

33707

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

JEODEZİ VE FOTOGRAMETRİ MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

JEODEZİ VE FOTOGRAMETRİ MÜHENDİSLİĞİ PROGRAMI

YÜZEY AĞLARININ OPTİMİZASYONU

Hrt.Yük.Müh.Haluk KONAK

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde
"Doktor"

Ünvanının Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 03.06.1994

Tezin Savunma Tarihi : 17.02.1995

Tez Danışmanı : Prof.Dr.Ergün ÖZTÜRK

Jüri Üyesi : Prof.Dr.Muzaffer ŞERBETÇİ

Jüri Üyesi : Prof.Dr.Tevfik AYAN

Enstitü Müdürü : Prof.Dr. Temel SAVAŞKAN

Haziran 1994

TRABZON

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
TRABZON MERKEZİ

ÖNSÖZ

Yermerkezli üç boyutlu koordinat sisteminde değerlendirilen örnek bir yüzey ağı modelinde ağırlık optimizasyonu işlemleri gerçekleştirilmiş, değerlendirme sonuçları iki boyutlu yüzey ağı standartlarına dönüştürülmüş ve GPS gözlemlerinin yüzey ağındaki en uygun dağılımı konusu araştırılmıştır.

Doktora çalışması süresince yol göstericim olarak değerli destek ve yardımlarını gördüğüm tez danışmanım ve öğretmenim sayın Prof.Dr.Ergün Öztürk'e teşekkür ederim.

Ayrıca tezle ilgili tablo ve şekiller konusunda yardımlarını esirgemeyen teknik ressam Yaşar YAVUZ'a teşekkürlerimi sunarım.

Trabzon, Haziran 1994

Haluk KONAK

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	II
İÇİNDEKİLER	III
ÖZET	VII
SUMMARY	VIII
ŞEKİL LİSTESİ	IX
TABLO LİSTESİ	X
SEMBOL LİSTESİ	XI
1. GİRİŞ	1
2. ÜÇ BOYUTLU JEODEZİDE KULLANILAN KOORDİNAT SİSTEMLERİ	5
2.1. Yerel (Lokal) Astronomik Dik Koordinat Sistemi ($\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$)	5
2.2. Yerel (Lokal) Astronomik Kutupsal Koordinat Sistemi (α, β, d)	6
2.3. Yermerkezli (Global) Astronomik Dik Koordinat Sistemi (X, Y, Z) (Ortalama Yersel Dik Koordinat Sistemi).	7
2.4. Global (Jeodezik, Elipsoidal) Dik Koordinat Sistemi (x, y, z).....	8
3. DENGELEME MODELİ	10
3.1. Kullanılan Koordinat Sistemi	10
3.2. Matematik Model	13
3.3. Düzeltme Denklemlerinin Kurulması	18
3.4. Matematik Modelin Testi	22
3.4.1. Uyuşumsuz Ölçülerin Testi	25
3.5. Doğrusal Hipotez Testleri ve Fonksiyonel Modelin Testi ...	28
3.6. Datum Probleminin İrdelenmesi	31
4. JEODEZİK AĞLARDA DUYARLIK VE GÜVEN ÖLÇÜTLERİ	37
4.1. Duyarlık Ölçütleri	38
4.1.1. Ölçüt Matrisleri	44
4.1.1.1. Özvektörler Ayrımı ile Hesaplanan Ölçüt Matrisleri (Q_{SVD} Yapısında Ölçüt Matrisleri)	45

4.1.1.2. Taylor-Karman Yapısındaki	
Ölçüt Matrisleri	46
4.2. Güven Ölçütleri	50
5. JEODEZİK AĞLARIN OPTİMİZASYONU	54
5.1. Amaç Fonksiyonlarına Göre Optimizasyon	55
5.1.1. Duyarlık Optimizasyonu	55
5.1.2. Güven Optimizasyonu	57
5.1.3. Matematiksel Optimizasyon	58
5.2. Tasarım Parametrelerine Göre Optimizasyon	60
5.2.1. Sıfırıncı Derece Optimizasyon	
(Datum Optimizasyonu)	61
5.2.2. Birinci Derece Optimizasyon	64
5.2.3. İkinci Derece Optimizasyon	66
5.2.3.1. Ölçme Planının Optimizasyonu	67
5.2.3.2. Ölçü Ağırlıklarının Optimizasyonu	69
5.2.3.3. Ölçüt Matrisleri İle Ağırlıkların	
Hesabı	70
5.2.4. Üçüncü Derece Optimizasyon	76
5.3. Çözüm Algoritmaları	78
5.3.1. En Küçük Kareler Çözümü	78
5.3.1.1. Direkt Çözüm (Direkt HR Çözümü) ..	81
5.3.1.2. Yinelemeli HR Çözümü	82
5.3.1.3. U,m Çözümü	83
5.3.1.4. Çözümlerin Karşılaştırılması	84
5.3.1.5. U,m Çözümünün Özellikleri	86
5.3.1.6. En Uygun Çözüm Algoritması	96
5.3.1.7. En Uygun Çözüm Yöntemi	98
5.3.1.8. En Uygun Ölçüt Matrislerinin	
Belirlenmesi	100
5.3.2. Doğrusal (Lineer) Programlama	104
5.3.3. Doğrusal Olmayan (nonlinear) Programlama ..	106
5.4. Çözüm Algoritmalarının Genel Özellikleri	107
5.4.1. Simülasyon Yöntemleri	108
5.4.2. Analitik (Direkt) Yöntemler	109
5.5. Farklı Amaçlı Ağlarda Optimizasyon	111
5.5.1. Dinamik Ağ Dengelemesi ve Dinamik	
Ağ Optimizasyonu	112

5.5.2. Hiyerarşik (Aşama Sıralı) Dengeleme ve Statik Optimizasyon	114
5.5.3. Yarı Dinamik Ağ Dengelemesi ve Karma (Hybrid) Optimizasyon	115
6. BÜTÜNLEŞİK YÜZEY AğLARININ DENGELENMESİ	117
6.1. Dengeleme Modelleri	118
6.2. Yaklaşık Koordinatların Hesabı	122
6.2.1. Bütünleők Yüzey Ağının Elipsoid Merkezli Üç Boyutlu Yaklaşık Koordinatlarının Hesaplanması	124
6.2.2. GPS Bağlı Konum Koordinatlarının Dengelenmesi ve Ülke Temel Nirengi Ağı Sistemine Dönüşüm	125
6.3. Bütünleők Yüzey Ağının Dengelenmesi ve Ülke Temel Nirengi Ağı ile Uyuşum	128
6.4. İki Boyutlu Ülke Temel Nirengi Ağı Koordinatlarına Geçiş	132
6.4.1. Elipsoid Merkezli Eğri Koordinatların Hesabı	132
6.4.1.1. Geçerli Elipsoidal Koordinatlara Dönüşüm	133
6.4.2. İki Boyutlu UTM Koordinatlarının Hesaplanması	134
6.5. Üst Dereceden Ağ Noktalarının Korunması	135
7. SAYISAL UYGULAMA	138
7.1. Ankara GPS Test Ağının Tanıtımı	138
7.2. Yaklaşık Koordinatların Hesabı ve Ölçme Planının Tasarımı	140
7.3. Ankara GPS Test Ağının Optimizasyonu	142
7.3.1. U, m Çözümü	145
7.3.2. Yinelemeli HR Çözümü	149
7.3.3. Direkt HR Çözümü	150
7.3.4. Çözüm Sonuçlarının İrdelenmesi	152
7.3.5. Eř Değerlik Testi ve İndirgenmiş Ölçme Planının İrdelenmesi	153
7.4. Ankara GPS Test Ağının Dengelenmesi ve Yüzey Ağı Standartlarına Dönüşüm	156
7.5. En Uygun GPS Noktalarının Belirlenmesi	161

8. İRDELEMELER	166
9. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	168
10. KAYNAKLAR	170
11. ÖZGEÇMİŞ	174



ÖZET

Yüzey Ağlarının Optimizasyonu

Jeodezik ağlar günümüzde kullanım amaçlarına göre tasarlanmakta ve bu amaca göre en uygun hale getirilmektedir. Gelişen teknolojik olanakların bir sonucu olarak da yermerkezli üç boyutlu dik koordinat sistemlerinde dengelenmektedir.

Ülke yüzey ağları, günümüze kadar yatay ve düşey konum ağları şeklinde ayrı ayrı değerlendirilmiştir. Yeni hesaplayıcılar ve ölçme teknikleri (GPS), ülke yüzey ağlarının bütünleşik olarak değerlendirilmesini gerektirmektedir. Ancak, uygun bir veri tabanı oluşturuluncaya kadar, bütünleşik olarak dinamik matematik model ile değerlendirilen yüzey ağları, son adımda yine klasik yüzey ağı standartlarına dönüştürülerek kullanıma sunulmaktadır.

Ülke yüzey ağlarının sadece bilinen standartlara göre oluşturulması yeterli değildir. Bu nedenle; ele alınan yüzey ağı, tasarım aşmasında ölçme planı ve ölçü duyarlılıkları yönünden en uygun duruma getirilmeli, ağı bir kez de maliyet yönünden gözden geçirilerek tesis ve ölçüm işlemlerine başlanılmalıdır.

Bu çalışmada; kullanılan yer merkezli üç boyutlu koordinat sisteminde dengeleme modeli tanıtıldıktan sonra, jeodezik ağların optimizasyonu konusu kuramsal olarak ele alınmıştır.

Ağırlık optimizasyonu probleminin sayısal çözümü aşamasında karşılaşılan tutarsızlıklara; fonksiyonel model, çözüm sonucunda sağlanması gereken koşullarla genişletilerek, "Bilinmeyenleri Arasında Koşul Denklemleri Bulunan Dolaylı Ölçüler Dengelemesi Yöntemiyle Çözüm" geliştirilmiştir. Örnek bir yüzey ağı modelinde optimizasyon işlemleri gerçekleştirilmiş ve değerlendirme sonuçları, iki boyutlu yüzey ağı standartlarına dönüştürülmüştür. Son adımda, güncel teknoloji ürünü olan GPS gözlemlerinin yüzey ağında en uygun dağılımları konusu araştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Bütünleşik Yüzey Ağları, Optimizasyon.

SUMMARY

Optimization of the Surface Networks

Nowadays, geodetic networks are designed for the aims of using and optimized for this. As a result of developed technological possibilities they are adjusted in geocentric 3D coordinate systems.

Up to now, the Land-surface networks have been evaluated as the networks of horizontal and vertical position. New computers and measurements technics (GPS) are made to be required to evaluate the Land-surface networks as integrated. But finally, the networks of the surface which are evaluated as integrated are presented to use in the standarts of clasical networks of surface until an optimum data-base is made up.

It is not enough to make up the Land-surface only for known standarts. For the reasons, when the networks of surface are designed, at the same time the observation plan and the precision of the observations must be optimized. And then operations of building and measurement must be started after the price of network is discussed again.

In this study, after the adjustment model is introduced in 3D coordinate systems used, the subject of optimization of geodetic networks are discussed as theoretical. The adjustment solution of indirect measurements with condition where the functinal model is extented with required condition has been devoloped for the emerging inconsistens in numerical solutions of optimization of weight. In a sample model of the network of surface the operations of optimization were realized and then the results were transformed into the standarts of the 2D Land-surface networks. Finally, the subject of optimum dispersions of the GPS observations which are of new technological products were discussed.

Keywords: Integrated surface networks, Optimization

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 1. Lokal Astronomik ve Ortalama Yersel Koordinat Sistemleri	7
Şekil 2. Jeodezik (Elipsoidal) Dik ve Jeodezik Eğri Koordinat Sistemleri	8
Şekil 3. Bir Bruns Çok Yüzlüsü ve Elipsoid Üzerine İzdüşümü	13
Şekil 4. Elipsoidal Koordinatlarla UTM Projeksiyon Koordinatları Arasındaki Geometrik İlişki	125
Şekil 5. Bütünleşik Ağların Dengelenmesi Akış Şeması	137
Şekil 6. Ankara GPS Test Ağı Ölçme Planı	139
Şekil 7. Optimizasyon Sonucu İndirgenmiş Ankara GPS Test Ağı Ölçme Planı	148
Şekil 8. En Uygun GPS Noktalarının Belirlenmesi	163

TABLO LİSTESİ

Tablo 1.	Enine ve Boyuna Korelasyonlar	48
Tablo 2.	Taban Açılı Eşit Bir Önden Kestirme Probleminde En Uygun Konumun Belirlenmesi	65
Tablo 3.	Jeodezik Ağlarda Güvenirlik Ölçütlerinin Sınır Değerleri	69
Tablo 4.	T-K Yapılı Ölçüt Matrisinde Özdeğerlerin Dağılımı	143
Tablo 5.	Tek Tek Ağırlıklar İçin U,m Çözümü	145
Tablo 6.	Grup Ağırlıklar İçin U,m Çözümü	146
Tablo 7.	Grup Ağırlıklarla Yinemeli HR Çözümü	150
Tablo 8.	Grup Ağırlıklarla Direkt HR Çözümü	151
Tablo 9.	Eşdeğerlik Testi Sonuçları (I. Durum)	153
Tablo 10.	Güvenirlik Ölçütleri ve Bağlı Hata Elipsoidi (I. Durum)	154
Tablo 11.	Eşdeğerlik Testi Sonuçları (II. Durum)	155
Tablo 12.	Güvenirlik Ölçütleri ve Bağlı Hata Elipsoidleri (II. Durum)	155
Tablo 13.	Ankara GPS Test Ağının Yermerkezli Üç Boyutlu Dengeli Dik Koordinatları	158
Tablo 14.	Ülke Yüzey Ağının UTM Koordinatları	159
Tablo 15.	Ankara GPS Test Ağının Ülke Yüzey Ağı Datumuna Dönüştürülmüş UTM Koordinatları	160
Tablo 16.	Ülke Yüzey Ağında Korunan Geçerli Koordinatlar ve Yeni Noktaların Kullanıma Hazır UTM Koordinatları ..	162
Tablo 17.	En Uygun GPS Noktalarının Belirlenmesi (1. Model)	164
Tablo 18.	En Uygun GPS Noktalarının Belirlenmesi (2. Model)	165

SEMBOL LİSTESİ

- X, Y, Z : Dik Koordinatlar
 α, β, d : Kutupsal Koordinatlar
 Φ, Λ : Astronomik Enlem ve Astronomik Boylam
 ϕ, λ : Elipsoidal Enlem ve Elipsoidal Boylam
h, H : Elipsoidal Yükseklik ve Normal Ortometrik Yükseklik
N : Jeoid Ondülasyonu
 σ^2 : Kuramsal Varyans
 m^2 : Deneysel Varyans
 ρ^{cc} : Grad Cinsinden Katsayı (636619.77)
E(l) : Herhangi Bir Ölçünün Umut Değeri
v, ϵ : Düzeltme ve Gerçek Hata
 K_{ll} : Ölçülerin Varyans-Kovaryans Matrisi
 α : Yanılma Olasılığı
x : Bilinmeyenler Vektörü
 Σ_{xx} : Kuramsal Varyans-Kovaryans Matrisi
 K_{xx} : Deneysel Varyans-Kovaryans Matrisi
 λ_{max} : En Büyük Özdeğer (Ana Varyans Bileşeni)
 b_{max} : En Büyük Ana Bileşen Vektörü
 \cong : Tutarsızlık (İnkonsistenz) İşareti
 \odot : Khatri-Rao Çarpım İşareti
 \otimes : Kronecker Çarpım İşareti
* : Hadamard Çarpım İşareti
 Q_m, Q_l : Enine ve Boyuna Korelasyon
 C_{xx} : Ölçüt Matrisi

1. GİRİŞ

Günümüzde üstün ve hızlı hesaplayıcılar ile ölçme tekniklerinin sunduğu yeni olanaklardan yararlanarak; jeodezik ağların yatay ve düşey konumlarının üç boyutlu modellerle topluca değerlendirilmesi güncel bir uygulama haline gelmiştir. Bu yaklaşım yakın zamanlarda oldukça geniş bir uygulama alanına kavuşmuştur.

Buna ek olarak; bir amaç fonksiyonu seçilip jeodezik ağın datumunun, konumunun, ölçme planının ve ölçü duyarlıklarının en uygun duruma getirilmesi (optimizasyon) işlemleri uygulama alanı bulmuştur. Son adımda ise eldeki donanım, ekipman ve parasal kaynaklar açısından amaç fonksiyonunu en uygun duruma getirmek, bir jeodezik problem olarak algılanmaktadır.

Jeodezik Ağların Değerlendirilmesi: Gerek alt yapı ve gerekse özel mühendislik hizmetlerine yönelik jeodezik araştırmalar, bu amaca uygun kalite ve doğrulukta jeodezik ağları gerektirmektedir.

Günümüze kadar yatay ve düşey konum bilgilerinin ayrı ayrı değerlendirilmiş olması, kuramsal bilgi eksikliğinden değil bu alanda gereksinim duyulan teknolojik olanakların sınırlı olmasından kaynaklanmıştır. Artık lokal bilgisayar ağlarında bile söz konusu olan üstün bir bellek ve hesaplama kapasitesi, en karmaşık problemlerin çözümlenmesine olanak sağlamaktadır. Geliştirilen yeni ölçme olanakları ve yapay uydu gözlemleri (GPS), jeodezik ağlarda üç boyutlu değerlendirme modellerini kaçınılmaz hale getirmektedir.

GPS gözlemleri ile gözlem koşulları uygun noktaların bağıl konumları, noktalar arasında görüş zorunluluğu olmaksızın her an belirlenebilmektedir. Bu işlem için 10 ile 20 dakikalık bir süre içinde cm duyarlığına ulaşılmaktadır. Ancak GPS gözlemlerinin yapılabilmesi için uyduların ufuktan

15 derece ve daha yüksekte olması ve alıcı ile uydular arasında doğal ya da yapay bir engelin bulunmaması gerekir. Söz konusu engeller nedeniyle jeodezik ağların önemli bir bölümünde yersel gözlemlerin kullanılması gerekmektedir. Bu anlamda yersel gözlemler ve uydu gözlemleri üç boyutlu ağlarda bütünleşik olarak değerlendirilmektedir.

Yermerkezli üç boyutlu bir dik koordinat sistemi ideal bir dünya sistemidir. Bu sistemde her noktanın üç boyutlu dik koordinatları ile bu noktalara ait çekül sapmaları bileşenleri belirlenebilmektedir. Bu amaçla yapılan yatay doğrultu, düşey açı, azimut, astronomik enlem ve boylam ile eğik uzunluk gözlemleri, herhangi bir hesap yüzeyine indirgenmeksizin değerlendirilebilmektedir. Söz konusu yöntemde jeodezik (elipsoidal) dik koordinat sistemi ile doğal dik koordinat sisteminin başlangıcı ortak ve eksenleri çakışık ya da paralel alınabilmekte ve çekül sapmaları da hesaplanabilmektedir. Bütünleşik yaklaşımda, normal ortometrik yükseklik farklarının değerlendirilebilmesi için jeoid dalgalanmalarının başka bir kaynaktan elde edilmesi gerekmektedir. Böylece değerlendirme sonucunda jeoid dalgalanmaları da iyileştirilebilmektedir. Bundan başka; ayrı bir yermerkezli dik koordinat sisteminde (WGS84) değerlendirilen GPS bağımlı konum koordinatlarının, üç boyutlu bir benzerlik dönüşümü ile halen kullanılmakta olan ülke sistemine dönüştürülmesi gerekmektedir.

Jeodezik Ağların Optimizasyonu: Gerek deformasyonların izlenmesine yönelik jeodezik ağların ve gerekse alt yapı hizmetlerine yönelik ülke yüzey ağlarının oluşturulması, oluşturulan ağların geliştirilmesi ve iyileştirilmesi konusu, özellikle teknolojinin sunduğu yeni olanaklar ile jeodezinin gündeminde belirleyici bir nitelik kazanmıştır. Bunun bir sonucu olarak; jeodezik ağların tasarımı, geliştirilmesi ve iyileştirilmesi aşamasında seçilen bir amaç fonksiyonuna göre, jeodezik ağın datumu, konumu, ölçme planı ve ölçü duyarlılıkları en uygun duruma getirilmektedir. Son adımda ise her bir ölçü kümesi için gerekecek zaman, ekipman ve harcama gibi kısıtlayıcılar da göz önüne alınarak en uygun sonuçlara ulaşmak amaçlanmaktadır.

Bir optimizasyon işlemi genelde duyarlık, doğruluk ve güvenilirlik yönünden en uygunlaştırma temelinde dayanır. Uygun bir optimizasyon algoritması seçilerek simülasyon yöntemleri ya da analitik yöntemler kullanılarak amaç fonksiyonuna ulaşılmaya çalışılır.

Optimizasyon işlemi denilince, ölçme planının ve ölçü ağırlıklarının birlikte en uygun duruma getirildiği optimizasyon işlemi algılanmaktadır. Genellikle optimum hale getirilecek bir ağda, ağın datumu ve noktaların yaklaşık yerlerinin belli olduğu varsayılmaktadır. Diğer bir deyişle ağ noktalarının koordinatları, zorlamasız bir yöntemle önceden yaklaşık olarak belirlenmiştir.

Bundan başka, optimizasyon işlemi sonucunda tasarlanan ağın varyans-kovaryans matrisinden türetilen amaç fonksiyonlarının minimum olması istenebilir. Bu haliyle ağ, ölçme planı ve ölçü duyarlıkları yönünden en uygun duruma getirilir. Ağın homojen ve izotrop özellikte ideal (yapay) bir varyans-kovaryans matrisine göre en uygun duruma getirilmesi istendiği durumlarda, amaç fonksiyonu olarak en uygun ölçüt matrisinin belirlenmesi gündeme gelir.

En uygun ölçü sayısı ve buna bağlı olarak maliyet anlamına gelebilecek ağırlıkların en uygun şekilde belirlenmesi işlemi en küçük kareler, doğrusal ya da doğrusal olmayan optimizasyon yöntemleriyle çözümlenmektedir.

Belirli koşullar altında sadece ölçme planının en uygun hale getirildiği optimizasyon işlemlerinde simülasyon (benzetme) yöntemleri de kullanılmaktadır.

Ülke Yüzey Ağlarının Değerlendirilmesi: Ülke yüzey ağları birinci ve ikinci derece ülke temel ağı noktalarının ortalama 5 km aralıklarla sıklaştırılmasıyla oluşturulmaktadır. Değerlendirme sonucunda; özellikle bir veri yönetimi karmaşasını önlemek ve ülke yüzey ağlarının tek bir birim sistemde değerlendirilmesi amacıyla ülke temel ağına ait geçerli koordinatlar korunmaktadır. Bu nedenle ülke yüzey ağları aşama sıralı ağ yöntemiyle değerlendirilmektedir. Gelişen bilgisayar ve veri yönetimi olanakları, ileride yüzey

ağlarının dinamik ağ yöntemiyle değerlendirilmesine olanak sağlayacaktır.

Yersel gözlemler ile bunların ölçme planı içindeki dağılımlarını ve ağırlıklarını en uygunlaştırma işlemi ikinci derece optimizasyon yöntemiyle gerçekleştirilmektedir. Ağın geliştirilmesi ve iyileştirilmesi aşamasında, eski ağırlıkların belirli koşullar altında sabit alınması isteği statik ya da karma optimizasyon işlemlerini gerektirmektedir. Genellikle bu tür optimizasyon işlemi ikinci ya da üçüncü derece optimizasyon işlemiyle gerçekleştirilmektedir.

Henüz yaygın bir kullanım alanı olanağına kavuşamayan GPS gözlemlerinin sayıları ve ağ içindeki yerlerinin en uygun şekilde belirlenmesi sorunu da bir optimizasyon problemi olarak ele alınabilir.

Bu çalışmada; üç boyutlu ağlar ve duyarlılık ölçütlerine genel bir bakıştan sonra yüzey ağlarının optimizasyonu konusu ele alınmaktadır. Son adımda bütünleşik yüzey ağı modelleri araştırılmakta ve yapılan sayısal uygulamalarla ulaşılan sonuçlar sergilenmektedir.

2. ÜÇ BOYUTLU JEODEZİDE KULLANILAN KOORDİNAT SİSTEMLERİ

Üç boyutlu jeodezik ağlar; amaca yönelik olarak seçilen bir koordinat sisteminde, uygun bir matematik model belirlenerek dengelenirler. Üç boyutlu jeodezide kullanılan koordinat sistemleri *Yermerkezli (Jeosentrik, Global) Sistemler* ve *Yerel (Toposentrik, Lokal) Sistemler* olarak iki ana grupta inceleneceği gibi,

- Gözleme ve ölçmelerin dayandığı *doğal sistemler*
- Hesapların dayandığı *referans sistemler* olarak da ikiye ayrılabilirler [1, 2].

Gözlemler *Yerel (Lokal) Astronomik Koordinat Sistemi*'nde yapılır. Hesaplamalar ise;

- Bölgesel amaçlı ağlar için *Yerel (Lokal) Dik Koordinat Sistemleri*'nde,
- Global amaçlı ağlar için *Yermerkezli (Global) Dik Koordinat Sistemleri*'nde yapılabilir.

2.1. Yerel (Lokal) Astronomik Dik Koordinat Sistemi (\bar{X} , \bar{Y} , \bar{Z})

Başlangıç fiziksel yeryüzü üzerindeki durulan noktadır. \bar{Z} eksenini durulan noktadan geçen eşpotansiyel yüzeyin normali (çekül eğrisi teğeti) ile çakışır ve pozitif yönü astronomik başucuna yönelmiştir. \bar{X} eksenini durulan noktadaki jeopotansiyel yüzeye teğet düzlem içerisinde olup ortalama kutup noktası CIO'ya yönelmiştir. \bar{Y} eksenini bir sol el sistemi oluşturacak şekilde teğet düzlemi içerisinde kalarak doğuya yönelmiştir.

Yeryüzü üzerinde bütün ölçmeler, bu sisteme göre yapılır. Örneğin bir P noktasında kurulan bir teodolit bu noktadan geçen jeopotansiyel yüzeye göre düzeçlenir ve aletin asal

ekseni çekül doğrultusu ile yani \bar{Z} eksenini ile çakıştırılır. \bar{X} ekseninin doğrultusu astronomik gözlemlerle belirlenir.

Başlangıç gözlem istasyonundan geçen elipsoidin normali üzerinde ise; başka bir deyişle jeopotansiyel yüzey yerine bir dönel elipsoid seçilmişse Yerel (Lokal) Jeodezik Dik Koordinat Sistemi'nden sözedilir. Başlangıç noktası elipsoid ile jeoidin kesiştiği yerdir. \bar{Z} eksenini elipsoid normali ile çakışık ve pozitif yönü jeodezik başucuna, \bar{X} ekseninin yönü ise jeodezik kuzeye yönelmiştir.

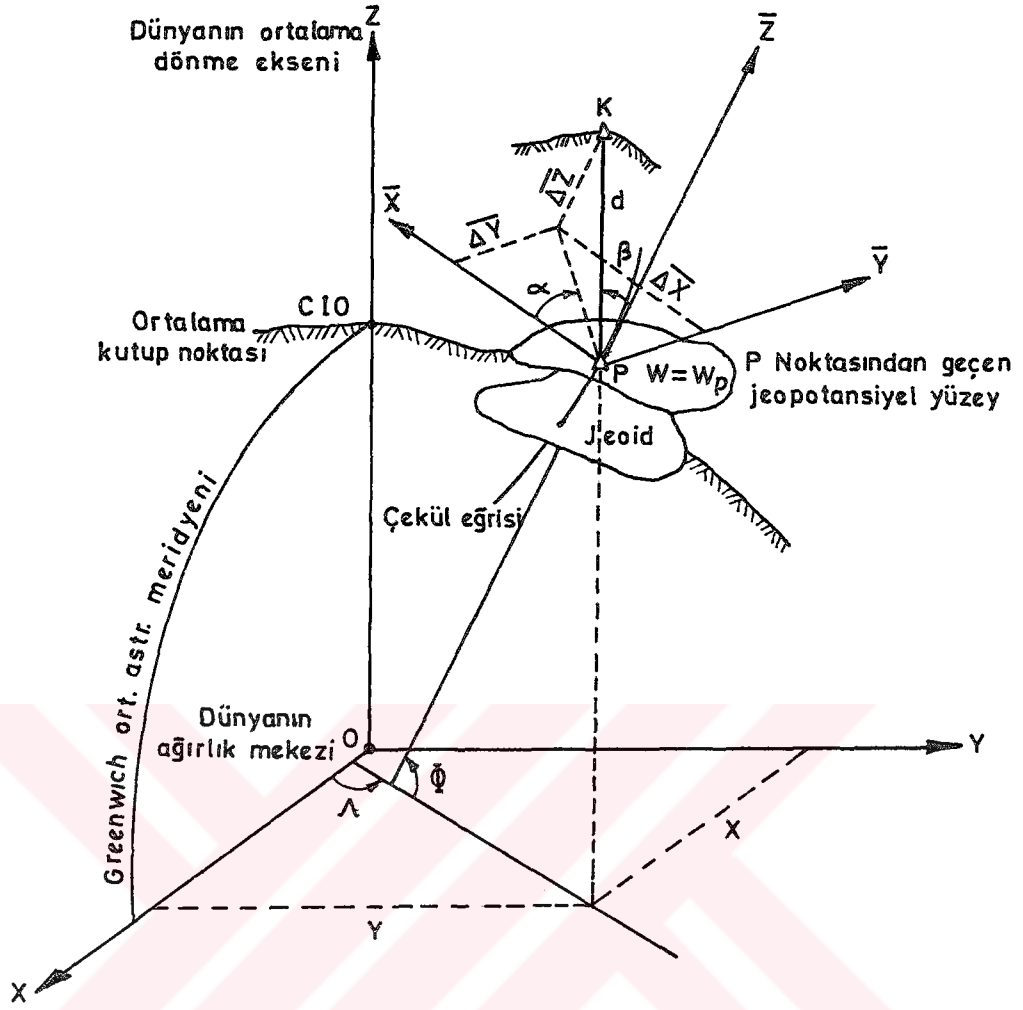
2.2. Yerel (Lokal) Astronomik Kutupsal Koordinat Sistemi (α , β , d)

Yerel (Lokal) Astronomik Dik Koordinat Sistemi ile birlikte düşünülür. P noktasından K hedef noktasına ait α astronomik azimutu, β başucu açısı ve d eğik (uzay) kenarı ölçülebilir. Bunlar K noktasının yerel astronomik kutupsal koordinatlarıdır (Şekil 1).

α , β , d kutupsal koordinatları ile $\Delta\bar{X}$, $\Delta\bar{Y}$, $\Delta\bar{Z}$ koordinatları arasında

$$\begin{bmatrix} \Delta\bar{X} \\ \Delta\bar{Y} \\ \Delta\bar{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \sin\beta \cos\alpha \\ d \sin\beta \sin\alpha \\ d \cos\beta \end{bmatrix} \quad (1)$$

ilişkisi vardır.



Şekil 1. Lokal Astronomik ve Ortalama Yersel Koordinat Sistemleri

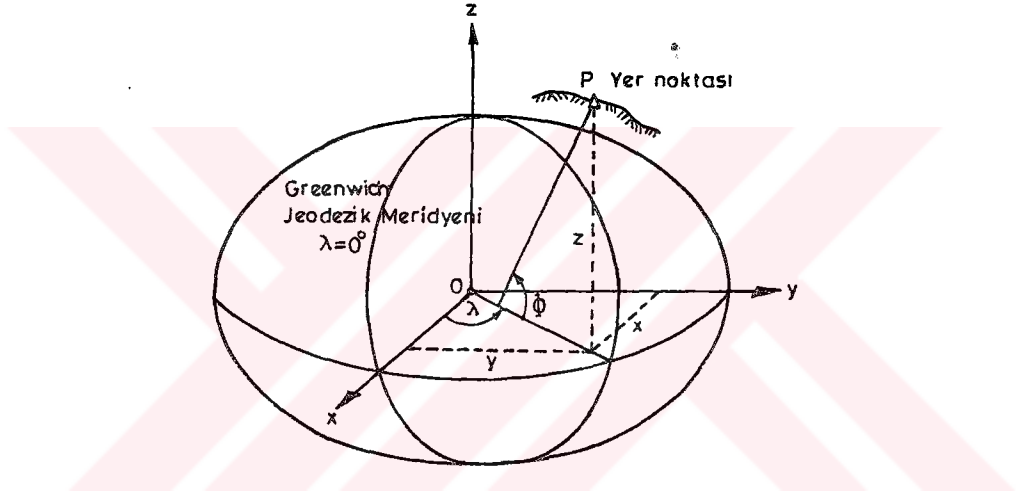
2.3. Yermerkezli (Global) Astronomik Dik Koordinat Sistemi (X, Y, Z) (Ortalama Yersel Dik Koordinat Sistemi)

Ortalama yersel sistem ideal dünya jeodezik sistemidir. Başlangıç dünyanın ağırlık merkezindedir. Z eksenini yeryuvarının ortalama dönme eksenine paraleldir ve CIO'ya yönelmiştir. X eksenini Greenwich ortalama astronomik meridyen düzlemi ile ortalama ekvator düzleminin arakesiti boyunca uzanır ve artı yönü 0° astronomik boylamı işaret eder. Sistem sağ el sistemidir.

Bu sistem noktaların uzaydaki konumlarının belirlenmesine ve bir noktanın ortalama astronomik enlemi Φ ve boylamı Λ 'nın tanımlanmasına yarar (Şekil 1).

2.4. Global (Jeodezik, Elipsoidal) Dik Koordinat Sistemi (x, y, z)

Başlangıç referans elipsoidinin merkezindedir. z eksenini elipsoidin küçük eksenini ile çakışıktır. x eksenini Greenwich jeodezik meridyen düzlemi ile ekvator düzleminin ara kesitindedir ve artı yönü 0° boylama yönelmiştir. Sistem sağ el sistemidir (Şekil 2).



Şekil 2. Jeodezik (Elipsoidal) Dik ve Jeodezik Eğri Koordinat Sistemleri

Bu sistemde bir P noktasının konumu x, y, z elipsoidal dik koordinatları ile veya ϕ , λ , h elipsoidal eğri koordinatları ile belirlenir.

Elipsoidal eğri koordinatlardan elipsoidal dik koordinatlara dönüşüm

$$\begin{aligned} x &= (N + h) \cos \phi \cos \lambda \\ y &= (N + h) \cos \phi \sin \lambda \\ z &= \left(\frac{b^2}{a^2} N + h\right) \sin \phi = [(1 - e^2)N + h] \sin \phi \end{aligned} \quad (2)$$

bağıntıları ile, ters dönüşüm ise

$$\begin{aligned}\lambda &= \arctan \frac{Y}{X} \\ V &= [x^2+y^2]^{\frac{1}{2}} \\ \phi &= \arctan \left[\frac{Z}{V} \left(1 - \frac{N}{N+h} e^2 \right)^{-1} \right] \\ h &= \frac{V}{\cos \phi} - N\end{aligned}\quad (3)$$

bağıntıları ile gerçekleştirilir. ϕ ve h birbirlerine bağımlı oldukları için seçilen bir ϕ_0 yaklaşık enlemine göre ϕ , h değerleri yinelemeli olarak hesaplanır. Jeodezik enlemin bulunması amacıyla bundan başka önerilmiş olan çok sayıda algoritmalarından herhangi biri de seçilebilir. Bunlar yinelemeli (iteratif) çözümler ve kesin (ya da kapalı) çözümler olarak iki ana grupta toplanabilirler [3].

Elipsoidal dik koordinat sisteminin üç eksenini, ortalama yersel sisteminin üç eksenini ile çakışacak veya paralel olacak biçimde tanımlanabilir. Eksenlerin çakışık olması halinde bir yermerkezli (jeosentrik) sistemden, paralel olması halinde bir yermerkezli bağıl (rölatif jeosentrik) sistemden sözedilir. Ayrıca eksenlerin paralellliği tam olarak sağlanamayabilir. Bu durumda ise eksen dönüklükleri sözkonusudur [1]. Bu en genel durum

$$A = C + R(1+m_0)G \quad (4)$$

genel dönüşümüyle tanımlanır.

$A^T = [X, Y, Z]$:Dönüştürülmüş Yermerkezli (Global) Dik Koordinatlar

$C^T = [X_0, Y_0, Z_0]$:Başlangıç Olarak Seçilen Dik Koordinatlar (Öteleme Elemanları)

$G^T = [x, y, z]$:Elipsoidal Dik Koordinatlar

m_0 = Ölçek Katsayısı

$$R(1+m_0) = \begin{bmatrix} 1+m_0 & +\varepsilon_z & -\varepsilon_y \\ -\varepsilon_z & 1+m_0 & +\varepsilon_x \\ +\varepsilon_y & -\varepsilon_x & 1+m_0 \end{bmatrix} \text{ :Dönüşüm Matrisi}$$

3. DENGELEME MODELİ

3.1. Kullanılan Koordinat Sistemi

Gözlemlerin yapıldığı *Yerel Astronomik Sistem* ile hesaplamaların yapıldığı *Global Astronomik Dik Koordinat Sistemi (Ortalama Yersel Sistem)* arasındaki dönüşüm üç boyutlu jeodezinin temelini oluşturmaktadır. Bir P noktasındaki $\bar{\Delta X}$, $\bar{\Delta Y}$, $\bar{\Delta Z}$ yerel astronomik dik koordinatlarınının X, Y, Z global astronomik dik koordinatlara göre konumları bu noktada yapılan α_{PK} , β_{PK} , d_{PK} astronomik gözlemlere göre tanımlanır.

(1) eşitliğine göre;

$$\begin{aligned}\bar{\Delta X}_{PK} &= d_{PK} \sin \beta_{PK} \cos \alpha_{PK} \\ \bar{\Delta Y}_{PK} &= d_{PK} \sin \beta_{PK} \sin \alpha_{PK} \\ \bar{\Delta Z}_{PK} &= d_{PK} \cos \beta_{PK}\end{aligned}\quad (5)$$

astronomik yerel koordinatlar elde edilir. Genel olarak bir uzay dik koordinat sisteminden diğerine geçebilmek için üç öteleme ile Euler açıları olarak bilinen üç açığa gerek vardır. Bunlar X_p , Y_p , Z_p öteleme elemanları ile $(90^\circ - \Phi_p)$, $(180^\circ - \Lambda_p)$ ve (0°) Euler açılarıdır. Astronomik enlemi (Φ_p) ve boylamı (Λ_p) bilinen bir P noktası için dönüşüm matrisi

$$R = \begin{bmatrix} -\sin \Phi_p \cos \Lambda_p & -\sin \Lambda_p \cos \Phi_p \cos \Lambda_p \\ -\sin \Phi_p \sin \Lambda_p & \cos \Lambda_p \cos \Phi_p \sin \Lambda_p \\ \cos \Phi_p & 0 \sin \Phi_p \end{bmatrix}\quad (6)$$

şeklinde tanımlanır. Bu durumda ortalama yersel dik koordinat sistemine,

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_K = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_P + R \begin{bmatrix} \bar{\Delta X} \\ \bar{\Delta Y} \\ \bar{\Delta Z} \end{bmatrix} \quad (7)$$

dönüşümü ile ulaşılır. Bu dönüşüm bağıntısı

$$\begin{aligned} X_K &= X_P - \bar{\Delta X}_{PK} \sin\Phi_P \cos\Lambda_P - \bar{\Delta Y}_{PK} \sin\Lambda_P + \bar{\Delta Z}_{PK} \cos\Phi_P \cos\Lambda_P \\ Y_K &= Y_P - \bar{\Delta X}_{PK} \sin\Phi_P \sin\Lambda_P + \bar{\Delta Y}_{PK} \cos\Lambda_P + \bar{\Delta Z}_{PK} \cos\Phi_P \sin\Lambda_P \\ Z_K &= Z_P + \bar{\Delta X}_{PK} \cos\Phi_P + \bar{\Delta Z}_{PK} \sin\Phi_P \end{aligned} \quad (8)$$

şeklinde daha açık olarak yazılabilir. Tersine bir dönüşüm, R matrisinin ortogonal özelliğinden dolayı

$$\begin{bmatrix} \bar{\Delta X} \\ \bar{\Delta Y} \\ \bar{\Delta Z} \end{bmatrix}_{PK} = R^T \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} \quad (9)$$

olarak tanımlanır. Bu dönüşüm de açık olarak

$$\begin{aligned} \bar{\Delta X}_{PK} &= -\Delta X \sin\Phi_P \cos\Lambda_P - \Delta Y \sin\Phi_P \sin\Lambda_P + \Delta Z \cos\Phi_P \\ \bar{\Delta Y}_{PK} &= -\Delta X \sin\Lambda_P + \Delta Y \cos\Lambda_P \\ \bar{\Delta Z}_{PK} &= \Delta X \cos\Phi_P \cos\Lambda_P + \Delta Y \cos\Phi_P \sin\Lambda_P + \Delta Z \sin\Phi_P \end{aligned} \quad (10)$$

şeklinde yazılır. Bu durumda yerel kutupsal astronomik koordinatlar ise

$$\begin{aligned} \alpha_{PK} &= \arctan \left(\frac{\bar{\Delta Y}_{PK}}{\bar{\Delta X}_{PK}} \right) \\ \beta_{PK} &= \arccos \left(\frac{\bar{\Delta Z}_{PK}}{d} \right) \\ d_{PK} &= (\bar{\Delta X}_{PK}^2 + \bar{\Delta Y}_{PK}^2 + \bar{\Delta Z}_{PK}^2)^{(1/2)} \end{aligned} \quad (11)$$

olarak tanımlanır.

(10) eşitlikleri (11) eşitliklerinde yerine konursa

$$\alpha_{PK} = \arctan \frac{-\Delta X \sin \Lambda_P + \Delta Y \cos \Lambda_P}{-\Delta X \sin \Phi_P \cos \Lambda_P - \Delta Y \sin \Phi_P \sin \Lambda_P + \Delta Z \cos \Phi_P}$$
$$\beta_{PK} = \arccos \frac{\Delta X \cos \Phi_P \cos \Lambda_P + \Delta Y \cos \Phi_P \sin \Lambda_P + \Delta Z \sin \Phi_P}{d} \quad (12)$$
$$d_{PK} = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2}$$

elde edilir. Burada

$$\Delta X = X_K - X_P$$

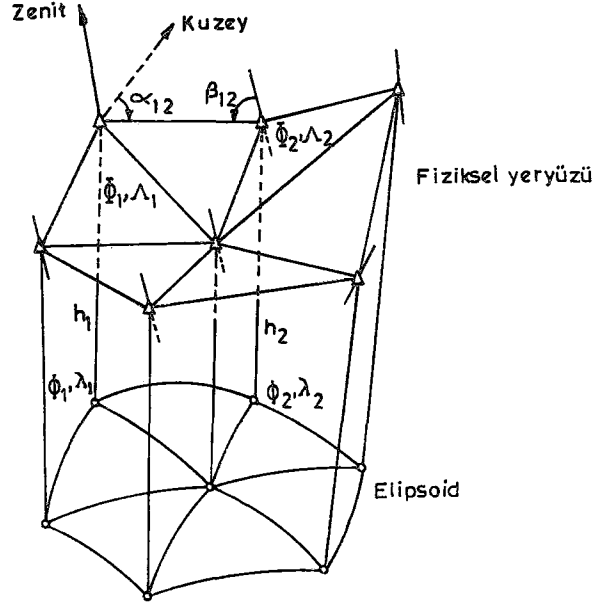
$$\Delta Y = Y_K - Y_P$$

$$\Delta Z = Z_K - Z_P$$

P ve K noktaları arasındaki koordinat farklarıdır.

(11) eşitlikleri gözlenen azimut, düşey açı ve eğik uzunlukları Global Astronomik Dik Koordinat Sistemi (*Ortalama Yersel Koordinat Sistemi*) türünden ifade eder. Bu sistem, noktaların uzaydaki konumlarını ve astronomik enlem ve boylamlarını tanımladığı için gözlemlerin indirgenmeksizin kullanılmasına olanak sağlar. Dolayısıyla yermerkezli üç boyutlu ağların dengelenmesi amacıyla fonksiyonel model bu temel eşitliklere göre oluşturulur.

(11) eşitlikleri aynı zamanda bir Bruns çokyüzlüsünün analitik tanımıdır (Şekil 3). Yeryüzündeki nirengi noktaları ve bunları birleştiren gözleme doğrultularının oluşturduğu şekle *Bruns Çokyüzlüsü* denir. Bu çok yüzlü üzerindeki bir başka doğrultular grubu da istasyonlardaki çekül doğrultularıdır. Bu şeklin belirlenmesi için beş parametreye gereksinim duyulur. Bunlardan üçü (X, Y, Z) dik koordinatları, diğer ikisi de (Φ, Λ) çekül doğrultusu yönünü belirleyen parametrelerdir [1, 2]. Bu amaçla yapılacak ana gözlemler şunlardır.



Şekil 3. Bir Bruns Çok Yüzlüsü ve Elipsoid Üzerine İzdüşümü

1. Yatay doğrultular ve düşey açılar.
2. Eğik (Uzay) uzunluklar.
3. Çekül doğrultusunu sabit kılmak için astronomik enlem ve boylam ile çokyüzlünün yönlendirilmesini sağlamak için astronomik azimut ölçüleri. Bu üçüncü grup gözlemlerin pratikte elde edilmesi çok nadirdir ve oldukça zahmetlidir.

Bu ölçü gruplarına

4. Ortometrik yükseklik farkları
5. Günümüz teknolojisinde kolaylıkla elde edilebilen SLR ve GPS koordinat farkları da eklenmektedir.

Ortometrik yükseklik farkları yerine Δg gravite farkları da ölçülebilir. Bu ölçü grubu diğer ölçü grubunun geometrik karakterini taşımadığı için genellikle kullanılmazlar.

3.2. Matematik Model

Jeodezik ölçülerin dengeleme ile değerlendirilmesi matematik modellere dayanır. n sayıda ölçü değeri n boyutlu raslantısal vektörün gerçekleşen değerleri anlamındadır. Bu

vektörün n boyutlu normal dağılımda olduğu kabul edilmektedir [4].

Bir matematik model fonksiyonel ve stokastik modellerden oluşmaktadır.

Fonksiyonel model; ölçülerle bilinmeyenler arasındaki sabit geometrik ve fiziksel ilişkileri gösteren fonksiyondur. Bu tip fonksiyonel modellere "*Deterministik Model*" de denilmektedir [5]. Fiziksel ilişkileri doğrudan elde eden ölçü türleri kullanışlı olmadığından uygulamada çoğunlukla geometrik modeller geçerli olmaktadır.

En genel biçimiyle, fonksiyonel modelin doğrusal olması gerekir. Fonksiyonel modelin doğrusal olmadığı durumlarda bilinmeyenler için yaklaşık değerler seçilir ve fonksiyon bilinmeyenlere göre doğrusallaştırılır.

Yermerkezli üç boyutlu bir dik koordinat sisteminde; üçü (X, Y, Z) Kartezyen dik koordinatları ile diğer ikisi (ϕ , Λ) çekül sapmaları bileşenlerinin yönünü belirleyen bilinmeyenler olmak üzere her bir durulan nokta için beş adet bilinmeyen vardır.

$f(x)$: Ölçülerle Bilinmeyenler Arasındaki Fonksiyon

olmak üzere; fonksiyonel model genel biçimiyle

$$L_i + v_i = f_i (x^0 + dx) \quad (13)$$

şeklinde oluşturulur. Burada

$$[x^0]^T = [X^0, Y^0, Z^0, \Phi^0, \Lambda^0, K^0, C^0 \dots]$$

: Bilinmeyenlerin Yaklaşık Değerleri

$$[dx]^T = [dx, dy, dz, d\Phi, d\Lambda, dk, dc \dots]$$

: Diferansiyel Anlamda Koordinat Bilinmeyenleri

K^0 : Yaklaşık Refraksiyon Sabiti

C^0 : Yaklaşık Ölçek Bilinmeyeni

$L_i^0 = f_i(x^0)$ Ölçülerin Yaklaşık Koordinatlardan Hesaplanan Değerleri

L_i : Ölçüler

$$-l_i = L_i^0 - L_i \quad \text{Kısaltılmış Gözlemler} \quad (14)$$

olmak üzere düzeltme denklemleri

$$v = Ax - l \quad (15)$$

biçiminde oluşturulur. A matrisinin elemanları ise

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i(x^0)}{\partial x_j} \quad (16)$$

olarak gösterilebilir.

Ölçülerin duyarlılıkları (ortalama hataları ve ağırlıkları) ve aralarındaki korelasyonlar konusunda dengelemeden önce (öncül, a priori) elde edilen bilgilere **Stokastik Model** denir [5].

Korelasyonlu gözlemler için stokastik model, genel biçimiyle

$$K_{ll} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \dots & \dots & \rho_{1n}\sigma_1\sigma_n \\ & \sigma_2^2 & \dots & \dots & \rho_{2n}\sigma_2\sigma_n \\ & & \text{simetrik} & & \\ & & & & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \quad (17)$$

varyans-kovaryans matrisi ile tanımlanır. Genelde ilk ölçülerin birbirinden bağımsız oldukları varsayılmaktadır. Bu durumda K_{ll} matrisinin köşegen dışındaki elemanları sıfır olurlar. Uygulamada kuramsal değerlere ulaşamadığından deneysel değerlerle çalışılır. Korelasyonsuz ölçüler için genel stokastik model

$$P_i = \frac{m_0^2}{m_i^2} \quad (18)$$

şeklinde tanımlanır.

m_0^2 : σ_0^2 Kuramsal Öncül Varyansın Deneysel Değeri

m_i^2 : σ_i^2 Kuramsal Varyansın Deneysel Değeri

Sözü edilen öncül değer bir tanı dengelemesi ile kestirilebilir ya da üçgen kapanmalarından elde edilebilir. Öncül değer kestirilmesinde istasyon dengelemesinin sonuçlarından da yararlanılabilir. Doğrultu ölçülerinin varyansları istasyon dengelemeleri ile belirlenir. Bartlett testi ile her bir istasyonda elde edilen varyansların eşdeğer olup olmadıkları denetlenir [6].

$$f_i = (n_i - 1) (S_i - 1) \quad (19)$$

f_i : Doğrultu Demetlerinin Serbestlik Derecesi

n_i : i Numaralı Doğrultu Demetinin Silsile Sayısı

S_i : i Numaralı Demetteki Doğrultu Sayısı

$$f_0 = f_1 + f_2 + \dots + f_m = \Sigma f$$

: Gözlenen Yatay Doğrultuların Toplam Serbestlik Derecesi

olmak üzere yatay doğrultu demetlerinin ortalama varyansı

$$S_0^2 = \frac{1}{f_0} (f_1 \cdot M_1^2 + f_2 \cdot M_2^2 + \dots + f_m \cdot M_m^2) \quad (20)$$

m : İstasyon Sayısı

M_i : Bir Doğrultunun Ortalama Hatası

hesaplanır. Test sabiti c

$$c = 1 + \frac{1}{3(m-1)} \left\{ \left[\frac{1}{f_1} \right] - \frac{1}{f_0} \right\} \quad (21)$$

hesaplanır.

Sıfır hipotezi

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_m^2 = \sigma_0^2 \quad (22)$$

Seçenek hipotezi

$$H_s : \sigma_k^2 \neq \sigma_0^2 \text{ (en az bir } k \text{ için)} \quad (23)$$

kurulur. Test büyüklüğü

$$B = \frac{1}{C} \left\{ f_0 \ln(S_0^2) - [f_i \ln(M_i^2)] \right\} \quad (24)$$

eşitliğinden bulunur. H_0 hipotezinin geçerli olduğu durumlarda test büyüklüğü B , χ^2 dağılımındadır. Testin sınır değeri

$$q = \chi_{m-1, 1-\alpha}^2 \quad (25)$$

serbestlik derecesi $m-1$, istatistik güven $S=1-\alpha$ değerlerinden yararlanılarak χ^2 dağılım cetvellerinden alınır ya da hesaplanır.

