KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MATEMATİK PROGRAMI

FUZZY ALTVEKTÖR UZAYLARI

Süleyman UZUN

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"Yüksek Lisans (Matematik)"
Ünvanının Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 28.05.1993

Tezin Sözlü Savunma Tarihi : 09.07.1993

Tez Danışmanı : Prof.Dr.Yavuz GÜNDÜZALP

Jüri Üyesi : Prof.Dr.Ergün BAYAR

Jüri Üyesi : Prof.Dr.M.Sait EROĞLU

Enstitü Müdürü : Prof.Dr. Temel SAVAŞKAN

MAYIS - 1993

TRABZON

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın konusu "FUZZY ALTVEKTÖR UZAYLARI" dır. Bu çalışmada; [3], [4], [5], [6] ve [9] nolu çalışmaların bir derlemesi yapılmıştır.

Tez konusunu seçen ve yardımlarını esirgemeyen Sayın Hocam Prof. Dr. Yavuz GÜNDÜZALP'a teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Ayrıca bu çalışmanın hazırlanmasında bana yardımcı olan Sayın Arş. Gör. Sultan YAMAK ve Sayın Arş. Gör. A. Yaşar ÖZBAN'a teşekkür ederim.

Mayıs-1993 Süleyman UZUN

İÇİNDEKİLER Sayfa No

ÖZET

İlk olarak 1965'de L.A.Zadeh tarafından verilen "Fuzzy Kümesi" kavramı genel vektör uzayların bir çok özelliğini fuzzy altvektör uzay olarak adlandırılacak olan uzaylara genelleştirmek için bir yapı oluşturmuştur. Fuzzy altvektör uzayı tanımı ilk olarak 1977'de A.K.Katsaras ve D.B.Liu tarafından verilmiştir. Ancak bu tanım, 1986' da Sudarsan Nanda tarafından verilen "bir fuzzy altcisimi üzerinde fuzzy altvektör uzayı" tanımının özel bir halidir.

Üç bölüm halinde düzenlenen bu çalışmanın birinci bölümümünde örgüler ile fuzzy altkümelerinin tanımı ve başlıca özellikleri verilmiştir.

İkinci bölümde Rajesh Kumar'ın I. çalışması esas alınarak fuzzy altcisimi ve Crisp cisim üzerinde fuzzy altvektör uzayı tanımı ve özellikleri verildi. Bir fuzzy altvektör uzayı ile seviye altvektör uzayları arasındaki ilişkiler incelendi.

Üçüncü bölüm P. Lubczonok ve Rajesh Kumar'ın II. çalışmalarına ayrılmıştır. Fuzzy lineer bağımsızlık, fuzzy tabanı ve bir fuzzy altvektör uzayın boyutu kavramları incelenerek fuzzy altvektör uzaylarda izomorf olma tanımı ve özellikleri verilmiştir.

SUMMARY

The concept of "Fuzzy Sets" introduced by L.A. Zadeh in 1965 has constituted a framework for generalizing many of the properties of general vector spaces to the spaces which are called as fuzzy vector subspaces. Definition of "Fuzzy Vector Subspaces" was given by A. K. Katsaras and D.B. Liu in 1977. But this definition is a special case of the definition of "Fuzzy Vector Subspaces over a Fuzzy Subfield" given by S. Nanda in 1986.

This study of three chapters. Definitions and some basic properties of Lattices and Fuzzy Subsets have been given in the first chapter.

The second chapter mainly consists of a study of the 1st. paper of R. Kumar. Here, definition and some properties of fuzzy subfields and fuzzy vector subspaces over Crisp fields have been given. The relations between a fuzzy vector subspaces and level vector subspaces have been studied.

The third chapter has been devoted to the 2nd. paper of R. Kumar and a paper of P. Lubczonok. By studying some concepts such as fuzzy linear independence, fuzzy base and dimension of a fuzzy vector subspaces, definition and some properties of izomorphism in fuzzy vector subspaces have been given and discussed.

BÖLÜM I

ÖN BİLGİLER

1.1. ÖRGÜLER (LATİSLER)

Tanım 1.1.1. L bir küme olsun. L de yansımalı ve geçişli "$\leq$" bağıntısına L de bir yarı-sıralama (ham-sıralama) denir.

"$\leq$" L de bir yarı-sıralamadır:$\Longleftrightarrow$ Her $x,y \in L$ için

i) $x \leq x$

ii) $x \leq y,\ y \leq z \Longrightarrow x \leq z$

dır.

Tanım 1.1.2. L üzerindeki "$\leq$" yarı-sıralama ayrıca ters bakışımlı (simetri) ise "$\leq$" bağıntısına L de kısmi sıralamadır denir.

"$\leq$" L de bir kısmi sıralamadır:$\Longleftrightarrow$ Her $x,y,z \in L$ için

i) $x \leq x$

ii) $x \leq y,\ y \leq x \Longrightarrow x = y$

iii) $x \leq y,\ y \leq z \Longrightarrow x \leq z$

dir.

"$\leq$" L de bir kısmi sıralama ise $(L,\leq)$ ikilisine kısmi sıralanmış veya sıralı küme denir.

Tanım 1.1.3. $(L,\leq)$ kısmi sıralanmış bir küme olsun. Her $x,y \in L$ için $x \leq y$ veya $y \leq x$ ise L ye "$\leq$" bağıntısı ile tümel (tam) sıralanmış küme denir.

Tanım 1.1.4 $(L,\leq)$ kısmi sıralanmış bir küme olsun. Bu takdirde $x,y \in L$ için,

$x<y :\Longleftrightarrow x\leq y$ ve $x\neq y$

$y\geq x :\Longleftrightarrow x\leq y$

$y>x :\Longleftrightarrow x<y$

dır.

Tanım 1.1.5. $(L,\leq)$ kısmi sıralanmış bir küme olsun. $A\subset L$ olmak üzere $(A,\leq)$ tümel sıralanmış ise A ya L de bir zincir denir.

Tanım 1.1.6. $(L,\leq)$ kısmi sıralanmış bir küme, $A\subset L$ ve $b\in L$ olsun.
b, A nın L de bir üst sınırıdır:$\Longleftrightarrow$ Her $a\in A$ için $a\leq b$ dır.
b, A nın L de bir alt sınırıdır:$\Longleftrightarrow$ Her $a\in A$ için $a\geq b$ dır.

A nın L de bir üst sınırı (alt sınırı) varsa A ya üstten sınırlı (alttan sınırlı) küme denir.

Tanım 1.1.7. $(L,\leq)$ kısmi sıralanmış bir küme olsun. L nin L de bir üst sınırı (alt sınırı) varsa bu tek olarak belirlidir ve L nin en büyük (en küçük) elemanı olarak adlandırılır.

Tanım 1.1.8. $(L,\leq)$ kısmi sıralı küme ve $a\in L$ olsun.

i) a ya L de bir maksimal elemandır denir $:\Longleftrightarrow$ Her $x\in L$ için $a\nless x \Longleftrightarrow [x\in L,\ a\leq x \Longrightarrow a=x]$ dır.

ii) a ya L de bir minimal elemandır denir $:\Longleftrightarrow$ Her $x\in L$ için $a\ngtr x \Longleftrightarrow [x\in L,\ a\geq x \Longrightarrow a=x]$ dır.

Tanım 1.1.9. $(L,\leq)$ kısmi sıralanmış bir küme olsun. L yukarıya (aşağıya) yönlenmiştir denir $:\Longleftrightarrow$ Her $S\subset L$ sonlu altkümesinin L de bir üst sınırı(alt sınırı) vardır.

Tanım 1.1.10. $(L,\leq)$ kısmi sıralı küme ve A L olsun. A nın üst (alt) sınırlarının bir en küçük (en büyük) elemanı varsa, bu elemana A nın Supremumu := e.k.ü.s. (İnfimumu := e.b.a.s.) denir ve SupA (İnfA) ile gösterilir.

Tanım 1.1.11. $(L,\leq)$ kısmi sıralı kümesinde her $x,y\in L$ için $\mathrm{Sup}\{x,y\}$ ve $\mathrm{Inf}\{x,y\}$ varsa $(L,\leq)$ ye bir örgü (latis) denir.

Teorem 1.1.1. $(L,\leq)$ bir örgü ve her $x,y\in L$ için $x\vee y:=\mathrm{Sup}\{x,y\}$, $x\wedge y:=\mathrm{Inf}\{x,y\}$ olarak açıklansın. Bu takdirde her $x,y\in L$ için

i) $x\vee(y\vee z)=(x\vee y)\vee z$, $x\wedge(y\wedge z)=(x\wedge y)\wedge z$

ii) $x\vee y=y\vee x$, $x\wedge y=y\wedge x$

iii) $x\wedge(x\vee y)=x$, $x\vee(x\wedge y)=x$

Teorem 1.1.2. Bir L kümesi üzerinde Teorem 1.1.1 in i),ii) ve iii) koşullarını sağlayan iki $\wedge$, $\vee$ ikili işlemi verilsin. "$\leq$" bağıntısı, $x,y\in L$ için

$x\leq y :\Longleftrightarrow x\vee y=y$

ile tanımlansın. Bu durumda $(L,\leq)$ bir örgüdür.

Uyarı: $(L,\vee,\wedge,\leq)$ örgüsündeki her önermede, $\vee,\wedge,\leq$ işlemlerinde sırasıyla $\wedge,\vee,\geq$ değişimi yapılırsa yine bir örgü elde edilir.

Tanım 1.1.12. $(L,\leq)$ kısmi sıralanmış bir küme olsun. L ye tamdır denir:$\Longleftrightarrow$ Her $A\subset L$ için SupA vardır.

Teorem 1.1.3. $(L,\leq)$ kısmi sıralanmış bir küme olsun. L tamdır. $\Longleftrightarrow$ Her $A\subset L$ için İnfA vardır.

Teorem 1.1.4. (Max.-Min. Teo.). $(L,\vee,\wedge,\leq)$ bir örgü olsun. Bu takdirde $a_{ij}\in L$, $1\leq i\leq m$, $1\leq j\leq n$ olmak üzere,

$$\bigwedge_{i=1}^{m}\left(\bigvee_{j=1}^{n} a_{ij}\right) \geq \bigvee_{j=1}^{n}\left(\bigwedge_{i=1}^{m} a_{ij}\right)$$

dır.

Tanım 1.1.13. $(L,\vee,\wedge)$ örgüsünde her $x,y,z\in L$ için,

$$x\wedge(y\vee z)=(x\wedge y)\vee(x\wedge z)$$

$$x\vee(y\wedge z)=(x\vee y)\wedge(x\vee z)$$

ise L ye bir dağılımlı örgü denir.

Tanım 1.1.14. $(L,\vee,\wedge)$ tam dağılımlı örgüdür:$\Longleftrightarrow$

$$x\wedge\left(\bigvee_{\beta\in B} y_\beta\right)=\bigvee_{\beta\in B}(x\wedge y_\beta)$$

$$x\vee\left(\bigwedge_{\beta\in B} y_\beta\right)=\bigwedge_{\beta\in B}(x\vee y_\beta)$$

dır.

Teorem 1.1.5. $(L,\vee,\wedge)$ tam ve tam dağılımlı örgü olsun. Bu takdirde

i) $\left(\bigvee_{\alpha\in A} x_\alpha\right)\wedge\left(\bigvee_{\beta\in B} y_\beta\right)=\bigvee_{\substack{\alpha\in A\\ \beta\in B}}(x_\alpha\wedge y_\beta)$

ii) $\left(\bigwedge_{\alpha\in A} x_\alpha\right)\vee\left(\bigwedge_{\beta\in B} y_\beta\right)=\bigwedge_{\substack{\alpha\in A\\ \beta\in B}}(x_\alpha\vee y_\beta)$

dır.

Tanım 1.1.15. L en küçük (minimal) elemanı 0 olan bir örgü olsun. $/:L\longrightarrow L$ dönüşümü aşağıdaki koşulları sağlıyorsa / ye L de bir tümleyen dönüşümü ve L ye / dönüşümü ile bir tümleyenli örgü denir.

$/:L\longrightarrow L$

i) $(x')'=x$

ii) $(x\vee y)'=x'\wedge y'$

iii) $x\wedge x'=0$

$(L,\vee,\wedge,/)$ tümleyenli örgü olsun. Bu takdirde, $1=0'$ L nin en büyük (maksimal) elemanıdır. Diğer yandan $x''=x$ ve $x\leq y \Longrightarrow y'\leq x'$ $(x'\geq y')$ olduğundan / dönüşümü anti izomorfik ve idempotenttir.

Tanım 1.1.16. $(L,\vee,\wedge,\leq)$ bir örgü ve $a,b,c\in L$ olsun.

i) c,L de a nın b ye göre yarı tümleyenidir denir:$\Longleftrightarrow$ Her $x\in L$ için $(a\wedge x\leq b \longleftrightarrow x\leq c)$ veya $(a\wedge x\leq b \longleftrightarrow x\leq a*b)$ $(c:=a*b)$ dır.

ii) L de her $a,b\in L$ için $a*b$ varsa L ye göreli yarı-tümleyenli örgü denir.

iii) $a^{*}:=a*0$ elemanına a nın yarı-tümleyeni denir.

Teorem 1.1.6. (Yarı-tümleyen özellikleri) $(L,\vee,\wedge,\leq)$ bir örgü ve $x,y\in L$ olsun. Bu takdirde,

i) $x\leq x^{**}$ ve $x^{*}=x^{***}$

ii) $x\leq y \longrightarrow x^{*}\geq y^{*}$

iii) $(x\vee y)^{*}=x^{*}\wedge y^{*}$

dır.

Teorem 1.1.7. $(L,\vee,\wedge,\leq)$ tam örgüsü göreli yarı-tümleyenlidir: $\Longleftrightarrow x\wedge(\bigvee_{\beta\in B} y_\beta)=\bigvee_{\beta\in B}(x\wedge y_\beta)$ dır.

$L:=I=[0,1]$ R, "$\leq$" doğal sıralama olmak üzere, $x,y\in I$ için

$$x\vee y:=\max\{x,y\}$$

$$x\wedge y:=\min\{x,y\}$$

olarak alınırsa $(I,\vee,\wedge,\leq)$ tam ve tam dağılımlı bir örgüdür. Burada $\mathrm{Sup}\emptyset=0$ ve $\mathrm{Inf}\emptyset=1$ dir.

$$/:I\longrightarrow I$$

$$x\longrightarrow x':=1-x$$

$(x')'=(1-x)'=1-(1-x)=1-1+x=x \Longrightarrow (x')'=x$ olur.

$$(x\wedge y)'=1-(x\wedge y)=1-\min\{x,y\}=1-(x+y-|x-y|)/2=[2-(x+y)+|x-y|]/2 \qquad (1)$$

$$(1-x)\vee(1-y)=\max\{1-x,1-y\}=[(1-x)+(1-y)+|1-x-(1-y)|]/2$$

$$=[2-(x+y)+|x-y|]/2 \qquad (2)$$

(1) ve (2) den $(x\wedge y)'=(1-x)\vee(1-y)=x'\vee y'$ elde edilir. Benzer şekilde $(x\vee y)'=x'\wedge y'$ dır.

Uyarı 1.1.2. $x\wedge x'=0$ ve $x\vee x'=1$ genelde doğru değildir.

örnek: $x=0.3\in L$ olsun. Bu durumda $x'=0.7$ dir.

$x\wedge x'=\min\{0.3,0.7\}=\inf\{0.3,0.7\}=0.3\neq 0$

$x\vee x'=\max\{0.3,0.7\}=\sup\{0.3,0.7\}=0.7\neq 1$

dir. Dolayısıyla $(I,\vee,\wedge,/)$ tümleyenli örgü değildir. Ancak x' ye x in tümleyeni diyeceğiz. Ayrıca $x\leq y$ ise $y'\leq x'$ sağlanır.

$(I,\vee,\wedge,\leq)$ yarı-tümleyenli örgü olacaktır. $a,b\in L$ için

$$a\wedge x\leq b \iff x\leq a*b$$

dir.

i) $a\leq b$ olsun. Her $x\in I$ için $a\wedge x\leq a\leq b \implies a*b=1$ dir.

ii) $a>b$ olsun. $x\in I$ için $a\wedge x\leq b \iff x\leq b \longrightarrow a*b=b$ dir.

$$a^* = a*0 = \begin{cases} 0, & a>0 \\ 1, & a=0 \end{cases}$$

Tanım 1.1.17.[5]: Bir B kümesine üstten iyi sıralıdır denir:$\iff$ Her $\emptyset\neq C\subset B$ için $\operatorname{Sup}C\in C$ dir.

Tanım 1.1.18.[5]: $B\subset[0,1]$ altkümesine artan monotonik bir $x\in[0,1]$ limitine sahiptir denir:$\iff \exists (x_n)\subset B$ monoton artan bir dizi öyleki $x_n \longrightarrow x$ dir.

önerme 1.1.1.[5]: $B\subset[0,1]$ altkümesi herhangi bir monotonik limite sahip değildir $\iff$ B üstten iyi sıralıdır.

Tanım 1.1.19.[5]: P(X), X in güç kümesini göstermek üzere,

$$s:P(R_+ \cup \{0\}) \longrightarrow R_+ \cup \{0\} \cup \{\infty\}, \quad s(A)=\sum_{a\in A} a$$

olsun. Bu durumda $A\cap R_+$ kümesinin sayılamaz olması halinde $s(A)=\infty$ alınır.

Önerme 1.1.2.[5]: [0,1] in tüm üstten iyi sıralı altkümeleri sayılabilirdir.

Sonsuz sayıda azalan limit noktalarına sahip üstten iyi sıralı $B\subset[0,1]$ kümesini oluşturabiliriz. Örneğin; $B=\{\frac{1}{n}+\frac{1}{m} \mid n,m\in\{2,3,4,\dots\}\}$ kümesini alabiliriz.

1.2.FUZZY ALTKÜMELERİ

Tanım 1.2.1.[6,7]: X boştan farklı bir küme ve L bir örgü olsun. A ya X de bir L-fuzzy alt kümesidir denir $:\Longleftrightarrow$ $A:X\longrightarrow L$ bir fonksiyondur. $x\in X$ olmak üzere $A(x)\in L$ değerine x'in A fuzzy altkümesine üyelik derecesi denir ve $A(x):=[x\in A]$ ile gösterilir.

I=[0,1] kapalı aralığı bir örgü olduğundan L=I alabiliriz ve bundan böyle çalışmalarımız I da yapılacakdır.

X kümesinin herhangi bir Y altkümesi için Y nin karakteristik fonksiyonu

$$\chi_Y:X\longrightarrow I \;,\quad \chi_Y(x):=\begin{cases}1 \;, & x\in Y\\ 0 \;, & x\notin Y\end{cases}$$

ile X de bir I-fuzzy altkümesidir.

