DİTOPOLOJİK DOKU UZAYLARINDA BAĞLANTILILIK

Ayşenur AYAZ

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Topoloji Bilim Dalı
Doç. Dr. Tamer UĞUR
2015

ATATÜRK ÜNİVERİSTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DİTOPOLOJİK DOKU UZAYLARINDA BAĞLANTILILIK

Ayşenur AYAZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
Topoloji Bilim Dalı

ERZURUM
2015

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAY FORMU

DİTOPOLOJİK DOKU UZAYLARINDA BAĞLANTILILIK

Doç. Dr. Tamer UĞUR danışmanlığında, Ayşenur AYAZ tarafından hazırlanan bu çalışma 18/03/2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı – Topoloji Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak **oybirliği/~~oy çokluğu~~ (…/…)** ile kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Abdullah KOPUZLU *İmza* :

Üye : Doç. Dr. Tamer UĞUR *İmza* :

Üye : Yrd. Doç. Dr. Ceren Sultan ELMALI *İmza* :

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu 19/03/2015 tarih ve 11/495 nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Ertan YILDIRIM
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

DİTOPOLOJİK DOKU UZAYLARINDA BAĞLANTILILIK

Ayşenur AYAZ

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Topoloji Bilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Tamer UĞUR

Bu çalışmada, daha önceki yıllarda tanımlanmış olan ditopolojik uzaylardaki bağlantılılık, lokal bağlantılılık ve total bağlantılılık kavramlarına yer verildi. Diğerlerinden farklı olarak bağlantılı ve yoğun bir alt kümeye sahip olan ditopolojik doku uzayının da bağlantılı olduğu, lokal bağlantılı bir ditopolojik doku uzayının sürekli ve açık bir difonksiyon altındaki görüntüsünün de lokal bağlantılı olduğu ve herhangi bir ditopolojik doku uzayın Z bileşeninin homeomorfizm altındaki görüntüsünün de bileşen olduğu gösterildi.

2015, 38 sayfa

Anahtar Kelimeler: Doku Uzayları, Ditopolojik Doku Uzayları, Ditopolojik Doku Uzaylarında Bağlantısızlık, Ditopolojik Doku Uzaylarında Lokal Bağlantısızlık, Bileşen

ABSTRACT

Master Thesis

CONNECTEDNESS IN DITOPOLOGICAL TEXTURE SPACES

Ayşenur AYAZ

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Discipline of Topology

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Tamer UĞUR

In this thesis, connectedness, local connectedness and total connectedness concepts of connectedness in ditopological spaces, defined in previous years, is presented. Then it is shown that ditopological texture spaces which has a dense subset is connected. Moreover, it is shown that continues and open difunction of a local connected ditopological texture space is local connected. Finally, it is shown that image under homeomorfizm of Z-component of any ditopological texture space is component.

2015, 38 pages

Keywords: Texture Spaces, Ditopological Texture Spaces, Connectedness in Ditopological Texture Spaces, Local Connectedness in Ditopological Texture Spaces, Component.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma, Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde hazırlanmıştır.

Tez çalışmamı hazırlama sürecinde bilgi ve tecrübelerini esirgemeyen, bana yol gösteren çok değerli hocam Sayın Doç. Dr. Tamer UĞUR'a teşekkürlerimi arz ederim.

Tezin hazırlanması sürecinde değerli fikirlerinden yararlandığım Sayın Prof. Dr. Ahmet KÜÇÜK'e, Sayın Prof. Dr. Abdullah KOPUZLU'ya ve Matematik Bölümünün tüm değerli öğretim elemanlarına sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bu süreçte yardımlarını esirgemeyen bölüm başkanı Sayın Prof. Dr. Murat ÖZDEMİR'e teşekkürlerimi arz ederim.

Çalışmamda bana yardımını ve desteğini esirgemeyen sevgili arkadaşım Hatice Kübra SARI'ya teşekkür ederim.

Bu süreçte bana desteğini ve güvenini daima hissettiren aileme minnettarlığımı sunarım.

Ayşenur AYAZ
Mart, 2015

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$(S, \mathcal{L})$	: Doku uzayı
$(S, \mathcal{L}, k)$	: Tümleyenli doku uzayı
$(S, \mathcal{L}, \tau, \kappa)$	: Ditopolojik doku uzayı
(f, F)	: Difonksiyon
(r, R)	: Dibağıntı
(τ, κ)	: Ditopolojik uzay
$(r, R)^{\leftarrow}$	: Dibağıntının tersi
$[A]^{\tau}$	: A kümesinin τ ya göre kapanışı
$[B]^{\kappa}$	: B kümesinin κ ya göre kapanışı
$\bar{P}_{(s,t)}$	: $\mathcal{P}(S) \otimes \mathcal{T}$ çarpım dokusunun p-kümesi
$\bar{Q}_{(s,t)}$	: $\mathcal{P}(S) \otimes \mathcal{T}$ çarpım dokusunun q-kümesi
$\bigotimes_{j \in J} \mathcal{L}_j$	: $\mathcal{L}_j$ dokularının çarpım dokulanması
$\{A, B\}$	: Parçalanış
P_s	: p-küme
Q_s	: q-küme
S_{κ}	: κ nın bir alt tabanı
S_{τ}	: τ nun bir alt tabanı
$[Z]$	: Z nin kapanışı
$\prod_{j \in J} S_j$	: S_j ailesinin çarpımı
π_i	: İzdüşüm fonksiyonu
$\wedge$	: İnfremum (İnf)
$\vee$	: Supremum (Sup)
$C(S, S^*)$	: S den S^* a tüm sürekli fonksiyonların kümesi
$C(Z, x)$	: Z kümesinin x i içeren tüm bağlantılı alt kümelerinin maximalı
M	: Molekül
$ext(Z)$	: Z nin dışı
$\mathcal{P}(S)$	: S nin tüm alt kümeleri ailesi

1. GİRİŞ

Bağlantılılık kavramı topolojinin en temel kavramlarından biridir. Topolojik uzayların bu özelliği homeomorfizmler altında korunur, yani iki topolojik denk (homeomorf) uzaydan birisi bağlantılı (veya bağlantısız) ise diğeri de bağlantılıdır (veya bağlantısızdır). Bağlantılı bir topolojik uzayın sürekli bir fonksiyon altındaki görüntüsü de bağlantılıdır. Ayrıca daha önceki yıllarda karşılaşılmış olan Ara Değer Teoremi, tamamen bağlantılılık kavramının bir uygulamasından başka bir şey değildir. Bunun yanı sıra bağlantılı uzayların uygulama alanları oldukça fazladır. Bunlardan en önemlileri geometri, analiz ve cebirsel geometridir.

Doku uzayı kavramı ilk olarak, fuzzy yapısı altında Brown (1993a, 1993b) tarafından tanıtıldı. Doku uzaylarının çalışılmasındaki neden bu uzayların bir çok matematiksel yapıyı nokta ve tümleyenden bağımsız olarak ifade edebilmesi ve bu yapılar için doğal yaklaşımlar sunmasıdır. Fuzzy kümeleri ve doku uzayları arasındaki detaylı inceleme (Brown and Diker 1998a; Coker 1996; Brown and Ertürk 2000a) tarafından yapıldı.

