{g^2+g'^2}} Z_\mu G^+ + ieA_\mu G^+ - iM_W W_\mu^+ - \frac{i}{2} g W_\mu^+ (H+iG^o)\right|^2$$

$$+\frac{1}{2}\left|\partial_\mu (H+iG^o) - igW_\mu^- G^+ + iM_Z Z_\mu + \frac{i\sqrt{g^2+g'^2}}{2} Z_\mu (H+iG^o)\right|^2 \qquad (2.161)$$

$$L_{IV} = -\frac{1}{2} M_H^2 H^2 - \frac{gM_H^2}{2M_W} G^o(G^+G^- + \frac{1}{2}|H+iG^o|^2) - \frac{g^2M_H^2}{8M_W^2}(G^+G^- + \frac{1}{2}|H+iG^o|^2)^2$$

$$(2.162)$$

olmak üzere klasik lagranjiyen

$$L = L_\ell + L_{II} + L_{III} + L_{IV}$$

dir.

Abeliyen olmayan ayar kuramlarında olduğu gibi uygun kuantizasyon için bir ayar saptama terimi ve Faddeev-Popov hayalet alanları getirilmelidir (Bunların lagranjiyenleri L-lagranjiyenine eklenmelidir). Bunun için ayarı aşağıdaki formda seçelim (Fujikawa ve diğ. 1972, 't Hooft 1971, Ross ve Taylor 1973):

$$L_{fix} = -\frac{\xi_A}{2}(\partial^\mu A_\mu)^2 - \xi_W \left|\partial^\mu W_\mu^+ - i\frac{M_W}{\xi_W} G^+\right|^2 - \frac{\xi_Z}{2}(\partial^\mu Z_\mu - \frac{M_Z}{\xi_Z} G^o)^2 \qquad (2.163)$$

Bu, $\xi_k \neq 0$ (k=A,W,Z) için renormalize edilebilir bir kuram verir ($\xi_A=\xi_W=\xi_Z=1$ için 't Hooft-Feynman ayarı elde edilir).

Herbir ayar vektör alanı için bir Faddev-Popov hayalet alanı gerektiğinden standart modelde (elektrozayıf kuramda) dört tane Faddeev-Popov hayaleti vardır. θ_W-Weinberg açısı olmak üzere ağaç düzeyi diyagramında

$$\mathrm{Cos}\theta_W = \frac{M_W}{M_Z} = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \tag{2.164}$$

dir (Sakakibara,1981; Halzen ve Martin,1983, s.299; Hollik,1986). Elektrozayıf kuramdaki hayaletler u^A, $u^{\pm}$ ve u^Z ile gösterildiğinde Faddeev-Popov lagranjiyeni

$$\begin{aligned}
L_{FP} = & -\bar{u}^A\partial^2 u^A + ie\bar{u}^A\partial^\mu(u^+W_\mu^- - u^-W_\mu^+) \\
& -\bar{u}^+(\partial^2+M_W^2)u^+ + ig\mathrm{Cos}\theta_W\bar{u}^+\partial^\mu(Z_\mu u^+) - ie\bar{u}^+\partial^\mu(A_\mu u^+) - \bar{u}^-(\partial^2+M_W^2)u^- \\
& -ig\mathrm{Cos}\theta_W\bar{u}^-\partial^\mu(Z_\mu u^-) + ie\bar{u}^-\partial^\mu(A_\mu u^-) - ig\bar{u}^+\partial^\mu[W^+(u^Z\mathrm{Cos}\theta_W - u^A\mathrm{Sin}\theta_W)] \\
& +ig\bar{u}^-\partial^\mu[W_\mu^-(u^Z\mathrm{Cos}\theta_W - u^A\mathrm{Sin}\theta_W)] \\
& -M_W\bar{u}^+\left[\frac{g\mathrm{Cos}2\theta_W}{2\ \mathrm{Cos}\theta_W}u^Z G^+ - ieu^A G^+ + \frac{g}{2}u^+(H+iG^0)\right] \\
& -M_W\bar{u}^-\left[\frac{g\mathrm{Cos}2\theta_W}{2\mathrm{Cos}\theta_W}u^Z G^- + ieu^A G^- + \frac{g}{2}u^-(H-iG^0)\right] \\
& -\bar{u}^Z(\partial^2+M_Z^2)u^Z - ig\mathrm{Cos}\theta_W\bar{u}^Z\partial^\mu\, u^+(W_\mu^- - u^-W_\mu^+) - M_Z\bar{u}^Z\left(-\frac{g}{2}u^-G^+ - \frac{g}{2}u^+G^- + \frac{g}{2\mathrm{Cos}\theta_W}u^Z H\right)
\end{aligned} \tag{2.165}$$

dir.

Elektrozayıf kuramın toplam lagranjiyen yoğunluğu (L_K kuark lagranjiyeni olmak üzere)

$$L = L_\ell + L_{II} + L_{III} + L_{IV} + L_K + L_{fix} + L_{FP} \tag{2.166}$$

dır. Böylece elektrozayıf kuram bu ayarda (ξ_k=1) tamamıyle tanımlanır (Sakakibara,1981).

Bu ayarda vektör bozon ilerleticileri (p momentum olmak üzere)

$$D_{\mu\nu}^k(p) = -ig_{\mu\nu}/(p^2-M_k^2)\ , \quad k= W,Z,\gamma \tag{2.167}$$

formunu alırken $G^{\pm}$ ve G^0 alanları için (fiziksel olmayan parçacıklar, goldstonlar) ilerleticiler de ayar bozon kütlelerini içerirler:

$$\Delta^k(p) = i/(p^2-M_k^2)\ , \ (G^{\pm} \text{ için } M_k=M_W,\ \ G^0 \text{ için } M_k=M_Z) \tag{2.168}$$

2.7 GENİŞLETİLMİŞ ELEKTROZAYIF KURAMIN LAGRANJİYENİ

Zayıf etkileşmeler için herbiri iki fiziksel serbestlik derecesini gösteren iki bileşenli Weyl spinörleri ψ_L ya da ψ_R kullanılır (V-A kuramında ve minimal SU(2)xU(1) modellerinde nötrinolar iki bileşenli, sol-elli Weyl nötrinolarıdırlar). ψ_L -Weyl alanı serbest alan limitinde ($P_{L,R}= 1\mp\gamma_5/2$ olmak üzere)

$$\psi_L(x)=\int d^3\vec{p}/\sqrt{(2\pi)^3 2E}\,[\,b_L(\vec{p})u_L(\vec{p})e^{-ipx}+d_R^+(\vec{p})v_R(\vec{p})e^{ipx}\,] \qquad (2.169)$$

olarak yazılır (Burada b_L sol-elli parçacık ve d_R sağ-elli karşıt parçacık için yoketme işlemcileridir. u_L ve v_R $P_L u_L = u_L$, $p_L v_R=v_R$, $P_R u_L=P_R u_R=0$'ı sağlayan spinörlere (4-bileşenli) karşılık gelirler). ψ_R-spinörü için sadece Lve R iç değiş-tokuşu yapılır. Yukarıdaki eşitlikte spinler üzerinden toplam alınmadığından bilinen serbest Dirac alanından farklıdır. Aynı eşitlikten herbir sol-elli (sağ-elli) parçacığın sağ-elli (sol-elli) karşıt parçacıkla uygun olarak birleştirildiği görülür. Sağ-elli karşıt parçacık alanı ψ_R^c, ψ_L'den bağımsız değildir, ψ_L^+ ile ilişkilidir ve $\psi_R^c=C\bar{\psi}_L^T$'dir (Buradaki C yük eşleniği matrisi olmak üzere $C\gamma_\mu C^{-1}=-\gamma_\mu^T$ 'dir). Benzer şekilde R-Weyl spinörü için $\psi_L^c = C\bar{\psi}_R^T$ 'dir. Dirac alanının $P_L\psi$ " chiral izdüşümünün" ψ_L olduğu özel durumda $\psi^c=C\bar{\psi}^T$ karşıt parçacık alanının R-izdüşümü $P_R\psi^c$ 'dir.

ψ_R ve ψ_R^c 'nin her ikisi de mevcutsa bunlar bütün toplanabilir kuantum sayıları için karşıt değerlidirler. Nötrino ile ilgili olan kuantum sayısı lepton sayısıdır. Nötrino kütleleri için (Dirac ve Majorana alanları için) iki çok farklı olanağın olduğu biliniyor.

Leptonların birinci neslinin bilinen nötrinoları sol-elli elektron nötrinosu ν_{eL} ve bunun CP eşi sağ-elli karşıt nötrino $\nu_{eR}^c=C\bar{\nu}_{eL}^T$'dir. Bunlar bilinen yüklü zayıf akım etkileşmelerinde sırasıyle e_L^- ve e_R^+ ile birleştirilirler.

Kütle terimleri herzaman sol- ve sağ-elli alanların her birinde diğerini alır. Kurama yeni bir N_R (ν_R^c 'den farklı) ve bunun CP eşleniği $N_L^c=C\bar{N}_R^T$ getirilirse Dirac kütle (lepton sayısını koruyan) terimi (N_R ve ν_L yi birleştiren)

$$-L_{Dirac} = m_D\ \bar{\nu}_L N_R + h.c \tag{2.170}$$

elde edilir. Bu durumda ν_L, N_R, N_L^c ve ν_R^c dört bileşenli Dirac parçacıkları formundadırlar ve

$$\nu \equiv \nu_L + N_R\ ,\quad \nu^c \equiv N_L^c + \nu_R^c = C\bar{\nu}^T \tag{2.171}$$

tanımlanabilir ve

$$-L_{Dirac} = m_D\bar{\nu}\nu \tag{2.172}$$

olur. Bu durumda ν ve ν^c arasında geçiş olmadığından lepton sayısı korunur. Serbest alan limitinde Dirac nötrinosu alanının kanonik ifadesi

$$\nu_{Dirac}(x)=\sum_{s=L,R}\int d^3\vec{p}/\sqrt{(2\pi)^3 2E}\,[b_s(\vec{p})u_s(\vec{p})e^{-ipx}+d_s^+(\vec{p})v_s(\vec{p})e^{ipx}] \tag{2.173}$$

dir. Genellikle N_R SU(2)xU(1) birlisidir ve m_D bilinen Higgs ikilisi ile üretilir (ve lepton sayısı üç nesil genelleştirilmesinde korunur). Bu olanak standart modelde yüklü fermiyonlar için kütle üretme şekline çok benzerdir. Fakat bu durumda m_{ν_e} 'nin niçin küçük olduğunu anlamak zordur.

Majorana (lepton sayı korunumunu bozan) kütle teriminde ν_L 'nin kendisinin CP-eşleniği ν_R^c 'ye çiftleniminde yeni bir fermiyon alanından sakınılır:

$$-L_M = \frac{1}{2}\,m\ \bar{\nu}_L\nu_R^c = \frac{1}{2}\,m\ \bar{\nu}_L C\bar{\nu}_L^T \tag{2.174}$$

L_M iki nötrino yaratılması ya da yokolması olarak düşünülür ve $\Delta L=\pm 2$ kere lepton sayısı bozulur. ν_L ve ν_R^c iki bileşenli Majorana nötrinosu $\nu=\nu_L+\nu_R^c$ formunda birleştirilebilir.

$$-L_M = \frac{1}{2} m \, \bar{\nu} \nu \tag{2.175}$$

$\nu=C\bar{\nu}^T = \nu^c$ 'dir, yani Majorana nötrinosu kendisinin karşıt parçacığıdır. Serbest alan limitinde

$$\nu(x)= \sum_{s=L,R} \int d^3\vec{p}/\sqrt{(2\pi)^3 2E}\,\left[b_s(\vec{p})U_s(\vec{p})e^{-ipx}+b_s^+(\vec{p})v_s(\vec{p})e^{ipx}\right] \tag{2.176}$$

dir (ν_{Dirac}'daki b ve d yoketme işlemcisi arasında fark olmaması dışında serbest Dirac alanının formundadır). m-Majorana kütlesi yeni bir Higgs üçlüsünün ya da yüksek efektif işlemcinin boşluk beklenen değeri ile üretilir. Majorana kütlesi kuramcılar arasında daha günceldir (Nötrinoların kuark ve lepton kütlelerinden farklı olmaları nedeniyle m_{ν_e} 'nin (eğer sıfır değilse!) niçin küçük olduğunun açıklaması vardır).

Dirac ve Majorana nötrinoları arasında birçok fiziksel farkın olmasına karşın bu farklar nötrino kütlesinin ihmal edilebileceği sınırda kaybolur. $m_\nu \to 0$ için Dirac nötrinosunun ν_R bileşeni çiftlenim yapmaz ve Majorana ve Dirac alanları iki bileşenli nötrinolara indirgenir, bunlar arasında fark yoktur. Özellikle lepton sayısı korunumu Majorana nötrinoları için $m_\nu \to 0$'da yeniden kurulur ($m_\nu \to 0$ için Majorana durumunda γ_5 ayar dönüşümü $\nu(x) \to e^{i\alpha\gamma_5}\nu(x)$ Weyl alanının sayı işlemci dönüşümü $\nu(x)\to e^{i\alpha}\nu(x)$ 'e karşılık gelir)

Bazı modeller Dirac ve Majorana kütle terimlerinin her ikisini de içerir (Langacker, 1988 a,b).

Elektrozayıf kuramı kütleli Dirac nötrinolarını içerecek şekilde genişletelim: Elektrozayıf kuramda olduğu gibi fermiyonlar (leptonlar ve kuarklar)

SU(2)xU(1)'de ikili ve birlidirler. Fermiyonları i ve I(=1,2,3,...,) lepton ve kuark nesillerini göstermek üzere

$$R_i = (\psi_i)_R \; , \; R_I = (\psi_I)_R \; , \; L_i = \begin{pmatrix} \psi_i' \\ \psi_i \end{pmatrix}_L \; , \; L_I = \begin{pmatrix} \psi_I \\ \psi_I' \end{pmatrix} \tag{2.177}$$

şeklinde gösterebiliriz. ψ_i' ve ψ_I lepton ve kuarkların bilinen yukarı (I_3=1/2), ψ_i ve ψ_I' de aşağı (I_3=-1/2) bileşenlerine karşılık gelirler. R ve L ψ-alanlarının sağ-elli ve sol-elli bileşenlerini temsil ederler:

$$\psi_{L,R} = \frac{(1\mp\gamma_5)}{2}\,\psi \tag{2.178}$$

U-karışım matrisi olmak üzere ψ_i' nötrinolar arasındaki ve ψ_I' kuarklar arasındaki karışımı ifade eder:

$$\psi_i' = U_{in}\psi_n \; , \; \psi_I' = U_{IK}\psi_K \tag{2.179}$$

Nötrinoların kütleleri sıfır ise leptonlar (nötrinolar) için U=I'dir. (Bu minimum Higgs şemasında karışımın olmadığı duruma karşılık gelir).

Oluşturacağımız Lagranjiyende $m_\nu \to 0$ ve U=1 alındığında Sakakibaranın lagranjiyenini (Sakakibara,1981) elde edelim. Bu durumda genişletilmiş elektrozayıf kuramın lagranjiyeninin yalnızca fermiyonları içeren kısmı değişecektir (Elektrozayıf kuramın lagranjiyenine ek olarak kütleli Dirac nötrinolarını içeren kısmı da gelecek, elektrozayıf kuramdaki nötrino spinörleri yerine karışım matrisi ile spinörün çarpımı ($\nu_\ell = U_{\ell i}\nu_i$ burada $U_{\ell i}$ karışım matrisi ν_i'ler i=1,2,3,... olmak üzere $m_1, m_2, \ldots$ kütle öz durumlu nötrino alanları ν_ℓ 'ler ise $\ell = e, \mu, \tau, \ldots$ olmak üzere zayıf öz etkileşmeli nötrino alanlarıdırlar) gelir.

Model, sol-elli fermiyon ikilileri (L), sağ-elli fermiyon birlileri (R) ve karmaşık skalar Φ ikilisi içerir.

SU(2)xU(1) grubu altında fermiyonların global değişmez lagranjiyeni

$$L_f = \sum_f [\, i\,\bar{L}\,\not\partial L + i\,\bar{R}\,\not\partial R\,] \tag{2.180}$$

dir. SU(2) grubu altında

$$\begin{aligned} L(x) &\rightarrow L'(x) = \exp(-\tfrac{i}{2}\, g\tau_k\theta^k)L(x) \\ R(x) &\rightarrow R'(x) = R(x) \\ \Phi(x) &\rightarrow \Phi'(x) = \exp(-\tfrac{i}{2}\, g\tau_k\theta^k)\Phi(x) \end{aligned} \tag{2.181}$$

ve U(1) grubu altında

$$\begin{aligned} L(x) &\rightarrow L'(x) = \exp(-\tfrac{i}{2}\, g'\, Y_L\, \theta_Y)L(x) \\ R(x) &\rightarrow R'(x) = \exp(-\tfrac{i}{2}\, g'\, Y_R\, \theta_Y)R(x) \\ \Phi(x) &\rightarrow \Phi'(x) = \exp(-\tfrac{i}{2}\, g'\, \theta_Y)\Phi(x) \end{aligned} \tag{2.182}$$

şeklinde dönüşür.

Yukarıdaki dönüşümler

$$\begin{aligned} \partial_\mu L &\rightarrow [\partial_\mu + \tfrac{i}{2}\, g(\tau_k)A_\mu^k + \tfrac{i}{2}\, g'(Y_L)B_\mu\,]\, L \\ \partial_\mu R &\rightarrow [\partial_\mu + \tfrac{i}{2}\, g'\, Y_R B_\mu\,]\, R \\ \partial_\mu \Phi &\rightarrow [\partial_\mu + \tfrac{i}{2}\, g\, (\tau_k)A_\mu^k + \tfrac{i}{2}\, g'\, B_\mu\,]\, \Phi \end{aligned} \tag{2.183}$$

dönüşümleri ile yerelleştirilir.

Elektrozayıf kuramın lagranjiyenine sağ-elli nötrino alanları ve nötrino kütle üretme terimini içeren (Φ'nin üstün yükü $Y_\Phi=1$, $\tilde{\Phi}$'nin üstün yükü $Y_{\tilde{\Phi}} = -1$)

$$\sum_{\nu_\ell} i\bar{R}_\nu \gamma^\mu(\partial_\mu - i\,\frac{g'}{2}\, Y_{R\nu} B_\mu)\, R_\nu - \sum_{\nu_\ell} G_{\nu_\ell}(\bar{L}_\ell \tilde{\Phi} R_{\nu_\ell} + h.c),\quad \tilde{\Phi} = i\tau_2\Phi^*$$

terimleri de eklendiğinde genişletilmiş (kütleli Dirac nötrinolarını içeren) elektrozayıf kuramın lagranjiyenine ulaşılır:

$$L = L_f + L_G + L_H + L_M + L_{fix} + L_{FP} \tag{2.184}$$

Leptonlar için

$$L_M = -\sum_{\ell} G_\ell \bar{L}_\ell \Phi R_\ell - \sum_{\nu_\ell} G_\nu \bar{L}_\ell \tilde{\Phi} R_\nu + h.c \tag{2.185}$$

dir. Buradaki G_ℓ ve G_ν (Higgs-Fermiyon) Yukawa çiftlenim sabitleridirler. Fermiyonların kütleleri ağaç diyagramı düzeyinde

$$m_f = G_f \, v/\sqrt{2} \tag{2.186}$$

dir. Φ ve $\tilde{\Phi}$ ise (Üniter ayarda)

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \binom{0}{v+H}$$

ve

$$\tilde{\Phi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \binom{v+H}{0}$$

dir.

Nötrinoların kütle kazanması kuarkların kütle kazanması gibi olacaktır. Aralarındaki fark, kuarklarda ikilide -1/2 izospinli durumlar karışmış durumlar iken, leptonlarda 1/2 izospinli durumlar (nötrinolar) karışmış durumlardır. Leptonların ayar alanları ile etkileşme lagranjiyeni aşağıdaki şekilde verilir.

$$L_\ell = L_\ell^{kinetik} + L_\ell^{etkileşme} \tag{2.187}$$

$$L_\ell^{kin.} = i \, \bar{\psi}_n \not{\partial} \psi_n \qquad (\psi_n = \ell, \, \nu_\ell)$$

$$L_\ell^{etk.} = \frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{\nu}_\ell U^+ \gamma^\mu \frac{1-\gamma_5}{2} \ell W_\mu^+ + \bar{\ell} U \gamma^\mu \frac{1-\gamma_5}{2} \nu_\ell W_\mu^-) + \frac{gg'}{\sqrt{g^2+g'^2}} Q_\ell \bar{\ell} \gamma^\mu \ell A_\mu$$
$$+ \frac{\sqrt{g^2+g'^2}}{2} \{ \bar{\nu}_\ell \gamma^\mu (\frac{1-\gamma_5}{2}) \nu_\ell - \bar{\ell} \gamma^\mu (\frac{1-\gamma_5}{2} + \frac{2Q_\ell g'^2}{g^2 + g'^2}) \ell \} Z^\mu \tag{2.188}$$

Burada, Q_ℓ, ℓ-alanının e-birimi cinsinden elektromagnetik yükünü gösteriyor. Lagranjiyenin $\bar{\nu}\ell G^+$ ve $\bar{\ell}\nu G^-$ köşelerini içeren kısmı

$$
\begin{aligned}
L_{\nu\ell G} = & -\frac{1}{2}\,\bar{\nu}_\ell U^+ \left[(G_\ell - G_{\nu_\ell}) + (G_\ell + G_{\nu_\ell})\,\gamma_5 \right] \ell\, G^+ \\
& - \frac{1}{2}\,\bar{\ell}\, U\left[(G_\ell - G_{\nu_\ell}) - (G_\ell + G_{\nu_\ell})\,\gamma_5 \right] \gamma_\ell\; G^-
\end{aligned}
\qquad (2.189)
$$

dir. $G_{\ell,\nu}$'lerin kütleler cinsinden değerleri yerlerine yazıldığında

$$
\begin{aligned}
L_{\nu\ell G} = & -\frac{g}{2\sqrt{2}\,M_W}\,\bar{\nu}_\ell U^+ \left[(m_\ell - m_{\nu_\ell}) + (m_\ell + m_{\nu_\ell})\gamma_5 \right] \ell G^+ \\
& - \frac{g}{2\sqrt{2}\,M_W}\,\bar{\ell}\, U\left[(m_\ell - m_{\nu_\ell}) - (m_\ell - m_{\nu_\ell})\,\gamma_5 \right] \nu G^-
\end{aligned}
\qquad (2.190)
$$

elde edilir (Hesaplarımızda kullanacağımız köşeleri içeren kısımların lagranjiyenlerini yazıyoruz).

Nötrinoların kütleli olması durumunda, leptonik yüklü zayıf akım (U, KM-kuark karışım matrisine paralel olacak şekilde)

$$
J_W^{\mu+} = i\,\frac{g}{2\sqrt{2}}\,(\bar{\nu}_e\;\; \bar{\nu}_\mu\;\; \bar{\nu}_\tau)\; U^+\gamma^\mu(1-\gamma_5) \begin{pmatrix} e^- \\ \mu^- \\ \tau^- \end{pmatrix} \qquad (2.191)
$$

(Langacker, 1988;Bilenky ve Pontecorvo,1976,1978; Vuilleumier,1986; Li ve Wilczek,1982) ve leptonlarla fiziksel olmayan Goldstonların etkileşmesi m_ℓ yüklü lepton kütlesi, m_ν nötrino kütlesi olmak üzere

$$
-i\,\frac{g}{2\sqrt{2}\,M_W}\,\bar{\nu}_\ell U^+ \left[(m_\ell - m_\nu) + (m_\ell + m_\nu)\,\gamma_5 \right] \ell\, G^+ + h.c \qquad (2.192)
$$

dir (Palash ve Wolfenstein, 1982). Yüksüz zayıf akım elektrozayıf kuramdakinin aynısıdır.