$A:X\longrightarrow\{0,1\}$ şeklindeki bir fuzzy altkümesine X de bir Crisp küme denir. Özel olarak X üzerinde daima 1 değerini alan Crisp küme X ile, X üzerinde daima 0 değerini alan Crisp küme de $\emptyset$ ile gösterilir.

Bundan böyle X de bir A fuzzy altkümesinden, A X de bir I fuzzy altkümesi olduğu anlaşılacaktir.

X üzerindeki tüm fuzzy altkümelerinin ailesini F(X) ile gösterilecektir. Buna göre,

$F(X):=\{A \mid A:X \longrightarrow I \text{ bir fonksiyon }\}$

dir.

Tanım 1.2.2.[7]: $A,B \in F(X)$ olmak üzere,

i) $A=B :\Longleftrightarrow A(x)=B(x) \quad , \forall\, x \in X$

ii) $A \subset B :\Longleftrightarrow A(x) \leq B(x) \quad , \forall\, x \in X$

iii) A fuzzy altkümesinin tümleyeni A' ile gösterilir ve

$A'(x):=1-A(x) \quad , \forall\, x \in X$

ile tanımlanır. Buna göre ,

$(A')'=A$

dır.

Tanım 1.2.3.[7]: $A,B \in F(X)$ olmak üzere,

i) A ile B nin birleşimi :

$(A \cup B)(x):=\max\{A(x),B(x)\}:=A(x) \vee B(x) \quad , \forall\, x \in X$

ile tanımlanır ve $A \cup B$ ile gösterilir. Daha genel olarak,

$\mathcal{A}:=\{A_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\} \subset F(X)$

ailesi için

$$\Big(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha\Big)(x):=\sup\{A_\alpha(x) \mid \alpha \in \Lambda\}:=\bigvee_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x) \quad , \forall\, x \in X$$

ile tanımlanır ve $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ ile gösterilir.

ii) A ile B nin arakesiti her $x \in X$ için

$(A \cap B)(x):=\min\{A(x),B(x)\}:=A(x) \wedge B(x):=(A \wedge B)(x)$

ile tanımlanır ve $A \cap B$ ile gösterilir. Daha genel olarak i) de verilen aile için

$$\Big(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha\Big)(x):=\inf\{A_\alpha(x):\alpha\in\Lambda\}:=\bigwedge_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha(x) \quad (\forall\, x\in X)$$

ile tanımlanır ve $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ ile gösterilir.

Önerme 1.2.1.[10]: $A,B,C\in F(X)$ olmak üzere,

i) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

ii) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

iii) $C\cap(A\cup B)=(C\cap A)\cup(C\cap B)$

iv) $C\cup(A\cap B)=(C\cup A)\cap(C\cup B)$

dır.

Önerme 1.2.2.[7]: $\mathcal{A}=\{A_\alpha \mid \alpha\in\Lambda\}\subset F(X)$ olmak üzere,

i) $\Big(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha\Big)'=\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A'_\alpha$

ii) $\Big(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha\Big)'=\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A'_\alpha$

dır. Bunlara "De Morgan" kuralları denir.

Tanım 1.2.4.[6]: X ve Y boştan farklı iki küme ve $f:X\longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. A, X de bir fuzzy altkümesi ve B de Y de bir fuzzy altkümesi olmak üzere $f(A)$ ve $f^{-1}(B)$ aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$f(A)(y):=\begin{cases}\sup\{A(z)\mid z\in f^{-1}(y)\}, & f^{-1}(y)\neq\emptyset\\ 0, & f^{-1}(y)=\emptyset\end{cases} \qquad (\forall y\in Y)$$

$$f^{-1}(B)(x):=B(f(x)) \qquad (\forall x\in X)$$

Açık olarak $f^{-1}(B)$, $f(A)$ sırasıyla X ve Y de birer fuzzy altkümesidir

Önerme 1.2.3.[7]: $f:X\longrightarrow Y$ bir fonksiyon, $A,A_1,A_2\in F(X)$ ve B,B_1,

$B_2 \in F(Y)$ olsun. Bu taktirde,

i) $A \subset f^{-1}(f(A))$ ve

$f^{-1}(f(A))=A \iff \forall y \in Y$ için ($f^{-1}(y) \neq \emptyset$ old.) A, $f^{-1}(y)$ üzerinde sabit bir fonksiyondur. Özellikle, eğer f bire-bir ise $f^{-1}(f(A))=A$ dır.

ii) $f(f^{-1}(B)) \subset B$ ve

$f(f^{-1}(B))=B \iff \mathrm{Supp}B \subset f(X)$

dır. Özellikle, eğer f örten ise $f(f^{-1}(B))=B$ dır. ($\{x \in X \mid A(x)>0\} \subset X$ altkümesine A fuzzy altkümesinin desteği denir ve SuppA veya A_0 notasyonlarından biri ile gösterilir.)

iii) $A_1 \subset A_2$ ise $f(A_1) \subset f(A_2)$ ve

$B_1 \subset B_2$ ise $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$

dır.

iv) $f(A) \subset B$ ise $A \subset f^{-1}(B)$ dır.

v) $f^{-1}(B')=(f^{-1}(B))'$ dır.

vi) $\{A_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\} \subset F(X)$ olmak üzere ,

$$f\Big(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \Big) = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} f(A_\alpha) \text{ ve } f\Big(\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \Big) \subset \bigcap_{\alpha \in \Lambda} f(A_\alpha)$$

dir.

vii) $\{B_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\} \subset F(Y)$ olmak üzere

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha \Big) = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} f^{-1}(B_\alpha) \text{ ve } f^{-1}\Big(\bigcap_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha \Big) = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} f^{-1}(B_\alpha)$$

dır.

Tanım 1.2.5.[3]: S, S' herhangi iki küme, A S de bir fuzzy altkümesi ve $f:S \longrightarrow S'$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde A ya f-değişmezdir denir:$\iff$ $f(x)=f(y)$ olan her $x,y \in S$ için $A(x)=A(y)$ dir.

Açık olarak A f-değişmez olması durumunda $f^{-1}(f(A))=A$ dır. Gerçekten, her $x \in S$ için,

$$f^{-1}(f(A))(x)=f(A)(f(x))=\sup_{f(z)=f(x)} A(z) = A(x)$$

olur.

Tanım 1.2.6.[3]: A, X de bir fuzzy altkümesi ve $t \in I$ olsun. Bu takdirde, $\{x \in X \mid A(x) \geq t\}$ kümesine A nın seviye altkümesi denir ve A_t, X^t_A, $A^{-1}([t,1])$ notasyonlarından biri ile gösterilir. Bu çalışmada genellikle A_t ile gösterilecektir.

$\{x \in X \mid A(x)=t\}$ ve $\{x \in X \mid A(x)>t\}$ kümeleri sırasıyla T_A^t ve H_A^t ile gösterilir.

Önerme 1.2.4.[4]: A, S kümesinin herhangi bir fuzzy altkümesi olsun. Bu takdirde,

$$A(x) = \sup\{ t \mid x \in A_t \} \qquad (t \in [0,1])$$

dir.

Tanım 1.2.7.[5]: A, X de bir fuzzy altkümesi olsun. A fuzzy altkümesinin kardinali,

$$\mathrm{Kard}(A) := \sum_{x \in X} A(x)$$

ile verilir.

BÖLÜM II

2.1. FUZZY ALTGRUP, FUZZY ALTHALKA VE FUZZY ALTCİSİM

Tanım 2.1.1.[1,6]: X bir grup ve G de X de bir fuzzy altkümesi olsun. Eğer,

i) $G(xy) \geq G(x) \wedge G(y)$ $(\forall\, x,y \in X)$

ii) $G(x^{-1}) \geq G(x)$ $(\forall x \in X)$

özellikleri sağlanıyorsa G ye X de bir fuzzy altgruptur denir.

Tanım 2.1.2.[9]: X bir halka ve R de X de bir fuzzy altkümesi olsun. Eğer,

i) $R(x+y) \geq R(x) \wedge R(y)$ $(\forall x,y \in X)$

ii) $R(-x) \geq R(x)$ $(\forall x \in X)$

iii) $R(xy) \geq R(x) \wedge R(y)$ $(\forall x,y \in X)$

özellikleri sağlanıyorsa R ye X de bir fuzzy althalkasıdır denir.

Tanım 2.1.3.[6,7]: X bir cisim ve F X de bir fuzzy altkümesi olsun. Eğer,

i) $F(x+y) \geq F(x) \wedge F(y)$ $(\forall x,y \in X)$

ii) $F(-x) \geq F(x)$ $(\forall x \in X)$

iii) $F(xy) \geq F(x) \wedge F(y)$ $(\forall x,y \in X)$

iv) $F(x^{-1}) \geq F(x)$ $(\forall 0 \neq x \in X)$

özellikleri sağlanıyorsa F ye X de bir fuzzy altcismidir denir.

Önerme 2.1.1.[6]: X bir cisim ve F X de bir fuzzy altkümesi olsun. Bu takdirde F X de bir fuzzy altcismidir :$\Longleftrightarrow$

i) $F(x-y) \geq F(x) \wedge F(y)$ $(\forall x,y \in X)$

ii) $F(xy^{-1}) \geq F(x) \wedge F(y)$ $(\forall x \in X\ ,\ \forall 0 \neq y \in X)$

dır.

İspat: Tanım 2.1.3. den açıktır.

Önerme 2.1.2.[2]: X bir cisim ve F X de bir fuzzy altcismi olsun. Bu takdirde,

i) $F(0)\geq F(x)$ $(\forall x\in X)$

ii) $F(1)\geq F(x)$ $(\forall 0\neq x\in X)$

özellikleri vardır.

İspat: Tanım 2.1.3. ve Önerme 2.1.1. den açıktır.

Önerme 2.1.3.[1,6]: X,Y iki cisim ve $f:X\longrightarrow Y$ sıfırdan farklı bir homomorfizim olsun. F X de bir fuzzy altcismi ve T Y de bir fuzzy altcismi olmak üzere,

i) f(F) Y de bir fuzzy altcismidir.

ii) $f^{-1}(T)$ X de bir fuzzy altcismidir.

İspat: i) İspat için Önerme 2.1.1. de verilen i) ve ii) koşullarının sağlandığını göstermek yeterlidir. Tanım 1.2.4. den her $y\in Y$ için

$$f(F)(y)=\sup\{F(x)\,|\,x\in f^{-1}(y)\} \qquad (\sup\emptyset:=0)$$

dır. Her $y\in Y$ için $X_y:=f^{-1}(y)$ olarak tanımlayalım. Bu takdirde f homomorfizim olduğundan $\forall$ $y,\tilde{y}\in Y$ için

$$X_y-X_{\tilde{y}}\subset X_{(y-\tilde{y})} \qquad (1)$$

olduğu açıktır.

$y,\tilde{y}\in Y$ keyfi verilsin. Eğer $y-\tilde{y}\notin$ gör$(f)=f(X)$ ise $f(F)(y-\tilde{y})=0$ dır. $y-\tilde{y}\notin f(X)$ (yani, $X_{(y-\tilde{y})}=\emptyset$) ise (1) den $X_y=\emptyset$ veya $X_{\tilde{y}}=\emptyset$ dır. Böylece, $f(F)(y)=0$ veya $f(F)(\tilde{y})=0$ olur. Buradan $y-\tilde{y}\notin f(X)$ olan her $y,\tilde{y}\in Y$ için

$$f(F)(y-\tilde{y})=f(F)(y)\wedge f(F)(\tilde{y})$$

elde edilir.

$X_{(y-\tilde{y})}\neq\emptyset$ olsun. Bu durumda,

$$f(F)(y\tilde{y})=\sup\{F(x)\,|\,x\in X_{(y\tilde{y})}\}>0 \tag{2}$$

dır. Eğer $X_y=\emptyset$ veya $X_{\tilde{y}}=\emptyset$ ise ,sırasıyla $f(F)(y)=0$ veya $f(F)(\tilde{y})=0$ dır. Buradan,

$$f(F)(y)\wedge f(F)(\tilde{y})=0 \tag{3}$$

olur. (2) ve(3) den

$$f(F)(y\tilde{y})>f(F)(y)\wedge f(F)(\tilde{y})$$

elde edilir. Şimdide, $X_y\neq\emptyset$ ve $X_{\tilde{y}}\neq\emptyset$ olsun.

$$\begin{aligned} f(F)(y\tilde{y}) &= \sup\{F(z)\,|\,z\in X_{(y\tilde{y})}\} \qquad \text{((1) den)} \\ &\geq \sup\{F(z)\ z\in X_y X_{\tilde{y}}\}=\sup\{F(x\tilde{x})\,|\,\tilde{x}\in X_{\tilde{y}}\ ,\ x\in X_y\} \\ &= \sup\{F(x)\wedge F(\tilde{x})\,|\,\tilde{x}\in X_{\tilde{y}}\ ,\ x\in X_y\} \\ &= \sup\{\sup\{F(x)\wedge F(\tilde{x})\,|\,\tilde{x}\in X_{\tilde{y}}\}\,|\,x\in X_y\} \\ &= \sup\{F(x)\wedge\sup\{F(\tilde{x})\,|\,\tilde{x}\in X_{\tilde{y}}\}\,|\,x\in X_y\} \\ &= \sup\{F(x)\wedge f(F)(\tilde{y})\,|\,x\in X_y\} \\ &= \sup\{F(x)\,|\,x\in X_y\}\wedge f(F)(\tilde{y}) \\ &= f(F)(y)\wedge f(F)(\tilde{y}) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow f(F)(y\tilde{y})\geq f(F)(y)\wedge f(F)(\tilde{y})$ olur. Böylece $\forall\ y,\tilde{y}\in Y$ için

$$f(F)(y\tilde{y})\geq f(F)(y)\wedge f(F)(\tilde{y}) \tag{4}$$

elde edilir. Şimdide, $\forall\ y,\tilde{y}\in Y$ için

$$f(F)(y\tilde{y})\geq f(F)(y)\wedge f(F)(\tilde{y})$$

olduğunu gösterelim. Her $y\in Y$ için $X_y:=f^{-1}(y)$ olarak tanımlarsak f homomorfizm olduğundan,

$$X_y X_{\tilde{y}} \subset X_{y\tilde{y}} \qquad (\forall y,\tilde{y}\in Y) \tag{1'}$$

olduğu açıktır.

$y,\tilde{y}\in Y$ keyfi verilsin. Eğer, $y\tilde{y}\notin$gör$(f)=f(X)$ ise $f(F)(y\tilde{y})=0$ dır. Ancak $y\tilde{y}\notin f(X)$ (yani $X_{y\tilde{y}}=\emptyset$) ise (1)' den $X_y=\emptyset$ veya $X_{\tilde{y}}=\emptyset$ dır. Böylece $f(F)(y)=0$ veya $f(F)(\tilde{y})=0$ olur. Dolayısıyla $y\tilde{y}\notin f(X)$ olan her $y,\tilde{y}\in Y$ için

$$f(F)(y\tilde{y})=f(F)(y)\wedge f(F)(\tilde{y})$$

elde edilir.

$X_{y\tilde{y}}\neq\emptyset$ olsun. Bu takdirde iki durum vardır.

I. $X_y=\emptyset$ veya $X_{\tilde{y}}=\emptyset$ olması durumunda $f(F)(y)=0$ veya $f(F)(\tilde{y})=0$ dır. Dolayısıyla,

$$f(F)(y)\wedge f(F)(\tilde{y})=0 \qquad (2)'$$

olur. Diğer yandan $X_{y\tilde{y}}\neq\emptyset$ olduğundan

$$f(F)(y\tilde{y})=\sup\{F(z)\,|\,z\in X_{y\tilde{y}}\}>0 \qquad (3)'$$

dır. (2)' ve (3)' den

$$f(F)(y\tilde{y})>f(F)(y)\wedge f(F)(\tilde{y})$$

elde edilir.

II. $X_y\neq\emptyset$ ve $X_{\tilde{y}}\neq\emptyset$ ise

$$\begin{aligned}
f(F)(y\tilde{y})&=\sup\{F(z)\,|\,z\in X_{y\tilde{y}}\}\geq\sup\{F(z)\,|\,z\in X_yX_{\tilde{y}}\} \quad ((1)'\text{den})\\
&=\sup\{F(x\tilde{x})\,|\,x\in X_{\tilde{y}},\ x\in X_y\}\\
&\geq\sup\{F(x)\wedge F(\tilde{x})\,|\,\tilde{x}\in X_{\tilde{y}},\ x\in X_y\}\\
&=\sup\{\sup\{F(x)\wedge F(\tilde{x})\,|\,\tilde{x}\in X_{\tilde{y}}\}\,|\,x\in X_y\}\\
&=\sup\{F(x)\wedge\sup\{F(\tilde{x})\,|\,\tilde{x}\in X_{\tilde{y}}\}\,|\,x\in X_y\}\\
&=\sup\{F(x)\wedge f(F)(\tilde{y})\,|\,x\in X_y\}\\
&=\sup\{F(x)\,|\,x\in X_y\}\wedge f(F)(\tilde{y})\\
&=f(F)(y)\wedge f(F)(\tilde{y})
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow f(F)(y\tilde{y})\geq f(F)(y)\wedge f(F)(\tilde{y})$ elde edilir. Böylece her $y,\tilde{y}\in Y$ için,

$$f(F)(y\tilde{y})\geq f(F)(y)\wedge f(F)(\tilde{y}) \qquad (4)'$$

elde ederiz.

Her $0\neq y\in Y$ için $f(F)(y^{-1})\geq f(F)(y)$

olduğunu gösterelim.

$y^{-1}\notin f(X)\Longrightarrow y\notin f(X)\Longrightarrow f(F)(y^{-1})=0=f(F)(y)\Longrightarrow f(F)(y^{-1})=f(F)(y)$

olur. $y^{-1}\in f(X)\Longrightarrow y\in f(X)$ (f homomorfizm)

$$\begin{aligned}
f(F)(y^{-1})&=\sup\{F(x)\,|\,y^{-1}=f(x)\}=\sup\{F(x)\,|\,y=f(x^{-1})\} \quad (z=x^{-1}\Longrightarrow x=z^{-1})\\
&=\sup\{F(z^{-1})\,|\,z\in f^{-1}(y)\}\\
&\geq\sup\{F(z)\,|\,z\in f^{-1}(y)\}=f(F)(y)
\end{aligned}$$

dır. Her $0\neq y\in Y$ için $f(F)(y^{-1})\geq f(F)(y)$ olur. (4)' ifadesinde $\tilde{y}$ yerine

$\tilde{y}^{-1}$ yazarsak

$$f(F)(y\tilde{y}^{-1}) \geq f(F)(y) \wedge f(F)(\tilde{y}) \quad (\forall 0 \neq \tilde{y}, y \in Y) \qquad (5)'$$

elde edilir.