Bir doku uzayı üzerinde bir ditopoloji kavramı Brown (1993b) tarafından tanıtıldı. Yukarıda bahsedilen ilişki altında bir ditopoloji bir fuzzy topolojiye denktir. Fakat genel ditopolojik doku uzaylarında bu ilişki, hem topolojik uzayların hem de bitopolojik uzayların doğal genellemeleri olarak alınabilir.

Ditopolojik doku uzaylarındaki bağlantılılık kavramı Diker (1999) tarafından tanıtıldı. Ayrıca bağlantılılık kavramının bazı özellikleri verildi. Özellikle bağlantılılık kavramının ditopolojik doku uzayları bağlamında kullanışlı olduğu gösterildi.

Tantawy *et al.* (2014) ditopolojik doku uzaylarındaki kompaktlık kavramıyla ilgili bazı yeni özellikler elde etti. Ayrıca ditopolojik doku uzaylarında lokal bağlantısızlık, total bağlantısızlık ve tamamen bağlantısızlık gibi bazı yeni kavramlar araştırdı. Böylece ditopolojik doku uzaylarının toplamının total bağlantısız olması içi gerek ve yeter şartın her bir ditopolojik doku uzayının total bağlantısız olması gerektiğini gösterdi.

Sunulan bu tez, Giriş, Kuramsal Temeller, Materyal ve Yöntemler, Araştırma Bulguları ve Tartışma ve Sonuçlar olmak üzere beş bölümden oluşmaktadır.

Kuramsal Temeller bölümünde, çalışmada kullanılan temel topolojik tanım ve teoremler verildi.

Materyal ve Yöntemler bölümünde, öncelikle doku uzayı tanımlandı. Daha sonra ditopolojik doku uzayı tanımı verilerek topolojik uzaydaki bazı kavramlar ditopolojik doku uzaylarına taşındı.

Araştıma bulguları bölümünde, topolojik uzaylardaki bağlantısızlık ile ilgili tanım ve teoremlerin ditopolojik uzaylardaki karşılığı verildi. Ayrıca bu tezde bağlantılı ve yoğun bir alt kümeye sahip olan ditopolojik doku uzayının da bağlantılı olduğu, lokal bağlantılı bir ditopolojik doku uzayının sürekli ve açık bir difonksiyon altındaki görüntüsünün de lokal bağlantılı olduğu ve herhangi bir ditopolojik doku uzayın S bileşeninin homeomorfizm altındaki görüntüsünün de bileşen olduğu gösterildi.

Tartışma ve Sonuç bölümünde, araştırma bulguları kısmında elde edilen sonuçlar sunulmuştur.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde tez içinde ön bilgi olarak ihtiyaç duyacağımız tanım ve teoremler verilmiştir.

Tanım 2.1.1 (Bağıntı): X ve Y boştan farklı kümeler olmak üzere $X \times Y = \{(x, y): x \in X, y \in Y\}$ kümesine X ve Y nin Kartezyen çarpımı ve $X \times Y$ nin herhangi bir alt kümesine X den Y ye bir bağıntı denir (Mucuk 2010).

Tanım 2.1.2 (Kısmi Sıralı Küme): Boştan farklı bir X kümesi ve bu küme üzerinde tanımlanan $\leq$ bağıntısını göz önüne alalım. Her $x, y, z \in X$ için,

(i) $x \leq x$ (yansıma),
(ii) $x \leq y$ ve $y \leq x$ ise $x = y$ (ters simetrik),
(iii) $x \leq y$ ve $y \leq z$ ise $x \leq z$ (geçişlilik),

şartlarnı sağlayan X kümesine kısmı sıralanmış küme denir (Bizim 2013).

Tanım 2.1.3 (Tam Sıralı Küme): X kısmi sıralanmış bir küme olmak üzere $\leq$ bağıntısı, her $x, y \in X$ için $x \leq y$ veya $y \leq x$ şartını gerçekleştiriyorsa $\leq$ bağıntısına X üzerinde bir tam sıralama bağıntısı, X kümesine de tam sıralanmış küme denir (Bizim 2013).

Tanım 2.1.4 (Supremum, İnfremum): $(X, \leq)$ kısmi sıralı bir küme ve $A \subseteq X$ olsun. Her $a \in A$ için $a \leq x$ olacak şekildeki bir $x \in X$ elemanına A nın bir üst sınırı denir. A nın üst sınırlarının en küçüğüne A nın supremumu denir ve $supA$ yazılır. Benzer olarak her $a \in A$ için $x \leq a$ olacak şekildeki bir $x \in X$ elemanına A nın bir alt sınırı denir. A nın alt sınırlarının en büyüğüne A nın infremumu denir ve $infA$ yazılır (Mucuk 2010).

Eğer $x, y \in X$ ise, $\{x, y\}$ kümesinin en büyük alt sınırı $x \wedge y$ ve en küçük üst sınırı $x \vee y$ oarak gösterilir. Ayrıca $x \wedge y$ ve $x \vee y$ elemanlarına x ve y nin sırasıyla, infremumu ve supremumu denir (Birkhoff 1967).

Tanım 2.1.5 (Sonlu Arakesit Özelliği): Herhangi bir $\mathcal{A}$ kümeler sınıfının her sonlu alt kümesinin arakesiti boştan farklı ise, bu $\mathcal{A}$ kümeler sınıfına sonlu arakesit özelliğine sahiptir denir (Aslım 2004).

Tanım 2.1.6 (Örgü): $(\mathrm{X}, \leq)$ kısmi sıralı bir küme ve $X \neq \emptyset$ olsun. X in elemanlarının her çiftinin, en büyük alt sınırı ve en küçük üst sınırı var ise $(X, \leq)$ kısmi sıralı kümesine örgü denir (Birkhoff 1967).

Tanım 2.1.7 (Tam Örgü): $(\mathrm{X}, \leq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. X kümesinin boştan farklı her alt kümesinin en büyük alt sınırı ve en küçük üst sınırı var ise, $(X, \leq)$ kısmi sıralı kümesine tam örgü denir. $A \subseteq X$ olmak üzere A kümesinin en büyük alt sınırı $\wedge A$ ve en küçük üst sınırı $\vee\mathrm{A}$ biçiminde gösterilir (Birkhoff 1967).

Teorem 2.1.8: Her tam örgü bir örgüdür. Fakat tersi doğru değildir (Birkhoff 1967).

Teorem 2.1.9: $\mathrm{X} \in \mathcal{L}$ olmak üzere $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}(X)$, keyfi arakesit altında kapalı bir aile ise $(\mathcal{L}, \subseteq)$ ikilisi bir tam örgüdür (Birkhoff 1967).

Örnek 2.1.10: Boştan farklı bir X kümesi için $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ bir tam örgüdür. $\mathcal{P}(X)$ in bir alt ailesinin elemanlarının arakesiti bu ailenin infremumu ve birleşimi de bu ailenin supremumudur (Birkhoff 1967).

Sonuç 2.1.11: $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}(X)$ keyfi arakesit altında kapalı bir aile, $(\mathcal{L}, \subseteq)$ bir tam örgü ve $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}$ olmak üzere,

$$\bigvee \mathcal{A} = \bigcup \mathcal{A} \Leftrightarrow \bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{L}$$

önermesi sağlanır (Birkhoff 1967).