- $B \leq q$ ise; H_0 Hipotezi Geçersiz Sayılamaz.
Karşılaştırılan Veriler Duyarlık Yönünden Homojendir.
- $B > q$ ise; H_0 Hipotezi Geçersizdir. Karşılaştırılan Ölçülerin Duyarlıkları Farklıdır. (26)

Seçenek hipotezinin geçerli olduğu durumlarda her bir doğrultu demeti için ağırlıklar

$$P_{r_i} = \frac{s_0^2}{m_{r_i}^2}$$

diğer ölçü grupları için de

$$P_i = \frac{s_0^2}{m_i^2}$$

eşitlikleri ile belirlenirler. Sıfır hipotezi geçerli ise doğrultular için ağırlıklar

$$P_{r_i} = 1$$

olarak alınır.

Öncül varyansın deneysel değeri sadece doğrultular ile yapılacak bir dengeleme sonucunda da kestirilebilir.

Kesin dengeleme sonucunda model hipotezi geçersiz çıkması durumunda ağırlıklar

$$P_i = \frac{s_0^2}{m_1^2} F$$

$$(F = \frac{m_0^2}{s_0^2} \text{ olmak üzere}) \quad (27)$$

şeklinde yeniden hesaplanırlar.

Ölçülerin aralarındaki korelasyonları kestirmek çoğunlukla güç ya da olanaksızdır. Deneyimlere ve kovaryans fonksiyonlarına dayanan tahmini hataları, dengeleme sonuçlarını etkileyebilir. Cebrik ve fiziksel korelasyonları etkisiz kılmak için uygun ölçme yöntemleri seçilir, gerekirse fonksiyonel modele yeni parametreler eklenir [4].

3.3. Düzeltme Denklemlerinin Kurulması

Yermerkezli Üç Boyutlu Dik Koordinat Sistemi 'nde kullanılan ölçülere ilişkin düzeltme denklemleri ve ölçülerin ağırlıkları aşağıdaki gibi oluşturulur [7].

a) Yatay Doğrultular(r_{12})

$$v_{r,12}^{cc} = -dO_1 + A_1(dX_2-dX_1)+A_2(dY_2-dY_1)+A_3(dZ_2-dZ_1)+ \\ + A_4d\Phi_1 + A_5\Phi\Lambda_1 - l_{r,12}^{cc} \quad (28)$$

$$-l_{r,12} = \alpha_{12} - O_1 - r_1 ; \text{ ağırlık } P_0 = \frac{m_0^2}{m_r^2}$$

$$\tan \alpha_{12} = \frac{(Y_2^0 - Y_1^0) \cos \Lambda_1 - (X_2^0 - X_1^0) \sin \Lambda_1}{(Z_2^0 - Z_1^0) \cos \Phi_1 - (X_2^0 - X_1^0) \sin \Phi_1 \cos \Lambda_1 - (Y_2^0 - Y_1^0) \sin \Phi_1 \sin \Lambda_1}$$

$$A_1 = \rho^{cc} (\sin \Phi_1 \cos \Lambda_1 \sin \alpha_{12}^0 - \sin \Lambda_1 \cos \alpha_{12}^0) / d_{12}^0 \sin \beta_{12}^0$$

$$A_2 = \rho^{cc} (\sin \Phi_1 \sin \Lambda_1 \sin \alpha_{12}^0 + \cos \Lambda_1 \cos \alpha_{12}^0) / d_{12}^0 \sin \beta_{12}^0$$

$$A_3 = -\rho^{cc} \cos \Phi_1 \sin \alpha_{12}^0 / d_{12}^0 \sin \beta_{12}^0$$

$$A_4 = \sin\alpha_{12}^0 \cot\beta_{12}^0$$

$$A_5 = \sin\Phi_1 - \cos\Phi_1 \cot\beta_{12}^0 \cos\alpha_{12}$$

b) Düşey Açılar (β_{12})

$$v_{\beta,12}^{cc} = -\rho^{cc} \frac{d_{12}}{2R} dK_{12} + B_1(dX_2 - dX_1) + B_2(dY_2 - dY_1) + B_3(dZ_2 - dZ_1) + B_4 d\Phi_1 + B_5 d\Lambda_1 - l_{\beta,12} \quad (29)$$

$$K^0 = 0,125$$

$$-l_{\beta,12} = \beta_{12}^0 - \rho^{cc} \frac{d_{12}}{2R} K^0 - \beta_{12} \quad ; \quad \text{Ağırlık} \quad P_{\beta} = \frac{m_0^2}{m_{\beta}}$$

$$\cos\beta_{12}^0 = \{(X_2^0 - X_1^0) \cos\Phi_1 \cos\Lambda_1 + (Y_2^0 - Y_1^0) \cos\Phi_1 \sin\Lambda_1 + (Z_2^0 - Z_1^0) \sin\Phi_1\} / d_{12}^0$$

$$d_{12}^0 = \{(X_2^0 - X_1^0)^2 + (Y_2^0 - Y_1^0)^2 + (Z_2^0 - Z_1^0)^2\}^{1/2}$$

$$B_1 = \rho^{cc} \{(X_2 - X_1) \cos\beta_{12}^0 - d_{12} \cos\Phi_1 \cos\Lambda_1\} / d_{12}^{02} \sin\beta_{12}^0$$

$$B_2 = \rho^{cc} \{(Y_2 - Y_1) \cos\beta_{12}^0 - d_{12} \cos\Phi_1 \sin\Lambda_1\} / d_{12}^{02} \sin\beta_{12}^0$$

$$B_3 = \rho^{cc} \{(Z_2 - Z_1) \cos\beta_{12}^0 - d_{12} \cos\Phi_1\} / d_{12}^{02} \sin\beta_{12}^0$$

$$B_4 = -\cos\alpha_{12}^0$$

$$B_5 = -\cos\Phi_1 \sin\alpha_{12}^0$$

c) Eğik Uzunluklar (d_{12})

$$v_{d,12} = C_1(dX_2 - dX_1) + C_2(dY_2 - dY_1) + C_3(dZ_2 - dZ_1) - l_{d,12} \quad (30)$$

$$-l_{d,12} = d_{12}^0 - d_{12} \quad ; \quad \text{Ağırlık} \quad P_d = \frac{m_0^2}{m_d}$$

$$C_1 = (X_2^0 - X_1^0) / d_{12}^0$$

$$C_2 = (Y_2^0 - Y_1^0) / d_{12}^0$$

$$C_3 = (Z_2^0 - Z_1^0) / d_{12}^0$$

d) Normal Ortometrik Yükseklik Farkları (ΔH_{12})

$$v_{\Delta H,12} = D_1 dX_2 + D_2 dX_1 + D_3 dY_2 + D_4 dY_1 + D_5 dZ_2 + D_6 dZ_1 - l_{\Delta H,12} \quad (31)$$

$$-l_{\Delta H,12} = \Delta h_{12}^0 - \Delta H_{12} - \Delta N_{12} \quad \text{Ağırlık} \quad P_{\Delta H} = \frac{m_0^2}{m_{\Delta H}^2}$$

Δh_{12}^0 : Hesaplanan Elipsoidal Yükseklik Farkı

ΔH_{12} : Ölçülen Ortometrik Yükseklik Farkı

ΔN_{12} : Jeoid Ondülasyonları (Dalgalanmaları) Farkı
($N_2 - N_1$)

$$D_1 = \cos B_2 \cos L_2 \quad ; \quad D_2 = -\cos B_1 \cos L_1 \quad ; \quad D_3 = \cos B_2 \sin L_2$$

$$D_4 = -\cos B_1 \sin L_1 \quad ; \quad D_5 = \sin B_2 \quad ; \quad D_6 = -\sin B_1$$

e) İnersiyal Koordinatlar (X, Y, Z)

$$v_{X,1} = dX_1 - l_{X1} \quad ; \quad -l_{X1} = X_1^0 - X_1$$

$$v_{Y,1} = dY_1 - l_{Y1} \quad ; \quad -l_{Y1} = Y_1^0 - Y_1$$

$$v_{Z,1} = dZ_1 - l_{Z1} \quad ; \quad -l_{Z1} = Z_1^0 - Z_1$$

$$K_{X,Y,Z} = m_0^2 Q_{X,Y,Z} \quad (32)$$

f) GPS Koordinat Farkları ($\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$)

$$v_{\Delta X,12} = -dX_1 + dX_2 - l_{\Delta X,12} \quad ; \quad -l_{\Delta X,12} = (X_2^0 - X_1^0) - \Delta X \quad (33)$$

$$v_{\Delta Y,12} = -dY_1 + dY_2 - l_{\Delta Y,12} \quad ; \quad -l_{\Delta Y,12} = (Y_2^0 - Y_1^0) - \Delta Y$$

$$v_{\Delta Z,12} = -dZ_1 + dZ_2 - l_{\Delta Z,12} \quad ; \quad -l_{\Delta Z,12} = (Z_2^0 - Z_1^0) - \Delta Z$$

$$K_{(\Delta X, \Delta Y, \Delta Z)} = m_0^2 Q_{(\Delta X, \Delta Y, \Delta Z)}$$

g) Çekül sapmalarının yönünü belirlemek ve çok yüzlüyü yönlendirmek amacıyla gözlenen astronomik enlem, boylam ve azimut ölçüleri

$$\begin{aligned} v_{(\Phi,1)}^{cc} &= d\Phi_1 - l_{(\Phi,1)} ; -l_{(\Phi,1)} = \Phi_1^0 - \Phi_1 & P_{\Phi} &= \frac{m_0^2}{m_{\Phi}^2} \\ v_{(\Lambda,1)}^{cc} &= d\Lambda_1 - l_{(\Lambda,1)} ; -l_{(\Lambda,1)} = \Lambda_1^0 - \Lambda & P_{\Lambda} &= \frac{m_0^2}{m_{\Lambda}^2} \\ -v_{(A,12)}^{cc} &= A_1(dX_2 - dX_1) + A_2(dY_2 - dY_1) + A_3(dZ_2 - dZ_1) + \\ & \quad + A_4 d\Phi_1 + A_5 d\Lambda_1 - l_{(A,12)} & & (34) \\ -l_{(A,12)} &= \alpha_{12}^0 - A_{12} \quad \text{Ağırlık} & P_A &= \frac{m_0^2}{m_A^2} \end{aligned}$$

Sonuç olarak matematik model

$$E(l) = Ax, \quad K_{ll} = m_0^2 Q_{ll} \quad (35)$$

sistemi ile belirlenmiş olur. Buna aynı zamanda *Gauss-Markof Modeli* de denmektedir.

Ölçü sayısı n , bilinmeyen sayısı u ' dan büyük olduğundan

$$\hat{l} = Ax \quad (36)$$

denklemleri tutarsız (inkonsistenz) olur. (35)' deki eşitlik ε raslantı vektörü (gerçek hata) olmak üzere,

$$l + \varepsilon = A\tilde{x} \quad (37)$$

biçiminde tutarlı denklem sistemine dönüştürülür. x ve ε değerlerinin dengeleme ile belirlenen kestirim değerleri x ve v ile gösterilirse

$$\hat{l} = l + v = Ax \quad K_{ll} = m_0^2 Q_{ll} \quad (38)$$

denklem sistemine ulaşılır.

A katsayılar matrisinin rangının u bilinmeyen sayısına eşit olduğu durumlarda

$$v^T P v \Rightarrow \min \quad (39)$$

koşulunu öngören en küçük kareler yöntemi ile bilinmeyenler ve düzeltmeler hesaplanır.

$$\begin{aligned} x &= Q_{xx} A^T P l & Q_{xx} &= (A^T P A)^{-1} \\ v &= -Q_{vv} P l & Q_{vv} &= Q_{ll} - A Q_{xx} A^T \end{aligned} \quad (40)$$

Ağın belirli olması için gerekli sayıda parametrelerin (datum parametreleri) sabit alınmadığı durumlarda

$$v^T P v + x^T x \Rightarrow \min$$

koşulunu öngören en küçük kareler çözümü yapılır. Burada

$$Q_{xx} = (A^T P A)^+ = (A^T P A + G G^T)^{-1} - G G^T \quad (41)$$

olarak Moore-Penrose inversi ile hesaplanır [4]. Bir başka deyişle ağ serbest olarak dengelenir. Burada G matrisi d sayıda değeri sifıra eşit olan özdeğerlere karşılık gelen öz vektörlerden oluşturulacağı gibi, ağırlık merkezine ötelenmiş ve normlandırılmış koordinatlarla da kurulabilir [8]. G matrisi ağın tümünden oluşturulursa (41) eşitliği ile tüm iz minimum koşulu, ağın belirli sayıda koordinatlarından elde ediliyorsa kısmi iz minimum koşulu gerçekleşir.

3.4. Matematik Modelin Testi

Dengeleme hesabında kullanılan matematik modelin, ölçülerle bilinmeyenler arasında kurulan geometrik ve fiziksel ilişkilere uygun olup olmadığı, ölçülerin duyarlılıklarını ve aralarındaki korelasyonları yeterince yansıtıp yansıtmadığı model hipotezinin testi ile denetlenir [8].

Umut değeri μ , standart sapması σ olan

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\sigma} = \frac{l - \mu}{\sigma} \quad (42)$$

biçiminde normlandırılmış rasgele değişken ε , umut değeri $\mu_\varepsilon=0$ ve standart sapması $\sigma_\varepsilon=1$ olan standartlaştırılmış normal dağılımdadır. Sözkonusu rasgele değişkenin düzeltmelerden (v) hesaplandığı durumlarda;

$$s^2 = \frac{1}{n-u} \sum_{i=1}^n v^2 \quad \text{Deneysel Varyans} \quad (43)$$

olmak üzere

$$\chi_f^2 = f \frac{s^2}{\sigma^2} \quad (44)$$

Chi-kare dağılımlı rasgele değişken elde edilir. Serbestlik dereceleri f_1 ve f_2 olan, birbirinden bağımsız χ^2 - dağılımlı iki rasgele değişkenin birbirlerine oranı F-dağılımlıdır. F-dağılımının rasgele değişkeni

$$F_{f_1, f_2} = \frac{\chi_{f_1}^2 / f_1}{\chi_{f_2}^2 / f_2} \quad \text{Fisher Dağılımının Rasgele Değişkeni} \quad (45)$$

f_1 : $\chi_{f_1}^2$ Rasgele Değişkeninin Serbestlik Derecesi

f_2 : $\chi_{f_2}^2$ Rasgele Değişkeninin Serbestlik Derecesi

eşitliği ile tanımlanır. χ^2 dağılımlı bağımsız değişkenlerin kuramsal varyansları eşitse

$$F_{f_1, f_2} = \frac{s_1^2}{s_2^2} \quad (46)$$

olarak elde edilir. Bu son eşitlik, jeodezik problemlerin dengelenmesi için kurulan modellerin testi için başvurulan çok önemli bir bağıntıdır. Aynı koşullarda, benzer türden çok sayıda ölçülerin değerlendirilmesi sonucunda elde edilen öncül

(a posteriori) değer m_0 ' ın, aynı kuramsal standart sapma σ_0 ' ın deneysel değerlerini temsil edip etmediği

$$H_0 : E\{m_0^2\} = E\{\bar{m}_0^2\} = \sigma_0^2 \quad \text{Sıfır Hipotezi} \quad (47)$$

$$H_0 : E\{m_0^2\} \neq E\{\bar{m}_0^2\} \neq \sigma_0^2 \quad \text{Seçenek Hipotezi} \quad (48)$$

biçiminde oluşturulan model hipotezinin test edilmesiyle anlaşılır. m_0^2/\bar{m}_0^2 oranı merkezil F dağılımına uyar.

$$\frac{m_0^2}{\bar{m}_0^2} \leq F_{f, \bar{f}, 1-\frac{\alpha}{2}} \quad (49)$$

f : n-u Dengelemenin Serbestlik Derecesi

\bar{f} : Öncül Değerin Serbestlik Derecesi

olmak üzere

$$T = \frac{m_0^2}{\bar{m}_0^2} \quad \text{Test Büyüklüğü hesaplanır.} \quad (50)$$

Seçilen $\alpha = 0.05$ yanılma olasılığı ve serbestlik derecelerine karşılık gelen $F_{f, \bar{f}, 1-\frac{\alpha}{2}}$ değeri, dağılım fonksiyonundan ya da F dağılım tablosundan hesaplanır.

$$T < F_{f, \bar{f}, 1-\frac{\alpha}{2}} \quad \text{ise Dengeleme Modeli Geçerlidir.} \quad (51)$$

Kurulan fonksiyonel model, gözlemlerle bilinmeyenler arasındaki geometrik ve fiziksel gerçeklere uygundur. Stokastik model, gözlemlerin duyarlıklarını ve aralarındaki korelasyonları yeterince yansıtmaktadır. Geçerli bir model hipotezi dengeleme işlemlerinin tümü için bir güven ölçütüdür.

$$T > F_{f, \bar{f}, 1-\frac{\alpha}{2}} \quad \text{ise Dengeleme Modeli Geçersizdir.} \quad (52)$$

Bu durumda ölçülerin birinde ya da bir kaçında uyumsuzluklar olabilir. Ya da istenmeyen bir takım kaba hatalardan,

indirgeme hatalarından veya stokastik modelin yetersizliğinden sözedilebilir.

3.4.1. Uyuşumsuz Ölçülerin Testi

Model hataları çoğunlukla ölçülerde yapılan kaba hatalardan kaynaklanır. Okuma yazma hataları, aletlerin yanlış merkezleştirilmesi, yanlış hedefe gözlem yapma, ölçülerin yanlış indirgenmeleri gibi kaba hatalar, düzeltme denklemlerinin kurulma aşamasında, sabit terimlerde kendisini gösterirler ve kolayca giderilebilirler. Ancak rasgele hatalara çok yakın kaba hatalar dengeleme sonucunda, matematik modelin test edilmesiyle anlaşılabilir ve dengeleme sonucunda uygulanan *Uyuşumsuz Ölçülerin Testi* ile belirlenebilirler. Herhangi bir l_i ölçüsü Δ_i kadar bir hataya sahip olsun. Diğer gözlemler ise rasgele hataların etkisi altında bulunsun. Bu durumda;

$$H_0 : \bar{l}_i = l_i + \varepsilon_i \quad ; \quad \bar{l}_i = E\{l_i + \varepsilon_i\} \quad \text{Sıfır Hipotezi} \quad (53)$$

$$H_s : \bar{l}_i = l_i + \Delta_i + \varepsilon_i \quad ; \quad \bar{l}_i = E\{l_i + \Delta_i + \varepsilon_i\} \quad \text{Seçenek Hipotezi} \quad (54)$$

şeklinde oluşturulur [9, 10].

Ana kümeyi temsil eden kuramsal standart sapmanın sayısal değeri, çok ender durumlarda belirlenebilir. Bu nedenle gerçek hata ε , kuramsal standart sapma σ_0 yerine, standart sapma s' ye bölünerek standartlaştırılırsa

$$t_f = \frac{\varepsilon}{s} = \frac{l - \mu}{s} \quad (55)$$

t_f dağılımının rasgele değişkeni elde edilir. Bu rasgele değişkenin tanımına aynı zamanda *Student Dağılımı* da denir ve düzeltmelerden hesaplandığı durumlarda

$$t_f = \frac{|v|}{s_v} \quad (56)$$

olarak tanımlanır. Kaynaklarda student dağılımı yerine geçen başka dağılımlar da kullanılmaktadır.

t-dağılımı sıfır noktasına göre simetrik bir dağılımdır ve serbestlik derecesi büyüdükçe normal dağılıma yaklaşır, $f=\infty$ için normal dağılıma teğet olur [8, 11].

Uyuşumsuz ölçüler

$$W_{i',B} = \frac{|v_i|}{s_{v_i}} = \frac{|v_i|}{\sigma_0 \sqrt{Q_{v_i v_i}}} \sim N(0,1) \text{ Baarda Test Büyüklüğü} \quad (57)$$

$$\tau_{i',p} = \frac{|v_i|}{m_{v_i}} = \frac{|v_i|}{m_0 \sqrt{Q_{v_i v_i}}} \sim \tau_f \text{ Poppe (Tau) Test Büyüklüğü} \quad (58)$$

$$T_{i',t} = \frac{|v_i|}{m_{v_i}} = \frac{|v_i|}{s_0 \sqrt{Q_{v_i v_i}}} \sim t_{f-1} \text{ t-Test Büyüklüğü} \quad (59)$$

test büyüklüklerinin herhangi biri ile ilgili dağılım değerlerinin karşılaştırılmasıyla irdelenebilirler.

Test büyüklükleri Baarda'ya göre [12];

$$\begin{aligned} W_{i',B_{\max}} &> k_{1-\frac{\alpha}{2}} & (60) \\ k_{1-\frac{\alpha}{2}} &= N(0,1)_{1-\frac{\alpha}{2}} + N(0,1)_{1-\frac{\beta}{2}} \\ k_{1-\frac{\alpha}{2}} &\cong \sqrt{F(1,\infty,1-\alpha)} \\ 1-\frac{\beta}{2} &: \text{ Testin Gücü} \end{aligned}$$

Poppe'ye göre [13];

$$\begin{aligned} \tau_{i',p_{\max}} &> \tau_{f,1-\frac{\alpha}{2}} & (61) \\ \tau_{f,1-\frac{\alpha}{2}} &= \sqrt{\frac{f \cdot F(1,f-1,1-\alpha)}{f-1+F(1,f-1,1-\alpha)}} \\ \tau_{f,1-\frac{\alpha}{2}} &\cong \sqrt{F(1,f-1,1-\alpha)} \end{aligned}$$

şeklinde dağılım değerleriyle karşılaştırılarak en büyük test büyüklüğüne karşılık gelen ölçülerin uyumsuz ölçüler olduğuna karar verilir [14].

t-testi için fonksiyonel model, hatalı gözlem olarak ele alınan her bir i ölçüsüne karşılık

$$l + v = [A \ e_i] \begin{bmatrix} X \\ \Delta_i \end{bmatrix} \quad (62)$$

şeklinde ayrı ayrı genişletilerek oluşturulur. Burada

$$q_{\Delta\Delta} = \frac{1}{e_i^T P Q_{vv} P e_i} \quad (63)$$

$$\Delta_i = -\frac{e_i^T P v}{e_i^T P Q_{vv} P e_i} \quad (64)$$

büyüklikleri hesaplanarak

$$s_0 = \pm \sqrt{\frac{1}{f-1} \left(P_{vv} - \frac{\Delta_i}{q_{\Delta\Delta}} \right)}$$

$$s_0 = \pm \sqrt{\frac{1}{f-1} \left(P_{vv} - \frac{v_i^2}{q_{v_i v_i}} \right)} \text{ Genişletilmiş Modelin Soncul Değeri} \quad (65)$$

hesaplanır [8].

$$T_{i,t} = \frac{|v_i|}{s_0 \sqrt{q_{v_i v_i}}} \text{ Test Büyüklüğü hesaplanır.} \quad (66)$$

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - \sqrt[n]{1 - \frac{\alpha}{2}} \text{ Yanılma Sınırı} \quad (67)$$

olmak üzere

$$T_{i,t_{\max}} > T_{f-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \text{ ise} \quad (68)$$

$T_{i_{\max}}$ ölçüsünün uyumsuz olduğuna karar verilir.

Yukarıda sözü edilen ölçütlerden herhangi biri kullanılarak, her bir adımda belirlenen max. test büyüklüğüne karşılık gelen i ölçüsünün uyumsuz olduğuna karar verilir. Serbestlik ölçütü (redundanz payı) yeterli ise i 'nci gözlem ölçü planından çıkarılır. Aksi durumda ise hatalı gözlemin yenilenmesi gerekir. Belirlenen uyumsuz ölçülerden gerekli olanları yenilenecek dengeleme işlemine katılması, ağın duyarlık yönünden iyileştirilmesi yönünden zorunludur.

Tüm ölçülerin aynı zamanda kaba hatalı çıkma olasılığı tüm gözlemlerin olasılıkları çarpımlarına eşittir. Test büyük-

lükleri arasında korelasyonlar gözardı edildiğinde, toplam yanılma olasılığı $\alpha=1-(1-\alpha_0)^n$ 'dir. Bu durumda tek bir gözlem için yanılma olasılığı

$$\alpha_0 \approx 1-(1-\alpha)^{1/n} \approx \frac{\alpha}{n} \quad (69)$$

olarak elde edilir. Ölçü sayısı çok fazla ise α_0 çok küçük çıkar. Bu durumda yanılma olasılığının $\alpha_0=0.001$ olarak alınması uygun olabilir. Ya da ağ uygun sayıda gözlemlerden oluşan parçalara ayrılmalıdır. Başka bir deyişle, Poppe ya da Baarda testi serbestlik derecesi çok büyük olan ağlar için kullanışlı değildir.

t-testi ise serbestlik derecesi ($5 < f < 500$) koşulu altında oldukça güvenilir bir karşılaştırma ölçütü olarak düşünülebilir.

Serbestlik dereceleri uygun büyüklükte olan ağlar için sözü edilen ölçütlerden herhangi birinin kullanılmasında hiç bir sakınca yoktur.

3.5. Doğrusal Hipotez Testleri ve Fonksiyonel Modelin Testi

Jeodezik problemlerin bir çoğunda, hangi parametrelerin bilinmeyenler vektöründe yer alması gerektiği sorusuna başlangıçta kesin bir yanıt verilemez. Sözelimi eğik uzunluklar ya da ortometrik yükseklik farklarından ileri gelen ölçek katsayısının ya da çekül sapmaları parametrelerinin de bilinmeyenler olarak ele alınması gerekebilir. Bunun gibi jeodezik ağların bazı noktalarında duyarlık ya da ölçme planı yönünden belirli geometrik koşulların sağlanması istenebilir. Bu türden koşulların dengeleme sonuçları ile uyumlu olup olmadıkları sorusuna *Doğrusal Hipotez Testleri* ile yanıt verilebilir [8, 15].

İstatistiksel anlamda her doğrusal hipotez

$$H_0 : B x = w \quad (70)$$

biçiminde oluşturulur ve dengeleme sonucunda bu hipotezin geçerli olup olmadığı test edilir. Doğrusal hipotez testleri için B büyüklüğünün

$$B = DA \quad (71)$$

biçiminde A katsayılar matrisinin bir doğrusal dönüşümü sonucunda elde edilebilen kestirilebilir bir büyüklük olması gerekir. Doğrusal hipotez testleri için normal denklemler

$$\begin{aligned} A^T P A x_H + B^T k - A^T P l &= 0 \\ B x_H - w &= 0 \end{aligned} \quad (72)$$

biçiminde oluşturulur. Burada; genişletilmiş modelden (*Bilinmeyenleri arasında koşul denklemleri bulunan dolaylı ölçüler dengelemesi problemi*) elde edilen

$$\Omega_H = v_H^T P v_H \quad (73)$$

karesel büyüklüğü, dolaylı ölçüler dengelemesinden elde edilen

$$\Omega = v^T P v \quad (74)$$

karesel büyüklüğünden farklıdır.

$$x_H = x - (A^T P A)^+ B^T k \quad (75)$$

olmak üzere

$$R = (B x - w)^T \{ B (A^T P A)^+ B^T \}^+ (B x - w) \quad (76)$$

doğrusal hipotezine ait karesel büyüklük, dolaylı ölçüler dengelemesi modelinden kolaylıkla kestirilebilir.

R/σ_0^2 oranı Chi-kare dağılımındadır ve bu oran için

$$\frac{R}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(h) \quad (77)$$

h : Koşul Denklemlerine ait Serbestlik Derecesi bağıntısı yazılabilir. Model hipotezi

$$E\{l\} = Ax \quad (78)$$

eşitliğinin geçerli olduğu durumlarda, $\Omega = v^T P v$ büyüklüğü de Chi-kare dağılımındadır. Stokastik yönden bağımsız Chi-kare dağılımlı R/σ_0^2 ve Ω/σ_0^2 değişkenlerinin

$$T = \frac{R/(\sigma_0^2 h)}{\frac{\Omega}{\sigma_0^2(n-u)}} = \frac{R}{s_0^2 h} \quad (79)$$

oranı, dış merkezlik parametresi $\lambda_E=0$ olan

$$F_{h,(n-u),1-\frac{\alpha}{2}} \quad (80)$$

merkezil F-dağılımına uyar.

$$T < F_{h,(n-u),1-\frac{\alpha}{2}} \text{ ise Model Hipotezi Geçerlidir.} \quad (81)$$

Fonksiyonel modele ek olarak konulan koşullar dengeleme sonuçları ile uyumludur.

Bu tür hipotezler, çoğunlukla farklı periyotlarda ölçülen ağırlarda, deformasyon irdelemesi yapmak amacıyla kullanılmaktadır.

Dengeleme sırasında kurulan fonksiyonel model, ölçülerle bilinmeyenler arasında kurulan matematik ve geometrik ilişkileri iyi yansıtmalıdır. Dengeleme sonucunda elde edilen v_i ölçü düzeltmelerinin sistematik bir Δ_i hatası ile yüklü olup olmadığı, başka bir deyişle sistematik bir hatanın varlığı, fonksiyonel modelin test edilmesiyle irdelenebilir.

Dengeleme modeline ait

$$v^T P v \Rightarrow \min \quad (39)$$

amaç fonksiyonunun yeterince sağlanamadığı durumlarda, bir sistematik hatadan kuşkulandır. Ya da sistematik hatayı temsil ettiği varsayılan bilinmeyenlerin dengeleme sonuçlarına etkileri irdelenmek istenebilir.

$$v = Ax - l \quad (15)$$

fonksiyonel modeli,

$$v = A x + B y - l \quad (82)$$

biçiminde genişletilir. y ek bilinmeyenler vektöründe ölççek katsayısı, refraksiyon sabiti ya da çekül sapması parametreleri vb. büyüklükler ele alınabilir. Basit fonksiyonel

modelden elde edilen m_0^2 deneysel varyansı ile genişletilmiş modele ait

$$m^2 = \frac{y^T Q_{yy}^{-1} y}{h} \quad (83)$$

karesel büyüklükleri stokastik yönden bağımsız Chi-kare dağılımlı büyüklüklerdir.

$$H_0 : E\{m_0^2\} = E\{m^2\} = \sigma^2 \quad (84)$$

şeklinde kurulan sıfır hipotezi

$$T = \frac{m^2}{m_0^2} > F_{h, n-u, 1-\frac{\alpha}{2}} \quad (85)$$

durumunda geçersiz olur. Başka bir deyişle fonksiyonel modelin genişletilmesi anlamlıdır.

Sıfır hipotezinin geçersiz olduğu durumlarda

$$T_{y_i} = \frac{|y_i|}{m_{y_i}} > t_{h, 1-\frac{\alpha}{2}} \quad (86)$$

h : y vektöründe ele alınan bilinmeyenlerin sayısı ölçütü irdelenerek, fonksiyonel modele eklenmesi ya da çıkarılması gereken parametreler saptanır.

Genişletilmiş fonksiyonel modelin ölçülere getirilecek düzeltmeleri daha da küçülteceği varsayılsa bile, ek olarak ele alınacak bilinmeyenlerin çokluğu, dengelemenin serbestlik derecesini azaltır. Bu durumda ağın güvenilirliği olumsuz yönde etkilenir. Bu nedenle genellikle sözü edilen bilinmeyenler önceden belirlenir ya da sözü edilen genişletilmiş modellerle tahmin edilirler. İkinci adımda ölçüler indirgenerek dengeleme işlemi, indirgenmiş gözlemlerle gerçekleştirilir.

3.6. Datum Probleminin İrdelenmesi

Bir jeodezik ağda yapılan gözlemler (yatay doğrultular, düşey açılar, eğik uzunluklar, yükseklik farkları vb.) ile ağ noktalarının karşılıklı konumları belirlenir. Bu veriler ağı

bir koordinat sistemindeki yeri ve ağın y6nu konusunda hiç bir bilgi taşımazlar. 6rneğin, hiç bir eğik uzunluk yada y6kseklik farkının 6lç6lmediği durumlarda ağın 6lçeği, koordinat farklarının 6lç6lmediği durumlarda ise ağın y6nu belirsiz kalır. Başka kaynaklardan elde edilmesi gereken s6z konusu parametreler, *datum parametreleri* olarak adlandırılır.

Yer merkezli 6ç boyutlu bir dik koordinat sisteminde; koordinat eksenleri y6n6nde 3 6teleme (X_0, Y_0, Z_0), eksenler etrafında 3 d6n6kl6k ($\epsilon_{x0}, \epsilon_{y0}, \epsilon_{z0}$) ve bir de 6lçek katsayısı (λ_0) olmak 6zere 7 adet datum parametresi s6z konusudur. Bu parametrelerin bir veya bir kaçının belirsiz kalması durumunda datum bozukluğu (datum defekti) oluşur. Bu tip ağlarda normal denklemler tekil (tutarsız) yapıdadır ve Cayley inversleri alınamaz. Başka bir deyişle, normal denklemler Gauss algoritmasına g6re indirgenemez, indirgeme sırasında datum bozukluğu d kadar k6şegen terim sıfır olur ve belirsizlik oluşur. Bu tip ağlarda datum defekti hakkında bilgi taşıyan yeterli sayıda g6zleme gerek vardır ya da d kadar parametrenin sabit alınması gerekir. Datum parametralerinin değişmez alınıkları dengeleme işlemine, *zorlamasız dengeleme* adı verilir.

Yer merkezli 6ç boyutlu dik koordinat sisteminde; sadece yatay doğrultuların ve d6şey açıların g6zlendiği ağlarda datum defekti 7 olur. Eğik uzunluklar ya da y6kseklik farkları 6lç6lm6şse 6lçek y6n6ndeki belirsizlik giderilmiş olur. Bu durumda ağda bir noktanın (X_1, Y_1, Z_1) koordinatı, ikinci bir noktanın (X_2, Y_2), 6ç6nc6 bir noktanın (Z_3) koordinatı sabit alınarak zorlamasız dengeleme yapılabilir. Ya da birinci noktanın (X, Y, Z) koordinatları ile birlikte (ϕ, λ) çek6l sapmaları bileşenleri, ikinci bir noktanın (Z) koordinatı da sabit alınabilir. Eğer ağın 6lçeği belirsiz ise aynı zamanda ilk iki noktanın dik koordinatları da sabit alınmalıdır.

S6z6 edilen datum bozuklukları uygun 6lçme planı ile giderilebilir. Ağda en az bir noktada bir koordinat 6çl6s6 6lç6lm6şse 6teleme y6n6ndeki belirsizlikler giderilir. En az bir azimut ve farklı azimutal y6nlerde olmak 6zere en az iki adet daha azimut ya da başucu açısı ile iki d6n6kl6k giderilir. Aynı zamanda y6kseklik farkları da 6lç6lm6şse toplam 6ç adet d6n6kl6k giderilmiş olur. Ancak s6z6 edilen bu 6lç6lerin

yeterli sayıda yapılması gerekir. Çünkü eğik uzunluklar tek başlarına yükseklik belirlemede yetersiz kalırlar. Uygulamada yetersiz sayıda gözlem yapıldığı durumlarda özellikle azimut yönünde belirsizlikler oluşur. Bu durumda; örneğin ağın bir doğrultusu sabit alınarak ağın ortalama yönü yaklaşık koordinatlardan belirlenebilir. Pratikte çok az rastlanmakla birlikte, diğer iki eksen etrafındaki dönüklüklere karşılık gelen datum bozukluklarının giderilemediği durumlarda; ek koşul olarak bir de azimutun sabit alınması gerekebilir. Astronomik gözlemlerle boylam belirlendiği durumlarda ise her gözlem istasyonu için bir boylam sabiti belirsiz kalır [16].

Çekül sapması bileşenleri ağın datumu hakkında doğrudan bilgi taşımazlar. Tüm çekül sapmalarının sabit alındığı ya da çekül sapmaları etkilerinin ölçülerle birlikte ele alındığı durumlarda; ağın ölçeği de belirli ise rang bozukluğu $d=4$ (üç öteleme, bir dönüklük) olur. GPS koordinat farkları ölçül-müşse koordinat eksenleri etrafındaki üç dönüklük ve bir ölçek bilinmeyi yok olur.

Bir jeodezik ağ, datum parametreleri sabit alınmaksızın

$$v^T P v + x^T x \Rightarrow \min \quad (87)$$

koşulu sağlanarak da dengelenebilir. Bu dengeleme sonucunda koordinatların ortalama hatalarının da minimum olduğu

$$\text{iz}\{Q_{xx}\} \Rightarrow \min \quad \text{Tüm İz Minimum} \quad (88)$$

koşulu gerçekleşir. Bir kartezyen dik koordinat sisteminde tüm iz minimum koşulu, G matrisi

$$\frac{G}{3p,7} = \begin{vmatrix} 1/\sqrt{P} & 0 & 0 & 0 & z_1 & -y_1 & x_1 \\ 0 & 1/\sqrt{P} & 0 & -z_1 & 0 & x_1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{P} & y_1 & -x_1 & 0 & z_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1/\sqrt{P} & 0 & 0 & 0 & z_p & -y_p & x_p \\ 0 & 1/\sqrt{P} & 0 & -z_p & 0 & x_p & y_p \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{P} & y_p & -x_p & 0 & z_p \end{vmatrix} \quad (89)$$

şeklinde düzenlenen, yalnız yatay doğrultuları ve düşey açıları gözlenen üç boyutlu ağlar için dönüşüm matrisi olmak üzere

$$N^+ = (A^T P A + G G^T)^{-1} G G^T \quad (90)$$

Moore-Penrose İversi ile gerçekleştirilir. Sözü edilen G matrisi d sayıda, sıfıra eşit özdeğerlere karşılık gelen özvektörlerden de oluşturulabilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} A A^- &= A \\ A^- A^- &= A^- \\ (A A^-)^T &= A A^- \\ (A^- A)^T &= A^- A \end{aligned} \quad (91)$$

koşulunu sağlayan genelleştirilmiş ters matrisler (g_4 -inverse) tek anlamlıdır [5, 8].

Jeodezik ağ önce zorlamasız olarak dengelenebilir. İkinci adımda zorlamasız dengeleme sonuçlarına

$$S = I - G(G^T G)^{-1} G^T \quad S \text{ Dönüşüm Matrisi} \quad (92)$$

olmak üzere

$$Q_{xx} = N^+ = S Q_{xx} S^T \quad (93)$$

dönüşümü uygulanarak da tüm iz minimum çözümüne ulaşılabilir [8].

G dönüşüm matrisi ve datumu belirleyen noktalara karşılık gelen köşegen elemanları "1", diğer köşegen elemanları "0" olan bir E_i matrisi yardımıyla

$$B_i = E_i G \quad (94)$$

tanımından yararlanarak (90) nolu bağıntı ile

$$N^- = (A^T P A + B_i B_i^T)^{-1} G (G^T B_i B_i^T G)^T \quad (95)$$

kısmi iz minimum çözümüne ulaşılır. Bu durumda datumu belirleyen koordinatların ortalama hataları minimum olur. Kısmi iz minimum çözümüne

$$S_1 = I - G(B_1^T G)^{-1} B_1^T \quad S_1 \text{ Dönüşüm Matrisi} \quad (96)$$

olmak üzere

$$Q_{xx}^1 = N^- = S_1 Q_{xx} S_1^T \quad (97)$$

dönüşümüyle de ulaşılabilir [8, 17].

Serbest dengeleme olarak da adlandırılan bu çözüm türlerinden tüm iz minimum çözümüne, değiştirilmiş Gauss algoritması ile de ulaşılabilir [18]. Oldukça kararlı bir çözüm yöntemi olan bu algorithmada normal denklemler matrisi

$$\begin{bmatrix} N_{rr} & N_{rd} \\ N_{dr} & N_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_r \\ X_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_r \\ n_d \end{bmatrix} \quad (98)$$

biçiminde alt matrislere ayrılır.

r : Regüler Matrise Karşılık Gelen Satır-Sütun Sayısı

d : Datum Defekti Sayısına Karşılık Gelen Satır-Sütun Sayısı

$$Z = N_{rr}^{-1} N_{rd}$$

olmak üzere

$$W = Z^T Z + I$$

$$U = ZW^{-1}$$

$$Y = N_{rr}^{-1} U$$

$$Q_{rr}^1 = N_{rr}^{-1} - ZY^T - YZ^T \quad (99)$$

$$R = Y^T U$$

$$T = ZR^T$$

kısaltmalarından yararlanılarak Moore-Penrose ters matrisinin elemanları

$$\begin{aligned} Q_{rr} &= Q_{rr}^1 + TZ^T \\ Q_{rd} &= Q_{rr} Z \\ Q_{dd} &= Z^T Q_{rd} \end{aligned} \quad (100)$$

eşitlikleri ile elde edilmektedir,

Bazı durumlarda; örneğin yermerkezli üç boyutlu dik koordinat sisteminde dengeleme yapılıyorsa; normal denklemlerin rang belirsizliği ile ağıın datum defekti farklı çıkabilir. Bu durum; normal denklemler takımının kondisyonu ve ağıın datumu hakkında yetersiz bilgi taşıyan (Φ, Λ) çekül sapmaları bilinmeyenlerinin diziliş şekli ile yakından ilgilidir. Normal denklemlerin tersinin değiştirilmiş Gauss algoritmasına göre hesaplandığı durumlarda, koordinat bilinmeyenleri, her bir durulan nokta için

$$d\Phi_i, d\Lambda_i, dx_i, dy_i, dz_i$$

sırasında dizilmelidir. Bu durumda normal denklemlerin rang belirsizliği ile ağıın datum defekti eşit çıkmakta ve en uygun çözüme ulaşılmaktadır.

4. JEODEZİK AĞLARDA DUYARLIK VE GÜVEN ÖLÇÜTLERİ

Jeodezik ağların, kullanma amaçlarına göre önceden hedeflenen belirli duyarlıkları sağlamaları istenir. Örneğin kent- sel teknik hizmetler ve kadastral amaçlara yönelik temel haritaların üretilmesi amacıyla kurulan jeodezik ağların, kendilerinden beklenen işlevleri yerine getirmeleri için duyarlık yönünden homojen olmaları istenir. Buna karşın büyük mühendislik yapılarında (barajlar, asma yol ve köprüler, tüneller vb.) ya da bunların çevrelerinde oluşan deformatyonların denetlenmesi, yerkaşu hareketlerinin izlenmesi amacıyla kurulan ağlarda ise konuma ya da doğrultuya bağı duyarlık istekleri sözkonusudur.

Duyarlık kavramını simgeleyen ortalama hata (deneysel standart sapma) kaba ve sistematik hatalardan arındırılmış ölçülerle yapılan bir dengeleme sonucunda, rasgele ölçü hataları ve ağı geometrik şeklinin etkisiyle oluşan istatistiksel bir büyüklüktür. Bu büyüklük aynı zamanda, ölçülerden herhangi birisinin güvenilirliği konusunda bilgi taşıyan önemli bir ölçüttür. Duyarlık ölçütlerinin büyük bir bölümü, ağı dış parametrelerinin (konum, ölçek, yöneltme) seçimine bağıdır. Aynı zamanda bu parametreler hakkında bilgi taşıyan nokta koordinatlarından bir kaçının sabit alındığı durumlarda *bağı duyarlık ölçütlerinden*, koordinatlarının tümünün bilinmeyen olarak seçildiği durumlarda ise *iç duyarlık ölçütlerinden* söz edilir.

Duyarlık ölçütleri, geçerli bir modelde gerçekci bilgiler taşırlar. Bu nedenle, dengeleme modelinin geçerli olup olmadığı ya da ölçülerin değerlendirilmesi aşamasında bir model hatasının oluşup oluşmadığı *güven ölçütleri* ile denetlenmelidir [8].

4.1. Duyarlık Ölçütleri

Jeodezik ağılar için tanımlanan duyarlık ölçütleri, genelde üç ana başlık altında ele alınmaktadır [8, 19]. Bir ağda ulaşılabilecek duyarlıklar ağın geometrik şekli ve kuramsal varyanslardan yararlanılarak tahmin edilebilir. Bu durumda *kuramsal duyarlık ölçütleri*'nden söz edilir. Dengeleme sonucunda hesaplanan duyarlıklar ise *deneysel duyarlık ölçütleri* olarak adlandırılır.

a) Noktalara Göre Tanımlanan Duyarlık Ölçütleri

Jeodezik ağılar için tanımlanan duyarlık ölçütlerinin büyük bir bölümünü, noktalara göre tanımlanan duyarlık ölçütleri oluşturur. Bunlar ağ noktalarının gerçek değerlerinin hangi sınırlar içerisinde kalacağını belirlemeye yararlar.

Koordinat Bilinmeyenlerinin Ortalama Hatası: Koordinat bilinmeyenlerinin ortalama hataları ve güven aralıkları, kuramsal varyans σ_0^2 ' nin önceden bilindiği durumlarda;

$$\sigma_{x_i} = \sigma_0 \sqrt{q_{x_i x_i}} \quad \begin{array}{l} \text{Koordinat Bilinmeyenlerinin} \\ \text{Ortalama Hataları} \end{array} \quad (101)$$

$$p(a_i < \bar{x}_i \leq b_i) = 1 - \alpha = S \quad \begin{array}{l} \text{Güven Aralığı} \end{array} \quad (102)$$

olmak üzere

$$a_i = \bar{x}_i - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sigma_{x_i} \quad \begin{array}{l} \text{Kuramsal Güven Aralığının Alt Sınırı} \end{array}$$

$$b_i = \bar{x}_i + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sigma_{x_i} \quad \begin{array}{l} \text{Kuramsal Güven Aralığının Üst Sınırı} \end{array}$$

$Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$: Standartlaştırılmış Normal Dağılımın Rasgele Değişkeni bağıntılarından hesaplanır. Karesel ortalama hata m_0^2 'nin dengeleme sonucunda deneysel olarak belirlendiği durumlarda deneysel olarak

$$\begin{aligned} m_{x_i} &= m_0 \sqrt{q_{x_i x_i}} \\ a_i &= \bar{x}_i - t_{f, 1-\frac{\alpha}{2}} m_{x_i} \end{aligned} \quad (103)$$

$$b_i = \bar{x}_i + t_{f, 1-\frac{\alpha}{2}} m_{x_i}$$

$t_{f, 1-\frac{\alpha}{2}}$: t Dağılımı Değeri

eşitlikleri ile bulunur.

f : n-u : Dengelemenin Serbestlik Derecesi

$x_i^T = [X_i, Y_i, Z_i, \Phi_i, \Lambda_i]$: Koordinat Bilinmeyenleri Vektörü

Nokta Konum Hatası :

$$m_H = \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2} = m_0 \sqrt{\lambda_A + \lambda_B + \lambda_C} \quad \text{Helmert Nokta Hatası} \quad (104)$$

$$m_w = m_0^3 \sqrt{\lambda_A \lambda_B \lambda_C} = m_x m_y m_z \quad \text{Werkmeister Nokta Hatası} \quad (105)$$

Helmert Ortalama Hata ve Güven Elipsoidleri: Bir noktanın konum duyarlılığı Helmert elipsoidleri ile tanımlanabilir. Söz konusu elipsoidler, nokta konum hatalarına göre daha çok bilgi taşırlar. Bir noktaya ilişkin ortalama hata elipsoidinin elemanları

$$\begin{aligned} A_H &= m_0 \sqrt{\lambda_1} & \text{X Yönündeki Yarı Eksen Uzunluğu} \\ B_H &= m_0 \sqrt{\lambda_2} & \text{Y Yönündeki Yarı Eksen Uzunluğu} \\ C_H &= m_0 \sqrt{\lambda_3} & \text{Z Yönündeki Yarı Eksen Uzunluğu} \end{aligned} \quad (106)$$

j = A, B, C indis grubu olmak üzere;

$$\begin{aligned} \cos \alpha_j &= \frac{M_j}{w_j} & \text{X Ekseni Yönündeki Dönüklük} \\ \cos \beta_j &= \frac{N_j}{w_j} & \text{Y Ekseni Yönündeki Dönüklük} \\ \cos \gamma_j &= \frac{T_j}{w_j} & \text{Z Ekseni Yönündeki Dönüklük} \end{aligned} \quad (107)$$

hesaplanır [7].

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2\sqrt{-(P/3)} \cos \varphi - (a/3) \\ \lambda_2 &= 2\sqrt{-(P/3)} \cos (\varphi + 2\pi/3) - (a/3) \\ \lambda_3 &= 2\sqrt{-(P/3)} \cos (\varphi + 4\pi/3) - (a/3) \end{aligned} \quad (108)$$

$$p = b - (a^2/3)$$

$$q = c - (ab/3) + (2a^3/27)$$

$$a = -(Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz})$$

$$b = Q_{xx}Q_{yy} + Q_{zz}Q_{xx} + Q_{yy}Q_{zz} - Q_{xy}^2 - Q_{xz}^2 - Q_{yz}^2$$

$$c = Q_{xx}Q_{yz}^2 + Q_{yy}Q_{xz}^2 + Q_{zz}Q_{xy}^2 - Q_{xx}Q_{yy}Q_{zz} - 2Q_{xy}Q_{xz}Q_{yz}$$

$$M_j = Q_{xz}(Q_{yy} - \lambda_j) - Q_{xy}Q_{yz}$$

$$N_j = (Q_{xx} - \lambda_j)Q_{yz} - Q_{xy}Q_{xz}$$

$$T_j = Q_{xy}^2(Q_{xx} - \lambda_j) - (Q_{yy} - \lambda_j)$$

$$W_j^2 = M_j^2 + N_j^2 + T_j^2$$

Kuramsal Güven Elipsoidinin elemanları

$$A_K = \sigma_0 \sqrt{\lambda_1 \chi_{3,1-\alpha}^2}$$

$$B_K = \sigma_0 \sqrt{\lambda_2 \chi_{3,1-\alpha}^2}$$

$$C_K = \sigma_0 \sqrt{\lambda_3 \chi_{3,1-\alpha}^2}$$

Kuramsal Güven Elipsoidinin

Yarı Eksenleri

(109)

Deneysel Güven Elipsoidinin elemanları da

$$A_G = m_0 \sqrt{\lambda_1 3F_{3,f,1-\alpha}}$$

$$B_G = m_0 \sqrt{\lambda_2 3F_{3,f,1-\alpha}}$$

$$C_G = m_0 \sqrt{\lambda_3 3F_{3,f,1-\alpha}}$$

Deneysel Güven Elipsoidinin

Yarı Eksenleri

(110)

olarak hesaplanır. Yarı eksenlere ilişkin dönüklükler ise (107) bağıntıları ile elde edilebilir.

Bu eşitliklerden görüleceği üzere, bir noktanın geometrik yeri olarak düşünülen hata elipsoidi içine düşme olasılığı, en iyimser tahminle % 27 civarındadır. Oysa, bir noktanın güven elipsoidi içine düşme olasılığı S istatistik güvene bağlı olup, her durumda % 95 - % 99 olarak alınabilmektedir.

b) Lokal Duyarlık Ölçütleri

Bağlı Hata ya da Güven Elipsoidleri: Herhangi iki ağ noktasının birbirine göre konumları koordinatların farklarının bir fonksiyonu olarak düşünüldüğünde, bağlı hata kavramından söz edilir. Hesaplanan bağlı hata ya da güven elipsoidlerinin geometrik yeri, iki noktayı birleştiren doğrunun orta noktası olarak düşünülür.