(4), (5)' ve önerme 2.1.1 den f(F) Y de bir fuzzy altcismidir.

ii) f homomorfizim olduğundan $f^{-1}(T)$ nin X de bir fuzzy altcismi olduğu açıktır.

Önerme 2.1.4.[9]: X bir cisim ve F de X de bir fuzzy altcismi olsun. Bu takdirde,

i) $\forall\, x \in X$ için $F(-x)=F(x)$

ii) $\forall\, 0 \neq x \in X$ için $F(x^{-1})=F(x)$

dır.

İspat: i) $x \in X$ olsun. Tanım 2.1.3 -ii) den

$$F(-x) \geq F(x) \qquad (1)$$

dır. $F(x)=F(-(-x)) \geq F(-x)$ (Tanım 2.1.3 -ii))

$\Longrightarrow \quad F(x) \geq F(-x) \qquad (2)$

dır. (1) ve (2) den $F(-x)=F(x)$ $(\forall\, x \in X)$ elde edilir.

ii) $0 \neq x \in X$ olsun.

$$F(x)=F((x^{-1})^{-1}) \quad (\text{ Tanım } 2.1.3\text{-iv}))$$
$$\geq F(x^{-1}) \geq F(x)$$

$\Longrightarrow F(x)=F(x^{-1})$ $(\forall 0 \neq x \in X)$ dir.

2.2.FUZZY LİNEER UZAYLAR

Tanım 2.2.1.[9]: X bir cisim ve F, X de bir fuzzy altcismi olsun. Y X üzerinde bir lineer uzay ve V de Y de bir fuzzy altkümesi olsun. Eğer,

i) $V(x+y) \geq V(x) \wedge V(y) \qquad (\forall\, x,y \in Y)$

ii) $V(-x) \geq V(x) \qquad (\forall\, x \in Y)$

iii) $V(\alpha x) \geq F(\alpha) \wedge V(x)$ $\quad(\forall\ \alpha \in X,\ x \in Y)$

iv) $F(1) \geq V(0)$

özellikleri sağlanıyorsa V ye F fuzzy altcismi üzerinde bir fuzzy lineer uzaydır denir.

Önerme 2.2.1.[9]: X bir cisim ve F X de bir fuzzy altcismi olsun. Y X üzerinde bir lineer uzay , V Y de bir fuzzy lineer uzay olsun. Bu takdirde, her $x \in Y$ için $V(0) \wedge F(0) \geq V(x)$ dır.

İspat: Önerme 2.1.1 -i) ve Tanım 2.2.1 -iv) den

$$F(0)=F(1-1) \geq F(1) \geq V(0) \Longrightarrow F(0) \geq V(0) \qquad (1)$$

dır. $x \in Y$ olsun. Tanım 2.2.1 -i) ve ii) den

$$V(0)=V(x-x)=V(x+(-x)) \geq V(x) \wedge V(-x) \geq V(x) \wedge V(x)=V(x)$$

$$\Longrightarrow \quad V(0) \geq V(x) \quad (\forall\ x \in Y) \qquad (2)$$

dır. (1) ve (2) den her $x \in Y$ için

$$V(0) \wedge F(0) \geq V(x) \wedge V(0)=V(x)$$

elde edilir.

Önerme 2.2.2.[6,9]: X bir cisim ve F X de bir fuzzy altcismi olsun. Y X üzerinde bir lineer uzay, V Y de bir fuzzy altkümesi olsun. Bu takdirde, V F üzerinde bir fuzzy lineer uzaydır:$\Longleftrightarrow$

i) $V(\alpha x+\mu y) \geq \min\{F(\alpha) \wedge V(x),\ F(\mu) \wedge V(y)\}$ $\quad(\forall\ \alpha,\mu \in X$ ve $x,y \in Y)$

ii) $F(1) \geq V(x)$ $\quad(\forall\ x \in Y)$

dır.

İspat: "$\Longrightarrow$" i) Tanım 2.2.1 -i) ve -iii) den

$$V(\alpha x+\mu y) \geq V(\alpha x) \wedge V(\mu y) \geq \min\{F(\alpha) \wedge V(x),\ F(\mu) \wedge V(y)\} \ (\forall \alpha,\mu \in X, x,y \in Y)$$

dır.

ii) Tanım 2.2.1 -iv) ve Önerme 2.2.1 -ii) den

$$F(1) \geq V(0) \geq V(x) \qquad (\forall\ x \in Y)$$

dır.

"$\Longleftarrow$" Her $x,y\in Y$ için

$$V(x+y)=V(1x+1y)\geq\min\{F(1)\wedge V(x),\ F(1)\wedge V(y)\} \quad \text{(hipotez -ii))}$$
$$=V(x)\wedge V(y)$$

dır. Buradan

$$V(x+y)\geq V(x)\wedge V(y) \quad (\forall\ x,y\in Y) \qquad (1)$$

elde edilir. Önerme 2.1.2 -ii), -iii) ve hipotez -ii) den her $x\in Y$ için,

$$F(0)\geq F(1)\geq V(x) \text{ ve } F(-x)\geq F(1)\geq V(x) \qquad (2)$$

dır.

$$V(-x)=V(0x+(-1)x)\geq\min\{F(0)\wedge V(x),\ F(-1)\wedge V(x)\} \quad \text{((2) den)}$$
$$=\min\{V(x),\ V(x)\}=V(x)$$

$$\Longrightarrow V(-x)=V(x) \qquad (\forall\ x\in Y) \qquad (3)$$

elde edilir. $\forall\ \alpha\in X$ ve $\forall x\in Y$ için,

$$V(\alpha x)=V(0x+\alpha x)\geq\min\{F(0)\wedge V(x), F(\alpha)\wedge V(x)\} \quad \text{((2) den)}$$
$$=\min\{V(x),\ F(\alpha)\wedge V(x)\}$$
$$=\min\{F(\alpha),\ V(x)\}=F(\alpha)\wedge V(x)$$

$$\Longrightarrow\ V(\alpha x)=F(\alpha)\wedge V(x) \qquad (4)$$

olur.Hipotez -ii) den

$$F(1)\geq V(0)$$

olduğu açıktır. (5)

(1),(2),(3),(4) ve (5) den V Y de bir fuzzy lineer uzaydır.

Uyarı 2.2.1. Önerme 2.2.2 de F,X de crisp ($F\leq X$ ise $\chi_F:X\longrightarrow I$) cisim olması durumunda (i) özelliği

$$V(\alpha x+\mu y)\geq V(x)\wedge V(y) \qquad (\forall\ \alpha,\mu\in X,\ x,y\in Y)$$

olur.

Önerme 2.2.3.[6,9]:Fuzzy lineer uzayların bir ailesinin arakesitide bir fuzzy lineer uzaydır.

İspat: X bir cisim ve F X de bir fuzzy cisimi olsun. Y X üzerinde bir lineer uzay, $\forall$ $i\in I$ için V_i Y de F üzerinde fuzzy lineer uzay olsun. Bu takdirde $\bigcap_{i\in I} V_i$ nin Y de F üzerinde bir fuzzy lineer uzay olduğunu gösterelim: $\alpha,\mu \in X$, $x,y \in Y$ olsun.

$$
\begin{aligned}
(\bigcap_{i\in I} V_i)(\alpha x+\mu y) &= \inf_{i\in I} V_i(\alpha x+\mu y) \quad (V_i \text{ fuzzy lin. uz.})\\
&\geq \inf_{i\in I} \min\{F(\alpha)/\backslash V_i(x),\ F(\mu)/\backslash V_i(y)\}\\
&= \min\{\inf_{i\in I}(F(\alpha)/\backslash V_i(x)), \inf_{i\in I}(F(\mu)/\backslash V_i(y))\}\\
&= \min\{F(\alpha)/\backslash \inf_{i\in I} V_i(x),\ F(\mu)/\backslash \inf_{i\in I} V_i(y)\}\\
&= \min\{F(\alpha)/\backslash (\bigcap_{i\in I} V_i)(x),\ F(\mu)/\backslash (\bigcap_{i\in I} V_i)(y)\}
\end{aligned}
$$

elde edilir. $\forall\, x\in Y$ ve $\forall\, i\in I$ için

$$F(1) \geq V_i(x) \geq \inf_{i\in I}\{V_i(x) \mid i\in I\} = (\bigcap_{i\in I} V_i)(x)$$

olur. Önerme 2.2.2 den $\bigcap_{i\in I} V_i$ F üzerinde bir lineer uzaydır.

Önerme 2.2.4.[6,9]: Y,Z X cisimi üzerinde lineer uzaylar ve F de- X üzerinde bir fuzzy cisimi olsun. f Y den Z ye bir lineer dönüşüm ve W, Z de F üzerinde bir fuzzy lineer uzay olsun. Bu takdirde W nin $f^{-1}(W)$ ters resmi Y de F üzerinde bir fuzzy lineer uzaydır.

İspat: $\forall\, x,y\in Y$ ve $\alpha,\mu\in X$ için

$$
\begin{aligned}
f^{-1}(W)(\alpha x+\mu y) &= W(f(\alpha x+\mu y)) = W(\alpha f(x)+\mu f(y))\\
&\geq \min\{F(\alpha)/\backslash W(f(x)), F(\mu)/\backslash W(f(y))\}\\
&= \min\{F(\alpha)/\backslash f^{-1}(W)(x),\ F(\mu)/\backslash f^{-1}(W)(y)\}
\end{aligned}
$$

elde edilir. W bir fuzzy lineer uzay olduğundan $\forall z\in Z$ için $F(1)\geq W(z)$ dır. Diğer yandan $\forall x\in Y$ için $f(x)\in Z$ $(z=f(x))$ dır. Dolayısıyla,

$$F(1)\geq W(f(x))=f^{-1}(W)(x) \quad (\ \forall x\in Y\ )$$

elde edilir. Önerme 2.2.2 den $f^{-1}(W)$ Y de F üzerinde bir fuzzy lineer uzaydır.

Önerme 2.2.5.[6,9]: Y,Z X cisimi üzerinde lineer uzaylar ve F de X in bir fuzzy cismi olmak üzere f Y den Z ye bir lineer dönüşüm olsun. Bu takdirde V Y de F fuzzy cisimi üzerinde bir fuzzy lineer uzay ise f(V) de Z de F fuzzy cisimi üzerinde bir fuzzy lineer uzaydır.

İspat: $\alpha,\mu\in X$ ve $u,v\in Z$ olsun. $f^{-1}(u)=\emptyset$ veya $f^{-1}(v)=\emptyset$ olması durumunda Önerme 2.2.2 den iddia doğrudur. $f^{-1}(u)\neq\emptyset$ ve $f^{-1}(v)\neq\emptyset$ durumunda iddianın doğru olduğunu gösterelim. Bu durumda $f^{-1}(\alpha u+\mu v)\neq\emptyset$ dır. $r\in f^{-1}(u)$, $s\in f^{-1}(v)$ ise $f(\alpha r+\mu s)=\alpha f(r)+\mu f(s)=\alpha u+\mu v$ dır. Böylece,

$$\begin{aligned}
f(V)(\alpha u+\mu v) &= \sup\{\, V(w) \mid w\in f^{-1}(\alpha u+\mu v) \,\} \\
&\geq \sup\{\, V(\alpha r+\mu s) \mid r\in f^{-1}(u),\ s\in f^{-1}(v) \,\} \\
&\geq \sup\{\min\{F(\alpha)\wedge V(r), F(\mu)\wedge V(s)\} \mid r\in f^{-1}(u), s\in f^{-1}(v)\} \\
&= \min\{F(\alpha)\wedge \sup\{V(r) \mid r\in f^{-1}(u)\}, F(\mu)\wedge \sup\{V(s) \mid s\in f^{-1}(v)\}\} \\
&= \min\{F(\alpha)\wedge f(V)(u),\ F(\mu)\wedge f(V)(v)\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer yandan,

$$\forall x\in Z \text{ için } F(1)\geq f(V)(x)$$

dir. Önerme 2.2.2 den $f(V)$ Z de F üzerinde bir fuzzy lineer uzaydır.

Bu çalışmada bundan böyle aksi belirtilmedikçe X cisim olarak reel sayılar cisimini gösterecek ve crisp cisim ($\forall\, x\in X$ için $X(x)\equiv \chi_X(x)=1$) olarak düşünülecektir. Buna göre, Tanım 2.1.1 aşağıdaki gibi verilir.

Tanım 2.2.2.[5]: E X cisimi üzerinde bir vektör uzayı, V de E de bir fuzzy altkümesi olsun. Eğer her $x,y\in E$ ve her $\alpha,\mu\in X$ için

$$V(\alpha x+\mu y) \geq V(x)\wedge V(y)$$

sağlanıyorsa V ye E de bir fuzzy altvektör uzayı denir.

Aksi belirtilmediği sürece E X cisimi üzerinde bir vektör uzayı olarak alınacaktır.

Lemma 2.2.1.[3,5,6]: V E de bir fuzzy altvektör uzayı olsun. Bu takdirde,

i) $\forall\, x\in E$ için $V(0) \geq V(x)$ dır.

ii) $\forall\, x\in E$ ve $\forall\, a\in X\setminus\{0\}$ için $V(x) = V(ax)$ dır.

iii) $V(x) > V(y)$ olan her $x,y\in E$ için $V(x+y) = V(y)$ dır.

iv) $V(x-y) = V(0)$ olan her $x,y\in E$ için $V(x) = V(y)$ dır.

İspat: i) Tanım 2.2.2 de $\alpha=1$, $\mu=-1$ ve her $x\in E$ için

$$V(0) = V(x-x) = V(1x+(-1)x) \geq V(x) \wedge V(x) = V(x)$$

elde edilir.

ii) $V(x) = V(a^{-1}ax) \geq V(ax) \geq V(x)$

$$\Longrightarrow V(ax) = V(x) \qquad (\forall\ 0\neq a\in X\ ,\ \forall\ x\in E\ )$$

olur.

iii) $x,y\in E$ için $V(x) > V(y)$ olsun.

$$V(x+y) \geq V(x) \wedge V(y) = V(y) \Longrightarrow V(x+y) \geq V(y) \qquad (1)$$

olur.

$$V(y) = V((x+y)-x) \geq V(x+y) \wedge V(x) = V(x+y) \qquad (2)$$

dır. (Çünkü, $V(x) < V(x+y)$ olsa (2) den $V(y) \geq V(x)$ olur ki bu $V(x) > V(y)$ ile çelişir.) (1) ve (2) den $V(x) > V(y)$ olan her $x,y\in E$ için $V(x+y) = V(y)$ elde edilir.

iv) Varsayım: $x,y\in E$ için $V(x) \neq V(y)$ olsun. Bu durumda ya $V(x) < V(y)$ veya $V(y) < V(x)$ dir. Genelliği bozmayacağından,

$$V(y) < V(x) \qquad (3)$$

alabiliriz. ii) de $a=-1$ alınırsa,

$$V(y) = V(-y) \qquad (4)$$

olur. (3) ve (4) den $V(x) > V(-y)$ olur.

$$V(0) = V(x-y) = V(x+(-y)) \qquad (\text{ iii) den })$$

$$= V(-y) < V(x)$$

$$\Longrightarrow V(0) < V(x)$$

olur ki bu i) ile çelişir. Dolayısıyla varsayım yanlıştır. O halde $V(x-y) = V(0)$ olan her $x,y\in E$ için,

$$V(x) = V(y)$$

olmak zorundadır.

Sonuç 2.2.1.[3]: E bir vektör uzayı ve V de E de bir fuzzy altkümesi olsun. Bu takdirde V, E de bir fuzzy altvetör uzayıdır $\Longleftrightarrow$ $\forall\alpha\in X$ ve $\forall x,y\in E$ için

i) $V(x-y) \geq V(x)\wedge V(y)$

ii) $V(\alpha x) \geq V(x)$

dir.

Lemma 2.2.2.[3]: V E nin bir fuzzy altvektör uzayı olsun. Bu takdirde, $t\in[0,1]$ ve $t\leq V(0)$ olmak üzere V_t seviye altkümesi E nin bir altvektör uzayıdır.

İspat: $V_t=\{\ x\in E \mid V(x)\geq t\ \}$ ve $V(0)\geq t$ olduğundan $0\in V_t$ dır. Dolayısıyla $V_t\neq\emptyset$ olur. $x,y\in V_t$ ve $\alpha,\mu\in X$ olsun.

$x,y\in V_t \Longrightarrow V(x),V(y)\geq t \Longrightarrow V(x)\wedge V(y)\geq t$

dır. V bir fuzzy altvektör uzayı olduğundan

$V(\alpha x+\mu y)\geq V(x)\wedge V(y)\geq t \Longrightarrow \alpha x+\mu y\in V_t$

elde edilir. Sonuç olarak, V_t E nin bir altvektör uzayıdır.

Tanım 2.2.3.[3]: Lemma 2.2.2 de verilen E nin V_t altvetör uzayına V nin seviye altvetör uzayı denir.

Teorem 2.2.1.[3]: E nin bir V fuzzy altkümesi için aşağıdaki ifadeler denktir.

i) V E nin bir fuzzy altvektör uzayıdır.

ii) $t\in$görV için V_t E nin bir altvektör uzayıdır.

İspat: i) $\Longrightarrow$ ii)

$t\in$görV olsun. $\forall\ x\in E$ için $V(x) \leq V(0)$ ve $t\in$görV için $V(x_t) = t$ olacak şekilde bir $x_t\in E$ mevcut olduğundan $t \leq V(0)$ olur. i) ve Lemma 2.2.2 den V_t E nin bir seviye altvektör uzayıdır.

ii) $\Longrightarrow$ i)

$x,y\in E$ olmak üzere

$t:=\min\{\ V(x),\ V(y)\ \}$

olarak seçersek $t\in$ görV ve $x,y\in V_t$ dır. V_t E nin altvektör uzayı olduğundan her $\alpha,\mu\in X$ için

$$\alpha x+\mu y\in V_t \quad (\text{ i) den })$$

dır. Buradan

$$V(\alpha x+\mu y) \geq t = \min\{ V(x), V(y) \} = V(x)\wedge V(y)$$

olur. Tanım 2.2.6 dan V E de bir fuzzy altvektör uzayıdır.

Teorem 2.2.2.[3]: V E nin bir fuzzy altvektör uzayı ve $t_1 < t_2$ $(t_1,t_2\in[0,1])$ olmak üzere V_{t_1}, V_{t_2} V nin iki seviye altvektör uzayı olsun. Bu takdirde ,

$$V_{t_1} = V_{t_2} \Longleftrightarrow t_1 \leq V(x) < t_2$$

koşulunu sağlayan hiçbir $x\in E$ mevcut değildir.