EK B'deki Feynman kuralları (2.184) lagranjiyeninden elde edilir.

BÖLÜM 3
LEPTONLARIN YAPI ÇARPANLARI

3.1 GİRİŞ

Leptonların yapı çarpanlarının kökeni, Fermi ve Marshall'ın 1947 de yüklü, $\frac{1}{2}$ spinli bir parçacığın bir dış elektromagnetik alanda üç durgun (statik) çiftlenim (yük, magnetik moment ve yük yarıçapı) ile betimleneceği olgusuna dayanır.

1967 den önce yani zayıf etkileşmelerin renormalize bir kuramı henüz bilinmiyorken gerek evrensel Fermi etkileşmesinde ve gerekse ara vektör bozon (IVB) kuramında leptonların yapı çarpanları hesaplanmış ve nötrinoların elektromagnetik özellikleri incelenmiştir (Bernstein ve Lee, 1963; Meyer ve Schiff,1963, Cheng ve Bludman,1964; Bernstein ve diğ.,1963; Daha ayrıntılı bilgi için Marshak ve diğ., 1969, s.230 ve s.686'ya bakınız).

Zeldovich paritenin korunmadığı fakat CP'nin korunduğu bir kuramda parçacığın anapol momenti olarak adlandırdığı bir durgun çiftlenimin (yapı çarpanının) bulunduğunu gösterdi (Zeldovich,1957).Lee ve Yang paritenin bozulması ile ilgili yayınlarında bir elektrik dipol momentinin varlığına işaret etmişlerdir.Landau (1957) parite bozulması ile birlikte CP korunumunun olması halinde elektrik dipol momentinin olamayacağını göstermiştir.

Leptonların bir dış elektromagnetik alana durgun (statik) çiftlenimi en genel şekilde

$$<\ell(p')|J^{\mu}_{em}|\ell(p)> = -ie\bar{u}(p')\{F_1(q^2)\gamma^{\mu} + \frac{i}{2m}\ \sigma^{\mu\nu}q_{\nu}F_2(q^2)$$

$$+ \frac{g^2}{16\pi^2 M_W^2} \gamma_5 (q^2\gamma^\mu - \not{q} q_\mu)\, g_1(q^2)$$

$$+ \frac{i}{2m} \gamma_5 \sigma^{\mu\nu} q_\nu G_2(q^2) \,]\, u(p) \qquad (3.1)$$

ile verilir ($q=p'-p$ dir). Buradaki F_1, F_2, g_1 ve G_2 yapı çarpanları (form faktörleri) olup $q^2 \to 0$ limitinde fiziksel gözlenebilirlerdir. Yüklü leptonlar için

$$F_1(q^2) = 1 + \frac{1}{6} q^2 < r^2 > + 0(q^4) \qquad (3.2)$$

yük ile ilgili yapı çarpanı ($<r^2>$ yük yarıçapı), Dirac nötrinoları için

$$F_1(q^2) = \frac{1}{6} q^2 <r^2> + 0(q^4)$$

dir. F_2 magnetik moment yapı çarpanı, g_1 anapol moment yapı çarpanı ve G_2 de elektrik dipol moment yapı çarpanıdır.

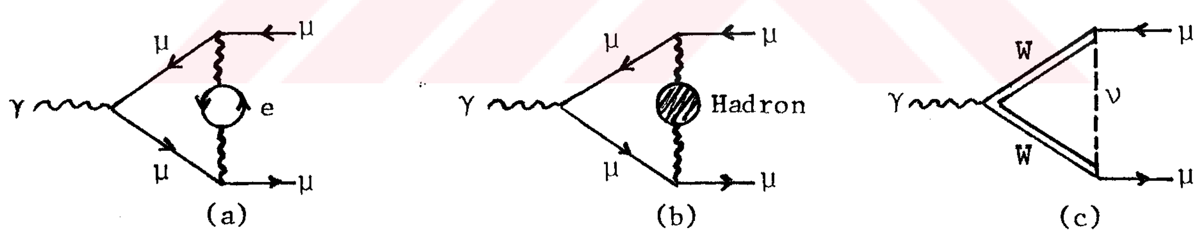
İlk iki yapı çarpanının (F_1 ve F_2) QED'de bilinmelerine karşın (Bjorken ve Drell, 1964, s.245) son iki terim (g_1 ve G_2) zayıf etkileşme sonucu ortaya çıkan sırasıyla eksenel-vektör ve-tensör terimleridir (Marshak ve diğ.,1969). CP-korunumlu bir kuramda üç yapı çarpanı (F_1,F_2 ve g_1) kalır.

Kuantum elektrodinamiğinin en büyük başarılarından biri de elektronun $\mu(= \frac{e}{2m}\sigma = g\frac{e}{2m} S)$ magnetik momenti ($S= \frac{1}{2}\sigma$, spin işlemcisi) ve $<r^2>$ (yük yarıçapı)'nın α (ince yapı sabiti) cinsinden yüksek mertebeden hesaplanmaları ve bunların deneyle başarılı bir şekilde uyuşmasıdır. Örneğin elektronun magnetik momenti için yüksek mertebeden katkılar hesaplanırsa (doğal birimler seçildiğinde, $\hbar=c=1$)

$$\mu_e = \frac{e}{2m} \left[1 + \frac{\alpha}{2\pi} - 0{,}32848 (\frac{\alpha}{\pi})^2 + (1{,}49 \pm 0{,}2)(\frac{\alpha}{\pi})^3 + \ldots \right] \qquad (3.3)$$

(birinci terimin dışındaki katkı ya da başka bir deyişle g-çarpanının 2 değerinden sapması elektronun anomalisi olarak adlandırılır). Elektronun anormal magnetik momentinin kuramsal olarak hesaplanan değeri $(1159655,4\pm3,3)x10^{-9}$ ve deneysel değeri ise $(1159657,7\pm3,5)x10^{-9}$ dir. (Halzen ve Martin,1983, s.161).

QED'nin başarılarının diğer renormalize kuramlarda da tekrarlandığını görüyoruz. Örneğin müon'un anomal magnetik momenti kuramsal olarak hesaplandığında (Şekil 3.1 için) QED katkısı α^5. mertebeye kadar hesaplandığında $(1165852,0\pm1,9)x10^{-9}$, hadronik katkı (dördüncü ve altıncı mertebe katkıların toplamı) $(66,7\pm8,1)x10^{-9}$, zayıf (Glashow-Salam-Weinberg kuramı) katkı $(2,1\pm0,2)x10^{-9}$ ve bunların toplamı olan kuramsal katkı $(1165921\pm8,3)x$ 10^{-9} 'dur. CERN'de muon için ölçülen deneysel sonuç $(1165924\pm8,5)x10^{-9}$ 'dır (Ayrıntılı bilgi için Becher ve diğ.,1984, s.58'e ve orada gösterilen kaynaklara bakınız).



Şekil 3.1: Muon'un magnetik momentine a) elektromagnetik, b) hadronik, c) zayıf katkılar veren diyagramlar

$\vec{B}$ magnetik alanı, $\vec{E}$ elektrik alanı ve $\vec{j}$ dış akım yoğunluğunu göstermek üzere göresiz (nonrelativistik) yaklaşımda, μ magnetik momenti $-\mu\vec{\sigma}.\vec{B}$, d elektrik dipol momenti $-d\vec{\sigma}.\vec{E}$ ve a anapol momenti $-a\vec{\sigma}.\vec{j}$ etkileşme enerjisine neden olur (Zeldovich,1957 ; Zeldovich ve Perelomov,1961).

Kütleli Dirac nötrinolarının dört tane yapı çarpanı (F_1, F_2, g_1 ve G_2) olmasına karşın $q^2 \to 0$ statik limitinde bir tek ilmek yaklaşımında iki yapı çarpanı (magnetik moment ve anapol moment), Majorana nötrinosunun ise bir yapı çarpanı (anapol moment) vardır (Kayser, 1982; 1988).

Yalnızca sol-elli akımlar alındığında kütlesi sıfır olan ($m_\nu \to 0$ limitinde) Dirac ve Majorana nötrinoları ayırt edilemezler (Weyl nötrinolarıdırlar, Kayser, 1982;1983). Bu durumda sıfırdan farklı olan yapı çarpanı anapol moment yapı çarpanıdır (Abak ve Aydın, 1987 ;1988).

Yüklü leptonların anomal magnetik momentlerinin pekçok fizikçi tarafından hesaplanmalarına karşın (Becher ve diğ., 1984, s.58) anapol momentle ilgili hesaplar azdır (Dombey ve Kennedy, 1980).

3.2 ANAPOL MOMENT

Böyle bir etkileşmeye en basit bir örnek $\vec{E}$ elektrik alanında $\vec{\sigma}.\vec{E}$ gibi davranan elektrik dipol momentidir. Ancak böyle bir çiftlenim CP değişmezliğini (eşdeğer olarak T değişmezliğini) yaraladığından bizim ilgilendiğimiz enerji ölçeklerinde gerçekleşmemesine karşın $\vec{\sigma}\nabla^2\vec{A}$ çiftlenimine eşdeğer olan $\vec{\sigma}.\vec{j}$ (j akım yoğunluğudur) anapol etkileşmesini elde etmek olasıdır ($\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$, $\vec{j}=\vec{\nabla}\times\vec{B}=\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = -\nabla^2\vec{A}+\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{A})$, $\vec{\nabla}.\vec{A} = 0$ Coulomb ayarı, $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})=-\nabla^2\vec{A}=\vec{j}$, $a\vec{\sigma}.\vec{j} = a\vec{\sigma}.\mathrm{Curl}\ \vec{B}$). Anapol moment yeteri kadar büyük olsaydı ölçülebilecekti. Zeldovich ve Perelomov anapol'un nerede önemli rol oynayabileceğini çalışmalarında açıklamıştır (Zeldovich ve Perelomov,1961).

Zeldovich'in sonuçları kısaca şöyle özetlenebilir: Anapol momentli bir elektron'un protonlar tarafından saçılmasını gözönüne alalım (Elektronun anapol momentli protonlar tarafından saçılması proton ve nötronun bağıl (relativ) olarak küçük anapol momente sahip olmaları nedeniyle daha az ilginçtir). Anapol momentli bir elektronun protonlar tarafından saçılmasında kutuplanmamış (polarize olmamış) demet ve hedef için ya saçılan protonun kutuplanmasını (polarizasyonunu) gözlerdik ya da tesir kesitinin hedefin kutuplanmasına (polarizasyonuna) bağımlılığını gözlemleyebilirdik.

Başka bir olanak nötrinoların bir protonla ya da ağır bir çekirdekte saçılmasının ölçülmesi olacaktı. Fakat bunların her ikisi de çok küçük sonuçlar verir ve günümüzde kullanışlı değildir.

Anapolün önemli rol oynayabileceği (önem kazanacağı) bir alan (ve belki de en ilginç olanı) atomik parite bozulma deneyleridir. Örneğin ağır bir atomda parite bozulmasını saptamadaki deneyde hakim olan uyumlu (coherent) etkinin büyüklüğünün ölçüsü olan Q_W niceliği

$$Q_W = Z(1-4\,\mathrm{Sin}^2\theta_W + a\alpha)-N \qquad (3.4)$$

ile verilir (Bilenky ve diğ.,1978; Dombey ve Kennedy,1980). Anapol katkısı $a\alpha$ uyumsuz(incoherent) etkiler mertebesinin bilinen ifadesinden yalnızca küçük bir sapmayı gösterir (Burada N ve Z çekirdekteki nötron ve proton sayılarını gösterir)

Anapolun atomik ve nükleer fizikteki etkileri için(Flambaum ve diğ., 1984 ; Dubovik ve Cheshkov 1975 ; Bilenky ve diğ., 1978 ; Apenko ve Lozovik,1982)'ye bakınız.

Leptonların bir dış elektromagnetik alana durgun parite bozan çiftlenimini (anapol moment) zayıf ve elektromagnetik etkileşmelerin ayar kuramında yüklü leptonlar ve yüksüz leptonlar (nötrinolar) için hesaplayacağız.

Gordon ayrılması veya spinör bilineerlerin göresiz (relativistik olmayan) indirgenmesini kullanarak anapol çiftlenimini öngörmek için $\gamma_5\gamma^\mu A_\mu$ katsayısını gereksiniriz, bu nedenle anapol moment (q fotonun momentumu olmak üzere) $\frac{-ieg^2}{16\pi^2}\gamma_5\gamma^\mu\frac{q^2}{M_W^2}$ 'nin katsayısı olarak tanımlanır.

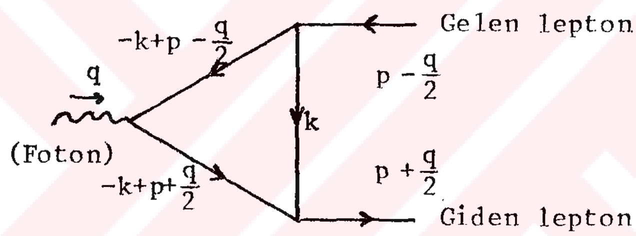
Gelen leptonun momentumu $(p-\frac{q}{2})$ ve gideninkini de $(p+\frac{q}{2})$ alıyoruz, m_ℓ leptonun kütlesi olmak üzere

$$(p-\frac{q}{2})^2 = (p+\frac{q}{2})^2 = m_\ell^2 \ , \quad p\cdot q = 0 \tag{3.5}$$

dir.

Anapol moment q^2 ile orantılı olduğundan integrallerimizi $O(q^4)$'de kesiyoruz. (Kuramın öngördüğü parçacıkları içeren eksenel (aksiyal) vektör çiftlenimli diyagramların katkılarını hesaplıyoruz).

Üçgen diyagramlarda momentumların yönlerini genel olarak aşağıdaki şekilde (aradurumlar olası parçacıklar olmak üzere Şekil 3.2'deki gibi) seçiyoruz.



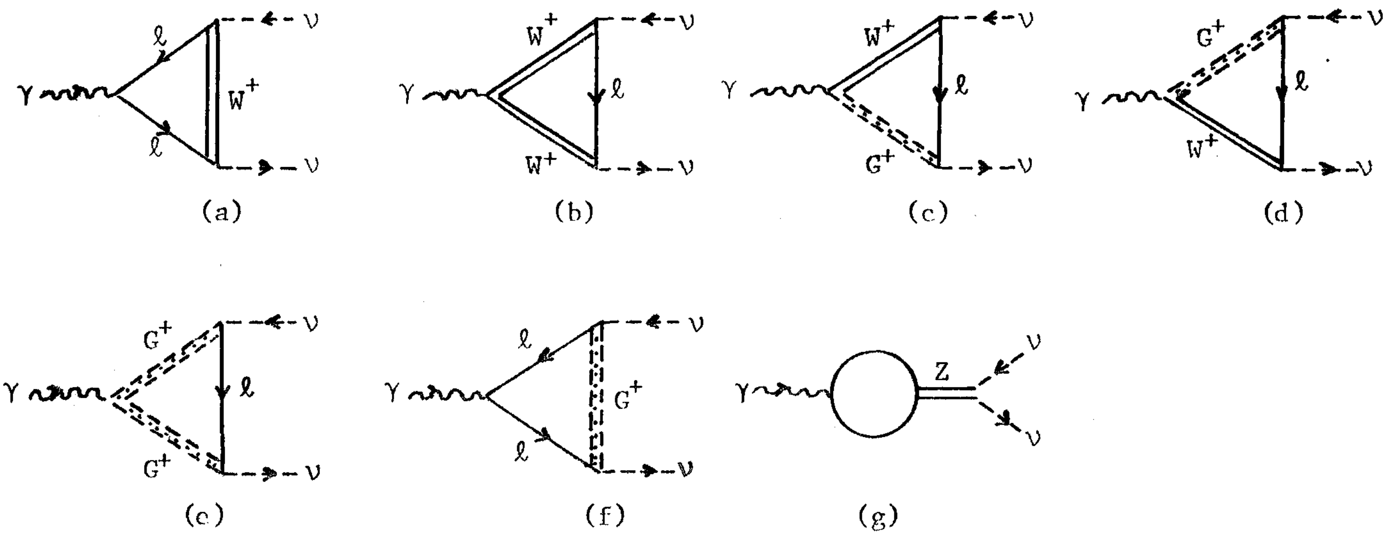
Şekil 3.2: Üçgen diyagramda momentumların yönlerinin gösterimi.

Kolaylık için matris elemanlarında gelen parçacığın $u(p-\frac{q}{2})$ ve giden parçacığın $\bar{u}(p+\frac{q}{2})$ spinörlerini yazmıyoruz.

3.2.1 Sıfır Kütleli Nötrinoların Anapol Momenti

Olası Feynman diyagramları aşağıdadır (Şekil 3.3).

EK B'de verilen Feynman kurallarını ($m_\nu \to 0$ ve $U=1$ için) gözönüne alarak Şekil 3.3'deki diyagramların matris elemanları ve anapol moment katkılarını hesaplayalım(Anapol moment hesaplarında $g_1(0)=a$ alıyoruz):



Şekil 3.3: Nötrinolar için eksenel (aksiyal) vektör çiftlenimli diyagramlar.

Şekil 3.3 a diyagramının matris elemanı

$$S_\nu^{(a)} = \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \left\{ \frac{ig}{2\sqrt{2}} \gamma^\alpha (1-\gamma_5) \frac{i}{-\not{k}+\not{p}+\frac{\not{q}}{2} - m} \cdot -ie\gamma^\mu \frac{i}{-\not{k}+\not{p}-\frac{\not{q}}{2} - m} \cdot \frac{ig}{2\sqrt{2}} \gamma^\beta (1-\gamma_5) \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2-M_W^2} \right\}$$

$$= -\frac{eg^2}{8} \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{\gamma^\alpha (1-\gamma_5)(-\not{k}+\not{p}+\frac{\not{q}}{2}+m)\gamma^\mu(-\not{k}+\not{p}-\frac{\not{q}}{2}+m)\gamma_\alpha(1-\gamma_5)}{[(-k+p+\frac{q}{2})^2-m^2]\,[(-k+p-\frac{q}{2})^2-m^2]\,[k^2-M_W^2]} \tag{3.6}$$

dir. Bunun eksenel vektör kısmını hesaplayalım:

$$\gamma^\alpha(1-\gamma_5)(-\not{k}+\not{p}+\frac{\not{q}}{2}+m)\gamma^\mu(-\not{k}+\not{p}-\frac{\not{q}}{2}+m)\gamma_\alpha(1-\gamma_5)$$

$$=(1+\gamma_5)\gamma^\alpha\Big[(-\not{k}+\not{p}+\frac{\not{q}}{2})\gamma^\mu(-\not{k}+\not{p}-\frac{\not{q}}{2}) + m(-\not{k}+\not{p}+\frac{\not{q}}{2})\gamma^\mu + m\gamma^\mu(-\not{k}+\not{p}-\frac{\not{q}}{2})$$

$$+ m^2\gamma^\mu\Big]\gamma_\alpha(1-\gamma_5) \tag{3.7}$$

γ-matrislerinin özelliklerini kullanarak (EK A.2 ve EK A.3)

$$(1+\gamma_5)\left[-2(-\not{k}+\not{p}-\frac{\not{q}}{2})\gamma^\mu(-\not{k}+\not{p}+\frac{\not{q}}{2})+4m(-k+p+\frac{q}{2})^\mu+4m(-k+p-\frac{q}{2})^\mu-2m^2\cdot\gamma^\mu\right]\cdot(1-\gamma_5)$$

$$= -4(1+\gamma_5)\left[(-\not{k}+\not{p}-\frac{\not{q}}{2})\gamma^\mu(-\not{k}+\not{p}+\frac{\not{q}}{2}) + m^2\gamma^\mu\right] \tag{3.8}$$

elde edilir. (3.8)'in eksenel kısmı

$$-4\,\gamma_5\left[(-\not{k}+\not{p}-\frac{\not{q}}{2})\gamma^\mu(-\not{k}+\not{p}+\frac{\not{q}}{2}) + m^2\gamma^\mu\right] \tag{3.9}$$

dir. Birinci terim

$$\begin{aligned}(-\not{k}+\not{p}-\frac{\not{q}}{2})\gamma^\mu(-\not{k}+\not{p}+\frac{\not{q}}{2}) &= 2k^\mu\not{k} - \gamma^\mu k^2 - 2\not{k}(p+\frac{q}{2})^\mu + 2k(p+\frac{q}{2})\,\gamma^\mu \\ &\quad -(\not{p}+\frac{\not{q}}{2})\not{k}\gamma^\mu - 2(p-\frac{q}{2})^\mu\not{k} + 2k(p-\frac{q}{2})\,\gamma^\mu \\ &\quad -\gamma^\mu\not{k}(\not{p}-\frac{\not{q}}{2}) + 2(p-\frac{q}{2})^\mu(\not{p}+\frac{\not{q}}{2}) \\ &\quad +2(p+\frac{q}{2})^\mu(\not{p}-\frac{\not{q}}{2}) - 2\gamma^\mu(p-\frac{q}{2})(p+\frac{q}{2}) \\ &\quad -(\not{p}+\frac{\not{q}}{2})\gamma^\mu(\not{p}-\frac{\not{q}}{2})\end{aligned} \tag{3.10}$$

dir. (3.10) eşitliğinde $\not{p}+\frac{\not{q}}{2}\to 0$, $\not{p}-\frac{\not{q}}{2}\to 0$ ve $p^2=-\frac{q^2}{4}$ olduğu anımsanırsa

$$2k^\mu\not{k} - \gamma^\mu k^2 - 4\not{k}p^\mu + 4kp\gamma^\mu + \gamma^\mu q^2 \tag{3.11}$$

elde edilir. (3.11), (3.9) da yerine yazılırsa ((3.11)'in üçüncü terimi anapole katkı vermez).

$$4\gamma_5\left[\gamma^\mu(k^2 - 4k\cdot p - q^2 - m^2) - 2k^\mu\not{k}\right] \tag{3.12}$$

elde edilir. (3.12), (3.6)'da yerine yazılırsa

$$-\frac{eg^2}{2}\gamma_5\gamma_\lambda\int\frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}}\frac{(k^2-4kp-q^2-m^2)g^{\nu\mu}-2k^\nu k^\mu}{(k^2-M_W^2)\left[(-k+p+\frac{q}{2})^2-m^2\right]\left[(-k+p-\frac{q}{2})^2-m^2\right]} \qquad (3.13)$$

bulunur. İntegrali hesaplamak için yukarıdaki integralleri

$$I=\int\frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}}\frac{k^2;\ k^\nu k^\mu\ ;\ k^\mu\ ;\ 1}{(k^2-M_W^2)\left[(-k+p+\frac{q}{2})^2-m^2\right]\left[(-k+p-\frac{q}{2})^2-m^2\right]}$$

şeklinde tanımlayalım. İntegralimiz Feynman parametrizasyon yöntemi ile

$$I=\Gamma(3)\int_0^1 dx\int_0^x dy\,\frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}}\frac{k^2\ ;\ k^\nu k^\mu\ ;\ k^\mu\ ;\ 1}{\{k^2+2k[-(p-\frac{q}{2})x-qy]+(M_W^2-m^2)x-M_W^2\}^3} \qquad (3.14)$$

şekline dönüşür (EK C). Buradaki integralleri ayrı ayrı hesaplayalım. (I integralinin 1, k^μ, $k^\nu k^\mu$, k^2 'li kısımlarını sırasıyle I_1, I_k, I_{kk} ve I_{k^2} ile gösteriyoruz. 2ω-boyutlu k'lar üzerinden olan integraller için EK C'ye bakınız).

$$I_1=\Gamma(3)\int_0^1 dx\int_0^x dy\,\frac{i\pi^\omega}{(2\pi)^{2\omega}}\,\frac{\Gamma(3-\omega)}{\Gamma(3)\{(M_W^2-m^2)x-M_W^2-[(p-\frac{q}{2})x+qy]^2\}^{3-\omega}}$$

$$=\frac{i}{16\pi^2}\int_0^1 dx\int_0^x dy\,\frac{1}{\{(M_W^2-m^2)x-M_W^2-q^2y(y-x)\}} \qquad (3.15)$$

elde edilir. y ve x integrallerini hesaplamak için integrant Taylor serisine açılırsa (q^2 değişken, $\rho_W=M_W^2/m^2$ olmak üzere)

$$I_1=\frac{i}{16\pi^2}\frac{1}{m^2}\int_0^1 dx\int_0^x dy\,\{\frac{1}{\rho_W(x-1)-x}+(\frac{q^2}{m^2})\frac{y^2-xy}{[\rho_W(x-1)-x]^2}+O(q^4)$$

$$=\frac{i}{16\pi^2}\frac{1}{m^2}\int_0^1 dx\,\{\frac{x}{(\rho_W-1)x-\rho_W}-\frac{1}{6}(\frac{q^2}{m^2})\frac{x^3}{[(\rho_W-1)x-\rho_W]^2}+O(q^4)\} \qquad (3.16)$$

bulunur.