Tanım 2.1.12 (Dağılımlı Örgü): $\mathrm{x, y, z} \in \mathrm{X}$ olmak üzere,

(1) $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$,
(2) $(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$,

koşullarını sağlayan $(X, \leq)$ tam örgüsüne dağılımlı örgü denir (Birkhoff 1967).

Tanım 2.1.13 (Tamamen Dağılımlı Örgü): I indis kümesi, $i \in \mathrm{I}$ ve J_i indis kümesi için, $j \in J_i$ ve $a_j^i \in X$ olmak üzere,

$$\bigwedge_{i \in \mathrm{I}} \bigvee_{j \in J_i} a_j^i = \bigvee_{\gamma \in \pi_{i \in \mathrm{I}} J_i} \bigwedge_{i \in \mathrm{I}} a_{\gamma(i)}^i$$

eşitliğini sağlayan $(X, \leq)$ tam örgüsüne tamamen dağılımlı örgü denir (Birkhoff 1967).

Örnek 2.1.14: $\mathrm{X} = (0, 1]$ ve $\mathcal{L} = \{(0, r] : r \in X\} \cup \{\emptyset\}$ olduğunda $(\mathcal{L}, \subseteq)$ ikilisi tam ve tamamen dağılımlı bir örgüdür (Gohar 2002).

Tanım 2.1.15 (Süreklilik): (X, τ) ve (Y, τ') iki topolojik uzay olmak üzere $f: X \to Y$ bir fonksiyon ve $x \in X$ olsun. Eğer $f(x)$ noktasının her $V \subseteq Y$ komşuluğu için, $f(U) \subseteq V$ olacak biçimde x noktasının bir $U \subseteq X$ komşuluğu varsa, f fonksiyonuna x noktasında süreklidir denir. Eğer f fonksiyonu her $x \in X$ noktası için sürekli ise f fonksiyonuna X uzayı üzerinde süreklidir denir (Yüksel 2002).

Tanım 2.1.16 (Homeomorfizm): (X, τ) ve (Y, τ') iki topolojik uzay olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyor ise f fonksiyonuna bir homeomorfizm denir.

(1) f fonksiyonu birebir ve örten,
(2) f fonksiyonu sürekli,
(3) f nin ters fonksiyonu $f^{-1}: Y \rightarrow X$ sürekli.

Eğer (X, τ) ve (Y, τ') uzayları arasında bir homeomorfizm varsa bu uzaylara homeomorf ya da topolojik olarak eş yapılıdır denir (Mucuk 2010).

Tanım 2.1.17 (Gömülme): (X, τ) ve (Y, τ') topolojik uzaylar olsun. X uzayı Y uzayının bir alt uzayına homeomorf ise, X uzayı Y uzayının içine dahil edilebilir (gömülebilir) denir (Munkres 1975).

Tanım 2.1.18 (Başlangıç Topolojisi): X boştan farklı bir küme, $\{(Y_i, \tau_i): i \in \mathrm{I}\}$ topolojik uzaylar ailesi ve her $i \in \mathrm{I}$ için $f_i: X \rightarrow Y_i$ fonksiyonu verilmiş olsun. X kümesi üzerindeki topolojik yapılar arasında $\{f_i: i \in \mathrm{I}\}$ fonksiyonlarından her birini sürekli kılan en kaba topolojiye τ^* diyelim. Bu τ^* topolojisine $\{\tau_i: i \in \mathrm{I}\}$ topolojiler ailesinin, $\{f_i: i \in \mathrm{I}\}$ fonksiyonlarına göre, başlangıç (izdüşel) topoloji, (X, τ^*) uzayına da $\{(Y_i, \tau_i): i \in \mathrm{I}\}$ uzaylarının $\{f_i: i \in \mathrm{I}\}$ fonksiyonlarına göre başlangıç (izdüşel) uzay denir (Yıldız 2002).

Tanım 2.1.19 (İzdüşüm Fonksiyonu): I keyfi bir küme ve $i \in \mathrm{I}$ olmak üzere X_i kümelerinin kartezyen çarpımı

$$X = \prod_{i \in \mathrm{I}} X_i = \left\{ x : x : \mathrm{I} \rightarrow \bigcup_{i \in \mathrm{I}} X_i, x(i) = x_i \right\}$$

olarak tanımlanır. Her bir $i \in \mathrm{I}$ için

$$\pi_i = X \to X_i, \pi_i(x) = x_i$$

olarak tanımlanan π_i fonksiyonuna da X_i üzerindeki izdüşüm fonksiyonu denir (Bizim 2013).

Tanım 2.1.20 (Çarpım Topolojisi): $\mathrm{i} = 1,2,\dots,\mathrm{n}$ olmak üzere (X_i, τ_i)topolojik uzaylar ailesi verilsin. Verilen topolojilerin, izdüşüm fonksiyonlarına göre, X üzerindeki başlangıç topolojisine çarpım topolojisi denir ve bu topoloji τ ile gösterilir, bu durumda her bir (X_i, τ_i) topolojik uzayına çarpan topolojik uzay, (X, τ) ya da çarpım topolojik uzayı denir (Bizim 2013).

Tanım 2.1.21 (Ayrılmış Kümeler): (X, τ) bir topolojik uzay ve A, B kümeleri X in alt kümeleri olsun. Eğer

$$\bar{A} \cap B = \emptyset \text{ ve } A \cap \bar{B} = \emptyset$$

ise, yani A ve B birbirlerinin değme noktalarını içermiyorsa, A ve B kümelerine ayrılmış iki küme (bağlantısız, irtibatsız iki küme) denir.

Eğer $\bar{A} \cap B \neq \emptyset$ ve $A \cap \bar{B} \neq \emptyset$ ise, A ve B ye ayrılmamış iki küme (bağlantılı, irtibatlı iki küme) denir (Yıldız 2002).

Uyarı 2.1.22: A ve B kümeleri ayrılmış ise, aynı zamanda ayrıktır; çünkü

$$\bar{A} \cap B = \emptyset, \bar{A} \supset A \Longrightarrow A \cap B = \emptyset$$

elde edilir. Ancak tersi doğru değildir. Yani A ve B kümeleri ayrık ise ayrılmış olmayabilirler; çünkü $A \cap B = \emptyset$ şartı $\bar{A} \cap B = \emptyset$ şartını gerektirmez (Aslım 2004).

Tanım 2.1.23 (Bağlantılı Uzaylar): (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer $X = A \cup B$ olacak biçimde boş olmayan ve ayrık $A, B \subset X$ açık kümeleri var ise (X, τ) uzayına bağlantısız (ayrılmış) topolojik uzay, eğer X bağlantısız değil ise (X, τ) topolojik uzayına bağlantılı topolojik uzay denir (Bizim 2013).

Örnek 2.1.24: Eleman sayısı birden fazla olan ayrık her uzay bağlantısızdır (Yıldız 2002).

Teorem 2.1.25: Bir (X, τ) topolojik uzayı için aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) (X, τ) uzayı bağlantısızdır.
(ii) X boştan farklı ayrık açık iki kümenin birleşimidir.
(iii) X boştan farklı ayrık kapalı iki kümenin birleşimidir.
(iv) X in $\emptyset$ ve kendisinden farklı hem açık hem kapalı olan en az bir alt kümesi vardır.
(v) İki elemanlı bir $\{a, b\}$ kümesi üzerindeki topoloji ayrık topoloji olmak üzere sürekli olan her bir $f: X \to \{a, b\}$ fonksiyonu sabittir (Mucuk 2010).