Her iki noktanın koordinat farkları

$$d = Fx \quad (111)$$

şeklinde ifade edilir ve ters ağırlık matrisi

$$Q_{dd} = FQ_{xx}F^T \quad (112)$$

hesaplanır.

$$F = [-I : I]$$

$$x^T = [X_i Y_i Z_i X_K Y_K Z_K]$$

$$Q_{xx} = \begin{bmatrix} Q_{ii} & Q_{iK} \\ Q_{iK}^T & Q_{KK} \end{bmatrix}$$

$$Q_{ii} = \begin{bmatrix} Q_{x_i x_i} & Q_{x_i y_i} & Q_{x_i z_i} \\ Q_{y_i x_i} & Q_{y_i y_i} & Q_{y_i z_i} \\ Q_{z_i x_i} & Q_{z_i y_i} & Q_{z_i z_i} \end{bmatrix}$$

$$Q_{iK} = \begin{bmatrix} Q_{x_i x_K} & Q_{x_i y_K} & Q_{x_i z_K} \\ Q_{y_i x_K} & Q_{y_i y_K} & Q_{y_i z_K} \\ Q_{z_i x_K} & Q_{z_i y_K} & Q_{z_i z_K} \end{bmatrix}$$

$$Q_{KK} = \begin{bmatrix} Q_{x_K x_K} & Q_{x_K y_K} & Q_{x_K z_K} \\ Q_{y_K x_K} & Q_{y_K y_K} & Q_{y_K z_K} \\ Q_{z_K x_K} & Q_{z_K y_K} & Q_{z_K z_K} \end{bmatrix}$$

Kısa gösterimleri ile

$$Q_{dd} = Q_{ii} + Q_{KK} - Q_{iK} - Q_{iK}^T = \begin{bmatrix} Q_{d_x d_x} & Q_{d_x d_y} & Q_{d_x d_z} \\ Q_{d_y d_x} & Q_{d_y d_y} & Q_{d_y d_z} \\ Q_{d_z d_x} & Q_{d_z d_y} & Q_{d_z d_z} \end{bmatrix} \quad (113)$$

elde edilir. Bağlı Hata ve Güven Elipsoidinin yarı eksenleri (107) eşitliğinde verilen temel bağıntılara göre Q_{dd} matrisinden hesaplanır.

Parsiyel Hata (Ya da Güven) Elipsoidleri: Komşu nokta duyarlıklarının nokta koordinatlarından bağımsız olarak elde edilmesi istenirse parsiyel hata elipsoidleri sözkonusudur. Ele alınan noktayla gözlem ilişkisi olan komşu noktaların

sabit noktalar olduğu varsayılarak hesaplanan elipsoidlere parsiyel hata elipsoidleri denir. Elipsoidlerin merkezleri nokta ile çakışık olarak çizilir [19].

c) Global Duyarlık Ölçütleri

Duyarlık ölçütlerinin ağıın tümünden belirlenmesi istendiğinde kuramsal ya da deneysel olarak hesaplanan varyans-kovaryans matrisinden yararlanılır. Bu ölçütlerden genellikle ağıın optimizasyonu (en uygunlaştırılması) amacıyla yararlanılır.

Güven Hiperelipsodi: Jeodezik ağ koordinatlarının duyarlılığı $3n$ boyutlu ve n noktalı bir ağda; $3n$ serbestlik dereceli bir istatistiksel güvenle belirlenmek istendiğinde güven hiperelipsoidleri kullanılır. Güven ya da hata hiperelipsoidleri nokta duyarlıkları konusunda diğer ölçütlere göre daha çok bilgi taşırlar ve serbest dengelenen ağlarda çalışılan koordinat sisteminin dönüklük ve ötelenmesinden bağımsızdırlar [20].

$$\begin{aligned} A_{KH_i} &= \sigma_0 \sqrt{\lambda_i \chi_{3p, 1-\alpha}^2} && \text{Kuramsal Güven Hiperelipsoidinin} \\ & && \text{Yarı Eksenleri} \\ A_{DH_i} &= m_0 \sqrt{3\lambda_i F_{3p, f, 1-\alpha}} && \text{Deneysel Güven Hiperelipsoidinin} \\ & && \text{Yarı Eksenleri} \end{aligned} \quad (114)$$

Hacim Ölçütü: Kuramsal ve deneysel güven hiperelipsoidlerinin hacimlerine ilişkin

$$\begin{aligned} \det(\Sigma_{xx}) &= \sigma_0^2 \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{3p} = \sigma_0^2 \prod_{i=1}^{3p} \lambda_i \\ \det(K_{xx}) &= m_0^2 \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{3p} = m_0^2 \prod_{i=1}^{3p} \lambda_i \end{aligned} \quad (115)$$

determinant değerlerinin herbiri ağıın tümü için geçerli duyarlık ölçütü olarak ele alınabilir. Ağıın bir noktasına ilişkin güven hiperelipsoidinin hacim ölçütü Werkmeister nokta hatasına denk düşer. Hacim ölçütünün minimum olması öngörülen amaç fonksiyonuna *D-Optimum* adı verilir.

Varyans Ölçütü: Kuramsal ve deneysel varyans-kovaryans matrislerinin ana köşegen elemanlarının toplamı olarak ele

alınır ve minimum olması istenen amaç fonksiyonu *A-Optimum* olarak adlandırılır.

$$iz(\Sigma_{xx}) = \sigma_0^2 iz(Q_{xx}) = \sigma_0^2 (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{3p}) = \sigma_0^2 \sum_{i=1}^{3p} \lambda_i \quad (116)$$

$$iz(K_{xx}) = m_0^2 iz(Q_{xx}) = m_0^2 (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{3p}) = m_0^2 \sum_{i=1}^{3p} \lambda_i$$

Ortalama Koordinat Duyarlılığı :

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z = \sqrt{\frac{iz(\Sigma_{xx})}{3p}} = \sigma_0 \sqrt{\frac{iz(Q_{xx})}{3p}} \quad \text{Ulaşılabilir Değer} \quad (117)$$

$$m_x, m_y, m_z = \sqrt{\frac{iz(K_{xx})}{3p}} = m_0 \sqrt{\frac{iz(Q_{xx})}{3p}} \quad \text{Gerçekleştirilen Değer}$$

bağıntıları ile tanımlanan ortalama koordinat duyarlılığı, ağın tümü için tanımlanan bir duyarlık ölçütüdür

Özdeğerler Ölçütü: Kurulması planlanan bir ağda, bilinmeyenlerin bir fonksiyonunun ortalama hatasının minimum olması amaç fonksiyonu olarak seçilebilir ya da ağın duyarlık yönünden homojen ve izotrop olması öngörülebilir.

Bilinmeyenlerin herhangi bir fonksiyonunun ortalama hatası

$$m_f^2 = a^T \Sigma_{xx} a = m_0^2 a^T Q_{xx} a \quad (118)$$

şeklinde hesaplanır. Bu büyüklüğün

$$\lambda_{\min} \leq \frac{a^T \Sigma_{xx} a}{a^T a} \leq \lambda_{\max} \quad \text{Rayleigh ilişkisi} \quad (119)$$

aralığında kalması için

$$\lambda_{\min} \cong \lambda_{\max} \quad (120)$$

amaç fonksiyonuna ulaşılır. Homojen ve izotrop bir ağ için öngörülen bu amaç fonksiyonuna *S-Optimum* adı verilir. Bu tip ağlarda amaç fonksiyonu olarak

$$1 - \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \Rightarrow \min \quad \text{I-Optimum} \quad (121)$$

ilişkisi de geçerlidir.

Ayrıca güven elipsoidlerinin yarı eksenlerinden en büyüğünün minimum olması öngörülebilir. Bu amaç fonksiyonu

$$\lambda_{\max} \Rightarrow \min \quad E\text{-Optimum} \quad (122)$$

olarak adlandırılır.

Ana Varyans Bileşenleri: Bir nirengi ağında tasarlanan ölçü planından elde edilen varyans-kovaryans matrislerinin hesaplanan özdeğerleri λ_i ve bunlara ilişkin normlandırılmış özvektörler s_i ile hesaplanan

$$b_i = s_i \sqrt{\lambda_i} \quad \text{Ana Bileşenler Vektörleri} \quad (123)$$

ağın duyarlık yönünden zayıf olan noktalarını, bu zayıflığın doğrultusunu ve büyüklüğünü verirler. En büyük λ_{\max} özdeğerine karşılık gelen anabileşen vektörü ağda en zayıf noktayı ve bu zayıflığın doğrultusunu verir. Bu aynı zamanda kuramsal güven hiperelipsoidinin de en büyük yarı eksenidir. λ_{\max} büyüklüğü, en önemli özdeğer olarak adlandırılır. Geometrik şekli optimum olmayan bir jeodezik ağda ana varyans bileşeni, toplam varyans ölçütünün % 40 - %60 'ına varan değerlere ulaşabilir.

Sözü edilen duyarlık ölçütlerinden; koordinatların duyarlıkları, özdeğerler ve özvektörler, birim ağırlıklı ölçünün varyansı, nokta hata elipsleri ve nokta konum hataları datumun seçimine bağlıdır. Buna karşın; dengeli ölçülerin duyarlıkları, ağın geometrisi, koordinatların fonksiyonları ve bunların duyarlıkları, parsiyel güven elipsleri, iç ve dış güvenirlilik ölçütleri zorlamasız bir çözümde datumun seçiminden bağımsızdır [21].

4.1.1. Ölçüt Matrisleri

Bir jeodezik ağda, amaç fonksiyonu olarak ideal bir varyans-kovaryans matrisi C_{xx} seçilebilir. Bu matris ağda gerçekleştirilebilen K_{xx} matrisi ile karşılaştırılarak, beklenen duyarlıklara ulaşıp ulaşılamadığı denetlenir.

Skaler amaçlı duyarlık istekleri, sınırlı duyarlık isteklerini karşılamak için kullanılırlar. Sözgelimi, ülke nirengi ağlarına ait duyarlık istekleri; her tarafta aynı ve yüksek

duyarlıklı homojen ve izotrop bir ağ olarak özetlenebilir. Bu tür amaçlara ancak ölçüt (kriteriyum) matrisleri olarak adlandırılan yapay varyans-kovaryans matrisleri ile yanıt verilebilir [8].

Ölçüt matrisleri;

a- Güven ve hata elipslerinin aynı yarıçaplı daireler biçiminde, bağıl güven ve hata elipslerinin yarı eksenleri oranlarının birbirinden farklı olduğu homojen ve izotrop bir ağ,

b- Bağıl güven ve hata elipslerinin de yarıçapları noktalar arasındaki uzaklığın bir fonksiyonu olan daireler biçiminde olduğu tam izotrop bir ağ

amacına uygun olarak türetilebilirler.

Amaca uygun olarak ele alınması istenen ölçüt matrisleri genelde iki temel yaklaşımla oluşturulmaktadır.

a- Ölçü planı belirlenmiş bir ağda, uygun olduğu düşünülen bir başlangıç P ağırlık matrisi (Örneğin $P=I$) ile ilk Q_{xx} matrisi oluşturulur. Bu matris belirlenen duyarlık isteklerine göre adım adım geliştirilerek amaca ulaşılır [22, 23].

b- Ağın ölçme planına bağlı kalınmaksızın; amaç olarak seçilebilen bir güven elipsoidinin yarıçap uzunluklarına göre ya da stokastik süreçlere uygun olarak hesaplanan enine ve boyuna korelasyon fonksiyonlarından yararlanılarak ölçüt matrisleri türetilmektedir [24].

4.1.1.1. Özvektörler Ayrımı ile Hesaplanan Ölçüt Matrisleri (Q_{SVD} Yapısında Ölçüt Matrisleri)

Bir jeodezik ağın beklenen duyarlılığı, bir güven elipsoidi ile tanımlanırsa, amaç fonksiyonu olarak seçilen özdeğerler aynı zamanda güven elipsoidinin yarı eksen uzunluklarını, özvektörleri de bu yarı eksenlerin doğrultularını temsil eder.

Başlangıçta uygun olduğu düşünülen bir P ağırlık matrisi ($P=I$) ile hesaplanan ya da kuramsal olarak oluşturulan ters ağırlık matrisi

$$N^+ = Q_{xx} = \Lambda V \Lambda \quad (124)$$

şeklinde çarpanlarına ayrılabilir.

Λ : Özvektörler Matrisi

V : Köşegen Özdeğerler Matrisi

Normlandırma ölçütü olarak seçilen ($\lambda_{\max} = \min$) değeri ve t katsayısına göre gerekirse özdeğerler

$$\bar{\lambda}_i = \lambda_i - t(\lambda_i - \lambda_{\max}) \quad \text{Düzeltilmiş Özdeğerler} \quad (125)$$

($t:0, \dots, 1$)

şeklinde merkezleştirilerek ulaşılmaması düşünülen özdeğerlerle ters ağırlık matrisi

$$Q_{xx} = \Lambda \bar{V} \Lambda \quad (126)$$

şeklinde yeniden hesaplanır. Tüm özdeğerlerin değiştirilmesi ve c gibi bir katsayıya eşit alınması istendiğinde $t=1$ olarak seçilir ve $Q_{xx}=cI_R$ şeklinde bir köşegen matris elde edilir.

Amaç fonksiyonu olarak seçilen bu tür matrislerin özdeğerlerinin başlangıçta ne olacağı kestirilemez. Ayrıca düzeltilmiş özdeğerlerden hesaplanan Q_{xx} ters ağırlık matrisini sağlayan ağırlık dağılımının fiziksel gerçeklere uygunluğu da her zaman sağlanamaz. Bu nedenle bir iterasyon işlemine gerek duyulur. Özdeğerlerin hesabının bilgisayar ortamında otomatik olarak yapılması durumunda beklenen amaç fonksiyonuna ulaşamaz ve çoğunlukla hesaplama zorlukları ile karşılaşılır [23].

4.1.1.2. Taylor-Karman Yapısındaki Ölçüt Matrisleri

Homojen ve izotrop bir ağ aşağıdaki özellikleri taşır.

- Ağ noktalarının tümündeki güven elipsleri homojen ve izotrop görünümünde, d yarıçaplı daireler biçiminde olmalıdır.

- P_i ve P_j noktaları arasında hesaplanan bağıl güven elipsleri daire görünümünde olmalı ve yarıçapları $r_{ij}=2c^2S_{km}$ büyüklüğünde olmalıdır.

- x ve y koordinatları arasındaki cebrik korelasyonlar gözardı edilebilecek büyüklükte kalmalıdır [8].

Sözkonusu duyarlık isteklerini karşılayan üç boyutlu varyans - kovaryans matrisi, herhangi bir ağ noktası için

$$D_{xx} = \begin{vmatrix} d^2 & 0 & 0 & d^2-r_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & d^2 & 0 & 0 & d^2-r_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & d^2 & 0 & 0 & d^2-r_{ij} \\ d^2-r_{ij} & 0 & 0 & d^2 & 0 & 0 \\ 0 & d^2-r_{ij} & 0 & 0 & d^2 & 0 \\ 0 & 0 & d^2-r_{ij} & 0 & 0 & d^2 \end{vmatrix} \quad (127)$$

görünümündedir.

Grafarend'in stokastik süreçler kuramına uygun olarak, enine ve boyuna korelasyon fonksiyonlarından oluşturulan ölçüt matrisi de Taylor-Karman yapısındaki bir matrisin özelliklerini sağlar [24]. Bu matrisin elemanları da

$$\begin{aligned} D_{x_i x_j} &= Q_m(r) + [Q_L(r) - Q_m(r)] \frac{\Delta X^2}{r^2} \\ D_{y_i y_j} &= Q_m(r) + [Q_L(r) - Q_m(r)] \frac{\Delta Y^2}{r^2} \\ D_{z_i z_j} &= Q_m(r) + [Q_L(r) - Q_m(r)] \frac{\Delta Z^2}{r^2} \\ D_{x_i y_j} &= [Q_L(r) - Q_m(r)] \frac{\Delta X \Delta Y}{r^2} \\ D_{x_i z_j} &= [Q_L(r) - Q_m(r)] \frac{\Delta X \Delta Z}{r^2} \\ D_{y_i z_j} &= [Q_L(r) - Q_m(r)] \frac{\Delta Y \Delta Z}{r^2} \end{aligned} \quad (128)$$

$$\begin{aligned} D_{y_j x_i} &= D_{x_i y_j} \\ D_{z_j x_i} &= D_{x_i z_j} \\ D_{z_j y_i} &= D_{y_i z_j} \\ D_{x_i x_i} &= D_{y_i y_i} = D_{z_i z_i} = 1 \\ D_{x_i y_i} &= D_{y_i x_i} = D_{x_i z_i} = D_{z_i x_i} = D_{x_i z_i} = D_{z_i x_i} = 0 \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır.

Q_m enine korelasyonu ile Q_L boyuna korelasyonu eşit alınırsa tam izotrop özellikli bir Taylor-Karman matrisi elde edilir.

Bir Taylor-Karman Matrisinde ;

a- Hata elipsleri daire görünümündedir (İzotropluk).

- b- Tüm hata elipsleri eşit büyüklüktedir (*Homojenlik*).
- c- Bağıl hata elipslerinin yarı eksenlerinin oranları farklıdır (*Elips görünümünde*).
- d- Bağıl hata elipsleri, noktalar arasındaki uzunluğun bir fonksiyonu olarak tanımlanan iki karakteristik fonksiyon (*enine ve boyuna korelasyon*) ile tanımlanır.

Tam İzotrop bir Matriste ;

- a- Hata elipsleri daire görünümündedir (*İzotropluk*).
- b- Tüm hata elipsleri eşit büyüklüktedir (*Homojenlik*).
- c- Bağıl hata elipsleri daire görünümündedir.
- d- Bağıl hata elipslerinin yarıçapları noktalar arasındaki uzunluğun bir fonksiyonudur [23].

Sözkonusu enine ve boyuna korelasyonları veren bağıntılar, karakteristik uzunluğa göre Grafarend tarafından geliştirilmiştir [24].

$$d = s\sqrt{8}/S_{\max}$$

S_{\max} : Ağın Geometrik Biçimini İfade Eden
Maksimum Karakteristik Uzunluk

Tablo 1. Enine ve Boyuna Korelasyonlar

d	Q_L :boyuna korelasyon	Q_m :enine korelasyon
0	1.0	1.0
1	0.25	0.50
$\sqrt{2}$	-0.20	0.25
2	-0.20	0.20
$\sqrt{5}$	-0.15	0.15
$\sqrt{8}$	-0.10	0.10
$0 < d < 1$	$1.0 - 0.75 d$	$1.0 - 0.50 d$
$1 < d < \sqrt{2}$	$\frac{0.25 - 0.45(d-1)}{\sqrt{2} - 1}$	$\frac{0.5 - 0.25(d-1)}{\sqrt{2} - 1}$
$\sqrt{2} < d < \sqrt{5}$	-0.20	$\frac{0.25 - 0.05(d - \sqrt{2})}{2 - \sqrt{2}}$
$2 < d < \sqrt{5}$	$\frac{-0.20 + 0.05(d-2)}{\sqrt{5} - 2}$	$\frac{0.20 - 0.05(d-2)}{\sqrt{5} - 2}$
$\sqrt{5} < d < \sqrt{8}$	$\frac{-0.15 + 0.05(d - \sqrt{5})}{\sqrt{8} - \sqrt{5}}$	$\frac{+0.15 - 0.05(d - \sqrt{5})}{\sqrt{8} - \sqrt{5}}$

Sözü edilen yapay ölçüt matrisinin, ağda gerçekleştirilebilen varyans-kovaryans matrisi ile karşılaştırılabilmesi için

$$S = I - G(G^T G)^{-1} G^T \quad S \text{ Dönüşüm Matrisi} \quad (92)$$

olmak üzere

$$C_{xx} = S D_{xx} S^T \quad (129)$$

şeklinde ağın datumuna dönüştürülmesi gerekir.

Ölçüt (Kriterium) matrisleri, ağın geometrik şeklini temsil eden karakteristik uzunluğa bağlıdır. Taylor-Karman yapısındaki bir ölçüt matrisi çoğunlukla tekil (singüler, tutarsız) yapıdadır. Düzgün (regüler) yapıda bir Taylor-Karman matrisi (*T-K Matrisi*) oluşturabilmek için seçilen karakteristik uzunluk, ağın en büyük kenarına yakın bir değerdedir. Enine ve boyuna korelasyonların eşit olarak ele alındığı *izotrop yapıda bir T-K Matrisi* elde edebilmek için seçilecek karakteristik uzunluk, ağın ortalama uzunluğunun $\sqrt{2}$ katına karşılık gelmektedir.

Grafarend'in T-K matrisi tanımında, enine ve boyuna korelasyonlar eşit alındığında Alberda'nın homojen ve izotrop ağ tanımına ulaşılmaktadır ve optimizasyon için en uygun bir ölçüt matrisi olarak elde edilmektedir [8, 24].

Korelasyon fonksiyonları değişik üstel fonksiyonlarla da hesaplanabilir. Değişik amaçla kullanılan korelasyon fonksiyonları aşağıdaki gibi özetlenebilir [8, 23].

Genellikle;

Jeodezik Ağların Optimizasyonu için;

$$\text{Baarda Fonksiyonu } \phi(r) = \sigma_0^2(1 - mr)$$

$$\phi(r) = \sigma_0^2 - C^2 r \ln\left(1 + \frac{r}{d}\right) \quad (130)$$

$$\text{Bessel Fonksiyonu } \phi(r) = \sigma_0^2 \frac{r}{d} K_1\left(\frac{r}{d}\right) \quad (131)$$

Fiziksel Jeodezide Kullanılan Verilerin İrdelenmesi ve Koordinat Dönüşümü Problemleri için;

$$\text{Hirvonen Fonksiyonu } \phi(r) = \sigma_0^2 \frac{1}{1 + \left(\frac{r}{d}\right)^2} \quad (132)$$

Yükseklik İnterpolasyonu için;

$$\text{Gauss Modelleri } \phi(r) = e^{(-r/d)^2}$$

$$\phi(r) = e^{(-r/d)^2} \cos \beta r \quad (133)$$

Kullanılan Diğer Kovaryans Fonksiyonları;

$$\phi(r) = \sigma_0^2 e^{-r/d} \quad \text{Üstel Fonksiyon}$$

$$\phi(r) = \sigma_0^2 e^{-r/d} \cos \beta r \quad \text{Üstel Kosinüs Fonksiyonu} \quad (134)$$

Amaç fonksiyonu olarak seçilen ölçüt matrislerinin, ağın yapısıyla tam uyumlu oldukları söylenemez. Bu durum korelasyon fonksiyonuna, ağın karakteristik uzunluğuna ve ağın geometrik yapısına sıkı sıkıya bağlıdır. Uygun bir ölçüt matrisinin seçimi, günümüzde de halen bir sorun oluşturmaya devam etmektedir.

Gerçekleştirilen varyans-kovaryans matrisi K_{xx} ile duyarlık isteklerini içeren yapay varyans-kovaryans matrisi C_{xx} 'in eşdeğer olup olmadıkları

$$B = C_{xx}^{-1} K_{xx} \quad (135)$$

matrisinden hesaplanan en büyük özdeğer λ_{\max} 'ın

$$\lambda_{\max} \leq 1 \quad (136)$$

eşitliği irdelenerek denetlenir.

4.2. Güven Ölçütleri

Jeodezik ağların kalitesini gösteren duyarlık ölçütleri, dengeleme modelinin geçerli olduğu durumlarda gerçekçi bilgi taşırlar. Fonksiyonel modelin gerçeğe uygun olmaması ya da ölçülerin bir kaçında kaba yanılgıların bulunması, stokastik modelin hatalı kurulması gibi durumlarda model hataları ortaya çıkar. Bir ağ dengelemesi için kurulan matematik modelin gerçeğe uygunluğu güven ölçütleri ile denetlenir.

İç Güven Ölçütü :

Bir l_j ölçüsünde Δ_j kadar kaba hatanın ortaya çıkma olasılığı

$$H_0 : E\{\Delta\} = 0 \quad \text{Sıfır Hipotezi} \quad (137)$$

$$H_s : E\{\Delta\} = a.c \quad \text{Seçenek Hipotezi} \quad (138)$$

kurularak saptanır. Seçenek hipotezinin geçerli çıkması durumunda dış merkezlik parametresi

$$W = \frac{\Delta v^T P \Delta v}{\sigma_0^2} \quad (139)$$

ve dış merkezlik parametresinin olasılık bağıntısına ilişkin

$$W_0 = F(\alpha_0, \beta_0, n-u, \infty) \quad \text{Sınır Değeri} \quad (140)$$

hesaplanır.

$$\Delta v_j = -Q_{vv} P a c \quad (141)$$

olmak üzere

$$a^2 \frac{c^T P Q_{vv} P c}{\sigma_0^2} \geq W_0 \quad (142)$$

test ilişkisi kurulabilir. Δ_j büyüklüğünün sınır değeri

a: Bir Ölçek Katsayısı

c: Ölçülerin Model Hatalarına Etkime Katsayısı

$$a = \Delta_j$$

$$c = 1$$

olarak seçildiğinde, korelasyonsuz gözlemler için

$$\Delta_j^2 \geq \frac{W_0 \sigma_0^2}{P_j r_j} \quad (143)$$

$$r_j : (Q_{vv})_j P_j \quad \text{Serbestlik Ölçütü (Redundanz Payı)}$$

olmak üzere

$$|\Delta_{0j}| = m_0 \sqrt{\frac{w_0}{P_j r_j}} \quad \text{İç Güven Ölçütü} \quad (144)$$

eşitliğinden hesaplanır.

Bu sınır değerler, bir ağıda yapılan ölçülerden herhangi birinin diğer ölçüler yardımıyla denetlenebilirliğinin bir ölçütüdür ve bu ölçüt iç güven ölçütü olarak adlandırılır. İç güven ölçütü de bir ölçüde model hipotezi ile saptanamayan en büyük hatanın büyüklüğü hakkında bilgi verir. İyi kontrol edilebilir bir ağıda iç güven ölçütleri birbirlerine yakın ve olabildiğince küçük değerler almalı ve

$$\Delta_{0j} \leq 8 m_j \quad \text{Sınır Değer} \quad (145)$$

büyüklüğünü aşmamalıdır.

Dış Güven Ölçütü :

Ortaya çıkarılmayan bir model hatasının koordinat bilinmeyenlerine etkisi, bunun dengeli ölçülere etkisinden çok daha önemlidir.

Örneğin bir ölçüde Δ_{0i} sınır değer kadar ortaya çıkan bir kaba hatanın etkisi

$$\Delta x = Q a_i^T P_i \Delta_{0i} \quad (146)$$

fonksiyonel ilişkisi ile araştırılabilir. Koordinat hataları vektörü ağın datumuna bağlıdır. Ağın dış güveni için datumdan bağımsız olarak

$$\delta_{0i}^2 = \Delta x^T K_{xx}^{-1} \Delta x \quad (147)$$

şeklinde bir tanım yapılır ve dış güven ölçütü bu tanımdan yararlanılarak

$$\delta_{0i}^2 = \frac{1-r_i}{r_i} w_0 \quad (148)$$

yalın olarak hesaplanır. Bilinmeyenlerin herhangi bir fonksiyonunun maksimum hatası Δa ile gösterilirse

$$\delta_{0i} \geq \frac{\Delta a}{m_a}$$

bağıntısı geçerli olur.

İyi planlanmış ve dengelemenin matematik modeli doğru kurulmuş bir ağda

Gözlemlerin Fazla Ölçü Sayısındaki Payları; $r_i > 0.3$ ya da 0.5 (149)

Ortaya Çıkarılamayan Hataların Sınır Değeri; $\Delta_{0i} \approx (6 \text{ ya da } 8)m_i$ (150)

Hataların Koordinatlara Etkime Katsayıları; $\delta_{0i} \approx 6 \text{ ya da } 10$ (151)

sınırları arasında kalmalıdır [8].

5. JEODEZİK AĞLARIN OPTİMİZASYONU

Günümüzde, jeodezik ağlar alt yapı hizmetlerine temel oluşturacak halihazır ya da kadastral amaçlı haritaların üretilmesi amacıyla kurulmaktadır. Bundan başka barajlar, tüneller gibi büyük mühendislik yapılarının çevrelerinde oluşabilecek deformasyonların saptamasına, fay hatları boyunca oluşan yer kabuğu hareketlerinin izlenmesine ve ülke yüzey ağlarının gelişen teknolojiye uygun olarak geliştirilmesine ve iyileştirilmesine yönelik olarak da jeodezik ağlar oluşturulmaktadır. Bu nedenle sözü edilen jeodezik ağların kendilerinden beklenen işlevleri yerine getirmeleri çok önem kazanmakta ve bu tip ağların amacına uygun olarak tasarlanması ve iyileştirilmesi gerekmektedir.

Jeodezik ağların tasarımı, geliştirilmesi ya da iyileştirilmesi sırasında, bir amaç fonksiyonu seçilerek ağın datumunun, geometrik şeklinin ya da noktaların konumlarının en uygun biçimde belirlenmesi işlemine *Jeodezik Ağların Optimizasyonu* denilmektedir. Sözelimi bir nirengi ağındaki doğrultu, kenar, düşey açı, yükseklik farkları, GPS ve azimut gözlemleri gibi ölçülerin sayılarının ve bunların ağ içindeki dağılımlarının belirlenmesi, ölçü elemanlarının duyarlıklarının saptanması bir optimizasyon işlemidir ve *Nirengi Ağlarının Tasarımı* olarak adlandırılır [8].

Optimizasyon işlemi, seçilen amaç fonksiyonlarına ya da tasarım parametrelerine göre sınıflandırılabilir. Seçilen amaç fonksiyonlarına bağlı olarak *duyarlık optimizasyonu*, *güven optimizasyonu* ya da *matematiksel optimizasyon*'dan söz edilir. Buna karşılık belirlenmesi istenen tasarım parametrelerine göre; *datum optimizasyonu*, *konum optimizasyonu*, *ölçme planının ve ölçü ağırlıklarının optimizasyonu* ya da ağa bir takım ölçülerin veya noktaların eklenmesi durumunda *üçüncü derece optimizasyon* gündeme gelir. Sözü edilen optimizasyon işlemleri

de bu amaca uygun olarak geliştirilmiş *Simülasyon Yöntemleri* ya da *Analitik Yöntemler* ile gerçekleştirilmektedir.

5.1. Amaç Fonksiyonlarına Göre Optimizasyon

Optimizasyon işlemi için seçilen amaç fonksiyonu; ağırlık ortalaması koordinat duyarlılığı, güven hiperelipsoidinin hacmi, koordinat bilinmeyenlerinin herhangi bir fonksiyonunun ortalaması hatası gibi duyarlık ölçütlerinden oluşuyorsa *Duyarlık Optimizasyonu*'ndan söz edilir. Bundan başka; uyumsuz ölçüler testi ile ortaya çıkarılabilecek ölçü hatalarının belli bir sınır değeri geçmemesini öngören güvenilirlik ölçütleri amaç fonksiyonu olarak seçilirse *Güven Optimizasyonu* gündeme gelir. Bazı durumlarda tasarımı ele alınan ağırlıklarda yapılacak harcamaların ya da ölçü ve hesaplamalar için gerekecek zamanın belli bir değerden fazla olmaması, buna karşın amaç fonksiyonunun da en uygun olması öngörülürse, bu tip problemler *Matematiksel Optimizasyon* yöntemleri ile çözülebilir.

5.1.1. Duyarlık Optimizasyonu

Optimizasyon işleminde duyarlık ölçütlerinden herhangi biri amaç fonksiyonu olarak seçilebilir. Amaç fonksiyonu olarak noktalara göre tanımlanan duyarlık ölçütleri (koordinat bilinmeyenlerinin ortalaması hatası, Helmert ortalaması hata elipslerinin yarı eksenleri), lokal duyarlık ölçütleri (bağıl ya da güven elipsoidleri) ya da global duyarlık ölçütleri (hacim ölçütü, güven hiperelipsoidinin yarı eksenleri) kullanılabilir. Bu ölçütlerden en kullanışlı olanları global duyarlık ölçütleridir.

Bir güven hiperelipsoidi oldukça ideal bir duyarlık ölçütüdür ve nokta duyarlıkları konusunda diğer duyarlık ölçütlerine göre daha çok bilgi taşır. Güven hiperelipsoidlerinin hacimlerine ilişkin

$$\det (\Sigma_{xx}) \Rightarrow \min$$

(152)

amaç fonksiyonunun minimum olması öngörülebilir. Bu amaç fonksiyonuna göre en uygun hale getirilen ağlara *D-Optimal Ağlar* adı verilir.

$$\text{Varyans ölçütünün} \\ \text{iz}(\Sigma_{xx}) \Rightarrow \min \quad (153)$$

şeklinde amaç fonksiyonu olarak seçilmesi durumunda *A-Optimal Ağlar* elde edilir.

Kurulması planlanan bir ağda, bilinmeyenlerin belirli bir fonksiyonunun ortalama hatasının minimum olması istenebilir ya da ağın duyarlık yönünden homojen ve izotrop olması öngörülebilir. Bu amaçla ağın varyans-kovaryans matrisinden elde edilen özdeğerler amaç fonksiyonu olarak seçilebilir. Amaç fonksiyonu

$$\lambda_{\max} \approx \lambda_{\min} \quad \text{olarak seçilmişse } S\text{-Optimal Ağlar 'dan (120)}$$

$$1 - \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \Rightarrow \min \quad \text{olarak seçilmişse } I\text{-Optimal Ağlar 'dan (121)}$$

$$\lambda_{\max} \Rightarrow \min \quad \text{olarak seçilmişse } E\text{-Optimal Ağlar 'dan (122)}$$

sözedilir.

Skaler amaçlı duyarlık istekleri yerine; homojen ve izotrop yapıllı ölçüt matrisleri kullanılabilir. Gerçekleştirilen varyans-kovaryans matrisi K_{xx} ile duyarlık isteklerini içeren ölçüt matrisi C_{xx} 'in eşdeğer olup olmadıkları

$$B = C_{xx}^{-1} \cdot K_{xx} \quad (135)$$

çarpımından elde edilen B matrisinin en büyük özdeğeri olan λ_{\max} 'ın

$$\lambda_{\max} \leq 1 \quad (136)$$

eşitsizliğini sağlayıp sağlamadığı irdelenerek optimizasyon işlemi yapılabilir.

Bir jeodezik ağın duyarlık yönünden en uygun duruma getirilmesi istendiğinde şu aşamalar izlenir [8].

* Ölçme planı taslağı düzenlenir.

* Noktaların yaklaşık koordinatları (X_0, Y_0, Z_0) ve birim ölçününün karesel ortalama hatasının öncül değeri (s_0^2) 'den yararlanarak oluşturulan varyans-kovaryans matrisi K_{xx} yardımıyla ana varyans bileşenleri, ana bileşen vektörleri hesaplanır. Ağda duyarlık yönünden zayıf olan noktalar ve bu zayıflıkların doğrultuları belirlenir.

* Gereğinde ağa yeni noktalar eklenerek duyarlık yönünden yetersiz bulunan noktalar için ek ölçme planı düzenlenir.

* Geliştirilmiş ölçme planından yararlanılarak ana varyans bileşenleri, ana bileşen vektörleri yeniden hesaplanır. Ağdaki tüm noktalar duyarlık yönünden yeterli duruma getirilir.

* Ağda beklenen duyarlık isteklerini içeren yapay ölçüt matrisi C_{xx} oluşturulur. Bu matristen yararlanılarak uygulanacak bir ağırlık optimizasyonu ile ölçülerin ağırlıkları belirlenir.

* Ölçüt matrisinin geliştirilmiş ölçme planı ve en uygun duruma getirilmiş ağırlıklarla hesaplanan varyans-kovaryans matrisi K_{xx} 'ile eşdeğer olup olmadıkları test edilir.

* Öngörülen duyarlık isteklerini içeren yapay ölçüt matrisi C_{xx} ile ağda gerçekleştirilebilecek duyarlıkları gösteren varyans-kovaryans matrisi K_{xx} eşdeğer bulunursa, tasarımı yapılan ağın duyarlık yönünden en uygun durumda olduğuna karar verilir.

5.1.2. Güven Optimizasyonu

Bir jeodezik ağda gerçekçi duyarlık ölçütleri, geçerli bir matematik model ile sağlanabilir. Bir matematik modelin geçerli olup olmadığı ise model hipotezinin testi ile denetlenir. Bir model hipotezi testi, aynı zamanda çok önemli bir güvenilirlik ölçütü olarak ele alınır.

Amaç fonksiyonu olarak; bir ölçünün diğer ölçüler tarafından denetlenebilirliğinin ölçütü olarak da tanımlanan

$$r_i = (Q_{vv}P)_{ii} \quad \text{Serbestlik Ölçütü (Redundanz Payı)}, \quad (154)$$

model hipotezinin testi ile açığa çıkarılamayan hataların sınır değeri olarak Δ_1 iç güven ölçütü ya da ölçü hatalarının koordinatlara etkime katsayısı δ_{01} dış güven ölçütü seçilerek ağıın güvenilirlik yönünden en uygun duruma gelmesi sağlanır.

* Ağda oluşabilecek model hatalarının denetlenmesi amacıyla her bir ölçünün fazla ölçü sayısındaki payı r_1 ve ortalama fazla ölçü sayısı payı $r_0=1-u/n$ hesaplanır. (u: bilinmeyenlerin sayısı, n: ölçü sayısı)

* Fazla ölçü sayısındaki payları r_1 ortalama fazla ölçü sayısı r_0 'dan çok küçük ($r_1 < 0.20$) olan ölçülerin diğer ölçüler yardımıyla yeterince denetlenemediklerine karar verilir. Söz konusu ölçülere dik yönde yeni ölçüler planlanır.

* İç güven ölçütleri Δ_1 ve ölçü hatalarının koordinatlara etkime katsayıları olan dış güven ölçütleri δ_{01} hesaplanır.

* İç güven ölçütleri $\Delta_1 \geq 6 m_1$ olan ölçülerin diğer ölçüler yardımıyla iyi denetlenemediklerine karar verilir ve bu ölçülere dik yönde yeni ölçüler planlanır.

* Gereğinde ağıın masraf, zaman ve emek yönünden en uygun durumda bulunmasını sağlamak amacıyla $r_1 \gg r_0$ ve $\delta_{01} \leq 6$ olan ölçülerin diğer ölçüler tarafından çok iyi denetlendiklerine karar verilir. Bu türden ölçüler gözlem planından çıkarılır.

* Geliştirilmiş ölçme planı, son bir kez daha gözden geçirilir. Tasarımı yapılan ağıın kullanım amaçları için yeterli olup olmadığı denetlenir.

*Tasarım kesinleştirilir. Yapım ve ölçüm işlerine başlanır [8].

Duyarlık ve güven ölçütlerinden herhangi biri amaç fonksiyonu seçilerek yapılan bir duyarlık ve güven optimizasyonu aynı zamanda birinci, ikinci ve üçüncü dereceden optimizasyon işlemini de kapsar. Bu nedenle optimizasyon işlemlerinin tümü duyarlık ve güven optimizasyonu temeli üzerine kurulmaktadır.

5.1.3. Matematiksel Optimizasyon

Bilimsel, teknik ya da ekonomik yatırımlarda; eldeki hammadde, işgücü, donanım ve maddi olanaklar ile en az birim

zamanda en uygun kazanımlar amaçlanmaktadır. Yatırımların gerektirdiği önemli kısıtlayıcılar (ya da olanaklar) herhangi bir parametre ile; amaç da ilgili parametrelerin belirli bir fonksiyonu olarak tanımlanabiliyorsa bir matematiksel optimizasyon söz konusu olur.

Bir matematiksel optimizasyon işlemi genel olarak iki ilke ile özetlenebilir.

a) Maksimum İlkesi: Hammadde, para, işgücü, zaman gibi belli kısıtlamalar ile örneğin miktar, kalite ya da doğruluk yönünden en çok kazanç sağlanması.

b) Minimum İlkesi: Kazanç, kalite, duyarlık gibi belli bir amaç için örneğin hammadde, para, zaman ve işgücü yönünden en az harcama yapılması [25].

Jeodezik ağların tasarımı, geliştirilmesi ve iyileştirilmesi bir yatırım olarak düşünülebilir. Bu durumda sınırlı donanım, işgücü ve maddi olanaklar ile en az birim zamanda en uygun duyarlık ve güvenilirlik istekleri söz konusu olur. Örneğin bir jeodezik ağda; kısıtlayıcılar sadece maliyet olarak ele alındığında, maliyet ile gözlem sayılarının bir fonksiyonu olan ölçü ağırlıkları arasında bir ilişki kurulabilir. Amaç fonksiyonu olarak uygun bir duyarlık ölçütü seçilir ve matematiksel optimizasyon problemi,

$$Z = \lambda_{\max} \Rightarrow \min \quad \text{Amaç Fonksiyonu} \quad (155)$$

$$\begin{cases} \sum P_i = t \\ P_i \geq 0 \end{cases} \quad \text{Kısıtlayıcılar} \quad (156)$$

t: Eldeki Parayla Gerçekleştirilebilecek Dizi Sayısı

şeklinde tanımlanır. Optimizasyon problemi yukarıdaki parametreler yer değiştirilerek de oluşturulabilir.

$$Z = \sum P_i \Rightarrow \min \quad \text{Amaç Fonksiyonu} \quad (157)$$

$$\begin{cases} \lambda_{\max} = c \\ P_i \geq 0 \end{cases} \quad \text{Kısıtlayıcılar} \quad (158)$$

Burada maliyet, ölçülerin sayıları ile tanımlanabilen ağırlıkların toplamı cinsinden ifade edilerek minimum yapılmakta ve uygun bir duyarlık ölçütü de ön koşul olarak ele alınmaktadır. Her iki optimizasyon probleminin çözümü ölçü ağırlıklarının hesaplanması anlamına gelmektedir [25].

5.2. Tasarım Parametrelerine Göre Optimizasyon

Jeodezik ağların optimizasyonu problemi, belirlenmesi gereken parametrelere göre dört gruba ayrılmıştır [8, 24, 25].

0.Derece Optimizasyon : Ağ noktalarının konumlarının ya da bunların fonksiyonlarının karesel ortalama hatalarının en küçük olmasını öngören duyarlık optimizasyonu probleminde, amaç fonksiyonunun gerçekleşmesi için ağın datumunun en uygun biçimde belirlenmesi işlemine *0.Derece Optimizasyon* adı verilir. Bu optimizasyon işleminde; ağın geometrik yapısı ve ölçü duyarlıkları bilinmekte ve değişmez alınmaktadır.

I.Derece Optimizasyon: Ağın datumunun, ölçü duyarlıklarının ve gözlem planının bilindiği varsayılarak en uygun yaklaşık koordinatların belirlenmesi işlemlerine *I.Derece Optimizasyon* adı verilir. Noktaların yaklaşık koordinatları ile ağın geometrik yapısı belirlenmekte; ağın geometrik şekli, diğer bir anlatımla *A katsayılar matrisi en uygun duruma getirilmektedir*. En uygun yaklaşık koordinatlar belirlendiğinden aynı zamanda *Konum Optimizasyonu* olarak da adlandırılmaktadır.

II.Derece Optimizasyon: Ağın datumunun, geometrik yapısının ve ağda gerçekleştirilebilecek ölçü türlerinin duyarlıklarının bilindiği durumlarda amaç fonksiyonunun gerçekleşmesi için *En Uygun Gözlem Planının Belirlenmesi* ya da *En Uygun Ağırlık Dağılımının Saptanması* işlemleri *II.Derece Optimizasyon* adını almaktadır.

Birinci dereceden optimizasyon işleminde aynı zamanda *A katsayılar matrisi de en uygun duruma getirilmektedir*. *A katsayılar matrisi ise ağın yaklaşık koordinatlarına ve ölçme planına bağımlıdır*. Bu nedenle, bazı yayınlarda birinci derece

optimizasyon işlemi, en uygun ölçü planının belirlenmesi olarak adlandırılmaktadır.

İkinci derece optimizasyon işleminde, en uygun ağırlık dağılımının saptanması aşamasında sifıra çok yakın (çok küçük) ya da dağılıma uymayan (çok büyük) ağırlıklar ile fiziksel bir anlam taşımayan sifirdan küçük ağırlıklara karşılık gelen gözlemler gözlem planından indirgendiğinden, bu işlemle aynı zamanda ölçme planı da en uygun duruma getirilmektedir.

Bu nedenlerden dolayı; birinci dereceden optimizasyon işleminde konum optimizasyonu ile ölçme planının optimizasyonu; ikinci dereceden optimizasyon işleminde ise ağırlık optimizasyonu ile ölçme planı optimizasyonu birlikte ele alınmaktadır.

III.Derece Optimizasyon: Belirlenen duyarlık ve güven ölçütlerine uygun olmayan bir jeodezik ağı, seçilen amaç fonksiyonunu sağlayacak biçimde geliştirilmesi ve iyileştirilmesi işlemlerine *III.Derece Optimizasyon* denilmektedir. Böyle bir optimizasyon işleminde en uygun duruma getirilmesi istenen parametrelerin bir bölümü önceden bilinmektedir.

- Ağa yeni ölçüler katılarak ağın geometrik yapısı geliştirilip iyileştirilebilir.

- Ağa yeni noktalar katılarak da ağın geometrik yapısı iyileştirilebilir.

- Ağın geometrik yapısı, hem yeni noktalar katılarak hem de ek ölçüler planlanarak geliştirilebilir.

- Ağa yeni noktalar katılarak, yeni ölçülerin eklenmesi ve eklenen ölçülerin ağırlıklarının hesaplanması yoluyla da optimizasyon işlemi yapılabilir. Bu durumda konum optimizasyonu, ölçme planının optimizasyonu ve ağırlık optimizasyonu birlikte ele alınmaktadır.

5.2.1. Sıfırinci Derece Optimizasyon (Datum Optimizasyonu)

Jeodezik ağların tasarımı, oluşturulması, geliştirilmesi ve iyileştirilmesi aşamalarında kendilerinden beklenen işlevleri yerine getirebilmeleri için belirli duyarlık ve

güven isteklerini sağlamaları gerekir. Örneğin; deformasyon analizi için kurulacak ağların tüm noktalarının her yönde yüksek doğrulukla belirlenmesi ve ağın şeklinin olası deformasyonları ortaya çıkarabilecek nitelikte olması beklenir. Sözgelimi tünel kazılarını yönlendirmek için kurulan ağlarda tünel eksenine dik yöndeki konum doğruluklarının yüksek olması amaçlanır. Buna karşılık ülke nirengi ağlarının duyarlık yönünden homojen olmaları istenir [8, 25].

Sözü edilen duyarlık istekleri ağın datum parametrelerinin (konum, ölçek, yönelme) seçimine bağlıdır. Ağ noktalarının bir kaçınının sabit alındığı ağlarda bağıl duyarlık ölçütlerinden, noktaların tümünün koordinatlarının bilinmeyenler olarak seçildiği serbest ağlarda iç duyarlık ölçütlerinden söz edilir. Gerek ülke nirengi ağları gerekse deformasyonların izlenmesi amacıyla kurulan ağlar, iç duyarlık ölçütlerine göre irdelenirler ve seçilen amaç fonksiyonuna göre geliştirilip iyileştirilebilirler.

Bir datum optimizasyonu probleminde,

A Katsayılar Matrisi

P Ağırlık Matrisi

bellidir.

Q_{xx} en uygun ters ağırlıklar matrisinin oluşturulması istenmektedir.

Bir datum optimizasyonu işlemi, aynı zamanda A katsayılar matrisinin rang bozukluğundan kaynaklanan belirsizliklerin en uygun şekilde giderilmesi anlamına da gelir.

(nxu) boyutlu bir A katsayılar matrisinin rangı r olmak üzere

$$\left. \begin{array}{l} n > r \\ \text{ve} \\ r = u \end{array} \right\} \text{ ise } v^T v \Rightarrow \min \quad (159)$$

koşulunu sağlayan bir en küçük kareler (E.K.K) çözümü vardır. Bu çözümün en azından

$$A A^- A = A$$

$$(A A^-)^T = A A^- \quad (160)$$

koşullarını sağlaması gerekli ve yeterlidir. A katsayılar matrisinin tersi

$$A_L^- = (A^T A)^{-1} A^T \quad \text{sol ters} \quad (161)$$

olarak hesaplanır.

Eğer

$$\left. \begin{array}{l} r = n \\ u > r \end{array} \right\} \quad \text{ise } x^T x \Rightarrow \min \quad (162)$$

koşulunu sağlayan bir *minimum norm (iz minimum) çözümü* vardır. Bir iz minimum çözümünün en azından

$$\begin{aligned} A A^- A &= A \\ (A^- A)^T &= A^- A \end{aligned} \quad (163)$$

koşullarını sağlaması gerekli ve yeterlidir. Bu durumda A katsayılar matrisinin tersi

$$A_R^- = A^T (A A^T)^{-1} \quad \text{sağ ters} \quad (164)$$

olarak hesaplanır.

$$\left. \begin{array}{l} n > r \\ u > r \end{array} \right\} \quad \text{ise } v^T v + x^T x \Rightarrow \min \quad (165)$$

koşulunu sağlayan; *düzeltilmelerin ve koordinat bilinmeyenlerinin kareleri toplamlarının minimum yapıldığı E.K.K çözümüne* ulaşılır [24]. Bu çözüm biçimi

$$\begin{aligned} A A^- A &= A \\ A^- A A^- &= A^- \\ (A A^-)^T &= A A^- \\ (A^- A)^T &= A^- A \end{aligned} \quad (91)$$

(g_4 -invers) koşullarını sağlar. A katsayılar matrisinin tersi

$$\begin{aligned} N^+ &= (A^T A + G G^T)^{-1} G G^T \quad \text{Moore-Penrose İverse (Psoydo Ters)} \\ A^+ &= N^+ A^T \end{aligned} \quad (166)$$

olarak hesaplanır. G matrisi ağın tüm koordinatlarından hesaplanan dönüşüm matrisi olarak seçileceği gibi, N normal

denklem katsayılar matrisinin d (defekt) sayısı kadar özdeğeri sıfıra eşit olan normlandırılmış özvektörlerden de oluşturulabilir.

(165) eşitliği ile tanımlanan amaç fonksiyonu farklı amaçlarla oluşturulan tüm jeodezik ağlar için en uygun bir datum optimizasyonu işlemi olarak ele alınmaktadır. Bundan başka özel amaçlar için geliştirilmiş datum optimizasyon yöntemleri de uygulanmaktadır [24].

Özet olarak bir jeodezik ağ, A ($n \times u$) boyutlu bir katsayılar matrisi olmak üzere

- (i) $r = n = u$ ise $x = A^{-1} \cdot l$
- (ii) $r < n = u$ ise $x = A^+ \cdot l$
- (iii) $r = u < n$ ise $x = (A^T A)^{-1} A^T l = A_L^{-1} \cdot l$
- (iv) $r < u < n$ ise $x = (A^T A)^+ A^T l$ (167)
- (v) $r = n < u$ ise $x = A^T (A A^T)^{-1} l = A_R^{-1} \cdot l$
- (vi) $r < n < u$ ise $x = A^T (A A^T)^+ l$

durumuna göre yukarıdaki bağıntılarla dengelenir [23]. Ancak bir ağ dengelemesi sırasında (ii), (v), (vi) durumlarına pek rastlanmaz. Sözü edilen durumlar duyarlık ve güven isteklerine olumsuz katkıları nedeniyle tercih edilebilecek çözüm yöntemleri değildir. Ancak bir ağırlık optimizasyonu probleminde sözü edilen durumlarla karşılaşma olasılığı oldukça yüksektir.