I_k'nın 2ω-boyutlu k üzerinden integrali alınarak elde edilen ifade I_1 de olduğu gibi seriye açılır, y-üzerinden integre edilirse

$$I_k = \frac{i}{16\pi^2}\frac{p^\mu}{m^2}\int_0^1 dx\,\{\frac{x^2}{(\rho_W-1)x-\rho_W}+\frac{1}{6}(\frac{q^2}{m^2})\frac{x^4}{[(\rho_W-1)x-\rho_W]^2}+0(q^4)\} \quad (3.17)$$

bulunur.

I_{kk} integrali ise

$$I_{kk}=\Gamma(3)\int_0^1 dx\int_0^x dy\int\frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}}\frac{k^\mu k^\nu}{\{k^2+2k[-(p-\frac{q}{2})x-qy]+(M_W^2-m^2)x-M_W^2\}^3}$$

$$=\frac{i\pi^\omega}{(2\pi)^{2\omega}}\int_0^1 dx\int_0^x dy\,\{\frac{[(p-\frac{q}{2})x+qy]^\mu[(-\frac{q}{2})x+qy]^\nu}{(M_W^2-m^2)x-M_W^2-q^2y(y-x)} \quad (3.18)$$

$$+\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\frac{(3-\omega)}{2-\omega}[M_W^2-m^2)x-M_W^2-q^2y(y-x)]^{\omega-2}\}$$

dir. I_{kk}'nın ikinci terimi (bunun q^2 ile orantılı sonlu bir kısmı vardır) $\varepsilon=\omega-2$ komşuluğunda seriye açılırsa (EK C)

$$I'_{kk}=\text{Kutup kısmı}-\frac{i}{16\pi^2}\frac{g^{\mu\nu}}{2}\int_0^1 dx\int_0^x dy\{\ell n[(M_W^2-m^2)x-M_W^2-q^2y(y-x)]+0(\varepsilon^2)\}$$

$$=\text{Kutup kısmı}-\frac{i}{16\pi^2}\frac{g^{\mu\nu}}{2}\int_0^1 dx\int_0^x dy\{\ell n[(M_W^2-m^2)x-M_W^2]+\ell n[1+\frac{q^2y(x-y)}{(M_W^2-m^2)x-M_W^2}]+0(\varepsilon^2)\}$$

bulunur. Logaritmalı ikinci terim seriye açılır, y-üzerinden integre edilirse

$$I'_{kk}=\text{Kutup kısmı}-\frac{i}{16\pi^2}\frac{g\mu\nu}{2}\int_0^1 dx\{x[\ell n\,(M_W^2-m^2)x-M_W^2]+\frac{1}{6}(\frac{q^2}{m^2})\frac{x^3}{(\rho_W-1)x-\rho_W}+0(q^4)\}$$

(3.19)

elde edilir (Böylece I_{kk}'nın q^2 ile orantılı sonlu kısmını hesaplamış oluyoruz).

I_{k^2} integrali k üzerinden integre edilirse

$$I_{k^2}=\frac{i\pi^{\omega}}{(2\pi)^{2\omega}}\int_0^1 dx\int_0^x dy\{\frac{q^2y(y-x)}{(M_W^2-m^2)x-M_W^2-q^2y(y-x)}+\frac{\Gamma(3-\omega)}{2-\omega}\omega[M_W^2-m^2)x-M_W^2-q^2y(y-x)]^{\omega-2}\} \quad (3.20)$$

elde edilir. Bunun birinci terimi q^2 cinsinden seriye açılır, y'ye göre integre edilirse

$$I'_{k^2}=\frac{i}{16\pi^2}(\frac{q^2}{m^2})(-\frac{1}{6})\int_0^1 dx\frac{x^3}{(\rho_W-1)x-\rho_W}+0(q^4) \quad (3.21)$$

elde edilir (I_{k^2}'nin ikinci terimi I_{kk}'nın ikinci terimi gibi integre edilir).

Son olarak x-değişkeni üzerinden olan integraller de hesaplanırsa ($\rho_W-1\cong\rho_W$)

$$\int_0^1 dx\frac{x}{(\rho-1)x-}\cong\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\rho}\ln(1/\rho) \quad (3.22a)$$

$$\int_0^1 dx\frac{x^2}{(\rho-1)x}\cong\frac{3}{2\rho}+\frac{2}{\rho^2}+\frac{1}{\rho}\ln(1/\rho)+\frac{1}{2\rho^3} \quad (3.22b)$$

$$\int_0^1 dx\frac{x^3}{(\rho-1)x-\rho}\cong\frac{11}{6\rho}-\frac{3}{\rho^2}+\frac{3}{2\rho^3}+\frac{1}{\rho}\ln(1/\rho) \quad (3.22c)$$

$$\int_0^1 dx\frac{x^4}{(\rho-1)x-\rho}\quad\frac{97}{12\rho}+\frac{1}{\rho}\ln(1/\rho)-\frac{4}{\rho 2}+\frac{3}{\rho^3}-\frac{4}{3\rho^4}+\frac{1}{4\rho^5} \quad (3.22d)$$

$$\int_0^1 dx\frac{x^3}{[(\rho-1)x-\rho]^2}\cong\frac{1}{\rho}-\frac{3}{2\rho^2}-\frac{3}{\rho^3}+\frac{3}{\rho^2}\ln(1/\rho)+\frac{1}{2\rho^4} \quad (3.22e)$$

$$\int_0^1 dx\frac{x^4}{[(\rho-1)x-\rho]^2}\cong\frac{1}{\rho}+\frac{10}{3\rho^2}-\frac{6}{\rho^3}+\frac{4}{\rho^2}\ln(1/\rho)-\frac{1}{3\rho^5} \quad (3.22f)$$

dır. (3.22) sonuçları I_1, I_k, I_{kk} ve I_{k^2}'de yerlerine yazıldığında, elde edilen sonuçlar (3.11) de yerlerine yazılır ve q^2 ile orantılı kısımlar toplanırsa

$$-ieg^2 \frac{1}{16\pi^2} \gamma_5 \gamma^\mu (\frac{q^2}{m^2}) \left[\frac{1}{36\rho_W} - \frac{1}{6\rho_W} \ln(1/\rho_W) + O(1/\rho_W^2)\right] \tag{3.23}$$

bulunur. (3.23)'ün anapol moment katkısı

$$a_\nu^{(a)} = \frac{1}{36} + \frac{1}{6} \ln(M_W^2/m^2) \tag{3.24}$$

dır.

Şekil 3.3b diyagramının matris elemanı

$$S_\nu^{(b)} = \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \left\{\frac{ig}{2\sqrt{2}} \gamma^\nu (1-\gamma_5) \frac{i}{\not{k}-m} \cdot \frac{ig}{2\sqrt{2}} \gamma^\sigma (1-\gamma_5) \frac{-ig_{\nu\alpha}}{(-k+p+\frac{q}{2})^2 - M_W^2}\right.$$

$$\left. \times \left[-ieV^{\alpha\beta\mu}(-k+p-\frac{q}{2}, k-p-\frac{q}{2}, q)\right] \cdot \frac{-ig_{\sigma\beta}}{(-k+p-\frac{q}{2})^2 - M_W^2} \right\}$$

$$= \frac{eg^2}{8} \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{\gamma_\alpha (1-\gamma_5)(\not{k}-m)\gamma_\beta (1-\gamma_5) V^{\alpha\beta\mu}}{[k^2-m^2][(-k+p+\frac{q}{2})^2 - M_W^2][(-k+p-\frac{q}{2})^2 - M_W^2]} \tag{3.25}$$

dir. Bu matris elemanının eksenel vektör kısmını hesaplayalım:

$$\gamma_\alpha (1-\gamma_5)(\not{k}+m)\gamma_\beta (1-\gamma_5) V^{\alpha\beta\mu} = 2\gamma_\alpha \not{k} \gamma_\beta (1-\gamma_5) V^{\alpha\beta\mu} \tag{3.26}$$

(3.26)'nın eksenel kısmı

$$2\gamma_5 \gamma_\alpha \not{k} \gamma_\beta V^{\alpha\beta\mu} = 2\gamma_5 \gamma_\beta \not{k} \gamma_\beta \{2g^{\alpha\beta}(k-p)^\mu + g^{\beta\mu}(-k+p-\frac{3}{2}q)^\alpha + g^{\mu\alpha}(-k+p+\frac{3}{2}q)^\beta\}$$

$$= 2\gamma_5 \{-4\not{k}(k-p)^\mu + (-\not{k}+\not{p}-\frac{3}{2}\not{q})\not{k}\gamma^\mu + \gamma^\mu \not{k}(-\not{k}+\not{p}+\frac{3}{2}\not{q})\} \tag{3.27}$$

dır. İkinci ve üçüncü terimleri açalım:

$$\gamma^\mu \not{k}(-\not{k}+\not{p}+\frac{3}{2}\not{q}) + (-\not{k}+\not{p}-\frac{3}{2}\not{q})\not{k}\gamma^\mu = \tag{3.28}$$

$$= -2\gamma^{\mu}k^{2}-\gamma^{\mu}\not{k}(\not{p}-\frac{\not{q}}{2})-(\not{p}+\frac{\not{q}}{2})\not{k}\gamma^{\mu}+8pk\gamma^{\mu}+2\not{k}\gamma^{\mu}(\not{p}-\frac{\not{q}}{2})+2(\not{p}+\frac{\not{q}}{2})\gamma^{\mu}\not{k}-8\not{k}p^{\mu} \quad (3.28)$$

dir. (3.28) 'in vektörel kısmı

$$-2\gamma^{\mu}k^{2}+8pk\gamma^{\mu}-8\not{k}p^{\mu} \quad (3.29)$$

dir. (3.29) ifadesi (3.27) de yerine yazılır, anapol momente katkı verecek terimleri alınırsa

$$-4\gamma_5\left[\gamma^{\mu}(k^{2}-4kp)-2\not{k}k^{\mu}\right] \quad (3.30)$$

elde edilir.

(3.30), (3.25)'de yerine yazılırsa

$$-\frac{eg^{2}}{2}\gamma_5\gamma_{\nu}\int\frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}}\frac{(k^{2}-4kp)\,g^{\nu\mu}-2k^{\nu}k^{\mu}}{[k^{2}-m^{2}]\,[(-k+p+\frac{q}{2})^{2}-M_W^{2}]\,[(-k+p-\frac{q}{2})^{2}-M_W^{2}]} \quad (3.31)$$

bulunur.

Buradaki integralleri

$$II = \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}}\frac{k^{2}\ ;\ k^{\mu}k^{\nu};\ k^{\mu}\ ;\ 1}{(k^{2}-m^{2})[(-k+p+\frac{q}{2})^{2}-M_W^{2}]\,[(-k+p-\frac{q}{2})^{2}-M_W^{2}]} \quad (3.32)$$

şeklinde tanımlayalım. Feynman parametrizasyon yöntemi ile

$$II = \Gamma(3)\int_0^1 dx\int_0^x dy\int\frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}}\frac{k^{2}\ ;\ k^{\mu}k^{\nu}\ ;\ k^{\mu}\ ;\ 1}{\{k^{2}-2k[(p-\frac{q}{2})x+qy]+(m^{2}-M_W^{2})x-m^{2}\}^{3}}$$

elde edilir. 2ω-boyutlu k üzerinden integraller alınırsa (EK C)

$$II_1 = \frac{i}{16\pi^{2}}\int_0^1 dx\int_0^x dy\,\frac{1}{\{m^{2}(x-1)-M_W^{2}x-q^{2}y(y-x)\}} \quad (3.34)$$

ve integrantı q^2 cinsinden seriye açar, y 'ye göre integre edersek

$$II_1 = \frac{i}{16\pi^2}\frac{1}{m^2}\int_0^1 dx\,\{\frac{x}{(1-\rho_W)x-1} - \frac{1}{6}(\frac{q^2}{m^2})\frac{x^3}{[(1-\rho_W)x-1]^2} + O(q^4)\} \qquad (3.35)$$

elde ederiz.

$$II_k = \Gamma(3)\int_0^1 dx\int_0^x dy \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}}\frac{k^\mu}{\{k^2-2k[(p-\frac{q}{2})x+qy]+(m^2-M_W^2)x-m^2\}^3} \qquad (3.36)$$

Önce 2ω-boyutlu k-üzerinden integral alınır q^2 cinsinden seriye açılır ve y-üzerinden integral alınırsa

$$II_k = \frac{i}{16\pi^2}\frac{p^\mu}{m^2}\int_0^1 dx\,\{\frac{x^2}{(1-\rho_W)x-1} + (\frac{q^2}{m^2})\frac{1}{6}\frac{x^4}{[(1-\rho_W)x-1]^2} + O(q^2)\} \qquad (3.37)$$

bulunur.

$$II_{k^2} = \Gamma(3)\int_0^1 dx\int_0^x dy \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^4}\frac{k^2}{\{k^2-2k[(p-\frac{q}{2})x-qy]+(m^2-M_W^2)x-m^2\}^3}$$

$$= \frac{i\pi^\omega}{(2\pi)^{2\omega}}\int_0^1 dx\int_0^x dy\,\{\frac{q^2y(y-x)}{(m^2-M_W^2)x-m^2-q^2y(y-x)} + \omega\Gamma(2-\omega)[(m^2-M_W^2)x-m^2 - q^2y(y-x)]^{\omega-2}\} \qquad (3.38)$$

I_{k^2} 'deki gibi aynı işlemler II_{k^2} için yapılırsa

$$II_{k^2} = \text{Kutup kısmı} - \frac{2i}{16\pi^2}\int_0^1 dx\, x\,\ln[(m^2-M_W^2)x-m^2]$$

$$+ \frac{i}{16\pi^2}(\frac{q^2}{m^2})(-\frac{1}{2})\int_0^1 dx\,\frac{x^3}{(1-\rho_W)x-1} + O(q^4) \qquad (3.39)$$

elde edilir.

$$II_{kk} = \Gamma(3)\int_0^1 dx\int_0^x dy \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}}\frac{k^\nu k^\mu}{\{k^2-2k[(p-\frac{q}{2})x+qy]+(m^2-M_W^2)x-m^2\}^3} = \qquad (3.40)$$

$$= \frac{i\pi^{\omega}}{(2\pi)^{2\omega}} \int_0^1 dx \int_0^x dy \left\{ \frac{[(p-\frac{q}{2})x+qy]^{\nu}[(p+\frac{q}{2})x+qy]^{\mu}}{(m^2-M_W^2)x-m^2-q^2y(y-x)} \right. \tag{3.40}$$

$$+ \frac{1}{2} g^{\nu\mu}[(m^2-M_W^2)x-m^2-q^2y(y-x)]^{\omega-2}$$

dır. II_{kk}'nın $g^{\nu\mu}$ ile orantılı kısmı II_{k^2} 'nin ikinci terimi ile katsayı farkı ile aynıdır. II_{k^2} ya da I_{kk} 'daki benzer işlemler yapılır ve intigre edilirse

$$II_{kk} = \text{Kutup kısmı} - \frac{i}{16\pi^2} \frac{g^{\nu\mu}}{2} \int_0^1 dx\, x\,\ell n[(m^2-M_W^2)x-m^2]$$

$$- \frac{i}{16\pi^2} \left(\frac{q^2}{m^2}\right) \frac{g}{12} \int_0^1 dx \frac{x^3}{(1-\rho_W)x-1} + 0(q^4) \tag{3.41}$$

bulunur.

x-değişkeni üzerinden integraller hesaplanırsa $(1-\rho_W \cong -\rho_W)$

$$\int_0^1 dx \frac{x}{(1-\rho)x-1} \cong -\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho^2}\,\ell n + \frac{1}{\rho^2} \tag{3.42a}$$

$$\int_0^1 dx \frac{x^2}{(1-\rho)x-1} \cong -\frac{1}{2\rho} + \frac{2}{\rho^2} \tag{3.42b}$$

$$\int_0^1 dx \frac{x^3}{(1-\rho)x-1} \cong \frac{1}{3\rho} + \frac{3}{2\rho^2} \tag{3.42c}$$

$$\int_0^1 dx \frac{x^4}{(1-\rho)x-1} \cong \frac{1}{4\rho} \tag{3.42d}$$

$$\int_0^1 dx \frac{x^3}{[(1-\rho)x-1]^2} \cong \frac{1}{2\rho^2} \tag{3.42e}$$

$$\int_0^1 dx \frac{x^4}{[(1- \ldots} \cong \frac{1}{\ldots} \tag{3.42f}$$

bulunur. Bu s... k ve II_{k^2}'de yerlerine yazılır. II_k, II_{kk} ve

Π_{k2} (3.28)'de yerlerine yazılır, q^2 ile orantılı kısımlar toplanırsa

$$-ieg^2 \frac{1}{16\pi^2}\gamma_5\gamma^\mu \frac{q^2}{m^2}\left[-\frac{7}{36\rho_W} + 0(1/\rho_W^2)\right]$$

$$= -ieg^2 \frac{1}{16\pi^2}\gamma_5\gamma^\mu \frac{q^2}{M_W^2}\left[-\frac{7}{36} + 0(1/\rho_W^2)\right] \tag{3.43}$$

ve buradan da anapol katkısı

$$a_\nu^{(b)} = -\frac{7}{36} \tag{3.44}$$

bulunur.

Şekil 3.3 c diyagramının matris elemanı

$$S_\nu^{(c)} = \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}}\left\{\frac{-ig}{2\sqrt{2}}\frac{m}{M_W}(1+\gamma_5)\frac{i}{\not k-m}\frac{-ig_{\nu\alpha}}{(-k+p-\frac{q}{2})^2-M_W^2}\cdot -ieM_W g^{\mu\nu}\right.$$

$$\left.\times\frac{i}{(-k+p+\frac{q}{2})-M_W^2}\frac{ig}{2\sqrt{2}}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\right\} \tag{3.45}$$

$$= \frac{eg^2}{8}m\int\frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}}\frac{(1+\gamma_5)(\not k+m)\gamma^\mu(1-\gamma_5)}{(k^2-m^2)[(-k+p+\frac{q}{2})^2-M_W^2][(-k+p\frac{q}{2})^2-M_W^2]}$$

dir. Eksenel vektör kısmını hesaplayalım:

$$(1+\gamma_5)(\not k+m)\gamma^\mu(1-\gamma_5) = (1+\gamma_5)(k\gamma^\mu + m\gamma^\mu)(1-\gamma_5)$$

$$= (1+\gamma_5)(1-\gamma_5)\not k\gamma^\mu + (1+\gamma_5)(1+\gamma_5)m\gamma^\mu$$

$$= 2m(1+\gamma_5)\gamma^\mu \tag{3.46}$$

Yukarıdaki matris elemanının eksenel vektör kısmı

$$\frac{eg^2}{4}\gamma_5\gamma^\mu\int\frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}}\frac{m^2}{(k^2-m^2)[(-k+p+\frac{q}{2})^2-M_W^2][(-k+p-\frac{q}{2})^2-M_W^2]} \tag{3.47}$$

dır.

Şekil 3.3 d diyagramının matris elemanı

$$S_\nu^{(d)} = \frac{eg^2}{8} m \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{\gamma^\mu (1-\gamma_5)(\not{k}+m)(1-\gamma_5)}{(k^2-m^2)\left[(-k+p+\frac{q}{2})^2-M_W^2\right]\left[(-k+p-\frac{q}{2})^2-M_W^2\right]} \tag{3.48}$$

dir. Eksenel vektör kısmı

$$\begin{aligned}(1-\gamma_5)(\not{k}+m)(1-\gamma_5) &= \gamma^\mu(1-\gamma_5)\left[\not{k}(1-\gamma_5)+m(1-\gamma_5)\right] \\ &= \gamma^\mu(1-\gamma_5)(1+\gamma_5)\not{k}+m\gamma^\mu(1-\gamma_5)^2 \\ &= 2m\gamma^\mu(1-\gamma_5)\end{aligned} \tag{3.49}$$

olduğundan

$$\frac{eg^2}{4}\gamma_5\gamma^\mu \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{m^2}{(k^2-m^2)\left[(-k+p+\frac{q}{2})^2-M_W^2\right]\left[(-k+p-\frac{q}{2})^2-M_W^2\right]} \tag{3.50}$$

dir. (3.3 c) ve (3.3 d) diyagramlarının eksenel vektör katkısı

$$S_\nu^{(c+d)} = \frac{eg^2}{2}\gamma_5\gamma^\mu \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{m^2}{(k^2-m^2)\left[(-k+p+\frac{q}{2})^2-M_W^2\right]\left[(-k+p-\frac{q}{2})^2-M_W^2\right]} \tag{3.51}$$

olur. Buradaki integral II_1 tipinden bir integraldir. Bu nedenle (3.35)'den integralin sonucu kolayca yazılabilir. Bunun q^2 ile orantılı kısmı

$$ieg^2 \frac{1}{16\pi^2}\gamma_5\gamma^\mu \frac{q^2}{M_W^2}\left[-\frac{m^2}{24M_W^2} - \frac{m^2}{4M_W^4} + O(1/\rho_W^4)\right] \tag{3.52}$$

ve anapol katkısı da

$$a_\nu^{(c+d)} = \frac{m^2}{24M_W^2} + \ldots \tag{3.53}$$

dır.