Örnek 2.1.26: $\mathrm{X} = \{a, b, c\}$ üzerinde $\tau = \{X, \emptyset, \{a, b\}, \{c\}\}$ topolojisi verilsin. Örneğin $\{c\}$ kümesi hem açık hem kapalı olduğundan (X, τ) uzayı bağlantılı değildir (Mucuk 2010).

Örnek 2.1.27: $\mathrm{X} = \{a, b, c, d\}$ üzerinde

$$\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$$

topolojisine göre X bağlantılıdır. Çünkü X in boş ve kendisinden başka hem açık hem kapalı olan hiçbir alt kümesi yoktur (Mucuk 2010).

Teorem 2.1.28: $\mathrm{Y}, (\mathrm{X}, \tau)$ nun alt kümesi olsun. Y nin bağlantısız olması için gerek ve yeter şart X in

$$\mathrm{U} \cap \mathrm{Y} \neq \emptyset, \mathrm{V} \cap \mathrm{Y} \neq \emptyset, \mathrm{U} \cap \mathrm{V} \cap \mathrm{Y} = \emptyset, \mathrm{Y} \subset \mathrm{U} \subset \mathrm{V}$$

olacak biçimde U, V açık kümelerinin olmasıdır (Bizim 2013).

Teorem 2.1.29: A, X in bağlantılı bir alt uzayı olsun. Bu durumda eğer $A \subset B \subset \bar{A}$ ise B de bağlantılıdır (Munkres 1975).

Teorem 2.1.30: X ve Y topolojik uzaylar ve $f: X \to Y$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $A \subseteq X$ bağlantılı ise $f(A)$ da bağlantılıdır (Mucuk 2010).

Not 2.1.31: Bağlantılı bir kümenin sürekli bir fonksiyon altındaki ters görüntüsünün bağlantılı olması gerekmez. Örneğin, eleman sayısı en az iki olan bir X ayrık uzaydan bir Y tek nokta uzayına sabit bir fonksiyon süreklidir. Fakat Y bağlantılı olmasına rağmen $f^{-1}(Y) = X$ ayrık uzayı bağlantısızdır (Mucuk 2010).

Teorem 2.1.32: Bağlantılı uzayların sonlu kartezyen çarpımı da bağlantılıdır (Munkres 1975).

Not 2.1.33: Sonlu kartezyen çarpım topolojisinin bağlantısız olması için gerek ve yeter şart en az bir çarpan topolojisinin bağlantısız olmasıdır (Mucuk 2010).

Teorem 2.1.34: Bağlantılı yoğun bir kümeye sahip her uzay bağlantılıdır (Yıldız 2002).

Önerme 2.1.35: X bir topolojik uzay ve $\{A_i : i \in \mathrm{I}\}$ de X in bağlantılı alt kümelerinin bir ailesi olsun. Eğer $\bigcap_{i \in \mathrm{I}} A_i \neq \emptyset$ ise bu durumda $A = \bigcup_{i \in \mathrm{I}} A_i$ kümesi de bağlantılıdır (Mucuk 2010).

Teorem 2.1.36: Bir X topolojik uzayında bağlantılı bir kümenin kapanışı da bağlantılıdır (Mucuk 2010).

Örnek 2.1.37: $\mathrm{X} = \left\{\left(x, sin\frac{\pi}{x}\right): x \neq 0\right\}$ kümesi bağlantılı değildir. Çünkü $A = \left\{\left(x, sin\frac{\pi}{x}\right): x < 0\right\}$ ve $B = \left\{\left(x, sin\frac{\pi}{x}\right): x > 0\right\}$ olmak üzere $X = A \cup B, A \cap B = \emptyset$ ve A ile B kümeleri X de açıktır. Fakat

$$Y = \left\{\left(x, sin\frac{\pi}{x}\right): x \neq \emptyset\right\} \cup \{(0, y): -1 \leq y \leq 1\}$$

kümesi bağlantılıdır. Çünkü $A = \left\{\left(x, sin\frac{\pi}{x}\right): x < 0\right\}$, $B = \left\{\left(x, sin\frac{\pi}{x}\right): x > 0\right\}$ ve $C = \{(0, y): -1 \leq y \leq 1\}$ olmak üzere $Y = A \cup C \cup B$ dir. Burada A ve B bağlantılı olduğundan Teorem 2.1.36 dan $\bar{A}$ ve $\bar{B}$ de bağlantılıdır. $\bar{A} \cap \bar{B} = C$ ve $Y = \bar{A} \cup \bar{B}$ olduğundan Önerme 2.1.35 den $\bar{A} \cup \bar{B} = Y$ bağlantılıdır (Mucuk 2010).

Tanım 2.1.38 (Bileşen): $\mathrm{C} \subset (\mathrm{X}, \tau)$ bağlantılı ve X in, C kümesini kapsayan bağlantılı bir has alt kümesi yok ise C kümesine X in bir bileşeni denir (Bizim 2013).

Uyarı 2.1.39:

(1) Her bir $x \in X$ noktası mutlaka bir bileşendedir. $x \in X$ noktasını bulunduran bileşenlerin birleşimi $C(x)$ ile gösterilirse, $C(x)$ bağlantılıdır ve X topolojik uzayının x noktasını bulunduran bileşenlerinin en büyük olanıdır.

(2) $X = \bigcup_{x \in X} C(x)$ olduğu açıktır.

(3) $x, y \in X$ noktaları için $C(x)$ ile $C(y)$ bileşenleri ya ayrıktır ya da çakışır. Gerçekten de $z \in C(x) \cap C(y) \neq \emptyset$ olarak alınırsa $z \in C(x)$ ve $z \in C(z)$ olacağından $C(x) \subset C(z)$ olur. Diğer yandan $x \in C(z)$ olacağından $C(z) \subset C(x)$ dir, böylece $C(x) = C(z)$ olur. Benzer şekilde $C(y) = C(z)$ ve dolayısıyla $C(x) = C(y)$ olduğu elde edilir.

(4) X in her bir bağlantılı alt kümesi bir bileşendedir.

(5) X in bağlantılı bileşenleri X in bir parçalanmasını oluşturur.

(6) X in her bir $C(x)$ bileşeni kapalıdır.

(7) X bağlantılıdır $\Leftrightarrow$ X in sadece bir tane bileşeni vardır (Bizim 2013).

Teorem 2.1.40: $\mathrm{f}: (\mathrm{X}, \tau) \to (\mathrm{Y}, \tau')$ bir homeomorfizm ve C, X in bir bileşeni ise $f(C)$ de (Y, τ') nün bir bileşenidir (Bizim 2013).

Tanım 2.1.41 (Lokal Bağlantılı Uzay): (X, τ) bir topolojik uzay ve $x \in X$ olsun. x noktasının her komşuluğu, x noktasının bağlantılı bir komşuluğunu kapsıyorsa, yani x noktasının bağlantılı kümelerinden oluşan bir komşuluklar tabanı (lokal tabanı) varsa, X uzayına x noktasında lokal bağlantılı uzay denir.