İspat:" $\Longrightarrow$" Varsayım; $t_1 \leq V(x_0) < t_2$ koşulunu sağlayan bir $x_0\in E$ mevcut olsun. Bu durumda $x_0\in V_{t_1}\setminus V_{t_2}$ olur. Bu ise $V_{t_1} = V_{t_2}$ olmasıyla çelişir. Dolayısıyla varsayım yanlıştır.

$$t_1 \leq V(x) < t_2$$

olacak biçimde hiçbir $x\in E$ mevcut değildir.

"$\Longleftarrow$" Varsayım; $V_{t_1} \neq V_{t_2}$ olsun.

$t_1 < t_2$ olduğundan $V_{t_2} \subset V_{t_1}$ dır. $V_{t_1} \neq V_{t_2}$ ise bir $x_0\in V_{t_1}$ vardır öyleki $x_0\notin V_{t_2}$ dır.

$$\left.\begin{array}{l} x_0\in V_{t_1} \Longrightarrow t_1 \leq V(x_0) \\ \\ x_0\notin V_{t_2} \Longrightarrow V(x_0) < t_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow t_1 \leq V(x_0) < t_2$$

olur ki bu hipotez ile çelişir. O halde varsayım yanlıştır.

$$V_{t_1} = V_{t_2}$$

olmak zorundadır.

Uyarı.2.2.1.[3]: Teorem 2.2.2, E nin bir V fuzzy altvektör uzayının seviye altvektör uzaylarının farklı olamayacağını gösterir.

$$\text{gör}V = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}\ ,\ t_0 > t_1 > \ldots > t_n$$

olması durumunda V nin seviye altvektör uzaylarının $\{V_{t_1}, V_{t_2}, \ldots, V_{t_n}\}$ ailesi,

$$V_{t_1} \subset V_{t_2} \subset \ldots \subset V_{t_n} = E \qquad (V_{t_0} = \{0\})$$

zincirine sahiptir.

Teorem 2.2.3.[3]: W E nin $(W \neq E)$ bir altvektör uzayı olsun. Bu takdirde, $t \in [0,1[$ olmak üzere ,

$$V(x) = \begin{cases} 1 & , x \in W \\ t & , x \in E \backslash W \end{cases}$$

ile tanımlanan E nin V fuzzy altkümesi E nin bir fuzzy altvektör uzayıdır.

İspat: Lemma 2.2.2 den açıktır.

Sonuç 2.2.2.[3]: S E nin boştan farklı bir altkümesi olsun. S E nin bir altvektör uzayıdır $\Longleftrightarrow$ S nin karakteristik fonksiyonu ($S := \chi_S$) E nin bir fuzzy altvektör uzayıdır.

İspat: Teorem 2.2.2 ve 2.2.3 den açıktır.

Teorem 2.2.4.[3]: $U_0 \subset U_1 \subset \ldots \subset U_n = E$, E nin altuzaylarının sonlu bir zinciri olsun. Bu takdirde E nin bir V fuzzy altvektör uzayı vardır öylki V nin seviye altvektör uzaylarının bir zinciri tamı tamına ;

$$U_0 \subset U_1 \subset \ldots \subset U_n = E$$

dir.

İspat: $t_0, t_1, \ldots, t_n \in [0,1]$, $1 = t_0 > t_1 > \ldots > t_n$ seçilsin.

$i := \min\{j \mid x \in U_j\}$ için $V(x) := t_i$

olsun. Bu durumda ,$0\leq i\leq n$ olmak üzere $V_{t_i} = U_i$ olduğu gösterilirse ispat biter.

$\forall\ x\in V_{t_i}$ için $V(x) \geq t_i$ dır.

Varsayım; bir $x\in V_{t_i}$ için $x\notin U_i$ olsun. Bu durumda $x\in U_k$ olacak şekilde bir k $(i<k\leq n)$ mevcuttur. $i<k\leq n$ olduğundan $t_i>t_k$ olur. Buradan $V(x)<t_i$ olur ki bu $x\in V_{t_i}$ olmasıyla çelişir. O halde $x\in V_{t_i}$ için $x\in U_i$ olmak zorundadır. Dolayısıyla

$$V_{t_i} \subset U_i \qquad (1)$$

olur. Diğer yandan her $x\in U_i$ için

$$V(x)\geq t_i \Longrightarrow x\in V_{t_i} \Longrightarrow U_i\subset V_{t_i} \qquad (2)$$

olur. (1) ve (2) den $U_i = V_{t_i}$ elde edilir.

Teorem 2.2.5.[3]: V_1 ve V_2 E nin herhangi iki fuzzy altvektör uzayı öyleki $\mathrm{Kard}(\mathrm{gör}V_i)<\infty$ $(i=1,2)$ olsun. Bu takdirde, $V_1=V_2$ dır $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{gör}V_1=\mathrm{gör}V_2$ ve V_1 , V_2 nin seviye altvektör uzaylarının aileleri aynıdır.

İspat: "$\Longrightarrow$" $V_1=V_2$ olsun.

$$\begin{aligned} y\in \mathrm{gör}V_1 &\Longleftrightarrow V_1(x)=y \quad (\exists\ x\in E)\\ &\Longleftrightarrow V_2(x)=V_1(x)=y \quad (V_1=V_2 \text{ old.})\\ &\Longleftrightarrow y\in \mathrm{gör}V_2 \end{aligned}$$

Buradan $\mathrm{gör}V_1=\mathrm{gör}V_2$ elde edilir.

$t\in[0,1]$ ve $t\leq V_1(0)=V_2(0)$ olsun.

$$\left.\begin{aligned} V_{1_t} &=\{\ x\in E \mid V_1(x)\geq t\ \}\\ \\ V_{2_t} &=\{\ x\in E \mid V_2(x)\geq t\ \} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow V_{1_t} = V_{2_t} \quad (\ V_1 = V_2 \text{ old.}) \quad (*)$$

olur. V_1 in seviye altvektör uzaylarının ailesi,

$$\mathcal{A}:=\{V_{1_t} \mid t\in[0,1]\ ,\ t\leq V_1(0)\ \}$$

ve V_2 nin seviye altvektör uzaylarının ailesi,

$\ddot{A}:=\{V_{2} \mid t\in[0,1]\ ,\ t\leq V_{2}(0)\ \}$

olsun. Bu takdirde, her $V_{1_t}\in Æ$ için $V_{1_t}=V_{2_t}$ ((*) dan) olduğundan $V_{1_t}\in\ddot{A}$ dır. Buradan $Æ\subset\ddot{A}$ olur. Benzer şekilde, $\ddot{A}\subset Æ$ olduğu gösterilir. Dolayısıyla $Æ=\ddot{A}$ dir.

"$\Longleftarrow$" $\text{Kard}(\text{gör}V_i)=n<\infty \quad (i=1,2)$

$\text{gör}V_1=\text{gör}V_2=\{t_0,\ t_1,\ldots,t_{n-1}\}\ ,\ t_0>t_1>\ldots>t_{n-1}$

olsun. Hipotezden,

$$V_{1_{t_0}}=V_{2_{t_0}},\ldots,V_{1_{t_{n-1}}}=V_{2_{t_{n-1}}} \text{ ve } V_{1_{t_0}}=V_{2_{t_0}}\subset\ldots\subset V_{1_{t_{n-1}}}=V_{2_{t_{n-1}}}=E$$

olur. $x\in E$ olmak üzere,

$$V_1(x)=t_i\ ,\ V_2(x)=t_j\ ,\ 0\leq i,j\leq n-1$$

olsun.

$$\begin{aligned}
V_1(x)=t_i &\Longrightarrow x\in V_{1_{t_i}} \Longrightarrow x\in V_{2_{t_i}} && (\ V_{1_{t_i}}=V_{2_{t_i}} \text{ old.})\\
&\Longrightarrow V_2(x)\geq t_i\\
&\Longrightarrow t_j\geq t_i\\
&\Longrightarrow i\geq j && (1)\\
V_2(x)=t_j &\Longrightarrow x\in V_2 \Longrightarrow x\in V_1 && (\ V_{1_{t_j}}=V_{2_{t_j}} \text{ old. })\\
&\Longrightarrow V_1(x)\geq t_j\\
&\Longrightarrow t_i\geq t_j\\
&\Longrightarrow j\geq i && (2)
\end{aligned}$$

olur. (1) ve (2) den $i=j$ (yani $t_i=t_j$ olur.) olur. Dolayısıyla her $x\in E$ için,

$$V_1(x)=V_2(x)$$

dır. Buradan $V_1=V_2$ elde edilir.

Teorem 2.2.6 ve 2.2.7 de E_1 , E_2 iki vektör uzayı, $f:E_1\longrightarrow E_2$ örten bir homomorfizim olarak alınacaktır.

Teorem 2.2.6.[3]: V_1 , V_2 sırasıyla E_1 ve E_2 de fuzzy altvektör uzaylar olmak üzere,

$\text{gör}V_1=\{t_0,\ t_1,\ldots,t_n\}\ ,\ t_0>t_1>\ldots>t_n$

ve

$$\text{gör}V_2 = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \ , \ \alpha_0 > \alpha_1 > \ldots > \alpha_m$$

olsun. Bu takdirde ,

i) $\text{görf}(V_1) \subset \text{gör}V_1$ ve $f(V_1)$ in seviye altvektör uzaylarının bir zinciri,

$$f(V_{1_{t_1}}) \subset f(V_{1_{t_2}}) \subset \ldots \subset f(V_{1_{t_n}}) = E_2$$

dır.

ii) $\text{görf}^{-1}(V_2) = \text{gör}V_2$ ve $f^{-1}(V_2)$ nin seviye altvektör uzayları-nın zinciri,

$$f^{-1}(V_{2_{\alpha_1}}) \subset f^{-1}(V_{2_{\alpha_2}}) \subset \ldots \subset f^{-1}(V_{2_{\alpha_m}}) = E_1$$

dır.

İspat: i) $f: E_1 \longrightarrow E_2$

$\forall\, y \in E_2$ için $(f(V_1))(y) = \sup\{\, V_1(x) \mid y = f(x) \,\}$

olduğundan

$$\text{görf}(V_1) \subset \text{gör}V_1$$

olur. Aynı zamanda $\forall\, i=0,1,\ldots,n$ içinde

$$f(V_{1_{t_i}}) = (f(V_1))_{t_i}$$

dır. Çünkü,

$$\begin{aligned} y \in f(V_{1_{t_i}}) &\Longleftrightarrow \exists\, x \in f^{-1}(y) \text{ öyleki } V_1(x) \geq t_i \\ &\Longleftrightarrow \sup\{V_1(z) \mid z \in f^{-1}(y)\} \geq t_i \\ &\Longleftrightarrow (f(V_1))(y) \geq t_i \\ &\Longleftrightarrow y \in (f(V_1))_{t_i} \end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla $f(V_1)$ nın seviye altvektör uzaylarının zinciri,

$$f(V_{1_{t_1}}) \subset f(V_{1_{t_2}}) \subset \ldots \subset f(V_{1_{t_n}}) = E_2$$

olur.

ii) Açık olarak $\forall\, x \in E_1$ için

$$(f^{-1}(V_2))(x) = V_2(f(x)) \Longrightarrow \text{görf}^{-1}(V_2) = \text{gör}V_2$$

dır. Ayni zamanda, $\forall\, i=0,1,\ldots,n$ içinde

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(V_{2_{\alpha_i}}) \Longleftrightarrow f(x) \in V_{2_{\alpha_i}} &\Longleftrightarrow V_2(f(x)) \geq \alpha_i \\ &\Longleftrightarrow (f^{-1}(V_2))(x) \geq \alpha_i \\ &\Longleftrightarrow x \in (f^{-1}(V_2))_{\alpha_i} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \overset{-1}{f}(V_{2_{\alpha_i}}) = (f^{-1}(V_2))_{\alpha_i}$$

dır. Dolayısıyla $f^{-1}(V_2)$ nin seviye altvektör uzaylarının zinciri

$$f^{-1}(V_{2_{\alpha_1}}) \subset f^{-1}(V_{2_{\alpha_2}}) \subset \ldots \subset f^{-1}(V_{2_{\alpha_m}}) = E_1$$

olur.

Teorem 2.2.7.[3]: $V \longrightarrow f(V)$ dönüşümü E_1 in tüm f-değişmez fuzzy altvektör uzaylarının kümesi ve E_2 nin tüm fuzzy altvektör uzaylarının kümesi arasında bire-bir bir eşleme tanımlar.

İspat: önerme 2.2.4; 2.2.5 ve aşağıda verilen sonuçlardan ispat açıktır.

i) V E_1 in f-değışmez fuzzy altvektör uzayı olduğundan

$$f^{-1}(f(V)) = V$$

dır.

ii) V^* E_2 nin bir fuzzy altvektör uzayı ise

$$f(f^{-1}(V^*)) = V^*$$

dır.

2.3. FUZZY ALTVEKTÖR UZAYLARIN BİRLEŞİMİ

Bilindiği gibi vektör uzaylarında, eğer W_1, W_2 E nin herhangi iki altvektör uzayı olmak üzere,

$W_1 \cup W_2$ E nin bir altvektör uzayıdır $\Longleftrightarrow$ ya $W_1 \subset W_2$ veya $W_2 \subset W_1$ dır.

Bu bölümde aşağıda verilen probleme çözüm bulmaya çalışacağiz.

Problem : Biri diğerinde içerilmeyen iki fuzzy altvektör uzayın birleşimi yine bir fuzzy altvektör uzayı oluşturabilir mi?

Birleşimleri bir fuzzy altvektör uzayı olan ancak biri diğerinde içerilmeyen fuzzy altvektör uzayların mevcut olduğu gösterilebilir. Ayrıca bu, yukarıda verilen problemin elde edilen fuzzy altvektör uzayının resim kümesine bağlı olduğunu gösterir.

Herhangi iki fuzzy altvektör uzayın birleşiminin bir fuzzy altvektör uzayı olması gerekmez.

Örnek 2.3.1.[3]: $E := R^2$, $E_1 := \{(\alpha,0) \mid \alpha \in R\}$ ve $E_2 := \{(0,\alpha) \mid \alpha \in R\}$ olsun. $t_0 > t_1 > t_2 > t_3$ olacak biçimde $t_i \in [0,1], (0 \leq i \leq 3)$ sayıları seçilsin.

$$V_1(x) = \begin{cases} t_0 , & x \in E_1 \\ t_3 , & x \in E \setminus E_1 \end{cases} \qquad V_2(x) = \begin{cases} t_1 , & x \in E_2 \\ t_2 , & x \in E \setminus E_2 \end{cases}$$

ile V_1 ve V_2 fuzzy altkümeleri tanımlansın. Teorem 2.2.1 den V_1 ve V_2 E nin fuzzy altvektör uzaylarıdır.

$$(V_1 U V_2)(x) = \begin{cases} t_0 , & x \in E_1 \\ t_1 , & x \in E_2 \setminus \{(0,0)\} \\ t_2 , & x \in E \setminus E_1 U E_2 \end{cases}$$

ile tanımlanan $V_1 U V_2$ E nin bir fuzzy altvektör uzayı değildır. Çünkü,

$$(V_1 U V_2)_{t_1} = \{ x \in E \mid (V_1 U V_2)(x) \geq t_1 \}$$

kümesi E nin bir altvektör uzayı değildır. Teorem 2.2.1 den $V_1 U V_2$ E nin bir fuzzy altvektör uzayı olamaz.

Teorem 2.3.1.[3]: V E nin bir fuzzy altvektör uzayı öyleki $\alpha \in [0,1]$ olmak üzere gör$V = \{\alpha\}$ olsun. Eğer E nin V_1 ve V_2 fuzzy altvektör uzayları için $V := V_1 U V_2$ ise ya $V_1 \subset V_2$ veya $V_2 \subset V_1$ dır.

İspat: gör$V = \{\alpha\}$ olduğundan her $x \in E$ için $V(x) = \alpha$ dır.

$$\alpha = V(x) = (V_1 U V_2)(x) = \max\{ V_1(x) , V_2(x) \} \quad (\forall x \in E)$$

olduğundan ya $\alpha = V_1(x)$ veya $\alpha = V_2(x)$ dır.

$$\alpha = V_1(x) \Longrightarrow V_2(x) \leq \alpha = V_1(x) \Longrightarrow V_2 \subset V_1$$

veya

$$\alpha = V_2(x) \Longrightarrow V_1(x) \le \alpha = V_2(x) \Longrightarrow V_1 \subset V_2$$

olur.

Teorem 2.3.2.[3]: V E nin bir fuzzy altvektör uzayı öyleki görV = {0,t} (t∈ 0,1]) olsun. V_1 ve V_2 E nin iki fuzzy altvektör uzayı olmak üzere $V = V_1 U V_2$ ise ya $V_1 \subset V_2$ veya $V_2 \subset V_1$ dır.

İspat: Varsayım; $V_1(x) > V_2(x)$ ve $V_2(y) > V_1(y)$ olacak şekilde x,y∈E vektörleri mevcut olsun. Bu taktirde ,

$$\left.\begin{array}{l} V(x) = (V_1 U V_2)(x) = V_1(x) > V_2(x) \ge 0 \\ \\ V(y) = (V_1 U V_2)(y) = V_2(y) > V_1(y) \ge 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow V(x) = V(y) = t$$

$$\Longrightarrow V_1(x) = V_2(x) = t \Longrightarrow V_2(y) > V_2(x) \quad \text{ve} \quad V_1(x) > V_1(y)$$

olur. Buradan , (Lemma 2.2.1 iii) den)

$$\left.\begin{array}{l} V_1(x+y) = V_1(y) < t \\ \\ V_2(x+y) = V_2(x) < t \end{array}\right\} \Longrightarrow V(x+y) = (V_1 U V_2)(x+y) = V_1(x+y) v V_2(x+y)$$

olur ki bu

$$V(x+y) \ge V(x) \wedge V(y) = t$$

olmasıyla çelişir. Dolayısıyla varsayım yanlıştır. O halde ∀ x∈E için,

$$V_1(x) \le V_2(x) \quad \text{veya} \quad V_2(x) \le V_1(x) \Longrightarrow V_1 \subset V_2 \text{ veya } V_2 \subset V_1$$

elde edilir.

Uyarı 2.3.1. Teorem 2.3.2 de

i) görV = $\{t_1, t_2\}$ için $t_1 \neq 0$ ve $t_2 \neq 0$ durumunda iddia sağlanmaz.

ii) $3 \le$ Kard(görV) = |görV| $< \infty$ olmsı durumunda iddia doğru değildir.