Şekil 3.3 e diyagramının matris elemanı yazılırsa

$$S_\nu^{(e)} = \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^{2\omega}} \{ \frac{-ig}{2\sqrt{2}} \frac{m}{M_W} (1+\gamma_5) \frac{i}{(-k+p+\frac{q}{2})^2 - M_W^2} \frac{i}{\not{k}-m} (-ie)(-k+p-\frac{q}{2}-k+p+\frac{q}{2})^\mu$$

$$\times \frac{i}{(-k+p+\frac{q}{2})^2 - M_W^2} \frac{-ig}{2\sqrt{2}} \frac{m}{M_W} (1-\gamma_5)\}$$

$$= \frac{eg^2}{4} (\frac{m}{M_W})^2 \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{(-k+p)^\mu (1-\gamma_5)(\not{k}+m)(1-\gamma_5)}{(k^2-m^2)[(-k+p+\frac{q}{2})^2 - M_W^2][(-k+p-\frac{q}{2})^2 - M_W^2]} \tag{3.54}$$

elde edilir. Bu matris elemanının eksenel vektör kısmını hesaplayalım:

$$(-k+p)^\mu (1+\gamma_5)(\not{k}+m)(1-\gamma_5) = (-k+p)^\mu (1-\gamma_5)(1+\gamma_5)\not{k} + m(-k+p)^\mu (1-\gamma_5)(1+\gamma_5)$$

$$= 2(1+\gamma_5)(-k+p)^\mu \not{k} \tag{3.55}$$

olduğundan yukarıdaki matris elemanının anapole katkı verecek kısmı

$$\frac{eg^2}{2} (\frac{m}{M_W})^2 \gamma_5 \gamma_\lambda \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{-k^\mu k^\nu}{(k^2-m^2)[(-k+p+\frac{q}{2})^2 - M_W^2][(-k+p-\frac{q}{2})^2 - M_W^2]} \tag{3.56}$$

dir. Buradaki integral II_{kk} tipindedir. q^2 ile orantılı kısmı

$$-ieg^2 \frac{1}{16\pi^2} \gamma_5 \gamma^\mu \frac{q^2}{M_W^2} - \frac{m^2}{72 M_W^2} + 0(1/M_W^4) \tag{3.57}$$

ve bunun da anapol katkısı

$$a_\nu^{(e)} = \frac{m^2}{72 M_W^2} + \ldots \tag{3.58}$$

dır.

Şekil 3.3 f diyagramının matris elemanı yazılırsa

$$S_\nu^{(f)}=\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}}\left\{\frac{-ig}{2\sqrt{2}}\frac{m}{M_W}(1+\gamma_5)\frac{i}{-\not k+\not p+\frac{\not q}{2}-m}\cdot -ie\gamma^\mu \frac{i}{-\not k+\not p-\frac{\not q}{2}-m}\cdot\frac{-ig}{2\sqrt{2}}(1-\gamma_5)\frac{i}{k^2-M_W^2}\right\}$$

$$=\frac{eg^2}{8}\left(\frac{m}{M_W}\right)^2\int\frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}}\cdot\frac{(1-\gamma_5)(-\not k+\not p+\frac{\not q}{2}+m)\gamma^\mu(-\not k+\not p-\frac{\not q}{2})(1-\gamma_5)}{(k^2-M_W^2)[(-k+p+\frac{q}{2})^2-m^2][(-k+p-\frac{q}{2})^2-m^2]} \qquad (3.59)$$

elde edilir. Bu matris elemanının eksenel vektör kısmını hesaplayalım.

$$(1-\gamma_5)(-\not k+\not p+\frac{\not q}{2}+m)\gamma^\mu(-\not k+\not p-\frac{\not q}{2}+m)(1-\gamma_5)=2(1+\gamma_5)[(-\not k+\not p+\frac{\not q}{2})\gamma^\mu(-\not k+\not p-\frac{\not q}{2})+m^2\gamma^\mu]$$

$$=2(1+\gamma_5)[-k^2\gamma^\mu+2\not k k+m^2\gamma^\mu] \qquad (3.60)$$

olduğundan yukarıdaki matris elemanının eksenel vektör kısmı

$$\frac{eg^2}{4}\left(\frac{m}{M_W}\right)^2\gamma_5\gamma_\lambda\int\frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}}\;\frac{(-k^2+m^2)g^{\lambda\mu}+2k^\mu k^\lambda}{(k^2-M_W^2)[(-k+p+\frac{q}{2})^2-m^2][(-k+p-\frac{q}{2})^2-m^2]} \qquad (3.61)$$

dır.

Buradaki integraller I_1, I_{kk} ve I_{k^2} tipindendirler. Sonuç

$$-ieg^2\frac{1}{16\pi^2}\gamma_5\gamma^\mu\frac{q^2}{M_W^2}\left[\frac{7m^2}{96M_W^2}+\frac{m^2}{16M_W^2}\ln(1/\rho)\right] \qquad (3.62)$$

ve anapol moment katkısı da

$$a_{\nu'}^{(f)}=-\frac{7m^2}{96\,M_W^2}+\frac{m^2}{16M_W^2}\ln(M_W^2/m^2) \qquad (3.63)$$

dır.

Şekil 3.3 g diyagramının matris elemanı

$$S_\nu^{(g)}=\frac{ie}{2}C_A\gamma^\mu(1-\gamma_5)\cdot\frac{-i}{q^2-M_W^2}\cdot i\pi_{\mu\nu}^{z\gamma}(q^2) \qquad (3.64)$$

ve bunun eksenel vektör kısmı

$$\frac{ie}{2} C_A \gamma_5 \gamma^\mu \frac{1}{q^2-M_z^2} \Pi^{z\gamma}_{\mu\nu}(q^2) \ , \quad \Pi^{z\gamma}_{\mu\nu}(q^2) = \frac{g^2}{16\pi^2} q^2 \tilde{\Pi}^{z\gamma} + O(q^4) \tag{3.65}$$

dır. Bunun q^2 ile orantılı kısmı

$$-ieg^2 \frac{1}{16\pi^2} \frac{q^2}{M_z^2} \gamma_5 \gamma^\mu \frac{C_A}{2} \tilde{\Pi}^{z\gamma} \tag{3.66}$$

dır. $\tilde{\Pi}^{z\gamma}$ 'yı Sakakibara ve sayısal değerinide Dombey ve Kennedy (1980) hesapladılar. Şekil 3.3 g diyagramının anapol katkısı [$M_W^2 = \rho M_z^2 \mathrm{Cos}^2\theta_W$, Ağaç diyagramı düzeyinde $\rho=1$ (Hollik,1986)]

$$a_\nu^{(g)} = \frac{C_A}{2} \mathrm{Cos}^2\theta_W \tilde{\Pi}^{z\gamma} \tag{3.67}$$

dır.

Şekil 3.3 a,b,c,d,e,f,g diyagramlarının nötrino kütlesinin sıfır olması halinde toplam anapol katkısı

$$\begin{aligned} a_\nu &= a^{(a)} + a^{(b)} + a^{(c)} + a^{(d)} + a^{(e)} + a^{(f)} + a^{(g)} \\ &\cong \frac{1}{6} \ln (M_W^2/m^2) - \frac{1}{6} \end{aligned} \tag{3.68}$$

dır.

3.2.2 Dirac Nötrinolarının Anapol Momenti

Olası Feynman diyagramları Şekil 3.3'de verilmiştir. EK B'deki Feynman kuralları ile bu diyagramların katkılarını sırası ile hesaplayalım.

Şekil 3.3 a diyagramının matris elemanı

$$S'^{(a)}_{\nu D} = -\frac{eg^2}{8} U^+ U \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{\gamma^\alpha(1-\gamma_5)(-\not{k}+\not{p}+\frac{\not{q}}{2}+m)\gamma^\mu(-\not{k}+\not{p}-\frac{\not{q}}{2}+m)\gamma_\alpha(1-\gamma_5)}{[(-k+p+\frac{q}{2})^2-m^2]\,[(-k+p-\frac{q}{2})^2-m^2]\,[k^2-M_W^2\,]} \tag{3.69}$$

dır. Bu matris elemanının eksenel vektör kısmını hesaplayalım. Matris elemanının γ-matrislerini içeren kısmı (3.9)'un aynısıdır. (3.7) için yapılan işlemler burada da yapılırsa (3.10) elde edilir. Burada $\not p + \frac{\not q}{2} \to m_\nu$, $\not p - \frac{\not q}{2} \to m_\nu$ olduğu anımsanırsa

$$-4\gamma_5 \left[2k^\mu \not k - \gamma^\mu k^2 - 4 \not k p^\mu + 4kp\gamma^\mu + m_\mu \not k \gamma^\mu - m_\nu \gamma^\mu \not k - 2m_\nu (p \tfrac{q}{2})^\mu \right.$$
$$\left. + 2m_\nu (p + \frac{q}{2})^\mu - 2\gamma^\mu (p^2 - \frac{q^2}{4}) + m_\nu^2 \gamma^\mu \right] \tag{3.70}$$

ve bu ifadenin yedinci ve sekizinci terimleri toplanırsa $-4[2m_\nu \gamma_5 q^\mu]$ elde edilir. $\gamma_5 q^\mu$ teriminden Gordon ayrılması (EK A.4) ile $-2m_\nu \gamma_5 \gamma^\mu - \frac{p_\nu}{m_\nu} \sigma^{\mu\nu}\gamma_5$ terimi elde edilir. (3.69)'un anapol momente katkı verecek kısmı

$$-\frac{eg^2}{2} U^+ U \gamma_5 \gamma_\lambda \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{(k^2 - 4kp - m^2 + 5m_\nu^2 - q^2) g^{\lambda\mu} - 2k^\mu k^\lambda}{[(-k+p+\frac{q}{2})^2 - m^2][(-k+p-\frac{q}{2})^2 - m^2][k^2 - M_W^2]} \tag{3.71}$$

bulunur. Feynman parametrizasyon yöntemi ile (3.71) ifadesi

$$-\frac{eg^2}{2} U^+ U \gamma_5 \gamma_\lambda \Gamma(3) \int_0^1 dk \int_0^x dy \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{(k^2 - 4kp - m^2 + 5m_\nu^2 - q^2) g^{\lambda\mu} - 2k^\mu k^\lambda}{\{k^2 - 2k[(p - \frac{q}{2})x + qy] + (M_W^2 + m^2 - m^2)x - M_W^2\}^3} \tag{3.72}$$

olur. (3.72)'deki integrallerin k^2, $k^\mu k^\lambda$, k^μ , 1 'li kısımlarınısırası ile C_{k^2}, C_{kk} , C_k ve C_1 ile gösterelim. Bu integralleri hesaplayalım:

$$C_1 = \Gamma(3) \int_0^1 dx \int_0^x dy \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{\{k^2 - 2k[(p - \frac{q}{2})x + qy] + (M_W^2 + m^2 - m^2)x - M_W^2\}^3} \tag{3.73}$$

2ω-boyutlu k üzerinden integral alınırsa (burada $(p - \frac{q}{2})^2 = m_\nu^2$ 'dir)

$$C_1 = \frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{1}{\{(M_W^2 + m_\nu^2 - m^2)x - M_W^2 - m_\nu^2 x^2 - q^2 y(y-x)\}} \tag{3.74}$$

elde edilir. $\rho = M_W^2/m^2$, $\sigma = m_\nu^2/m^2$ olmak üzere integrant q^2'ye göre seriye açılır, y'ye göre integre edilirse

$$C_1 = \frac{i}{16\pi^2} \cdot \frac{1}{m^2} \int_0^1 dx \left\{ \frac{x}{-\sigma x^2+(\rho+\sigma-1)x-\rho} + \frac{1}{6}\left(\frac{q^2}{m^2}\right) \frac{x^3}{[-\sigma x^2+(\rho+\sigma-1)x-\rho]^2} + O(q^4) \right\} \tag{3.75}$$

bulunur.

C_k için benzer işlemler yapılırsa

$$C_k = \frac{i}{16\pi^2} \cdot \frac{p^\mu}{m^2} \int_0^1 dx \left\{ \frac{x^2}{-\sigma x^2+(\rho+\sigma-1)x-\rho} + \frac{1}{6}\left(\frac{q^2}{m^2}\right) \frac{x^4}{[-\sigma x^2+(\rho+\sigma-1)x-\rho]^2} + O(q^4) \right\} \tag{3.76}$$

bulunur. C_{k^2} 'li integral 2ω-boyutlu k üzerinden integre edilirse

$$C_{k^2} = \frac{i\pi^\omega}{(2\pi)^{2\omega}} \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{\Gamma(3-\omega)}{\{(M_W^2+m_\nu^2-m^2)x-M_W^2-m_\nu^2x^2-q^2y(y-x)\}^{3-\omega}} \{m^2x^2+q^2y(y-x)$$
$$+ \frac{\omega}{2-\omega}[M_W^2+m_\nu^2-m^2)x-M_W^2-m_\nu^2x^2-q^2y(y-x)]\} \tag{3.77}$$

elde edilir. C_{k^2}'nin birinci terimini C'_{k^2} ve ikinci terimini de C''_{k^2} ile gösterelim. C'_{k^2}, q^2-komşuluğunda seriye açılır, y-üzerinden integre edilirse

$$C'_{k^2} = \frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \left\{ \frac{\sigma x^3}{(\rho+\sigma-1)x-\rho-\sigma x^2} + \frac{1}{6}\left(\frac{q^2}{m^2}\right) \frac{[-(\rho+\sigma-1)x^4+\rho x^3]}{[(\rho+\sigma-1)x-\rho-\sigma x^2]^2} + O(q^4) \right\} \tag{3.78}$$

bulunur. C''_{k^2} teriminin q^2 ile orantılı sonlu kısmı vardır. Şimdi C''_{k^2}'yi hesaplayalım.

$$C''_{k^2} = \frac{i\pi^\omega}{(2\pi)^{2\omega}} \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{\Gamma(3-\omega)}{2-\omega} \cdot \omega\, [(M_W^2+m_\nu^2-m^2)x-M^2-m_\nu^2x^2-q^2y(y-x)]^{\omega-2} \tag{3.79}$$

$\varepsilon = \omega - 2$ komşuluğunda seriye açılırsa sonlu kısmı hesaplanabilir.

$$C''_{k^2} = \frac{i\pi^{\omega}}{(2\pi)^{2\omega}} \int_0^1 dx \int_0^x dy \{\omega\Gamma(2-\omega) - \omega\Gamma(3-\omega) \ln[(M_W^2+m_\nu^2-m^2)x - M_W^2 - m_\nu^2 x^2 - q^2 y(y-x)] + 0(\varepsilon^2)\} \tag{3.80}$$

$$C''_{k^2} = \text{Kutup kısmı} - \frac{i}{16\pi^2} \cdot 2 \int_0^1 dx \int_0^x dx \{\ln[(M_W^2+m_\nu^2-m^2)x - M^2 - m_\nu^2 x^2 - q^2 y(y-x)] + 0(\varepsilon^2)\}$$

$$= \text{Kutup kısmı} - \frac{2i}{16\pi^2} \int_0^1 dx\, x \ln[(M^2+m_\nu^2-m^2)x - M_W^2 - m_\nu^2 x^2] \tag{3.81}$$

$$- \frac{i}{16\pi^2} \left(\frac{q^2}{m^2}\right) \frac{1}{3} \int_0^1 dx \frac{x^3}{(\rho+\sigma-1)x-\rho-\sigma x^2} + 0(q^4)$$

C_{k^2} 'nin q^2 ile orantılı kısmını C'''_{k^2} ile gösterirsek

$$C'''_{k^2} = \frac{i}{16\pi^2} \left(\frac{q^2}{m^2}\right) \int_0^1 dx \left\{ \frac{1}{6} \frac{[-(\rho+\sigma-1)x^4+\rho x^3]}{[(\rho+\sigma-1)x-\rho-\sigma x^2]^2} - \frac{1}{3} \frac{x^3}{(\rho+\sigma-1)x-\rho-\sigma x^2} \right\} \tag{3.82}$$

olur. Aynı şekilde C_{kk} hesaplanırsa $g^{\mu\lambda}q^2$ ile orantılı kısmı

$$C'''_{kk} = \frac{i\, g^{\mu\lambda}}{16\pi^2} \left(\frac{q^2}{m^2}\right) \int_0^1 dx \left[-\frac{1}{12} \cdot \frac{x^3}{(\rho+\sigma-1)x-\rho-\sigma x^2} \right] \tag{3.83}$$

bulunur.

Şimdi de x üzerinden olan integralleri hesaplayalım. İntegrantın paydasının kökleri

$$x_{1,2} = \frac{\rho+\sigma-1}{2\sigma} \pm \left[\frac{(\rho+\sigma-1)^2}{4\sigma^2} - \frac{\rho}{\sigma}\right]^{1/2} \tag{3.84}$$

ve $\rho \gg \sigma-1$ olduğundan $(\rho+\sigma-1 \cong \rho)$

$$x_1 = \frac{\rho}{\sigma} - 1 - \frac{\sigma}{\rho} - \frac{2\sigma^2}{\rho^2} - \frac{5\sigma^3}{\rho^3} + \ldots \tag{3.85a}$$

$$x_2 = 1 + \frac{\sigma}{\rho} + \frac{2\sigma^2}{\rho^2} + \frac{5\sigma^3}{\rho^3} + \ldots \tag{3.85b}$$

$$\ln\left(1 - \frac{1}{x_1}\right) = -\frac{\sigma}{\rho} - \frac{3}{2}\frac{\sigma^2}{\rho^2} - \frac{10}{3}\frac{\sigma^3}{\rho^3} + \ldots \tag{3.85c}$$

$$\ln\left(1 - \frac{1}{x_2}\right) \cong \ln(\sigma/\rho) \tag{3.85d}$$

dir. x üzerinden integraller hesaplanırsa $[-\sigma x^2 + (\rho+\sigma-1)x - \rho = -\sigma(x-x_1)(x-x_2)$ olmak üzere]

$$-\frac{1}{\sigma}\int_0^1 \frac{x\,dx}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{1}{\rho}\left[\ell n\left(\frac{\sigma}{\rho}\right) + 1\right] + 0(1/\rho^2) \tag{3.86a}$$

$$-\frac{1}{\sigma}\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{1}{\rho}\left[\ell n\left(\frac{\sigma}{\rho}\right) + \frac{3}{2}\right] + 0(\sigma^2/\rho^2) \tag{3.86b}$$

$$-\frac{1}{\sigma}\int_0^1 \frac{x^3\,dx}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{1}{\rho}\left[\ell n\left(\frac{\sigma}{\rho}\right) - \frac{3}{2}\right] + 0(\sigma^2/\rho^2) \tag{3.86c}$$

$$\frac{1}{\sigma^2}\int_0^1 \frac{x^3\,dx}{(x-x_1)^2(x-x_2)^2} = \frac{1}{\sigma\rho} + \frac{13}{2\rho^2} + \frac{3}{\rho^2}\ell n\,(\sigma/\rho) + 0\,(\sigma^2/\rho^2) \tag{3.86d}$$

$$\frac{1}{\sigma^2}\int_0^1 \frac{x^4\,dx}{(x-x_1)^2(x-x_2)^2} = \frac{1}{\sigma\rho} - \frac{4}{\rho^2} + \frac{4}{\rho^2}\ell n(\sigma/\rho) + 0\,(\sigma^2/\rho^2) \tag{3.86e}$$

olduğu görülür. Bu integral sonuçları C_1, C_k, C_{kk} ve C_{k2}'de yerlerine yazılır, elde edilen sonuçlar (3.72)'de yerlerine konur, q^2 ile orantılı kısımlar toplanırsa

$$-ieg^2 U^+ U\,\gamma_5\gamma^\mu\,\frac{1}{16\pi^2}\,\frac{q^2}{M_W^2}\left[-\frac{19}{36} - \frac{1}{6}\,\ell n(m_\nu^2/M_W^2) + 0(1/M_W^2)\right] \tag{3.87}$$

bulunur, anapol moment katkısı ise

$$a_{\nu D}^{(a)} = U^{+}U \left[-\frac{19}{36} + \frac{1}{6}\, \ell n(M_W^2/m_\nu^2) \right] \tag{3.88}$$

olur.

Şekil 3.3 b diyagramının matris elemanı

$$S'^{(b)}_{\nu D} = \frac{eg^2}{8}\, U^{+}U \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \cdot \frac{\gamma_\alpha(1-\gamma_5)(\not{k}+m)\gamma_\beta(1-\gamma_5)\, V^{\alpha\beta\mu}}{(k^2-m^2)\left[(-k+p+\frac{q}{2})^2-M_W^2\right]\left[(-k+p-\frac{q}{2})^2-M_W^2\right]} \tag{3.89}$$

dır.

Bu matris elemanının γ-matrislerini içeren kısmı (3.26) gibidir. (3.26) için yapılan işlemler burada da yapılırsa (3.29) elde edilir. Matris elemanının eksenel vektör kısmının anapol momente katkı verecek kısmı, $\not{p}+\frac{\not{q}}{2}\to m_\nu$ ve $\not{p}-\frac{\not{q}}{2}\to m_\nu$ de gözönüne alınırsa

$$-4\gamma_5(k^2\gamma^\mu - 4kp\gamma^\mu - 2k^\mu\not{k})$$

elde edilir. Buradan (3.89)'un anapol momente katkı verecek kısmını yazabiliriz:

$$-\frac{eg^2}{2}\, U^{+}U\gamma_5\gamma_\lambda \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \cdot \frac{(k^2-4kp)\, g^{\mu\lambda}-2k^\mu k^\lambda}{(k^2-m^2)\left[(-k+p+\frac{q}{2})^2-M_W^2\right]\left[(-k+p-\frac{q}{2})^2-M_W^2\right]} \tag{3.90}$$

Feynman parametrizasyon yöntemi ile bu ifade

$$-\frac{eg^2}{2}U^{+}U\gamma_5\gamma_\lambda\Gamma(3)\int_0^1 dx\int_0^x dy \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{(k^2-4kp)g^{\lambda\mu}-2k^\mu k^\lambda}{\{k^2-2k\left[(p-\frac{q}{2})x+qy\right]+(m_\nu^2+m^2-M_W^2)x-m^2\}^3} \tag{3.91}$$

olur. Bu tür integrallerin k^2, $k^\mu k^\lambda$, k^μ ve 1'li kısımlarını A_{k^2}, A_{kk}, A_k ve A_1 ile gösterelim. İntegralleri hesaplayalım (2ω-boyutlu integraller için EK C 'ye bakınız).

$$A_1 = \Gamma(3)\int_0^1 dx \int_0^x dy \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{\{k^2-2k[(p-\frac{q}{2})x+qy]+(m_\nu^2+m^2-M_W^2)x-m^2\}^3} \tag{3.92}$$

2ω-boyutlu k-üzerinden integral alınırsa

$$A_1 = \frac{i}{16\pi^2}\int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{1}{\{k^2-2k[(p-\frac{q}{2})x+qy]+(m_\nu^2+m^2-M_W^2)x-m^2\}^3} \tag{3.93}$$

elde edilir. $\rho = M_W^2/m^2$ ve $\sigma = m^2/m^2$ olmak üzere integrant q^2 'ye göre seriye açılır ve y 'ye göre integre edilirse

$$A_1 = \frac{i}{16\pi^2}\frac{1}{m^2}\int_0^1 dx \left\{\frac{x}{-\sigma x^2+(\sigma+1-\rho)x-1} - \frac{1}{6}\left(\frac{q^2}{m^2}\right)\frac{x^3}{[-\sigma x^2+(\sigma+1-\rho)x-1]^2}\right\}+0(q^4) \tag{3.94}$$

olur. A_k, k üzerinden integre edilir, q^2'ye göre seriye açılır ve y 'ye göre integre edilirse

$$A_k = \frac{i}{16\pi^2}\frac{p^\mu}{m^2}\int_0^1 dx \left\{\frac{x^2}{-\sigma x^2+(\sigma+1-\rho)x-1} + \frac{1}{6}\left(\frac{q^2}{m^2}\right)\frac{x^4}{[-\sigma x^2+(\sigma+1-\rho)x-1]^2}\right\}+0(q^4) \tag{3.95}$$

bulunur.