Eğer X uzayı her noktasında lokal bağlantılı ise, X uzayına lokal bağlantılı uzay denir (Yıldız 2002).

Örnek 2.1.42: $\mathbb{Q}$ alışılmış topolojiye göre ne bağlantılı ne de lokal bağlantılıdır (Mucuk 2010).

Örnek 2.1.43: Her bir $n > 1$ için alışılmış topolojiye göre $\mathbb{R}^n$ lokal bağlantılıdır (Bizim 2013).

Örnek 2.1.44: $\mathrm{X} = [0, 1) \cup (1, 2]$ uzayı alışılmış topolojiye göre lokal bağlantılıdır. Fakat bağlantılı değildir (Aslım 2004).

Önerme 2.1.45: Bir X topolojik uzayının lokal bağlantılı olması için gerek ve yeter şart her açık alt kümesinin bağlantılı bileşenlerinin açık olmasıdır (Mucuk 2010).

Sonuç 2.1.46: Lokal bağlantılı olan bir topolojik uzayın bağlantılı bileşenleri hem açık hem de kapalıdır (Mucuk 2010).

Teorem 2.1.47: Lokal bağlantılı bir uzayın sürekli ve açık bir fonksiyon altındaki görüntüsü de lokal bağlantılıdır (Aslım 2004).

Tanım 2.1.48 (Tam Bağlantısız Uzay): Bir X topolojik uzayının her bağlantılı bileşeni bir tek elemandan oluşuyor ise bu uzaya tam bağlantısız uzay denir (Mucuk 2010).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Doku Uzayları

Tanım 3.1.1 (Doku Uzayı): S bir küme olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}(S)$, S nin dokulanması olarak adlandırılır ve S ye $\mathcal{L}$ tarafından dokulanmıştır denir (Brown 1993).

(1) $(\mathcal{L}, \subseteq)$, S ve $\emptyset$ yi kapsayan bir tam örgüdür ve tüm I indeks kümeleri için, $i \in$ I ve $A_i \in \mathcal{L}$ olmak üzere $\mathcal{L}$ deki $\bigwedge_{i\in I} A_i$ ve $\bigvee_{i\in I} A_i$ birleşimleri, $\mathcal{P}(S)$ deki birleşim ve kesişim işlemleri ile bağlantılıdır.

$\bigwedge_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} A_i$, tüm I lar çin

$\bigvee_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} A_i$, tüm sonlu I lar için.

2) $\mathcal{L}$ tamamen dağılımlıdır. Yani her I indis kümesi, $i \in$ I ve J_i indis kümesi için $j \in J_i$ ve $A_i^j \in \mathcal{L}$ olmak üzere,

$$\bigcap_{i\in I} \bigvee_{j\in J_i} A_i^j = \bigvee_{\gamma\in\prod_{i\in I} J_i} \bigwedge_{i\in I} A_{\gamma(i)}^i$$

dir.

3) $\mathcal{L}$, S nin noktalarını ayırır. Yani $s_1, s_2 \in S$ ve $s_1 \neq s_2$ olmak üzere $s_1 \in A$, $s_2 \notin A$ veya $s_2 \in A$, $s_1 \notin A$ olacak şekilde bir $A \in \mathcal{L}$ vardır.

Eğer S, $\mathcal{L}$ tarafından dokulanmış ise $(S, \mathcal{L})$ doku uzayı ya da kısaca doku olarak adlandırılır (Brown 1993a).

Tanım 3.1.2 (p-küme): $(S, \mathcal{L})$ bir doku uzayı ve her $s \in S$ için $P_s = \bigcap\{A \in \mathcal{L} : s \in A\}$ olsun. P_s kümesine $p - küme$ denir.

Kısacası P_s, s yi içeren $\mathcal{L}$'nin en küçük elemanıdır ve $s \to P_s$ fonksiyonu $\mathcal{L}$ deki S nin doğal bir gömülmesidir (Brown 1993a).

Tanım 3.1.3 (q-küme): $(\mathrm{S}, \mathcal{L})$ bir doku uzayı ve her $s \in S$ için $Q_s = \bigvee\{A \in \mathcal{L}: s \notin A\} = \bigvee\{P_u: u \in S, P_s \nsubseteq P_u\}$ olsun. Q_s kümesine $q - küme$ denir (Brown 1993a).

Tanım 3.1.4 (Tümleyenli Doku Uzayı): $(S, \mathcal{L})$ bir doku uzayı ve $k: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ bir dönüşüm olsun. Eğer k dönüşümü,

(i) $\forall P \in \mathcal{L}, k^2(P) = P$
(ii) $\mathcal{L}$ içerisindeki $P \subseteq Q$ için $k(Q) \subseteq k(P)$

şartlarını sağlıyorsa, $k: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ dönüşümüne $(S, \mathcal{L})$ üzerinde bir tümleyen ve $(S, \mathcal{L}, k)$ uzayına tümleyenli doku uzayı denir (Brown 1993a).

Örnek 3.1.5:

(1) Bir X kümesi ve $Y \subseteq X$ için $\pi(Y) = X \setminus Y$ ile tanımlı olmak üzere $(X, P(X), \pi)$ bir tümleyenli dokudur.
(2) $L = (0, 1]$, $\mathcal{L} = \{(0, r]: r \in [0,1]\}$ ve $\lambda([0, r]) = (0, 1 - r]$, $r \in [0,1]$ alalım. $(L, \mathcal{L}, \lambda)$ bir tümleyenli dokudur.
(3) $M = [0,1]$, $\omega = \{[0, t]: t \in [0,1]\} \cup \{[0, t): t \in [0,1]\}$, $\mu([0, t]) = [0, 1 - t)$ ve $\mu([0, t)) = [0,1 - t], t \in [0,1]$ olsun. (M, ω, μ) bir doku uzayıdır (Brown and Diker 1998a).

Tanım 3.1.6 (Çarpım Dokusu): $\{(S_j, \mathcal{L}_j): j \in J\}$ dokuların bir ailesi ve $S = \prod_{j \in J} S_j$ kümesi $(S_j)_{j \in J}$ kümelerinin kartezyen çarpımı olsun. Şimdi $k \in J$ ve $A \subseteq S_k$ için

$$Y_j = \begin{cases} A\,, & j = k \\ S_j\,, & j \neq k \end{cases}$$

olmak üzere, $E(k, A) = \prod_{j \in J} Y_j$ olsun. Şimdi de

$$\varepsilon = \left\{ \bigcup_{k \in K} E(k, L_k) : K \subseteq J, L_k \in \mathcal{L}_k \right\}$$

olarak tanımlansın. $\mathcal{L}$, ε kümesinin elemanlarının keyfi arakesitinden oluşsun. $\mathcal{L}$ ailesi, S kümesi üzerinde bir doku tanımlar. Bu tanımlanan, $(S, \mathcal{L})$ dokusuna $\{(S_j, \mathcal{L}_j) : j \in J\}$ ailesinin çarpım dokusu denir ve $\mathcal{L} = \otimes_{j \in J} \mathcal{L}_j$ ile gösterilir (Brown and Ertürk 2000a).