5.2.2. Birinci Derece Optimizasyon

Dayanak noktalarının, ulaşılabilir ölçü duyarlıklarının ve gözlem planının değişmez olarak ele alındığı birinci derece optimizasyon işlemi; bir konum optimizasyonu biçimini alır. Bu problemde seçilecek bir amaç fonksiyonuna göre ulaşılabilir en uygun

$$K = m_0^2 Q = m_0^2 (A^T P A)^+ \quad \text{Varyans-Kovaryans Matrisi} \quad (168)$$

belirlenir.

Kurulacak olan bir nirengi ağında koordinat bilinmeyenlerinin ya da bunların belirli fonksiyonlarının ters ağırlıklarının izinin minimum olması istenebilir.

$$\text{iz}\{Q_{ff}\} \Rightarrow \min \quad (169)$$

n elemanlı bir vektörün duyarlığı, onun n boyutlu güven hiper elipsodinin hacmi ile ölçülür.

$$\det\{Q_{ff}\} \prod_{i=1}^{2p} \lambda_i \Rightarrow \min \quad \text{Hacim Ölçütü} \quad (170)$$

biçimindeki amaç fonksiyonu söz konusu fonksiyonların duyarlığının minimum olması anlamını taşır.

Yalnız yeterince gözlemlerle çözülmesi düşünülen bir taban açıları eşit önden kestirme probleminde, kestirilecek yeni noktaların en uygun konumu için gerekli koşullar bir tablo şeklinde özetlenebilir [8, 24].

Tablo 2. Taban Açıları Eşit Bir Önden Kestirme Probleminde En Uygun Konumun Belirlenmesi

(γ :İlgili Üçgenin Tepe Açısı)

Amaç Fonksiyonu	Açılarla Önden Kestirme		Kenarlarla Önden Kestirme	
	γ^0	Helmert Hata Elipsi Yarı Eksenleri Oranı	γ^0	Helmert Hata Elipsi Yarı Eksenleri Oranı
D-Optimum $\det\{K_{xx}\} = \min$	120°	$\sqrt{3}$	90°	1
A-Optimum $\text{iz}\{K_{xx}\} = \min$	109° 28' 16"	$\sqrt{2}$	90°	1
Özdeğerler ölçütü	90°	1	90°	1

Varyans ölçütünün ayırma gücü, hacim ölçütünün ayırma gücünden çok fazladır. Bu nedenle ağın iç duyarlığının yüksek olması istenildiğinde varyans ölçütü, buna karşılık her tarafta ve her yönde aynı ve yüksek duyarlıklı homojen ve izotrop bir ağ öngörülürse özdeğerler ölçütü en uygun amaç fonksiyonu olmaktadır.

Bir konum optimizasyonu işlemi, şu adımlar izlenerek gerçekleştirilebilir.

* Uygun bir amaç fonksiyonu seçilir.

* En az iki çıkış noktasından başlanarak amaç fonksiyonunun minimum yapıldığı durum kestirilecek noktanın uygun konumudur.

* Kestirilen yeni nokta ve çevredeki uygun sayıda diğer dayanak noktalarından yola çıkılarak ikinci adımdaki işlem yinelenir.

n noktaya dayalı olarak kestirilmesi düşünülen noktanın geometrik yeri, oluşan geometrik şeklin ağırlık merkezidir. Örneğin bu n sayıdaki dayanak noktaları bir çember ya da düzgün bir çokgen oluşturuyorsa; kestirilecek noktanın en uygun yeri ilgili şeklin merkezi olmaktadır.

Uygulamada; örneğin yüzey ağlarının oluşturulması aşamasında; çalışma sahasının topoğrafik yapısı, yerleşim koşulları, trafik ve bitki örtüsü gibi engeller önemli kısıtlayıcılardır. Konum optimizasyonunun yukarıda önerildiği biçimde uygulama olanakları çok sınırlıdır. Bundan dolayı ilk adımda noktanın en uygun konumu bu kısıtlayıcılara göre belirlenir. İkinci adımda ise; ağda yapılabilecek ölçülerin amaç fonksiyonunu en iyi sağlayacak biçimde seçilmesine çalışılır. Bu durumda optimizasyon işlemi, ölçü planının optimizasyonu olarak ele alınmaktadır. Skaler amaçlı duyarlık ölçütleri yerine, ağda ulaşılabilecek duyarlıkların ölçüt matrisleri ile tanımlandığı durumlarda optimizasyon işlemi, giderek ikinci derece ve üçüncü derece optimizasyon biçimlerine dönüştürülebilir.

5.2.3. İkinci Derece Optimizasyon

İkinci derece optimizasyon işleminde; ağın datumu, geometrik yapısı (noktaların yaklaşık konumları) ve ağda gerçekleştirilebilecek ölçülerin duyarlıkları (K_{ij}) belirlidir ve amaç fonksiyonunun gerçekleştirilebilmesi için *En Uygun Gözlem Planı* ya da (ölçme planı da belli ise) *En Uygun Ağırlık Dağılımı* belirlenir.

Birinci derece optimizasyon işleminde amaç fonksiyonu, stokastik süreçler kuramına uygun şekilde oluşturulmuş homojen ve izotrop bir ölçüt matrisi (Taylor-Karman Matrisleri) olarak

ele alınıyorsa bu işlem aynı zamanda bir ikinci derece optimizasyon işlemidir. Kaynak yayınlarda birinci derece optimizasyon En Uygun Gözlem Planının Belirlenmesi anlamında da kullanılmaktadır.

Bir jeodezik ağda geliştirilmiş ölçü planından elde edilen varyans-kovaryans matrisi K_{xx} , ölçüt matrisi C_{xx} ile önerilen duyarlıkları sağlayamıyorsa; ölçü türlerinin ağırlıklarının yeniden belirlenmesi gerekir. Hesaplama işlemi sonucunda sifıra çok yakın, sıfırdan küçük ya da ağırlık dağılımına uymayacak kadar büyük değerde olan ağırlıklara karşılık gelen gözlemler gözlem planından çıkarılırlar. Bu nedenle, en uygun ağırlık dağılımının belirlenmesi (ağırlık optimizasyonu) işlemi aynı zamanda ölçme planının da en uygun duruma getirildiği bir optimizasyon işlemidir. Bu özellikten dolayı, ikinci derece optimizasyon denilince genellikle ağırlık optimizasyonu söz konusu olur.

5.2.3.1. Ölçme Planının Optimizasyonu

Bir ölçme planının optimizasyonu işleminde; ağın datumunun, ağ noktalarının yaklaşık koordinatlarının ve ölçü duyarlıklarının belli olduğu varsayılmakta ve ağda yapılabilecek en uygun gözlem planının belirlenmesi istenmektedir. Amaç fonksiyonu için; ağda beklenen duyarlık ölçütlerini yansıtan ölçüt matrisleri kullanılır.

Gerek ölçme planının optimizasyonu, gerekse ağırlıkların optimizasyonu işleminde kullanılan ölçüt matrisleri; her yönde homojen ve izotrop bir ağ isteğini karşılayıcı özellikte seçilmelidir. Bu amaca uygun yapıdaki ölçüt matrisleri de (4.1.2) bölümünde de ayrıntılı olarak sunulan Taylor-Karman yapısındaki matrislerdir [26].

Bir ölçme planı optimizasyonu aşağıdaki adımlardan oluşur [8].

* Ağda beklenen duyarlık ölçütlerini yansıtan ölçüt matrisi C_{xx} oluşturulur. Ölçüt matrisleri, ağın geometrik şeklini temsil eden karakteristik uzunluğa bağlı olarak seçilen bir dağılım fonksiyonuna göre hesaplanırlar. Hesaplanan ölçüt matrislerinin ağın geometrik şekline, ulaşılabilecek

duyarlık ve güven ölçütlerinin kapasitesine uygun olarak oluşturulması gerekir.

* Tasarlanan ölçme planından yararlanarak gerçekleştirilebilecek varyans-kovaryans matrisi K_{xx} hesaplanır.

* Duyarlık yönünden en zayıf noktayı tanımlayan λ_{max} ana varyans bileşeni ile bu zayıflığın yönünü ve büyüklüğünü tanımlayan $b_{max} = S_1 \sqrt{\lambda_{max}}$ ana bileşin vektörü belirlenir.

* Duyarlık yönünden zayıf bulunan noktalarda ek ölçme planı düzenlenir ve varyans-kovaryans matrisi K_{xx} yeniden hesaplanır. Üçüncü ve dördüncü adımlar, hesaplanan ana varyans bileşenlerinin beklenen değere yaklaşma oranına göre yinelenenir.

* Varyans-kovaryans matrisi K_{xx} ile ölçüt matrisi C_{xx} 'in eşdeğer olup olmadıkları

$$B = C_{xx}^{-1} K_{xx} \quad (135)$$

matrisinin özdeğerlerinden en büyüğü olan λ_{max}

$$\lambda_{max} \leq 1 \quad (136)$$

eşitsizliğini sağlarsa; ağın ölçme planının duyarlık yönünden en uygun duruma getirildiğine karar verilir.

* Ölçülerin fazla ölçü sayısındaki payları

$$r_i = (Q_{vv}P)_{ii} \quad (154)$$

hesaplanır. Ortalama fazla ölçü sayısı $r_0 = 1 - u/n$ hesaplanır. $r \ll r_0$ ya da $\Delta I_i \geq 6.m_i$ olan ölçülere dik yönde yeni ölçüler planlanır. Emek ve zaman yönünden de bir en uygunlaştırmanın söz konusu olduğu durumlarda $r_i \gg r_0$ ya da $\delta_{0i} \leq 6$ olan ölçüler de ölçme planından çıkarılır.

Bir jeodezik ağın en uygun hale getirilmesinin bir ölçütü olarak kabul edilen güven ölçütleri için uygun sınır değerler hesaplanmıştır [27].

Tablo 3. Jeodezik Ağlarda Güvenirlik Ölçütlerinin Sınır Değerleri

REDUNDANZ PAYLARI $r_i = (Q_{VV}P)_{ii}$	İÇ GÜVEN ÖLÇÜTÜ $k = \frac{\Delta_{0i}}{m_i}$	DİŞ GÜVEN ÖLÇÜTÜ δ_{0i}	GÜVENİRLİK
$0 \leq r_i < 0.01$	$30 \leq k < \infty$	$25 \leq \delta_{0i} < \infty$	Denetlenemez
$0.01 \leq r_i < 0.10$	$10 \leq k < 30$	$15 \leq \delta_{0i} < 25$	Zayıf Denetlenebilir
$0.10 \leq r_i < 0.30$	$6 \leq k < 10$	$8 \leq \delta_{0i} < 15$	Yeterince Denetlenebilir
$0.30 \leq r_i < 1.00$	$0 \leq k < 6$	$0 \leq \delta_{0i} < 8$	Oldukça İyi Denetlenebilir

* Varyans-kovaryans matrisi K_{xx} ile ölçüt matrisi C_{xx} 'in eşdeğer olup olmadıkları tekrar test edilir.

* Güven ölçütleri emek, zaman optimizasyonu yönünden de tekrar gözden geçirilerek yapım ve ölçüm işlemlerine geçilir.

Özet olarak, bir ölçme planı optimizasyonu duyarlık ve güven optimizasyonunun birlikte yürütüldüğü bir optimizasyon işlemidir. Emek ve zaman yönünden de ele alındığında optimizasyon işlemi aynı zamanda bir matematiksel optimizasyon biçimine dönüşür. Son adımda da beklenen duyarlık isteklerinin yeterince sağlanamadığı durumlarda bir üçüncü derece optimizasyon işlemi uygulanmalıdır.

5.2.3.2. Ölçü Ağırlıklarının Optimizasyonu

Ölçme planının optimizasyonu işlemlerinde beklenen duyarlık ve güven istekleri tam olarak sağlanamayabilir. Olanaklar ölçüsünde k sayıda gözlem yapılabilirdiği ve ağıın geliştirilmesinin de mümkün olamayacağı düşünülürse; böyle durumlarda ağırlıkların en uygun dağılımı hesaplanır.

Bir ağırlık optimizasyonu probleminde; ağıın datumu, noktaların yaklaşık koordinatları, ölçme planı ve öncül varyansı bellidir.

* Ağıın beklenen duyarlık isteklerini yansıtan ölçüt matrisi hesaplanır.

$$Q_{xx} = \frac{1}{m_0} \cdot C_{xx} \quad (171)$$

$$* A^{TPA} = Q_{xx}^{-1} = P_{xx} \quad (172)$$

eşitliğini sağlayan P ağırlık matrisi uygun bir algoritma ile hesaplanır.

* Hesaplanan ağırlıklardan sıfırdan küçük, sıfıra çok yakın, sıfıra eşit ya da dağılıma uymayan çok büyük değerli ağırlıklara karşılık gelen gözlemler gözlem planından indirgenir.

* İkinci ve üçüncü adımlar yinelenir. Üçüncü adımdaki işlemler gerekmiyorsa bir sonraki adıma geçilir.

$$* B = C_{xx}^{-1} K_{xx} \quad (135)$$

matrisinin hesaplanan en büyük özdeğeri λ_{max}

$$\lambda_{max} \leq 1 \quad (136)$$

eşitliğini sağlıyorsa; ağırlık duyarlık yönünden optimizasyon işlemi tamamlanır. Güven ölçütleri tekrar gözden geçirilerek tesis ve ölçüm işlemlerine başlanır.

5.2.3.3. Ölçüt Matrisleri ile Ağırlıkların Hesabı

Ölçü ağırlıklarının hesabı için geliştirilmiş dört ana yaklaşımdan söz edilebilir.

- (i) Ölçüt Matrisleri ile Direkt Yaklaşım (*Direkt HR Çözümü*)
- (ii) Ölçüt Matrisleri ile Yinelemeli Yaklaşım (*Yinelemeli HR Çözümü*)
- (iii) Ölçüt Matrislerinin Tersi ile Direkt Yaklaşım (*U, m Çözümü*)
- (iv) Ölçüt Matrislerinin Özdeğerleri ile Yaklaşım (*Kanonik-Aşırtmalı-Çözüm*)

- (i) *Direkt Yaklaşım (Direkt HR Çözümü)*

Ölçme planından hesaplanan normal denklem katsayılar matrisi A^{TPA} ile öngörülen Q_{xx} ölçüt matrisi arasında

$$A^T P A \doteq Q_{xx}^+ \quad \text{ikinci Derece Optimizasyonun Temel Eşitliği} \quad (173)$$

olarak tanımlanan tutarsız (inkonsistenz) yapıdaki eşitlik, her iki taraftan Q_{xx} ölçüt matrisi ile çarpılabilir [28, 29].

$$Q_{xx} A^T P A Q_{xx} \doteq Q_{xx} Q_{xx}^+ Q_{xx} = Q_{xx} \quad (174)$$

eşitliği

$$K = Q_{xx} A^T \quad (175)$$

kısaltması ile

$$K P K^T \doteq Q_{xx} \quad \text{Direkt HR yaklaşımının Temel Eşitliği} \quad (176)$$

elde edilir. Bu eşitlik

P = vektör P

q = vektör Q_{xx} (177)

\odot : Khatrı Rao Çarpımı

P : Köşegen Matris (Ağırlık Matrisi)

olmak üzere

$$(K \odot K) p \doteq q \quad (178)$$

biçiminde doğrusal bir denklem sistemine dönüştürülerek

$$p \doteq (K \odot K)^+ q \quad (179)$$

eşitliği ile ağırlıklar hesaplanır.

(ii) Yinelemeli Yaklaşım (Yinelemeli HR Çözümü)

Dengeleme modelinin

$$x = (A^T P A)^+ A^T P l \quad (180)$$

koordinat bilinmeyenlerine ait ters ağırlık matrisi, hata yayılma kuralına göre

$$Q_{xx} = (A^T P A)^+ A^T P Q_{ll} P A (A^T P A)^+ \quad (181)$$

olarak elde edilir. Q_{xx} , bir ölçüt matrisi olarak ele alınırsa

$$H = (A^T P A)^+ A^T P \quad (182)$$

$$p^+ = Q_{ll}$$

kısaltmaları ile

$$HP^+H^T \doteq Q_{xx} \quad \text{Yinelemeli HR Yaklaşımının Temel Eşitliği} \quad (183)$$

elde edilir [23]. Doğrusal denklem takımı

$$(H\Theta H)p^+ \doteq q \quad (184)$$

şeklinde oluşturularak

$$p^+ \doteq (H\Theta H)^+q \quad (185)$$

eşitliği ile ölçülerin ters ağırlıkları hesaplanır. Bu yaklaşımda H matrisi, hesaplanan ağırlıklara bağımlıdır ve her bir hesaplama sonucunda değişmektedir. Bu nedenle; seçilen bir yakınsama ölçütü ϵ 'a

$$p_{i+1}^+ - p_i^+ < \epsilon \quad (186)$$

ya da i adım sayısına bağlı olarak yinelemeli bir ağırlık hesabını gerektirmektedir. Yaklaşım bu özelliğinden dolayı Yinelemeli (iteratif) Yaklaşım olarak adlandırılmaktadır.

(iii) U, m Yaklaşımı

$$A^T P A \doteq Q_{xx}^+ \quad (173)$$

temel eşitliği

$$(A^T \Theta A^T)p \doteq q \quad (174)$$

p = vektör P

q = vektör (Q_{xx}^+)

biçiminde doğrusal eşitliğe dönüştürülerek ağırlıklar

$$p \doteq (A^T \Theta A^T)^{-1}q \quad (175)$$

eşitliği ile hesaplanır.

Üç yaklaşım ele alındığında, sözü edilen sonuncu yaklaşımın diğer yaklaşımların aksine ölçüt matrislerinin

terslerine (inverslerine) uygulandığı görülmektedir. Sayısal örnekler bu yaklaşımın oldukça iyi olduğunu göstermiştir. Ancak bu yaklaşım

$$D = (A^T P A)^+ - Q_{xx} \quad (176)$$

$$d^T d, \quad d = \text{vektör } D \quad (177)$$

şeklinde tanımlanan ve tüm yaklaşımlar için geçerli olan global ölçüt anlamında ele alındığında, diğerlerine göre daha büyük değere ulaşmaktadır. Bu nedenle; ölçüt matrislerine daha iyi bir yaklaşım elde etmek için, hesaplanan p vektörü bir λ çarpanı ile doğrusal olarak dönüştürülür. Bunun için;

$$p = \text{köşegen } (\lambda p)$$

olmak üzere

$$d^T d \Rightarrow \min \quad (178)$$

koşulunu sağlayan λ çarpanının kestirilmesi gerekmektedir. Bu çarpım optimizasyon için sağlıklı sonuçların elde edilmesini garanti altına alır [29].

Kalıntıların kareleri toplamı, λ çarpanının bir fonksiyonu olarak yazılabilir.

$$f(\lambda) = d^T d = e^T \left[\frac{1}{\lambda} (A^T P A)^+ - Q_{xx} \right] * \left[\frac{1}{\lambda} (A^T P A)^+ - Q_{xx} \right] e \quad (179)$$

$$e^T : (1, 1, \dots, 1)$$

*: Elemanter Hadamard Çarpımı

Bu fonksiyon terimlerine ayrılır, λ çarpanına göre türevi alınır ve $d^T d \Rightarrow \min$ önkoşulunu gerçekleştiren

$$\frac{df}{d\lambda} = e^T \left(\frac{2}{\lambda^2} [(A^T P A)^+ * Q_{xx}] - \frac{2}{\lambda^3} [(A^T P A)^+ * (A^T P A)^+] \right) e = 0 \quad (180)$$

koşulu yazılırsa; λ çarpanı

$$\lambda = \frac{e^T [(A^T P A)^+ * (A^T P A)^+] e}{e^T [(A^T P A)^+ * Q_{xx}] e} \quad (181)$$

ya da bilinen matris çarpımlarından yararlanarak

$$\lambda = \frac{\text{iz}[(A^T P A)^+ \cdot (A^T P A)^+]}{\text{iz}[(A^T P A)^+ \cdot Q_{xx}]} \quad (182)$$

olarak hesaplanır. Yaklaşım bu özelliğinden dolayı *değiştirilmiş (geliştirilmiş) U,m çözümü (Modifizierte U,m Lösung)* adını alır.

(iv) Özdeğerler Ayrımı ile Yaklaşım (Kanonik-aşırtmalı-Çözüm)

Q_{xx} ölçüt matrisi; özdeğerler matrisi D ve normlandırılmış özvektörler matrisi U cinsinden

$$Q_{xx}^* = \bar{U} D \bar{U}^T \quad (183)$$

şeklinde yazılırsa; ikinci derece optimizasyona ait temel eşitlik

$$A^T P A \doteq \bar{U} D \bar{U}^T \quad (184)$$

olarak yazılabilir. Burada U matrisi; normlandırılmış özvektörlerden oluşan ortogonal özellikli bir dönüşüm matrisi, D matrisi ise büyükten küçüğe doğru sıralanmış özdeğerlerden oluşan köşegen bir matristir. Yukarıda sözü edilen her üç yaklaşımdan herhangi birine uygulanabilen bu çözüm yöntemi, U,m çözümüne göre ele alınırsa; (184) eşitliği

$$\bar{U}^T A^T P A \bar{U} \doteq D \quad (185)$$

şeklinde her iki taraftan, soldan \bar{U}^T ve sağdan \bar{U} matrisleri ile çarpılabilir. Bu son eşitlik

$$Z = A \bar{U} \quad (186)$$

kısaltması ile

$$Z^T P Z \doteq D \quad (187)$$

biçimine dönüştürülür.

$$q = \text{vektör } D$$

olmak üzere

$$(Z^T \circ Z^T) p \doteq q \quad (188)$$

doğrusal denklem takımından yararlanılarak

$$p \doteq (Z^T \circ Z^T)^+ q \quad (189)$$

ölçü ağırlıkları hesaplanır.

Yukarıda sözü edilen yaklaşımların herhangi biri seçilerek; ulaşılmaması öngörülen özdeğerlerin de belli bir değerde olması istenildiğinde, kanonik (aşırıtmalı) çözümler önerilebilir. Ancak Z katsayılar matrisinin rangı, değişik amaçlı ağırların şekline bağlı olarak değişir ve olası şekil defektinin önceden kestirilmesi de oldukça zordur. Ayrıca özdeğerlerin hesabı, özdeğerleri hesaplanan matrislerin ana köşegeni dışındaki elemanların büyüklüğüne bağlıdır ve söz konusu en büyük elemanın öngörülen ϵ gibi sifıra çok yakın bir sayıya eşit olması istenir. (Örneğin Jacobi Yöntemi). İterasyon işleminin ϵ sayısına ulaşıncaya kadar sürdürülmesi zorunludur. Bir jeodezik ağda, çok sayıda gözlemin söz konusu olması nedeniyle; çok büyük hesaplama zamanını gerektirmesi ve yukarıda sözü edilen diğer olumsuzluklar, bu yöntemin en sakıncalı yönleridir. Bu nedenle kanonik yöntem genellikle tercih edilebilir bir yöntem değildir.

Gözlemlerin arasında cebrik ya da fiziksel korelasyonların öngörüldüğü durumlarda P matrisi dolu matris olarak ele alınır. Bu durumda ikinci derece optimizasyona ait temel eşitlik, bu özelliğe göre oluşturulur. Örneğin U, m çözümü

⊗ : Kronecker Çarpımı

p = vektör P (P : Dolu Matris)

olmak üzere

$$p \doteq (A^T \otimes A^T)^- q \quad (190)$$

olarak gerçekleşir.

n ağırlık bilinmeyenleri sayısı (ölçü sayısı), m koordinat bilinmeyenleri sayısı olarak ele alındığında; P vektörü n^2 , q vektörü m^2 elemanlı olur. $n > m$ durumunda yukarıdaki denklem

takımında ağırlık bilinmeyenleri sayısı n^2 , denklem sayısı m^2 den fazla olacağından çözüm

$$p^T p \Rightarrow \min \quad \text{Minimum-Norm (Tüm İz Minimum)}$$

koşulu ile gerçekleşir. Bu çözüm

$$P = (A^+)^T Q_{xx}^+ A^+ \quad (191)$$

biçiminde ifade edilebilir [30]. Ancak söz konusu bu durumda gerçek ölçülerle bir çözüme gidilemez. Bu nedenle gerçek ölçülerle yapılacak bir optimizasyon işlemi için kullanışlı değildir.

5.2.4. Üçüncü Derece Optimizasyon

Belirlenen duyarlık ve güven ölçütlerine uygun olmayan bir jeodezik ağın, seçilen amaç fonksiyonunu sağlayacak biçimde geliştirilmesi ve iyileştirilmesi işlemlerine Üçüncü Derece Optimizasyon denilmektedir [8].

Bir üçüncü derece optimizasyon probleminde en uygun duruma getirilmesi istenen parametrelerin bir bölümü önceden bilinmektedir. Böyle durumlarda;

* Ağa yeni ölçüler katarak ağın geometrik yapısı geliştirilip iyileştirilebilir. Ölçme planının bir bölümünün optimizasyonu anlamına gelen bu problemde en uygun durumda belirlenmesi istenen parametreler, A yapı matrisinin bir bölümünden oluşmaktadır.

* Bir jeodezik ağın geometrik yapısı, ağa yeni noktalar eklenerek de iyileştirilebilir. Bu durumda en uygunlaştırılması gereken parametreler, yeni noktaların koordinatlarını içeren bilinmeyenler vektörü x ve yapı matrisi A'nın bir bölümü olur.

* Ağın geometrik yapısı, hem yeni noktalar eklenerek hem de ek ölçüler planlanarak da geliştirilebilir. Bu amaçla konum optimizasyonu, ölçme planının optimizasyonu ve ağırlık optimizasyonu birlikte ele alınır. İşlemler *Simülasyon Yöntemi*

uygulanarak, yapay verilerle, deneme yanılma yoluyla adım adım yaklaşılarak gerçekleştirilir.

Bu amaçla ağda yapılabilecek gözlemlerin tümünden oluşan bir ölçme planı taslağı düzenlenir. Ölçüler sıra ile teker teker ölçme planından çıkarılarak amaç fonksiyonuna etkileri belirlenir. Amaç fonksiyonuna en az katkısı olan ölçü, ölçme planı taslağından çıkarılır. Bir kez indirgenmiş ölçme planı taslağında aynı işlem yinelenir. Amaç fonksiyonu için belirlenen bir sınır değere yaklaşılar.

Bu problem ters bir iterasyon işlemiyle de çözümlenebilir. Problemin tek anlamlı çözümü için gerekli bir ölçme planından başlanarak, ölçme planına alınabilecek ölçülerin teker teker amaç fonksiyonuna katkıları belirlenir. Katkısı en fazla olan ölçü, ölçme planına alınır. Sonraki adımlar için aynı algoritma yürütülür ve amaç fonksiyonu için belirlenen sınır değere yaklaşıncaya kadar ölçülerin ölçme planına teker teker alınması işlemi sürdürülür.

Sözü edilen durumlardan herhangi birine göre yapılacak bir üçüncü derece optimizasyon işlemi, genel olarak şu aşamalardan oluşmaktadır.

* Amaç fonksiyonu olarak uygun bir ölçüt matrisi belirlenir.

* Elde bulunan taslağı ve yeniden planlanan ölçülere göre bir duyarlık ve güven optimizasyonu gerçekleştirilir.

* Ağda hala yetersiz nokta varsa; bu noktaların çevresinde uygun sayıda nokta ve gözlem planından oluşan bir koruyucu kuşak oluşturulur.

* İkinci adımdaki işlemler yinelenir. Amaç fonksiyonuna ulaşıldığına karar verilirse; ağ emek, zaman optimizasyonu yönünden tekrar gözden geçirilerek yapım ve ölçüm işlemlerine başlanır.

Üçüncü derece optimizasyon işleminde, ağın bir kısmı önceden oluşturulmuştur. Hem bu özellikten hem de ağa eklenmesi veya çıkarılması düşünülen her bir gözlem ya da gözlem grubu için doğacak ek hesaplama zamanından kazanmak amacıyla uygun algoritmalar geliştirilebilir.

En genel anlamda; tüm ölçü ve noktalarla birlikte ele alınan ağ, dinamik ağ dengelemesi kavramından yararlanılarak *dinamik ağ optimizasyonu* yöntemiyle en uygun hale getirilebilir.

$$(A^T \ominus A^T)p = q + r \quad (192)$$

şeklinde genel anlamda oluşturulan temel eşitlikte, ağa ait bir takım ağırlıkların değişmemesi öngörülür ve

$$\begin{aligned} (A^T \ominus A^T)p &\doteq q \\ [I : 0]p &= \bar{p}_1 \end{aligned} \quad (193)$$

gibi ek koşul ile genişletilirse *statik model* çözümüne ulaşılır [31, 32, 33].

5.3. Çözüm Algoritmaları

Gerek ikinci, gerekse üçüncü derece optimizasyon işlemlerinde ağırlıklar, ölçüt matrislerine uygulanan *direkt (analitik) yöntemlerle* hesaplanırlar. Bu yöntemler *en küçük kareler çözümü, lineer programlama (lineer optimizasyon) ve lineer olmayan programlama* başlıkları altında özetlenebilir.

Bundan başka; özellikle konum optimizasyonu, ölçme planının optimizasyonu ve ağırlık optimizasyonu işlemlerinin uygun kombinasyonlar şeklinde ele alınmaları durumunda, *simülasyon yöntemleri* söz konusu olur. Bunlar da *ağ indirgemesi (ya da ağ genişletilmesi) ve Monte-Carlo yöntemleri* olarak ele alınmaktadır.

5.3.1. En Küçük Kareler Çözümü

(178), (184), (174) denklemleri en küçük kareler yöntemi ile çözülebilir. Bu yaklaşımlardan ilk ikisinden global yaklaşma ölçütü doğrudan hesaplanmaktadır [29].

$$(K \circ K)^T (K \circ K)p - (K \circ K)^T q = (K^T K * K^T K)p - (K \circ K)^T q = 0 \quad d^T d \Rightarrow \min \quad (194)$$

$$(H^T H * H^T H)p - (H \circ H)^T q = 0 \quad d^T d \Rightarrow \min \quad (195)$$

$$(A A^T * A A^T)p - (A^T \ominus A^T)^T q = 0 \quad \bar{d}^T \bar{d} \Rightarrow \min$$

$$\begin{aligned} U &= A^T \otimes A^T \\ (U^T U)p - U^T q &= 0 & (196) \\ D &= (A^T P A)^+ - Q_{xx} & d = \text{vektör } D \\ D &= (A^T P A) - Q_{xx}^+ & \bar{d} = \text{vektör } D \end{aligned}$$

Bu temel eşitliklerde, örneğin

$$C = A^T \otimes A^T \quad (197)$$

çarpımından elde edilen katsayılar matrisinde $n(n-1)/2$ sayıdaki satır birbirinin aynısıdır. Bu nedenle bu satırlar C matrisinden çıkarılırlar. Bu durumda $C^T C$ matrisinin ana köşegen elemanlarına karşılık gelen satırlar "1", köşegen dışındaki elemanlara karşılık gelen satırlar "2" ile çarpılabilir. Ya da bunlar için M gibi bir ağırlık matrisi oluşturulur. İndirgenmiş C matrisi G olarak tanımlanırsa; çözüm

$$p = (G^T M G)^+ G^T M q \quad (198)$$

biçimine dönüştürülebilir. Hesaplama sonucunda çözüm vektörü p'nin $p_i \leq 0$ ya da $p_i \gg 0$ olan elemanlarına karşılık gelen gözlemler ölçme planından ve A katsayılar matrisinden çıkarılırlar. Geri kalan ölçülerle işlem p_i vektörünün elemanlarının tümü sıfırdan büyük oluncaya kadar sürdürülür. Bu arada ağda yeterli ölçü kalmadığı durumlarda, yapı bozukluğu oluşuyorsa üçüncü derece optimizasyon işlemlerine gerek duyulur [8].

Yukarıda sözü edilen \otimes : Kronecker çarpımı, \circ : Khatri-Rao çarpımı ve $*$: Hadamard çarpımı sembolleri ağırlık optimizasyonunun tutarsız yapıdaki temel eşitliklerinin, doğrusal olarak tanımlanabilmesi için geliştirilmiştir.

\otimes : Kronecker Çarpımı: $(m \times n)$ ve $(p \times q)$ şeklinde verilen A ve B gibi iki matrisin Kronecker çarpımı

$$A \otimes B = (a_{ij} B) \quad (199)$$

olarak tanımlanır. Örneğin

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}_{2.3} \quad B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}_{3.3}$$

olmak üzere; $A \otimes B$ kronecker çarpımı

$$A \otimes B = \begin{vmatrix} a_{11}B & a_{12}B & a_{13}B \\ a_{21}B & a_{22}B & a_{23}B \end{vmatrix}_{6.9}$$

şeklinde daha açık olarak gösterilebilir. Bu özel çarpım, korelasyonlu gözlemler için yapılacak ağırlık optimizasyonunda kullanılır.

⊗: Khatri-Rao Çarpımı: Sözü edilen A ve B matrisleri

$$A = |A_1 \ A_2 \ \dots \ A_k| \quad B = |B_1 \ B_2 \ \dots \ B_k|$$

şeklinde alt matrislerden oluşuyorsa $A \otimes B$ Khatri-Rao çarpımı

$$A \otimes B = |A_1 \otimes B_1, \ A_2 \otimes B_2, \ \dots, \ A_k \otimes B_k|$$

olarak tanımlanabilir. Korelasyonsuz gözlemlerin ağırlık optimizasyonu probleminde A ve B matrisleri sütun halinde vektörler olarak düşünülebilir. Bu durumda $A \otimes B$ Khatri-Rao çarpımı

$$A \otimes B = |a_1 \otimes b_1, \ a_2 \otimes b_2, \ \dots, \ a_k \otimes b_k| \quad (200)$$

biçimine dönüşür.

Örnek:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11} \begin{vmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{vmatrix} & a_{12} \begin{vmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{vmatrix} & a_{13} \begin{vmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{vmatrix} \\ a_{21} \begin{vmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{vmatrix} & a_{22} \begin{vmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{vmatrix} & a_{23} \begin{vmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{vmatrix} \end{bmatrix}_{6.3}$$

***: Hadamard Çarpımı:** A ve B matrisleri eşit boyutlarda iseler

$$A*B = (a_{ij}b_{ij}) \quad (201)$$

Hadamard çarpımı kullanılır. Korelasyonsuz gözlemlerin ağırlık optimizasyonu problemlerine ilişkin normal denklem katsayıları matrisi, genellikle bu çarpıma göre kolayca oluşturulmaktadır.

$$A*B = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} & a_{13}b_{13} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} & a_{23}b_{23} \end{vmatrix}_{2.3}$$

Ele alınan bir ölçüt matrisinin tanımladığı duyarlık isteklerinden daha küçük duyarlık isteklerini öngören en uygun ölçü planının belirlenmesi işlemi, eşitsizlikler şeklinde tanımlanan bir ikinci derece optimizasyon olarak da ele alınır. Bu eşitsizlik, ağırlıkların toplamının minimum olması, maliyetin belirlenen bir değerden daha az olması gibi bir takım ek koşullarla genişletilebilir. Ancak bu tip ek koşullar ikinci derece optimizasyonun asıl amacını sınırladıkları için önemli birer risk oluştururlar. Benzeri koşulları ifade eden fonksiyonlar risk fonksiyonları olarak da adlandırılmaktadır. Bu tip optimizasyon problemleri lineer ya da lineer olmayan optimizasyon problemleri olarak ele alınırlar.

5.3.1.1. Direkt Çözüm (Direkt HR Çözümü)

(194) eşitliği ile tanımlanan en küçük kareler çözümü, sıfırdan küçük ağırlıkların çıkması durumlarında gerekli olan yineleme işlemi gözardı edilirse; doğrudan bir çözümdür. Bu eşitlikte sözü edilen K matrisi, katsayılar matrisi (Yapı matrisi) A ve ölçüt matrisi Q_{xx} 'in çarpımından elde edildiği için kararlı bir yapıya sahiptir.

Ağın yapısına uymayan ölçüt matrislerinin kullanılması durumunda (179) eşitliği tutarsız yapıda olacağından, sıfırdan küçük ağırlıklar ortaya çıkar. Bir başka deyişle; algoritma

Q_{xx} ölçüt matrisine karşı duyarlıdır. Bu özelliğinden dolayı uygun olmayan ölçüt matrisleri hakkında önemli ipuçları taşır.

5.3.1.2. Yinelemeli HR Çözümü

Ölçüt matrisine direkt olarak uygulanan (195) çözümü yinelemeli (iteratif) bir süreci gerektirmektedir. Tam kararlı bir H katsayılar matrisi, her bir yineleme sonunda yeniden hesaplanan p^i ağırlık matrisi ve A yapı matrisinden

$$H^{i+1} = (A^T P^i A) + A^T P^i \quad \{p = 1/p_i^+\} \quad (202)$$

eşitliği ile elde edilmektedir.

Hesaplanan H matrisinde sıfır olan ağırlıklar yoksa; H matrisi tam ranglı olup, rangı (196) eşitliğinde tanımlanmış olan U matrisinin rangına eşittir. Bu çözümün önemli bir sakıncası, her bir yineleme sonucunda singüler bir $A^T P A$ matrisinin tersinin hesaplanmasını gerektirmesidir.

Hesaplama sırasında, sıfıra giden ağırlıkların uygun bir yineleme adımıyla sıfır olarak tanımlanması gerekir. Psoydo ters işleminin genel bir özelliği olarak; çok büyük ve çok küçük olan p_i^+ ters ağırlıkları, bir sonraki yineleme adımıyla sıfıra yakınsayacağından hareketle, uygun bir yineleme adımıyla, herhangi bir p_i^+ ağırlığının sıfıra eşit alınması için gereken alt ve üst sınırlar saptanabilir. Hesaplanan ağırlıklar aynı zamanda Q_{ii} matrisinin özdeğerlerine denk gelir. Bu özdeğerler büyüklük sırasına

$$|P_1^+| > |P_2^+| > \dots > |P_{n/2}^+| > \dots > |P_n^+| \quad (203)$$

şeklinde sıralandığında, büyük bir bölümünün ortalama civarında yığıldığı görülür. $|P_{n/2}^+|$ olarak seçilen ortalama değere göre

$$\begin{aligned} P_{\max}^+ &= |P_{n/2}^+| \cdot \sqrt{P_{\text{sabit}}} && \text{Üst Sınır} \\ P_{\min}^+ &= |P_{n/2}^+| / \sqrt{P_{\text{sabit}}} && \text{Alt Sınır} \end{aligned} \quad (204)$$

değerleri saptanır. Bu sınırlar dışında kalan p_i^+ ağırlıkları sıfır olarak kabul edilir.

Yapılan araştırmalar en uygun P_{sabit} değerinin "200" olduğunu, en uygun yineleme adımının da 2. yineleme adımı olduğunu göstermiştir. Başlangıçta ağırlıklar çok büyük sıçramalar gösterse bile bir sonraki adımda gerçek değerine yakınsar. 0. ve 1. yineleme işleminden sonra, örneğin hesaplayıcı duyarlığı ϵ 'dan daha küçük olan ağırlıklar sıfır olarak kabul edilebilirler.

Eksi işaretli ağırlıklar, uygun olmayan ölçüt matrislerinin kullanıldığı durumlarda kendilerini gösterirler. Eğer önceden verilmiş ölçüt matrislerinin kullanılması gerekiyorsa, burada korelasyon fonksiyonlarına ulaşmak optimizasyonun amacını oluşturur. Bu durumda ağırlıklı iteratif yöntemlerden (Yinelemeli HRW Çözümü) söz edilmektedir.

Yinelemeli çözümde hesaplanan gözlem ağırlıkları, başlangıçta belirlenen ulaşılabilir korelasyon fonksiyonlarından etkilenmiyorsa; bu durum oto korelasyon matrislerinin ve hata elipslerinin çok uygun olduğunun bir göstergesidir.

Bir ağırlıklı yinelemeli çözüm, simetrik Q_{xx} ölçüt matrisinin ana köşegen elemanlarına karşılık gelen ağırlıklar w_s , diğerleri "1" olarak tanımlanan bir W ağırlık matrisi yardımıyla

$$\bar{H} = H \circ H \quad ; \quad p^+ = (\bar{H}^T W \bar{H})^+ \bar{H}^T W q \quad (205)$$

olarak tanımlanabilir. Tutarlı bir ölçüt matrisi kullanılıyorsa yinelemeli HR ile yinelemeli HRW çözümü aynı sonuçları verir. Tutarsız bir ölçüt matrisi söz konusu ise yinelemeli HRW çözümü oldukça kullanışlıdır. Çözüm; komşuluk duyarlıkları da göz önüne alınarak geliştirilebilir. Bu durumda W ağırlık matrisi bu ilişkiye göre oluşturulur. Araştırmalar w_s ağırlığı için en uygun değer $w_s > 10$ olduğunu göstermektedir [23]

5.3.1.3. U, m Çözümü

(196) eşitliğinde gösterilen U, m çözümü direkt bir çözümdür ve bu çözüme ilişkin katsayılar matrisi ağırlık yapı

matrisi A olarak ele alınmaktadır. Yöntem bu özelliği ile uygulamada bazı kolaylıklar sağlamaktadır. Örneğin A yapı matrisinin bazı blokları boştur; bu nedenle geliştirilmiş hesaplama teknikleri ile zamandan kazanç sağlanabilir. Ayrıca A yapı matrisi ölçme planından yararlanılarak kolayca oluşturulabilmektedir. Ölçüt matrislerinin tersine (inversine) uygulanan bu çözümün diğer çözümlerle karşılaştırılabilmesi için, sonuçların λ çarpanı ile düzeltilmesi gerekir [29].

U, m çözümü her zaman sıfırdan büyük ağırlıkların elde edilmesini garantilemez. Ayrıca verilen ölçüt matrisinin uygun olmadığı ya da model hatalarının olduğu durumlarda sıfırdan küçük ağırlıklar ortaya çıkmaktadır. Böyle durumlarda; ideal bir ağırlık dağılımından yararlanılarak hesaplanan

$$Q_{xx} = (A^T P A)^+ \begin{array}{l} \text{Koordinat Bilinmeyenlerine İlişkin} \\ \text{Ters Ağırlık Matrisi} \end{array} \quad (206)$$

bir ölçüt matrisi olarak ele alınır. Yeniden hesaplanan P ağırlık matrisi, öngörülen P matrisine eşit çıkarsa, kurulan fonksiyonel modelin hatalı olmadığını gösterir. Bir başka deyişle, ağırlık yapısına uygun olarak oluşturulan ölçüt matrisleri kullanılırsa uygun ağırlıklar hesaplanabilir [23].

5.3.1.4. Çözümlerin Karşılaştırılması

Genel yapıları açısından ele alınan ilk üç temel yaklaşım; yaklaşımın kalitesi, gözlemlerin duyarlılıkları, hesaplama zamanı vb. açılardan incelenmiş ve özet olarak şu sonuçlara ulaşılmıştır [29].

(i) Global Ölçütler : Yaklaşımlara ait global ölçütler

$$D = A^T P A - Q_{xx}^+$$

$$d = \text{vektör } d$$

olmak üzere

$$d^T d \Rightarrow \min$$

şeklinde kalıntıların kareleri toplamı olarak ele alınmıştır. Beklenildiği gibi (195) eşitliğinde verilen yinelemeli HR

çözümü diğer çözümlere göre daha iyi bir sonuç vermektedir. Ancak diğer çözümler bu ölçütten % 15 ile % 10 arasında olmak üzere önemsiz sayılabilecek bir oranda farkettiği, direkt HR çözümünde bu oranın daha da küçüldüğü gözlenmiştir.

(ii) Lokal Ölçütler: Lokal ölçütler denildiğinde; önerilen ölçüt matrisleri ile homojen ve izotrop nokta elipslerine ulaşma ölçütü gözönüne alınır. İzotropluk özelliği temel eksenler arasındaki oranı, homojenlik ise hata elipslerinin büyüklüğünü ifade eder. Her üç çözümde de aynı kalitede özellikler gözlenmiştir. Genelde direkt HR çözümü homojenlik özelliğini yakalama açısından diğer iki yöntemle göre biraz daha üstündür.

(iii) Ağırlıkların Dağılımı: Tam bir optimizasyon işlemi; gerçekçi olmayan büyüklükte ve dolayısıyla kullanışsız ağırlıkların elde edilmesi anlamını taşır. Bu durumda, gözlemlerin duyarlılıklarının nasıl bir dağılım göstereceği önemli bir ölçüt olarak ele alınmalıdır. U,m çözümünün oldukça homojen ve simetrik bir dağılım gösterdiği ortaya çıkmaktadır. Ancak bu, U,m çözümünün yinelemeli HR çözümüne göre çok daha iyi olduğu anlamını taşımaz. Direkt HR çözümünde daha düşük değerlerde ağırlıklar elde edilmekte, bu da yaklaşımın global ölçütü ile uyushmaktadır.

(iv) Hesaplama Zamanı: Direkt HR ve U,m çözümleri, yinelemeli çözüme göre 10 kat daha hızlıdır. Çünkü yinelemeli HR çözümü uzun bir yineleme sürecini gerektirmektedir. Ancak sıfırdan küçük ağırlıkların elde edilmesi durumunda diğer iki çözüm de yinelemeli bir çözüm olmaktadır. Yinelemeli HR çözümü doğal yapısı gereği, seçilen bir ϵ yakınsama değerine bağlıdır.

Direkt HR ve U,m çözümleri karşılaştırıldığında, küçük ağlarda çalışılması durumunda hesaplama zamanı olarak birbirlerinden anlamlı farkları yoktur. Ancak A katsayılar matrisinin boşluklu yapısı gereği, özel hesaplama teknikleri kullanılırsa; U,m çözümü daha hızlı olmaktadır.

(v) Ölçüt Matrislerinin Uygunluğu: Teorik yönden tercih edilen yinelemeli HR çözümü, her durumda yakınsamamaktadır. Uygun olmayan ölçüt matrislerinin kullanıldığı durumlarda sıfırdan küçük ağırlıklar ortaya çıkar. Yinelemeli HR çözümü,

bu özelliğinden dolayı, uygun olmayan ölçüt matrislerinin saptanması için güçlü bir ölçüt olarak değerlendirilebilir.

Direkt HR çözümüne ait K katsayılar matrisi

$$K = Q_{xx}A \quad (175)$$

şeklinde oluşturulduğundan, yinelemeli HR çözümü kadar olmasa da uygun olmayan ölçüt matrislerine karşı duyarlıdır.

U,m çözümü; yaklaşımı gereği ölçüt matrislerinden en az etkilenen bir çözümdür. Model hatalarının söz konusu olmadığı durumlarda, önemli sayıda sıfırdan küçük ağırlıklar elde ediliyorsa, bu kullanılan ölçüt matrislerinin uygun olmadığına bir göstergesidir.

(vi) En Uygun Yöntemin Seçimi: Yapılan araştırmalar kuramsal olarak; yinelemeli HR ve U,m çözümlerinin, aynı zamanda da direkt HR çözümünün üstün (başarılı) olduğunu ortaya koymuştur. Ancak yinelemeli HR çözümünün de her zaman yakınsayamayacağı kanıtlanmıştır. Gerçek bir ağ uygulamasında; bazı özel durumlarda direkt HR çözümü kullanılabilirdiği halde, yinelemeli HR çözümü tam bir çözülebilirlik özelliği gösterememiştir. Başka bir deyişle; yinelemeli HR çözümü, gözlem planının tamamına uygulanabilen çok güvenilir ölçüt matrisleri gerektirmektedir.

U,m çözümü ölçüt matrislerine uygun, kararlı ve sağlam bir yöntem olup, her durumda çözüm olanağı vermektedir. Ayrıca ağırlık optimizasyonu işlemlerinde ölçü planından kaynaklanan şekil belirsizlikleri (şekil defektleri) kolayca saptanabilmekte ve buna uygun çözüm algoritması geliştirme olanağı sağlamaktadır. Uygun ölçüt matrisleriyle çalışılması durumunda; duyarlık optimizasyonu işlemi için yapılan irdelemeler, geliştirilmiş (değiştirilmiş) U,m çözümünün üstünlüğünü göstermektedir [29, 32].

5.3.1.5. U,m Çözümünün Özellikleri

a-) Çözümün Genel Yapısı

Ölçüt matrislerinin tersine (inversine) uygulanan ve aynı zamanda direkt bir çözüm yöntemi olan U,m çözümüne ait doğrusal denklem sistemi

$$\begin{aligned} (A^T \circ A^T)p &\doteq q \\ p &= \text{vektör } P \\ q &= \text{vektör } (Q_{xx}^+) \end{aligned} \quad (174)$$

olarak tanımlanır. Bu doğrusal denklem sistemi

$$(A^T \circ A^T)p = q + r \quad (192)$$

biçiminde tutarlı hale getirilerek en küçük kareler anlamında

$$r^T r \Rightarrow \min \quad \text{ya da} \quad r^T r + p^T p \Rightarrow \min \quad (207)$$

koşulu ile çözülür.

$$r^T r = e^T \left\{ [(A^T P A - Q_{xx}^+) * [(A^T P A) - Q_{xx}^+]] \right\} e \Rightarrow \min \quad (208)$$

amaç fonksiyonuna göre ağırlıklar

$$p = [(A^T \circ A^T)^T (A^T \circ A^T)]^+ (A^T \circ A^T)^T q \quad (209)$$

eşitliği ile hesaplanır. Burada

$$(A^T \circ A^T)^T (A^T \circ A^T) = (A A^T * A A^T) \quad (210)$$

eşitliği değişmez olduğu için ağırlıklar genellikle

$$p = (A A^T * A A^T)^+ (A^T \circ A^T)^T q \quad (211)$$

temel eşitliğinden hesaplanırlar. Bu yaklaşıma ait global ölçüt diğer yaklaşımların global ölçütünden daha büyüktür. Diğer yaklaşımlarla doğrudan bir karşılaştırılma yapabilmek için p ağırlıkları

$$p_t = \lambda p = \text{köşegen } (\lambda p) \quad (212)$$

şeklinde bir doğrusal dönüşümle düzeltilmelidir. Sözü edilen λ çarpanı, tüm yaklaşımlar için geçerli olan

$$A^T P A^+ \doteq Q_{xx} \quad (213)$$

temel eşitliğinden yararlanarak saptanır. Normal denklem katsayılar matrisinin tersi ile ölçüt matrisinin arasındaki farkların kareleri toplamı için

$$d^T d \Rightarrow \min \quad (214)$$

koşulunu sağlayan λ çarpanı kestirilmelidir. (179) eşitliğinden yararlanarak λ çarpanı

$$\lambda = \frac{e^T [(A^T P A)^+ * (A^T P A)^+] e}{e^T [(A^T P A)^+ * Q_{xx}] e} = \frac{\text{iz} [(A^T P A)^+ (A^T P A)^+]}{\text{iz} [(A^T P A)^+ Q_{xx}]} \quad (215)$$

bağıntısından elde edilir. Böylece λ dönüşümü ile ölçüt matrisine en uygun biçimde yaklaşılr.

(179) eşitliği ile ölçüt matrisine yaklaşımın kalitesi konusunda güçlü bir ölçüt elde edilmiş olur. Bu biçimiyle U, m çözümü, diğer çözüm yöntemleriyle karşılaştırılabilir bir yöntem olmaktadır.