Örnek 2.3.2. E ve t_i $(0 \le i \le 3)$ örnek 2.3.1 de verildiği gibi tanımlansın. E nin V_1 ve V_2 fuzzy altkümeleri;

$$V_1(x) = \begin{cases} t_0 & , x=(0,0) \\ t_3 & , x\in E\setminus\{(0,0)\} \end{cases} \qquad V_2(x) = \begin{cases} t_1 & , x=(0,0) \\ t_2 & , x\in E\setminus\{(0,0)\} \end{cases}$$

$$V(x) = \begin{cases} t_0 & , x=(0,0) \\ t_2 & , x\in E\setminus\{(0,0)\} \end{cases}$$

ile tanımlansın. V nin tanımından $\text{gör}V = \{ t_0 , t_2 \}$ dır. Diğer yandan V , V_1 ve V_2 birer fuzzy altvektör uzayıdırlar. Bu fuzzy altvektör uzayların tanımlarından,

$$V = V_1 \cup V_2$$

olduğu açıktır. Ancak,

$$V_1 \not\subset V_2 \quad \text{ve} \quad V_2 \not\subset V_1$$

dır.

Bu örnek bize, biri diğeri tarafından içerilmeyen iki fuzzy altvektör uzayının birleşimininde bir fuzzy altvektör uzayı olabileceğini gösterir.

Örnek 2.3.3. $2 \le n < \infty$ $(n\in N)$ olmak üzere,

$\text{gör}V = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ ve $t_0 > t_1 > \ldots > t_n$

olsun. Bu takdirde,

$$1 \ge t_0 \ge s_1 > t_1 > s_2 > t_2 > \ldots > t_n$$

olacak şekilde $s_1, s_2 \in [0,1]$ sayıları seçilsin. E nin V_1 ve V_2 fuzzy altkümeleri,

$$V_1(x) := \begin{cases} t_0 & , x\in V_{t_0} \\ s_2 & , x\in V_{t_1}\setminus V_{t_0} \\ V(x) & , x\in E\setminus(V_{t_0}\cup(V_{t_1}\setminus V_{t_0})) \end{cases}$$

ve

$$V_2(x) := \begin{cases} s_1 & , x\in V_{t_0} \\ t_1 & , x\in V_{t_1}\setminus V_{t_0} \\ V(x) & , x\in E\setminus(V_{t_0}\cup(V_{t_1}\setminus V_{t_0})) \end{cases}$$

ile tanımlansınlar. Açık olarak V_1 , V_2 ve $V_1 U V_2$, E nin fuzzy altvektör uzaylarıdır. Diğer yandan $V = V_1 U V_2$ olmasına rağmen V_1, V_2 nin tanımından $V_1 \not\subset V_2$ ve $V_2 \not\subset V_1$ dır.

2.4. BİR FUZZY ALTKÜME İLE OLUŞTURULAN FUZZY ALTUZAY

Bu bölümde E nin bir A fuzzy altkümesi tarafından oluşturulan $\bar{A}$ fuzzy altvektör uzayının inşaasını vereceğiz. Kard(görA) Kard(gör$\bar{A}$) den daha büyük olması mümkündür. Bu durum örnek 2.4.1 de gösterildi.

Her $S \subset E$ için E de S tarafından üretilen fuzzy altvektör uzayı $\langle S \rangle$ ile gösterilecektir.

Teorem 2.4.1.[3]: A E de bir fuzzy altkümesi olmak üzere Kard(görA) $< \infty$ olsun. V_i ($0 \le i \le k$, $k \le$ Kard(görA), $k \in N$, $V_k = E$ olacak şekilde seç.) altvektör uzayları,

$$V_0 := \langle \{x \in E \mid A(x) = \sup\{A(z) \mid z \in E\}\} \rangle$$

ve

$$V_i := \langle V_{i-1}, \{ x \in E \mid A(x) = \sup\{A(z) \mid z \in E \setminus V_{i-1}\} \} \rangle \quad 0 \le i \le k$$

ile tanımlansın. Dolayısıyla E nin

$$\bar{A}(x) = \begin{cases} \sup\{A(z) \mid z \in E\} & , x \in \hat{V}_0 = V_0 \\ \\ \sup\{A(z) \mid z \in E \setminus V_{i-1}\} & , x \in \hat{V}_i = V_i \setminus V_{i-1} \ , \ 1 \le i \le k \end{cases}$$

ile tanımlanan $\bar{A}$ fuzzy altkümesi E nin A tarafından üretilen fuzzy altvektör uzayıdır.

İspat: Teorem 2.2.1 den $\bar{A}$ E de bir fuzzy altvektör uzayıdır.

$$S_0 = \{ x \in E \mid A(x) = \sup\{A(z) \mid z \in E\} \}$$

olarak tanımlanırsa, $V_0 = \langle S_0 \rangle$ ve her $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ için

$$S_i = \{ x \in E \mid A(x) = \sup\{A(z) \mid z \in E \setminus V_{i-1}\} \}$$

olmak üzere,

$$V_i = < V_{i-1}, S_i >$$

dır. B, A yı içeren E nin bir fuzzy altvektör uzayı olsun. İspat için her $x \in V_i$ $(i=0,1,2,\ldots,k)$ için,

$$B(x) \geq \bar{A}(x) \geq A(x)$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

$x \in \hat{V}_0$ olsun. Bu takdirde $\exists\ \alpha_{0,1}, \alpha_{0,2}, \ldots, \alpha_{0,m} \in X$ ve $s_{0,1}, s_{0,2}, \ldots, s_{0,m} \in S_0$ öyleki $x = \alpha_{0,1}s_{0,1} + \alpha_{0,2}s_{0,2} + \ldots + \alpha_{0,m}s_{0,m}$ dir. Buradan,

$$\begin{aligned} B(x) &\geq \min\{B(s_{0,1}), B(s_{0,2}), \ldots, B(s_{0,m})\}, \text{(B fuzzy altvk.uz.)} \\ &= \sup\{A(z) \mid z \in E\} \geq A(x) \end{aligned}$$

olur. Böylece her $x \in \hat{V}_0$ için,

$$B(x) \geq \bar{A}(x) \geq A(x)$$

olur. $x \in \hat{V}_i$, $(1 \leq i \leq k)$ olsun. Bu takdirde, $\exists\ \alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \ldots, \alpha_{i,n} \in X$ ve $s_{i,1}, s_{i,2}, \ldots, s_{i,n} \in S_i$ öyleki $x = \alpha_{i,1}s_{i,1} + \alpha_{i,2}s_{i,2} + \ldots + \alpha_{i,n}s_{i,n}$ dir. Buradan,

$$\begin{aligned} B(x) &\geq \min\{B(s_{i,1}), \ldots, B(s_{i,n})\}, \text{(B fuzzy altvk. uz.)} \\ &= \sup\{A(z) \mid z \in E \backslash V_{i-1}\} \\ &\geq \sup\{A(z) \mid z \in \hat{V}_i\} \\ &\geq A(x) \qquad (\hat{V}_i \subset E \backslash V_{i-1} \text{ ve } x \in \hat{V}_i \text{ old.}) \end{aligned}$$

olur. Böylece her $x \in \hat{V}_i$ için,

$$B(x) \geq \bar{A}(x) \geq A(x)$$

elde edilir ve ispat biter.

Örnek 2.4.1.[3]: X üzerinde x in derecesi n $(n \in N)$ den küçük olan polinomların oluşturduğu vektör uzayı E olsun.

$$\{1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}\}$$

X üzerinde E nin bir tabanıdır. $t_0, t_1, t_2 \in [0,1]$ ve $t_0 > t_1 > t_2$ olmak üzere E nin A fuzzy altkümesi,

$$A(v) = \begin{cases} t_0, & v \in \{1, x\} \\ t_1, & v \in \{x^2, \ldots, x^{n-1}\} \\ t_2, & v \in E \backslash \{1, x, \ldots, x^{n-1}\} \end{cases}$$

ile tanımlansın.

$$V_0 = <\{1,x\}> \quad \text{ve} \quad V_1 = < V_0 \; , \; \{x^2,\ldots,x^{n-1}\} > = E$$

A nın tanımından,

$$\bar{A}(v) = \begin{cases} t_0 \; , \; v\in\hat{V}_0 = V_0 \\ \\ t_1 \; , \; v\in\hat{V}_1 = E\setminus V_0 \end{cases}$$

elde ederiz.

BÖLÜM III

3.1. FUZZY LİNEER BAĞIMSIZLIK

Tanım 3.1.1.[5]: V E nin bir fuzzy altvektör uzayı olsun. Bu takdirde vektörlerin sonlu bir $\{ x_1, x_2, \ldots, x_n \}$ $(n \in N)$ kümesine V de fuzzy lineer bağımsızdır denir $\Longleftrightarrow$ $\{ x_1, x_2, \ldots, x_n \}$ kümesi E de lineer bağımsız ve her $\{ a_1, a_2, \ldots, a_n \} \subset X$ için,

$$V\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\Big) = \bigwedge_{i=1}^{n} V(a_i x_i)$$

dır.

Vektörlerin bir kümesi, V de fuzzy lineer bağımsızdır: $\Longleftrightarrow$ Her sonlu altkümesi V de fuzzy lineer bağımsızdır.

Uyarı 3.1.1. Bir vektör uzayında lineer bağımsız her kümenin fuzzy lineer bağımsız olması gerekmez.

Örnek 3.1.1. $E = R^2$ ve V de E de bir fuzzy altvektör uzayı olsun.

$$V(v) = \begin{cases} 1 & , v = (0,0) \\ 1/2 & , v \in \{0\} x R \setminus \{0\} \\ 1/4 & , v \in R^2 \setminus \{0\} x R \end{cases}$$

ile V fuzzy altkümesi tanımlansın. Teorem 2.2.1 den V E nin bir fuzzy altvektör uzayıdır. $x=(1,0)$ ve $y=(-1,1)$ vektörleri E de lineer bağımsızdır. Ancak x ve y vektörleri V de fuzzy lineer bağımsız değildir. Gerçekten, $a_1 = a_2 = 1$ olmak üzere,

$a_1 x + a_2 y = (1,0) + (-1,1) = (0,1)$ ve $V(a_1 x + a_2 y) = V((0,1)) = 1/2$ (1)

dır. Diğer yandan,

$$\left.\begin{array}{l} V(a_1x)=V(x)=1/4 \\ \\ V(a_2y)=V(y)=1/4 \end{array}\right\} \Longrightarrow V(a_1x)\wedge V(a_2y)=1/4 \qquad (2)$$

dır. (1) ve (2) den

$$V(a_1x + a_2y) > V(x)\wedge V(y)$$

elde edilir.

Bu örnek ayni zamanda, $V(x) = V(y)$ durumunda,

$$V(x + y) > V(x) = V(y)$$

olduğunu gösterir.

Önerme 3.1.1.[5]: V E de bir fuzzy altvektör uzayı olsun. Bu takdirde V -üyelik dereceleri farklı olan vektörlerin oluşturduğu

$$\{ x_1, x_2, \ldots, x_n \} \subset E\setminus\{0\} \quad (n\in N)$$

altkümesi lineer ve fuzzy lineer bağımsızdır.

İspat: n - üzerinden indüksiyonla ispat yapılacaktır.

$n = 1$ için sıfırdan farklı bir tek vektör olacağından iddia doğrudur.

$n = 2$ için $\{ x_1, x_2 \} \subset E\setminus\{0\}$, $\{ a_1, a_2 \} \subset X$ olmak üzere,

$$a_1x_1 + a_2x_2 = 0 \qquad (*)$$

olsun.

$a_1 = 0$ ise (*) dan $a_2x_2 = 0 \Longrightarrow a_2 = 0$ ($x_2 \neq 0$)

dır. Benzer şekilde $a_2 = 0$ içinde $a_1 = 0$ elde edilir.

$$a_1 \neq 0 \quad \text{ve} \quad a_2 \neq 0$$

olsun. Bu takdirde, (*) dan $x_1 = (-a_2/a_1)x_2$ olur. Buradan,

$$V(x_1) = V((-a_2/a_1)x_2) = V(x_2) \qquad \text{(Lemma 2.2.1-ii))}$$

olur ki bu $\{ x_1, x_2 \}$ kümesinin seçilişi ile çelişir. O halde, (*) koşulu $a_1 = a_2 = 0$ durumunda sağlanır. Dolayısıyla $\{x_1, x_2\}$ kümesi lineer bağımsızdır.

Şimdi de $\{ x_1, x_2 \} \subset E$ altkümesinin V de fuzzy lineer bağımsız olduğunu gösterelim.

$\{ a_1, a_2 \} \subset X$ kümesi verilsin. $a_1 = 0$ olması durumunda,

$$V(a_1x_1 + a_2x_2) = V(a_2x_2) = V(0) \wedge V(a_2x_2) = V(a_1x_1) \wedge V(a_2x_2)$$

olur. Benzer şekilde $a_2 = 0$ durumu için yapılır. $a_1 = a_2 = 0$ olması durumunda iddia açıktır.

$a_1 \neq 0$ ve $a_2 \neq 0$ olsun. Bu takdirde, Lemma 2.2.1 -ii) den

$$V(a_1x_1) = V(x_1) \quad \text{ve} \quad V(a_2x_2) = V(x_2) \qquad (**)$$

dir. $V(x_1) \neq V(x_2)$ olduğundan $V(x_1) > V(x_2)$ alabiliriz. Böylece (**) dan $V(a_1x_1) > V(a_2x_2)$ olur. Lemman 2.2.1 - iii) den

$$V(a_1x_1 + a_2x_2) = V(a_2x_2) = V(a_1x_1) \wedge V(a_2x_2)$$

elde edilir. Dolayısıyla $\{ x_1, x_2 \}$ fuzzy lineer bağımsızdır.

Kabul edelim ki iddia, n için doğru olsun. Yani, V - üyelik dereceleri farklı olan vektörlerden oluşan,

$$\{ x_1, x_2, \dots, x_n \} \subset E \setminus \{0\}$$

altkümesi lineer ve fuzzy lineer bağımsız olsun.

İddianın n+1 için doğru olduğunu gösterelim.

$$\{ x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1} \} \subset E \setminus \{0\}$$

V - üyelik dereceleri farklı olan vektörlerin bir kümesi olsun. İndüksiyon prensibinden,

$$\{ x_1, x_2, \dots, x_n \}$$

kümesi lineer ve fuzzy lineer bağımsızdır.

Varsayım;

$$\{ x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1} \}$$

kümesi lineer bağımsız olmasın. Bu takdirde, $\exists\, S \subset \{1,2,\dots,n\}$ öyleki

$$x_{n+1} = \sum_{i \in S} a_ix_i \qquad (\forall\, 0 \neq a_i \in X ,\ i \in S)$$

olur. Buradan,

$$V(x_{n+1}) = V(\sum_{i \in S} a_ix_i) = \bigwedge_{i \in S} V(a_ix_i) = \bigwedge_{i \in S} V(x_i)$$

$$\Longrightarrow V(x_{n+1}) \in \{ V(x_1), V(x_2), \dots, V(x_n) \}$$

olur ki bu,

$\{ x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1} \}$

kümesinin farklı V - üyelik dereceli vektörlerden oluşmasıyla çelişir. Dolayısıyla verilen küme, lineer bağımsız, Lemma 2.2.1-ii),iii) ve Tanım 3.1.1 den de fuzzy lineer bağımsızdır.

Uyarı 3.1.2.[5]: V E de bir fuzzy altvektör uzayı ve boyE = n olsun. Bu takdirde, $Kard(V(E)) = |V(E)| \leq n+1$ dır.

3.2. FUZZY TABANI

Tanım 3.2.1.[5]: V E de bir fuzzy altvektör uzayı olmak üzere, V nin bir fuzzy tabanı E için fuzzy lineer bağımsız bir tabandır.

Teorem 3.2.1.[5]: E bir vektör uzayı ve $B = \{v_\alpha\}_{\alpha \in A}$ E nin bir tabanı olsun. $\mu_0 \in]0,1]$ sabit ve her $\alpha \in A$ için $\mu_0 \geq \mu_\alpha$ olacak şekilde sabitlerin bir $\{\mu_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset]0,1]$ kümesi verilsin.

$0 \neq z \in E$ için $0 \neq a_i \in X$ olmak üzere,

$$z = \sum_{i=1}^{n} a_i v_{\alpha_i}$$

olacak biçimde tektürlü yazılır.

$$V(z) := \bigwedge_{i=1}^{n} V(v_{\alpha_i}) = \bigwedge_{i=1}^{n} \mu_{\alpha_i} \quad \text{ve} \quad V(0) := \mu_0$$

ile $V : E \longrightarrow [0,1]$ tanımlansın. V, her $z \in E$ için tanımlı ve iyi tnımlıdır. Bu durumda V, B fuzzy tabanlı bir fuzzy altvektör uzayıdır.

İspat: $x, y \in E \setminus \{0\}$ olsun. CUD_x, CUD_y sonlu ve boştan farklı kümeler olmak üzere, x ve y

$$x = \sum_{i \in CUD_x} x_i v_{\alpha_i} \qquad (\forall\, i \in CUD_x \text{ için } x_i \in X \setminus \{0\})$$

$$y = \sum_{j \in CUD_y} y_j v_{\alpha_j} \qquad (\forall\, j \in CUD_y \text{ için } y_j \in X \setminus \{0\})$$

olcak şekilde tek türlü yazılır. Burada $C \cap D_x = \emptyset$, $C \cap D_y = \emptyset$ ve $D_x \cap D_y = \emptyset$ dır. $a, b \in X$ ve $a, b \neq 0$ için $ax + by \neq 0$ olsun.

$$Z := \{ i \in C \mid ax_i + by_i = 0 \} \quad \text{ve} \quad N := C \setminus Z$$

alınsın. C, D_x, D_y ve N kümelerinden enaz birinin boş olması durumunda ispat açıktır.

$$V(ax + by) = V\Big(\sum_{i\in C}(ax_i + by_i)v_{\alpha_i} + \sum_{i\in D_x}(ax_i)v_{\alpha_i} + \sum_{i\in D_y}(by_i)v_{\alpha_i}\Big)$$
$$= V\Big(\sum_{i\in N}(ax_i + by_i)v_{\alpha_i} + \sum_{i\in D_x}(ax_i)v_{\alpha_i} + \sum_{i\in D_y}(by_i)v_{\alpha}\Big)$$

lineer toplamdaki tüm katsayılar sıfırdan farklıdır. V nin tanımından ,

$$V(ax + by) = \Big(\bigwedge_{i\in N} V(v_{\alpha_i})\Big) \wedge \Big(\bigwedge_{i\in D_x} V(v_{\alpha_i})\Big) \wedge \Big(\bigwedge_{i\in D_y} V(v_{\alpha_i})\Big)$$
$$= \Big(\bigwedge_{i\in N} \mu_{\alpha_i}\Big) \wedge \Big(\bigwedge_{i\in D_x} \mu_{\alpha_i}\Big) \wedge \Big(\bigwedge_{i\in D_y} \mu_{\alpha_i}\Big)$$
$$= \bigwedge_{i\in N\cup D_x\cup D_y} \mu_{\alpha_i} \geq \bigwedge_{i\in C\cup D_x\cup D_y} \mu_{\alpha_i} = \Big(\bigwedge_{i\in C\cup D_x} \mu_{\alpha_i}\Big) \wedge \Big(\bigwedge_{i\in C\cup D_y} \mu_{\alpha_i}\Big)$$

olur. Dolayısıyla $a,b \neq 0$ ve $ax + bx \neq 0$ olması durumunda,

$$V(ax + by) \geq V(x) \wedge V(y)$$

olur. Diğer yandan $ax + by = 0$ ise

$$V(0) = \mu_0 \geq \sup V(B) \geq V(x) \wedge V(y)$$

dır. Buradan,

$$V(ax + by) \geq V(x) \wedge V(y)$$

olur. $a = 0$ veya $b = 0$ olsun. Genelliği bozmayacağından $a = 0$ alabiliriz. Bu takdirde,

$$V(0x + by) = V(by) \geq V(x) \wedge V(by) \geq V(x) \wedge V(y)$$

$$\Longrightarrow V(0x + by) \geq V(x) \wedge V(y)$$

olur. Dolayısıyla V E de B fuzzy tabanlı bir fuzzy altvektör uzayıdır.