Tanım 3.1.7 (Molekül): $M \neq \emptyset$, $\mathcal{L}$ nin bir elemanı olmak üzere eğer her $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$ için $M \subseteq L_1 \cup L_2$ iken $M \subseteq L_1$ ya da $M \subseteq L_2$ oluyorsa M ye $\mathcal{L}$ nin molekülü denir.

Burada açıkça görülüyor ki $\{P_s : s \in S\}, \mathcal{L}$ için bir taban olan $\mathcal{L}$ nin moleküllerinin kümesidir ve aşağıdaki şekilde gösterilir.

$L = \bigvee_{s \in L} P_s = \bigcup_{s \in L} P_s$, $\forall L \in \mathcal{L}$ (Brown 1993b).

Tanım 3.1.8 (Dibağıntı): (S,$\mathcal{L}$) ve $(T, \mathcal{T})$ doku uzayları ve $\mathcal{P}(S) \otimes \mathcal{T}$ ifadesi $(S, \mathcal{P}(S))$ ve $(T, \mathcal{T})$ dokuların çarpım dokusu olsun. $s \in S$ ve $t \in \mathcal{T}$ için

$$\bar{P}_{s \times t} = \{s\} \times P_t \text{ ve } \bar{Q}_{s \times t} = (S \setminus \{s\} \times T) \cup (S \times Q_t)$$

şeklinde tanımlansın.

(1) $r \not\subseteq \bar{Q}_{(s,t)}, P_{s'} \not\subseteq Q_s \Rightarrow r \not\subseteq \bar{Q}_{(s',t)}$,

(2) $r \not\subseteq \bar{Q}_{(s,t)} \Rightarrow P_s \not\subseteq Q_{s'}, r \not\subseteq \bar{Q}_{(s',t)}$ olacak şekilde bir $s' \in S$ vardır.

Yukarıdaki şartları sağlayan $r \in \mathcal{P}(S) \otimes T$ kümesine $(S, \mathcal{L})$ dokusundan $(T, \mathcal{T})$ dokusuna tanımlı bir bağıntı denir (Brown *et al.* 2004a).

Tanım 3.1.9 (Kobağıntı): (S,$\mathcal{L}$) ve $(T, \mathcal{T})$ doku uzayları ve $\mathcal{P}(S) \otimes \mathcal{T}$ ifadesi $(S, \mathcal{P}(S))$ ve $(T, \mathcal{T})$ dokuların çarpım dokusu olsun. $s \in S$ ve $t \in \mathcal{T}$ için

$$\bar{P}_{s\times t} = \{s\} \times P_t \text{ ve } \bar{Q}_{s\times t} = (S \setminus \{s\} \times T) \cup (S \times Q_t)$$

şeklinde tanımlansın.

(1) $\bar{P}_{(s,t)} \not\subseteq R, P_s \not\subseteq Q_{s'} \Rightarrow \bar{P}_{(s',t)} \not\subseteq R,$

(2) $\bar{P}_{(s,t)} \not\subseteq R \Rightarrow P_{s'} \not\subseteq Q_s, \bar{P}_{(s',t)} \not\subseteq R$ olacak şekilde bir $s' \in S$ vardır.

Yukarıdaki şartları sağlayan $R \in \mathcal{P}(S) \otimes \mathcal{T}$ kümesine $(S, \mathcal{L})$ dokusundan $(T, \mathcal{T})$ dokusuna tanımlı bir kobağıntı denir (Brown *et al.* 2004a).

Tanım 3.1.10. (Dibağıntı): $r, (S, \mathcal{L})$ doku uzayından $(T, \mathcal{T})$ doku uzayına tanımlı bir bağıntı ve $R, (S, \mathcal{L})$ doku uzayından $(T, \mathcal{T})$ doku uzayına tanımlı bir kobağıntı ise (r, R) ikilisine $(S, \mathcal{L})$ dokusundan $(T, \mathcal{T})$ dokusuna tanımlı bir dibağıntı denir. Dibağıntılar $(r, R): (S, \mathcal{L}) \to (T, \mathcal{T})$ şeklinde gösterilir (Brown *et al.* 2004a).

Tanım 3.1.11. (Bağıntının Tersi): $(S, \mathcal{L})$ ve $(T, \mathcal{T})$ doku uzayları ve $r, (S, \mathcal{L})$ doku uzayından $(T, \mathcal{T})$ doku uzayına bir bağıntı olmak üzere

$$r^{\leftarrow} = \bigcap \{\bar{Q}_{(t,s)}: r \not\subseteq \bar{Q}_{(s,t)}\}$$

şeklinde tanımlanan kobağıntıya r bağıntısının tersi denir (Brown *et al.* 2004a).

Tanım 3.1.12. (Kobağıntının Tersi): $(S,\mathcal{L})$ ve $(T,\mathcal{T})$ doku uzayları ve R, $(S,\mathcal{L})$ doku uzayından $(T,\mathcal{T})$ doku uzayına tanımlanan bir kobağıntı olmak üzere,

$$R^{\leftarrow} = \bigvee\{\bar{P}_{(t,s)} : \bar{P}_{(s,t)} \not\subseteq R\}$$

şeklinde tanımlanan bağıntıya R kobağıntısının tersi denir (Brown *et al.* 2004a).

Tanım 3.1.13. (Dibağıntının Tersi): $(S,\mathcal{L})$ ve $(T,\mathcal{T})$ doku uzayları ve (r,R), $(S,\mathcal{L})$ doku uzayından $(T,\mathcal{T})$ doku uzayına bir dibağıntı olmak üzere $(r,R)^{\leftarrow} = (R^{\leftarrow}, r^{\leftarrow})$ şeklinde tanımlı olan dibağıntıya, (r,R) dibağıntısının tersi denir (Brown *et al.* 2004a).

Tanım 3.1.14. (Difonksiyon): (f,F), $(S,\mathcal{L})$ 'den $(T,\mathcal{T})$ 'ya bir dibağıntı olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa, (f,F) dibağıntısına difonksiyon denir ve (f,F) : $(S,\mathcal{L}) \to (T,\mathcal{T})$ ya da ile gösterilir.

(1) $s, s' \in S$ için $P_s \not\subseteq Q_{s'}$ ise $f \not\subseteq \bar{Q}_{(s,t)}$ ve $\bar{P}_{(s',t)} \not\subseteq F$ olacak şekilde bir $t \in T$ vardır.
(2) $t, t' \in T$ ve $s \in S$ için $f \not\subseteq \bar{Q}_{(s,t)}$ ve $\bar{P}_{(s,t')} \not\subseteq F$ ise $P_{t'} \not\subseteq Q_t$ dir (Brown *et al.* 2004a).

Tanım 3.1.15. (Birebirlik): $(f,F)\colon (S,\mathcal{L}) \to (T,\mathcal{T})$ bir difonksiyon olsun. Eğer $s, s' \in S$ ve $t \in T$ için $f \not\subseteq \bar{Q}_{(s,t)}$ ve $\bar{P}_{(s',t)} \not\subseteq F$ ise $P_s \not\subseteq Q_{s'}$ oluyorsa (f,F) difonksiyonuna birebir denir (Brown *et al.* 2004).