(215) ile hesaplanan λ çarpanı ile ölçüt matrisinin tümüne en uygun bir yaklaşım sağlanmaktadır. Başka bir deyişle λ çarpanı, öngörülen ve elde edilen nokta duyarlıklarının olabildiğince birbirlerine yaklaşmasının bir ölçütüdür. Bu önerme sonucunda,

$$f_d(\lambda) = \text{iz} \left\{ \left[\frac{1}{\lambda} (A^T P A)^+ - Q_{xx} \right] * \left[\frac{1}{\lambda} (A^T P A)^+ - Q_{xx} \right] \right\} \Rightarrow \min \quad (216)$$

amaç fonksiyonu elde edilir. Böylece

$$f_d(\lambda) = -\frac{2}{\lambda^3} \text{iz} [(A^T P A)^+ * (A^T P A)^+] + \frac{2}{\lambda^2} \text{iz} [(A^T P A)^+ * Q_{xx}] = 0 \quad (217)$$

koşulu ile λ_d çarpanı

$$\lambda_d = \frac{\text{iz} [(A^T P A)^+ * (A^T P A)^+]}{\text{iz} [(A^T P A)^+ * Q_{xx}]} \quad (218)$$

biçiminde elde edilir [32]. Böylece ölçüt matrislerinin köşegen elemanlarının düzeltildiği bir yaklaşım belirlenmiş olur. λ_d 'nin belirlenmesi sırasında ana köşegen dışındaki elemanlar önemsizdir. Her iki normlandırma çarpanlarının farkı; (215) eşitliğinde genel matris çarpımının eleman eleman

Hadamard çarpımıyla değiştirilmesidir. Bu çarpım işlemi bu şekli ile n^2 işlemde $2n$ hesaplama işlemine indirgenmiş olur. Bu normlandırma çarpanının geliştirilmesi amaç fonksiyonundan herhangi bir sapma anlamına gelmez. En uygun ağırlık dağılımı gerçekleştirilerek, ağırlık tamamına ilişkin duyarlıklara uygun bir yaklaşım sağlayabilmek için ölçüt matrisinden elde edilen bilgiler kullanılır ve λ çarpanı ile ağırlıkların ölçeği uygun duruma getirilir.

$A^T P A$ normal denklem katsayılar matrisi simetrik olduğundan, $(A^T \otimes A^T)$ matrisinin $n(n-1)/2$ sayıda satırı ikişer kez oluşur. Bu durumda $(A^T \otimes A^T)$ matrisinde ikişer kez yazılmış olan satırlardan birer tanesi çıkarılır. Geriye kalan denklemler $n(n+1)/2$ satırdan oluşur. Bu durumda sistemin yapısını bozmamak için tekrarlanan satırlar "2" ve tekrarlanmayan satırlar "1" ile çarpılır ya da bu amaç için yardımcı bir köşegen ağırlık matrisi M oluşturulabilir. Son şekli ile indirgenmiş $(A^T \otimes A^T)$ matrisi

Ağırlık Matrisi

$$U = (A^T \otimes A^T) \quad M \quad (219)$$

olarak tanımlanır. Bu özelliği ile U çözümü olarak adlandırılan bu yöntem, sonuçların diğer yaklaşımlarla karşılaştırılabilmesi için λ çarpanı ile düzeltilmesi (λp) sonucunda değiştirilmiş (Modifizierter) U, m çözümü adını almıştır [22, 23, 32].

b-) Şekil Defektleri

U, m çözümünde, ölçü ağırlıklarına ilişkin U katsayılar matrisinin rangı, ölçü planına bağlıdır. U matrisi de A yapı matrisinden hesaplandığı için, (174) eşitliğinin rangı ölçme planından kolayca elde edilebilir. Ayrıca $A^T P A$ normal denklem katsayılar matrisinde sifıra eşit eleman sayısı kadar satırın (174) eşitliğine bir katkısı yoktur. Bu nedenle U matrisinden indirgenebilirler. Bunun yanında U matrisinin rangı, herhangi bir özdeğerler hesabı algoritmasıyla elde edilen sifırdan farklı özdeğerlerin sayılmasıyla da hesaplanabilir. Ancak bu

durum yapı bozukluğu olan matrisler için hiç de güvenilir bir yöntem değildir.

U, m çözümüne göre bir ağırlık optimizasyonunda, serbest kenar ağları için düzgün (regüler) bir en küçük kareler çözümü vardır. Bir başka deyişle U matrisinin rangı

$$r(U) = n_s$$

ağda ölçülen kenar sayısına eşittir ve rang defekti sıfırdır. Serbest doğrultu ağlarında ise U matrisinin rang defekti d

$$d = m_d$$

karşılıklı gözlenen doğrultu sayısına (m_d) eşittir. Bu durumda da bir

$$r^T r + p^T p \Rightarrow \min \quad \text{Minimum-Norm En Küçük Kareler Çözümü}$$

geçerli olur [29].

Bir yermerkezli üç boyutlu dik koordinat sisteminde gerçekleştirilen ağırlık optimizasyonu işleminde ortaya çıkan şekil bozuklukları (rang defektleri) aşağıdaki başlıklar halinde özetlenebilir.

* Tek tek doğrultu gözlem ağırlıklarının belirlenmesi durumunda;

m_d : Karşılıklı Gözlenen Doğrultuların Sayısı

m_p : Durulan Nokta Sayısı

olmak üzere toplam doğrultu rang defekti

$$r_d = m_d + 2m_p$$

kadardır. Yöneltilme bilinmeyenlerinin indirgenmesi durumunda sözü edilen rang defekti $r_d=0$ olur.

* Tek tek düşey açı gözlem ağırlıklarının belirlenmesi durumunda;

m_2 : Karşılıklı Gözlenen Düşey Açı Sayısı

m_1 : Tek Taraflı Gözlenen Düşey Açı Sayısı

m_p : Durulan Nokta Sayısı

olmak üzere

$$r_2 = m_2 + m_1 + 2m_p$$

kadardır.

Gerek doğrultu gerekse düşey açı gözlemlerine ilişkin $2m_p$ rang defekti sayısı, her bir durulan nokta için geçerli olan çekül sapmaları bileşenlerinin sabit alınmasından (başka bir deyişle l vektörü ile birlikte ele alınmasından) kaynaklanmaktadır. Tek tek düşey açı gözlemlerine ait düzeltme denklemlerinden çekül sapmaları bileşenlerinin indirgenmesi, sözü edilen rang defektini gideremez. Bu durumda düşey açı gözlemleri doğrultu gözlemleri ile birlikte ele alınarak, çekül sapmaları bileşenleri indirgenmelidir.

* Diğer gözlem türlerinde herhangi bir rang defekti oluşmaz. Ancak tüm gözlemler birlikte ele alınarak ağırlıklar her bir gözlem için ayrı ayrı belirlenmek istenirse; çekül sapmaları bileşenlerinin indirgenmediği durumlarda, çözüm algoritması düşey açıların sahip olduğu kondüsyon yapısından etkilenir ve tam bir çözülebilirlik oluşmaz. Örneğin değiştirilmiş Gauss algoritmasına göre ağırlık bilinmeyenleri hesaplanıyorsa; düşey açılarla diğer gözlemler arasında kondüsyondan kaynaklanan belirsizlikler oluşur.

Anlamlı ve sağlıklı bir ağırlık optimizasyonu U matrisinin düzgün (regüler) hale getirilmesi ile sağlanır. Örneğin iki boyutlu ağlarda, yöneltme bilinmeyenleri de indirgenmemişse; karşılıklı gözlenen yatay doğrultulara ilişkin sütunlardan biri yok edilerek iki sütun toplamı bir bilinmeyen olarak seçilebilir. Diğer bir çözüm şeklinde ise aynı zamanda minimum norm çözümüne denk gelen çözüme ulaşılır. Bu da karşılıklı gözlenen sütunlar için $P_{r1k} = P_{rki}$ koşulunun seçilmesi, yani herhangi birinin ağırlığının diğerine eşit alınmasıdır. Bundan başka bir çözüm de grup ağırlıklarında, her grup için sütunların toplamından oluşan yeni sütunun bir bilinmeyen katsayısı olarak alınmasıdır. Bu yaklaşım, yer merkezli üçboyutlu bir dik koordinat sisteminde, yatay doğrultu ve düşey açılara ilişkin ağırlık bilinmeyenlerinin seçimi işlemi için de kullanışlıdır. Her durumda U matrisi d (defekt) sayısı kadar indirgenir ve sistem tam ranglı hale gelir.

Bir yer merkezli üç boyutlu dik koordinat sisteminde gerçekleştirilen ağırlık optimizasyonu işleminde, rang

defektinin giderilmesi aşamasında şu özellikler dikkate alınmalıdır.

*Rang defektinin giderilmesi amacıyla indirgenen toplam bilinmeyen sayısı, toplam şekil defektinden fazla ise, her bir durulan noktada çekül sapmaları bileşenlerinin indirgenmesinden kaynaklanan yeni şekil defektleri oluşur.

*Çekül sapmaları bileşenleri ve yöneltme bilinmeyenlerinin indirgenmesi söz konusu ise ve her bir durulan nokta için de üç adet doğrultu gözlemi varsa, bu gözlemlere ait düzeltme denklemlerinin elemanları sıfır olur.

*Her bir durulan noktada doğrultu ya da düşey açı sayısı iki ise ve çekül sapmaları bileşenleri de indirgenmişse; her bir gözlem kümesinde ikişer adet daha lineer bağımlılık oluşur.

*Doğrultu ve düşey açı gözlemleri için her bir durulan noktada grup ağırlıkların seçilmesi durumunda; giderilen rang defekti toplam rang defekti kadar olmalıdır. Ancak gerek çekül sapmaları bileşenleri indirgenmiş olsun gerekse indirgenmemiş olsun, arzu edilen düzgün yapıda bir U katsayılar matrisine ulaşmak tamamen ölçü planına bağlıdır ve her zaman düzgün (regüler) çözümler elde edilemez.

Yöneltme bilinmeyenlerinin indirgendiği ve grup ağırlıkların da birer bilinmeyen olarak seçildiği durumlarda; ağırlık bilinmeyenlerinin sayısı oldukça azalır. Bu işlem sonucunda herhangi bir model hatası ya da sütun defekti oluşmaz. Bir ağırlık optimizasyonu probleminde, aynı ekip tarafından benzer ölçme yöntemleri ve benzer koşullarda ölçülen gözlemlere ilişkin ağırlıkların bir grup ağırlık bilinmeyeni olarak ele alınması (Örneğin ;her istasyonda gözlenen yatay doğrultu ve düşey açı kümeleri, bir grup eğik kenar vb.), uygulamada tercih edilen bir yöntemdir [29, 34]. Bu durumda oluşan fonksiyonel model

$$R = I - A_0(A_0^T P A_0)^{-1} A_0^T P \quad (220)$$

R :Yöneltme Bilinmeyenlerine İlişkin İndirgeme Matrisi

$$A_R = R \cdot A_x = R \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ A_r \end{bmatrix} \text{ İndirgenmiş Düzeltme Denklemlerine} \\ \text{İlişkin Katsayılar Matrisi} \quad (221)$$

$$G = (g_1, g_2, \dots, g_r)$$

$g_i^T = (0, 0, 1, \dots, 1, 0, 0)$ i'inci Gözlem Grubuna Ait Gözlemlerin Katsayıları "1" Olan Vektör

olmak üzere

$$G^T (A_R^T \circ A_R^T)^T (A_R^T \circ A_R^T) G p_g = G^T (A_R A_R^T * A_R A_R^T) G p_g = G^T (A_R^T \circ A_R^T)^T q \quad (222)$$

biçiminde tanımlanır. Bu ilk adımda düzeltme denklemlerinden yöneltme bilinmeyenlerinin indirgenmesi ve bir sonraki adımda simetrik özellikli bir $U^T U$ normal denklem matrisi üzerinde ortak bilinmeyen olarak seçilen satır ve sütunların, önce satır satır sonra sütun sütun elemanlar halinde toplanarak bir bilinmeyen satır-sütunu olarak ele alınması gibi basit bir işlem anlamına gelmektedir.

Yermerkezli üç boyutlu bir dik koordinat sistemindeki koordinat bilinmeyenleri, her bir durulan nokta için $(\Phi_i, \Lambda_i, X_i, Y_i, Z_i)$ şeklinde 5 adet bilinmeyenden oluşur. Genellikle ölçüt matrislerinin dik koordinatlardan türetilmesi yeğlenir. (Ayrıca dik koordinatlar ile çekül sapmaları arasındaki korelasyon fonksiyonlarını geliştirmek çok karmaşık bir süreci gerektirir ve optimizasyonun amacına da olumlu bir katkıda bulunmaz). Bu durumda ölçüt matrisi ile $(A^T P A)_{5p, 5p}^+$ normal

denklem katsayıları matrisi doğrudan karşılaştırılamaz. Bunun yerine $(5p \times 5p)$ boyutlu normal denklem katsayılar matrisi (224) eşitliği yardımıyla indirgenmelidir. Ancak A katsayılar matrisinin düşey açılara ilişkin düzeltme denklemlerinden kaynaklanan kondüsyon bozukluğu, tek tek gözlemler için uygulanan ağırlık optimizasyonu işleminde kararsız sonuçlara yol açabilir. Ayrıca indirgenen bilinmeyenler toplam rang defektini aştığı durumlarda da yeni şekil defektlerine yol açar. Bundan başka, tek tek veya grup ağırlıklara göre yapılan bir ağırlık optimizasyonu işleminde; gözlem planından

çıkarılmış olan her bir doğrultu gözlemi ya da doğrultu grubu ağırlıklarına karşılık gelen düşey açı gözlemi ya da düşey açı grubu ağırlık bilinmeyenleri, kondüsyon bozukluğundan çok etkilenirler ve anlamsız sığfamlar gösterirler.

Bu nedenlerden ötürü; ilk adımda yermerkezli dik koordinat sisteminde bir tanı dengelemesi yapılarak uygun çekül sapmaları bileşenleri hesaplanmalıdır. İkinci adımda da çekül sapmaları bileşenlerine ilişkin sütunlar sağ tarafta / vektörü ile birlikte ele alınır ve böylece normal denklem katsayılar matrisi, ikinci derece optimizasyon işlemi için ölçüt matrisleri ile karşılaştırılabilir duruma getirilir.

c-) Ölçüt Matrisleri ile Karşılaştırma

U,m çözümü ölçüt matrislerinin tersine (inversine) uygulanan bir çözüm biçimidir. Bu nedenle serbest ya da dayalı ağırlarda ölçüt matrislerinin terslerinin, bir ağırlık optimizasyonu problemi açısından, ağırlık datumuna bağımlılığının bilinmesi gerekir. Bu konuyla ilgili günümüze kadar yapılmış olan araştırmalardan aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Herhangi bir düzgün ters ağırlıklar matrisi Q_{xx}

$$Q_{xi} = A^{-1}Q_x(A^{-1})^T \quad (223)$$

dönüşümü yardımıyla i ile tanımlanmış bir ağırlık datumuna dönüştürülebilmektedir.

$$A^{-1}A = S_{G',B_i} = I - G(B_i^T G)^{-1}B_i^T$$

Kısmi İz Minimum Koşulunu Sağlayan Dönüşüm Matrisi

$$A^+A = S_{G',G} = I - G(G^T G)^{-1}G^T \quad \text{Tüm İz Minimum Koşulunu Sağlayan Dönüşüm Matrisi} \quad (224)$$

Sözü edilen dönüşüm matrisleri ile A yapı matrisi arasında

$$AS_{G',G} = A \quad AS_{G',B_i} = A$$

ve

$$S_{G',G}A^T = A^T \quad S_{G',B_i}A^T = A^T \quad (225)$$

koşulları geçerlidir. Bu dönüşüm regüler yapılı bir ters ağırlık matrisinin tersine uygulanırsa U,m çözümü

$$A^T P A = S Q_x^{-1} S^T \quad (226)$$

şeklinde oluşturulabilir. Bu sistemin çözümü

$$\begin{aligned} (A^T \circ A^T)^T q &= (A^T \circ A^T)^T \text{ vektör } (S Q_x^{-1} S^T) = (A^T \circ A^T)^T (S \otimes S) \text{ vektör } (Q_x^{-1}) \\ &= (S^T A^T \circ S^T A^T) \text{ vektör } (Q_x^{-1}) = (A^T \circ A^T)^T \text{ vektör } (Q_x^{-1}) \end{aligned} \quad (227)$$

olarak yazılabilir [32]. Normal çarpım, Khatri-Rao ve Kronecker çarpımları arasında

$$\begin{aligned} (A \otimes B)^T &= A^T \otimes B^T \\ \text{vektör } (C A B^T) &= (B \otimes C) \text{ vektör } (A) \\ (A \circ B)^T (T_1 \otimes T_2)^T &= (T_1 A \circ T_2 B)^T \end{aligned} \quad (228)$$

ilişkileri geçerlidir [35].

Buradan hareketle; düzgün ölçüt matrislerinin terslerine doğrudan bir yaklaşım olan değiştirilmiş U,m çözümüne göre hesaplanan ağırlıkların, tüm iz minimum ya da kısmi iz minimum koşullarına göre uygulanan bir S dönüşümünden bağımsız oldukları ortaya çıkmaktadır.

Ancak herhangi bir datumdaki normal denklem katsayılar matrisi ile ölçüt matrisleri karşılaştırıldığında; eşit rang defektine ve buna ek olarak aynı noktalardan seçilmiş datuma sahip olmaları istenir.

$$S_{G',Bi}^T N S_{G',Bi} = N \quad (229)$$

eşitliğinden hareketle ağırlık optimizasyonuna ait temel eşitlik

$$A^T P A = S_{G',Bi}^T Q_x^{-1} S_{G',Bi} \quad (230)$$

biçimini alır ve

$$(A^T \circ A^T) q = (S_{G',Bi} A^T \circ S_{G',Bi} A^T)^T \text{ vektör } (Q_x^{-1}) \quad (231)$$

eşitliğine ulaşılır. Bir başka deyişle; ağırlık optimizasyonu sonuçları kısmi iz minimum sonuçlarına bağımlı hale gelir.

Ancak S_{G,B_i} yerine $S_{G,G}$ (tüm iz minimum) dönüşüm matrisi alınırrsa ağırlık optimizasyonu sonuçları S dönüşümünden bağımsız olur.

Önce düzgün ölçüt matrislerine bir S dönüşümü uygulaması, daha sonra dönüştürülmüş Q_{xx} ölçüt matrislerinin terslerinin hesaplanması durumlarında da sözü edilen genel özellikler geçerlidir [32].

5.3.1.6. En Uygun Çözüm Algoritması

Bir ağırlık optimizasyonu probleminde; U matrisinin rangı r , satır sayısı n ve ağırlık bilinmeyenleri sayısı u olarak ele alınırssa; (5.2.1) başlığında sözü edilen (167) temel çözümlerden uygun olanı kullanılabilir [23].

Anlamlı ve sağlıklı bir ağırlık optimizasyonu, U matrisinin düzgün (regüler) hale getirilmesi ile sağlanır. Daha önce de sözü edildiği gibi, özellikle yermerkezli üç boyutlu dik koordinat sisteminde gerçekleştirilen bir ağırlık optimizasyonu işleminde; U matrisi her zaman düzgün olarak elde edilemez. Bu durum tamamen ağırlık gözlem planına bağlıdır. Fiziksel anlamı bulunmayan ve gerçekçi olmayan ağırlıkların yok edilmesi durumlarında da ağırlık gözlem planına bağlı yeni şekil defektleri oluşabilir. Bu nedenle her durumda kararlı sonuçlar verebilecek bir çözüm algoritmasının geliştirilmesi zorunludur.

Yöneltme bilinmeyenlerinin indirgenmediği doğrultu gözlemleri için yapılan bir ağırlık optimizasyonu işleminde;

$$r^T r + p^T p \Rightarrow \min \quad (232)$$

koşulu altında, karşılıklı gözlenen doğrultuların ağırlıkları eşit çıkar [29, 34]. Bu özellik düşey açı gözlemleri için de geçerlidir.

Üç boyutlu yermerkezli dik koordinat sisteminde gerçekleştirilen ağırlık optimizasyonunda

$$U_p \doteq q \quad (233)$$

eşitliği, ağırlıklar arasında yukarıda sözü edilen özellikleri öngören koşullar ile genişletilebilir. Bu durumda denklem sistemi

$$\begin{aligned} U_p &= q \\ B_p &= 0 \end{aligned} \quad (234)$$

biçimini alır. Burada B matrisi karşılıklı gözlenen her bir gözlem için yazılan koşul denklemlerinden oluşur.

$$B_{r \times m} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} \quad (235)$$

r : Koşul Sayısı

n : Ağırlık Bilinmeyenleri Sayısı

Toplu dengeleme sonucunda ağırlıklar

$$p = (U^T U + B^T B)^{-1} U^T q \quad (236)$$

eşitliğinden hesaplanır. Grup ağırlıklarla gerçekleştirilen optimizasyon işleminde, her bir istasyonda gözlenen doğrultu ve düşey açı ağırlıklarının da kendi aralarında eşit olması öngörülürse (236) eşitliğinden ağırlıklar hesaplanabilir. Çekül sapmaları bileşenleri indirgenmiş ya da indirgenmesin (236) eşitliği ile her zaman regüler çözümler elde edilmektedir. Ancak; çekül sapmaları bileşenlerinin indirgenmesi sonucunda kondüsyondan kaynaklanan sorunlar, beklenen ağırlık dağılımını sağlamaz, çoğunlukla anlamsız ağırlıklar elde edilmektedir. Sıfırdan küçük olarak elde edilen ağırlıklardan ötürü de gereğinden fazla ölçü, ölçme planından çıkarıldığında istenmeyen şekil bozuklukları oluşur.

Ağırlıklar arasında öngörülen koşullar, yaklaşımın özelliğinden ötürü U, m çözümünde daha güvenilir sonuçlar vermektedir.

Ölçüt matrisinin ağırlık varyans-kovaryans matrisi olarak seçildiği bir test işleminde, her üç yaklaşım ile kesin çözümler elde edilmiştir. Özellikle yinelemeli HR çözümü ve direkt HR çözümü öngörülen koşulları sayısal yuvarlatma

hataları sınırı içerisinde sağlamıştır. Bu durum uygun ölçüt matrisleri kullanılması durumunda her üç yaklaşımla aynı sonuçlara ulaşılabileceğini göstermektedir.

Sayısal uygulamalar bu yaklaşımla gerek ağırlıkların dağılımı gerekse beklenen değerleri bakımından oldukça uygun sonuçlara ulaşıldığını göstermektedir.

5.3.1.7. En Uygun Çözüm Yöntemi

Yapılan bir çok araştırmalar sonucunda; seçilen bir amaç fonksiyonuna göre gerçekleştirilecek bir ikinci ya da üçüncü derece optimizasyon probleminde, en uygun gözlem planı ve en uygun ağırlık dağılımının belirlenebilmesi için üç temel adım önerilmiştir. Üç Adım Yöntemi olarak adlandırılan bu çözüm önerisi aşağıda adımlar halinde özetlenebilir [29, 34].

Birinci Adım: Olası tüm gözlemlerden oluşan gözlem planı ile optimizasyon işlemine başlanır. Korelasyonsuz ve ayrı ayrı ele alınan ölçü ağırlıkları, ikinci derece optimizasyon işlemi ile belirlenir.

İkinci Adım: Gözlem planı aşağıda açıklanan a) duyarlık, b) güvenilirlik ve c) maliyet ölçütlerine göre indirgenir.

a) Birinci adımda çok küçük ağırlıklara karşılık gelen gözlemler gözlem planından çıkarılır.

b) Diğer gözlemler tarafından kontrol edilebilirlik (serbestlik) ölçütüne hiç bir katkısı olmayan gözlemler gözlem planından çıkarılır, buna karşılık diğer gözlemler tarafından zayıf kontrol edilebilen ölçüler için ek gözlemler planlanır.

c) Gözlem planı maliyet yönünden incelenerek, gerekirse bazı gözlemler plandan çıkarılır.

Üçüncü Adım: Yöneltilme bilinmeyenleri indirgenir ve grup ağırlıkları belirlenir. İndirgenmiş gözlem planından yararlanarak son bir kez daha ağırlık optimizasyonu yapılır. En uygun gözlem planı bir kez de güvenilirlik yönünden gözden geçirilir.

Kuramsal olarak, tam bir optimizasyonun gerçekleşmesi için önerilen bu üç adım, uygulamada ölçüt matrislerinin ağırlık yapısına uygun olarak seçilememesi, uygulanan dengeleme

yönteminin fonksiyonel modeline bağlı olarak oluşturulan A yapı matrisindeki olası kondüsyon bozukluklarından doğan ek rang defektleri, ölçüler için ayrılabilirlik emek ve zamanın sınırlı olması, yatay doğrultu gözlemleri ve düşey açı ölçülerinde ağırlıkların eşit alınması isteği gibi bir takım kısıtlayıcılar nedeniyle, tam olarak uygulanamamaktadır. Bu durumlarda birinci ve üçüncü adımlar eşgüdümlü olarak ele alınabilir.

Birinci ve ikinci adımda, gözlemlerin çıkarılması ya da eklenmesi durumunda yinelemeli bir optimizasyon işlemi söz konusudur. Bu işlem hesaplama zamanının artması anlamına gelmektedir. Her defasında, yeniden A katsayılar matrisinin ya da U matrisinin oluşturulması yerine, *aşamalı en küçük kareler (Sequential Least Squares)* teknikleri kullanılabilir. Her eklenen gözlem veya gözlem grupları için

$$Q_{xx}^i = N^{-1} = Q_{xx}^{i-1} - R_i S_i R_i^T \quad (237)$$

ya da her çıkarılan gözlem veya gözlem grupları için

$$Q_{xx}^i = N^{-1} = Q_{xx}^{i-1} + R_i S_i R_i^T \quad (238)$$

çözümünden yararlanılır. Burada

$$W = Q_{ll}^{-1}$$

$$R_i = N_{i-1}^{-1} A^T$$

$$S_i = (W_i^{-1} + A_i R_i)^{-1} \quad \text{Eklenen Gözlemler İçin}$$

$$S_i = (W_i^{-1} - A_i R_i)^{-1} \quad \text{Çıkarılan Gözlemler İçin}$$

$$X_i = X_{i-1} - R_i k_i \quad \text{Eklenen Gözlemler Sonucunda}$$

$$[k_i = S_i (A_i X_{i-1} - l_i)] \quad \text{Hesaplanan Bilinmeyenler Vektörü}$$

$$X_i = X_{i-1} + R_i k \quad \text{Çıkarılan Gözlemler Sonucunda}$$

$$[k_i = S_i (A_i X_{i-1} + l_i)] \quad \text{Hesaplanan Bilinmeyenler Vektörü}$$

bağıntıları ile tanımlanmaktadır. Bir ağırlık optimizasyonu probleminde; A yerine U, N yerine $U^T U$ ve x yerine p alınarak yinelemeli çözüme gidilebilir [32, 36].

5.3.1.8. En Uygun Ölçüt Matrislerinin Belirlenmesi

Bir ağırlık optimizasyonu işleminde; ulaşılması istenilen duyarlık isteklerini karşılamak amacıyla oluşturulan ölçüt matrislerinin ağın geometrik yapısına uygun olarak seçilmesi zorunludur. Uygun seçilmeyen ölçüt matrisleriyle optimizasyonun fiziksel gerçeklerle uyuşması beklenemez. Burada sorun, ağın ölçme planı ve geometrik yapısına en uygun olan ölçüt matrislerinin belirlenmesi olarak ele alınır.

Başlangıçta önerilen kovaryans fonksiyonları ile oluşturulan ölçüt matrislerinin ağıdan elde edilen ters ağırlıklar matrisiyle eşdeğer olup olmadığı

$$B = C_{xx}^{-1}K_{xx} \quad (135)$$

eşitliğinden elde edilen en büyük özdeğerin minimum olması öngörülerek denetlenebilir. Eklenen ya da çıkarılan her bir gözlemin amaç fonksiyonuna etkisi ancak ağın ters ağırlık matrisi ile irdelenebilir. (135) eşitliği ölçüt matrisi ile ağın ters ağırlıklar matrisi arasındaki uyum konusunda açık bir bilgi vermez. Bu durumda, ölçüt matrislerinin ağın yapısına uygunluğu ağırlık optimizasyonu ile saptanabilir.

Yinelemeli HR çözümü ölçüt matrislerine karşı çok duyarlıdır. Bu çözümde, uygun olmayan ölçüt matrislerinin seçilmesi durumlarında sıfırdan küçük ağırlıkların elde edilme olasılığı oldukça fazladır. Ancak gerçek uygulamalarda çok ender durumlarda yakınsama sağlayabilen bu çözüm yanıltıcı sonuçlar verebilir. Böyle durumlarda U,m çözümü güvenilir bilgiler vermektedir. Her ne kadar sıfırdan küçük olmayan ağırlıkların elde edilmesi garanti değilse de önemli miktarda sıfırdan küçük ağırlıkların oluşması durumunda bu çözüm, ölçüt matrislerinin uygun seçilmediği konusunda önemli ipuçları vermektedir. Ölçüt matrisi ile ağın ters ağırlıklar matrisi arasındaki tutarsızlık

$$A^T P A \doteq P_{xx} = Q_{xx}^+ \quad (239)$$

olarak tanımlanırsa dP_{xx} kalıntılar matrisinin Q_{xx} ölçüt matrisine etkisi

$$(P_{xx} + dP_{xx})(Q_{xx} + dQ_{xx}) - I = 0 \quad (240)$$

$$P_{xx} Q_{xx} = I$$

olmak üzere

$$dQ_{xx} = -(P_{xx} + dP_{xx})^+ dP_{xx} Q_{xx} \quad (241)$$

eşitliğinden elde edilir. dP_{xx} matrisi uygun bir ağırlık dağılımı seçilerek oluşturulan normal denklem katsayılar matrisinden yararlanarak

$$dP_{xx} = A^T P A - Q_{xx}^+ \quad (242)$$

kestirilebilir. Ancak bu durumlarda çok dikkatli davranılmadığı takdirde, ölçüt matrislerinin belirlenmesi amacından uzaklaşılabilir.

Uygulamada Taylor-Karman ya da tam izotrop Taylor-Karman yapısındaki ölçüt matrislerinin önceden verilmesi durumunda; Q_m , Q_L enine ve boyuna korelasyon fonksiyonlarının nasıl seçileceği sorunu ortaya çıkmaktadır. Böyle durumlarda iki olanak söz konusudur.

1- Ağın şeklinden yararlanarak deneysel bir korelasyon fonksiyonu kestirilir.

2- Belirli bir korelasyon modeli ortaya konur. Bu korelasyon modeli analitik bir fonksiyonla temsil edilir (Örneğin Bessel Modelleri)

İkinci durumda; ağı temsil eden uygun yarıçap r ve uygun modeli elde edebilmek için deneysel irdeleme yapmak gereklidir. Günümüze kadar jeodezik ağların korelasyon fonksiyonları yeterince araştırılmamış olduğundan, korelasyon fonksiyonlarının belirlenmesi zorunlu görülmektedir. Bu fonksiyonların ağın yapısı, büyüklüğü ve gözlem türlerine göre ilişkisi (bağlılığı) özellikle gösterilmelidir [23].

Gerçek jeodezik ağlarda olasılığı en fazla olan korelasyon fonksiyonlarının kestirimi sırasında, koordinat hataları vektörü de denilebilen sinyallerin elde olmadığı

bilinmelidir. Her durumda, uygun bir geometrik şekil ve uygun bir ağırlık öngörülerek (örneğin $P=I$ gibi) oldukça basit ve dolu kofaktörler matrisi türetilebilir. Taylor-Karman ya da tam izotrop yapıda bir Q matrisi elde edebilmek için; $r_{ij} = P_i P_j$ nokta bağlantıları vektörü

Q_{ij} : çapraz korelasyon matrisi

yardımla $P_i P_j$ bağlantı doğrultusunda ya da dik doğrultudaki hata şekillerine ilişkin korelasyon değerleri

$$Q_L(r_{ij}) = (f_{ij})_L^T Q_{ij} (f_{ij})_L \quad (243)$$

$$Q_m(r_{ij}) = (f_{ij})_m^T Q_{ij} (f_{ij})_m$$

$$Q_r(ij) = \frac{Q_L(r_{ij}) + Q_m(r_{ij})}{2} = \frac{Q_{x_i x_j} + Q_{y_i y_j}}{2} \quad (244)$$

hesaplanabilir. Burada

$$(f_{ij})_L = \begin{bmatrix} \cos t_{ij} \\ \sin t_{ij} \end{bmatrix} \quad (f_{ij})_m = \begin{bmatrix} -\sin t_{ij} \\ \cos t_{ij} \end{bmatrix}$$

$$t_{ij} = \arctan \frac{Y_j - Y_i}{X_j - X_i}$$

olarak tanımlanmaktadır.

Bu işlemin güçlüğü; ters ağırlıklar matrisi Q 'nun genellikle homojen-izotrop yapıda olmamasından kaynaklanır. Bu durumda (243) ve (244) eşitlikleri normlandırılmalı ve ölçeklendirilmelidir.

$P_i P_j$ bağlantısı göz önüne alındığında; kesin bir normlandırma yapabilmek için çapraz korelasyon matrisleri Q_{ij} ve oto korelasyon matrisleri Q_{ii} ve Q_{jj} , t_{ij} doğrultusuna ve buna dik ($t_{ij} + \pi/2$) doğrultusuna indirgenir [22, 23, 37, 38].

$$\begin{array}{l|l} Q_{L_i L_i} = (f_{ij}^T)_L Q_{ii} f(ij)_L & Q_{m_i m_i} = (f_{ij})_m^T Q_{ii} f(ij)_m \\ Q_{L_i L_j} = (f_{ij}^T)_L Q_{ij} f(ij)_L & Q_{m_i m_j} = (f_{ij})_m^T Q_{ij} f(ij)_m \\ Q_{L_j L_j} = (f_{ij}^T)_L Q_{jj} f(ij)_L & Q_{m_j m_j} = (f_{ij})_m^T Q_{jj} f(ij)_m \end{array} \quad (245)$$

$$Q_{L_{ij}} = \frac{Q_{L_i L_j}}{\sqrt{Q_{L_i L_i} \cdot Q_{L_j L_j}}} \quad Q_{m_{ij}} = \frac{Q_{m_i m_j}}{\sqrt{Q_{m_i m_i} \cdot Q_{m_j m_j}}} \quad (246)$$

(246) eşitliklerinden boyuna ve enine korelasyonlar hesaplanır. Ağda olası bağlantıların tümü için enine ve boyuna korelasyon fonksiyonları oluşturulur. Korelasyon değerleri nokta uzaklıklarının fonksiyonu olarak gösterilmek istenirse

$$Q_{L_{ii}} = Q_{m_{ii}} = 1 \quad (247)$$

olarak tanımlanmalıdır.

Tek anlamlı bir korelasyon fonksiyonu elde edebilmek için en küçük kareler yöntemine göre dengeleyen fonksiyon kullanılmalıdır. Fonksiyonun üstel bir fonksiyon ya da periyodik bir fonksiyon olduğu konusunda bilgi edinilememişse; bu durumda daha küçük dereceden polinomlar veya spline fonksiyonları uygulanabilir. BOOR ve RICE tarafından geliştirilmiş kübik spline yaklaşımı oldukça uygun sonuçlar vermiştir [39]. k bağlantı noktasında üçüncü derece polinom parçaları ardışık olarak uygulanabilir. Fonksiyonun uyumunun bir ölçütü olarak ele alınan düğüm noktası sayısının artırılması ile bir iyileştirme yapılabilir. Olabildiğince az düğüm noktası ile her tarafta benzer görünümlü bir eğri elde etmek amaçlanır. Araştırılan fonksiyonlarda en uygun düğüm noktası sayısı k=2,3,4 olarak belirlenmiştir.

Sonuç olarak; gerek duyulursa en küçük kareler yöntemiyle kestirilen tek anlamlı bir korelasyon fonksiyonundan yararlanarak ağın tamamına ilişkin ölçüt matrisleri oluşturulabilir.

5.3.2. Doğrusal (Lineer) Programlama

(194), (195), (196) eşitliklerinden ortaya çıkan d kalıntılarının bazı katsayılarında beklenenden daha iyi, bazılarında ise daha zayıf (kötü) olmaları, en küçük kareler çözümünün tipik bir özelliğidir. Bu sonuçların aynı zamanda ölçüt matrislerinin tümü için uyumlu yaklaşımlar anlamında ele alınması durumunda (178), (184) ve (174) temel eşitlikleri bir eşitsizlikler sistemi olarak ele alınmalıdır.

Örneğin (174) temel eşitliği

$$(A^T \circ A^T)p \leq q \quad (248)$$

şeklinde tanımlanır. Bir başka önemli bir problem de genelde dışlanamayan sıfırdan küçük ağırlıkların ortaya çıkmasıdır. Bu tip ağırlıklar bir anlam taşımazlar ve böyle durumlarda belirli koşullar altında yinelemeli çözümler uygulanır. En azından mutlak değeri en büyük olan sıfırdan küçük ağırlıklara karşılık gelen gözlemler, adım adım gözlem planından çıkarılırlar. Böyle bir yinelemeli çözümden

$$p \geq 0 \quad (249)$$

ek koşulu ile kaçınılmış olur. Böylece

$$\sum p_i \Rightarrow \max \quad \text{ya da} \quad \sum c_i p_i \Rightarrow \min \quad (250)$$

şeklinde ağırlıkların toplamı cinsinden ele alınan bir amaç (risk) fonksiyonuna ulaşmak için uygun *Simplex Yöntemler* geliştirilir. Simplex algoritması sonucunda ağırlıkları sıfır olan bir çok gözlemin ortaya çıkması olasıdır. Olası tüm gözlemlerden oluşan maksimum gözlem planınınından yola çıkılarak yapılan doğrusal (lineer) optimizasyon sonucunda, gözlem planının % 50 'sinin gereksiz olduğu sonucuna varılmıştır [29, 40].

Bir bilgi olması bakımından Simplex Algoritması şöyle tanımlanabilir.

Simplex Algoritması :

(174) eşitliği

$$U = A^T \circ A^T \quad (251)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} U_p &\leq q \\ p &\geq 0 \end{aligned} \quad (252)$$

biçiminde bir eşitsizlik sistemi olarak ele alınabilir. Bu durumda P ağırlık vektörü için öngörülen koşul

$$U_p + v = q \quad (253)$$

temel eşitliği ile sağlanır.

- U: $[m(m+1)/2 \times n]$ Boyutlu Katsayılar Matrisi
- p : $[n \times 1]$ Boyutlu Ağırlık Matrisi
- q : $[m(m+1)/2 \times 1]$ Boyutlu Sağ Taraf Vektörü

Burada V matrisinin köşegen elemanları sırasıyla U matrisinin her bir satırındaki tek bir p_i bilinmeyenine karşılık gelen değişkenlerden oluşmaktadır ve bu değişkenler aylak değişkenler (*slack variables*) olarak adlandırılmaktadır.

- m : Koordinat Bilinmeyenleri
- n : Ölçü Sayısı
- M = [U : I] $[m(m+1)/2 \times m(m+1)/2+n]$ Boyutlu Matris
- n = [p : V] $[n+m(m+1)/2 \times 1]$ Boyutlu Bir Vektör

olmak üzere (253) eşitliği

$$\begin{aligned} Z &= c^T n \Rightarrow \max && \text{Amaç Fonksiyonu (Risk Fonksiyonu)} \\ M_n &= q && \text{Temel Eşitlik} \\ n &\geq 0 && \text{Kısıtlayıcılar} \end{aligned} \quad (254)$$

olarak geliştirilebilir. En uygun çözüm M matrisi ile n vektörünün amaç fonksiyonunun en uygun değerini gerçekleştirecek şekilde düzenlenmesiyle elde edilir. M matrisi ve n vektörü

- $M_1: [m(m+1)/2 \times m(m+1)/2]$ Boyutlu Bir Alt Matris
- $n_1: [m(m+1)/2 \times 1]$ Boyutlu Bir Alt Vektör

olmak üzere

$$M = [M_1:M_2]$$

$$n^T = [n_1:n_2]$$

şeklinde alt bölümlerine ayrılabilir. M_1 alt matrisinin Cayley terslerinin alınması zorunludur ve rangı $m(m+1)/2$ kadar olmalıdır. Burada n_1 bağımlı değişkenler, n_2 'de bağımsız değişkenler vektörü olarak adlandırılırlar. Çözüm

$$n_1 = M_1^{-1}q - M_1^{-1}M_2n_2$$

$$Z = c^T n = c_1^T n_1 + c_2^T n_2 \quad \text{Amaç Fonksiyonu} \quad (255)$$

n_2 değişkenlerine bağımlı olarak hesaplanır. En uygun çözüm

$$n^T = [n_1:0] \quad (256)$$

olarak elde edilebilir. Çünkü M_1 matrisi dışında kalan elemanlara karşılık gelen n_2 alt vektörünün elemanları çözüme dahil edilmezler. Bu durumda n^T çözüm vektörüne temel (baz) çözüm vektörü adı verilir. $n_1 \geq 0$ durumlarında kullanılabilir (admissible, karşılaştırılabilir) çözümler elde edilir. En uygun çözüm

$$n_2 \geq 0$$

$$Z = c^T n \Rightarrow \max$$

$$n_1 \geq 0$$

$$c_2^T = c_2^T - c_1^T M_1^{-1} M_2 \leq 0 \quad (257)$$

koşullarını gerçekleştiren çözüm olmaktadır [40].

5.3.3. Doğrusal Olmayan (nonlinear) Programlama

$$(q - Up)^T(q - Up) \Rightarrow \min \quad (258)$$

şeklinde tanımlanan bir amaç (risk) fonksiyonu, doğrusal olmayan programlar için uygundur [29, 32].

$$p \geq 0$$

$$Up \leq q \quad \text{Kısıtlayıcılar} \quad (259)$$

Böyle bir amaç fonksiyonu bir yönüyle en küçük kareler yaklaşımı, diğer bir yönüyle de ondan daha iyi bir yaklaşım olarak değerlendirilmektedir. Bu yaklaşım, en küçük kareler çözümü ile karşılaştırılabilir sonuçların elde edilmesine olanak sağlar ve ayrıca sıfırdan küçük ağırlıkların ortaya çıkması durumunda gerekecek bir iterasyonu da önler.

5.4. Çözüm Algoritmalarının Genel Özellikleri

Jeodezik ağların optimizasyonu işleminde, duyarlık ve güven ölçütleri ile bunlara bağlı olarak maliyet ve zaman gibi diğer ölçütler temel alınmaktadır. Genel olarak

- a- duyarlık
- b- güvenirlilik
- c- doğruluk

ölçütleri amaç fonksiyonları olarak ele alınmaktadır.

Günümüzde optimizasyon işlemi denilince, ölçme planının ve ölçü ağırlıklarının optimizasyonu ile ağın geliştirilip iyileştirilmesi işlemleri birlikte düşünülmektedir.

Optimizasyon işleminde kullanılan sayısal yöntemler ya da çözüm algoritmaları genel olarak iki ana başlık altında ele alınabilir.

- a- Simülasyon Yöntemleri
- b- Analitik Yöntemler

Simülasyon yöntemlerinde, bilgisayar destekli bir optimizasyon çözümü ve amaç fonksiyonu (duyarlık ve maliyet ölçütleri) belirlenir. Amaçlanan ağ oluşturuluncaya kadar yinelemeli çözüm yapılır. Örneğin ağın olası tüm gözlemleri ölçü planı olarak ele alınır ve her bir yinelemede amaç fonksiyonuna en az etkisi olan gözlem ölçü planından çıkarılır. Ya da başlangıçta duyarlık ve güven ölçütlerine bakılmaksızın ağın tek anlamlı çözümü için yeterli olabilecek gözlem planı ile işleme başlanır. Amaç fonksiyonuna en anlamlı katkıda bulunan gözlemler her bir yineleme işlemi sonucunda belirlenerek gözlem planına eklenir.

Analitik yöntemlerde ise; her bir optimizasyon problemi için özel algoritmalar geliştirilir. (Örneğin ağırlık optimizasyonu için en küçük kareler çözümü ya da doğrusal optimizasyon gibi) [8, 25, 36].

5.4.1. Simülasyon Yöntemleri

Bilgisayar destekli bir simülasyon yöntemi aşağıdaki adımlar halinde özetlenebilir.

(i) Duyarlık ve Güven Ölçütleri belirlenir.

(ii) Bir gözlem planı seçilir.

(iii) Örneğin en küçük kareler yöntemi ile ağa ilişkin kovaryans matrisi hesaplanarak duyarlık ve güven ölçütü olarak ele alınacak değerler belirlenir.

(iv) Bu değerler (i). adımdaki değerleri sağlıyorsa bir sonraki adıma geçilir. Ağ çok iyi oluşturulmuşsa gerekli gözlemlerin ağırlık oranları düşürülür ya da bu gözlemler ölçü planından çıkarılır. Ancak ağ yetersiz ise gözlemler eklenir ya da uygun gözlemlerin ağırlıkları büyütülür.

(v) Ağın maliyeti hesaplanır ve (i). adıma dönme olasılıkları gözden geçirilir. Gerekirse tamamen farklı özellikte ya da yapıda yeni bir ağ tasarlanarak sözkonusu süreç yinelenir. (Örneğin sadece doğrultu ağları yerine doğrultu-kenar ağları seçilebilir). Optimum maliyete ulaşıldığı kanısına varıldığında işlem tamamlanmış olur.

Bu yöntem, duyarlık ve güvenilirlik ölçütlerinin kullanılabilir olması ve uygun bir gözlem planı oluşturulması açısından bazı üstünlüklere sahiptir. Buna karşın, optimum bir ağ oluşturabilecek düzeyde yeterli, deneyimli ve bilgili operatörlere gerek duyması en önemli dezavantajıdır.

Simülasyon Yöntemlerinin Özellikleri :

(i) Aşamalı en küçük kareler (*Sequential Least Squares*) tekniği ile hesaplama verimi artırılabilir.

(ii) Simülasyon yönteminin ikinci adımında uygun yapıda bir ağ seçilmesi konusunda hızlı karar verebilmek için bir

takım olanaklar sözkonusudur (Örneğin büyük doğrultu ağlarında GPS noktalarının seçimi gibi)

(iii) Etkileşimli (interaktif) grafiklerin kullanılmasına olanak sağlar.

(iv) Gözlem planında değişiklik yapılması sürecinde, hangi gözlemlerin çıkarılması ya da eklenmesine bilgisayarla karar verebilecek algoritmaların geliştirilmesine de olanak sağlar.

Monte-Carlo Yöntemi:

Simülasyon yöntemleri için geliştirilen özel algoritmalar sözkonusudur. Örneğin bu konuda Monte-Carlo yöntemi, optimizasyon problemlerinin birbirinden bağımsız rasgele çözümleri arasında, amaç fonksiyonunu optimal yapan bir çözümün seçilmesidir. Yöntem adını, verilere dayanılarak gerçekleşmesinden almaktadır. Sonuçta gerçekten optimal çözümün elde edilmesi ve buna yaklaşma olasılığı, rasgele verilerle elde edilen çözümlerin sayısına bağlıdır.

Örneğin; P =sabit ya da $p \geq 0$, gibi kısıtlamalara uygun olarak üretilen ağırlık matrisi için hesaplanan amaç fonksiyonlarının birbirlerine uygun bir aralıkta yaklaşması durumunda (ya da bir diyagrama işlenebilen amaç fonksiyonlarının minimumlarını birleştiren eğrinin -Las Vegas diyagramı-yaklaşık olarak yatay duruma geldiği durumda) simülasyon işlemi tamamlanır.

Monte-Carlo yöntemi amaç fonksiyonlarının çok kesin olarak tanımlanamadığı veya yaklaşık olarak en uygunlaştırma işleminin yeterli olduğu durumlarda uygulanan bir yöntemdir [25].

5.4.2. Analitik (Direkt) Yöntemler

Bu yöntemler, özel optimizasyon problemlerinin matematiksel yöntemlerle çözümlenmesinde kullanılır. Simülasyon çözümünde insanın ya da bilgisayarın yetersiz kaldığı süreci tamamlar [36].

Bu yöntem aşağıdaki adımlardan oluşmaktadır.

- Olası Gözlem Planı Belirlenir.
- İkinci derece Optimizasyon Problemi Çözülür.
- Çıkarılması zorunlu olacak kadar büyük varyanslara sahip (ya da sifıra çok yakın ağırlıkları olan) gözlemler belirlenir. Çünkü bu gözlemlerin ağırlıklı olarak amaçlanan duyarlılık ve güvenirliliklerine olumlu bir katkısı yoktur.

Analitık Yöntemlerin Özellikleri :

(i) Analitik yöntemler için iki temel yaklaşım kullanılmaktadır.

-En küçük kareler anlamında amaç fonksiyonuna en iyi uyum.

-Gereği kadar duyarlılığı öngören ağırlıklarda doğrusal optimizasyon işlemi.

-Bunun dışında üçüncü bir yaklaşım olarak da her iki yaklaşımın birlikte ele alındığı linear complimentarity algoritma (Doğrusal Bütünleşik -tamamlayıcı- Programlama)

(ii) Bu yöntemler özel amaçlar için başarılıdırlar. Ancak ikinci derece optimizasyon problemleri için genel bir çözüm olarak düşünülemezler. En küçük kareler çözümünün en büyük sorunu, hesaplanan ağırlıkların yeterince denetlenememesidir. Bu ağırlıkların bir kısmı sıfırdan küçük ya da kullanışsız olurlar. Diğer önemli bir sorun da ölçüt matrislerinin terslerinin hesaplanması ve değişik özellikte ağırlıklar için elde edilme zorluklarıdır.

(iii) Bu yöntemlerin hiç biri gerçek ağırlıkların maliyetlerini tam olarak belirleyemez. Doğrusal optimizasyon ağırlıkların bir fonksiyonunu minimum (ya da varyansların fonksiyonunu maksimum) yaparken, en küçük kareler çözümü ağırlıkların kareleri toplamını minimum yapar. Diğer yandan linear complimentarity algoritma ise seçilen bir değerden daha küçük ağırlıkların doğrusal bir dönüşümüne karşılık gelir.

(iv) İkinci derece optimizasyon işlemi ölçüt matrislerinde öngörülen duyarlılıkları elde etmeyi amaçlar. Bunlardan uygun olmayanları optimizasyon işleminde kullanılmazlar.

(v) İkinci derece optimizasyon işlemleri, bilgisayarda hesaplama yönünden göreceli olarak pahalı yöntemlerdir. Çoğu

en küçük kareler çözüm yöntemlerinde geçerli olan özel matris hesaplama teknikleri, ikinci derece optimizasyon için öngörülemezler. Böyle durumlarda çok az kullanışlı olmaktadır ya da büyük ağlarda ikinci derece optimizasyon işleminde çalıştırılmazlar.

5.5. Farklı Amaçlı Ağlarda Optimizasyon

Öngörülen amaç fonksiyonuna yeterince ulaşılamadığı durumlarda optimizasyon işlemi; ağa yeni ölçüler ve yeni noktalar eklenerek ağın tümünün ya da bir bölümünün en uygun duruma getirilmesi problemine dönüşür. Bundan başka önceden oluşturulmuş ağların sıklaştırılması ya da geliştirilmesi (yüzey ağlarının oluşturulması) söz konusu olabilir. Bu durumda sıklaştırma yada bağlantılı ağların optimizasyonu gündeme gelir. Bu tür optimizasyon problemi; konumun, ölçü planının ve ölçü ağırlıklarının en uygun duruma getirildiği üçüncü derece optimizasyon yöntemiyle çözülür.

Bir nirengi ağının Gauss-Markof modeline göre denge-lenmesi için

$$Ax = l + v \quad P \quad \text{Matematik Model} \quad (260)$$

oluşturulursa buna ilişkin optimizasyon modeli de

$$C = A^T o A^T \quad (197)$$

olmak üzere

$$Cp = q + r \quad (261)$$

şeklinde kurulur. Çözüme; örneğin

$$\begin{aligned} v^T P v &\Rightarrow \min && \text{koşulu için } x = (A^T P A)^{-1} A^T P l \\ r^T r &\Rightarrow \min && \text{koşulu için } p = (C^T C)^{-1} C^T q \end{aligned} \quad (262)$$

en küçük kareler çözümü ile ulaşılır.