Uyarı 3.2.1. Her fuzzy altvektör uzayın bir fuzzy tabanına sahip olup olmadığı bilinmemekle birlikte fuzzy tabanı olmayan bir fuzzy altvektör uzayı örneğide bulunamamıştır. Ancak basit bir ön koşul koyarak, bu koşul altında her fuzzy altvektör uzayın bir fuzzy tabanına sahip olacağını göstereceğiz.

Lemma 3.2.1.[5]: V E de bir fuzzy altvektör uzayı öyleki $görV = V(E)$ üstten iyi sıralı ve E^* E nin bir öz altvektör uzayı olsun. Bu takdirde, $\exists\ w \in E \setminus E^*$ öyleki her $v \in E^*$ için,

$$V(w + v) = V(w) \wedge V(v)$$

dir.

İspat: V(E) üstten iyi sıralı ve $V(E \setminus E^*)$ V(E) olduğundan $I\ w \in E \setminus E^*$ öyleki $V(w) = \sup[V(E \setminus E^*)]$ dir.

$v \in E^*$ olsun. Eğer $V(v) \neq V(w)$ ise Lemma 2.2.1-iii) den

$$V(w + v) = V(w) \wedge V(v)$$

dir. Eğer $V(v) = V(w)$ ise $V(w + v) \geq V(w) \wedge V(v)$ dir. Diğer yandan, $w + v \in E \setminus E^*$ ve $V(w) = \sup[V(E \setminus E^*)]$ olduğundan,

$$V(w + v) \leq V(w) = V(v)$$

olur. Böylece,

$$V(w + v) = V(w) \wedge V(v)$$

elde edilir.

Lemma 3.2.2.[5]: V E de bir fuzzy altvektör uzayı, V(E) üstten iyi sıralı ve E^*, E nin bir öz altvektör uzayı olmak üzere B^* $V^* := V|_{E^*}$ için bir fuzzy tabanı olsun. Bu takdirde $\exists\ w \in E \setminus E^*$ öyleki $B^+ = B^* \cup \{w\}$, $V^+ := V|_W$ ($W = \langle B^+ \rangle$) için bir fuzzy tabamdır.

İspat: V(E) üstten iyi sıralı olduğundan $\exists\ w \in E \setminus E^*$ öyleki

$$V(w) = \sup[V(E \setminus E^*)]$$

dir. Lemma 3.2.1 den w, B^* den fuzzy lineer bağımsızdır. $B^+ := B^* \cup \{w\}$ olsun. Açık olarak, B^+, $V^+ = (W = \langle B^+ \rangle$, $V|_W$) için bir fuzzy tabanıdır.

Teorem 3.2.2.[5]: V, E de bir fuzzy altvektör uzayı ve V(E) üstten iyi sıralı olsun. Bu takdirde, V fuzzy altvektör uzayı bir fuzzy tabanına sahiptir.

İspat: V fuzzy altvektör uzayı ve V(E) üstten iyi sıralı olsun.

$\Omega := \{ B \subset E \mid B \text{ , fuzzy lineer bağımsız } \}$

ile tanımlanan küme, içerme " $\subset$" bağıntısıyla kısmi sıralıdır. C, Ω nin tam sıralı bir altkümesi ve $A := \bigcup_{B \in C} B$ olsun. A, C nin bir üst sınırı olduğu açıktır. $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ ($n \in N$) olsun. Bu takdirde, $B_{\alpha_1}, B_{\alpha_2}, \ldots, B_{\alpha_n} \in C$ öyleki $a_i \in B_{\alpha_i}$ ($1 \le i \le n$) dir. C tam sıralı olduğundan $\exists k \in \{1,2,\ldots,n\}$ öyleki $\forall i \in \{1,2,\ldots,n\}$ için $B_{\alpha_i} \subset B_{\alpha_k}$ dir. Dolayısıyla $a_1, a_2, \ldots, a_n \in B_{\alpha_k}$ olur. B_{α_k} fuzzy lineer bağımsız olduğundan, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vektörleri de fuzzy lineer bağımsız olur. Böylece A, C nin Ω da bir üst sınırıdır. Zornn Lemmasın'dan Ω da bir maksimal B^* elemanı vardır.

Varsayım ; $E^* := \langle B^* \rangle$, E nin bir öz altvektör uzayı olsun. Lemma 3.2.2 den $\exists\, w \in E \setminus E^*$ öyleki $B^+ = B^* \cup \{w\}$, $V^+ := V|_W$ $(W = \langle B^+ \rangle)$ nın bir fuzzy tabanıdır. Bu ise B^* nin Ω de maksimal eleman olmasıyla çelişir. Dolayısıyla $E = \langle B^* \rangle$ ve B^*, V için bir fuzzy tabanıdır.

Sonuç 3.2.1.[5]: E sonlu boyutlu olsun. V, E de bir fuzzy altvektör uzayı ise V bir fuzzy tabanına sahiptir.

İspat: E sonlu boyutlu olduğundan V(E) sonludur. Dolayısıyla, V(E) üstten iyi sıralıdır. Teorem 3.2.2 den V bir fuzzy tabanına sahiptir.

Tanım 3.2.2.[5]: V_1 ve V_2 E de iki fuzzy altvektör uzayı olsun. V_1 ile V_2 nin toplamı, ($x \in E$)

$$\begin{aligned}(V_1 + V_2)(x) &:= \sup\{ V_1(x_1) \wedge V(x_2) \mid x = x_1 + x_2 \} \\ &= \sup\{ V_1(x_1) \wedge V(x-x_1) \} \\ &= \bigvee_{x = x_1 + x_2} V_1(x_1) \wedge V_2(x_2)\end{aligned}$$

dir.

Önerme 3.2.1.[5]: V_1 ve V_2 E de iki fuzzy altvektör uzayı olsun.

Bu takdirde aşağıdaki ifadeler verilir.

i) $V_1 \cap V_2$, E de bir fuzzy altvektör uzayıdır.

ii) $V_1 + V_2$, E de bir fuzzy altvektör uzayıdır.

iii) $V_1(E)$ ve $V_2(E)$ üstten iyi sıralı olmaları halinde $V_1 \cap V_2$ ve $V_1 + V_2$ altvektör uzayları fuzzy tabanına sahiptirler.

İspat: i) $\forall\ a,b \in X$ ve $x,y \in E$ için,

$$\begin{aligned}(V_1 \cap V_2)(ax+by) &= V_1(ax+by) \wedge V_2(ax+by)\\ &\geq (V_1(x) \wedge V_1(y)) \wedge (V_2(x) \wedge V_2(y))\\ &= V_1(x) \wedge V_2(x) \wedge V_1(y) \wedge V_2(y)\\ &= (V_1 \cap V_2)(x) \wedge (V_1 \cap V_2)(y)\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $V_1 \cap V_2$, E de bir fuzzy altvektör uzayıdır.

ii) Varsayım ; $x,y \in E$ için,

$$(V_1 + V_2)(x+y) < (V_1 + V_2)(x) \wedge (V_1 + V_2)(y)$$

olsun. $\exists\ x_1,\ x_2 \in E$ öyleki her $x_3 \in E$ için,

$$V_1(x_3) \wedge V_2(x+y-x_3) < [V_1(x_1) \wedge V_2(x-x_1)] \wedge [V_1(x_2) \wedge V_2(y-x_2)] \qquad (1)$$

olur. Diğer yandan,

$$\begin{aligned}[V_1(x_1) \wedge V_2(x-x_1)] \wedge [V_1(x_2) \wedge V_2(y-x_2)] &= V_1(x_1) \wedge V_1(x_2) \wedge V_2(x-x_1) \wedge V_2(y-x_2)\\ &\leq V_1(x_1+x_2) \wedge V_2(x+y-x_1-x_2) \qquad (2)\end{aligned}$$

dır. (1) ve (2) den

$$V_1(x_3) \wedge V_2(x+y-x_3) < V_1(x_1+x_2) \wedge V_2(x+y-(x_1+x_2)) \qquad (3)$$

elde edilir. (3) ifadesinde, $x_3 = x_1 + x_2$ alınırsa;

$$V_1(x_3) \wedge V_2(x+y-x_3) < V_1(x_3) \wedge V_2(x+y-x_3)$$

çelişkisi elde edilir. O halde,

$$(V_1 + V_2)(x+y) \geq (V_1 + V_2)(x) \wedge (V_1 + V_2)(y)$$

olur.

iii) $(V_1 \cap V_2)(E) \subset V_1(E) \cup V_2(E)$ ve $(V_1 + V_2)(E) \subset V_1(E) \cup V_2(E)$ olduğu açıktır. $V_1(E)$ ve $V_2(E)$ üstten iyi sıralı olduğundan $V_1(E) \cup V_2(E)$ üstten iyi sıralıdır. Dolayısıyla, $(V_1 \cap V_2)(E)$ ve $(V_1 + V_2)(E)$ üstten iyi sıralıdır. Teorem 3.2.2 den $V_1 \cap V_2$ ve $V_1 + V_2$ fuzzy tabanına sahiptir.

3.3 FUZZY ALTVEKTÖR UZAYLARIN BOYUTU

Tanım 3.3.1.[5]: V, E nin bir fuzzy altvektör uzayı olmak üzere, V nin boyutu,

$$boy(V) = \sup\{ \sum_{v \in B} V(v) \mid B,\ E \text{ nin bir tabanı} \}$$

ile verilecektir.

V fuzzy altvektör uzayı sonlu boyutludur: $\Longleftrightarrow$ $boy(V) = n < \infty$ dir.

Önerme 3.3.1.[5]: Her sonlu boyutlu fuzzy altvektör uzayı bir fuzzy tabanına sahiptir.

İspat: V, E de sonlu boyutlu bir fuzzy altvektör uzayı olsun. V(E) nin üstten iyi sıralı olduğunu göstermeliyiz.

Varsayım ; $V(E) \subset [0,1]$ bir artan monotonik bir limite sahip olsun. Dolayısıyla, $\exists (x_n)_{n \in N} \subset E$ dizisi mevcut öyleki $(V(x_n))_{n \in N}$ limiti α olan, kesin artan bir dizidir. $V(x_1) = \mu > 0$ alabiliriz. Önerme 3.1.1 den $(x_n)_{n \in N}$ lineer bağımsızdır. H_n :="$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ lineer bağımsız kümesinin E için bir tabana genişlemesi". Bu şekilde, E nin tabanlarının bir dizisini elde ederiz. Böylece,

$$\sum_{x \in H_n} V(x) > n\mu$$

olur ki bu $boy(V) = \infty$ olduğunu gösterir. Bu ise V nin sonlu boyutlu olmasıyla çelişir. Dolayısıyla, varsayım yanlıştır. Önerme 1.1.1 den V(E) üstten iyi sıralıdır. Teorem 3.2.2 den V bir fuzzy tabanına sahiptir.

Lemma 3.3.1.[5]: V, E de bir fuzzy altvektör uzayı ve $boyE = n < \infty$ olsun. Bu takdirde, B, V nin bir fuzzy tabanı ve B^*, E nin herhangi bir tabanı ise

$$\sum_{v \in B^*} V(v) \leq \sum_{v \in B} V(v)$$

dir.

İspat: E sonlu boyutlu olduğundan, $|V(E\setminus\{0\})| = k \le n$ dir. Her $1 \le i \le k$ için $t_i > t_{i+1}$; $V(E\setminus\{0\}) = \{t_1, t_2, \ldots, t_k\}$ olsun. B, V nin bir fuzzy tabanı olduğundan $B \cap V_{t_i}$, V_{t_i} altvektör uzayı için bir tabandır. Gerçekten, B, V nin fuzzy tabanı olduğundan Tanım 3.2.1 ve 3.1.1 den B, E nin lineer bağımsız bir altkümesidir. $B \cap V_{t_i} \subset B$ olduğundan $B \cap V_{t_i}$ lineer bağımsızdır. Şimdi de $B \cap V_{t_i}$ nin V_{t_i} için üretici olduğunu gösterelim:

$x \in V_t$ keyfi olsun. $x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j b_j$ ($\alpha_j \in X$ ve $b_j \in B$ $1 \le j \le n$)

$$V(x) = V\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j b_j\right) = \bigwedge_{j=1}^{n} V(b_j) \ge t_i$$

olur. Buradan, her $1<j<n$ için

$$V(b_j) \ge t_i \Longrightarrow b_j \in B \cap V_{t_i}$$

elde edilir. Dolayısıyla $B \cap V_{t_i}$, V_{t_i} için bir tabandır. Diğer yandan, $B^* \cap V_{t_i}$, V_{t_i} nin lineer bağımsız bir altkümesi olduğundan $\forall i \in \{1,2,\ldots,k\}$ için,

$$|B^* \cap V_{t_i}| \le |B \cap V_{t_i}|$$

olur. $|B^* \cap V_{t_1}| \le |B \cap V_{t_1}|$ olduğundan;

$$f_1 : B^* \cap V_{t_1} \longrightarrow B \cap V_{t_1}$$

olan bir f_1 bire-bir dönüşümü mevcuttur. $\forall$ $v \in B^* \cap V_{t_1}$ için $f_1(v) \in B \cap V_{t_1}$ olduğundan $f_1(v) \in V_{t_1}$ olur. Buradan, ($\forall$ $1 \le i \le k$ için $t_1 \ge t_i$ old.)

$$V(f_1(v)) \ge t_1 \ge V(v)$$

elde edilir. İndüksiyonla,

$$f_{n-1} : B^* \cap V_{t_{n-1}} \longrightarrow B \cap V_{t_{n-1}}$$

olan bire-bir dönüşümü mevcut öyleki $\forall v \in B^* \cap V_{t_{n-1}}$ için $V(v) \le V(f_{n-1}(v))$ olsun. $T_V = V^{-1}(t_n)$ olmak üzere,

$$|B^* \cap T_V| \le |B \cap V_t \setminus f_{n-1}(B^* \cap V_{t_{n-1}})| \qquad (1)$$

dır. Çünkü,

$$\begin{aligned} |B^* \cap T_V| &= |B^* \cap V_{t_n}| - |B^* \cap V_{t_{n-1}}| \\ &\le |B \cap V_{t_n}| - |B^* \cap V_{t_{n-1}}| \\ &= |B \cap V_{t_n}| - |f_{n-1}(B^* \cap V_{t_{n-1}})| \\ &= |B \cap V_{t_n} \setminus f_{n-1}(B^* \cap V_{t_{n-1}})| \end{aligned}$$

dir. O halde, (1) ifadesi doğrudur. Dolayısıyla,

$$g_n : B^* \cap T_V \longrightarrow B\cap V_{t_n} \setminus f_{n-1}(B^* \cap V_{t_{n-1}})$$

olacak şekilde bire-bir g_n fonksiyonu vardır.

Şimdi, $v \in B \cap V_{t_n}$ için,

$$f_n(v) := \begin{cases} f_{n-1}(v) & , v \in B^* \cap V_{t_{n-1}} \\ g_n(v) & , v \notin B^* \cap V_{t_{n-1}} \end{cases} \qquad (1)$$

ile tanımlanan $f_n : B^* \cap V_{t_n} \longrightarrow B\cap V_{t_n}$ fonksiyonu bire-bir dir. $v \in B^* \cap V_{t_n}$ ve $v \notin B^* \cap V_t$ olsun. Bu durumda, $f_n(v) = g_n(v)$ dir. $n \in \{2,3,\ldots,k\}$ için $g_n(B^* \cap T_V) \subset V_{t_n}$ ve $v \in B^* \cap T_V = B^* \cap V_{t_n} \setminus B^* \cap V_{t_{n-1}}$ için de $f_n(v) = g_n(v) \in V_{t_n}$ dir. Dolayısıyla,

$$V(f_n(v)) = V(g_n(v)) \geq t_n = V(v) \quad (v \in T_V) \qquad (2)$$

olur. $v \in B^* \cap V_{t_n}$ için $v \in B^* \cap V_{t_{n-1}}$ olsun. Bu takdirde, (1) den,

$$f_n(v) = f_{n-1}(v)$$

olur. İndüksiyon prensibinden,

$$V(f_n(v)) = V(f_{n-1}(v)) \geq V(v) \qquad (3)$$

dir. (2) ve (3) den her $v \in B^* \cap V_{t_n}$ için,

$$V(f_n(v)) \geq V(v)$$

olur. $E = V_{t_k}$ ve $|B^*| = |B|$ olduğundan,

$$f_k : B^* \longrightarrow B$$

fonksiyonu bire-bir ve örtendir. Dolayısıyla,

$$\sum_{v\in B} V(v) = \sum_{v\in B^*} V(f_k(v)) \geq \sum_{v\in B^*} V(v)$$

elde edilir.

Lemma 3.3.2.[5]: V, E de sonlu boyutlu bir fuzzy altvektör uzayı olsun. Bu takdirde, her $t \in V(E)\setminus\{0\}$ için V_t sonlu boyutludur.

İspat: Varsayım ; Bir $t_0 \in V(E)\setminus\{0\}$ için V_{t_0} sonsuz boyutlu olsun. B, V için bir fuzzy tabanı olsun. Bu takdirde, $|B\cap V_{t_0}|$ sonsuzdur. Çünkü $B\cap V_{t_0}$, V_{t_0} için bir tabandır. Dolayısıyla,

$$\sum_{v\in B} V(v) \geq \sum_{v\in B\cap V_{t_0}} V(v) \geq \sum_{v\in B\cap V_{t_0}} t_0 = \infty \Longrightarrow boy(V) = \infty$$

olur ki bu $boy(V) < \infty$ olmasıyla çelişir. O halde, her $t\in V(E)\setminus\{0\}$ için V_t sonlu boyutlu olmalıdır.