Tanım 3.1.16. (Örtenlik): $(f,F)\colon (S,\mathcal{L}) \to (T,\mathcal{T})$ bir difonksiyon olsun. Eğer $t, t' \in T$ ve $\exists\, s \in S$ için $P_t \not\subseteq Q_{t'}$ ise $f \not\subseteq \bar{Q}_{(s,t')}$ ve $\bar{P}_{(s,t)} \not\subseteq F$ oluyorsa (f,F) difonksiyonuna örten denir (Brown *et al.* 2004).

Tanım 3.1.17. (Bağıntının Kesiti): (r,R), $(S,\mathcal{L})$ doku uzayından $(T,\mathcal{T})$ doku uzayına bir dibağıntı ve $A \in \mathcal{L}$ olsun. Bu durumda,

$$\mathrm{r}^{\rightarrow}\mathrm{A} = \bigcap \left\{ Q_t : \forall s, r \nsubseteq \bar{Q}_{(s,t)} \Longrightarrow A \subseteq Q_s \right\} \in \mathcal{T}$$

şeklinde tanımlanan $r^{\rightarrow}A$ kümesine r bağıntısının A-kesiti denir (Brown *et al.* 2004a).

Tanım 3.1.18. (Kobağıntının Kesiti): $(\mathrm{r}, \mathrm{R}), (\mathrm{S}, \mathcal{L})$ doku uzayından $(T, \mathcal{T})$ doku uzayına bir dibağıntı ve $A \in \mathcal{L}$ olsun. Bu durumda,

$$R^{\rightarrow}A = \bigvee \left\{ P_t : \forall s, \bar{P}_{(s,t)} \nsubseteq R \Longrightarrow P_s \subseteq A \right\} \in \mathcal{T}$$

şeklinde tanımlanan $R^{\rightarrow}A$ kümesine R kobağıntısının A-kesiti denir (Brown *et al.* 2004a).

Tanım 3.1.19. (Bağıntının Önkesiti): $(f, F), (S, \mathcal{L})$ doku uzayından $(T, \mathcal{T})$ doku uzayına bir difonksiyon ve $B \in \mathcal{T}$ olsun. Bu durumda,

$$(\mathrm{r}^{\leftarrow})^{\rightarrow}\mathrm{B} = \bigvee \left\{ P_s : \forall s, r \nsubseteq \bar{Q}_{(s,t)} \Longrightarrow P_t \subseteq B \right\} \in \mathcal{L}$$

şeklinde tanımlanan $r^{\leftarrow}$ kobağıntısının B-kesitine, r bağıntısının B-önkesiti denir ve $r^{\leftarrow}B$ biçiminde gösterilir (Brown *et al.* 2004a).

Tanım 3.1.20. (Kobağıntının Önkesiti): $(f, F), (S, \mathcal{L})$ doku uzayından $(T, \mathcal{T})$ doku uzayına bir difonksiyon ve $B \in \mathcal{T}$ olsun. Bu durumda,

$$(R^{\leftarrow})^{\rightarrow}B = \bigcap \left\{ Q_s : \forall s, \bar{P}_{(s,t)} \nsubseteq R \Longrightarrow B \subseteq Q_t \right\} \in \mathcal{L}$$

şeklinde tanımlanan $R^{\leftarrow}B$ bağıntısının B-kesitine, R kobağıntısının B-önkesiti denir ve $R^{\leftarrow}B$ biçiminde gösterilir (Brown *et al.* 2004a).

Tanım 3.1.21. (Görüntü): $(f,F),(S,\mathcal{L})$ doku uzayından $(T,\mathcal{T})$ doku uzayına bir difonksiyon ve $A\in\mathcal{L}$ olsun. f bağıntısının A-kesitine, A kümesinin (f,F) altındaki görüntüsü denir ve $f^{\rightarrow}A$ şeklinde gösterilir (Brown *et al.* 2004a).

Tanım 3.1.22. (Ters Görüntü): $(f,F),(S,\mathcal{L})$ doku uzayından $(T,\mathcal{T})$ doku uzayına bir difonksiyon ve $B\in\mathcal{T}$ olsun. f bağıntısının B-önkesitine, B kümesinin (f,F) altındaki ters görüntüsü denir ve $f^{\leftarrow}B$ şeklinde gösterilir (Brown *et al.* 2004a).

Tanım 3.1.23. (Kogörüntü): $(f,F),(S,\mathcal{L})$ doku uzayından $(T,\mathcal{T})$ doku uzayına bir difonksiyon ve $A\in\mathcal{L}$ olsun. F bağıntısının A-kesitine, A kümesinin (f,F) altındaki kogörüntüsü denir ve $F^{\rightarrow}A$ şeklinde gösterilir (Brown *et al.* 2004a).

Tanım 3.1.24. (Ters Kogörüntü): $(f,F),(S,\mathcal{L})$ doku uzayından $(T,\mathcal{T})$ doku uzayına bir difonksiyon ve $B\in\mathcal{T}$ olsun. F kobağıntısının B-önkesitine, B kümesinin (f,F) altındaki ters kogörüntüsü denir ve $F^{\leftarrow}B$ şeklinde gösterilir (Brown *et al.* 2004a).

Tanım 3.1.25: $(S,\mathcal{L})$ bir doku uzayı ve $A\subseteq S$ olsun. Bu durumda,

i)

$$\lambda(A)=\bigvee_{s\in A}P_s$$

şeklinde tanımlanır. Buradan $\lambda(A)$, A'yı içeren $\mathcal{L}$'nin elemanlarının en küçüğüdür.

ii) Eğer $\lambda(A)=\bigcup_{s\in A}P_s$ ise A'ya doymuş denir (Brown 1993b).

Şimdi $(S_j,\mathcal{L}_j), j=1,2$ için doku uzayı ve $f\colon S_1\rightarrow S_2$ bir dönüşüm olsun. λ_i ler tanım 3.1.25'de ki $\mathcal{L}_i$ ler için tanımlandığı durumda

$$\check{f}^{-1}\colon\mathcal{L}_2\rightarrow\mathcal{L}_1$$

fonksiyonu $\check{f}^{-1}(L) = \lambda_1\big(f^{-1}(L)\big),\ \forall L \in \mathcal{L}_2$ olarak tanımlansın.

Teorem 3.1.26: f: $S_1 \to S_2$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler birbirine eşittir.

(1) $\mathrm{f}^{-\mathbf{1}}(\mathrm{L}) \in \mathcal{L}_1, \forall L \in \mathcal{L}_2$

(2) $\tilde{f}^{-1}(L) = f^{-1}(L), \forall L \in \mathcal{L}_2$ (Brown 1993b).

Tanım 3.1.27: $Z \subseteq S$ olmak üzere, sırasıyla Z nin dışı ve kapanışı;

$$ext(Z) = \bigvee\{G: G \in \tau\ ve\ G \cap Z = \emptyset\}$$

$$[Z] = \bigcap\{F: Z \subseteq F, F \in \kappa\}$$

olarak tanımlanır (Brown 1993b).

Lemma 3.1.28: Her $\propto \in A$ için $J_\propto \subseteq$ I ve $\forall\, j \in J_\propto$ için $L_j^\propto \in \mathcal{L}_\propto$ olsun.

$$E_\propto = \cup_{j \in J_\propto} E\big(j, L_j^\propto\big) \in \varepsilon\ , \propto \in A,$$

$$\bigvee_{\propto \in A} E_\propto = \bigcup_{j \in \coprod_\propto J_\propto} E\big(j, \vee\{L_j^\propto : j \in J_\propto\}\big)$$

olarak tanımlanır (Brown 1993b).