Sıklaştırma ya da genişletme işlemleri sırasında ağın eski bölümüne ait dengeleme sonuçlarının, yeni oluşturulan bölüme ait dengeleme sonuçlarını öngörülen belli koşullar

altında etkilemesi istenir. Böyle durumlarda *dinamik, hiyerarşik (aşama sıralı) ve yarı dinamik dengeleme modelleri*, benzeri koşulların optimizasyon işlemlerinde öngörülmesi durumunda ise *dinamik, statik ve karma (hybrid) optimizasyon modelleri* gündeme gelir [25, 32, 41].

5.5.1. Dinamik Ağ Dengelemesi ve Dinamik Ağ Optimizasyonu

- l_1, x_1 : Ağın Eski Bölümüne Ait Gözlemler ve Koordinat Bilinmeyenleri
- x_2 : Ağın Yeni Bölümü ile Bağlantılı Olan Koordinat Bilinmeyenleri
- x_3 : Ağın Yeni Bölümüne Ait Koordinat Bilinmeyenleri
- l_2 : Ağa Eklenen Yeni Gözlemler

$$P = \begin{vmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{vmatrix} \quad \text{Stokastik Model}$$

[l_1 ve l_2 gözlemlerine ait ağırlıklar]

ve

$$A = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ 0 & A_{22} & A_{23} \end{vmatrix} \quad x = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} \quad \bar{l} = \begin{vmatrix} l_1 \\ l_2 \end{vmatrix}$$

olmak üzere

$$Ax = \bar{l} \quad P \quad \text{Dinamik Ağ Dengelemesine Ait Matematik Model} \quad (263)$$

$$Cp \doteq q \quad \text{Dinamik Ağ Optimizasyonu Modeli} \quad (264)$$

bağıntıları ile tanımlanır. Burada

$$p = \text{vektör } P = \begin{vmatrix} \text{vektör } P_1 \\ \text{vektör } P_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_1 \\ P_2 \end{vmatrix}$$

$$q = \text{vektör } Q_{xx}^{-1} = \begin{vmatrix} \text{vektör } Q_{1/2}^{-1} \\ \text{vektör } Q_{2/3}^{-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Q_{1/2} \\ Q_{2/3} \end{vmatrix} = Q_{1/2/3}$$

olarak gösterilebilir. Ağırlıklar en küçük kareler yöntemine göre

$$(AA^T * AA^T)p - (A^T \circ A^T)^T q = 0 \quad (265)$$

eşitliğinden hesaplanır. Burada

$$A_1 = [I, 0] \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ 0 & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix}^T = [A_{11} \ A_{12}]$$

$$A_2 = [0, I] \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ 0 & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}^T = [A_{22} \ A_{23}]$$

olmak üzere (265) eşitliği

$$\begin{bmatrix} A_1 A_1^T * A_1 A_1^T & A_{12} A_{22}^T * A_{12} A_{22}^T \\ A_{22} A_{12}^T * A_{22} A_{12}^T & A_2 A_2^T * A_2 A_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (A_1^T \circ A_1^T)^T q_{1/2} \\ (A_2^T \circ A_2^T)^T q_{2/3} \end{bmatrix} = 0$$
$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12}^T & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (266)$$

biçiminde ayrıntılı olarak gösterilebilir. Alt matrislerle ters matris hesabı özelliğinden yararlanılarak

$$\bar{M}_{22} = M_{22} - M_{12}^T M_{11}^{-1} M_{12}$$

$$\bar{b}_2 = b_2 - M_{12}^T M_{11}^{-1} b_1$$

olmak üzere

$$p_2 = \bar{M}_{22}^{-1} \bar{b}_2$$

$$p_1 = M_{11}^{-1} (b_1 - M_{12} p_2) \quad (267)$$

eşitliklerinden eski ve yeni gözlemlere ait ağırlıklar hesaplanabilir. Eğer ağa yeni nokta katılmadan iyileştirme yapılacaksa

$$A_{23} = 0 \quad \text{ve} \quad A_2 = A_{22}$$

olur. Ayrıca ağa tek bir ölçünün eklenmesi ya da çıkarılması sözkonusu ise *aşamalı en küçük kareler (sequential least squares)* tekniği ile özdeş olan çözüm biçimine ulaşılır [32, 41].

5.5.2. Hiyerarşik (Aşama Sıralı) Dengeleme ve Statik Optimizasyon

Ağa ait eski gözlemlerin ve koordinatların gözönüne alınmadığı, ancak daha sonra ortak bir datumda değerlendirilmesi söz konusu olduğu durumlarda *hiyerarşik dengeleme modeli*; bu koşullar altında eski gözlemlere ait ağırlıkların sabit olması öngörülürse *statik optimizasyon modeli* geçerli olur.

$$\begin{bmatrix} 0 & A_{22} & A_{23} \\ I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad p_2 \text{ Hiyerarşik Dengeleme Modeli} \quad (268)$$

$$\begin{aligned} C p &\doteq q \\ [I \ 0] p &= \tilde{p}_1 \quad \text{Statik Optimizasyon Modeli} \\ & p_i: \text{Öngörülen Ağırlıklar} \quad (269) \end{aligned}$$

Ağırlıkların hesabı

$$\Omega = r_1^T r_1 + 2k^T(p_1 - \tilde{p}_1) \Rightarrow \min \quad \text{Amaç Fonksiyonu} \quad (270)$$

koşulu altında

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & I \\ M_{12}^T & M_{22} & 0 \\ I & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \tilde{p}_1 \end{bmatrix} = 0 \quad (271)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} p_1 &= \tilde{p}_1 \\ p_2 &= M_{22}^{-1} (b_2 - M_{12}^T p_1) \quad (272) \end{aligned}$$

eşitliklerinden hesaplanır. Ya da dinamik modelin özel bir hali olarak

$$(A_2 A_2^T * A_2 A_2^T) P_2 - (A_2^T \odot A_2^T)^T Q_{2/3} + (A_{22} A_{12}^T * A_{22} A_{12}^T) P_1 = 0 \quad (273)$$

değiştirilmiş dinamik model eşitliğinden elde edilebilir [32].

Eğer eski gözlemlere ait ağırlıkların da gözönüne alınması söz konusu değilse

q =vektör Q_{xx}^{-1} : Sabit Noktalar Dışındaki Yeni Koordinatlara Karşılık Gelen Ölçüt Matrisi

$$Q_{xx}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q_{x_N \times x_N} \end{bmatrix}$$

olmak üzere ağırlıklar

$$p = (A_N A_N^T * A_N A_N^T)^+ (A_N \odot A_N)^T q \quad (274)$$

eşitliğinden hesaplanır. Bu tür optimizasyon işleminde normal denklem sistemi, sabit noktalarla yeni noktalar arasındaki gözlem bağlantılarından hesaplanabilen rang defektine sahiptirler ve Moore-Penrose inversi ile tersleri hesaplanabilir. [34, 42].

5.5.3. Yarı Dinamik Ağ Dengelemesi ve Karma (Hybrid) Optimizasyon

Eski ağa ait gözlemlerin ve koordinatların gözönüne alınmadığı, ancak bunların stokastik ilişkilerinin dengeleme modeli ile birlikte ele alındığı durumlarda *yarı dinamik ağ dengelemesi*; bu koşullar altında örneğin eski ve yeni ağırlıklar arasında ayrıca w_1 ve w_2 gibi bir ağırlık oranının da eklendiği optimizasyon işlemlerinde *karma optimizasyon* gündeme gelmektedir.

$$[0 \ A_{22} \ A_{23}]x = l_2 \quad P_2$$

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix} x = 0 \quad P_{EE} \quad \text{Yarı Dinamik Ağ Dengeleme Modeli} \quad (275)$$

$$\begin{aligned} C_p &\doteq q & w_1 & \text{Karma (Hybrid) Optimizasyon Modeli} \\ [I \ 0] p &= \tilde{p} & w_2 & \end{aligned} \quad (276)$$

$$\Omega = r_1^T w_1 r_1 + r_2^T w_2 r_2 \Rightarrow \min \quad \text{Amaç Fonksiyonu}$$

Bu durumda ağırlıklar

$$\begin{vmatrix} M_{11} + \frac{w_2}{w_1} I & M_{11} \\ M_{12}^T & M_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_1 \\ p_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_1 + \frac{w_2}{w_1} \tilde{p}_1 \\ b_2 \end{vmatrix} = 0$$

denklem sisteminde hesaplanabilirler. w_2/w_1 oranı çok büyük seçilirse statik optimizasyon sonuçlarına ulaşılır [32].

Eğer problem, ağın tümünden yararlanarak çözülmek istenirse;

$$P = \begin{vmatrix} P_2 & 0 \\ 0 & P_{EE} \end{vmatrix}$$
$$Q = \begin{bmatrix} Q_{X_E X_E} & Q_{X_E X_Y} \\ Q_{X_Y X_E} & Q_{X_Y X_Y} \end{bmatrix}^{-1} - \begin{bmatrix} P_{EE} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere yeni ağırlıklar

$$P_2 = (AA^T * AA^T)^{-1} (A^T \circ A^T)^T Q \quad (277)$$

eşitliğinden hesaplanabilir [42].

6. BÜTÜNLEŞİK YÜZEY AĞLARININ DENGELENMESİ

Büyük ölçekli jeodezik çalışmalar için; ülke temel ağı noktalarına dayalı olarak sıklaştırılan ve ortalama 5 km kenar uzunluklu nirengi noktalarından oluşan nirengi ağları **Yüzey Ağları** olarak adlandırılır. Türkiye Ülke Temel Ağı 25-35 km kenar uzunluklu, 901 birinci derece nirengi noktasından ve 27 zincir poligon halkasından oluşmaktadır. Birinci derece zincir poligonları ve birinci derece noktaları arası ortalama 10-30 km kenar uzunluklu ikinci derece noktalarla sıklaştırılmıştır. Hesap yüzeyi 1924 Hayford elipsoidi olarak kabul edilmiş, bu elipsoide ait ulusal datum parametreleri Meşedağ noktasına göre belirlenmiş ve daha sonra komşu ülkelerde seçilen ortak sekiz noktadan yararlanarak 1950 Avrupa datumuna (ED 50) bağlanmıştır [43].

Günümüzde ülke nirengi ağlarının yermerkezli üç boyutlu dik koordinat sistemlerinde dengelenmesi aşamasına gelinmiştir. Türkiye Ulusal Jeodezik Datumu TUJD bir yermerkezli üç boyutlu koordinat sistemidir. Bu nedenle; yatay doğrultular, düşey açılar, eğik uzunluklar ve nivelmanla ölçülen yükseklik farklarından oluşan yersel gözlemler ile Dünya Jeodezik Sistemi WGS84'te ölçülen GPS koordinat farkları topluca değerlendirilebilir.

GPS uydularından yararlanılarak yeryüzünün her bölgesinde, her türlü hava koşullarında, gece ve gündüz gözlem yapılabilmektedir. Yermerkezli üç boyutlu konum belirleme sistemi (Global Positioning System-GPS), uydulardan yayınlanan radyo dalgaları yardımıyla, uydunun yörünge parametrelerinin (Ephemeris) ve yayın zamanının yerdeki alıcılarda kaydedilmesi yoluyla, uydu ile yer noktası arasındaki uzaklığın belirlenmesi temeline dayanır. Aynı bir yer noktasından 4 uyduya olan uzaklıklar belirlenerek, uzunluklarla Geriden Kestirme Yöntemiyle yer noktasının yermerkezli üç boyutlu koordinatları (X, Y, Z); uydu yörüngelerinin tanımlanmış olduğu

Dünya Jeodezik Sistemi'nde (World Geodetic System 1984-WGS84) hesaplanabilmekte ve GPS alıcılarının saat hataları belirlenebilmektedir [44].

Sabit bir alıcı etrafındaki hareketli alıcılar ile sabit alıcıya olan uzaklıkları 20 km'ye kadar olan komşu noktaların bağıl koordinatları $(\Delta X, \Delta Y, \Delta Z)_{WGS84}$, tekrarlansız Hızlı Statik (Rapid Static) yöntemle; 10-20 dakikalık bir sürede, 6 saniyede bir gerçekleştirilebilen gözlemlerle, cm duyarlığında elde edilmektedir.

Yer kabuğu hareketlerinin izlenmesi, deformasyonların araştırılması ya da ülke temel nirengi ağının iyileştirilmesi amacıyla kurulan test ağlarında $t=60$ dakikalık bir süre içerisinde gerçekleştirilen GPS gözlemleri ve *Duyarlı Yörünge Parametreleri (Precise Ephemeris PE)* kullanılarak 3-6 mm duyarlığında *Bağıl Konum Koordinatları* elde edilmektedir [45].

GPS gözlemlerini gerçekleştirebilmek için ufuktan 15° ve daha yüksekte kalan gökyüzünün açık olması, Navstar uyduları ile GPS alıcıları arasında sinyal kesilmesine neden olacak bir engel bulunmaması gerekir. Yerleşim bölgelerinde binalar, ormanlık alanlarda ağaçlar gökyüzünün görülmesini engellediklerinden yersel gözlemlere olan gereksinim ortadan kalkmamıştır.

6.1. Dengeleme Modelleri

Günümüze dek süregelen uygulamalarda eski ağ noktalarının (ülke temel nirengi ağı noktaları) sabit oldukları varsayılmakta, stokastik model yalnızca yeni gözlemlerin duyarlıklarından yararlanılarak oluşturulmaktadır. Böyle bir modelin gerçekçi olmadığı açıktır. Eski noktaların sabit alındığı modellerde, yeni gözlemlerin taşıdıkları bu noktalara ilişkin bilgiler gözardı edilmekte ve yeni gözlemlerin eski nokta koordinatlarından daha duyarlı oldukları durumlarda, yeni nokta koordinatları olumsuz zorlamalara uğramaktadır. Buna karşın ağdaki eski noktaların varyans-kovaryans matrislerinde toplanan konum duyarlıkları ve korelasyonları, stokastik modelde gözönüne alınırsa bunların yeni noktaların koordinatlarını da etkilemesi sözkonusudur [8].

Bütünleşik yüzey ağlarının dengelenmesi için önerilen en uygun model *Dinamik Ağ Modeli*'dir. Bir dinamik ağ modelinde ülke temel ağ noktalarından oluşan dayanak noktaları X_E , korelasyonlu gözlemler olarak ele alınır ve bunlar varyans-kovaryans matrisleri K_{XE} 'den oluşan stokastik modelden yararlanarak yeni gözlemler ile birlikte dengelenir.

x_1 : Yeni Noktalarla Gözlem Bağlantısı Bulunmayan Ülke Temel Ağına Ait Eski Noktalar

x_2 : Yeni Noktalarla Gözlem Bağlantısı Bulunan Ortak Noktalar (Dayanak Noktaları).

A_{22} : Dayanak Noktalarına İlişkin Yapı Matrisi

x_3 : Yeni Noktalar

A_{23} : Yeni Gözlemlere İlişkin Yapı Matrisi

olmak üzere

$$I + v = 0x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3$$

P_{II}

Dinamik Ağ Dengeleme Modeli

$$I_{X_E} + v_{X_E} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$P_{X_E} = K_{XE}^{-1}$$

(278)

oluşturulur [31, 32]. Başka bir dinamik ağ modelinde ise, sadece yeni gözlemler serbest ağ yöntemine göre dengelenmekte, sonra da eski ve yeni dengeleme sonuçları, "Bilinmeyenli Koşullu Ölçüler Yöntemi" ile birleştirilerek kesin çözüme ulaşılmaktadır [8].

Eski ve yeni dengeleme sonuçları gözlemler gibi ele alınır

$$I + v = \begin{bmatrix} X_E \\ X_{F0} \\ X_{F1} \\ X_Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{XE} \\ v_{XF0} \\ v_{XF1} \\ v_{XY} \end{bmatrix} \quad (279)$$

ve ortak noktalar arasında bir benzerlik dönüşümü gerekliliği de gözönüne alınırsa

$$B_F V_F + G_F b + w_F = 0 \quad Q_{FF} = \begin{bmatrix} Q_{F0F0} & 0 \\ 0 & Q_{F1F1} \end{bmatrix} \quad (280)$$

bilinmeyenli koşullu ölçüler dengelemesinin matematik modeli elde edilir.

G_F : Ötelenmiş ve Normlandırılmış Ortak Nokta Koordinat-
larından Oluşan Dönüşüm Matrisi.

$$B_F : [I_{F0} - I_{F1}] ; V_F^T = [V_{F0}^T \ V_{F1}^T] ; W_F = [X_{F0} - X_{F1}] \quad (281)$$

Dinamik modellerde, yeni noktaların koordinatları X_Y hesaplanmakta ve eski noktaların koordinatları da $X_E + V_{XE}$ biçiminde düzeltilmektedir. Elde bulunan verilerin tümünün hata kuramına uygun biçimde değerlendirildikleri bu yöntemde, ayrıca eski nokta koordinatları daha gelişmiş bu nedenle de daha duyarlı aletlerle yapılan yeni gözlemler yardımı ile düzeltilmektedir [8].

Yarı Dinamik Ağ Modeli'nde ise; elde bulunan verilerin tümü hata yayılma kuramı ilkelerine uygun olarak değerlendirilmekte ve yeni noktaların kesin koordinatları X_Y elde edilmektedir. Buna karşın dayanak noktaları olan eski ağ noktaları X_E koordinatlarına dengeleme sonucunda getirilecek düzeltmeler gözardı edilmektedir [32, 47].

$$l + v = 0x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3$$

$$P_{ll}$$

$$0 = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$P_{XE} = K_{XE}^{-1}$$

$$l_{XE} = \begin{bmatrix} x_1^0 - l_{x1} \\ x_2^0 - l_{x2} \end{bmatrix} = 0 \quad \text{Yarı Dinamik Ağ Dengeleme Modeli} \quad (282)$$

Sayısal uygulamalardan elde edilen sonuçlara göre; yenileme ve sıklaştırma çalışmalarının eski ağ noktalarına etkisi; ortak noktalarda koordinat bilinmeyenlerinin % 20'si, ortak noktalarla doğrudan gözlem bağlantısı olan eski noktalarda % 5'i, daha uzaklarda ise % 1'i kadar olmaktadır. Ağ dengelemesinde, koordinat bilinmeyenlerin en fazla bir iki dm büyüklüğünde değer aldıkları düşünülürse; noktaların çoğunda gözardı edilebilecek boyutlarda kalmaktadır [8]. Böylece, bir yarı dinamik ağ modelinde her bir dengeleme sonucunda koordinat bilinmeyenleri ve onların varyans kovaryans

matrislerinin değiştirilmesinden doğacak zaman kaybı ve veri yönetimi karmaşası sorunu giderilmiş olur.

Aşama Sıralı Ağ Modeli'nde koordinatları bilinen eski noktaların konumları, yeni gözlemlerle birlikte kısmi iz minimum koşuluna göre serbest ağların dengelenmesi yöntemiyle yeniden değerlendirilir ya da serbest dengelemenin sonuçları, eski ağ ile ortak olarak ele alınan dayanak noktalarının koordinat sistemine bir dengelemeli benzerlik dönüşümü ile dönüştürülür. Eski noktaların konumlarının yeni gözlemlerin duyarlıkları ile tanımlanabilen sınırlar içerisinde değişmez olarak varsayılıp sayılamıyacakları istatistik yöntemlerle test edilir. İstatistiksel testler sonucu konumlarının değişmez alınabileceği sonucuna varılan noktalar sabit alınarak, uygulanan bir klasik dengeleme yöntemiyle, yüzey ağı noktalarının yeni koordinatları hesaplanır [6, 8, 48].

Son adımda değişmez olarak alınan üst dereceden noktaların geçerli koordinatları (X_g), yeni koordinatlarla birlikte, "Birkaç Kez Belirlenen Bilinmeyenler Vektörünün Dengelenmesi" yöntemiyle de yeniden değerlendirilerek korunabilirler. Böyle bir aşama sıralı ağ modelinde

L_e, L_y : Eşlenik ve Yeni Noktaların Ülke Ağı Datumuna
Dönüştürülmüş Koordinatları
 L_g : Ülke Ağında Eşlenik Noktalara Karşılık Gelen
Geçerli Eski Koordinatlar

gözlemler olarak ele alınırsa,

$$\begin{bmatrix} L_e \\ L_y \\ L_g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_e \\ V_y \\ V_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_g \\ X_y \end{bmatrix} \quad \text{Fonksiyonel Model} \quad (283)$$

$$K_{LL} = \begin{bmatrix} \sigma_0^2 \begin{bmatrix} Q_{ee} & Q_{ey} \\ Q_{ye} & Q_{yy} \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & \sigma_g^2 I \end{bmatrix} \quad \text{Stokastik Model} \quad (284)$$

"Birkaç Kez Belirlenen Bilinmeyenler Vektörünün Dengelenmesi Modeli" elde edilir. Stokastik modelde eşlenik ve yeni noktalara karşılık gelen alt matris, serbest dengelemenin eşlenik noktalar datumuna dönüştürülmüş ters ağırlıklar matrisinden alınır. I birim matris olup $\sigma_g^2=0,01 \text{ cm}^2$ gibi bir değer seçilerek çok büyük ağırlıklarla eşlenik datum noktalarının geçerli koordinatları korunmuş olur [45].

Yüzey ağlarının oluşturulması çalışmalarında, yeni gözlemlerin ağın eski nokta konumlarına etkileri, bu noktaların çoğunda gözardı edilebilecek büyüklükte kaldıkları görülmektedir. Bu nedenle yüzey ağı çalışmaları gereksinimlerini karşılayabilecek yeterli bir jeodezik veri tabanı oluşturuluncaya kadar ağın eski noktalarının korunmasına yönelik yarı dinamik ya da aşama sıralı ağ modelleri en uygun yüzey ağı dengeleme modelleri olarak gündemde kalacaktır.

6.2. Yaklaşık Koordinatların Hesabı

Ülke yüzey ağlarının yer merkezli üç boyutlu dik koordinatları genel olarak iki farklı yoldan elde edilebilmektedir.

1. Eğer ülke yüzey ağının lokal dik koordinatları $(x, y, z=h_e)_i$ önceden biliniyorsa ağın uygun bir yerinde seçilen başlangıç noktasının $(\Phi=B, \Lambda=L)$ elipsoidal koordinatlarının bilinmesi yeterlidir. Başlangıç noktasında elipsoid ve jeoidin teğet olduğu, üç boyutlu elipsoidal dik koordinat sistemi ile yer merkezli üç boyutlu dik koordinat sisteminin başlangıçları ve eksenlerinin çakışık oldukları varsayılmaktadır. Bu durumda (2) formüllerinden başlangıç noktasının elipsoid merkezli (jeodezik) dik koordinatları hesaplanır ve (6) formüllerinden hesaplanan R dönüşüm bağıntısı yardımıyla

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_j = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_i + R \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix}_{ij} \quad (285)$$

diğer noktaların yermerkezli üç boyutlu yaklaşık dik koordinatları hesaplanabilir.

2. Ülke yüzey ağının tüm noktalarının yerel $(x, y, z=h_e)_i$ dik koordinatları biliniyorsa, (2) formüllerinden ağın tüm noktalarının elipsoid merkezli üç boyutlu yaklaşık dik koordinatları hesaplanabilir. Ülke yüzey ağının lokal dik koordinatları (x, y) ve $(z=h_e)$ olarak iki ayrı grupta ele alınmaktadır. (x, y) yatay dik koordinatları iki boyutlu doğrultu kenar ağlarının dengelenmesi ile h_e elipsoidal koordinatları da trigonometrik yükseklik ağlarının dengelenmesi ile hesaplanır. Bu işlem üç boyutlu dik koordinatların yaklaşık değerlerinin elde edilmesi açısından çok önemli bir aşamadır. Böylece daha başlangıçta model hatalarının önüne geçilmekte ve güvenilir bir yaklaşık koordinat kümesi tanımlanabilmektedir.

Yermerkezli üç boyutlu yüzey ağlarının dengelenmesi aşamasında her durulan noktada ikisi çekül sapmaları bileşenlerinin yönünü tanımlayan bilinmeyenler $(d\Phi, d\Lambda)$ ve diğer üçü de dik koordinat bilinmeyenleri (dx, dy, dz) olmak üzere beş bilinmeyen sözkonusudur. Yaklaşık dik koordinatların birinci yöntemle elde edilmesi durumunda, dik koordinatlar başlangıç noktasına bağlı olarak ötelendiği için diğer grup bilinmeyenlere göre daha iyi olarak hesaplanırlar. Buna karşın, ikinci yöntemde her noktanın dik koordinatları, elipsoid yüksekliklerine bağlı olarak hesaplandığı için, çekül sapmaları bileşenlerinin yaklaşık değerlerine (Φ_0, Λ_0) göre daha zayıf kalmaktadır. Ancak her iki durumda da lokal dik koordinatlar, bir tanı dengelemesi sonucunda belirlenmiş ve yer merkezli üç boyutlu dik koordinatların yaklaşık değerleri bu işlem sonrasında hesaplanmışsa; yüzey ağlarının yer merkezli üç boyutlu koordinat bilinmeyenleri, bir serbest dengeleme işlemi ile ortalama 3-4 iterasyonda yakınsamaktadırlar. Bunun bir sonucu olarak; üç boyutlu dik koordinat sisteminin yaklaşık koordinatlarının bir tanı dengelemesi yapılmaksızın doğrudan ölçülerden hesaplama işleminin güvenilir bir yöntem olmadığı ortaya çıkmaktadır.

6.2.1. Bütünleşik Yüzey Ağının Elipsoid Merkezli Üç Boyutlu Yaklaşık Koordinatlarının Hesaplanması

Doğrultu kenar açıları ve trigonometrik yükseklik açılarının ölçülerinden yararlanarak,

$$x_j^0 = x_g + s_{gj}^0 \cos t_{gj}^0$$

$$y_j^0 = y_g + s_{gj}^0 \sin t_{gj}^0 \quad \text{UTM Koordinatları}$$

ve

$$h_j^0 = h_g + d_{gj}^0 \cos(z_{gj} - \gamma_{gj}/2) / \cos(\gamma_{gj}/2) \quad \text{Elipsoid Yükseklikleri (286)}$$

yerel dik koordinatlar hesaplanır. Doğrultu-kenar açıları ve trigonometrik yükseklik açıları en küçük kareler yöntemine göre dengelenerek dengeli koordinatlar elde edilir.

x_g, y_g, h_g : Üst Dereceden Ağ Noktalarının Geçerli UTM Koordinatları,
 x_j, y_j, h_j : Yeni Noktaların UTM Koordinatları,
 γ_{gj} : d_{gj} Kenarını Yerin Merkezinden Gören Açısı,
 $h_{\text{başlangıç}} = H_{\text{başlangıç}}$: Elipsoidin Jeoid Teğet Olduğu Datum Noktası [45].

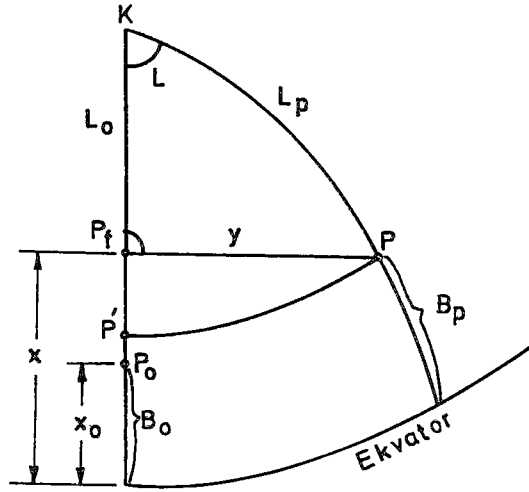
Dengeli iki boyutlu UTM koordinatlarından tek değişkenli kuvvet serileri yardımıyla elipsoid merkezli eğri koordinatlar hesaplanır [49].

$$\begin{aligned} B_j &= B_f + b_{02}Y^2 + b_{04}Y^4 \\ L_j &= L_0 + b_{01}Y + b_{03}Y^3 + b_{05}Y^5 \\ h_{ej} &= h_j \end{aligned} \quad (287)$$

Burada P_f dik ayağına karşılık gelen B_f enlemi

$$B_{f0} = \frac{X_1}{E0} \quad E0 = 111\,136.536\,655 \text{ (m/o)} \quad (288)$$

olmak üzere



Şekil 4. Elipsoidal Koordinatlarla UTM Projeksiyon Koordinatları Arasındaki Geometrik İlişki.

$$B_f = B_{f0} + F_2 \sin(2B_{f0}) + F_4 \sin(4B_{f0}) + F_6 \sin(6B_{f0}) + F_8 \sin(8B_{f0}) + F_{10} \sin(10B_{f0}) + \dots \quad (289)$$

eşitliğinden hesaplanır. L_0 ise dilim orta meridyenine karşılık gelir. b_{0i} ve $E_0, F_2, F_4, F_6, F_8, F_{10} \dots$ katsayıları B_f enlemi ve kullanılan elipsoid parametrelerinden hesaplanabilmektedir [49, 50]. (2) formüllerinden yararlanılarak elipsoid merkezli dik koordinatlar elde edilir.

$$\begin{aligned} X_j^0 &= (N_j + h_j^0) \cos B_j \cos L_j \\ Y_j^0 &= (N_j + h_j^0) \cos B_j \sin L_j \\ Z_j^0 &= (N_j(1 - e^2) + h_j^0) \sin B_j \\ N_j &= a / (1 - e^2 \sin^2 B_j)^{1/2} \\ e^2 &= (a^2 - b^2) / a^2 \end{aligned} \quad (290)$$

6.2.2. GPS Bağıl Konum Koordinatlarının Dengelenmesi ve Ülke Temel Nirengi Ağı Sistemine Dönüşüm

GPS gözlemleri ile elde edilen bağıl konum koordinatları ölçüler olarak ele alınır. Ağ noktalarının tümünün GPS

koordinatları bilinmeyen seçilerek "Birkaç Kez Belirlenen Bilinmeyenler Vektörlerinin Dengelenmesi" yoluyla WGS84'de dengelenirler [5].

Ölçüler

Varyans-Kovaryans Matrisleri

$$\begin{Bmatrix} l_{\Delta XGPS} \\ l_{\Delta YGPS} \\ l_{\Delta ZGPS} \end{Bmatrix} \quad K_{\Delta GPS} = \sigma_{\Delta GPS}^2 Q_{\Delta GPS} \quad (291)$$

Fonksiyonel Model

Stokastik Model

$$\begin{aligned} l_{\Delta XGPS} + v_{\Delta X} &= A_X X_{WGS84} \\ l_{\Delta YGPS} + v_{\Delta Y} &= A_Y Y_{WGS84} \\ l_{\Delta ZGPS} + v_{\Delta Z} &= A_Z Z_{WGS84} \end{aligned} \quad P_{\Delta GPS} = K_{\Delta GPS}^{-1} \quad (292)$$

Matematik model kısa gösterimle yazılırsa

$$l + v = A x \quad P = K_{GPS}^{-1} \quad (293)$$

biçimini alır.

l : Ölçüler Olarak Ele Alınan Küçültülmüş Koordinat Farkları
 v : Ölçülerin Düzeltmeleri

$$A \cdot x = \begin{bmatrix} A_{\Delta X} & 0 & 0 \\ 0 & A_{\Delta Y} & 0 \\ 0 & 0 & A_{\Delta Z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (294)$$

WGS84 sistemindeki yer merkezli üç boyutlu bağıl konum koordinatları $(\Delta X, \Delta Y, \Delta Z)_{WGS84}$; üç boyutlu, 4 parametrelili benzerlik dönüşümü ile ülke temel nirengi ağının elipsoid merkezli, üç boyutlu, TÜRKİYE ULUSAL JEODEZİK DATUMU (TUJD) koordinat sistemine dönüştürülür.

$$\begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix}_{TUJD} = M \begin{bmatrix} 1 & -e_z & +e_y \\ +e_z & 1 & -e_x \\ -e_y & +e_x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix}_{WGS84} \quad (295)$$

Dönüşüm bağıntıları kısa gösterimle

$$\Delta X_{TUJD} = D_4 t_4 \quad 4 \text{ Parametrelilik Benzerlik Dönüşümü} \quad (296)$$

biçimini alırlar [8].

$$t_4^T = [\bar{e}_x \ \bar{e}_y \ \bar{e}_z \ M] \quad \text{Dönüşüm Parametreleri}$$

$$D_4 : \text{Benzerlik Dönüşümün Katsayılar Matrisi} \quad (297)$$

$$e_x = \frac{\bar{e}_x}{M}, \quad e_y = \frac{\bar{e}_y}{M}, \quad e_z = \frac{\bar{e}_z}{M} \quad \text{Dönüklükler}$$

Dönüştürülmüş koordinatlar $(\Delta X, \Delta Y, \Delta Z)_{TUJD}$ nin varyans kovaryans matrisi

$$K_{\Delta X, TUJD} = D_4 K_{t_4} D_4^T \quad (298)$$

K_{t_4} : Dönüşüm Parametrelerinin Varyans-Kovaryans Matrisleri.

bağıntısından hesaplanır.

Dönüşüm parametrelerinin bilinmedikleri durumlarda bu büyüklükler, her iki sistemde koordinatları bilinen en az 2 eşlenik noktada (296) bağıntılarından yararlanılarak en küçük kareler yöntemiyle belirlenirler.

Dönüşüm sonucunda, verilen koordinatlar kümesinde uyuşum testi yapılarak, dönüşüme girebilecek ortak noktalar istatistiksel yöntemlerle saptanır ve TUJD sistemine dönüştürülmüş GPS bağıl konumları belirlenir.

$$\Delta X_{TUJD} + v_x = D_4 t_4 \quad P_{GPS} \cong K_{GPS}^{-1} \quad \text{Matematik Model} \quad (299)$$

$$R = \begin{bmatrix} M & -e_z & +e_y \\ +e_z & M & -e_x \\ -e_y & +e_x & M \end{bmatrix} \cong I \quad K_{GPS} = m_0^2 (R Q_{GPS} R^T) \quad (300)$$

Dönüşüme ait model hipotezinin geçersiz olması durumunda

$$Q_i = (Q_{v_x v_x})_i = (Q_{v_y v_y})_i = (Q_{v_z v_z})_i \quad \text{Ön koşulu altında}$$

$$T_i = \left(\frac{V_{x_i}^2 + V_{y_i}^2 + V_{z_i}^2}{3 m_0^2 Q_i} \right)^{1/2} \quad \text{Test Büyüklüğü} \quad (301)$$

POPPE testi için verilen dağılım fonksiyonunun düzenlenmesiyle elde edilen

$$c = \sqrt{(p-\frac{q}{b}) \left\{ \left(1-\frac{\alpha}{p}\right) \left[\frac{1}{(p-\frac{q+b}{b})} \right] \right\}} \quad \text{Deneysel Tablo Değeri (302)}$$

ile karşılaştırılarak uyumsuz koordinat ölçüleri ayıklanır ve dönüşüme girebilecek eşlenik koordinat kümesi belirlenir [51].

p : Dönüşüme Katılan Nokta Sayısı

q : Dönüşümde Hesaplanan Bilinmeyen Sayısı (4)

b : Dönüşümün Boyutu (3)

6.3. Bütünleşik Yüzey Ağı'nın Dengelenmesi ve Ülke Nirengi Ağı ile Uyuşum

Yersel gözlemler ile TUJD sistemine dönüştürülmüş GPS koordinatları birlikte ele alınarak topluca dengelenirler [45]

Fiziksel yeryüzünde yapılan yatay doğrultu (r), düşey açı (z), eğik uzunluk (d) ve geometrik nivelman ölçüleri (ΔH) ile GPS gözlemlerinden elde edilen, ülke temel nirengi ağı sistemine dönüştürülmüş üç boyutlu bağıl konum koordinatları (ΔX , ΔY , ΔZ)_{TUJD} topluca dengelenerek üç boyutlu bütünleşik ağı'nın DİNAMİK KOORDİNATLARI hesaplanır.

$$l + v = \begin{bmatrix} A_x & A_\Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \Delta \end{bmatrix} \quad \text{Fonksiyonel Model} \quad (303)$$

Ölçüler

Yersel Gözlemler :

r_{ij} Yatay Doğrultular

z_{ij} Düşey Açılar

d_{ij} Eğik Uzunluklar

ΔH_{ij} Geometrik Nivelmanla Belirlenen Yükseklik Farkları

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta\Phi \\ \Delta\Lambda \end{bmatrix} \text{ Çekül Sapması Bileşenlerinin Etkilerini}$$

İndirgemek Amacıyla Seçilen Bilinmeyenler [7].

$$\begin{bmatrix} N_{xx} & N_{x\Delta} & B_e \\ N_{\Delta x} & N_{\Delta\Delta} & 0 \\ B_e^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \Delta \\ k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n_x \\ n_\Delta \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{Genişletilmiş Normal Denklemler (307)}$$

B_e : Bütünleşik Ağda Bulunan Üst Dereceden Ağ Noktalarının ya da Eşlenik Datum Noktalarının Koordinatları (x_e) ile Oluşturulan 7 Parametrelili Benzerlik Dönüşümünün Katsayıları Matrisi.

Genişletilmiş normal denklemlerin çözümü sonucu üst dereceden ağ noktaları ile eşlenik datum noktalarında

$$x_e^T x_e \Rightarrow \min. \quad \text{Kısmi İz Minimum} \quad (308)$$

koşulunu sağlayan Ülke Temel Nirengi Ağı Sistemindeki Elipsoid Merkezli Üç Boyutlu Kartezyen Koordinatlar (X, Y, Z)_{TUJD} elde edilir.

Bütünleşik yüzey ağları, (306) eşitliğindeki normal denklemlerin psoydo terslerinden yararlanarak da dengelenebilirler. Bu durumda ilk adımda serbest dengeleme sonucu elde edilen yeni koordinatlar x_e ile ülke nirengi ağında ortak olan geçerli koordinatlar x_g arasında dengelemeli bir benzerlik dönüşümü yapılarak kısmi iz minimum çözümüne ulaşılmaktadır. (299) ve (300) eşitliklerinde tanımlanan dengelemeli benzerlik dönüşümü yedi parametrelili olarak ele alınır ve

$$X_{TUJD} + v_x = D_7 t_7 \quad P_{xx}^{TUJD} = (Q_{xx}^{TUJD})^{-1} \quad (309)$$

dönüşümün matematik modeli oluşturulur. TUJD sisteminde kısmi iz minimum koşulu altında elipsoid merkezli üç boyutlu dik

koordinatlar (bir başka deyişle yer merkezli üç boyutlu dik koordinatlar) TUJD elde edilir.

Bütünleşik yüzey ağlarının, serbest ağ yöntemiyle dengelenmesi işleminde, yer merkezli üç boyutlu dik koordinat sisteminde oluşturulan normal denklemlerin rang defekti, serbest ağın rang defektine her zaman eşit olmaz. Bu durum A yapı matrisinin $(d\Phi, d\Lambda)$ bilinmeyenlere karşılık gelen katsayılarının kondüsyonundan kaynaklanmaktadır (Bölüm 3.6). Böyle durumlarda, normal denklemler her bir durulan nokta için koordinat bilinmeyenlerinin $(d\Phi, d\Lambda, dx, dy, dz)$ şeklinde düzenlenmesiyle oluşturulur ve en uygun çözüm biçimi elde edilir.

Bütünleşik Yüzey Ağı ile Ülke Nirengi Ağı Arasındaki Uyuşumun Sağlanması

Bütünleşik ağdan hesaplanan eşlenik nokta koordinatları (X_e) , üst dereceden ağ olan ülke temel nirengi ağından hesaplanan ve halen kullanılmakta olan geçerli koordinatlarla (X_g) aynı değildir. Aralarındaki farklar; üst dereceden nokta koordinatlarının elde ediliş biçimine, duyarlıklarına, aralarındaki tutarlılıklara ve nokta derecelerine bağlı olarak değişir.

Daha gelişmiş alet ve yöntemlerle eskisinden çok daha duyarlı olarak elde edilen yeni koordinatlar (X_e) ülke nirengi ağının iyileştirilmesi olarak düşünülebilir ve dinamik koordinatlar olarak adlandırılır.

Üst dereceden ağ koordinatlarının (X_g) yeterli duyarlılıkla elde edilmiş oldukları durumunda aşama sıralı (hiyerarşik) sıklaştırma yöntemi uygulanır. Ortak noktalar arasında kurulan yedi parametrelili dengelemeli benzerlik dönüşümü yapılarak (301) ve (302) formülleri yardımıyla dönüşüme girebilecek eşlenik koordinat kümesi belirlenir ve yüzey ağının TUJD koordinatları, son adımda elde edilen eşlenik koordinat kümesinden yararlanılarak bir dengelemeli benzerlik dönüşümü sonucunda elde edilir. Dönüşümün stokastik model (300) eşitliğinden elde edilir.

6.4. İki Boyutlu Ülke Temel Nirengi Ağı Koordinatlarına Geçiş

Bütünleşik yüzey ağlarının yer merkezli üç boyutlu dik koordinat sisteminde dengelenmesi bilgisayar ve yeni gözlem olanaklarının bir sonucu olarak henüz yeni uygulama alanları bulmaktadır. Büyük ölçekli harita çalışmalarının iki boyutlu ülke temel ağlarında üretilmiş olması ve tüm bu çalışmaların yeni sisteme dönüştürülmesi çabaları çok zaman almakta, oldukça yoğun ve karmaşık bir süreci gerektirmektedir. Tam anlamıyla yeterli olabilecek bir jeodezik veri tabanı oluşturuluncaya kadar, bütünleşik yüzey ağlarının iki boyutlu olarak ele alınması şimdilik kaçınılmaz bir süreç olarak görünmektedir.

6.4.1. Elipsoid Merkezli Eğri Koordinatların Hesabı

Bütünleşik yüzey ağının dik koordinatlarından elipsoid merkezli eğri koordinatlara geçiş bir koordinat dönüşümü ile sağlanır.

$$\begin{bmatrix} B \\ L \\ h \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \arctan \left[\frac{Z}{V} \left(1 - \frac{N_i}{N_i + h_i} e^2 \right)^{-1} \right] \\ \arctan \frac{Y_i}{X_i} \\ \frac{V}{\cos B_i} - N_i \end{bmatrix} \quad (310)$$

$$N_i = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 B_i)^{1/2}} \quad V = [X_i^2 + Y_i^2]^{1/2} \quad (311)$$

B_i ve h_i birbirlerine bağımlı oldukları için B_{0i} yaklaşık değerine göre B_i ve h_i değerleri yinelemeli olarak hesaplanır. Yineleme sayısı $\epsilon \leq 1.10^{-9}$ gibi bir ΔB_i değeri elde edilinceye kadar sürdürülmelidir [52].

Dönüştürülmüş elipsoid merkezli eğri koordinatların ters ağırlıklar matrisi hata yayılma kuralı ile hesaplanır.

$$\begin{bmatrix} B \\ L \\ h \end{bmatrix}_{TUJD} = D \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{TUJD} \quad (312)$$

$$Q_{BLH}^{TUJD} = F_D Q_{xxx}^{TUJD} F_D^T \quad D : \text{Dönüşüm Matrisi} \quad (313)$$

$$F_D = \begin{bmatrix} F_{d1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_{d2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & F_{d3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & F_{dp} \end{bmatrix}$$

$$F_{di} = \begin{bmatrix} -\frac{\rho}{M_i+h_i} \sin B_i \sin L_i & -\frac{\rho}{M_i+h_i} \sin B_i \sin L_i & \frac{\rho}{M_i+h_i} \cos B_i \\ -\frac{\rho}{(N_i+h_i) \cos B_i} \sin L_i & \frac{\rho}{(N_i+h_i) \cos B_i} \cos L_i & 0 \\ \cos B_i \cos L_i & \cos B_i \sin L_i & \sin B_i \end{bmatrix}$$

6.4.1.1. Geçerli Elipsoidal Koordinatlara Dönüşüm

Bütünleşik yüzey ağlarının ülke yüzey ağı datumuna dönüştürülmüş koordinatlarından, TUJD sistemindeki elipsoidal eğri koordinatlara dönüşümü teorik olarak yeterlidir. Ancak elipsoidal eğri koordinatlar sayısal çözümlere karşı oldukça duyarlıdır. Bu nedenle TUJD sistemine dönüştürülmüş elipsoid merkezli eğri koordinatlar, bir kez de dengelemeli benzerlik dönüşümü ile ülke temel nirengi ağının geçerli elipsoid merkezli eğri koordinatlarına dönüştürülür. Bu durumda, yükseklik sistemi değişmez olduğundan ülke temel nirengi ağına dönüşüm iki boyutlu dengelemeli benzerlik dönüşümü ile sağlanır.

$$\begin{bmatrix} B \\ L \end{bmatrix}_g + v_g = G_{BL}^{TUJD} b_4 \quad P_{BL} = (Q_{BL}^{TUJD})^{-1} \quad (314)$$

G_{BL}^{TUJD} : Ötelenmiş ve Normlandırılmış Eğri Koordinatlardan Oluşan Dört Bilinmeyenli Dönüşüm Katsayıları Matrisi (315)

$Q_{BLO}^{TUJD} = \text{ind} (Q_{BLH}^{TUJD})$: h Yükseklik Bilinmeyenlerine İlişkin Satır ve Sütunlarının Çıkarılmasıyla Elde Edilen Ters Ağırlıklar Matrisi

Dengelemeli benzerlik dönüşümünde ölçülere ait ağırlıklar Q_{BLO}^{TUJD} matrisinden edilir. Ağırlıkları eşit dengelemeli benzerlik dönüşümünden hesaplanan dönüşüm bilinmeyenlerinden yararlanılarak P_{BL} ağırlık matrisi kestirilebilir.

$$R_i = \begin{vmatrix} M & -e_{BL} \\ e_{BL} & M \end{vmatrix}_i \cong I_i : P=I \text{ Koşulu Altında Hesaplanan Dönüşüm Bilinmeyenleri} \quad (316)$$

$$\begin{bmatrix} B \\ L \end{bmatrix}_g = R_2 \begin{bmatrix} B \\ L \end{bmatrix}_{TUJD} \quad R_2 = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & R_p \end{bmatrix} \quad (317)$$

$$Q_{BL}^{TUJD} = R_2 Q_{BLO}^{TUJD} R_2^T : \text{Ölçülere İlişkin Türetilen Ters Ağırlıklar Matrisi} \quad (318)$$

6.4.2. İki Boyutlu UTM Koordinatlarının Hesaplanması

Dönüştürülmüş elipsoidal eğri koordinatlardan tek değişkenli kuvvet serileri yardımıyla UTM koordinatları hesaplanabilir.

$$\begin{aligned} x_j &= X_p' + a_{02}L^2 + a_{04}L^4 \\ y_j &= a_{01}L + a_{03}L^3 + a_{05}L^5 \\ h_j &= h_j \end{aligned} \quad (319)$$

Burada X_p' , P' noktasına karşılık gelen meridyen yayı uzunluğu ve L boylam farkı olmak üzere

$$X_{P0} = B_1/\rho^0 \quad AA = 111\ 136.536\ 65 \text{ (m/o)} \quad (320)$$

$$X_p' = AA B_1 - BB \sin(2X_{P0}) + CC \sin(4X_{P0}) - DD \sin(6X_{P0}) + EE \sin(8X_{P0}) \quad (321)$$

$$L = L_i - (\text{Dilim Orta Meridyeni})$$

eşitliklerinden hesaplanmaktadır. Gerekli katsayılar B_i enlemi ve elipsoid parametrelerinden yararlanarak bulunurlar [49], [50].

Hesaplanan UTM koordinatlarının ters ağırlıklar matrisi aşağıdaki eşitliklerden türetilebilir [52].

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}_{\text{UTM}} = D_1 \begin{bmatrix} B \\ L \end{bmatrix}_G \quad F_{D1} = \begin{vmatrix} F_{d1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_{d2} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & F_{dp} \end{vmatrix} \quad (322)$$

$$Q_{xx} = Q_{xx}^{\text{UTM}} = F_{D1} Q_{BL}^{\text{TUJD}} F_{D1}^T \quad (323)$$

$$F_{d1} = \begin{vmatrix} M_i/\rho & 0 \\ 0 & N_i \cos B_i/\rho \end{vmatrix}$$

$$M_i = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin B_i)^{3/2}}$$

6.5. Üst Dereceden Ağ Noktalarının Korunması

Tüm bu işlemlerden sonra, datum dönüşümüne giren eşlenik noktalar kümesine karşılık gelen geçerli koordinatlara dayalı olarak sonuç dengelemesinin yapılması, aşama sıralı ağ sıklaştırması modelinin alışılmış yöntemidir. Ancak burada ön koşulsuz bir zorlama yerine, geçerli noktalar ile yeni noktalar arasında bir ağırlık ilişkisi kurularak dengeleme yapılması hata yayılma kuramına daha uygun bir çözüm olacaktır.

Bütünleşik yüzey ağının datumu en uygun biçimde belirlendikten sonra, eşlenik datum noktalarının verilen koordinatlarını korumak amacıyla; eşlenik noktaların dinamik koordinatları (L_e), yeni koordinatlar (L_y) ve korunması gereken geçerli koordinatlar (L_g) gözlemler olarak ele alınıp "Birkaç Kez Belirlenen Bilinmeyenler Vektörlerinin Dengelenmesi" yoluyla yeniden değerlendirilir [45].

$$\begin{bmatrix} L_e \\ L_y \\ L_g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_e \\ v_y \\ v_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_g \\ X_y \end{bmatrix} \quad \text{Fonksiyonel Model} \quad (283)$$

$$K_{LL} = \begin{bmatrix} \sigma_0^2 & \begin{bmatrix} Q_{ee} & Q_{ey} \\ Q_{ye} & Q_{yy} \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_g^2 I \end{bmatrix} \quad \text{Stokastik Model} \quad (284)$$

Stokastik modeldeki $\sigma_0^2 \cdot Q_{EY}$ terimleri, dönüşüm adımları sonucunda hesaplanmış olan Q_{XX} matrisinden alınır. I birim matristir. $\sigma_g^2 = 0,01 \text{ cm}^2$ seçilerek elde edilen çok büyük ağırlıklarla eşlenik datum noktalarının koordinatları korunmuş olur.

$$Q_{XX} = Q_{XX}^{TUJD} = \begin{bmatrix} Q_{ee} & Q_{ey} \\ Q_{ye} & Q_{yy} \end{bmatrix} \quad (324)$$

Sonuç olarak, bütünleşik yüzey ağlarının dengelenmesi sürecinde önemli olan adımlar, konunun daha iyi izlenebilmesi amacıyla bir akış şeması halinde sunulabilir [45].