A_{k2} integrali için I_{k2} ve II_{k2} integrallerinin hesaplanmasında yapıldığı gibi aynı işlemler yapılırsa q^2 ile orantılı kısmı için

$$A'_{k2} = \frac{i}{16\pi^2}\left(\frac{q^2}{m^2}\right)\frac{1}{6}\int_0^1 dx\left\{\frac{-(\sigma+1-\rho)x^4+x^3}{[(\sigma+1-\rho)x-1-\sigma x^2]^2} - \frac{2x^3}{(\sigma+1-\rho)x-1-\sigma x^2}\right\} \tag{3.96}$$

ve A_{kk} 'nın q^2 ile orantılı kısmı da aynı şekilde elde edilir:

$$A'_{kk} = -\frac{i}{16\pi^2}\left(\frac{q^2}{m^2}\right)\frac{g^{\nu\mu}}{12}\int_0^1 dk \frac{x^3}{(\sigma+1-\rho)x-1-\sigma x^2} \tag{3.97}$$

Böylece integraller x-değişkeni üzerinden olan integrallere indirgenmiş oldu. Şimdi de x-değişkeni üzerinden olan integralleri hesaplayalım.

İntegrantın paydasının kökleri

$$x_{1,2} = \frac{\sigma+1-\rho}{2\sigma} \pm \left[\left(\frac{\sigma+1-\rho}{2\sigma}\right)^2 - \frac{1}{\sigma}\right]^{1/2} \qquad (3.98a)$$

ve $\rho \gg \sigma+1$ olduğundan $\sigma+1-\rho \cong -\rho$ alabiliriz. Bu yaklaşım yapıldığında

$$x_1 = -\frac{\rho}{\sigma} + \frac{1}{\rho} + \frac{\sigma}{\rho^3} + \frac{2\sigma^2}{\rho^5} + \frac{5\sigma^3}{\rho^7} + \ldots \qquad (3.98b)$$

$$x_2 = -\frac{1}{\rho} - \frac{\sigma}{\rho^3} - \frac{2\sigma^2}{\rho^3} - \frac{5\sigma^3}{\rho^7} + \ldots \qquad (3.98c)$$

$$\ln\left(1-\frac{1}{x_1}\right) = \frac{\sigma}{\rho} - \frac{\sigma^2}{2\rho^2} + \ldots \qquad (3.98d)$$

$$\ln\left(1-\frac{1}{x_2}\right) \cong \ln\rho \qquad (3.98e)$$

olur. x-değişkenleri üzerinden integraller hesaplanırsa $(-\sigma x^2+(\sigma+1-\rho)x-1 = -\sigma(x-x_1)(x-x_2)$ olmak üzere)

$$-\frac{1}{\sigma}\int_0^1 \frac{x\,dx}{(x-x_1)(x-x_2)} = -\frac{1}{\rho} + \frac{\sigma}{2\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\ln\rho + \ldots \qquad (3.99a)$$

$$-\frac{1}{\sigma}\int_0^1 \frac{x^2dx}{(x-x_1)(x-x_2)} = -\frac{1}{2\rho} - \frac{1}{\rho^3}\ln\rho + \ldots \qquad (3.99b)$$

$$-\frac{1}{\sigma}\int_0^1 \frac{x^3dx}{(x-x_1)(x-x_2)} = -\frac{1}{3\rho} + \frac{\sigma^2}{\rho^4}\ln\rho + \ldots \qquad (3.99c)$$

$$\frac{1}{\sigma^2}\int_0^1 \frac{x^3dx}{(x-x_1)^2(x-x_2)^2} = \frac{1}{2\rho^2} + \frac{3}{\rho^4}\ln\rho + \ldots \qquad (3.99d)$$

$$\frac{1}{\sigma^2}\int_0^1 \frac{x^4dx}{(x-x_1)^2(x-x_2)^2} = \frac{1}{3\rho^2} - 4\frac{\sigma^2}{\rho^5}\ln\rho + \ldots \qquad (3.99e)$$

elde edilir.

(3.99 a-e) ifadeleri (3.94-97)'de ve bulunan sonuçlar da (3.90) da yerlerine yazılır, q^2 ile orantılı kısımları toplanırsa

$$-ieg^2 U^+U \frac{1}{16\pi^2} \gamma_5\gamma^\mu \frac{q^2}{M_W^2} [-\frac{7}{36} + 0(1/M_W^2)] \qquad (3.100)$$

bulunur, anapol moment katkısı ise

$$a_{\nu D}^{(b)} = U^+U \left[-\frac{7}{36} + \ldots\right] \qquad (3.101)$$

olur.

Şekil 3.3 c diyagramının matris elemanı

$$S'^{(c)}_{\nu D} = \frac{eg^2}{8} U^+U \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{[(m-m_\nu)+(m+m_\nu)\gamma_5](\not{k}+m)\gamma^\mu(1-\gamma_5)}{(k^2-m^2)[(-k+p+\frac{q}{2})^2-M_W^2][(-k+p-\frac{q}{2})^2-M_W^2]} \qquad (3.102)$$

dir. Bunun eksenel vektör kısmı hesaplanırsa

$$\frac{eg^2}{4} U^+U\gamma_5\gamma^\mu \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{m^2}{(k^2-m^2)[(-k+p+\frac{q}{2})^2][(-k+p-\frac{q}{2})^2-M_W^2]} \qquad (3.103)$$

bulunur. (Şekil 3.2 d diyagramının matris elemanının eksenel vektör kısmının katkısı (3.103) ile aynıdır ve iki diyagramın toplam katkısı (3.103) katkısının iki katı olur). (3.103)'deki integral A_1 türünde bir integraldir, q^2 ile orantılı kısmı

$$ieg^2 U^+U \frac{1}{16\pi^2} \gamma_5\gamma^\mu \frac{q^2}{m^2} [-\frac{1}{24\rho^2} + 0(1/\rho^4)] \qquad (3.104)$$

ve bunun anapol moment katkısı

$$a_{\nu D}^{(c+d)} = U^+U [\frac{m^2}{24M_W^2} + \ldots] \qquad (3.105)$$

dır.

Şekil 3.3 e diyagramının matris elemanı

$$S'^{(e)}_{\nu D} = -\frac{eg^2}{4M_W^2} U^+U \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{[(m-m_\nu)+(m+m_\nu)\gamma_5](k-p)^\mu(\not{k}+m)[(m-m_\nu)-(m+m_\nu)\gamma_5]}{(k^2-m^2)[(-k+p+\frac{q}{2})^2-M_W^2][(-k+p-\frac{q}{2})^2-M_W^2]} \tag{3.106}$$

ve bunun anapol momente katkı veren kısmı ise

$$-\frac{eg^2}{2M_W^2} U^+U\gamma_5\gamma_\lambda(m^2-m^2) \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k^\mu k^\lambda}{(k^2-m^2)[(-k+p+\frac{q}{2})^2-M_W^2][(-k+p-\frac{q}{2})^2-M_W^2]} \tag{3.107}$$

dır. İntegral A_{kk} tipinde integraldir ((3.97)'den sonucu yazılabilir); q^2 ile orantılı kısmı hesaplanırsa,

$$-ieg^2 \frac{1}{16\pi^2} U^+U\ \gamma_5\gamma^\mu(\frac{q^2}{m^2}) \frac{m^2-m_\nu^2}{M_W^2} (\frac{1}{24}) [\frac{1}{\sigma\rho} - \frac{3}{\sigma^2\rho} + 0(1/\rho^2)]$$

$$= -ieg^2 \frac{1}{16\pi^2} U^+U\gamma_5\gamma^\mu \frac{q^2}{M_W^2} (m^2-m_\nu^2) \left[\frac{m^2}{24m_\nu^2M_W^2} - \frac{m^4}{8m_\nu^4M_W^2} + \ldots\right] \tag{3.108}$$

bulunur. Bunun anapol moment katkısı

$$a^{(e)}_{\nu D} = U^+U \left[\frac{m^2(m^2-m_\nu^2)}{24\ m_\nu^2\ M_W^2} - \frac{m^4(m^2-m_\nu^2)}{8\ m_\nu^4\ M_W^2} + \ldots\right] \tag{3.109}$$

dır.

Şekil 3.3 f diyagramının matris elemanı

$$S'^{(f)}_{\nu D} = -\frac{eg^2}{8M_W^2} U^+U \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \{[(m-m_\nu)+(m+m_\nu)\gamma_5] \frac{(-\not{k}+\not{p}+\frac{\not{q}}{2}+m)\gamma^\mu(-\not{k}+\not{p}-\frac{\not{q}}{2}+m)}{[(-k+p+\frac{q}{2})^2-m^2][(-k+p-\frac{q}{2})^2m^2](k^2-M_W^2)}$$

$$\times [(m-m_\nu)-(m+m_\nu)\gamma_5]\} \tag{3.110}$$

dır. Bunun eksenel vektör kısmını hesaplayalım; γ-matrislerinin özellikleri kullanılarak γ_5 ile orantılı kısım

$$2\gamma_5(m^2-m_\nu^2)[(-\not{k}+\not{p}+\frac{\not{q}}{2})\gamma^\mu(-\not{k}+\not{p}-\frac{\not{q}}{2})+m^2\gamma^\mu] \tag{3.111}$$

olarak elde edilir. Köşeli parantezdeki birinci terim

$$\gamma_5(-\not k+p+\frac{\not q}{2})\gamma^\mu(-\not k+p-\frac{\not q}{2}) = \gamma_5(-\not k-m_\nu)\gamma^\mu(-\not k+m_\nu)$$

$$= \gamma_5(\not k\gamma^\mu\not k-m_\nu\not k\gamma^\mu+m_\nu\gamma^\mu\not k-m_\nu^2\gamma^\mu) \qquad (3.112)$$

dir. (3.112), (3.111)'de yerine yazılırsa eksenel vektör kısmı bulunur. Elde edilen bu eksenel vektör kısmı (3.110)'da yerine yazılırsa

$$\frac{eg^2}{4M_W^2} U^+U\,\gamma_5\gamma_\lambda(m^2-m_\nu^2)\int\frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}}\frac{(k^2+m_\nu^2-m^2)g^{\lambda\mu}-2k^\mu k^\lambda}{[(-k+p+\frac{q}{2})^2-m^2][(-k+p-\frac{q}{2})^2-m^2][k^2-M_W^2]} \qquad (3.113)$$

bulunur. Buradaki integral, C_1, C_{kk} ve C_{k^2} türünde integraller içerir. İntegral değerleri (3.113)'de yerlerine yazılır, q^2 ile orantılı kısımlar toplanırsa

$$ieg^2U^+U\;\frac{1}{16\pi^2}\gamma_5\gamma^\mu\frac{m^2-m_\nu^2}{4\,M_W^2}\frac{q^2}{m^2}\left[\frac{21}{24\rho}-\frac{1}{12\rho}\ln(\sigma/\rho)-\frac{m_\nu^2-m^2}{6}\frac{1}{\sigma\rho}+0(1/\rho^2)\right]$$

$$= ieg^2U^+U\,\frac{1}{16\pi^2}\gamma_5\gamma^\mu\frac{q^2}{M_W^2}\frac{m^2-m_\nu^2}{4\,M_W^2}\left[\frac{21}{24}+\frac{1}{m_\nu^2}-\frac{1}{12}\ln(\sigma/\rho)+\ldots\right] \qquad (3.114)$$

bulunur. Bunun anapol moment katkısı

$$a_{\nu D}^{(f)} = U^+U\,\frac{m_\nu^2-m^2}{4\,M_W^2}\left[\frac{21}{24}+\frac{1}{m_\nu^2}-\frac{1}{12}\ln(m_\nu^2/M_W^2)+\ldots\right] \qquad (3.115)$$

dır.

Şeki 3.3 g diyagramının katkısı, nötrino kütlesinin sıfır olması durumundaki ile aynıdır.

Dirac nötrinoları için toplam anapol moment

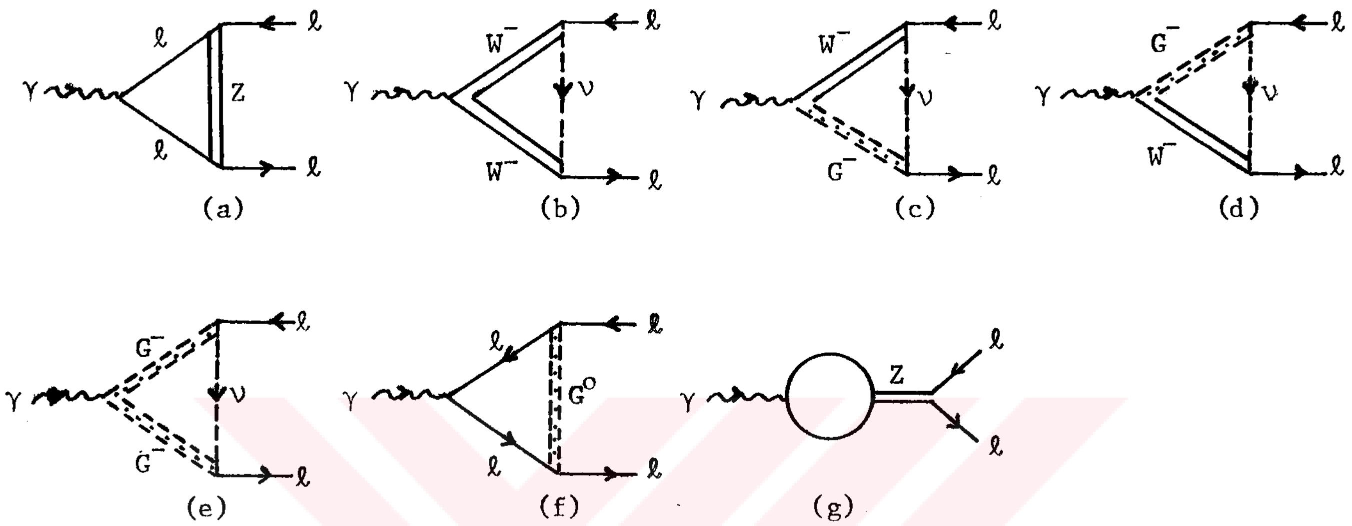
$$a_{\nu D} = a_{\nu D}^{(a)} + a_{\nu D}^{(b)} + a_{\nu D}^{(c)} + a_{\nu D}^{(d)} + a_{\nu D}^{(e)} + a_{\nu D}^{(f)} + a_{\nu D}^{(g)}$$

$$\cong U^+U\left[\frac{1}{6}\ln(M_W^2/m_\nu^2)-\frac{13}{18}\right]$$

olur.

3.2.3 Elektrozayıf Kuramda Yüklü Leptonların Anapol Momenti

Olası Feynman diyagramları ile bunlardan gelen katkılar aşağıdadır (Dombey ve Kennedy, 1980):



Şekil 3.4: Yüklü leptonlar için eksenel vektör çiftlenimli diyagramlar.

Şekil 3.4 a'nın katkısı

$$a^{(a)} = (1/3)(1-4\mathrm{Sin}^2\theta_W)[\ell n(M_Z^2/m^2) - \frac{7}{12}] \tag{3.116}$$

ve Şekil 3.4b'nin katkısı

$$a^{(b)} = -7/72 \tag{3.117}$$

dir. Şekil 3.4c,d ve f'den katkı gelmez, e 'nin katkısı ise a ve b diyagramlarının katkılarına göre çok daha küçüktür ($\frac{m^2}{M_W^2}$ mertebesinde).

Şekil 3.4 g'deki $\Pi^{Z\gamma}$ karışımını Sakakibara (1979,1981) ve bunun sayısal değerini Dombey ve Kennedy (1980) hesapladılar. Toplam anapol katkısını Dombey ve Kennedy

$$a = 0{,}27\Pi \tag{3.118}$$

olarak hesapladılar.

3.2.4 Genişletilmiş Elektrozayıf Kuramda Yüklü Leptonların Anapol Momenti

Kütleli Dirac nötrinolarının anaparçacık olduğu diyagramların katkılarını EK B 'deki Feynman kurallarını kullanarak sırası ile hesaplayalım:

Şekil 3.4 a diyagramı ve Şekil 3.4 g diyagramının katkıları nötrino kütlesinin sıfır olması durumundaki ile aynıdır.

Şekil 3.4 b diyagramının matris elemanı

$$S_e^{(b)} = \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \Big\{ \frac{ig}{2\sqrt{2}} U\gamma^{\nu}(1-\gamma_5) \frac{i}{\not k - m_\nu} \frac{ig}{2\sqrt{2}} U^{+}\gamma^{\sigma}(1-\gamma_5) \frac{-ig_{\beta\nu}}{(-k+p+\frac{q}{2})^2 - M_W^2}$$

$$\times \left[-ieV^{\alpha\beta\mu}(-k+p-\frac{q}{2}, k-p-\frac{q}{2}, q)\right] \cdot \frac{-ig_{\alpha\sigma}}{(-k+p-\frac{q}{2})^2 - M_W^2} \Big\}$$

$$= \frac{eg^2}{8} U\, U^{+} \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{\gamma_\beta(1-\gamma_5)(\not k - m_\nu)\gamma_\alpha(1-\gamma_5)\; V^{\alpha\beta\mu}}{(k^2-m_\nu^2)\left[(-k+p+\frac{q}{2})^2 - M_W^2\right]\left[(-k+p-\frac{q}{2})^2 - M_W^2\right]} \tag{3.119}$$

dir. Bu matris elemanının eksenel vektör kısmını hesaplayalım. Bunun γ-matrislerini içeren kısmı

$$\gamma_\beta(1-\gamma_5)(\not k + m_\nu)\gamma_\alpha(1-\gamma_5)\; V^{\alpha\beta\mu} = (1+\gamma_5)\gamma_\beta(\not k + m_\nu)\gamma_\alpha(1-\gamma_5)\; V^{\alpha\beta\mu}$$

$$= (1+\gamma_5)(\gamma_\beta \not k \gamma_\alpha + m_\nu \gamma_\beta\gamma_\alpha)(1-\gamma_5)\; V^{\alpha\beta\mu}$$

$$= 2(1+\gamma_5)\gamma_\beta \not k \gamma_\alpha\; V^{\alpha\beta\mu} \tag{3.120}$$

ve eksenel vektör kısmı ise

$$4\gamma_5(k^2\gamma^\mu+2k^\mu \not{k} - 4\gamma^\mu kp) \qquad (3.121)$$

olur.

Matris elemanının eksenel vektör kısmı

$$\frac{eg^2}{2}\, UU^+\gamma_5\gamma_\lambda \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{(k^2-4kp)g^{\mu\lambda}+k^\mu k^\lambda}{(k^2-m_\nu^2)[-k+p+\frac{q}{2})^2-M_W^2][(-k+p-\frac{q}{2})^2-M_W^2]} \qquad (3.122)$$

dır. İntegrali hesaplayalım. k^2, $k^\mu k^\lambda$, k^μ ve 1'li integralleri sırası ile N_{k^2} , N_{kk}, N_k ve N_1 ile gösterelim. Feynman parametrizasyon yöntemi ile bu integraller

$$N=\Gamma(3)\int_o^1 dx\int_o^x dy \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k^2;\ k^\mu k^\lambda;\ k^\mu\ ;\ 1}{\{k^2-2k[(p-\frac{q}{2})x+py]+(m^2+m_\nu^2-M_W^2)x-m_\nu^2\}^3} \qquad (3.123)$$

şeklinde yazılabilir. N_{k^2} integrali

$$N_{k^2} = \Gamma(3)\int_o^1 dx\int_o^x dy\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k^2}{\{k^2-2k[(p-\frac{q}{2})x+qy]+(m^2+m_\nu^2-M_W^2)x-m_\nu^2\}^3}$$

$$= \frac{i\pi^\omega}{(2\pi)^{2\omega}} \int_o^1 dx\int_o^x dy\, \{\frac{m^2x^2+q^2y(y-x)}{(m^2+m_\nu^2-M_W^2)x-m_\nu^2-m^2x^2-q^2y(y-x)} \qquad (3.124)$$

$$+\,\omega\frac{\Gamma(3-\omega)}{2-\omega}\,[(m^2+m_\nu^2-M_W^2)x-m_\nu^2-m^2x^2-q^2y(y-x)]^{\omega-2}\}$$

olur. Daha önceki k^2 'li integrallerin hesaplanmasında yapıldığı gibi birinci terim q^2'ye göre seriye açılır, y 'ye göre intigre edilir. İkinci terimin q^2 ile orantılı sonlu kısmını hesaplamak için, bu terimi $\varepsilon=\omega-2$ 'ye göre ve elde edilen ifade q^2 'ye göre seriye açılır, y 'ye göre integre edilirse ($\sigma=m_\nu^2/m^2$, $\rho= M_W^2/m^2$ olmak üzere)

$$N_{k^2} = \text{Kutup kısmı} - \frac{i}{16\pi^2}\cdot 2\int_0^1 dx\, x\ell n[(m^2+m_\nu^2-M_W^2)x-m_\nu^2-m^2x^2]$$

$$+\frac{i}{16\pi^2}\int_0^1 dx\,\{\frac{x^3}{(1+\sigma-\rho)x-\sigma-x^2}+\frac{1}{6}(\frac{q^2}{m^2})[\frac{-(1+\sigma-\rho)x^4+\sigma x^3}{[(1+\sigma-\rho)x-\sigma-x^2]^2}$$

$$-\frac{2x^3}{(1+\sigma-\rho)x-\sigma-x^2}]\}+0(q^4) \qquad (3.125)$$

bulunur. Benzer şekilde N_{kk}'nın $g^{\mu\lambda}$ ile orantılı kısmı ve bundan da q^2 ile orantılı sonlu kısmı hesaplanırsa

$$N'_{kk} = \text{Kutup kısmı} - \frac{i}{16\pi^2}\,\frac{1}{2}\,g^{\mu\lambda}\int_0^1 dx\,\{x\,\ell n[(m^2+m_\nu^2-M_W^2)x-m_\nu^2-m^2x^2]$$

$$+(\frac{q^2}{m^2})\,\frac{1}{6}\,\frac{x^3}{(1+\sigma-\rho)x-\sigma-x^2}\}+0(q^4) \qquad (3.126)$$

bulunur. N_k integrali 2ω-boyutlu k ile y üzerinden integre edilirse

$$N_k = \frac{i}{16\pi^2}\,\frac{p^\mu}{m^2}\int_0^1 dx\,\{\frac{x^2}{(1+\sigma-\rho)x-\sigma-x^2}-\frac{1}{6}(\frac{q^2}{m^2})\,\frac{x^4}{[(1+\sigma-\rho)x-\sigma-x^2]^2}+0(q^4)\} \qquad (3.127)$$

ve benzer şekilde N_1 için

$$N_1 = \frac{i}{16\pi^2}\,\frac{1}{m^2}\int_0^1 dx\,\{\frac{x}{(1+\sigma-\rho)x-\sigma-x^2}-\frac{1}{6}(\frac{q^2}{m^2})\,\frac{x^3}{[(1+\sigma-\rho)x-\sigma-x^2]^2}+0(q^4)\} \qquad (3.128)$$

bulunur. (2ω-boyutlu k integralleri ile y integralleri için daha önce hesapladığımız integrallerde izlediğimiz yöntemi izliyoruz).