Teorem 3.3.1.[5]: V,E de sonlu boyutlu bir fuzzy altvektör uzayı ve B, V nin bir fuzzy tabanı olsun. Bu takdirde,

$$boy(V) = \sum_{v\in B} V(v)$$

dir.

İspat: B^*, E nin bir tabanı olmak üzere,

$$\sum_{v\in B^*} V(v) \leq \sum_{v\in B} V(v)$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Her $t\in[0,1]$ için Lemma 3.3.2 den V_t sonlu boyutlu ve $B\cap V_t$, $V|_{V_t}$ için bir fuzzy tabanıdır. V_t nin lineer bağımsız bir altkümesi $B^*\cap V_t$ olduğundan önerme 3.3.1 den,

$$\sum_{v\in B^*\cap V_t} V(v) \leq \sum_{v\in B\cap V_t} V(v)$$

dir. Bu her $t\in[0,1]$ için doğrudur ve böylece,

$$\sum_{v\in B^*} V(v) \leq \sum_{v\in B} V(v)$$

olur ve ispat biter.

V, E de fuzzy tabanı B olan bir fuzzy altvektör uzayı ve $V'=V|_B$ olsun. Tanım 1.2.7 ve Teorem 3.3.1 den,

$$boy(V) = Kard(V')$$

elde edilir. Bu, açık olarak Crisp durumdaki boyut tanımı ile uyumludur.

Crisp durumda olduğu gibi fuzzyde de olması arzu edilen şey; V_1 ve V_2, E de iki fuzzy altvektör uzayı olmak üzere,

$$boy(V_1 + V_2) = boy(V_1) + boy(V_2) - boy(V_1\cap V_2) \qquad (*)$$

bağıntısının sağlanmasıdır. Ancak, bu bağıntı genelde doğru değildir.

Örnek 3.3.1. $E := R$, $V_1 \equiv 1/2$ ve $V_2 \equiv 1/4$ alınırsa, $V_1+V_2=1/4$ olur. Dolayısıyla, $V_1 + V_2$ $V_1\cup V_2$ olamaz. $boy(V_1)=1/2$, $boy(V_2)=1/4$, $boy(V_1 + V_2)=1/4$ ve $boy(V_1\cap V_2)=1/4$ olduğu açıktır. Buradan,

$$boy(V_1 + V_2) \neq boy(V_1) + boy(V_2) - boy(V_1 \cap V_2)$$

olur. Çalışmanın ilerleyen kısımlarında, (*) ifadesinin bazı özellikler altında sağlandığını göstereceğiz.

Teorem 3.3.2.[5]: E sonlu boyutlu bir vektör uzayı, V_1 ve V_2, E de iki fuzzy altvektör uzayı olmak üzere,

$$V_1(0) \geq \sup[V_2(E\setminus\{0\})] \quad , \quad V_2(0) \geq \sup[V_1(E\setminus\{0\})]$$

olsun. Bu takdirde, E nin bir B tabanı aynı zamanda V_1, V_2, $V_1 \cap V_2$ ve $V_1 + V_2$ için de bir fuzzy tabanı olacak biçimde vardır. Ayrıca,

$$A_1 := \{ x \in E \mid V_1(x) < V_2(x) \} \quad , \quad A_2 := E \setminus A_1$$

ise her $v \in B \cap A_1$ için,

$$(V_1 \wedge V_2)(v) = V_1(v) \quad , \quad (V_1 + V_2)(v) = V_2(v)$$

ve her $v \in B \cap A_2$ için,

$$(V_1 \wedge V_2)(v) = V_2(v) \quad , \quad (V_1 + V_2)(v) = V_1(v)$$

dir.

İspat: ispatı $boyE = n < \infty$ üzerinden indüksiyonla yapacağız. $boyE = 1$ olması durumunda iddia doğrudur. Çünkü, bu durumda $B=\{x\}$ E nin tabanı aynı zamanda V_1, V_2, $V_1 \cap V_2$ ve V_1+V_2 için de tabandır. İddia ; $boyE \leq n$ olması durumunda doğru olsun. İddianın $n > 1$ olmak üzere, $boyE = n+1$ için de doğru olduğunu gösterelim:

V_1, V_2 iki fuzzy altvektör uzayı olmak üzere, $B_1=\{v_1,v_2,\ldots,v_{n+1}\}$ V_1 için bir fuzzy tabanı olsun. Her $i \in \{2,3,\ldots,n+1\}$ için,

$$V_1(v_1) \leq V_2(v_i)$$

olarak kabul edebiliriz. $H := \langle\{v_2, v_3,\ldots,v_{n+1}\}\rangle$ olsun. $n+1 > 0$ olduğundan $H \neq \{0\}$ dir. H nın tanımından $boyH = n$ olduğu açıktır. V_1 ve V_2 fuzzy altvektör uzayları olduğundan;

$$\overline{V}_1 := V_1|_H \quad , \quad \overline{V}_2 := V_2|_H$$

fuzzy altvektör uzayları tanımlanır. İndüksiyon prensibinden $\overline{V}_1$, $\overline{V}_2$, $\overline{V}_1 \cap \overline{V}_2$ ve $\overline{V}_1+\overline{V}_2$ için bir B^* fuzzy tabanı vardır öyleki B^*, H için de bir tabandır. Aynı zamanda, her $v \in B^* \cap A_1$ için,

$$(\overline{V}_1 \wedge \overline{V}_2)(v) = \overline{V}_1(v) \quad , \quad (\overline{V}_1 + \overline{V}_2)(v) = \overline{V}_2(v)$$

ve her $v \in B^* \cap A_2$ için,

$$(\overline{V}_1 \wedge \overline{V}_2)(v) = \overline{V}_2(v) \quad , \quad (\overline{V}_1 + \overline{V}_2)(v) = \overline{V}_1(v)$$

dir. Şimdi de B $\overline{V}_1$, $\overline{V}_2$, $\overline{V}_1 \cap \overline{V}_2$ ve $\overline{V}_1 + \overline{V}_2$ için bir fuzzy tabanı olmak üzere, B^* in B ye genişletilebilir olduğunu gösterebiliriz.

Her $v \in B \cap A_1$ için,

$$(V_1 \wedge V_2)(v) = V_1(v) \quad , \quad (V_1 + V_2)(v) = V_2(v)$$

ve her $v \in B \cap A_2$ için,

$$(V_1 \wedge V_2)(v) = V_2(v) \quad , \quad (V_1 + V_2)(v) = V_1(v)$$

olduğu açıktır. Önce her $x \in H$ için,

$$(V_1 + V_2)|_H(x) = (V_1|_H + V_2|_H)(x) \qquad (1)$$

olduğunu gösterelim:

$x \in H \setminus \{0\}$ için $(\, x = x_1 + x_2 \,)$

$$\begin{aligned}(V_1 + V_2)|_H(x) &= \sup\{V_1(x_1) \wedge V_2(x-x_1) \mid x_1 \in E\} \\ &= \sup\{V_1(x_1) \wedge V_2(x-x_1) \mid x_1 \in E\} \\ &\quad \vee \sup\{V_1(x_2) \wedge V_2(x-x_2) \mid x_2 \in E \setminus H\}\end{aligned}$$

olur. $x \in H \setminus \{0\}$ olduğundan,

$$V_1(x) \wedge V_2(x-x) = V_1(x) \wedge V_2(0) \le \sup\{V_1(x_1) \wedge V_2(x-x_1) \mid x_1 \in H\}$$

$$V_1(0) \wedge V_2(x-0) = V_1(0) \wedge V_2(x) \le \sup\{V_1(x_1) \wedge V_2(x-x_1) \mid x_1 \in H\}$$

olur ve

$$V_1(0) \ge \sup[V_2(H \setminus \{0\})] \quad , \quad V_2(0) \ge \sup[V_1(H \setminus \{0\})]$$

olduğundan,

$$V_1(x) \wedge V_2(0) = V_1(x) \quad \text{ve} \quad V_1(0) \wedge V_2(x) = V_2(x)$$

olur. Dolayısıyla,

$$V_1(x) \vee V_2(x) \le \sup\{V_1(x_1) \wedge V_2(x-x_1) \mid x_1 \in H\} \qquad (2)$$

elde edilir. Kabul edelim ki;

$$\sup\{V_1(x_1) \wedge V_2(x-x_1) \mid x_1 \in H\} \le \sup\{V_1(x_2) \wedge V_2(x-x_2) \mid x_2 \in E \setminus H\} \qquad (3)$$

olsun. Bunun anlamı, $\exists\, \overline{x} \in E \setminus H$ öyleki,

$$\sup\{V_1(x_1) \wedge V_2(x-x_1) \mid x_1 \in H\} < V_1(\overline{x}) \wedge V_2(x-\overline{x})$$

dir. (2) den,

$$V_1(x) \vee V_2(x) < V_1(\bar{x}) \wedge V_2(x-\bar{x}) \qquad (4)$$

elde edilir. $\bar{x} \in E \setminus H$ ve her $i \in \{2,3,\ldots,n+1\}$ için,

$$V_1(E \setminus H) = V_1(v_1) \leq V_1(v_i)$$

olduğundan,

$$V_1(x) \geq V_1(\bar{x})$$

bulunur. (4) den,

$$V_1(x) \vee V_2(x) < V_1(x) \wedge V_2(x-\bar{x})$$

olur. Son ifadenin (I bir örgü oldu.) sağlanmayacağı açıktır. Dolayısıyla, iddiamız olan (3) ifadesi doğru değildir. O halde,

$$\sup\{V_1(x_1) \wedge V_2(x-x_1) \mid x_1 \in H\} \geq \sup\{V_1(x_2) \wedge V_2(x-x_2) \mid x_2 \in E \setminus H\}$$

olmak zorundadır. $x=0$ olması durumunda da bu ifade doğrudur. Sonuç olarak, her $x \in H$ için,

$$\begin{aligned}(V_1+V_2)|_H(x) &= \sup\{V_1(x_1) \wedge V_2(x-x_1) \mid x_1 \in E\} \\ &= \sup\{V_1(x_1) \wedge V_2(x-x_1) I x_1 \in H\} \\ &\quad \vee \sup\{V_1(x_2) \wedge V_2(x-x_2) \mid x_2 \in E \setminus H\}\end{aligned}$$

dir. Diğer yandan,

$$\sup\{V_1(x_1) \wedge V_2(x-x_1) \mid x_1 \in H\} \geq \sup\{V_1(x_2) \wedge V_2(x-x_2) \mid x_2 \in E \setminus H\}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}(V_1+V_2)|_H(x) &= \sup\{V_1(x_1) \wedge V_2(x-x_2) \mid x_1 \in H\} \\ &= \sup\{V_1|_H(x_1) \wedge V_2|_H(x-x_1) \mid x_1 \in H\} \\ &= (V_1|_H + V_2|_H)(x)\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla, (1) ifadesi sağlanmış olur. (1) den B^* V_1+V_2 de fuzzy lineer bağımsızdır. $v^* \in E \setminus H$ için,

$$V_2(v^*) = \sup[V_2(E \setminus H)]$$

olsun. V_2 sonlu değerler üzerinden alındığından $v^* \in E \setminus H$ mevcuttur. Lemma 3.2.1 ve 3.2.2 den V_2 için bir $B = B^* \cup \{v^*\}$ fuzzy tabanı $\bar{V}_2$ nin B^* tabanının bir v^* genilemesidir.

$$V_1(E \setminus H) = V_1(v)$$

olduğundan V_1 nin B fuzzy tabanı dahi $\bar{V}_1$ in B^* fuzzy tabanının bir v^* genişlemesidir. Şimdi de $V_1 \cap V_2$ nin B fuzzy tabanı, $\bar{V}_1 \cap \bar{V}_2$ nin

B^* fuzzy tabanının bir v^* genişlemesi olduğunu gösterelim:

$v^* \in A_1$ ise V_1, $E \setminus H$ üzerinde sabit olduğundan,

$$(V_1 \wedge V_2)(A_1 \cap (E \setminus H)) = V_1(v^*)$$

ve her $z \in A_2 \cap (E \setminus H)$ için,

$$(V_1 \wedge V_2)(z) \leq V_1(v^*)$$

dir. Dolayısıyla, $v^* \in A_1$ ise,

$$(V_1 \wedge V_2)(v^*) = \sup[(V_1 \wedge V_2)(E \setminus H)]$$

olur. $v^* \in A_2$ ise $V_2(v^*) \leq V_1(v^*)$ dir.

$$V_2(v^*) = \sup[V_2(E \setminus H)]$$

ve V_1 $E \setminus H$ üzerinde sabit olduğundan,

$$A_1 \cap (E \setminus H) = \emptyset$$

elde edilir. Dolayısıyla, $v^* \in A_2$ olması durumunda,

$$(V_1 \wedge V_2)(v^*) = \sup[(V_1 \wedge V_2)(E \setminus H)]$$

bulunur. Lemma 3.2.2 den $V_1 \cap V_2$ için B fuzzy tabanı, $\overline{V}_1 + \overline{V}_2$ nin B^* fuzzy tabanının bir v^* genişlemesi olur.

Şimdi de $V_1 + V_2$ için bir B fuzzy tabanı $\overline{V}_1 + \overline{V}_2$ nin B^* tabanının bir v^* genişlemesi olduğunu gösterelim:

Varsayım ; $z \in E \setminus H$ öyleki,

$$(V_1 + V_2)(v^*) < (V_1 + V_2)(z)$$

olsun. z vektörünü, $z = a(v^* + v)$ ($a \neq 0$ ve $v \in H$) formunda yazabiliriz. O halde,

$$(V_1 + V_2)(v^*) < (V_1 + V_2)(z) = (V_1 + V_2)(a(v^* + v)) = (V_1 + V_2)(v^* + v)$$

olur. Bunun anlamı, $\exists$ $x_1 \in E$ öyleki her $\overline{x}$ için,

$$V_1(\overline{x}) \wedge V_2(v^* - \overline{x}) < V_1(x_1) \wedge V_2(v^* + v - x_1) \tag{5}$$

dir. $\overline{x} = 0$ durumunda (5) doğrudur. Yani,

$$V_1(0) \wedge V_2(v^*) < V_1(x_1) \wedge V_2(v^* + v - x_1)$$

dir. Ancak,

$$V_1(0) \geq \sup[V_2(E \setminus \{0\})]$$

olduğundan,

$$V_2(v^*) < V_1(x_1) \wedge V_2(v^* + v - x_1) \tag{6}$$

olur. $x_1 \in H$ ise $v \in H$ olduğundan $v-x_1 \in H$ olur. Böylece, Lemma 3.2.1 den,

$$V_2(v^*+v-x_1) = V_2(v^*) \wedge V_2(v-x_1)$$

olur ve (6) da yerine koyarsak,

$$V_2(v^*) < V_1(x_1) \wedge V_2(v^*) \wedge V_2(v-x_1)$$

olur ki bu mümkün değildir. Dolayısıyla, $x_1 \in E \setminus H$ dır. (5) de $\bar{x}=v^*$ olsun,

$$V_2(0) \geq \sup[V_1(E \setminus \{0\})]$$

olduğundan,

$$V_1(v^*) < V_1(x_1) \wedge V_2(v^*+v-x_1) \qquad (7)$$

buluruz. Diğer yandan, $V_1(E \setminus H) = V_1(v_1)$ ve $V_1(v^*) = V_1(x_1)$ olur. Dolayısıyla, (7) ifadesi doğrudur. Her $z \in E \setminus H$ için,

$$(V_1+V_2)(v^*) \geq (V_1+V_2)(z)$$

olur. Lemma 3.2.2 den V_1+V_2 için bir B fuzzy tabanı $\bar{V}_1+\bar{V}_2$ nin bir B^* fuzzy tabanının bir v^* genişlemesidir. Şimdi de $v^* \in A_1$ olması durumunda,

$$(V_1+V_2)(v^*) = V_2(v^*)$$

ve $v^* \in A_2$ için,

$$(V_1+V_2)(v^*) = V_1(v^*)$$

olduğunu gösterelim.

$$(V_1+V_2)(v^*) = \sup\{V_1(x_1) \wedge V_2(v^*-x_1) \mid x_1 \in E\}$$

dir.

$$\sup\{V_1(x_1) \wedge V_2(v^*-x_1) \mid x_1 \in E\} = V_1(\bar{x}) \wedge V_2(v^*-\bar{x})$$

olacak biçimde bir $\bar{x} \in E$ vardır. $x_1=0$ ve ardından $x_1 = v^*$ alınıp,

$$V_1(0) \geq \sup[V_2(E \setminus \{0\})] \qquad V_2(0) \geq \sup[V_1(E \setminus \{0\})]$$

olduğu gözönünde bulundurulursa,

$$V_1(v^*) \vee V_2(v^*) \leq V_1(\bar{x}) \wedge V_2(v^*-\bar{x})$$

elde edilir. Kabuledelim ki,

$$V_1(v^*) \vee V_2(v^*) < V_1(\bar{x}) \quad V_2(v^*-\bar{x}) \qquad (8)$$

olsun. Eğer, $\bar{x} \in H$ ise Lemma 3.2.1 ile ($B=B^* \cup \{v^*\}$, V_2 için bir fuzzy tabanıdır.) (8) bağıntısı,

$$V_1(v^*)\vee V_2(v^*) < V_1(\bar{x})\wedge V_2(v^*)\wedge V_2(\bar{x})$$

olur ki bu hiçbir zaman doğru değildir. Dolayısıyla, $\bar{x}\in E\setminus H$ dir. Ancak, $V_1(v^*) = V_1(\bar{x})$ olduğundan (8) ifadesi asla sağlanmaz. O halde,

$$V_1(v^*)\vee V_2(v^*) = V_1(\bar{x})\wedge V_2(v^*-\bar{x}) = (V_1+V_2)(v^*)$$

elde ederiz. Bu ifade isteneni verir.

Sonuç 3.3.1.[5]: E sonlu boyutlu olmak üzere, V_1 ve V_2, E de iki fuzzy altvektör uzayı,

$$V_1(0) \geq \sup[V_2(E\setminus\{0\})] \quad \text{ve} \quad V_2(0) \geq \sup[V_1(E\setminus\{0\})]$$

olsun. Bu takdirde,

$$\mathrm{boy}(V_1+V_2) = \mathrm{boy}(V_1) + \mathrm{boy}(V_2) - \mathrm{boy}(V_1\cap V_2)$$

dir.