Bütünleşik Ağ Noktalarının UTM koordinatları ve Elipsoid Yüksekliklerinin Hesaplanması

$$x^0, y^0, h^0$$



Elipsoid Merkezli Eğri Koordinatların Hesaplanması.

$$(B^0, L^0) = B_k(x^0, y^0)$$

$$h_e^0 = h^0$$



Elipsoid Merkezli Üç Boyutlu Kartezyen Koordinatların Hesaplanması

$$(B^0, L^0, h^0) \Rightarrow (X^0, Y^0, Z^0)_{TUJD}$$



GPS Gözlemlerinin Ülke Temel Nirengi Ağı Sistemine Dönüştürülmesi

$$(\Delta X, \Delta Y, \Delta Z)_{TUJD} = t_4 (\Delta X, \Delta Y, \Delta Z)_{WGS84}$$



Bütünleşik Ağın TUJD Sisteminde Dengelenmesi

Kısmi İz Minimum

$$(X, Y, Z)_{TUJD} = (X^0, Y^0, Z^0)_{TUJD} + (dX, dY, dZ)$$



Elipsoid Merkezli Eğri Koordinatların Hesaplanması

$$(X, Y, Z)_{TUJD} \Rightarrow (B, L, h)_{TUJD}$$



Ülke Nirengi Ağı Sistemine Dönüştürme

(Kısmi İz Minimum ve Geçiş Denetimi)

$$(B, L, h)_{TUJD} \Rightarrow (B_g, L_g, Z_g = h)$$

İki Boyutlu Benzerlik Dönüşümü



İki Boyutlu UTM Koordinatlarının Hesaplanması

$$(x, y)_{UTM} = A_k(B_g, L_g)$$



Üst Dereceden Ağ Koordinatlarının Korunması

$$(L_e, L_y, L_g) = A_{e,y,g}(x_g, y_g, x_y, y_y)$$

Şekil 5. Bütünleşik Ağların Dengelenmesi Akış Şeması

7. SAYISAL UYGULAMA

Bütünleşik yüzey ağı modeli olarak, İller Bankası Genel Müdürlüğü'nce 1975 yılında oluşturulan Ankara metropoliten ağının bir bölümü ele alınmıştır. Bu nirengi ağında, Harita Genel Komutanlığı elemanlarınca 1992 yılında test amaçlı bir GPS test ağı oluşturulmuştur. Ele alınan bütünleşik test ağı bu özelliğinden dolayı ANKARA GPS TEST AĞI olarak adlandırılmaktadır.

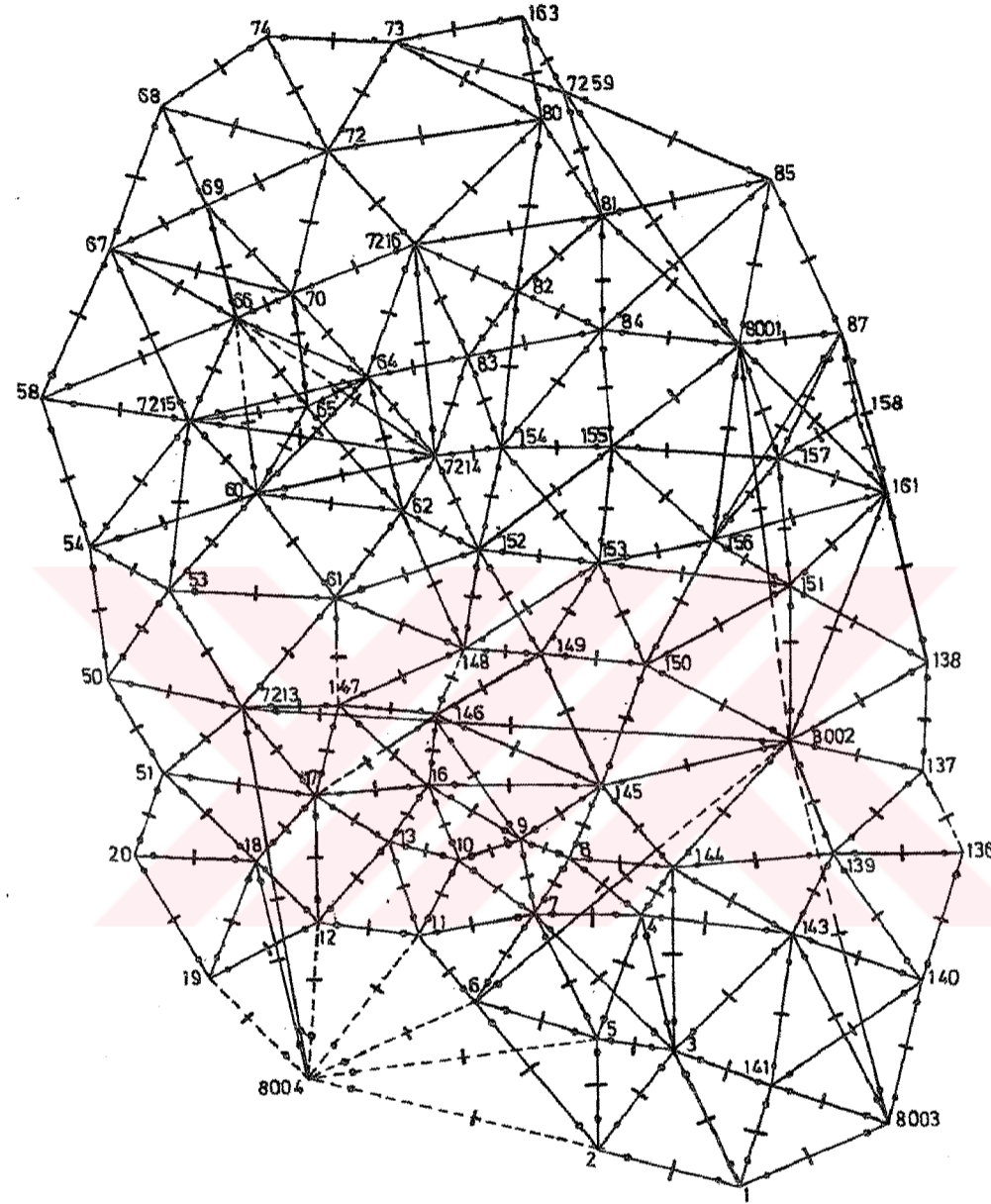
Ankara GPS test ağında yatay $(x, y)_{UTM}$ ve elipsoidal h koordinatlarından yararlanarak yermerkezli üç boyutlu dik koordinatlar hesaplanmış ve olası tüm gözlemlerden oluşan bir ölçme planı tasarlanmıştır.

Optimizasyon işleminin temel amacı; tasarımılanan ölçme planına ilişkin verileri, henüz arazide tesis ve ölçüm işlerini yapmadan, ağ noktalarının yaklaşık koordinatlarından yararlanarak simülasyon (benzeşim) yöntemiyle üreterek en uygun ölçme planı ve ağırlık dağılımını belirlemek, tasarlanan ağı geliştirmek iyileştirmektir.

Bir sonraki adımda gerçekleştirilen ikinci derece optimizasyon işlemiyle en uygun ölçme planı ve ağırlık dağılımı belirlenmiştir. Son adımda duyarlık ve güven ölçütleri ile maliyet gözden geçirilerek bütünleşik yüzey ağının ölçme planı kesinleştirilmiş, simülasyon (benzeşim) yöntemiyle elde edilen ek ölçüler de katılarak dengeleme işlemi tamamlanmıştır.

7.1. Ankara GPS Test Ağının Tanıtımı

Ankara GPS test ağı, ilk kez 1975 yılında İller Bankası Genel Müdürlüğü'nce bir metropoliten nirengi ağı şeklinde oluşturulmuştur. Bu ağın 7213, 7216, 8003 ve 8004 numaralı noktalarında, 1992 yılında Harita Genel Komutanlığı elemanlarınca test amaçlı GPS gözlemleri yapılmıştır.



- : Karşılıklı Gözlenen Yatay Doğrultular
- - - - - : Tek Yönlü Gözlenen Yatay Doğrultular
- : Düşey Açı Gözlemleri
- +— : Eğik Uzunluk ve Nivelman Gözlemleri

Şekil 6. Ankara GPS Test Ağı Ölçme Planı

Ankara GPS test ağı 76 noktadan oluşmaktadır. Bunlardan 9 tanesi, halen kullanılmakta olan ve geçerli koordinatları korunması gereken, I. ve II. derece Ülke Temel Nirengi Ağı noktalarıdır.

Ankara GPS test ağına 455 yatay doğrultu gözlemi (r_i), 461 düşey açı gözlemi (z_i), 238 eğik uzunluk (d_i) ve 238 geometrik nivelman ölçüsü (ΔH_{ij}) vardır (Şekil 6). Bu ağıda ayrıca 7213 numaralı noktaya bağlı olarak 7216, 8003 ve 8004 numaralı noktaların bağlı koordinatları ($\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$)_{GPS} belirlenmiştir.

7.2. Yaklaşık Koordinatların Hesabı ve Ölçme Planının Tasarımı

455 yatay doğrultu gözlemi ile oluşturulan Ankara GPS Test Ağı'nın UTM koordinatları (x, y)_{TUJD} ve 7213 numaralı Meşedağ Laplace noktasının elipsoidal koordinatlarından (Q, λ, h)_{TUJD} yararlanarak, yermerkezli üç boyutlu dik koordinat sistemindeki yaklaşık koordinatları hesaplanmış ve yatay doğrultu, düşey açı, eğik uzunluk ve geometrik nivelman ölçülerinden oluşan bir ölçme planı tasarlanmıştır.

Bu işlemler için aşağıdaki adımlar izlenmiştir.

1- 7213 numaralı noktanın elipsoidal koordinatlarından (Q, λ, h)_{TUJD} yararlanarak (2) nolu dönüşüm bağıntıları ile elipsoidal dik koordinatları hesaplanmıştır. Yerel Astronomik Dik Koordinat farkları ($\overline{\Delta X}, \overline{\Delta Y}, \overline{\Delta Z}$) ve (8) eşitlikleri yardımıyla ağın tüm noktalarının yermerkezli üç boyutlu dik koordinat sistemindeki koordinatları hesaplanmıştır. Bu işlem sonucunda, 7213 Meşedağ Laplace noktasının elipsoidal yüksekliğine dayalı olarak test amaçlı zorlamasız bir yükseklik datumu da belirlenmiştir.

Ankara GPS test ağına ait yeterli sayıda elipsoidal yükseklik verisi bulunmadığından bu işleme gerek duyulmuştur.

2- Ankara GPS test ağına gerçekleştirilen yatay doğrultu ölçme planı esas alınarak, başlangıçta belirlenen üç boyutlu yaklaşık koordinatlar yardımıyla düşey açı, eğik uzunluk ve elipsoidal yükseklik farkları simülasyonla üretilmiştir.

Ağda gerçekleştirilmiş olan yatay doğrultu gözlemleri ve simülasyonla üretildikten sonra, rasgele ölçü hataları yüklenen düşey açı, eğik uzunluk ve elipoidal yükseklik farklarından yararlanarak, yinelemeli bir dengeleme işlemi yapılmıştır. Bu işlemler sonucunda yaklaşık koordinatların, yatay doğrultu gözlemlerinin belirlediği datuma uygun olarak elde edilmesi sağlanmıştır. Simülasyonla üretilen ölçülerin doğrultu gözlemlerine dayalı olarak dengelenmesi işlemi iki şekilde gerçekleştirilebilir. Birinci yöntemde dengeleme işlemi, normal denklemler doğrultu gözlemlerinden elde edilen semtler için yazılacak birer semt koşulu ile genişletilerek gerçekleştirilebilir. İkinci bir yaklaşımda ise doğrultu gözlemlerinin ağırlıkları, diğer gözlemlere göre 100 kat gibi önemli bir oranda artırılarak dengeleme işlemleri yapılabilir. Sayısal uygulamada ikinci yaklaşım tercih edilmiştir.

Her bir dengeleme işlemi sonucunda elde edilen koordinatlar, ikinci bir yineleme adımı için yaklaşık koordinatlar olarak ele alınmış ve bu yaklaşık koordinatlardan yararlanarak düşey açı gözlemleri, eğik uzunluklar ve elipsoidal yükseklik farkları simülasyonla üretilip, rasgele ölçü hataları yüklenmiştir. Bu işlem, her bir yineleme adımı sonunda hesaplanan koordinatlar arasındaki fark 5 cm olarak seçilen sınır değerden daha küçük elde edilinceye kadar sürdürülmüştür. Ayrıca bu işlemler sonucunda ölçülere getirilecek düzeltmelerin normal dağılımda olması ve geçerli bir model hipotezinin elde edilmesi koşulları da sağlanmıştır.

3- Dengeleme işlemi sırasında gözlemlerin ağırlıklarını saptamak için ülke yüzey ağlarının dengeleme sonuçlarından yola çıkılmıştır. Birim ölçünün ortalama hatasının öncül değeri $m_0=3.5^{\circ}$ seçilerek elde edilen geçerli bir model hipotezi sonucunda, düşey açılar için ortalama hata $m_2 \approx 7.00^{\circ}$, eğik uzunlukların ortalama hatası $m_3 \approx 1\text{cm} + 0.5S \text{ cm/km}$ ve geometrik nivelman ölçülerinin ortalama hatası $m_{\Delta H} \approx 0.4\sqrt{S} \text{ cm/km}$ olarak belirlenmiştir.

4- Tasarımlanan ölçme planından yararlanarak gerçekleştirilen bir tanı dengelemesi işlemi sonucunda elde edilen dengeli koordinatlar ülke yüzey ağı koordinatlarına $(x, y, h_e=h)_{TUJD}$ dönüştürülerek, üç boyutlu ağın datumun bir kez daha

iyileştirilmesi sağlanmıştır. Bu amaçla; önce yaklaşık üç boyutlu dik koordinatlardan elde edilen elipsoidal koordinatlar $(\phi, \lambda)_0$, iki boyutlu dengelemeli benzerlik dönüşümü ile $(\phi, \lambda)_{TUJD}$ koordinatlarına dönüştürülmüş ve dönüştürülen elipsoidal koordinatlardan UTM koordinatları $(x, y)_{TUJD}^0$ hesaplanmıştır. Son adımda $(x, y)_{TUJD}^0$ koordinatları, iki boyutlu dengelemeli benzerlik dönüşümü ile $(x, y)_{TUJD}$ koordinatlarına dönüştürülerek, taslak ağ ile ülke ağının datum uyumu sağlandıktan sonra, aşama sıralı ağ dengelemesi ile 9 eşlenik noktanın geçerli koordinatları korunmuş ve iki boyutlu $(x, y)_{TUJD}$ koordinatları elde edilmiştir.

5- Son bir işlem olarak; $(x, y)_{TUJD}$ koordinatlarından elde edilen $(\phi, \lambda)_{TUJD}$ ve $h_e=h$ elipsoidal koordinatlarından yararlanarak (2) nolu dönüşüm bağıntıları ile Ankara GPS test ağı noktalarının yermerkezli üç boyutlu dik koordinat sistemindeki iyileştirilmiş yaklaşık koordinatları hesaplanmıştır.

7.3. Ankara GPS Test Ağının Optimizasyonu

Ankara GPS test ağının optimizasyonu için amaç fonksiyonu olarak Taylor-Karman yapısında bir ölçüt matrisi seçilmiş ve bu amaçla uygun bir optimizasyon algoritması geliştirilerek ulaşılan sonuçlar irdelenmiştir.

Ölçüt Matrisinin Yapısı: Ölçüt matrisi olarak GRAFAREND tarafından geliştirilmiş olan tam izotop yapıda bir varyans-kovaryans matrisi kullanılmıştır [24]. Her bir noktada enine ve boyuna korelasyonların eşit alındığı bu ölçüt matrisi ile

a- Hata elipsoidleri benzer görünümlü ve yarı eksen uzunlukları birbirine eşit küreler biçimindedirler (Homojen ve izotop).

b- Bağıl hata elipsoidleri de noktalar arasındaki uzaklığın bir fonksiyonu olmak üzere farklı küreler biçimindedirler.

Hata elipsoidlerinin yarı eksen uzunluklarının sayısal değerleri birim ölçünün ortalama hatasının öncül değeri kadardır. Bağıl hata elipsoidlerinde bu değer, noktalar arasındaki uzunluğa bağlı olarak değişmektedir.

Ağın datumuna dönüştürülmüş bir ölçüt matrisinin sahip olduğu özellikler defekt sayısına bağlı olarak değişmektedir. Örneğin; yatay doğrultu, düşey açı, eğik uzunluk ve geometrik nivelman ölçüleri tasarlanan ve yer merkezli üç boyutlu dik koordinat sisteminde değerlendirilen bir ağda, ölçüt matrisinden elde edilen elipsoidlerin yarı eksenleri farklı büyüklükte olup, regüler özellikli ölçüt matrisinin küre görünümlü elipsoidlerinden daha küçüktür. Yermerkezli üç boyutlu dik koordinatlardan üretilen böyle bir ölçüt matrisinde, hata elipsoidlerinin yarı eksen büyüklükleri sırasıyla $a_x > a_z > a_y$ görünümündedir.

Test ağının geometrik yapısına bağlı olarak türetilen regüler özellikli T-K yapısındaki ölçüt matrisinin her noktada hesaplanan λ_{xi} , λ_{yi} , λ_{zi} özdeğerleri birbirine eşittir. Bu özdeğerler ağın dış noktalarında büyük, iç noktalarında ise beklenenden çok daha küçüktür. Ağın datumuna dönüştürülmüş ölçüt matrisinin özdeğerleri incelenirse; dönüşümden önce büyük olan özdeğerler S dönüşümünün bir sonucu olarak biraz daha küçülebilmekte, diğer özdeğerlerde ise önemli bir değişiklik olmadığı görülmektedir (Tablo 4).

Tablo 4. T-K Yapılı Ölçüt Matrisinde Özdeğerlerin Dağılımı

(d:Ağın Rang Bozukluğu; İkişer Kez Yazılmış Değerler Rang Bozukluğunun Etkisini Göstermektedir.)

AĞIN DIŞ KUŞAK NOKTALARI $\lambda_{max} \geq 0.5$			DIŞ KUŞAĞA KOMŞU OLAN NOKTALAR $\lambda_{max} \geq 0.3$			AĞIN İÇ NOKTALARI $\lambda_{max} \geq 0.2$		
Nokta	d = 0	d = 6	Nokta	d = 0	d = 6	Nokta	d = 0	d = 6
8004	5.55	1.75	7213	0.57	0.57-6.70	9	0.61	0.61
136	0.15	0.15-0.51	5	0.45	0.45	20	0.26	0.26
87	50.0	5.55	151	0.21	0.37	70	0.37	0.32
7259	0.51	0.51-1.11				82	0.85	0.26
68	0.18	0.44-1.75				149	0.32	0.85
54	1.75	1.11-10				151	0.21	0.37

Çözüm Algoritması: Ağın yapı matrisinde çekül sapmaları bileşenlerinden ($d\Phi$, $d\Lambda$) kaynaklanan kondüsyon bozukluğu ve buna bağlı olarak oluşan rang defektleri optimizasyon sonuçlarını

etkilemektedir. Bu nedenle çekül sapmaları bileşenlerinin varyans-kovaryans matrisleri dik koordinatlarla birlikte ele alınmamıştır. Başka bir deyişle; çekül sapmaları etkilerinin kısaltılmış gözlemlerde gözönüne alındığı bir model tercih edilmiştir. Her ne kadar çekül sapmaları bileşenleri ile dik koordinatlar arasındaki korelasyonların kestirilmesi mümkün olsa da, bu işlemin hem yorucu ve karmaşık bir süreci gerektirmesi hem de optimizasyon sonuçlarına olumlu bir katkısı olmaması nedeniyle gerçekçi bulunmamıştır.

En küçük kareler çözümü ile yermerkezli üç boyutlu dik koordinat sisteminde yapılan bir ağırlık optimizasyonu işleminde karşılıklı gözlenen her bir yatay doğrultu ve düşey açı için birer adet rang defekti oluşur. Bundan başka tek taraflı gözlenen düşey açılar için de birer adet rang defekti sözkonusudur. Çekül sapmaları ve tek taraflı gözlenen düşey açılar için sözkonusu olan bu ek rang defektleri ($U=AA^T*AA^T$) normal denklemlerinin kondüsyonundan kaynaklanmaktadır.

Anlamlı optimizasyon sonuçları ancak regüler bir çözümle elde edilebilir. Ayrıca tüm iz minimum koşulu altında gerçekleştirilen bir ağırlık optimizasyonu sonucunda, karşılıklı gözlenen yatay doğrultu ve düşey açı gözlemlerinin ağırlıkları birbirlerine eşit çıkmaktadır [29, 34]. Bundan başka yatay doğrultu ve düşey açılar için her bir istasyonda yapılan ölçülerin grup ağırlıklarının kendi aralarında birbirlerine eşit çıkması arzulanan bir durumdur. Tüm bu özellikler ağırlıklar arasında öngörülen ek koşul denklemleri ile sağlanırsa, böyle kurulan bir genişletilmiş model ile kararlı ve düzgün sonuçların elde edilmesi garanti altına alınmaktadır [Bölüm 5.3.1.6.].

Ankara GPS test aşında, ölçme planının ve ölçü ağırlıklarının birlikte en uygun duruma getirildiği ikinci derece optimizasyon işlemi yapılmıştır. Bu optimizasyon işleminde ağırlıklar, yukarıda sözü edilen koşulları gerçekleştiren genişletilmiş model kullanılarak en küçük kareler çözümü ile hesaplanmıştır. Üç ayrı yaklaşım ile (U,m çözümü, Yinelemeli HR Çözümü ve Direkt HR Çözümü) ulaşılan sonuçları ayrıca irdelenmiştir.

7.3.1. U,m Çözümü

Başlangıçta sadece yatay doğrultu ve düşey açı gözlemleri birlikte ele alınarak her bir ölçünün ağırlıkları ayrı ayrı hesaplanmıştır. Bunun için iki neden ileri sürülebilir. Birincisi, güvenilir bir yöntem olmasına rağmen U,m çözümü her zaman sıfırdan büyük ağırlıkları garanti edemez. Sıfırdan küçük ağırlıklar fiziksel anlam taşımadığı için bu tip ağırlıklar gözlem planından çıkarılırlar. Hem eksi işaretli ağırlıklar hem de sıfıra çok yakın veya çok büyük ağırlıklar, grup ağırlıkların hesaplanması aşamasında yanıltıcı sonuçlara neden olabilirler. İkinci neden ise; her ne kadar yatay doğrultu ve düşey açı gözlemleri için tek bir ağırlık öngörülse de, bir kez de ağırlık dağılımının gözden geçirilmesi, önemli sayılabilecek bir grup farklılaşmasının başlangıçta saptanması optimizasyon işleminin gerçekçi olması bakımından çok önemlidir. Ayrıca bu özellikler diğer iki yaklaşım için de zorunlu ve gereklidir.

U,m çözümü ile yapılan optimizasyon işlemi ve ulaşılan sonuçlar şu şekilde özetlenebilir.

1- 455 yatay doğrultu ve 461 düşey açı gözleminden oluşan ölçme planı ile her bir ölçü için genişletilmiş model ile ağırlıklar hesaplanmıştır (Tablo 5).

Tablo 5. Tek Tek Ağırlıklar İçin U,m Çözümü

İterasyon	Çıkarılan Gözlemler		Global Ölçüt köşegen $\Sigma d^T d$, $\Sigma d^T d, \lambda$ çarpanı	Ortalama Ağırlıklar	
	Yatay Doğrultu	Düşey Açısı		Ortalama Hatalar	
				P_d	m_d (cc)
				P_z	m_z (cc)
1	13	66	10.94 124.51 3227.85	1.00 0.56	3.50 4.68
2	2	11	10.92 124.46 1716.12	1.00 0.52	3.50 4.85
3	-	-	10.83 124.25 498.17	1.00 0.52	3.50 4.85
Toplam	15	77			
Kalan	440	384			

Sıfırdan küçük ağırlıklar gözlem planında çıkarıldıkça her adımda global ölçütün biraz daha küçüldüğü gözlenmektedir. Ayrıca iki bağlantısı olan durak noktalarında yatay doğrultu gözlemlerinin ağırlıkları eşit çıkmaktadır.

Bu adımda fiziksel bir anlam içermeyen ağırlıklara ilişkin gözlemlerin yok edilmesi, grup ağırlıkların kestirilmesi ve izleyen adımlarda sağlıklı sonuçların elde edilmesi için oldukça yararlıdır.

Karşılıklı gözlenen düşey açılara ilişkin ağırlıklar eşit çıkmasına rağmen, bu özellik doğrultu gözlemlerinde tam olarak gerçekleşmemektedir. Bu da yöneltme bilinmeyenlerinin indirgenmesinin U,m çözümünde çok etkili olmasından kaynaklanmaktadır.

2- Hesaplanan ağırlıkların uygun bir aralıkta kalan dağılım göstermeleri nedeniyle yatay doğrultu ve düşey açı gözlemlerinde birer grup ağırlık bilinmeyen seçilmesi, her gözlem grubuna ait grup ağırlık bilinmeyenlerinin eşit olmasını öngören genişletilmiş modelin kullanılması uygun görülmüştür. Ayrıca bu adımda diğer 238 eğik uzunluk ve 238 geometrik yükseklik farkının herbiri için ayrı bir ağırlık bilinmeyeninin belirlenmesi de uygun görülmüştür (Tablo 6).

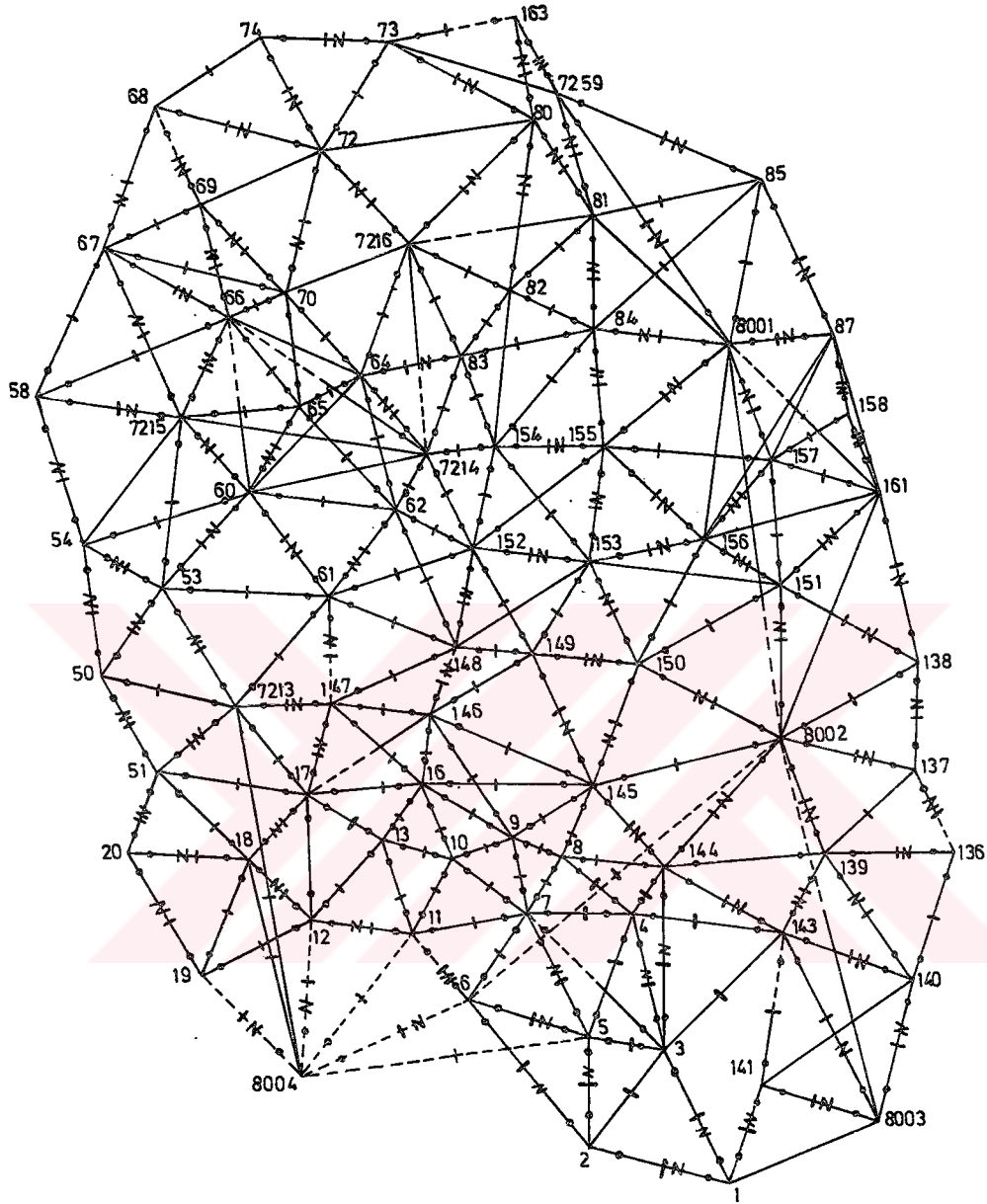
Tablo 6. Grup Ağırlıklar İçin U,m Çözümü

İterasyon	Çıkarılan Gözlemler Yatay Doğrultu; Düşey Açı Eğik Uz.; Yüks.Farkı	Global Ölçüt köşegen $\Sigma d^T d$ $\Sigma d^T d$ λ çarpanı	Ortalama Ağırlıklar Ortalama Hatalar	
			P_d P_z P_s $P_{\Delta H}$	m_d (cc) m_z (cc) m_s (cm) $m_{\Delta H}$ (cm)
1	- ; - 38 ; 128	1.85 109.63 0.43	1.00 0.72 3.81 2.74	3.50 4.12 2.63+0.03.s 3.8 \sqrt{s}
2	- ; - - ; 10	1.61 80.00 0.39	1.00 0.56 3.86 3.16	3.50 4.68 0.99+0.34.s 1.48 \sqrt{s}
3	- ; 1 - ; -	1.63 73.29 0.39	1.00 0.56 3.87 3.17	3.50 4.68 0.99+0.34.s 1.41 \sqrt{s}
4	- ; - - ; -	1.38 78.45 0.39	1.00 0.56 3.87 3.17	3.50 4.68 0.99+0.34.s 1.41 \sqrt{s}

Bu işlem sonucunda toplam olarak 38 eğik uzunluk, 139 yükseklik farkı çıkarılmıştır. Son durumuyla ölçme planı 440 yatay doğrultu gözlemi, 384 düşey açı, 200 eğik uzunluk ve 99 yükseklik farkından oluşmaktadır (Şekil 7).

İlk iki adımda hemen dikkati çeken bir özellik, λ çarpınının birinci adımda büyük bir sayısal değere ulaşmasına rağmen, ikinci adımda beklenen düzeye gelmesidir. Bu durum, birinci adımda gözlemlerin her biri için ayrı bir ağırlık bilinmeyeninin seçilmiş olmasından ve normal denklemleri oluşturan gözlemlerin eksik kalmalarından kaynaklanmaktadır. Bu durumda ölçüt matrisi ile bir karşılaştırma yapabilmek için ağırlıkların büyük bir ölçek katsayısı ile çarpılması zorunluluğu doğmaktadır. İkinci adımda ise gerek bilinmeyenlerin azalması ve gerekse yeterli sayıda ölçü kümesinin bulunmasından ötürü sözü edilen ölçek katsayısı da beklenen değerine yakınsamaktadır.

3- Bir karşılaştırma yapılabilmesi bakımından ikinci adımdaki genişletilmiş model kullanılmaksızın bir ağırlık optimizasyonu yapılmıştır. Bu optimizasyon sonucunda yatay doğrultular için dört istasyonda (1, 5, 67, 68), düşey açılar için de 13 istasyonda (5, 138, 140, 2, 51, 58, 69, 72, 81, 143, 144, 149, 152) tüm gözlemlerin sıfırdan küçük ağırlıklı olması nedeniyle çıkarıldığı görülmüştür. Sonuçta 18 yatay doğrultu, 65 düşey açı, 37 eğik uzunluk ve 146 yükseklik farkının ölçme planından çıkarılması gerekmiştir. Ağırlık optimizasyonu sonucunda ölçüler için kestirilen ortalama hatalar $m_d=3,5^{cc}$, $m_z=4.12^{cc}$, $m_s=1.35 \text{ cm}+0.46.S \text{ cm/km}$, $m_{AB}=1.86\sqrt{S} \text{ cm/km}$ olarak hesaplanmıştır. Gerek indirgenen ölçülerin çokluğu ve gözlem planında ortaya çıkan zayıflama, gerekse yüzey ağırları için beklenen stokastik ilişkilerin yeterince sağlanmaması burada genişletilmiş modele olan gereksinimin önemini artırmaktadır. Ayrıca bu optimizasyon sonucunda ağırlıklar U, m çözümünün ikinci adımından ulaşılan uygun dağılımı göstermemiştir. Her ne kadar global ölçüt için uygun sonuçlar elde edilse de ($\Sigma d^T d=1.50$, $\Sigma d^T d=79.69$, $\lambda=0.38$) bu yaklaşımın daha iyi bir yöntem olmadığı ortaya çıkmaktadır.



- : Karşılıklı Gözlenen Yatay Doğrultular
- : Tek Yönlü Gözlenen Yatay Doğrultular
- : Düşey Açı Gözlemleri
- |— : Eğik Uzunluk Gözlemleri
- N— : Nivelman Gözlemleri

Şekil 7. Optimizasyon sonucu indirgenmiş
Ankara GPS Test Ağı Ölçme Planı

4- Bir başka karşılaştırma ölçütü olarak, çekül sapmaları bileşenlerinin indirgendiği A yapı matrisi kullanılarak, genişletilmiş model ile tek tek doğrultu ve düşey açı gözlemleri için bir ağırlık optimizasyonu denenmiştir. Birinci adımdaki ölçme planı ele alınarak yapılan optimizasyon işlemi sonucunda, toplam 16 adet yatay doğrultu, 185 düşey açı gözlemi çıkarılmış, dördüncü iterasyonda A matrisinde yapı bozukluğu oluşmuştur. Bu sayısal deney, çekül sapmaları bileşenlerinin indirgenmesi sonucunda, ağırlık optimizasyonu sonuçlarının ne ölçüde etkileneceği konusunda ilginç bir örnek oluşmaktadır.

7.3.2. Yinelemeli HR Çözümü

Kuramsal olarak üstün bir yöntem olan Yinelemeli HR Çözümünün uygulamada tam bir çözülebilirlik gösteremediği bilinmektedir [29, 32]. Bu nedenle hem U,m çözümü ile bir karşılaştırma amacıyla hem de güvenilir bir sayısal irdeleme yapılabilmesi için; U,m çözümü ile ikinci adımda ele alınan ölçme planı ve çözüm algoritması kullanılmıştır.

Yinelemeli HR çözümünün önemli bir dezavantajı da, her bir yineleme adımında, H katsayılar matrisinin son hesaplanan ağırlıklar ile yeniden hesaplanması ve tam kararlı bir H matrisi oluşuncaya kadar da yinelenmenin sürdürülmesidir. Bu durum kendisini sayısal uygulamada da göstermiştir. Başlangıçta $P=I$ olarak seçilen ağırlık dağılımından yola çıkarak elde edilen sonuçlar, ikinci derece optimizasyonun amacıyla tamamen zıt bir durum sergilemiştir. Her bir iterasyonda indirgenen ölçü sayısının çok fazla olması ve iterasyon sürecinin yakınsama sağlamaması nedeniyle başlangıçta P ağırlık vektörü $m_d=3,5^{cc}$, $m_z=4.68$, $m_s=1 \text{ cm} + 0.5.S \text{ cm/km}$, $m_{AB}=0.4\sqrt{S} \text{ cm/km}$ koşullarına göre yeniden saptanmıştır. Bu koşullar test ağının öncül değerleri ile U,m çözümü sonuçlarının uygun bir kombinasyonudur (Tablo 7).

Tablo 7'den görüleceği gibi; dördüncü iterasyonda öngörülen ağırlıklarında bir sonucu olarak optimizasyonun amacına ulaşamamıştır. Ölçü planının zayıflaması ve A^{TPA} normal denklemlerinin yinelemeli HR çözümüne etkisindeki payı burada kendisini göstermektedir.

Tablo 7. Grup Ağırlıklarla Yinelemeli HR Çözümü

İterasyon	Çıkarılan Gözlemler	Global Ölçüt	Ortalama Ağırlıklar Ortalama Hatalar	
	Yatay Doğrultu;Düşey Açı Eğik Uz.;Yüks.Farkı	köşegen $\Sigma d^T d$ $\Sigma d^T d$	P_d P_z P_s $P_{\Delta H}$	m_d (cc) m_z (cc) m_s (cm) $m_{\Delta H}$ (cm)
1	- ; - 64 ; 30	78.88 653.10	1.00 0.86 4.26 1.60	3.50 3.77 3.74+0.0.S 1.72 \sqrt{s}
2	- ; - 59 ; 1	216.26 1869.46	1.00 0.60 3.35 0.33	3.50 4.52 6.53-0.3.S 3.13 \sqrt{s}
3	- ; - 37 ; 1	106.22 2427.88	1.00 0.52 1.41 0.68	3.50 4.85 1.26-0.2.S 4.35 \sqrt{s}
4	Tüm Düşey Açı Gözl. 21 ; -	6.96 176.93	1.00 --- 1.12 0.06	3.50 --- 6.68+0.2.S 7.35 \sqrt{s}

Genişletilmiş modelde ağırlıklar arasında öngörülen koşullar, yinelemeli HR çözümünde tam olarak gerçekleşmiştir. Örneğin doğrultu ve düşey açıların grup ağırlıkları, kendi aralarında sayısal yuvarlatma hataları sınırında eşit çıkmıştır. Ancak $A^T P A$ matrisinin taşıdığı ağırlıklara ilişkin bilgiler, optimizasyonun sonuçlarını olumsuz yönde etkilemektedir.

Güvenilir bir yöntem olan U, m çözümüyle dahi sağlıklı optimizasyon sonuçları elde edilmeyen grup ağırlıklar arasında koşulların öngörülmediği yaklaşımda, yinelemeli HR çözümüyle de yakınsayabilen bir çözüme ulaşılammıştır.

Sonuçta; ölçüt matrisinden çok A yapı matrisinin kondüsyonundan kaynaklanan sorunlardan ötürü, yinelemeli HR çözümünün yer merkezli üç boyutlu dik koordinat sisteminde kullanışlı olmadığı görülmektedir.

7.3.3. Direkt HR Çözümü

U, m çözümünün sayısal olarak güvenilir bir yöntem olması nedeniyle, direkt HR çözümü ile optimizasyon işlemine, U, m çözümünün ikinci adımında ele alınan ölçme planı ile

başlanması oldukça uygundur. Genişletilmiş model kullanılarak Direkt HR çözümü ile ulaşılan sonuçlar aşağıda tablo halinde özetlenmiştir (Tablo 8).

Tablo 8. Grup Ağırlıklarla Direkt HR Çözümü

İterasyon	Çıkarılan Gözlemler	Global Ölçüt	Ortalama Ağırlıklar Ortalama Hatalar	
	Yatay Doğrultu;Düşey Açı Eğim Uz.;Yüks.Farkı	köşegen Σd^2d Σd^2d	P_d P_z P_s $P_{\Delta H}$	m_d (cc) m_z (cc) m_s (cm) $m_{\Delta H}$ (cm)
1	- ; - 46 ; 32	3.83 332.32	1.00 1.53 9.01 11.56	3.50 2.85 1.38+0.06.S 0.61 \sqrt{S}
2	- ; - 22 ; 9	0.41 74.52	1.00 1.10 7.53 13.95	3.50 3.33 1.52-0.03.S 0.52 \sqrt{S}
3	- ; - 3 ; 2	0.57 20.62	1.00 0.96 7.00 15.75	3.50 3.57 1.26-0.08.S 0.52 \sqrt{S}
4	- ; - - ; -	1.22 5.68	1.00 0.94 6.96 15.84	3.50 3.61 1.26+0.05.S 0.52 \sqrt{S}

Bu işlem sonucunda toplam olarak 71 eğik uzunluk, 43 yükseklik farkı çıkarılmıştır. Ölçüt matrisinin taşıdığı bilgiler ve grup ağırlıklar arasındaki koşulların da bir sonucu olarak indirgenen ölçüler yönünden U,m çözümü ile bir benzerlik görülmemiştir. Ulaşılan duyarlıklar hiç bir zaman gerçek ölçülerle sağlanabilir nitelikte de değildir. Kendi içinde iyi sonuçlar sergileyen Direkt HR çözümü, yukarıda sözü edilen optimizasyon sonuçları nedeniyle kullanılabilir bir çözüm biçimi değildir.

Direkt HR çözümü, genişletilmiş model ile öngörülen koşulları yuvarlatma hataları sınırı içinde gerçekleştirmiştir.

7.3.4. Çözüm Sonuçlarının İrdelenmesi

1- U,m çözümü her ne kadar sıfırdan küçük ağırlıkları garanti altına almasa da sayısal olarak oldukça güvenilir bir yöntem olduğu ortaya çıkmıştır.

Yinelemeli çözümün, hem $A^{T}PA$ normal denklemler matrisine hem de Q_{xx} ölçüt matrisinin ağın yapısına olan uygunluğuna bağlı olması, ayrıca A yapı matrisinin kondüsyonundan çok etkilenmesi nedeniyle kullanışlı olmadığı ortaya çıkmaktadır. Direkt HR çözümü kendi içinde tutarlı görünse de, ölçüt matrisi ve A yapı matrisinden etkilenmesinin bir sonucu olarak uygulamada gerçekleştirilebilir çözümler vermediği görülmüştür.

2- Genişletilmiş modelde ağırlıklar arasında öngörülen koşullar, katsayılarına bağlı olarak optimizasyon sonuçlarını etkilemektedir. Bu haliyle yinelemeli HR çözümü $A^{T}PA$ normal denklemlerine, direkt HR çözümü de ölçüt matrisine duyarlı hale gelmektedir. Ancak U,m çözümü sadece A yapı matrisine bağlı olduğundan, bu yöntemin güvenilirliği bir kez daha kanıtlanmaktadır.

Her üç yöntem genişletilmiş model ile öngörülen koşulları gerçekleştirme yönünden irdelendiğinde, beklenen sonuçlara ulaşıldığı görülmektedir. Bu da, kondüsyonu bozuk olmayan A yapı matrisleri ve ağın yapısına uygun ölçüt matrisleri ile çalışılması sonucunda, her üç yöntemle de kesin çözümlere ulaşılabileceğini göstermektedir.

3- A yapı matrisinin kondüsyonu, yer merkezli üç boyutlu dik koordinat sisteminde, ağırlık optimizasyonu sonuçlarını etkilemektedir. Bu nedenle yer merkezli üç boyutlu dik koordinat sisteminde ağırlık optimizasyonu için en uygun algoritmanın ve yaklaşımın belirlenmesi temel problem olarak ortaya çıkmaktadır. Sayısal uygulamalar, gerçekleşmesi istenen koşullarla genişletilmiş model kullanılarak U,m çözümünün güvenilir ve uygun yöntem olduğunu göstermektedir.

4- Yer merkezli üç boyutlu bir ağda, yatay doğrultu ve düşey açılar, çekül sapmaları bileşenlerinin belirlenmesi için zorunlu ve gerekli gözlemlerdir. Çözüm yöntemleri bu anlamda ele alındığında, U,m ve direkt HR çözümlerinde sözü edilen gözlemlerin korunduğu görülmektedir. Göreceli olarak diğer

ölçülere göre daha pahalı ve zahmetli olan yükseklik farklarının belli bir oranda kalması istenir. U,m çözümü ayrıca arzu edilen bu durumu da gerçekleştirmektedir.

7.3.5. Eşdeğerlik Testi ve İndirgenmiş Ölçme Planının İrdelenmesi

Sayısal olarak da çok güvenilir sonuçlar elde edilen U,m çözümüyle ulaşılan ölçme planından hesaplanan varyans-kovaryans matrisi ile ölçüt matrisi arasında bir eşdeğerlik testi yapılmış ve ulaşılan sonuçlar aşağıda sergilenmiştir (Tablo 9).

$$1- m_d=3.50^{cc}, m_z=4.68^{cc}, m_s=0.99 \text{ cm} + 0.34S \text{ cm/km } m_{\Delta H}=1.41\sqrt{s} \text{ km/cm}$$

Tablo 9. Eşdeğerlik Testi Sonuçları (I. Durum)

Nokta	$Q_{xx}=(A^T P A)^{-1}$ Özdeğerleri $\lambda_{\max} \geq 0.50$ (I. Blok)			$B_{xx}=C_{xx}^{-1} K_{xx}$ Özdeğerleri $\lambda_{\max} \geq 0.50$ (II. Blok)			Q_{xx} Hata Elipsodinin yarı eksenleri (cm)		
	λ_x	λ_y	λ_z	λ_x	λ_y	λ_z	a_x	a_y	a_z
8003	0.40	0.21	0.79	0.34	0.09	0.17	2.92	1.58	2.15
1	0.53	3.92	0.07	-0.07	0.16	0.39	2.73	1.43	2.00
2	0.10	0.66	0.49	0.24	-0.14	0.01	2.25	1.44	1.81
68	0.23	0.17	0.74	-0.04	-0.03	0.18	2.22	1.46	1.84
87	0.89	1.35	0.00	0.03	0.26	0.15	1.91	1.29	1.71
136	1.25	2.16	0.40	0.09	0.15	0.09	2.41	1.45	1.78
163	0.79	0.66	0.34	-0.14	0.14	0.03	2.29	1.49	1.78
8004	0.37	1.73	0.29	0.21	0.20	0.14	2.41	1.93	2.03
7214	0.03	0.02	0.03	0.62	0.58	0.53	1.08	0.95	1.01
4	0.06	0.03	0.08	0.32	0.63	-0.02	1.24	0.95	1.09
5	0.05	0.06	0.04	0.37	0.65	0.42	1.49	1.09	1.37
7	0.03	0.02	0.03	0.72	0.60	0.65	1.14	0.86	0.99
9	0.02	0.03	0.02	0.54	0.61	0.59	1.04	0.86	1.03
16	0.03	0.02	0.03	0.60	0.69	0.73	1.05	0.88	0.98
17	0.04	0.03	0.04	0.33	0.76	0.44	1.18	0.89	1.01
51	0.05	0.04	0.06	0.33	0.56	0.30	1.54	1.06	1.41
53	0.05	0.06	0.05	0.31	0.18	0.52	1.49	1.06	1.32
66	0.04	0.05	0.15	0.56	0.07	0.12	1.36	1.04	1.18
83	0.04	0.03	0.04	0.31	0.51	0.32	1.10	0.99	1.06
84	0.05	0.05	0.04	0.36	0.50	0.47	1.22	1.01	1.16
137	0.06	0.07	0.08	0.18	0.55	0.39	1.94	1.35	1.65
139	0.05	0.04	0.06	0.46	0.67	0.31	1.63	1.11	1.43
141	0.13	0.08	0.13	0.21	0.57	0.11	2.21	1.53	2.07
147	0.17	0.06	0.04	0.04	0.31	0.54	1.27	0.94	1.02
152	0.03	0.04	0.04	0.57	0.50	0.59	1.09	0.97	1.02
156	0.04	0.06	0.04	0.70	0.47	0.63	1.38	1.03	1.16
158	0.04	0.04	0.08	0.58	0.47	0.23	1.80	1.23	1.65

Tablo 9'da açıkça görüldüğü gibi, özdeğerler ve hata elipsoidlerinin yarı eksenleri ağın dış noktalarında daha büyük, iç kısımlarında ise daha küçüktür. İç kısımlarda oldukça küçük olan özdeğerler ve hata elipsoidlerinin yarı eksen oranları birbirlerine yaklaşmaktadır. Eşdeğerlik testi sonucunda elde edilen özdeğerlerin dağılımı biraz daha homojenleşmektedir. Eksisi işaretli özdeğerler rang defekti ve hesaplamaların kondüsyonundan kaynaklanmaktadır.

Güven ölçütleri yönünden oldukça uygun sonuçlar elde edilmiştir. En zayıf güven ölçütüne sahip ölçüler ağın dış kuşağında yer almakta, güven ölçütleri umulan sayısal değerleri almaktadır.

Tablo 10. Güvenirlik Ölçütleri ve Bağlı Hata Elipsoidi (I. Durum)

Ölçü	Türü	Ağırlık P_i	Güvenirlik Ölçütleri			Bağlı Hata elipsoidi Yarı Eksenleri (cm)		
			Redundanz r_i	İç Güven Δ_{oi}	Dış Güven δ_{oi}	a_x	a_y	a_z
163-7259	Eğik Uzunluk	2.58	0.29	6.36	5.37	1.85	1.35	1.66

2- Ağırlık dağılımının optimizasyon sonuçları üzerinde önemli bir etkisi olduğu bilinmektedir. Bir karşılaştırma yapabilmek ve ağırlık dağılımının optimizasyon sonuçlarına etkisini görmek amacıyla eğik uzunluklar ve yükseklik farklarının ortalama hataları birinci ve ikinci derece nirengi ağı standartlarında alınarak Tablo 11 ve Tablo 12'de sergilenmiştir.

Birinci durumda olduğu gibi özdeğerlerin ve hata elipsoidlerinin ağı noktalarının konumlarına bağlı olarak değiştiği gözlenmektedir. Ancak burada ağırlık dağılımının özdeğerler ve hata elipsoidleri üzerinde olan etkileri hemen kendisini göstermektedir. Özdeğerler ve hata elipsoidleri genel olarak büyümekte ve özellikle ağın dış noktalarında bu etki açıkça görülmektedir. Ancak özellikle eğik uzunlukların ve yükseklik farklarının ağırlıklarının artırılmasının bir sonucu olarak hata elipsoidlerinin y ve z eksenleri (ağın boyu) yönünde biraz daha küçüldüğü, buna karşın x eksenini (ağın eni) yönünde büyüdüğü gözlenmektedir (Tablo 11).

Güven ölçütleri irdelendiğinde, yine eğik uzunluklar ve yükseklik farklarının ağırlıklarını artırmanın bir sonucu olarak, bu ölçülere ilişkin güven ölçütleri kısmen zayıflamakta, ancak bilinen sınır değerleri aşmamaktadır (Tablo 12).

$$m_d=3.5^{cc}, m_z=4.68^{cc}, m_s=0.5 \text{ cm} + 0.5S \text{ cm/km}, m_{\Delta H}=0.4\sqrt{S} \text{ cm/km}$$

Tablo 11. Eşdeğerlik Testi Sonuçları (II. Durum)

Nokta	$Q_{XX}=(A^T P A)^{-1}$ Özdeğerleri $\lambda_{\max} \geq 0.50$ (I. Blok)			$B_{XX}=C_{XX}^{-1} K_{XX}$ Özdeğerleri $\lambda_{\max} \geq 0.50$ (II. Blok)			Q_{XX} Hata Elipsodinin yarı eksenleri (cm)		
	λ_x	λ_y	λ_z	λ_x	λ_y	λ_z	a_x	a_y	a_z
8003	0.02	0.25	2.50	0.31	0.02	0.09	3.09	0.69	2.34
1	0.13	4.50	0.01	0.08	0.16	0.35	2.90	0.64	2.17
2	0.04	0.49	0.66	0.02	-0.04	0.02	2.39	0.65	1.95
19	0.59	0.20	0.02	0.15	0.32	0.38	2.41	0.73	1.92
50	0.01	0.09	0.51	0.40	0.17	0.11	1.83	0.60	1.75
68	0.02	0.10	0.58	0.32	0.11	0.03	2.38	0.67	1.94
87	1.39	1.55	0.07	0.16	0.25	0.06	2.00	0.59	1.80
136	0.03	0.21	0.88	0.16	0.22	0.10	2.55	0.69	2.14
138	0.03	0.75	0.23	0.13	0.11	0.34	2.10	0.62	2.89
164	0.00	1.02	0.29	0.17	0.25	0.01	2.44	0.73	2.87
8004	0.11	1.94	0.83	0.17	0.19	0.00	2.74	0.76	2.39
7214	0.03	0.02	0.02	0.32	0.69	0.61	1.10	0.72	1.04
4	0.05	0.03	0.06	0.19	0.66	0.24	1.28	0.71	1.13
5	0.01	0.06	0.04	0.39	0.60	0.51	1.59	0.60	1.45
7	0.03	0.02	0.03	0.51	0.70	0.35	1.17	0.66	1.03
9	0.02	0.03	0.02	0.49	0.60	0.58	1.07	0.76	1.06
16	0.03	0.02	0.03	0.67	0.68	0.60	1.08	0.79	1.01
17	0.04	0.03	0.06	0.31	0.68	0.07	1.22	0.56	1.05
51	0.07	0.05	0.01	0.16	0.98	0.47	1.61	0.54	1.50
53	0.01	0.06	0.05	0.54	0.39	0.36	1.57	0.53	1.40
66	0.04	0.07	0.03	0.41	0.02	0.55	1.40	0.60	1.23
82	0.05	0.06	0.04	0.44	0.21	0.52	1.22	0.76	1.17
83	0.03	0.03	0.05	0.24	0.59	0.41	1.14	0.75	1.09
84	0.27	0.05	0.02	0.04	0.51	0.40	1.28	0.54	1.21
139	0.06	0.05	0.01	0.34	0.61	0.42	1.72	0.53	1.49
141	0.10	0.08	0.13	0.05	0.56	0.21	2.34	0.73	2.22
148	0.12	0.05	0.03	0.00	0.39	0.53	1.26	0.67	1.06
155	0.09	0.10	0.01	0.09	0.21	0.52	1.34	0.49	1.16

Tablo 12. Güvenirlilik Ölçütleri ve Bağlı Hata Elipsoidleri (II. Durum)

Ölçü	Türü	Ağırlık P_i	Güvenirlilik Ölçütleri			Bağlı Hata elipsoidi Yarı Eksenleri (cm)		
			Redundanz r_i	İç Güven Δ_{oi}	Dış Güven δ_{oi}	a_x	a_y	a_z
163-7259 Eğik Uz.		2.42	0.29	6.37	5.38	1.91	0.62	1.69
1-141 Yüks.Fark.		18.36	0.30	6.28	5.26	2.10	0.63	1.71
146-148 Yüks.Fark.		26.60	0.28	6.51	5.54	1.22	0.58	1.08

Örneğin eğik uzunluklar ve yükseklik farklarının ağırlıkları düşürüldüğünde ikinci durumdaki süreç ters yönde bir değişim göstermektedir.