Şimdi de x-üzerinden olan integralleri hesaplayalım. İntegrantın paydası $-x^2+(1+\sigma-\rho)x-\sigma=-(x-x_1)(x-x_2)$ şeklinde yazılabilir. $\rho \gg 1+\sigma$ olduğundan $1+\sigma-\rho \cong -\rho$ ve

$$x_1 = -\rho + \frac{\sigma}{\rho} + \frac{\sigma^2}{\rho^3} + \frac{2\sigma^3}{\rho^5} + \frac{5\sigma^4}{\rho^7} + \ldots \tag{3.129a}$$

$$x_2 = -\frac{\sigma}{\rho} - \frac{\sigma^2}{\rho^3} - \frac{2\sigma^3}{\rho^5} + \ldots \tag{3.129b}$$

$$\ell n(1 - \frac{1}{x_1}) \cong \ell n(1 + \frac{1}{\rho}) \cong \frac{1}{\rho} - \frac{1}{2\rho^2} + \ldots \tag{3.129c}$$

$$\ell n(1 - \frac{1}{x_2}) \cong \ell n(\frac{\rho}{\sigma}) \tag{3.129d}$$

olur. x_1 ve x_2 'nin bu değerleri kullanılırsa

$$-\int_0^1 \frac{x\,dx}{(x-x_1)(x-x_2)} = -\frac{1}{\rho} + \frac{1}{2\rho^2} + \frac{\sigma}{\rho^2}\,\ell n(\rho/\sigma) + \ldots \tag{3.129e}$$

$$-\int_0^1 \frac{x^2dx}{(x-x_1)(x-x_2)} = -\frac{1}{2\rho} + \frac{1}{3\rho^2} - \frac{\sigma^2}{\rho^3}\,\ell n(\rho/\sigma) + \ldots \tag{3.129f}$$

$$-\int_0^1 \frac{x^3dx}{(x-x_1)(x-x_2)} = -\frac{1}{3\rho} + \frac{\sigma}{\rho} + \frac{\sigma}{2\rho^2} - \frac{\sigma^3}{\rho^4}\,\ell n(\rho/\sigma) + \ldots \tag{3.129g}$$

$$\int_0^1 \frac{x^3dx}{[(x-x_1)(x-x_2)]^2} = \frac{1}{2\rho^2} - \frac{3\sigma^2}{\rho^4}\,\ell n(\rho/\sigma) + \ldots \tag{3.129h}$$

$$\int_0^1 \frac{x^4dx}{[(x-x_1)(x-x_2)]^2} = \frac{1}{3\rho^2} - \frac{\sigma}{\rho^2} - \frac{4\sigma^2}{\rho^5}\,\ell n(\rho/\sigma) + \ldots \tag{3.129i}$$

bulunur. Bu sonuçları N_{k^2} ve N_{kk} ifadelerinde ve elde edilen değerleri de (3.122) de yerlerine yazıp q^2 ile orantılı kısımları toplanırsa

$$-ieg^2\, U U^+ \frac{1}{16\pi^2} \gamma_5 \gamma^\mu \frac{q^2}{M_W^2} \left[-\frac{10}{48} - \frac{m_\nu^2}{8m^2} + O(1/M_W^2) \right] \tag{3.130}$$

buluruz. (3.119)'den anapol moment katkısı

$$a_e^{(b)} = U U^{+} \left[- \frac{10}{48} - \frac{m_\nu^2}{8m^2} + 0\ (1/M_W^2) \right] \tag{3.131}$$

çıkar.

Şekil 3.4 c diyagramının matris elemanı

$$S_e^{(c)} = - \frac{eg^2}{8} U U^{+} \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{[(m-m_\nu)-(m+m_\nu)\gamma_5](\not{k}+m_\nu)\gamma^\mu(1-\gamma_5)}{(k^2-m_\nu^2)[(-k+p-\frac{q}{2})^2-M_W^2][(-k+p+\frac{q}{2})^2-M_W^2]} \tag{3.132}$$

dir. Bunun eksenel vektör kısmı hesaplanırsa

$$= \frac{eg^2}{4} U U^{+}\gamma_5\gamma^\mu \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{m_\nu^2}{(k^2-m_\nu^2)[(-k+p-\frac{q}{2})^2-M_W^2][(-k+p+\frac{q}{2})^2-M_W^2]} \tag{3.133}$$

bulunur.

Şekil 3.4 d diyagramının matris elemanı

$$S_d^{(c)} = - \frac{eg^2}{8} U U^{+} \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{(1-\gamma_5)(\not{k}+m_\nu)[(m-m_\nu)+(m+m_\nu)\gamma_5]}{(k^2-m_\nu^2)[(-k+p-\frac{q}{2})^2-M_W^2][(-k+p+\frac{q}{2})^2-M_W^2]} \tag{3.134}$$

dir. Bunun eksenel vektör kısmı hesaplanırsa (3.133) elde edilir. Bu nedenle Şekil 3.4 c ve d diyagramlarının toplam katkıları((3.133) integrali N_1 türünde integraldir) hesaplandığında q^2 ile orantılı kısmı

$$ieg^2 U U^{+} \frac{1}{16\pi^2} \gamma_5\gamma^\mu \frac{m_\nu^2}{4m^2} \left(\frac{q^2}{m^2}\right) \left[\frac{1}{12\rho^2} + 0\ (1/\rho^3)\right] \tag{3.135}$$

bulunur, anapol moment katkısı ise

$$a_e^{(c+d)} = U U^{+} \left[- \frac{m_\nu^2}{48M_W^2} + \ldots\right] \tag{3.136}$$

olur.

Şekil 3.4 e diyagramının matris elemanı aşağıdaki gibidir:

$$S_e^{(e)} = \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}}\{(-\frac{ig}{2\sqrt{2}})^2 \frac{1}{M_W^2} U[(m-m_\nu)-(m+m_\nu)\gamma_5] \frac{i}{\not{k}-m_\nu} U^+[(m-m_\nu)+(m+m_\nu)\gamma_5]$$

$$\times[-ie(-k+p+\frac{q}{2} - k+p - \frac{q}{2})^\mu] \frac{i}{(-k+p-\frac{q}{2})^2-M_W^2} \cdot \frac{i}{(-k+p+\frac{q}{2})^2-M_W^2}\} \tag{3.137}$$

Bunun anapol momente katkı verecek kısmı hesaplanırsa

$$-\frac{eg^2}{2} U U^+ \gamma_5\gamma^\mu \frac{m^2-m_\nu^2}{M_W^2} \int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k^\mu k^\lambda}{(k^2-m_\nu^2)[(-k+p-\frac{q}{2})^2-M_W^2][(-k+p+\frac{q}{2})^2-M_W^2]} \tag{3.138}$$

bulunur. İntegral N_{kk} tipindedir. N_{kk} yerine yazılır, q^2 ile orantılı kısımlar toplanırsa

$$-ieg^2 U U^+ \frac{1}{16\pi^2} \gamma_5\gamma^\mu(\frac{q^2}{m^2}) \frac{m^2-m_\nu^2}{M_W^2} [\frac{m^2}{192M_W^2} - \frac{m_\nu^2}{16M_W^2} + 0\ (1/M_W^4)] \tag{3.139}$$

bulunur. Bunun anapol moment katkısı da

$$a_e = UU^+\left[\frac{m^2-m_\nu^2}{192M_W^2} + \frac{m_\nu^2(m^2-m_\nu^2)}{16\ M_W^2\ m^2} + \dots\right] \tag{3.140}$$

dır.

Şekil 3.4 f diyagramının matris elemanı yazılırsa anapol momente katkı verebilecek kısmının (eksenel vektör kısmı) olmadığı görülür.

Böylece nötrino kütlesinin sıfırdan farklı olması (Dirac nötrinoları için) durumunda yüklü leptonların anapol momenti ($a^{(a)}$ ve $a^{(g)}$ katkıları 3.2.3'dekilerle aynıdır)

$$a_e = a^{(a)} + a^{(b)} + \dots + a^{(g)} \tag{3.141}$$

$$\cong \frac{4\ M_W^2 - 3\ M_Z^2}{M_Z^2} [\frac{1}{3}\ \ell n(M_Z^2/m^2) - \frac{7}{36}] - \left[\frac{10}{48} + \frac{m_\nu^2}{8m^2}\right] U\ U^+$$

olur.

3.3 MAGNETİK MOMENT

(3.1) eşitliğinin pariteyi koruyan terimleri

$$\bar{u}(p+\frac{q}{2})[\gamma^{\mu}F_1(q^2)+\frac{i}{2m}\sigma^{\mu\nu}q_{\nu}F_2(q^2)]\,u(p-\frac{q}{2}) \tag{3.142}$$

dir. Gordon ayrılması kullanılarak bu ifade aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned}&\bar{u}(p+\frac{q}{2})[\gamma^{\mu}[F_1(q^2)+F_2(q^2)]-\frac{p^{\mu}}{m}F_2(q^2)]\,u(p-\frac{q}{2})\\&=\bar{u}(p+\frac{q}{2})[\frac{p^{\mu}}{m}F_1(q^2)+\frac{i\sigma^{\mu\nu}}{2m}q_{\nu}[F_1(q^2)+F_2(q^2)]]u(p-\frac{q}{2})\end{aligned} \tag{3.143}$$

Daha önce (Bölüm 3.1 de) vurgulandığı gibi $F_1(q^2)$ elektrik (yük) yapı çarpanı, $F_2(q^2)$ magnetik moment yapı çarpanıdır. Yüklü leptonlar için $F_1(o)=1$ (bire renormalize) dir. $F_2(o)$ deneyciler tarafından anomal magnetik moment olarak adlandırılır. (3.142) ifadesi QED'de ayar değişmezdir ve yapı çarpanları da ayar bağımsızdır. En genel durum gözönüne alındığında bu akım abeliyen olmayan ayar gruplarının dönüşümleri altında değişmez değildir ve yapı çarpanları ayar bağımlıdırlar (Abers ve Lee,1973). Yüklü ve yüksüz leptonların anomal magnetik momentleri daha önce hesaplanmıştır (Müon için: Jackiw ve Weinberg, 1972; Bars ve Yoshimura 1972; Aydın ve diğ.,1973; Leveille,1978; Halzen ve Martin,1983, s.161, nötrinolar için: Kim,1976; Lee ve Shrock,1977; Marciano ve Sanda, 1977; Liu,1986; Fukugita ve Yanagida, 1987; Mohapatra, 1988 a,b; Grifols ve Peris, 1988; Barbieri ve diğ., 1988; Nötzold, 1988; Czyž ve diğ.,1988; Mohapatra, 1989).

Yüklü leptonların magnetik momentine katkı veren diyagramlardan araparçacık olarak kütleli Dirac nötrinolu diyagramın (Şekil 3.4 b'nin) katkısını hesaplıyoruz (Goldston katkıları küçük olmaları nedeniyle hesaba katılmıyor).

Yüksüz leptonların (Dirac nötrinoları) magnetik momentlerine en büyük katkıyı (3.3a) ve (3.3b) diyagramları verdiği için bu diyagramların katkılarını hesaplayacağız

3.3.1. Dirac Nötrinolarının Magnetik Momenti

Şekil (3.3a) diyagramının matris elemanı (3.69)'dur. Bunun pariteyi koruyan kısmı yazılırsa

$$\frac{eg^2}{4}\,U^+U\int\frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}}\cdot\frac{(-\not k+\not p-\frac{\not q}{2})\gamma^\mu(-\not k+\not p+\frac{\not q}{2})+m^2\gamma^\mu}{\left[(-k+p+\frac{q}{2})^2-m^2\right]\left[(-k+p-\frac{q}{2})^2-m^2\right]\left[k^2-M_W^2\right]} \qquad (3.144)$$

bulunur. γ-matrislerinin özellikleri kullanılarak bu ifadenin payını açalım:

$$\begin{aligned}
(-\not k+\not p-\tfrac{\not q}{2})\gamma^\mu(-\not k+\not q+\tfrac{\not q}{2})+m^2\gamma^\mu &= \not k\gamma^\mu\not k-\not k\gamma^\mu(\not p+\tfrac{\not q}{2})-(\not p-\tfrac{\not q}{2})\gamma^\mu\not k \\
&\quad+(\not p-\tfrac{\not q}{2})\gamma^\mu(\not p+\tfrac{\not q}{2}) \\
&=-k^2\gamma^\mu+2\not k k^\mu-2\not k(p+\tfrac{q}{2})^\mu+2k(p+\tfrac{q}{2})\gamma^\mu \\
&\quad-(\not p+\tfrac{\not q}{2})\not k\gamma^\mu-2\not k(p-\tfrac{q}{2})^\mu+2\gamma^\mu(p-\tfrac{q}{2})k \\
&\quad-\gamma^\mu\not k(\not p-\tfrac{\not q}{2})+2(p-\tfrac{q}{2})^\mu(\not p+\tfrac{\not q}{2}) \\
&\quad-2\gamma^\mu(p-\tfrac{q}{2})(p+\tfrac{q}{2})+2(p+\tfrac{q}{2})^\mu(\not p-\tfrac{\not q}{2}) \\
&\quad-(\not p+\tfrac{\not q}{2})\gamma^\mu(\not p-\tfrac{\not q}{2})+m^2\gamma^\mu
\end{aligned} \qquad (3.145)$$

Burada $\not p+\frac{\not q}{2}\to m_\nu$ ve $\not p-\frac{\not q}{2}\to m_\nu$ olduğu anımsanırsa (3.145) aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$(-\not{k}+\not{p}-\frac{\not{q}}{2})\gamma^{\mu}(-\not{k}+\not{p}+\frac{\not{q}}{2}) + m^2\gamma^{\mu} = [-k^2-2(p-\frac{q}{2})(p+\frac{q}{2})+m^2-m_{\nu}^2+2k(p+\frac{q}{2})$$

$$+2k(p-\frac{q}{2})]\gamma^{\mu}+2\not{k}k - 2\not{k}(p+\frac{q}{2}+p-\frac{q}{2})^{\mu}$$

$$-m_{\nu}(\not{k}\gamma^{\mu}+\gamma^{\mu}\not{k})+2m_{\nu}(p-\frac{q}{2}+p+\frac{q}{2})^{\mu} \qquad (3.146)$$

(3.146)'nın son iki terimi (magnetik momente katkı verdiklerinden) alalım:

$$-m_{\nu}(\not{k}\gamma^{\mu}+\gamma^{\mu}\not{k})+2m_{\nu}(p-\frac{q}{2}+p+\frac{q}{2})^{\mu} = -2m_{\nu}k^{\mu}+2m_{\nu}(p-\frac{q}{2}+p+\frac{q}{2})^{\mu} \qquad (3.147)$$

(3.147)'nin ikinci teriminden Gordon ayrılması sonucu

$$(p-\frac{q}{2}+p+\frac{q}{2})^{\mu} \to 2m_{\nu}\gamma^{\mu}-i\sigma^{\mu\nu}q_{\nu} \qquad (3.148)$$

elde edilir. Buradan magnetik momente katkı verecek kısım

$$-2m_{\nu}[k^{\mu}+i\sigma^{\mu\nu}q_{\nu}] \qquad (3.149)$$

olarak bulunur.((3.149), (3.144)'de yerine konur ve integre edilir). Birinci terim için hesaplanması gereken integral (3.76) ve ikinci terim için hesaplanması gereken integral (3.75)'in $q^2=0$ daki değerleridir. Elde edilen sonuç elektronun magnetik momenti (Bohr magneton) cinsinden ifade edebilmek için birinci terimi m/m ile ikinci terimi 2m/2m ile çarpar ve (3.143) ifadesi de gözönüne alınırsa

$$-\frac{ieg^2}{64\pi^2}U^{+}U[-\frac{2mm_{\nu}}{M_W^2}[\ell n(m_{\nu}^2/M_W^2)+\frac{3}{2}]+\frac{4mm_{\nu}}{M_W^2}[\ln(m^2/M_W^2)+1]+O(1/M_W^4)$$

$$=-\frac{ieg^2}{32\pi^2}U^{+}U[\frac{mm_{\nu}}{M_W^2}[-\ell n(m_{\nu}^2/M_W^2)+\frac{1}{2}]] \qquad (3.150)$$

$$=-\frac{ieg^2}{32\pi^2}\frac{U^{+}U}{M_W^2}mm_{\nu}[\frac{1}{2}-\ell n(m_{\nu}^2/M_W^2)]$$

süz arabozon Z yerinde foton vardır) verir. Yüklü leptonların anomal magnetik momentlerine elektrozayıf kuram çerçevesinde en büyük katkı veren bu diyagramlardan nötrinonun araparçacık olduğu diyagram (3.4b) dir. Nötrinonun Dirac nötrinosu olması durumunda bu diyagramın anomal magnetik momentini hesaplayalım: Şekil 3.4b'nin matris elemanı (3.119)'dur. Bunun pariteyi koruyan kısmı yazılırsa, aşağıdaki ifade bulunur:

$$
\begin{aligned}
2\gamma_\beta \not{k}\gamma_\alpha V^{\alpha\beta\mu} &= 2\gamma_\beta \not{k}\gamma_\alpha\left[g^{\alpha\beta}(-2k+2p)^\mu + g^{\beta\mu}(k-p-\tfrac{3}{2}q)^\alpha + g^{\mu\alpha}(k-p+\tfrac{3}{2}q)^\beta\right] \\
&= 2\left[-4\not{k}(-k+p)^\mu + g^{\beta\mu}\gamma_\beta \not{k}(\not{k}-\not{p}-\tfrac{3}{2}\not{q}) + g^{\mu\alpha}(\not{k}-\not{p}+\tfrac{3}{2}\not{q})\not{k}\gamma_\alpha\right] \\
&= 2\left[-4\not{k}(-k+p)^\mu + 2\gamma^\mu k^2 - 4\gamma^\mu k(p+\tfrac{q}{2}) + 4(p+\tfrac{q}{2})^\mu \not{k}\right. \\
&\quad - 2(\not{p}+\tfrac{\not{q}}{2})\gamma^\mu \not{k} + \gamma^\mu \not{k}(\not{p}-\tfrac{\not{q}}{2}) + (\not{p}+\tfrac{\not{q}}{2})\not{k}\gamma^\mu \\
&\quad \left. -4\gamma^\mu k(p-\tfrac{q}{2}) + 4(p-\tfrac{q}{2})^\mu \not{k} - 2\not{k}\gamma^\mu(\not{p}-\tfrac{\not{q}}{2})\right]
\end{aligned}
\tag{3.154}
$$

(3.154)'de $[\not{p}-\frac{\not{q}}{2}-m]\,u(p-\frac{q}{2})=0$ ve $\bar{u}(p+\frac{q}{2})[\not{p}+\frac{\not{q}}{2}-m]=0$ Dirac denklemi kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
2\gamma_\beta \not{k}\gamma_\alpha V^{\alpha\beta\mu} &= 2\left[-4\not{k}(-k+p)^\mu + 2\gamma^\mu k^2 - 4\gamma^\mu k(p+\tfrac{q}{2}) + 4(p+\tfrac{q}{2})^\mu \not{k}\right. \\
&\quad - 2m\gamma^\mu \not{k} + m\gamma^\mu \not{k} + m\not{k}\gamma^\mu - 4\gamma^\mu k(p-\tfrac{q}{2}) \\
&\quad \left. + 4(p-\tfrac{q}{2})^\mu \not{k} - 2m\not{k}\gamma^\mu\right] \\
&= 2\left[-4\not{k}(-k+p)^\mu + 2\gamma^\mu(k^2-4kp) + 8p^\mu \not{k} - m(\gamma^\mu \not{k} + \not{k}\gamma^\mu)\right]
\end{aligned}
\tag{3.155}
$$

elde edilir. (3.155)'in son terimi magnetik moment yapı çarpanına katkı verir:

$$
-2m(\gamma^\mu \not{k} + \not{k}\gamma^\mu) = -4mk^\mu \tag{3.156}
$$

Hesaplanması gereken integral (3.127)'nin $q^2=0$'daki değeridir. (3.143) ü de gözönüne alarak anomal magnetik moment katkısı için

$$\frac{g^2}{16\,\pi^2}\; U^+U\; \frac{m^2}{M_W^2}\left[\frac{1}{4}-\frac{m^2}{6M_W^2}-\frac{m_\nu^2}{M_W^2}\,\ln(M_W^2/m_\nu^2)\;+\ldots\right] \tag{3.157}$$

bulunur. Buradan görüldüğü gibi ikinci, üçüncü terimler birinci terime göre küçüktürler. Bu diyagram için daha önce (nötrinonun Weyl nötrinosu olması durumunda) bulunan sonuçların bir kısmı aşağıda verilmiştir:

$$\frac{g^2}{24\pi^2}\cdot\frac{m^2}{M_W^2}\cdot\frac{5}{2}$$ (Jackiw ve Weinberg, 1972)

$$\frac{g^2}{16\pi^2}\cdot\frac{m^2}{M_W^2}\cdot\frac{10}{3}$$ (Bars ve Yoshimura, 1972)

$$\frac{g^2}{16\pi^2}\cdot\frac{m^2}{M_W^2}\cdot\frac{7}{3}$$ (Aydın ve diğ.,1973)

SONUÇLAR

Leptonların (yüklü leptonlar $\ell= e,\mu,\tau$ ve nötrinolar $\nu_\ell= \nu_e,\nu_\mu,\nu_\tau$) yapı çarpanları CP-korunumlu elektrozayıf ve nötrinoların kütle kazandığı (Dirac nötrinoları) genişletilmiş elektrozayıf kuramda hesaplandı. (Elektrozayıf kuramı yeğlememizin nedeni bu kuramın öngörülerinin geniş ölçüde deneysel olarak kanıtlanabilmesindendir. CP korunumlu bir kuramda leptonların üç yapı çarpanı (F_1, F_2 ve g_1) vardır. Yüklü leptonların yük ile ilgili yapı çarpanı $F_1(0)=1$'dir. Biz, g_1 ve F_2 yapı çarpanları ile ilgileniyoruz.

Çalışmamızın birinci kısmında elektrozayıf kuramda nötrinoların ve genişletilmiş elektrozayıf kuramda da yüklü leptonlar ve nötrinoların (Dirac nötrinosu) anapol moment yapı çarpanını hesapladık. Kütlesiz nötrino için hesapladığımız anapol moment yapı çarpanının daha önce nötrino için hesaplanan F yapı çarpanı ile aynı olduğu gösterildi. (Daha önce Sakakibara'nın hesapladığı sonuç ile sonucumuz karşılaştırıldığında Sakakibara'nın -5/12 terimi yerine bizde -2/12 gibi bir terim geldiği görülür. Fakat etkin katkı $\ln(M_W^2/m^2)$ teriminden gelir).

En genel anlamda nötrino yapı çarpanlarını yazıp korunum yasalarını uyguladığımızda $q^2\to 0$ durgun (statik) limitinde Dirac nötrinolarının iki yapı çarpanı (F_2 ve g_1), Majorana nötrinolarının ise bir yapı çarpanı (g_1) kalır. Yalnız sol-elli akımlar gözönüne alındığında kütlenin sıfır olması durumunda bu iki farklı nötrino birbirlerinden ayırt edilemeyen Weyl nötrinolarına indirgenirler. Buradan kütlenin sıfır olması durumunda sıfırdan farklı olan (sıfır olmayan) yapı çarpanının anapol moment yapı çarpanı olduğu görülür.

$$\langle \nu^D | J^\mu | \nu^D \rangle \xrightarrow[m\to 0]{} \langle \nu^M | J^\mu | \nu^M \rangle \longrightarrow \langle \nu^W | J^\mu | \nu^W \rangle$$

ν^D Dirac, ν^M Majorana ve ν^W da Weyl nötrinosunu göstermektedir.