İspat: Teorem 3.3.2 den B fuzzy tabanı olmak üzere;

$$\begin{aligned}\mathrm{boy}(V_1+V_2) &= \sum_{v\in B} (V_1+V_2)(v) = \sum_{v\in A_1\cap B} V_2(v) + \sum_{v\in A_2\cap B} V_1(v) \\ &= \sum_{v\in A_1\cap B} V_2(v) + \sum_{v\in A_2\cap B} V_1(v) + \sum_{v\in A_2\cap B} V_2(v) + \sum_{v\in A_1\cap B} V_1(v) \\ &\quad - \sum_{v\in A_2\cap B} V_2(v) - \sum_{v\in A_1\cap B} V_1(v) \\ &= \sum_{v\in B} V_1(v) + \sum_{v\in B} V_2(v) - \sum_{v\in A_2\cap B} V_2(v) - \sum_{v\in A_1\cap B} V_1(v) \\ &= \mathrm{boy}(V_1) + \mathrm{boy}(V_2) - \Big(\sum_{v\in B} (V_1\wedge V_2)(v)\Big) \\ &= \mathrm{boy}(V_1) + \mathrm{boy}(V_2) - \mathrm{boy}(V_1\cap V_2)\end{aligned}$$

olur.

Teorem 3.3.1 de olduğu gibi, Teorem 3.3.2 ve Sonuç 3.3.1 sonlu boyutlu fuzzy altvektör uzaylarına genişletilebilir.

Örnek 3.3.2. $E = R^2$ olmak üzere, V_1 ve V_2 aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$V_1(0) = 5/6 \ , \ V_1((0,R\setminus\{0\})) = 1/2 \ , \ V_1(E\setminus R) = 1/4 \ , \ V_2(0) = 1$$

$$V_2(\{(x,x) \mid x \in R\setminus\{0\}\}) = 1/3 \ , \ V_2(E\setminus\{(x,x) \mid x \in R\}) = 1/5$$

Bu takdirde, V_1 ve V_2 fuzzy altvektör uzayıdır. Diğer yandan,

$$V_1(0) \geq \sup[V_2(E\setminus\{0\})] \ , \ V_2(0) \geq \sup[V_1(E\setminus\{0\})]$$

olduğu açıktır.

$$(V_1 \wedge V_2)(0) = 5/6 \ , \ (V_1 \wedge V_2)(\{(x,x) \mid x \in R\setminus\{0\}\}) = 1/4 \ ,$$

$$(V_1 \wedge V_2)(E\setminus\{(x,x) \mid x \in R\}) = 1/5 \ , \ (V_1+V_2)(0) = 5/6$$

$$(V_1+V_2)((0,R\setminus\{0\})) = 1/2 \ , \ (V_1+V_2)(E\setminus(0,R)) = 1/3$$

ve $B = \{(0,1) \ , \ (1,1)\}$, V_1, V_2, $V_1 \cap V_2$ ve V_1+V_2 için bir fuzzy tabanıdır. Böylece,

$$boy(V_1+V_2) = (V_1+V_2)(0,1) + (V_1+V_2)(1,1) = 1/2 + 1/3 = 5/6$$

$$boy(V_1 \cap V_2) = (V_1 \cap V_2)(0,1) + (V_1 \cap V_2)(1,1) = 1/4 + 1/5 = 9/20$$

$$boy(V_1) = 1/2 + 1/4 = 3/4 \ , \ boy(V_2) = 1/5 + 1/3 = 8/15$$

$$boy(V_1) + boy(V_2) - boy(V_1 \cap V_2) = 3/4 + 8/15 - 9/20 = 5/6$$

olur. Buradan,

$$boy(V_1+V_2) = boy(V_1) + boy(V_2) - boy(V_1 \cap V_2)$$

elde edilir.

Tanım 3.3.2.[5]: V, E de bir fuzzy altvektör uzayı ve $f:E \longrightarrow F$ bir lineer dönüşüm olsun. Bu takdirde,

$$çekf(V) = V|_{çekf} \ , \ görf(V) = f(V)|_{görf}$$

ile tanımlanır.

Teorem 3.3.3.[5]: E sonlu boyutlu olmak üzere, V, E de bir fuzzy altvektör uzayı ve $f:E \longrightarrow F$ bir lineer dönüşüm olsun. Bu takdirde,

$$boy(çekf(V)) + boy(görf(V)) = boy(V)$$

dir.

İspat: Kabuledelim ki $çekf \neq \{0\}$ olsun. $çekf = \{0\}$ olması durumunda ispat benzer şekilde yapılır. $B_ç$, $çekf(V)$ için bir fuzzy tabanı ve B^* de $B_ç$ nin V için bir fuzzy tabanına genişlemesi olsun. Lemma 3.2.1 den $B = B_ç \cup B^*$, V için bir fuzzy tabanıdır ve $B_ç \cap B^* = \emptyset$ dir. Önce $f(B^*) = B_{gör}$ nin $görf(V)$ için bir fuzzy tabanı olduğunu gösterelim. Burada $B_{gör}$ nin görf için bir taban olduğu açıktır.

$v_1, v_2, \ldots, v_k \in B^*$ ve tümü sıfır olmayan $a_1, a_2, \ldots, a_k \in X$ (X=R) için,

$$f(V)(\sum_{i=1}^{k} a_i f(v_i)) = \begin{cases} \sup\{V(x) \mid x \in f^{-1}(\sum_{i=1}^{k} a_i f(v_i))\}, & f^{-1}(\sum_{i=1}^{k} a_i f(v_i)) \neq \emptyset \\ 0 & , f^{-1}(\sum_{i=1}^{k} a_i f(v_i)) = \emptyset \end{cases}$$

$\sum_{i=1}^{k} a_i f(v_i) \in görf$ olduğundan,

$$f(V)(\sum_{i=1}^{k} a_i f(v_i)) = \sup\{V(x) \mid x \in f^{-1}(\sum_{i=1}^{k} a_i f(v_i))\}$$

f- lineer,

$$f(V)(\sum_{i=1}^{k} a_i f(v_i)) = \sup\{V(x) \mid x \in çekf + \sum_{i=1}^{k} a_i v_i\}$$

$z \in çekf$ ise $z = 0$ veya $z = \sum_{i=1}^{p} b_i u_i$, $u_i \in B_ç$ (burada b_i lerin tümü birden sıfır değildir.) dir. Dolayısıyla, $x \in çekf + \sum_{i=1}^{k} a_i v_i$ için ya

$$V(x) = V(0 + \sum_{i=1}^{k} a_i v_i) \quad \text{veya} \quad V(x) = V(\sum_{i=1}^{p} b_i u_i + \sum_{i=1}^{k} a_i v_i)$$

olur. Böylece,

$$V(x) = (\bigwedge_{i=1}^{p} V(b_i u_i)) \wedge (\bigwedge_{i=1}^{k} V(a_i v_i))$$

olur ki bunun $V(\sum_{i=1}^{k} a_i v_i)$ den küçük yada eşit olacağı açıktır. Böylece,

$$f(V)(\sum_{i=1}^{k} a_i f(v_i)) = \bigwedge_{i=1}^{k} V(a_i v_i)$$

olur. Benzer şekilde,

$$f(V)(f(v_i)) = V(v_i) \qquad (1)$$

elde edilir. Buradan,

$$f(V)\left(\sum_{i=1}^{k} a_i f(v_i)\right) = \bigwedge_{i=1}^{k} f(V)(a_i v_i)$$

olur. Böylece, $B_{gör}$, görf(V) için bir fuzzy tabanıdır. Fuzzy boyutu tanımından,

$$boy(V) = \sum_{v \in B_ç \cup B^*} V(v) = \sum_{v \in B_ç} V(v) + \sum_{v \in B^*} V(v) \qquad (2)$$

dir. Eğer $z \in \langle B^* \rangle$ ise $f(V)(f(z)) = V(z)$ olur. Böylece, (2) den,

$$boy(V) = \sum_{v \in B_ç} V(v) + \sum_{v \in B^*} f(V)(f(v))$$

$$= \sum_{v \in B} V(v) + \sum_{v \in B_{gör}} f(V)(v) \qquad (\text{(1) den})$$

$$= boy(çekf(V)) + boy(görf(V))$$

elde ederiz.

Sonuç 3.3.2.[5]: Teorem 3.3.3 sonlu boyutlu fuzzy altvektör uzayları için de verilir.

(Yani, $t \in (0,1]$ ise V_t sonlu boyutludur.)

Tanım 3.3.2.[4]: V_1, V_2 sırasıyla E_1 ve E_2 de iki fuzzy altvektör uzayı olsun. V_1 ile V_2 izomorftur denir (ve $V_1 \cong V_2$ ile gösterilir.) $\Longleftrightarrow$ $f(V_1) = V_2$ olacak şekilde bir $f : E_1 \longrightarrow E_2$ izomorfisi mevcuttur. Bir başka ifadeyle aşağıdaki diyagram komutatiftir.

$$\begin{tikzcd} & {[0,1]} & \\ E_1 \arrow[ur, "V_1"] \arrow[rr, "f"'] & & E_2 \arrow[ul, "V_2"'] \end{tikzcd}$$

$$V_2 f = V_1 \Longrightarrow f^{-1}(V_2) = V_1 \Longrightarrow V_2 = f(V_1)$$

Fuzzy altvektör uzayların kümesindeki izomorfluk bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğu açıktır.

Teorem 3.3.4.[4]: V_1, V_2 sırasıyla E_1 ve E_2 de iki fuzzy altvektör uzayı olmak üzere, $f : E_1 \longrightarrow E_2$ bir izomorfi olsun. Eğer $\text{gör}V_1 = \text{gör}V_2$ ve her $t\in[0,1]$ için $f(V_{1_t}) = V_{2_t}$ ise $V_1 \cong V_2$ dir.

İspat: önce her $t\in[0,1]$ için $(f(V_1))_t = f(V_{1_t})$ olduğunu gösterelim.

$$
\begin{aligned}
y\in(f(V_1))_t &\Longleftrightarrow f(V_1)(y) \geq t \\
&\Longleftrightarrow \sup\{\, V_1(z) \mid z\in f^{-1}(y) \,\} \geq t \quad (\text{ f-örten}) \\
&\Longleftrightarrow V_1(z) \geq t \;,\; z = f^{-1}(y) \quad (\text{ f-(1-1)}) \\
&\Longleftrightarrow z\in V_{1_t} \;,\; f(z) = y \\
&\Longleftrightarrow y = f(z)\in f(V_{1_t}) \\
&\Longleftrightarrow y\in f(V_{1_t})
\end{aligned}
$$

olur. Dolayısıyla, $\forall\, t\in[0,1]$ için,

$$(f(V_1))_t = f(V_{1_t})$$

dir.

$$
\begin{aligned}
(f(V_1))(y) &= \sup\{\, t \mid y\in(f(V_1))_t \,\} \quad (\text{ Önerme 1.2.4 }) \\
&= \sup\{\, t \mid y\in f(V_{1_t}) \,\} \\
&= \sup\{\, t \mid y\in V_{2_t} \} \quad (\text{ Hipotez den }) \\
&= V_2(y)
\end{aligned}
$$

olur. Buradan,

$$f(V_1) = V_2 \Longrightarrow V_1 \cong V_2$$

elde ederiz.

Uyarı: Teorem 3.3.4 de $\text{gör}V_1 = \text{gör}V_2$ koşulu terkedilemez.

Örnek 3.3.3. $E_1 = E_2 = R^2$, $W_1 = \{(\alpha,0) \mid \alpha\in R\}$ ve $W_2 = \{(0,\alpha) \mid \alpha\in R\}$ olsun.

$$V_1(x) = \begin{cases} 1 & , x \in W_1 \\ 0.2 & , x \in E_1 \setminus W_1 \end{cases} \qquad V_2(x) = \begin{cases} 0.8 & , x \in W_2 \\ 0.4 & , x \in E_1 \setminus W_2 \end{cases}$$

ile E_1 de V_1 ve V_2 fuzzy altkümeleri tanımlansın. Lemma 2.2.2 den V_1 ve V_2 iki altvektör uzaydır. Ancak gör$V_1 \neq$ görV_2 olduğundan $f(V_1) = V_2$ olacak biçimde hiçbir $f : E_1 \longrightarrow E_2$ izomorfisi mevcut değildir.

Teorem 3.3.5.[4]: E_1 ve E_2 sonlu boyutlu iki vektör uzayı olmak üzere, V_1 , V_2 sırasıyla E_1 ve E_2 de iki fuzzy altvektör uzay olsun. Eğer, $V_1 \cong V_2$ ise boy(V_1) = boy(V_2) dir.

İspat: $V_1 \cong V_2$ olduğundan $f(V_1) = V_2$ olacak şekilde bir

$$f : E_1 \longrightarrow E_2$$

izomorfisi vardır. $A = \{ x_1, x_2, \ldots, x_n \}$, V_1 in bir fuzzy tabanı olsun. Böylece $f(A)$, $f(E_1) = E_2$ nin bir tabanıdır. Diğer yandan, $\forall\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in X$ ($X = R$) için,

$$\begin{aligned} (f(V_1))(\alpha_1 f(x_1)+\ldots+\alpha_n f(x_n)) &= (f(V_1))(f(\alpha_1 x_1+\ldots+\alpha_n x_n)) \\ &= V_1(\alpha_1 x_1+\ldots+\alpha_n x_n) \qquad (\ f\text{-}(1\text{-}1)\ ) \\ &= \bigwedge_{i=1}^{n} V_1(\alpha_i x_i) \\ &= \bigwedge_{i=1}^{n} (f(V_1))(f(\alpha_i x_i)) \\ &= \bigwedge_{i=1}^{n} (f(V_1))(\alpha_i f(x_i)) \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla $f(A)$, $f(V_1)$ in bir fuzzy tabanıdır.

$$\begin{aligned} \text{boy}(V_2) = \text{boy}(f(V_1)) &= \sum_{f(x)\in f(A)} (f(V_1))(f(x)) \qquad (\ x\in A\ ) \\ &= \sum_{x\in f^{-1}(f(A))} V_1(x) \qquad ((f(V_1))(f(x)) = V1(x)) \\ &= \sum_{x\in A} V_1(x) \qquad (\ f\text{-}(1\text{-}1)\ ) \\ &= \text{boy}(V_1) \end{aligned}$$

elde ederiz.

Örnek 3.3.4. Örnek 3.3.3 de verilen E_1 vektör ve V_1, V_2 fuzzy altvektör uzaylarını gözönüne alalım. $e_1=(1,0)$ ve $e_2=(0,1)$ olmak üzere $A = \{e_1, e_2\}$ olsun. A, E_1 in bir tabanıdır.

$\forall\ \alpha_1, \alpha_2 \in X$ için,

$$V_1(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) = V_1(\alpha_1,\alpha_2) = \begin{cases} 1 , & \alpha_2=0 \\ 0.2 , & \alpha_2\neq 0 \end{cases}$$

$$V_2(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) = V_2(\alpha_1,\alpha_2) = \begin{cases} 0.8 , & \alpha_1=0 \\ 0.4 , & \alpha_1\neq 0 \end{cases}$$

$$V_1(\alpha_1 e_1)\wedge V_1(\alpha_2 e_2) = V_1(\alpha_1,0)\wedge V_1(0,\alpha_2) = \begin{cases} 1 , & \alpha_2=0 \\ 0.2 , & \alpha_2\neq 0 \end{cases}$$

$$V_2(\alpha_1 e_1)\wedge V_2(\alpha_2 e_2) = V_2(\alpha_1,0)\wedge V_2(0,\alpha_2) = \begin{cases} 0.8 , & \alpha_1=0 \\ 0.4 , & \alpha_1\neq 0 \end{cases}$$

olur. Buradan,

$$V_1(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) = V_1(\alpha_1 e_1)\wedge V_1(\alpha_2 e_2)$$
$$V_2(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) = V_2(\alpha_1 e_1)\wedge V_2(\alpha_2 e_2)$$

elde edilir. Bu ise A nın V_1 ve V_2 için bir fuzzy tabanı olduğunu gösterir.

$$boy(V_1) = \sum_{x\in A} V_1(x) = V_1(e_1) + V_1(e_2) = 1.2$$

$$boy(V_2) = \sum_{x\in A} V_2(x) = V_2(e_1) + V_2(e_2) = 1.2$$

dir. Buradan,

$$boy(V_1) = boy(V_2)$$

elde edilir.

KAYNAKLAR

[1] Eroğlu , M. Sait ., The Homomorphic Image of a Fuzzy Subgroup is always a Fuzzy subgroup. Fuzzy Sets and Systems., 33 (1989) 255-256.

[2] Katsaras , A. K and Liu , D. B ., Fuzzy Vector Spaces and Fuzzy Topological Vector Spaces. J. Math. Anal. Appl. , 76 (1980) 571-599.

[3] Kumar , Rajesh ., Fuzzy Vector Spaces and Fuzzy Cosets. Fuzzy Sets and Systems., 45 (1992) 109-116.

[4] Kumar , Rajesh ., On the Dimension of a Fuzzy Spaces. Fuzzy Sets and Systems., 54 (1993) 229-234.

[5] Lubczonok , P ., Fuzzy Vector Spaces. Fuzzy Sets and Systems., 38 (1990) 329-343.

[6] Nanda , Sudarsan ., Fuzzy Fields and Fuzzy Linear Spaces. Fuzzy Sets and Systems., 19 (1986) 89 - 94.

[7] Pu Pao-Ming and Liu Ying-Ming ., Fuzzy Topology.I. Neighborhood Structure of a Fuzzy Point and Moore-Smith Convergence. J. Math. Anal. Appl., 76 (1980) 571-599.

[8] Pu Pao-Ming and Liu Ying-Ming ., Fuzzy Topology. II. Product and Quotient Spaces. J. Math. Anal. Appl., 77 (1980) 20 - 37.

[9] Wenxiang , Gu ., Fuzzy Linear Spaces. Fuzzy Sets and Systems., 49 (1992) 377-380.

[10] Zadeh, L.A.,Fuzzy Sets. Inform. and Contr., 8 (1965) 338-353.

ÖZGEÇMİŞ

1967 yılında Trabzon'un Akçaabat ilçesi Akçaköy Köyünde doğdu. İlkokulu Fındıklı II. İlkokulunda, Ortaokulu Akçaköy Ortaokulunda, Liseyi de Akçaköy Lisesinde tamamladı. 1984 yılında K.T.Ü Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde lisans öğrenimine başladı. 1989 yılında bu bölümden mezun oldu. Kasım 1989 tarihinde K.T.Ü Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Matematiğin Temelleri ve Lojik Matematik Anabilim Dalına Araştırma Görevlisi olarak atandı. 1990 yılında K.T.Ü Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans (Matematik) programına başladı. Halen K.T.Ü Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.