Tüm bu irdelemelerden ortaya çıkan durumlar şu şekilde özetlenebilir.

1- U,m çözümü ile ulaşılan ağırlık dağılımı ve ölçme planı yüzey ağı standartlarına oldukça uygundur. Göreceli olarak diğer ölçme yöntemlerine göre daha pahalı ve zahmetli olan nivelman ölçülerinin sayısı ve ağırlıkları ağın maliyeti açısından çok uygun sonuçlara karşılık gelmektedir. Düşey açılar, eğik uzunluklar ve yükseklik farkları için belirlenen duyarlılıklara, uygulamada bilinen ölçme yöntemleri ve deneyimli ekipmanlarla kolaylıkla ulaşılabilir.

2- Tam bir optimizasyon işlemi sonucunda, uygulamada gerçekleştirilmeyecek bir ağırlık dağılımı elde edilebilmektedir. Bu durumda amaç fonksiyonunda bir takım kısıtlamaların yapılması gerekebilir. Elde edilen ağırlık dağılımı uygulamada gerçekleştirilemeyecek kadar aykırı, zaman alıcı ya da masraflı görülüyorsa; bu durumda optimizasyon işlemi yürüten kişiye önemli görevler düşmektedir. Ağırlık dağılımı için önerilen eğik uzunlukların ve yükseklik farklarının duyarlılıklarını artırma durumu (ikinci durum), bu konuda yapılabilecekler konusunda önemli fikirler vermektedir. Ancak böyle durumlarda söz konusu kişinin uygun ağırlık dağılımını yakalayacak düzeyde bilgili ve uzman olması gerekmektedir. Sözü edilen durumlarda optimizasyon işlemleri simülasyon yöntemlerinden (örneğin Monte-Carlo yöntemi) yararlanarak gerçekleştirilebilir.

7.4. Ankara GPS Test Ağının Dengelenmesi ve Yüzey Ağı Standartlarına Dönüşüm

Ağırlık optimizasyonu işlemi sonucunda ölçme planı indirgenen ve en uygun ağırlık dağılımı belirlenen Ankara GPS test ağı, simülasyonla üretilen ölçülere ek olarak; bu ağın 7216, 8003 ve 8004 numaralı noktalarında ölçülmüş ve ağın datumunda dönüştürülmüş bağıl GPS koordinatlarından (ΔX , ΔY , ΔZ)_{GPS} yararlanarak, 9 eşlenik noktanın (7213, 7214, 7215, 7216, 7259,

8001, 8002, 8003, 8004) yermerkezli üç boyutlu koordinatları için kısmi iz minimum koşulu öngörülerek serbest ağı yöntemi ile dengelemiştir. Ankara GPS test ağına ilişkin bilgiler ve dengeleme sonuçları aşağıda özetlenmiştir.

<u>Ölçüler ve Sayısı</u>	<u>Duyarlılıkları (m_i)</u>
Yatay Doğrultu, 440	$3^{\text{cc}}50$
Düşey Açı, 384	$4^{\text{cc}}68$
Eğik Uzunluklar, 200	$0.99\text{cm}+0.34.S \text{ cm/km}$
Yükseklik Farkları, 99	$1.41\sqrt{S} \text{ cm/km}$
Bağıl Koordinatlar ($\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$) _{GPS} , 9	0.79 cm, 0.56 cm, 0.82 cm

Birim Ölçünün Ortalama Hatasının
Öncül Değeri (m_0) : $3^{\text{cc}}50$

Dengeleme Sonuçları

Birim Ölçünün Ortalama Hatasının

Soncul Değeri (s_0) : $4^{\text{cc}}12$

Test Büyüklüğü : 1.39 F Dağılım değeri: 1.40

Ölçü Sayısı (n) : 1132

Serbestlik Derecesi ($f=n-u+d$) : 755

Ortalama Serbestlik Ölçütü : 0.67

Koordinat Bilinmeyenlerin Ortalama Hatası:

$m_x=1.96 \text{ cm}; m_y=1.80 \text{ cm}; m_z=1.94 \text{ cm}$

Koordinat Bilinmeyenlerinin Ortalama Konum Hatası: $m_p=3.29 \text{ cm}$

Ortalama Koordinat Duyarlılığı : $m_x=m_y=1.87 \text{ cm}$

Tablo 13. Ankara GPS Test Ağıнын Yermerkezli Üç Boyutlu Dengeli Dik Koordinatları

NOKTA	Y	X	Z
7213	2639910.3850	4131475.4373	4067555.5241
7214	2642869.8050	4122226.3442	4075273.9420
7215	2634333.6871	4126519.8422	4076276.6019
7216	2639132.3071	4117965.9764	4081624.1840
7259	2641929.8544	4111656.2303	4086392.5067
8001	2651098.0349	4113410.5743	4078512.5734
8002	2658166.0784	4120611.7992	4066631.6386
8003	2666734.8457	4126767.2471	4054981.8384
8004	2647149.9697	4138073.5606	4056262.9910
1	2662866.5089	4131359.7280	4053361.8526
2	2657809.5886	4133691.9366	4054423.2404
3	2658741.4380	4129759.3177	4057373.6515
4	2655738.9936	4127480.4486	4061435.0688
5	2656039.2136	4131015.9397	4057510.7637
6	2651457.1714	4132896.2307	4058775.2342
7	2652286.4299	4129750.7253	4061396.7890
8	2652634.5491	4127776.5674	4063109.5198
9	2650883.3370	4128480.8197	4063683.9364
10	2649107.3358	4130170.0763	4063052.8178
11	2648810.6422	4132530.1995	4060624.3261
12	2645349.3755	4134520.7625	4061112.6681
13	2646535.9944	4131207.8272	4063465.3562
16	2647070.3230	4129179.4374	4065321.7709
17	2643553.2076	4131782.8129	4064915.8304
18	2642639.7326	4134612.0180	4063118.4321
19	2642569.2190	4137930.7682	4059227.4531
20	2638514.9110	4136954.5402	4063042.8055
50	2635075.2276	4133724.1460	4068380.4117
51	2638246.8056	4134489.9252	4065550.8342
53	2635916.1141	4130601.3056	4071129.3386
54	2632787.0162	4131349.4355	4072338.6995
58	2629123.2284	4129244.1844	4076893.3189
60	2637411.8624	4126671.6586	4073905.0252
61	2641494.9202	4127237.6145	4070959.3445
62	2642439.1157	4124026.4071	4073420.3747
64	2639504.3292	4121939.3815	4077645.7140
65	2637823.5538	4123789.9757	4076667.0988
66	2634440.2033	4123638.3603	4079631.4110
67	2629182.4738	4124505.8027	4081389.1296
68	2628928.2708	4120448.8220	4085844.0953
69	2631740.0812	4121565.4472	4082776.9703
70	2635709.7253	4121633.3143	4080073.0204
72	2634947.7157	4117758.5400	4084537.2563
73	2635522.9797	4114114.2416	4087876.1163
74	2631330.0954	4116687.9879	4087907.4547
80	2641411.9183	4112638.8835	4085499.3486
81	2644790.7755	4113579.1538	4082586.3037
82	2643043.9198	4116914.3463	4080288.3562
83	2642419.4210	4119325.3516	4078255.4655
84	2646387.9704	4116145.6384	4079279.4316
85	2649721.1264	4109226.3918	4083793.1659
87	2654147.0324	4110861.1248	4079041.2816
136	2665433.2634	4119325.4901	4063380.2473
137	2662942.1241	4118372.3584	4065885.4500
138	2661627.0776	4116002.2733	4069143.0187
139	2661079.2890	4122105.0800	4063295.4254
140	2665866.1775	4122988.5512	4059329.1053
141	2662346.4545	4128333.3260	4056184.1040
143	2660920.3617	4124570.9014	4060868.0008
144	2656051.2789	4125780.0653	4062932.1194
145	2652710.1916	4125591.5631	4065405.6099
146	2646370.9877	4127597.2046	4067298.7022
147	2643039.2828	4129397.1299	4067683.6458
148	2646338.6538	4125643.8822	4069411.9649
149	2648911.1018	4124105.0395	4069268.6271
150	2652458.1818	4122117.0594	4068997.0203
151	2656002.7775	4117388.3915	4071357.8433
152	2645437.3787	4123154.6580	4072287.4301
153	2649557.5742	4120986.8439	4072057.0904
154	2644793.0180	4120609.7483	4075513.7259
155	2648288.6023	4118211.7549	4075462.7428
156	2652876.5762	4118104.4896	4072594.5822
157	2653974.6446	4115030.8300	4075168.6565
158	2655843.6732	4112366.8129	4076674.8845
161	2657774.8837	4113566.0637	4074099.7885
163	2639528.7256	4111260.8604	4088906.8994

Tablo 14. Ülke Yüzey Açığının UTM Koordinatları

NORTA	SACA	YUKARI
7213	463857.0500	4415254.8900
7214	471376.3840	4425116.4790
7215	461879.8210	4426557.9710
7216	470561.3600	4433584.8500
7259	476343.8920	4439658.5650
8001	483076.2300	4429468.5400
8002	485081.6600	4414012.7700
8003	488915.1600	4398772.6200
8004	466335.0500	4400514.7100
1	483171.2890	4396412.0320
2	477661.1820	4397738.3020
3	480583.1920	4401790.3510
4	479306.0910	4407179.9240
5	477632.1650	4402162.9180
6	472766.3430	4403722.2950
7	475174.6240	4407135.4190
8	476541.4650	4409389.4060
9	474689.8460	4410063.0460
10	472280.4680	4409290.6000
11	470745.7410	4406261.7080
12	466760.0900	4406774.9770
13	469558.5440	4409946.8330
16	471111.7630	4412275.3920
17	466744.4990	4411792.2090
18	464439.4460	4409211.2020
19	462570.8520	4404465.4000
20	459703.4610	4409333.6490
50	458577.7460	4416367.0440
51	460820.2130	4412676.7140
53	460984.0800	4419861.6520
54	457952.5070	4421479.9130
58	456026.9570	4427385.7040
60	464377.5270	4423582.0870
61	467494.1160	4419591.8960
62	470034.0500	4422877.1510
64	468710.2300	4428265.7020
65	466292.5020	4427106.9880
66	463540.3020	4430643.4270
67	458656.1960	4433362.7180
68	460653.3650	4439050.4490
69	462402.5370	4435115.2860
70	465694.0630	4431618.1350
72	467165.4580	4437392.6270
73	469622.5520	4441712.7850
74	464714.8380	4441817.2780
80	475373.9350	4438626.3810
81	477695.6980	4434705.5610
82	474414.4800	4431759.3010
83	472577.8290	4429121.3270
84	477638.1060	4430230.3150
85	484200.3690	4436250.3130
87	487021.1790	4430180.4350
136	491876.3090	4409672.2310
137	490306.3310	4412976.6820
138	490494.3030	4417209.6480
139	486711.4220	4409632.8740
140	490244.4580	4404443.1570
141	484382.2890	4400385.1780
143	485235.2800	4406500.0200
144	480493.9000	4409133.7500
145	477795.1070	4412299.6370
146	471386.7630	4414887.2240
147	467612.8630	4415378.1290
148	472423.7400	4417570.2250
149	475418.6500	4417389.4110
150	479475.7410	4417011.3640
151	485023.0150	4420127.6860
152	473022.7610	4421429.6280
153	477658.9780	4420979.7160
154	473868.9710	4425498.2200
155	478105.6280	4425528.0300
156	482011.4350	4421783.1640
157	484606.2970	4425027.1660
158	487624.2710	4426962.5420
161	488590.4750	4423667.7720
163	474547.2340	4442637.1250

Tablo 15. Ankara GPS Test Ağı'nın Ülke Yüzey Ağı Datumuna Dönüştürülmüş UTM Koordinatları

NOKTA	Y	X
7213	463856.9967	4415254.7931
7214	471376.4398	4425116.4145
7215	461879.7492	4426558.0050
7216	470561.4228	4433584.9087
7259	476344.0778	4439658.7084
8001	483076.2704	4429468.5128
8002	485081.5809	4414012.6798
8003	488915.1158	4398772.6399
8004	466334.9537	4400514.7327
1	483171.2716	4396412.0858
2	477661.2874	4397738.3359
3	480583.2574	4401790.3538
4	479306.1589	4407179.9169
5	477632.2546	4402162.9091
6	472766.4410	4403722.2567
7	475174.7067	4407135.3986
8	476541.5546	4409389.3935
9	474689.9218	4410063.0295
10	472280.5363	4409290.5886
11	470745.8024	4406261.6480
12	466760.0810	4406774.8677
13	469558.5621	4409946.8351
16	471111.7065	4412275.3679
17	466744.4696	4411792.1631
18	464439.4060	4409211.1299
19	462570.8668	4404465.3459
20	459703.4431	4409333.5565
50	458577.6157	4416366.9425
51	460820.1773	4412676.6450
53	460983.9784	4419861.6013
54	457952.3710	4421479.8977
58	456026.8339	4427385.7728
60	464377.4746	4423582.0714
61	467494.0832	4419591.7574
62	470034.0811	4422877.0231
64	468710.3436	4428265.6832
65	466292.4716	4427106.9272
66	463540.1867	4430643.4024
67	458655.9899	4433362.7087
68	460653.0934	4439050.6044
69	462402.3447	4435115.3211
70	465693.9331	4431618.1097
72	467165.3632	4437392.7695
73	469632.5505	4441713.0441
74	464714.6497	4441817.5829
80	475374.0484	4438626.4845
81	477695.8472	4434705.5836
82	474414.5982	4431759.3198
83	472577.9189	4429121.2984
84	477638.2256	4430230.3228
85	484200.5436	4436250.2838
87	487021.2996	4430180.3905
136	491876.1929	4409672.2061
137	490306.2215	4412976.6207
138	490494.1643	4417209.5558
139	486711.3778	4409632.7967
140	490244.3876	4404443.1380
141	484382.2789	4400385.2045
143	485235.2397	4406499.9262
144	480493.9627	4409133.7612
145	477795.1826	4412299.5962
146	471386.7021	4414887.1229
147	467612.7858	4415378.0437
148	472423.6604	4417570.1232
149	475418.7301	4417389.3203
150	479475.7860	4417011.2737
151	485023.0091	4420127.4926
152	473022.8635	4421429.5703
153	477659.0515	4420979.6301
154	473869.0826	4425498.1783
155	478105.7170	4425528.0123
156	482011.4236	4421783.0008
157	484606.3534	4425027.0789
158	487624.3837	4426962.4510
161	488590.5833	4423667.6683
163	474547.4073	4442637.3769

Yüzey Ağı Standartlarına Dönüşüm ve Geçerli Yüzey Ağı Koordinatlarının Korunması

Ankara GPS test ağının kısmi iz minimum koşulu altında hesaplanan yermerkezli üç boyutlu dik koordinatları, Şekil 5'te sunulan *Bütünleşik Yüzey Ağlarının Dengelenmesi Akış Şeması*'ndaki adımlara uygulanarak ülke yüzey ağı standartlarına dönüştürülmüştür [Tablo 13, Tablo 14, Tablo 15].

Test ağı, geçerli nokta koordinatlarının korunması amacıyla, eşlenik noktaların konumuna göre üç bölgeye ayrılmıştır. Ulaşılan sonuçlar Tablo 16'da özetlenmiştir.

7.5. En Uygun GPS Noktalarının Belirlenmesi

Günümüzde jeodezik ağlar için kullanışlı hale gelen GPS gözlemlerinin yüzey ağlarının oluşturulması, geliştirilmesi ya da iyileştirilmesi aşamalarında ölçme planına alınması zorunlu ve gerekli hale gelmektedir. Ancak yeni teknolojik olanakların başlangıçta pahalı yatırımlar olmaları optimizasyon için önemli birer kısıtlayıcıdır. Bunun bir sonucu olarak; uygun sayıda GPS gözlemleri ile optimizasyon sonuçlarının elde edilmesi bir amaç fonksiyonu olarak ele alınabilir.

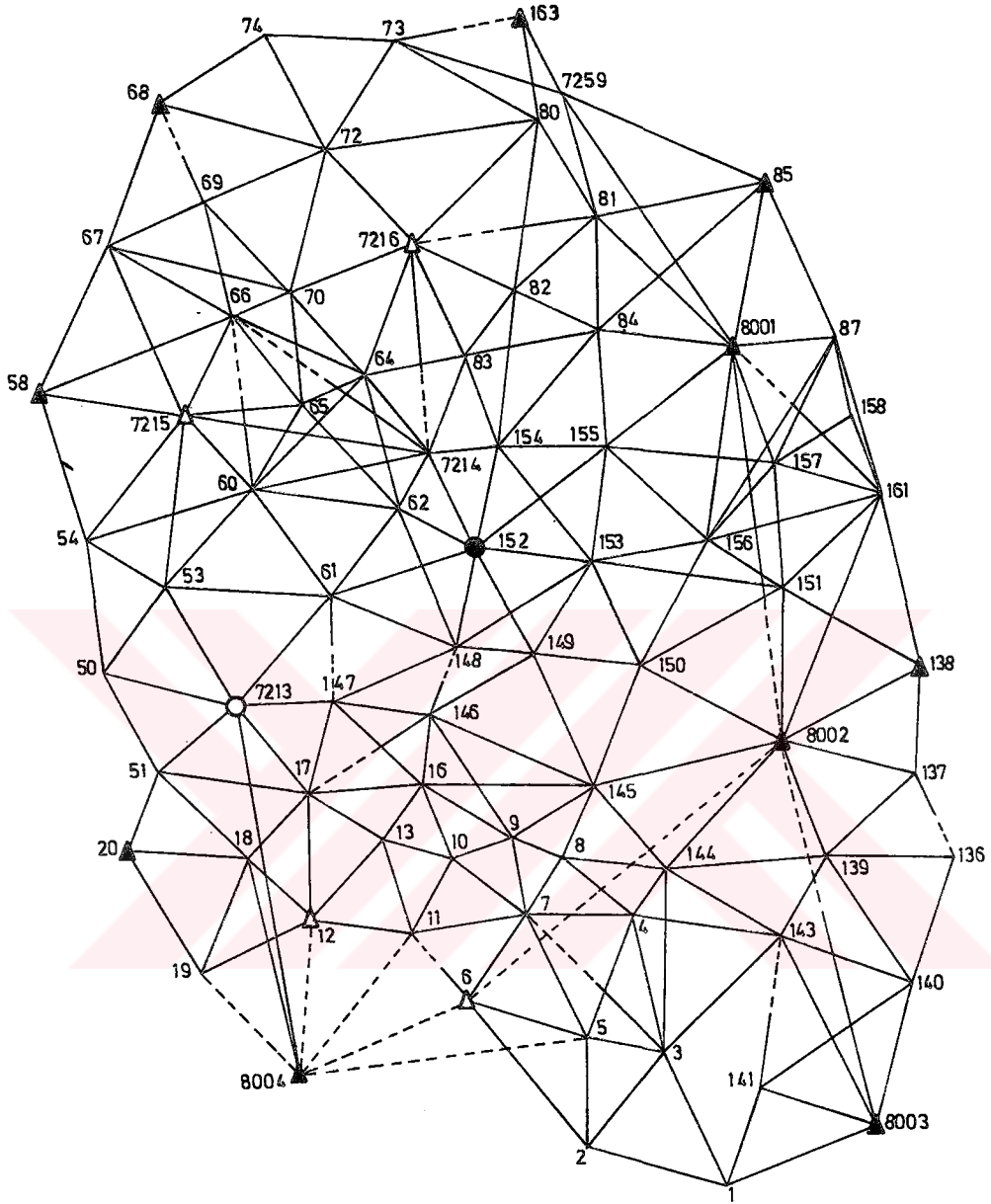
Bu amaçla Ankara GPS test ağında sayısal bir uygulama yapılmış ve sonuçlar Tablo 17 ve Tablo 18'de gösterilmiştir. Bir karşılaştırma yapabilmek amacıyla GPS gözlemleri için iki ölçme planı tasarlanmıştır [Şekil 8].

Birinci Ölçme Planı: Harita Genel Komutanlığı elemanlarınca oluşturulan ve 9 noktadan oluşan GPS gözlem planı ve bu gözlem planının geliştirilmiş biçimleridir [Tablo 17].

İkinci Ölçme Planı: Datum noktası 152 olmak üzere toplam 9 GPS noktası ile oluşturulan ölçme planıdır [Tablo 18]. Bu iki ölçme planında dış kuşak noktalarının tümü, iç kuşak noktalarının ise iki tanesi ortak alınmıştır.

Tablo 16. Ülke Yüzey Ağında Korunan Geçerli Koordinatlar ve Yeni Noktaların Kullanıma Hazır UTM Koordinatları

NOKTA	Y	X	
8002	485081.6600	4414012.7696	
8003	488915.1600	4398772.6200	
1	483171.2632	4396412.0807	
136	491876.1279	4409672.1535	
137	490306.2484	4412976.6527	
138	490494.1549	4417209.5555	
139	486711.4000	4409632.8148	
140	490244.4123	4404443.1450	
141	484382.2846	4400385.2067	
143	485235.2432	4406499.9283	
144	480493.9632	4409133.7588	
145	477795.1813	4412299.5942	
150	479475.7846	4417011.2720	
151	485023.0076	4420127.4916	
			<u>I. BÖLGE</u>
			Eşlenik Nokta Sayısı : 2
			Komşu Nokta Sayısı : 12
			Geçerli Nokta Sayısı : 2
			Ağırlığı 1 olan bir koordinatın ortalama hatası : 3.03 cm
7214	471376.3842	4425116.4784	
7216	470561.3607	4433584.8509	
7259	476343.8924	4439658.5654	
8001	483076.2301	4429468.5397	
62	470034.0863	4422877.0127	
64	468710.3762	4428265.7317	
70	465693.9168	4431618.1617	
72	467165.5052	4437392.8988	
73	469632.4788	4441712.9901	
80	475374.0418	4438626.4782	
81	477695.8501	4434705.5883	
82	474414.5919	4431759.3194	
83	472577.9003	4429121.2710	
84	477638.2265	4430230.3305	
85	484200.5445	4436250.2875	
87	487021.2987	4430180.3982	
152	473022.8695	4421429.5791	
154	473869.0829	4425498.1786	
155	478105.7174	4425528.0184	
156	482011.4321	4421783.0239	
157	484606.3567	4425027.0947	
163	474547.4051	4442637.3814	
			<u>II. BÖLGE</u>
			Eşlenik Nokta Sayısı : 4
			Komşu Nokta Sayısı : 18
			Geçerli Nokta Sayısı : 4
			Ağırlığı 1 olan bir koordinatın ortalama hatası : 6.12 cm
7213	463857.0495	4415254.8897	
7215	461879.8210	4426557.9711	
8004	466335.0495	4400514.7097	
6	472766.4446	4403722.2544	
11	470745.8104	4406261.6414	
12	466760.0778	4406774.8456	
18	464439.4079	4409211.1349	
19	462570.8661	4404465.3446	
20	459703.4415	4409333.5653	
17	466744.4724	4411792.1730	
50	458577.6161	4416366.9424	
51	460820.1773	4412676.6442	
53	460983.9788	4419861.6013	
54	457952.3712	4421479.8976	
58	456026.8340	4427385.7727	
60	464377.4750	4423582.0711	
61	467494.0842	4419591.7572	
65	466292.4728	4427106.9265	
66	463540.1878	4430643.4021	
67	458655.9910	4433362.7090	
147	467612.7853	4415378.0463	
			<u>III. BÖLGE</u>
			Eşlenik Nokta Sayısı : 3
			Komşu Nokta Sayısı : 18
			Geçerli Nokta Sayısı : 3
			Ağırlığı 1 olan bir koordinatın ortalama hatası : 4.19 cm



- : 1. Modeldeki Datum Noktası
- : 2. Modeldeki Datum Noktası
- ▲ : Her İki Modelde Ortak Olan GPS Noktaları
- △ : Her İki Modelde Ortak Olmayan GPS Noktaları
[7213, 7214, 7215, 7216, 7259, 8001, 8002, 8003, 8004]
-Ankara GPS Test Ağı Noktaları -

Şekil 8. En Uygun GPS Noktalarının Belirlenmesi

Ulaşılan sonuçlar aşağıdaki başlıklar halinde özetlenebilir.

1- GPS noktalarının ağın dış kuşağında yer alması durumunda; ağın dış kuşak noktalarındaki duyarlık ölçütleri iyileşmektedir. Bu durum, özellikle ağın dış noktalarının iyileştirilmesi amacıyla oluşturulan koruyucu kuşak gereksinimini ortadan kaldırmakta, zaman ve maliyet yönünden önemli kazançlar sağlamaktadır. Üstelik bu kazanç GPS gözlemlerinin maliyetinden çok daha fazla olmaktadır.

Tablo 17. En Uygun GPS Noktalarının Belirlenmesi (1. Model)

Nokta	Özdeğerler			Güven Hiperelipsoidi Yarı Eksen Uzunlukları (cm)							Açıklama
	$\lambda \geq 0.5$			$\lambda \geq 0.5$			$\lambda \leq 0.02$				
	λ_x	λ_y	λ_z	A_x	A_y	A_z	Nokta	A_x	A_y	A_z	
2	0.86	1.37	0.43	6.13	7.71	4.31	7213	0.43	0.43	0.43	7213'e göre; (Eşlenik Noktalar) 7214 7215 7216 7259 8001 8002 8003 8004
19	0.40	0.63	0.11	4.19	5.23	2.16	7214	0.94	0.86	0.94	
20	0.21	0.17	0.65	3.06	2.74	5.33	9	1.01	1.14	0.84	
54	0.53	0.45	0.24	4.79	4.44	3.26	82	3.69	1.69	0.16	
74	0.58	1.66	1.05	5.04	8.50	6.77	87	1.79	0.17	2.24	
136	0.36	0.59	0.75	3.93	5.07	5.73	158	0.18	1.34	6.14	
158	0.00	0.04	0.87	0.18	1.34	6.14					
Güven Hiperelipsoidine ait Ortalama Yarı Eksen Uzunlukları:			3.90	5.00	4.81			1.34	0.94	1.79	
1	0.91	0.22	0.08	6.28	3.12	1.81	7213	0.43	0.43	0.44	7213'e göre; 8 Dış Kuşak Noktası 163 85 138 8003 8004 20 58 68
2	0.12	1.55	1.24	2.31	8.21	7.33	9	1.01	1.15	0.84	
74	0.74	0.50	0.53	5.69	4.68	4.78	19	4.06	3.55	0.16	
87	0.04	0.69	0.09	1.34	5.46	1.98	20	0.20	1.12	1.11	
136	0.62	0.87	0.42	5.18	6.16	4.25	70	1.50	0.17	3.42	
144	0.04	0.56	0.03	1.31	4.92	1.18					
158	0.43	0.04	0.54	4.31	1.34	4.83					
Güven Hiperelipsoidine ait Ortalama Yarı Eksen Uzunlukları:			3.77	4.84	3.74			1.44	1.28	1.19	
8003	2.53	0.20	1.34	10.50	2.95	7.64	7213	0.44	0.44	0.43	7213'e göre; 4 Dış kuşak Noktası 163 138 8004 58 4 İç Kuşak Noktası 7216, 8001, 8002, 6
1	0.11	0.99	0.07	2.17	6.56	1.77	8	4.65	1.72	0.18	
19	0.64	0.48	0.11	5.28	4.55	2.16	9	1.01	1.14	0.84	
54	0.31	0.53	0.24	3.69	4.81	3.24	62	1.34	0.14	1.38	
74	1.17	0.61	0.84	7.13	5.17	6.06	154	0.16	1.33	3.96	
136	0.30	0.60	0.57	3.61	5.10	4.98					
158	0.40	0.04	0.75	4.18	1.34	5.70					
Güven Hiperelipsoidine ait Ortalama Yarı Eksen Uzunlukları:			5.22	4.35	4.50			1.52	0.95	1.36	2.534 0.275 5×10^{-4}

2- Güven hiperelipsoidinin ortalama yarı eksenleri ve özdeğerler ölçütü, GPS gözlemleri için seçilen datum noktasının en uygun yeri için önemli birer ölçüttürler. Bu ölçütler irdelendiğinde; GPS gözlemleri için en uygun datum noktasının ağın ortalarında bir yerde, diğer GPS noktalarının da genellikle ağın dış kuşağı üzerinde gergin olmayan noktalar olarak seçilmesinin uygun olacağı sonucuna varılmıştır.

Tablo 18. En Uygun GPS Noktalarının Belirlenmesi (2. Model)

Nokta	Özdeğerler $\lambda \geq 0.5$			Güven Hiperelipsoidi Yarı Eksen Uzunlukları (cm)							Açıklama λ_{max} λ_{ort} λ_{min}
				$\lambda \geq 0.5$			$\lambda \leq 0.02$				
	λ_x	λ_y	λ_z	A_x	A_y	A_z	Nokta	A_x	A_y	A_z	
1	0.91	0.26	0.07	6.29	3.34	1.79	8	3.86	1.80	0.19	152'ye göre (8 dış kuşak noktası) 163 85 138 8003 8004 20 58 68
2	0.12	1.60	1.24	2.32	8.35	7.34	9	1.01	1.14	0.84	
54	0.00	0.07	0.55	0.19	1.73	4.91	54	0.19	1.73	4.91	
74	0.47	0.61	0.44	4.54	5.13	4.37	144	1.31	0.18	1.59	
87	0.04	0.71	0.07	1.34	5.55	1.80	152	0.43	0.43	0.43	
136	0.60	0.87	0.40	5.10	6.15	4.15					
158	0.78	0.04	0.54	5.81	1.34	4.83					
Güven Hiperelipsoidine ait Ortalama Yarı Eksen Uzunlukları:			3.66	4.51	4.17			1.36	1.06	1.60	
8003	1.20	0.23	1.64	7.22	3.16	8.44	7213	0.81	0.82	1.31	152'ye göre; 4 Dış Kuşak Noktası 163,138,8004 58 4 İç Kuşak Noktası 7215, 8001, 8002, 12
1	0.11	3.74	0.12	2.16	12.76	2.30	8	3.71	1.73	0.19	
2	0.21	0.51	0.31	3.04	4.70	3.67	9	1.01	1.14	0.84	
20	0.78	0.85	0.41	5.83	6.08	4.22	12	1.86	1.49	0.81	
74	0.73	1.48	1.04	5.65	8.02	6.73	149	1.32	0.17	1.18	
136	0.61	0.69	0.43	5.14	5.49	4.33	152	0.46	0.45	0.45	
158	0.00	0.04	0.55	0.15	1.33	4.90					
Güven Hiperelipsoidine ait Ortalama Yarı Eksen Uzunlukları			4.17	5.93	4.94			1.52	0.97	0.80	3.745 0.299 5×10^{-4}

8. İRDELEMELER

Örnek bir bütünleşik yüzey açığı modeli olarak ele alınan Ankara GPS test açığında gerçekleştirilen optimizasyon işlemi ve ulaşılan sonuçlar, genel olarak üç ana başlık halinde irdelenebilir.

Ağırlık optimizasyonu: Yermerkezli üç boyutlu koordinat sisteminde değerlendirilen yüzey ağlarında gerçekleştirilecek bir ağırlık optimizasyonu işleminde; A yapı matrisinde çekül sapmaları bileşenlerinin yönünü belirleyen bilinmeyenlerin katsayılarından kaynaklanan kondüsyon bozukluğu, önemli bir sorun oluşturmaktadır. Bu nedenle; güvenilir bir ağırlık optimizasyonu gerçekleştirilebilmek için, fonksiyonel model çözüm sonucunda sağlanması gereken koşullarla genişletilerek, "Bilinmeyenleri Arasında Koşul Denklemleri Bulunan Dolaylı Ölçüler Dengelemesi" yöntemiyle çözüme gidilmiştir.

Ölçüt matrisleriyle gerçekleştirilen ağırlık optimizasyonu işleminde üç ayrı yaklaşım denenmiştir.

Ölçüt matrislerinin inverslerine uygulanan ve doğrudan bir yaklaşım olan U,m çözümünün kararlı bir yöntem olduğu, bu yöntemle ulaşılan ağırlıklara uygulamada alışılmış ölçme ekipleri ve yöntemleri ile ulaşılabileceği sonucuna varılmıştır.

Ölçüt matrislerine doğrudan bir yaklaşım olan direkt HR çözümü A yapı matrisine, yine doğrudan bir yaklaşım olan yinelemeli HR çözümü ise hem A yapı matrisine hem de her bir yineleme adımında elde edilecek yeni bir ağırlık dağılımına bağlıdır. Bu özelliklerin de bir sonucu olarak yermerkezli üç boyutlu yüzey ağlarında kullanışlı olmadıkları ortaya çıkmıştır.

Ölçme planı: Ulaşılan ağırlık optimizasyonu sonuçları en uygun ölçme planı yönünden irdelendiğinde; yermerkezli üç boyutlu yüzey ağları için zorunlu ve gerekli olan yatay doğrultu ve düşey açı gözlemlerinin korunduğu, özellikle diğer

gözlemlere göre göreceli olarak pahalı ve zahmetli olan yükseklik farklarının da oldukça uygun bir oranda kaldığı görülmektedir.

En Uygun GPS Noktalarının Belirlenmesi: Bütünleşik olarak değerlendirilen yüzey ağlarında, duyarlık yönünden bir iyileştirme yapabilmek amacıyla GPS gözlemlerinden en uygun şekilde nasıl yararlanabileceği konusu da ayrıca ele alınmıştır. Gerçekleştirilen optimizasyon işlemi sonucunda; GPS gözlemleri için seçilen datum noktasının en uygun yerinin ağın ortalarında bir yerde, diğer GPS noktalarının da genellikle ağın dış kuşağı üzerinde 200^g'dan daha dar bir açı içerisinde kalan ölçülerle belirlenen noktalar olarak seçilmelerinin uygun olacağı sonucuna varılmaktadır. Bu durum, özellikle ağın dış noktalarının duyarlık yönünden iyileştirilmesi amacıyla bir dış kuşak oluşturma gereksinimini ortadan kaldırmakta, ayrıca zaman ve maliyet yönünden de önemli kazançlar sağlamaktadır.

9. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Yer merkezli üç boyutlu dik koordinat sisteminde seçilen bir amaç fonksiyonuna göre tasarımılanan ve bu amaca göre en uygun hale getirilen örnek bir yüzey ağı, son adımda iki boyutlu yüzey ağı standartlarına dönüştürülmüştür. Son zamanlarda jeodezide yaygın kullanım alanı bulan GPS gözlemlerinin söz konusu yüzey ağındaki en uygun dağılımı da ayrıca irdelenmiştir. Ulaşılan sonuçlar ve öneriler şu şekilde özetlenebilir.

1. Üstün, hızlı ve kapasiteli hesaplayıcılar ile yeni ölçme olanaklarının bir sonucu olarak; yüzey ağları yer merkezli üç boyutlu dik koordinat sisteminde bütünleşik olarak değerlendirilmelidir. Uygun bir veri tabanı oluşturuluncaya kadar, bütünleşik olarak değerlendirilen yüzey ağlarının son adımda yine klasik yüzey ağı standartlarına dönüştürülerek kullanıma sunulması gerekmektedir.

2. Bütünleşik yüzey ağları, tasarım aşamasında kullanım amacına göre en uygun hale getirilmelidir.

Yüzey ağları için yer merkezli dik koordinat sisteminde gerçekleştirilen ağırlık optimizasyonu işlemlerinde, A yapı matrisinin kondüsyonu önemli bir sorun oluşturmaktadır. Güvenilir bir ağırlık optimizasyonu için; fonksiyonel model, çözüm sonucunda sağlanması gereken koşullarla genişletilerek, "Bilinmeyenleri Arasında Koşul Denklemleri Bulunan Dolaylı Ölçüler Dengelemesi" yöntemiyle çözülmelidir.

3. Yer merkezli üç boyutlu dik koordinat sisteminde yüzey ağları için gerçekleştirilecek bir ağırlık optimizasyonu işleminde, ölçüt matrislerinin terslerine (inverslerine) uygulanan ve direkt bir yaklaşım olan U, m çözümü, kararlı bir yöntemdir. Uygun bir ağırlık dağılımı elde edilen bu yaklaşım ile ölçüler için kestirilen ağırlıklara, bilinen ekipman ve ölçme yöntemleri ile kolaylıkla ulaşılabilir.

Ölçüt matrislerine direkt bir yaklaşım olan Yinelemeli HR ve Direkt HR çözümleri; sözü geçen koordinat sisteminde en uygun duruma getirilecek yüzey ağlarında, ölçüt matrislerinin uygunluğundan çok A yapı matrisinin kondüsyonundan etkilenmekte ve uygun sonuçlar elde edilememektedir. Bu nedenle sözü edilen her iki yöntem yermerkezli üç boyutlu dik koordinat sisteminde, ağırlık optimizasyonu için kullanışlı değildir.

4. Yüzey ağlarında GPS gözlemleri için en uygun datum noktasının ağın ortalarına yakın bir yerde, diğer GPS noktalarının da ağın dış kuşağı üzerinde gergin olmayan noktalar olarak seçilmesi uygun olmaktadır.

5. Tüm bu sonuçların ışığı altında, yapım ve ölçüm işlemleri için gerekecek maliyet ve zamanın da oldukça uygun olduğu ortaya çıkmaktadır. Özellikle yermerkezli üç boyutlu dik koordinat sistemlerinde çekül sapmalarının belirlenmesi için yatay doğrultu ve düşey açı gözlemleri zorunlu ve gereklidir. Her bir istasyonda ağın ortalama uzunluğunun $\sqrt{8}$ katı kadar uzakta olan noktalara ya da doğrudan komşu olan noktalar ile bunları çevreleyen noktalara gözlem yapılması yeterlidir. Ağın ölçeği konusunda bilgi taşıyan eğik uzunluk gözlemlerinin toplam yatay doğrultu gözlemlerine oranı %45 olması, diğer gözlemlere göre daha yorucu ve pahalı olan nivelman gözlemlerinin de bu oranın %20 civarında kalması yeterli olmaktadır. GPS noktalarının da ağın dış kuşak noktaları üzerinde seçilmesi durumunda yüzey ağı duyarlık yönünden iyileştirilmekte ve özellikle bu amaç için bir dış kuşak oluşturma gereksinimi de ortadan kalkmaktadır.

10. KAYNAKLAR

- [1] Ersoy, A., Üç Boyutlu Jeodezinin Koordinat Sistemleri ve Bunlar Arasındaki İlişkiler, İTÜ Dergisi, 2 (1989) 1-9.
- [2] Gürkan, O., Astrojeodezik Ağların Deformasyonu ve Türkiye I. Derece Triyanğulasyon Ağı, K.T.Ü. Basımevi, 104, Trabzon, 1979.
- [3] Hekimoğlu, Ş., Jeodezik Dik Koordinatlardan Eğri Koordinatlara Dönüşüm İçin Yeni Algoritmalar, Harita Dergisi, 111 (1993) 1-22.
- [4] Demirel, H., Nirengi Ağlarının Dengelenmesi ve Sonuçların Test Edilmesi, Harita Dergisi, 98 (1987) 1-18.
- [5] Öztürk E., Dengeleme Hesabı, Cilt I, 2. Baskı, K.T.Ü. Basımevi, 119, Trabzon, 1991.
- [6] TÜRYAP, Türkiye Yüzey Ağı Projesi Tesis, Ölçü ve Ön Hesaplamalar Yönergesi, T.K.G.M., Ankara, 1991.
- [7] Wolf, H., Ausgleichsrechnung. Formeln zur Praktischen Anwendung, Dümmlerbuch 7835, Dümmlerverlag, Bonn, 1975.
- [8] Öztürk, E. ve Şerbetçi, M., Dengeleme Hesabı, Cilt III, K.T.Ü. Basımevi, 144, Trabzon, 1992.
- [9] Konak, H., Duyarlıklılı Nivelman Ağlarının Karşılaştırılması, Yüksek Lisans Tezi, K.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 1986.
- [10] Pelzer, H. ve Milev, G., Untersuchungen zur Geodätischen Bestimmung von Rutschungserscheinungen und Vertikalen Krustenbewegungen, DGK Reihe C, 133 (1984) 117-281.
- [11] Pelzer, H., Grundlagen der Matematischen Statistik und der Ausgleichsrechnung, Vorträge des Kontaktstudiums, Şubat 1985, Hannover, Geodätische Netze in Landes und Ingenieurvermessung II, 3-119.
- [12] Baarda, W., A Testing Procedure for Use in Geodetic Network, Netherlands Geodetic Commission, 2, 5 (1968) 5-59.
- [13] Poppe, A.J., The Statistics of Residuals and the Detection of Outliers, NOAA Technical Report No.565 NGS1, U.S. Department of Commerce, National Ocean Survey, Rockville, 1976.

- [14] Koch, K.R., Parameterschätzung and Hypothesentests in linearen Modellen, Dümmlerbuch 7892, Dümmlerverlag, Bonn, 1980.
- [15] Niemeier, W., Deformationanalyse, Vorträge des Kontaktstudiums, Şubat 1985, Hannover, Geodätische Netze in Landes und Ingenieurvermessung II , 559-623.
- [16] Bäumker, M., Zur dreidimensionalen Ausgleichung von terrestischen und Satellitenbeobachtungen Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Vermessungswesen, 130 (1984) 1-146.
- [17] Illner, I., Datumfestlegung in freien Netzen, DGK Reihe C, 309 (1985) 5-95.
- [18] Ruff, B., Berechnung der Pseudeinversen mit modifiziertem Gauß-Jordan Austauschverfahren unter Ausnutzung der Symmetrieeigenschaften der Normalgleichungsmatrizen, ZfV, 6 (1983) 216-220.
- [19] Bektaş, S., Yerkabuğu Hareketlerinin Üç Boyutlu Geometrik Modelle Araştırılması, Doktora Tezi, K.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 1990.
- [20] Atasoy, V., Yersel Yöntemlerle Ölçülen Jeodezik Ağların Üç Boyutlu Dengelenmesi, Doktora Semineri, K.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 1986.
- [21] Demirel, H., Jeodezik Ağlarda Datum Tanımları ve Dengeleme Sonuçlarına Etkileri. Prof.Burhan Tansuğ Fotogrametri ve Jeodezi Simpozyumu, 8-9 Ekim 1987, İstanbul, 269-277.
- [22] Kınık, I., Jeodezik Ağların Ölçüt Matrisleriyle İkinci Dereceden Optimizasyonu, Harita Dergisi, 99 (1987) 30-49.
- [23] Wimmer, H., Ein Beitrag zur Gewichtsoptimierung geodätischer Netze, DGK Reihe C, 269 (1981) 5-109.
- [24] Grafarend, E., Heister, H., Kelm, R.G., Kropff, H. ve Schaffrin, R., Optimierung Geodätischer Messoperationen, Band II, Sammlung Wichmann Neue Folge, Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe, 1979.
- [25] Ayan, T., Jeodezik Ağların Optimizasyonu, Harita ve Kadastro Mühendisliği Dergisi, 72 (1992) 25-37.
- [26] Alberda, J.E., A Review of Analysis Techniques for Engineering Control Schemes, Proc. Industrial and Engineering Survey Co., London, 1980.
- [27] Ralf, B., Eine Strategie zur Ausgleichung und Analyse von Verdichtungsnetzen, DGK Reihe C, 295 (1984) 7-91.

- [28] Schaffrin, B., On Some Recent Modifications Regarding the Optimal Design of Geodetic Networks, Geodesy 79 3 (1983) 43-56.
- [29] Schmitt, G., Second Order Design, 3rd Course of the International School of Advanced Geodesy, 25 Nisan-10 Mayıs 1984, Erice, Optimization and Design of Geodetic Networks, 124-131.
- [30] Bossler, J.D., Grafarend, E. ve Kelm, R., Optimal Design of Geodetic Nets. J.Geophys. Res. 78, 5 (1973) 5887-5897.
- [31] Ayan, T., Jeodezik Ağların Geliştirilmesi (III. Derece Optimizasyon), Türkiye I.Harita Bilimsel ve Teknik Kurultayı, 23-27 Şubat 1987, Ankara, 535-544.
- [32] Illner, M., Anlage und Optimierung von Verdichtungsnetzen, DGK Reihe C, 317 (1986) 5-101.
- [33] Schmitt, G., Third Order Design, 3rd Course of the International School of Advanced Geodesy, 25 Nisan-10 Mayıs 1984, Erice, Optimization and Design of Geodetic Networks, 74-121.
- [34] Schmitt, G., Zur Gewichtsoptimierung in Richtungsnetzen. Beiträge zum VIII. Internationalen Kurs für Ingenieurvermessung, 1980, Zürich, Ingenieurvermessung 80, 1-11.
- [35] Rao, C.R. ve Mitra, S.K., Generalized Inverse of Matrices and its Applications. John Wiley and Sons Inc., New York, 1971.
- [36] Cross, P.A., Numerical Methods in Network Design, 3rd Course of the International School of Advanced Geodesy, 25 Nisan-10 Mayıs 1984, Erice, Optimization and Design of Geodetic Networks, 132-168.
- [37] Bill, R., Theoretical and Empirical Studies of Correlation Functions in Planar Geodetic Networks. Geodätisches Institut Universität, Karlsruhe, 1985.
- [38] Bill, R., Kriteriummatrizen ebener geodätischer Netze, DGK Reihe A, 120 (1985) 5-59.
- [39] Arnold, J., Zur Berechnung ausgleichender Spline-Funktionen mit freien Knoten, AVN, 84, 4 (1987) 117-123.
- [40] Grafarend, E.W., Second Order Design of Geodetic Nets, ZfV, 100, 4 (1975) 150-168.
- [41] Illner, M., Ausgleichungs und Optimierungsmodelle der Netzverdichtung, AVN, 94, 3 (1987) 93-104.

- [42] Hoppe, H. ve Kaltenbach, H., Gewichtsoptimierung angeschlossener geodätischer Netze, DGK Reihe A, 105 (1989) 5-57.
- [43] Aksoy, A., Öztürk, E., Ayan, T., Demirel, H. ve Ünal, T., Nirengi Ağları ve Türkiye'deki Nirengi Sorunlarına Genel Bakış, Sivil Harita Mühendisliği Eğitim ve Öğretiminde 40. Yıl Sempozyumu, 11-13 Ekim 1989, İstanbul, 34-44.
- [44] Öztürk, E., Ülke Nirengi Ağı Sıklaştırması İçin Yersel Gözlemlerle GPS Ölçülerinin Birlikte Dengelenmesi, Prof.Dr.Ing.Dr.mult.H.WOLF Jeodezi Sempozyumu, 3-5 Kasım 1993, İstanbul, 287-296.
- [45] Öztürk, E., Konak, H. ve Yaşayan R., Ankara GPS Test Ağında Yersel Gözlemlerle GPS Ölçülerinin Birlikte Dengelenmesi, Harita ve Kadastro Mühendisliği Dergisi, 76 (1994) 7-20.
- [46] Pelzer, H., Über die Fortführung und Verdichtung geodätischer Festpunkfelder, Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Vermessungswesen, 83 (1978) 5-65.
- [47] Welsh, W. ve Kelm, R., Numerische Studie über den Einfluss der Kovarianz-Matrix der Altpunkte auf die Genauigkeit der Einschaltung eines Neupunktes, Vorträge des Kontaktstudiums, 1980, Stuttgart, Geodätische Netze in Landes und Ingenieurvermessung, 227-245.
- [48] Konak, H., 3. Derece Yüzey Ağlarının Dengelenmesi, Kişisel Çalışma, K.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon 1990.
- [49] Koçak, E., Gauss-Krüger Projeksiyonunda Koordinat Dönüşümleri, K.T.Ü. Basımevi, 82, Trabzon, 1985.
- [50] Özbenli, E., Jeodezi, K.T.Ü. Basımevi, 154, Trabzon, 1991.
- [51] Aksoy, A., Jeodezik Değerlerin Metamatik İstatistik Testlerle İrdelenmesi, Türkiye I. Harita Bilimsel ve Teknik Kurultayı, 23-27 Şubat 1987, Ankara, 559-592.
- [52] Boljen, J., Ausgewählte Kapitel der Landes und Ingenieurvermessung, Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Vermessungswesen, 192 (1993) 147-169.

11. ÖZGEÇMİŞ

1960 yılında Maçka'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Trabzon'da, lise öğrenimini de 1977 yılında Trabzon Affan Kitapçıoğlu Lisesi'nde tamamladı. Yüksek öğrenimine 1978 yılında Fatih Eğitim Enstitüsü'nde başladı. 1978-1979 eğitim-öğretim döneminde adı geçen enstitüden ayrılarak, K.T.Ü. Yer Bilimleri Fakültesi, Jeodezi ve Fotogrametri Mühendisliği Bölümü'nde yüksek öğrenimini sürdürdü. 1982 yılında Lisans öğrenimini, 1986 yılında da K.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü'nde Yüksek Lisans öğrenimini tamamladı. Askerlik hizmetini tamamladıktan ve bir süre özel sektörde hizmet verdikten sonra, 1988 yılında K.T.Ü. M.M.F. Jeodezi ve Fotogrametri Mühendisliği Bölümü'ne Araştırma Görevlisi olarak atandı ve aynı yıl K.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü'nde Doktora programına başladı. Halen Jeodezi ve Fotogrametri Mühendisliği Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.

1990-1992 yılları arasında Türkiye Yüzey Ağı Projesi (TÜRYAP) kapsamındaki çalışmalarından ötürü bir ödülü, biri sunulmuş bildiri olmak üzere yayınlanmış üç makalesi vardır. Almanca ve İngilizce bilir. Evli ve bir çocuk babasıdır.

T.C. YÜKSEK ...
MÜHÜRÜ ...