Genişletilmiş elektrozayıf kuramda nötrino ve yüklü leptonların anapol moment ifadeleri karışım matrisi ve nötrino kütlesine bağlı çıkmıştır. Dirac nötrinoları için yapılan hesapta etkin olan terim $\ln(M_W^2/m_\nu^2)$ şeklindedir. Buradan nötrinoların Dirac nötrinoları olması durumunda Weyl nötrinoları hesabındaki sonuçla aradaki belirgin farkın nötrino kütlesine bağlı olduğu görülür (Bu durum magnetik moment için de geçerlidir.).

F_2 magnetik moment yapı çarpanı kuantum elektrodinamiğinde ve elektrozayıf kuramda yüklü leptonlar için daha önce hesaplanmıştır. Örneğin muon'un magnetik momentinin deneysel değeri ile kuramsal değeri karşılaştırıldığında zayıf katkıların azımsanmayacak büyüklükte olduğu görülür. Bu nedenle çalışmamızın ikinci kısmında yüklü leptonların magnetik momentine katkı veren Feynman diyagramlarından nötrinonun araparçacık olduğu diyagramın katkısını nötrinonun kütleli Dirac nötrinosu olması durumunda (nötrinoların kütleli Dirac nötrinoları olduğu genişletilmiş elektrozayıf kuramda) U-karışım matrisine ve nötrino kütlesine bağlı olarak bulduk. Nötrinoların magnetik momenti için hesapladığımız değer de daha önce hesaplanan değerlerle $\ln(M_W^2/m_\nu^2)$ teriminin dışında uygunluk gösterir.

Hesaplarımızda m yerine e, μ, τ ve m_ν yerine de ν_e, ν_μ, ν_τ kütle değerleri yazılırsa ağır leptonlar için $\ln(M_W^2/m^2)$ teriminin daha küçük sonuçlar vereceği görülür.

Sayısal bir sonuç elde etmek için uzun ve karışık ifadelere neden olan analitik çözümler yerine integrandları seriye açıp integre etmeyi yeğledik. (Fiziksel parçacık katkıları $(m^2/M_W^2)^2$ mertebesinde kesildi). Goldston katkıları hesaplandığında bunların katkılarının $(m^2/M_W^2)^2$ mertebesinde yani gözardı edilebilir mertebede olduğu görülür (Bu nedenle Goldston katkılarını magnetik moment hesabında gözönüne almadık).

Majorana parçacığı kendi karşıt parçacığı ile özdeş olduğundan, eğer

Dirac nötrinosu yerine Majorana nötrinosu alınacaksa o zaman ν^D için anapol moment hesabında öngörülen fiziksel parçacıkları içeren diyagramlardaki ara-parçacıkların karşıt parçacıklarının içerildiği diyagramların katkıları da hesaplara katılmalıdır. (Bu durumda Dirac nötrinolarının matris elemanında $\gamma_5 \to -\gamma_5$, $i \to -i$, $\ell \to \ell^c$ alınmalıdır).

Nötrinoların kütleli olduğu durumda karşımıza çıkan hangi tür nötrino olduğu sorusunun yanıtını (bazı modellerin her iki nötrino türünü içermesine karşın) deneysel gözlemler verecektir. Buna rağmen nötrino hangi tür (Dirac ya da Majorana) parçacık olursa olsun anapol moment yapı çarpanı vardır.

Hesaplarımızın sonuçları günümüzde deneysel olarak ölçülebilen enerji ölçeğindekilerle karşılaştırıldığında bunları (yüklü leptonların magnetik momentleri dışında) gözlemenin şimdilik olanaklı olmadığı görülür. Fakat bunların deneylerinin ancak yüksek enerjilerde yapılabileceği açık bir olgudur.

KAYNAKLAR

Abak, M. (1980) Nuovo Cimento 55A, 289.

Abak, M. and Aydın, C. (1987) Europhys. Lett. 4(8), 881.

. . . . (1988) Symmetries In Science III, 507-516. Eds. B. Gruber, and F.Iachello, Plenum, New York.

Abbott, L.F. and Barnett, R.N. (1978) Phys. Rev. Lett. 40, 1303.

. . . . (1978) Phys. Rev. D18, 3214.

Abers, E.S. and Lee, W.B. (1973) Phys. Rep. 9C, N1.

Aitchison, I.J.R. and Hey, A.J.G. (1982) Gauge Theories in Particle Physics Adam Hilger, Bristol.

Aoki, Ken-Ichi, Kawabe, R., Konuma, and Muda, T. (1982) Supplement of The Progress of Theoretical Physics, N 73.

Apenko, S.M. and Lozovik Yu E. (1982) j. Phys. B15, L57.

Appelquist, T. and Quinn, H.R. (1972) Phys. Lett. 39 B, 229.

Aydın, Z.Z., Baran, S.A. and Barut, A.O. (1973) Nucl. Phys. B55, 601.

Bailin, D. (1982) Weak Interactions, Adam Hilger, Bristol.

Baltay, C. (1979) Proceedings of the 19th International Conference on High Energy Physics, Tokyo, 1978, ed.by S.Hounma, M.Kowaguchi and H. Miyazawa.

Barbieri, R., Mohapatra, R.N. and Yanagida, T. (1988) Phys. Lett. B213, 69.

Bars, I. and Yoshimura, M. (1972) Phys. Rev. D6, 374.

Becchi, C., Rouet, A. and Stora, B. (1975) Comm. Math. Phys. 42, 127.

. . . . (1976) Ann. of Phys. 98, 287.

Becher, P., Böhm, M. and Joos, H. (1984) Gauge Theories of Strong and Electroweak Interactions, John Wiley, New York.

Bernstein, J. (1974) Rev. Mod. Phys. 46, 7.

Bernstein, J. and Lee, T.D. (1963) Phys. Rev. Lett. 11, 512.

Bernstein, J., Ruderman, M., Feinberg, G. (1963) Phys. Rev. 132, 1227.

Bilenky, S.M. and Pontecorvo, B. (1976) Lett. Nuovo Cimento 17, 569.

. . . . (1978) Phys. Reports 41, N.4, 225.

Bilenky, S.M., Motz, G.B. and Petkov, S.T. (1978) Sov. Nucl. Phys.28(3),439.

Bilenky, S.M. (1982) Introduction to the Physics of Electroweak Interactions, Pergaman Press, Oxford.

Bjorken, J.D. and Drell, S.D. (1964) Relativistic Quantum Mechanics, Mc Graw-Hill, New York.

. . . . (1965) Relativistic Quantum Fields, Mc Graw-Hill, New York.

Bludman, A. and Klein, A. (1963) Phys. Rev. 131, 2364.

Böhm, M., Hollik, W. and and Spiesberger, H. (1984) DESY 84-067.

Buras, A.J. (1981) International Symposium on lepton and Photon Proceedings of the 1981 Interactions at High Energies, ed.by W.Pfeil, Bonn.

Cabibbo, N. (1963) Phys. Rev. Lett. 10, 537.

Cheng, W-K. and Bludman, S.A. (1964) Phys. Rev. 136, B1787.

Czyż, By H., Kolodziej, K. and Zralek, M. (1988) Acto Physica Polonica V. B19, N5, 435.

Davier, M. (1982) Proceedings of the 21 st International Conference on High Energy Physics, Paris, ed.by P.Petian and M. Porneuf.

Dombey, N. and Kennedy, A.D. (1980) Phys. Lett. 91 B, 428.

Dubovik, V.M. and Cheshkov, A.A. (1975) Sov. J. Particles Nucl. Vol.5,N.3,318.

Englert, F. and Brout, R. (1964) Phys. Rev. Lett. 13, 321.

Faddeev, L.D. and Popov, V.N. (1967) Phys. Lett. 25B, 29.

Fermi, E. (1934) Z. Phys. 88, 161.

Fermi, E. and Marshall (1947) Phys. Rev. 72, 1139.

Feynman, R.P. (1948) Phys. Rev. 74, 1430.

. . . . (1949) Phys. Rev. 76, 769.

Feynman, R.P. and Gell-Mann, M. (1958) Phys. Rev. 109, 193.

Feynman, R.P. (1963) Actra Phys. Polon 26, 697.

Flambaum, V.V., Khriplovich, I.B. and Sushkov, O.P. (1984) Phys. Lett.146B,367.

Fritzsch, H., Gell-Mann, M. and Leutwyler,H.(1973) Phys. Lett. 47B, 365.

Fujikawa, K., Lee, B.W. and Sanda, A.I. (1972) Phys. Rev. D6, 2923.

Fukuda, H., Miyamoto, Y. and Tomonaga, S. (1949) Prog. Theor.Phys. 4,47,121.

Fukugide, M. and Yanagida, T. (1987) Phys. Rev.Lett. 58, N18, 1807.

Gilbert, W. (1964) Phys. Rev. Lett. 12, 713.

Glashow, S.L. (1961) Nucl. Phys. 22, 579.

Goldstone, J. (1961) Nuovo Cim. 19, 154.

Goldstone, J., Salam, A. and Weinberg,S. (1962) Phys. Rev. 127, 965.

Grifols, J.A. and Peris, S. (1988) Phys. Lett. B 213, 482.

Guralnik, G.S., Hagen, C.R. and Kibble, T.W.B. (1964) Phys.Rev.Lett.13,585.

Hagedorn, R. (1973) Relativistic Kinematics, W.A.Benjamin, Inc.,Massachusetts.

Halzen, F. and Martin, D. (1983) Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics. John Wiley, New York.

Higgs, P.W. (1964a) Phys. Lett. 12, 131.

. . . . (1964b) Phys. Rev. Lett. 13, 508.

. . . . (1966) Phys. Rev. 45, 1156.

Hollik, W. (1986a) DESY 86-047.

. . . . . (1986b) DESY 86-049.

. . . . . (1986c) DESY 86-092.

Hollik, W. and Timme, H.J. (1985) DESY 85-099.

Hollik, W. (1987) DESY 87-129.

Hollik, W. (1988) DESY 88-188.

Hung, P.Q. and Sakurai, J.J. (1979) Phys. Lett. 88 B, 91.

Itzykson, C. and Zuber, J.-B. (1980) Quantum Field Theory, Mc Graw-Hill, New York.

Jackiw, R. and Weinberg, S. (1972) Phys. Rev. D5, 2396.

Jona-Lasinio, G. (1964) Nuovo Cim. 34, 1790.

Kayser, B. (1982) Phys. Rev. D 26, 1662.

Kayser, B. and Goldhaber, A.S. (1983) Phys. Rev. D 28, 2341.

Kayser, B. (1988) LBL-25087 Preprint.

Kamutsu, H. (1987) Prog. Theor. Phys. 59, 2013.

Kibble, T.W.B. (1967) Phys. Rev. 155, 1554.

Kim, J.E. (1976) Phys. Rev. D 14, 3000.

Kobayashi, M. and Maskawa, T. (1973) Prog. Theor. Phys. 49, 652.

Konuma, M. and Oka, T. (1987) Prog. Theor. Phys. 60, 1842.

Kugo, T. and Ojima, I. (1978) Phys. Lett. 73B, 459.

. . . . (1979) Prog. Theor. Phys. Suppl. 66, 1.

Landau, L. (1957) Nucl. Phys. 3, 127.

Langacker, P. (1988a) DESY 88-022.

. . . . (1988b) DESY 88-023.

. . . . (1988c) UPR-0362 T Preprint.

Lautrup, B. (1967) Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk. 35, 29.

Lee, T.D., Rosenbluth and Yang, C.N. (1949) Phys. Rev. 75, 905.

Lee, B.W. and Zin-Justin, J. (1972a) Phys. Rev. D5, 3121.

. . . . (1972b). . . . . . , 3137.

. . . . (1972c). . . . . . , 3155.

Lee, T.D. and Yang, C.N. (1956) Phys. Rev. 104, 256.

Lee, S.Y. (1972) Phys. Rev. D6, 1701, 1803.

Lee, B.W. (1974) Phys. Rev. D9, 933.

Lee, B.W. and Shrock, R.E. (1977) Phys. Rev. D16, 1444.

Leibbrandt, G. (1975) Rev. Mod. Phys. 47, N.4, 849.

Leveille, P.J. (1978) Nucl. Phys. B137, 63,

Li, F.L. and Wilczek, F. (1982) Phys. Rev. D 25, 143.

Liu, J. (1986) CMU-HEP 86-15 Preprint.

Marshak, R.E., Riazuddin and Ryan, C.P. (1969) Theory of Weak Interactions In Particle Physics, John Wiley, New York.

Marciano, W.J. and Sanda, A.I. (1977) Phys. Rev. 67B, 303.

Meyer, P. and Schiff, D. (1963) Phys. Lett. 8, 217.

Mohapatra, Rabindra N. (1988a)UM PP 88-72.

Mohapatra, Rabindra N. (1988b) UM PP 88-172.

. . . . (1989) UMd Physics Preprint 89-021.

Nakanishi, N. (1966) Prog. Theor. Phys. 35, 1111.

Nikolai, F.N. (1984) Introduction to Gauge Field Theories, Springer-Verlag, Berlin.

Nötzold, D. (1988) Phys. Rev. D 38, 1658.

Palash, B. Pal and Wolfenstein, L. (1982) Phys. Rev. D 25, 766.

Pauli, W. (1964) Collected Papers, V.2 p.1313,New York, Interscience Publishers.

Peccei, R.D. (1988) DESY 88-138 ; 88-180.

Pietscmann, H. (1983) Weak Interactions-Formulae-Results and Derivations, Springer-Verlag, Wien.

Prescott et al. (1978) Phys. Lett. 77 B, 347.

Quigg, C. (1983) Gauge Theories of the Strong, Weak and Electromagnetic Interactions, Benjamin Cummings, London.

Reines, F. and Cowan, C.L. (1959) Phys. Rev. 113, 273.

Ross, D.A. and Taylor, J.C. (1973) Nucl. Phys. B 51, 125.

Salam, A. (1968) Proceedings of the 8th Nobel Symposium, Almqvist and Wiksell, Stockholm.

Sakakibara, S. (1979) Preprint PITHA 79/17.

. . . . (1981) Phys. Rev. D24, 1149.

Sehgal, L.M. (1977) Phys. Lett. 71B, 99.

Schwinger, J. (1948) Phys. Rev. 74, 1439.

. . . . (1949) Phys. Rev. 75, 651.

. . . . (1949) Phys. Rev. 76, 790.

Sudarshan, E.C. and Marshak, R.E. (1958) Proceedings of the International Conference on Mesons and Recently Discovered Porticles, Padova-Venezia, 1957 (Italian Physical Socity),p.V-14.

't Hooft, G. (1971a) Nucl. Phys. B 33, 173.

. . . . (1971b) Nucl. Phys. B 35, 167.

't Hooft, G. and Weltman, M. (1972) Nucl. Phys. B44, 189.

. . . . (1973) CERN 73-9.

Tati, T. and Tomonaga, S. (1948) Prog. Theor. Phys. 3, 391.

Taylor, J.C. (1976) Gauge Theories of Weak Interactions, Cambridge Univ.Press.

UA1, UA2 (1983) UA1 G. Arnison et al. Phys. Lett. 126 B, 398; 129 B,273.

UA2 P. Bagnaia et al. Phys. Lett. 12 B, 130.

Vuilleumier, Jean-Luc (1986) Rep. Prog. Phys. 49, 1293.

Weinberg, S. (1967) Phys. Rev. Lett. 19, 1264.

de Witt, B.S. (1967) Phys. Rev. 162, 1195, 1239.

Wu, C.S., Ambler, E., Harward, R.W., Hoppes, D.D. and Hudson, R.P. (1957) Phys. Rev. 105, 1413.

Yang, C.N. and Mills, R.L. (1954) Phys. Rev. 96, 191.

Ynduráin, F.I. (1983) Quantum Chromodynamics An Introduction to the Theory of Quarks and Gluons, Springer-Verlag, New York.

Zeldovich, Ya B. (1957) Sov. Phys. JETP 6, 1184 (1958).

Zeldovich, Ya B. and Perelomov, A.M. (1961) Sov. Phys. JETP 2, 777.

EK - A

METRİK VE GÖSTERİM

Bjorken ve Drell'in metrik ve gösterimini (Bjorken ve Drell 1964,1965) ve $\hbar$=c=1 doğal birimleri seçtik:

A.1 Dörtlü Vektör ve Skaler Çarpımı

Uzay-zaman koordinatları $(t; x,y,z) = (t,\vec{x})$

$$x^{\mu} \equiv (t;x,y,z) \equiv (x^0; x^1,x^2,x^3) \tag{A.1.1}$$

kontravariyant dörtlü vektörü ile gösterilir. Bu gösterimde metrik tensörü

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & 0 & \\ & 0 & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \tag{A.1.2}$$

şeklinde seçilir.

Kovariyant dörtlü vektör

$$x_{\mu} \equiv (x_0;x_1,x_2,x_3) \equiv g_{\mu\nu}x^{\nu} = (t; -x,-y,-z) \tag{A.1.3}$$

olarak üretilir.

Skaler çarpım

$$x^2 \equiv x^{\mu}x_{\mu} = t^2 - x^2 \tag{A.1.4}$$

dir.

Dörtlü vektörlerin Skaler çarpımı

$$a \cdot b = a^{\mu}b_{\mu} = a^0 b^0 - \vec{a}\cdot\vec{b} \tag{A.1.5}$$

dir.

Momentum vektörleri

$$P^{\mu} = (E; P_x, P_y, P_z) \tag{A.1.6}$$

olarak yazılır.

Dörtlü gradyent için uygun notasyon

$\partial^{\mu} = \partial/\partial x_{\mu}$ (kontravariyant) ya da $\partial_{\mu} = \partial/\partial x^{\mu}$ (kovariyant)'tır

Konum uzayı momentum işlemcisi

$$P^{\mu} = i\partial^{\mu} = (i\partial/\partial t, -i\vec{\nabla}) \tag{A.1.7}$$

ve

$$P^2 = P_{\mu}P^{\mu} = m^2 \tag{A.1.8}$$

dir.

Metrik tensör (-1, +1, +1,+1) şeklinde seçildiğinde elde edilecek sonuçları yukarıdaki sonuçlarla karşılaştırarak özetleyelim (ayrıntılı bilgi için Hagedorn 1973, s.116'ya bakınız).

Metrik:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & 0 \\ & 0 & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & 0 & \\ & 0 & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \tag{A.1.9}$$

Dörtlü vektör:

$$x_{\mu} = g_{\mu\nu}x^{\nu} = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (t, -\vec{x}) \quad \Bigg| \quad x_{\mu} = g_{\mu\nu}x^{\nu} = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (-t, \vec{x}) \tag{A.1.10}$$

Skaler çarpım : $Px \equiv P_{\mu}x^{\mu} = P^{\nu}g_{\nu\mu}x^{\mu}$ (A.1.11)

$$Px = p_{\mu}x^{\mu} = P^{\lambda}x_{\lambda} = Et - \vec{p}\vec{x} \quad \Big| \quad Px = P_{\mu}x^{\mu} = P^{\rho}x_{\rho} = -Et + \vec{P}\vec{x} \tag{A.1.12}$$

$$P^2 = P_{\mu}P^{\mu} = m^2 \quad \Big| \quad P^2 = P_{\mu}P^{\mu} = -m^2 \tag{A.1.13}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \equiv \partial^{\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, \frac{-\partial}{\partial y}, \frac{-\partial}{\partial z}\right) \quad \Big| \quad \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \equiv \partial^{\mu} = \left(-\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{A.1.14}$$

$$\Box \equiv \partial_\mu \partial^\mu$$

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad \Big| \qquad \Box = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{A.1.15}$$

Pozitif enerjili düzlem dalga : $\psi_p(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i(\vec{P}\vec{x}-Et)}$

$$\psi_p(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-ipx} \qquad \Big| \qquad \psi_p(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{ipx} \tag{A.1.16}$$

$$\Box\psi = \partial_\mu \partial^\mu \psi = -P_\mu P^\mu \psi = -m^2\psi \qquad \Big| \qquad \Box\psi = \partial_\mu \partial^\mu \psi = -P_\mu P^\mu \psi = m^2\psi \tag{A.1.17}$$

$$a_\mu^\nu = a_{\mu\rho} g^{\rho\nu} = g_{\mu\rho} a^{\rho\nu} \tag{A.1.18}$$

$$a^{\mu\nu} = g^{\mu\rho} a_{\rho\tau} g^{\tau\nu} \quad \text{vs.} \tag{A.1.19}$$

$$g_\mu^\nu = g_{\mu\tau} g^{\tau\nu} = \delta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \tag{A.1.20}$$

$$aBC \equiv a_\mu B^{\mu\lambda} C_\lambda \tag{A.1.21}$$

$$BC \equiv B^{\mu\rho} C_{\rho\mu} \tag{A.1.22}$$

A.2 Dirac Matrisleri

Dirac γ-matrisleri sıradeğişmezlik bağıntılarını sağlarlar.

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \tag{A.2.1}$$

$$\gamma^\mu\gamma_\mu = 4.I \qquad (I \;\; 4x4\text{'lü özdeş birim matristir}) \tag{A.2.2}$$

$$[\gamma^\mu\gamma^\nu, \gamma^\rho] = \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho - \gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\nu = 2(\gamma^\mu g^{\nu\rho} - \gamma^\nu g^{\mu\rho}) \tag{A.2.3}$$

$$\gamma^\mu\gamma_\nu\gamma_\mu = -2\gamma_\nu \tag{A.2.4}$$

$$\gamma^{\mu}\gamma_{\nu}\gamma_{\rho}\gamma_{\mu} = 4g_{\nu\rho} \qquad (A.2.5)$$

$$\gamma^{\mu}\gamma_{\nu}\gamma_{\rho}\gamma_{\sigma}\gamma_{\mu} = -2\gamma_{\sigma}\gamma_{\rho}\gamma_{\nu} \qquad (A.2.6)$$

$$\gamma^{\mu}\gamma_{\nu}\gamma_{\rho}\gamma_{\sigma}\gamma_{\tau}\gamma_{\mu} = 2(\gamma_{\tau}\gamma_{\nu}\gamma_{\rho}\gamma_{\sigma} + \gamma_{\sigma}\gamma_{\rho}\gamma_{\nu}\gamma_{\tau}) \qquad (A.2.7)$$

$\gamma^{o} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$ (Buradaki I 2x2'li birim matristir) (A.2.8)

$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$ ($\vec{\sigma}$ 'lar Pauli matrisleridirler) (A.2.9)

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (A.2.10)$$

Spin tensörü

$$\sigma^{\mu\nu} = \left(\frac{i}{2}\right) [\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}] = i(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} - g^{\mu\nu}) \qquad (A.2.11)$$

ve

$$[\sigma^{\mu\nu}, \gamma^{\rho}] = 2i(\gamma^{\mu}g^{\nu\rho} - \gamma^{\nu}g^{\mu\rho})$$

dir.

$\gamma_5 \equiv \gamma^5 \equiv \frac{i}{4!}\, \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma} = i\gamma^{o}\gamma^{1}\gamma^{2}\gamma^{3}$, $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ Levi-Civita (A.2.13)
tensörüdür. Standart temsilde

$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$ (I 2x2'li birim matristir) (A.2.14)

dir. Dörtlü vektörün γ-matrisi ile çarpımı

$$\gamma\cdot a \equiv \gamma_{\mu}a^{\mu} \equiv \not{a} = \gamma^{o}a^{o} - \gamma\cdot a \qquad (A.2.15)$$

ile gösterilir.

$$\gamma P \equiv i\gamma\,\partial = i\gamma_{\mu}\partial^{\mu} = i\not{\partial} \qquad (A.2.16)$$

dir.

Matris elemanının Hermitiyen eşleniği:

$$[\bar{u}(p')\Lambda u(p)]^{+} = \bar{u}(p)\,\bar{\Lambda}\,u(p') \qquad \text{(A.2.17)}$$

dir. Buradaki $\bar{\Lambda} \equiv \gamma^{o}\Lambda^{+}\gamma^{o}$, Λ-işlemcisinin Dirac eşleniğidir.

Örneğin:

$$\bar{1} = \gamma^{o}1^{+}\gamma^{o} = 1 \qquad \text{(A.2.18)}$$

$$\bar{\gamma}^{\mu} = \gamma^{o}\gamma^{\mu +}\gamma^{o} = \gamma^{\mu} \qquad \text{(A.2.19)}$$

$$\bar{\sigma}^{\mu\nu} = \gamma^{o}\sigma^{\mu\nu +}\gamma^{o} = \sigma^{\mu\nu} \qquad \text{(A.2.20)}$$

$$\bar{\gamma}_{5} = \gamma^{o}\gamma_{5}^{+}\gamma^{o} = -\gamma_{5} \qquad \text{(A.2.21)}$$

$$\overline{\gamma^{\mu}\gamma_{5}} = \gamma^{o}\gamma_{5}^{+}\gamma^{\mu +}\gamma^{o} = \gamma^{\mu}\gamma_{5} \qquad \text{(A.2.22)}$$

dir. (Pauli metriğinde indisler 1,2,3,4 , Feynman metriğinde indisler 0,1,2,3 ile gösterilir).

A.3 2ω-Boyutlu Uzayda γ-Matris Cebiri

2ω-boyutlu uzayda γ-matrisleri:

$$\gamma^{o},\ \gamma^{1},\ldots,\ \gamma^{2\omega-1} \qquad \text{(A.3.1)}$$

ve

$$\{\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}\} = \gamma^{\mu}\gamma^{\nu} + \gamma^{\nu}\gamma^{\mu} = 2g^{\mu\nu} \quad , \quad \gamma_{5}^{2} = 1 \qquad \text{(A.3.2)}$$

dir. (Yndurain, 1983, s.201).

Metrik tensörü

$$g^{\mu\nu} = 0 \ (\mu\neq\nu \text{ için})$$

$$g^{oo} = 1 \ ; \ g^{ii} = -1 \ (i=1,\ldots,\ 2\omega-1 \text{ için}) \qquad \text{(A.3.3)}$$

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$$

ve

$$A_{\mu} = g_{\mu\nu}A^{\nu} \ , \ \not{A} = \gamma_{\mu}A^{\mu} \tag{A.3.4}$$

$$\text{iz}\ \gamma^{\mu}\gamma^{\nu} = 4\ g^{\mu\nu}, \quad \text{iz}\ \gamma_5\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} = 0 \tag{A.3.5}$$

$$\text{iz}\gamma^{\mu}\ldots\gamma^{\tau} = \text{iz}\gamma_5\gamma^{\mu}\ldots\gamma^{\tau} = 0 \quad \text{(tek sayıda } \gamma\text{-matrisi için)} \tag{A.3.6}$$

$$\text{iz}\ \ \gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta} = 4\{g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} + g^{\mu\beta}g^{\nu\alpha} - g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\} \tag{A.3.7}$$

$$\not{a}\not{a} = a^2 \ , \ \not{a}\not{b}\not{a} = -a^2\not{b} + 2(a\cdot b)\not{a} \tag{A.3.8}$$

$$\gamma_{\mu}\gamma^{\mu} = 2\omega \ , \quad \gamma_{\mu}\gamma^{\alpha}\gamma^{\mu} = (2-2\omega)\gamma^{\mu}, \ \gamma_{\mu}\ \gamma_5\gamma^{\mu} = -2\omega\gamma_5 \tag{A.3.9}$$

$$\gamma_{\mu}\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}\gamma^{\mu} = 4g^{\alpha\beta} + (2\omega-4)\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta} \tag{A.3.10}$$

$$\gamma_{\mu}\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}\gamma^{\delta}\gamma^{\mu} = -2\gamma^{\delta}\gamma^{\beta}\gamma^{\alpha} + (4-2\omega)\ \gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}\gamma^{\delta} \tag{A.3.11}$$

geçerlidir.

$$2\omega = 4 \ \text{ için} \ , \quad \gamma_5 = i\gamma^{o}\gamma^{1}\gamma^{2}\gamma^{3} \tag{A.3.12}$$

ve

$$\varepsilon^{o123} = -1 \ , \quad \varepsilon_{o123} = +1 \tag{A.3.13}$$

olur.

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\alpha}\gamma^{\nu} = S^{\mu\alpha\nu\beta}\gamma_{\beta} - i\varepsilon^{\mu\alpha\nu\beta}\gamma_{\beta}\gamma_5, \ S^{\mu\alpha\nu\beta} = g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} + g^{\mu\beta}g^{\nu\alpha} - g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} \tag{A.3.14}$$

$$\gamma_5\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} = \gamma_5 g^{\mu\nu} + \frac{1}{2!}\ \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\gamma_{\alpha}\gamma_{\beta} \tag{A.3.15}$$

$$\text{iz}\ \gamma_5\ \gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\lambda}\gamma^{\sigma} = 4i\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \tag{A.3.16}$$

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta}\varepsilon^{\alpha\mu\rho\sigma}\varepsilon^{\beta\nu\tau\lambda} = &- g^{\mu\nu}(g^{\rho\tau}g^{\sigma\lambda} - g^{\rho\lambda}g^{\sigma\tau}) - g^{\mu\lambda}(g^{\rho\nu}g^{\sigma\tau} - g^{\rho\tau}g^{\sigma\nu}) \\ &+ g^{\mu\tau}(g^{\rho\nu}g^{\sigma\lambda} - g^{\rho\lambda}g^{\sigma\nu}) \end{aligned} \tag{A.3.17}$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\ \varepsilon^{\rho\nu}_{\alpha\beta} = 2(g^{\nu\rho}g^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}) \tag{A.3.18}$$

$$\{\gamma^{\mu}\ , \gamma^{5}\} = 0 \tag{A.3.19}$$

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}\ (\gamma_{\mu}\gamma_{\nu} - \gamma_{\nu}\gamma_{\mu}) = i\ (\gamma_{\mu}\gamma_{\nu} - g_{\mu\nu}) \tag{A.3.20}$$

geçerlidir.

A.4. Gordon Ayrılması (Itzykson ve Zuber, 1980, s.696):

$$\bar{u}(p')\gamma^{\mu}u(p) = \frac{1}{2m}\,\bar{u}(p')\left[(p'+p)^{\mu} + i\sigma^{\mu\nu}(p'-p)_{\nu}\right]u(p) \qquad \text{(A.4.1)}$$

$$\bar{u}(p')\gamma^{\mu}\gamma_5 u(p) = \frac{1}{2m}\,\bar{u}(p')\left[(p'-p)^{\mu}\gamma_5 + i\sigma^{\mu\nu}(p'+p)_{\nu}\gamma_5\right]u(p) \qquad \text{(A.4.2)}$$

EK – B

FEYNMAN KURALLARI

$W^{\pm}$ yüklü vektör bozonu, Z yüksüz vektör bozonu γ-fotonu, $G^{\pm}$ ve G^{o} sırası ile fiziksel olmayan yüklü ve yüksüz Goldstonları, ℓ-yüklü teptonları (ℓ=e,μ,τ,...,vs), ν_ℓ-nötrinoyu ($\nu_\ell=\nu_e,\nu_\mu,\nu_\tau,\ldots$), M_W, M_Z, m_ℓ ve m_ν sırası ile yüklü vektör bozon, yüksüz vektör bozon, lepton ve nötrino kütlelerini göstermek üzere Feynman kuralları için ('t Hooft-Feynman ayarında ξ=1 (2.184) lagranjiyeninden türetilen aşağıdaki (p-momentum olmak üzere) ilerleticiler (propagatörler) ve köşeleri kullanıyoruz (U=1 ve $m_\nu \to 0$ için bunlar Sakakibara'nın metrik gösterimi ile aynı olur (Sakakibara,1981)).

ℓ ——→—— : $i/\not{p}-m$

ν_ℓ - - → - - : $i/\not{p}-m_\nu$

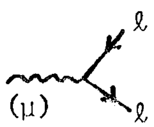
$W^{\pm}$ (μ) (ν) : $-ig_{\mu\nu}/p^2-M_w^2$

Z (μ) (ν) : $-ig_{\mu\nu}/p^2-M_z^2$

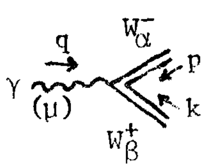
γ (μ) (ν) : $-ig_{\mu\nu}/p^2$

$G^{\pm}$: $i/p^2-M_w^2$

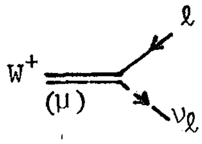
G^{o} : $i/p^2-M_z^2$



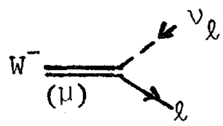
: $-ieQ\gamma^{\mu}$



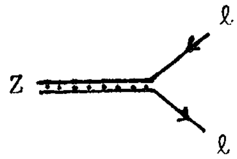
: $-ieV^{\alpha\beta\mu}\ (p,k,q)=-ie[g^{\alpha\beta}(p-k)^{\mu}+g^{\beta\mu}(k-q)^{\alpha}+g^{\mu\alpha}(q-p)^{\beta}]$



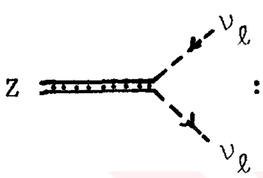
$$: \frac{ig}{2\sqrt{2}}\, U^{+}\gamma^{\mu}(1-\gamma_5)$$



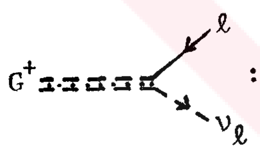
$$: \frac{ig}{2\sqrt{2}}\, U\gamma^{\mu}(1-\gamma_5)$$



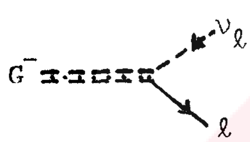
$$: i\sqrt{g^2+g'^2}\,\gamma^{\mu}\left(T_3\,\frac{1-\gamma_5}{2} - Q\,\frac{g'^2}{g^2+g'^2}\right) = \frac{ie}{2}\gamma^{\mu}(C_v - C_A\gamma_5)$$



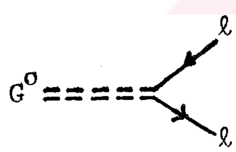
$$: \frac{i\sqrt{g^2+g'^2}}{4}\,\gamma^{\mu}(1-\gamma_5) = \frac{ie}{2}\, C_A\gamma^{\mu}(1-\gamma_5)$$



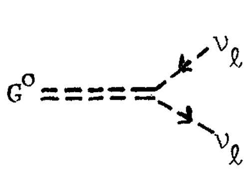
$$: \frac{-ig}{2\sqrt{2}\,M_w}\, U^{+}\left[(m_\ell - m_\nu) + (m_\ell + m_\nu)\gamma_5\right]$$



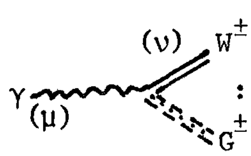
$$: \frac{-ig}{2\sqrt{2}\,M_w}\, U\left[(m_\ell - m_\nu) - (m_\ell + m_\nu)\gamma_5\right]$$



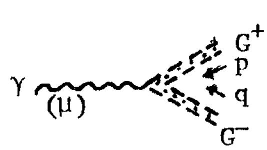
$$: -ig\,\frac{m_\ell}{2M_w}\,\gamma_5$$



$$: ig\,\frac{m_\nu}{2M_w}\,\gamma_5$$



$$: -ieM_w g^{\mu\nu}$$



$$: -ie(p-q)^{\mu}$$

EK - C

2ω-BOYUTLU MOMENTUM İNTEGRALLERİ

Ayar kuramlarında ilmek, yapı çarpanları ve saçılma problemleri hesaplarında karşılaşılabilen 2ω-boyutlu bazı integralleri veriyoruz (Ayrıntılı bilgi için 't Hooft ve Veltman 1972,1973; Leibbrandt 1975'e bakınız).

Hesabı gereken integrallerin paydaları $a_1, a_2, \ldots, a_n$ k'ya göre adi polinomlar olmak üzere

$$\frac{1}{a_1^{\alpha} \cdot a_2^{\beta} \cdot \ldots \cdot a_n^{\gamma}} \tag{C.1}$$

şeklindedir. Feynman parametrizasyon yöntemi ile bu

$$\frac{1}{\prod_{j=1}^{n} a_j^{\alpha_j}} = \frac{\Gamma(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j)}{\prod_{j=1}^{n} \Gamma(\alpha_j)} \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \ldots \int_0^{x_{n-2}} dx_{n-1} \frac{\prod_{j=o}^{n-1} (x_j - x_{j+1})^{\alpha_{n-j}-1}}{\left[\sum_{j=o}^{n-1} a_{n-j}(x_j - x_{j+1})\right]^{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j}} \tag{C.2}$$

şeklinde yazılır.

Örnek olarak yapı çarpanları hesabında karşılaşılan durum için yazılırsa

$$\frac{1}{a \cdot b \cdot c} = \Gamma(3) \int_o^1 dx \int_o^x dy \frac{1}{[c(1-x)+b(x-y)+ay]^3} \tag{C.3}$$

olduğu görülür. a, b, c değerleri yerlerine yazıldığında bu,

$$c(1-x)+b(x-y)+ay = k^2 + 2k \cdot p + M^2 \tag{C.4}$$

şeklinde yazılabilir. Böylece integralin paydası 2ω-boyutlu k'nın fonksiyonu olmak üzere $k^2 + 2kp + M^2$ şeklinde yazılır. Hesaplarda karşılaşılan bazı integral ifadeleri aşağıdadır:

$$\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(k^2+2kp+M^2)^{\alpha}} = \frac{i\Gamma(\alpha-\omega)}{(4\pi)^{\omega}\,\Gamma(\alpha)\,(M^2-p^2)^{\alpha-\omega}} \tag{C.5}$$

$$\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_{\mu}}{(k^2+2kp+M^2)^{\alpha}} = \frac{i\Gamma(\alpha-\omega)}{(4\pi)^{\omega}\Gamma(\alpha)(M^2-p^2)^{\alpha-\omega}}\,(-p_{\mu}) \tag{C.6}$$

$$\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\omega)^{2\omega}} \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{(k^2+2kp+M^2)^{\alpha}} = \frac{i\Gamma(\alpha-\omega)}{(4\pi)^{\omega}\Gamma(\alpha)(M^2-p^2)^{\alpha-\omega}}\left[p_{\mu}p_{\nu}+\frac{(M^2-p^2)}{(\alpha-1-\omega)}\,\frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}\right] \tag{C.7}$$

$$\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k^2}{(k^2+2kp+M^2)^{\alpha}} = \frac{i\Gamma(\alpha-\omega)}{(4\pi)^{\omega}\Gamma(\alpha)(M^2-p^2)^{\alpha-\omega}}\left[p^2+\frac{(M^2-p^2)}{(\alpha-1-\omega)}\,\omega\right] \tag{C.8}$$

$$\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{k_{\mu}k_{\nu}k_{\sigma}}{(k^2+2kp+M^2)^{\alpha}} = \frac{i\Gamma(\alpha-\omega)}{(4\pi)^{\omega}\Gamma(\alpha)(M^2-p^2)^{\alpha}} \times\left[-p_{\mu}p_{\nu}p_{\sigma}-\frac{(M^3-p^2)}{(\alpha-1-\omega)}\,\frac{1}{2}\,(g_{\mu\nu}p_{\sigma}+g_{\nu\sigma}p_{\mu}+g_{\sigma\mu}p_{\nu})\right] \tag{C.9}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{d^{2\omega}k}{(2\pi)^{2\omega}} \cdot \frac{k_{\mu}k_{\nu}k_{\sigma}k_{\rho}}{(k^2+2kp+M^2)^{\alpha}} &= \frac{i\Gamma(\alpha-\omega)}{(4\pi)^{\omega}\Gamma(\alpha)(M^2-p^2)^{\alpha}}\\ &\times\Big[p_{\mu}p_{\nu}p_{\sigma}p_{\rho}+\frac{(M^2-p^2)}{(\alpha-1-\omega)}+\frac{1}{2}\,(g_{\mu\nu}p_{\sigma}p_{\rho}+g_{\mu\sigma}p_{\nu}p_{\rho}\\ &+g_{\mu\rho}p_{\nu}p_{\sigma}+g_{\nu\sigma}p_{\mu}p_{\rho}+g_{\nu\rho}p_{\mu}p_{\sigma}+g_{\sigma\rho}p_{\mu}p_{\nu})\\ &+\frac{(M^2-p^2)^2}{(\alpha-2-\omega)(\alpha-1-\omega)}\,\frac{1}{4}(g_{\mu\nu}g_{\sigma\rho}+g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}+g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma})\Big]\end{aligned} \tag{C.10}$$

Şimdi de integrallerin hesabında karşılaşılan "kutup kısımlarını" biraz daha ayrıntılı olarak görelim (Problemimizde karşılaşılan kutup kısımları için): k^2 veya $k^{\mu}k^{\lambda}$ 'li integrallerin hesabında (2ω-boyutlu k üzerinden integral alındığında) ikinci terim genel olarak (A,B ve C sabitler olmak üzere)

$$\frac{i\pi^{\omega}}{(2\pi)^{2\omega}} \; \frac{\Gamma(3-\omega)}{2-\omega}\{Ax^2+Bx+C\}^{\omega-2} \tag{C.11}$$

şeklindedir. Görüldüğü gibi $\omega=2$ bir kutup noktasıdır.

$\omega-2=\varepsilon$ dönüşümü yapılırsa $\{Ax^2+Bx+C\}^{\omega-2}=\{Ax^2+Bx+C\}^{\varepsilon}$ olur. $\omega-2=\varepsilon$ komşuluğunda seriye açılırsa

$$\{Ax^2+Bx+C\}^{\omega-2} = 1+(\omega-2)\ln(Ax^2+Bx+C)+0(\varepsilon^2) \tag{C.12}$$

bulunur.

$\dfrac{\pi^{\omega}}{(2\pi)^{2\omega}} = \pi^{\omega}\cdot(2\pi)^{-2\omega}$ terimini alalım: $\omega-2=\varepsilon$ dönüşümü yapıldığında

$$\frac{\pi^{\omega}}{(2\pi)^{2\omega}} = \pi^{2+\varepsilon}(2\pi)^{-2(2+\varepsilon)} \tag{C.13}$$

olur. $\pi^{2+\varepsilon}(2\pi)^{-2(2+\varepsilon)} = V$ diyelim. Bu ifadeyi de ε komşuluğunda seriye açalım:

$$V(\varepsilon) = V(0)+\varepsilon V'(0) + 0\,(\varepsilon^2) \tag{C.14}$$

$$V(0) = \frac{\pi^2}{(2\pi)^4} = \frac{1}{16\pi^2} \tag{C.15}$$

$$V = \pi^{2+\varepsilon}(2\pi)^{-2(2+\varepsilon)} \Longrightarrow \ln V = (2+\varepsilon)\ln\pi-2(2+\varepsilon)\ln 2\pi \quad \text{(C.16}$$

ε'a göre türev alınırsa;

$$\Longrightarrow \frac{V'}{V} = \ln\pi-2\ln 2\pi = \ln\pi-\ln(2\pi)^2 = -\ln\frac{(2\pi)^2}{\pi} = -\ln 4\pi \tag{C.17}$$

$$V' = -V\cdot\ln 4\pi = -\left[\pi^{2+\varepsilon}(2\pi)^{-2(2+\varepsilon)}\right]\ln 4\pi \tag{C.18}$$

$$V'(0) = -\frac{1}{16\pi^2}\,\ln 4\pi \tag{C.19}$$

ve

$$V = \frac{1}{16\pi^2}\,[\,1-\varepsilon\ln 4\pi\,] + 0\,(\varepsilon^2) \tag{C.20}$$

bulunur.

Buna göre

$$\frac{i\,\pi^{\omega}}{(2\pi)^2}\,\frac{\Gamma(3-\omega)}{2-\omega}\{Ax^2+Bx+C\}^{\omega-2} = \frac{i}{16\pi^2}[1-(\omega-2)\ln 4\pi]\frac{\Gamma(3-\omega)}{2-\omega}[1+(\omega-2)\ln(Ax^2+Bx+C)]$$

$$= \frac{i}{16\pi^2}[1-(\omega-2)\ln 4\pi]\,\Gamma(2-\omega)\,[1+(\omega-2)\ln(Ax^2+Bx+C)]$$

$$= \frac{i}{16\pi^2}[1-(\omega-2)\ln 4\pi]\left(\frac{1}{2-\omega}-\gamma\right)[1+(\omega-2)\ln(Ax^2+Bx+C)]$$

$$= \frac{i}{16\pi^2}\left\{\frac{1}{2-\omega}-\gamma+\ln 4\pi+(\omega-2)\ \ln 4\pi-\ln(Ax^2+Bx+C)\right\}$$

$$= \frac{i}{16\pi^2}\{\ln\,\Lambda^2-\ln(Ax^2+Bx+C)\} \tag{C.21}$$

dır. (Burada γ Euler sabitidir).

Buradan hesaplanması gereken integralin $\ln(Ax^2+Bx+C)$'li terim olduğu görülüyor.

Hesaplarımızda (C.21) ifadesindeki birinci terimi "kutup kısmı" olarak gösterdik. $\ln(Ax^2+Bx+C)$ teriminin q^2 ile orantılı kısmını hesaplamak için

$$\ln(Ax^2+Bx+C) = \ln(A'x^2+B'x+C') + \ln\left(1+\frac{q^2y(y-x)}{A'x+B'x+C'}\right) \tag{C.22}$$

şeklinde yazıyoruz. İkinci terim seriye açılırsa

$$\ln(Ax^2+Bx+C) = \ln(A'x^2+B'x+C') + \frac{q^2y(y-x)}{A'x^2+B'x+C'} + 0(q^4) \tag{C.23}$$

bulunur. Her iki terim de kolayca integre edilir.

ÖZGEÇMİŞ

Coşkun Aydın, 1959 yılında Maçka'nın Sevinç Köyünde doğdu. İlköğrenimini Sevinç Köyü İlkokulunda (1965-70), orta öğrenimini Maçka Ortaokulu (1970-73) ve Maçka Lisesinde (1973-76), yükseköğrenimini KTÜ Temel Bilimler Fakültesi Fizik (Mühendisliği) Bölümünde (1976-80) ve yüksek lisansını da aynı bölümde (1980-82) yaptı.

Fizik Bölümünde, 14.9.1981 tarihinden itibaren Araştırma Görevlisi (Yüksek Enerji ve Plazma Fiziği Anabilim Dalı) olarak çalışmaktadır.

Turan Barut Fizik Vakfı Doktora Bursu ile çalışmaları desteklenen Coşkun Aydın'ın yurt dışında (M.Abak ile birlikte) yayınlanmış;

1) Calculation of the Anapole Moment of the Neutrino,Europhys. Lett. 4(8), (1987) 881.

2) Form Factors of Massive Neutrinos In Extended $SU(2)_L xU(1)$ Models, Symmetries In Science III, (1988), p.507-516, Eds. B.Gruber, and F.Iachello, Plenum, New York (adlı) eserleri vardır.

Türk Fizik Derneği ve TÜBİTAK Temel Etkileşmeler Fiziği Ünitesi üyesi olan Coşkun Aydın evli ve bir çocuk babasıdır.