Tanım 3.1.29 (Ditopolojik Doku Uzayı): $(S, \mathcal{L})$ bir doku olmak üzere, $\mathcal{L}$ nin alt kümelerinden aşağıdaki şartları sağlayan (τ, κ) çiftine $(S, \mathcal{L})$ üzerinde ditopoloji denir.

1)$\tau \subseteq \mathcal{L}$ için

a. $S, \emptyset \in \tau$

b. $G_1, G_2 \in \tau \Rightarrow G_1 \cap G_2 \in \tau$

c. $G_\alpha \in \tau, \alpha \in A \Rightarrow \bigvee_{\alpha \in A} G_\alpha \in \tau$

τ nun elemanları açık kümeler olarak isimlendirilir.

2) $\kappa \subseteq \mathcal{L}$ için

a. $S, \emptyset \in \kappa$

b. $K_1, K_2 \in \kappa \Rightarrow K_1 \cup K_2 \in \kappa$

c. $K_\alpha \in \kappa, \alpha \in A \Rightarrow \bigcap_{\alpha \in A} K_\alpha \in \kappa$

κ nın elemanları kapalı kümeler olarak isimlendirilir (Brown 1993b).

Tanım 3.1.30 (Tümleyenli Ditopoloji): Eğer τ ve κ, $\kappa = \{k(G): G \in \tau\}$ eşitliğini sağlıyorsa bu durumda $(\mathcal{L}, \tau, \kappa, k)$ ya tümleyenli ditopolojik doku uzayı denir (Brown 1993b).

Tanım 3.1.31 (Taban, Alttaban, Kotaban, Koalttaban): (τ, κ), $(S, \mathcal{L})$ üzerinde bir ditopoloji olmak üzere,

1) $\beta \subseteq \tau$ için τ nun her kümesi, β daki kümelerin supremumu olarak yazılabiliyorsa, β ya τ için bir taban denir.

2) $\beta \subseteq \kappa$ için κ nın her kümesi β daki kümelerin arakesiti olarak yazılabiliyorsa, β ya κ için bir taban denir.

3) $\beta \subseteq \tau$ olmak üzere, β nın sonlu arakesitlerinin kümesi, τ için bir taban oluyorsa β ya τ için bir alt taban denir.

4) $\beta \subseteq \kappa$ olmak üzere, β nın sonlu birleşimlerinin kümesi, κ için bir ko-taban oluyorsa β ya κ için bir alt taban denir. Tümleyenli ditopoloji olması durumunda tümleyen

dönüşümü, τ için bir tabanı(alttabanı), κ için bir tabana(alt tabana) taşır (Brown *et al.* 2004b).

Tanım 3.1.32 (Disüreklilik): S_j üzerinde $(\mathcal{L}_j, \tau_j, \kappa_j)$ bir ditopolojik doku uzayı olsun. $j = 1{,}2$ için $f: S_1 \to S_2$ bir fonksiyon olsun. Eğer,

(1) $\check{f}^{-1}(G) \in \tau_1, \forall\, G \in \tau_2$ ve
(2) $\check{f}^{-1}(F) \in \kappa_1, \forall\, F \in \kappa_2$

şartları sağlanıyorsa f ye süreklidir denir (Brown 1993b).

Tanım 3.1.33 (Dihomeomorfizm): j = 1,2 için $(\mathcal{L}_j, \tau_j, \kappa_j)$, S_j üzerinde ditopolojik doku uzayları ve $(f, F): (S_1, \mathcal{L}_1) \to (S_2, \mathcal{L}_2)$ bir difonksiyon olsun. Eğer (f, F) difonksiyonu birebir, örten, ikili sürekli ve tersi ikili sürekli ise (f, F) difonksiyonuna dihomeomorfizm denir (Brown *et al.* 2004b).

Tanım 3.1.34 (Açık, Koaçık Difonksiyon): j = 1,2 için $(\mathcal{L}_j, \tau_j, \kappa_j), S$ üzerinde ditopolojik doku uzayları ve $(f, F): (S_1, \mathcal{L}_1) \to (S_2, \mathcal{L}_2)$ bir difonksiyon olsun. Eğer her $G \in \tau_1$ için $f^{\to}G \in \tau_2$ oluyor ise (f, F) difonksiyonuna açık difonksiyon denir. Benzer şekilde her $G \in \tau_1$ için $F^{\to}G \in \tau_2$ oluyor ise (f, F) difonksiyonuna ko-açık difonksiyon denir (Brown *et al.* 2004b).

Tanım 3.1.26 (İki Ditopoloji Arasındaki Daha Kaba Olma): $(\mathcal{L}, \tau, \kappa)$ ve $(\mathcal{L}', \tau', \kappa')$ S üzerinde iki ditopolojik uzay olsun. Eger $\tau \subseteq \tau'$ ve $\kappa \subseteq \kappa'$ ise (τ, κ) ditopolojisi, (τ', κ') ditopolojisinden daha kabadır denir (Brown 1993b).

Tanım 3.1.27 (Çarpım Ditopolojisi): $\forall\, i \in \mathrm{I}$ için S_i üzerinde $(\mathcal{L}_i, \tau_i, \kappa_i)$ ditopolojik uzaylar olsun ve $(S, \mathcal{L})$, $(S_i, \mathcal{L}_i)$ ailelerinin çarpım dokusu olsun. Eger $(S, \mathcal{L})$ üzerindeki τ, $s_\tau = \{E(i, G_i): i \in \mathrm{I}, G_i \in \tau_i\}$ alt tabanına ve κ, $s_\kappa = \{E(i, F_i): i \in \mathrm{I}, F_i \in \kappa_i\}$ alt tabanına sahipse $(\mathcal{L}, \tau, \kappa)$ ya $(S, \mathcal{L})$ nin çarpım ditopolojisi denir (Brown 1993b).

Tanım 3.1.28 (İzdüşüm Fonksiyonu): S_i üzerindeki S nin izdüşüm fonksiyonu olarak belirtilen π_i,

$$\tilde{\pi}_i{}^{-1}(L) = \pi_i{}^{-1}(L) = E(i, L), \forall L \in \mathcal{L}$$

şeklinde tanımlanır (Brown 1993b).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Dibağlantısızlık

Tanım 4.1.1 (Diparçalanış): $(S,\mathcal{L})$ bir doku uzayı ve $\emptyset \neq Z \subseteq S$ olsun. $\{A,B\} \subseteq P(S)$ seçelim. Eğer $A \cap Z \neq \emptyset, Z \nsubseteq B$ ve $A \cap Z = B \cap Z$ ise $\{A,B\}$ ye Z nin parçalanışı denir.

Burada A ve B nin rollerini değiştirebiliriz. Bunun yerine Z nin $\{A,B\}$ parçalanışını $B \cap Z \neq \emptyset$, $Z \nsubseteq A$ olarak da yazılır. Eğer $\mathcal{L} = P(S)$ alırsak $\{A, S \setminus B\}$ ve $\{S \setminus A, B\}$ nin sıralama anlamında Z nin parçalanışı olduğunu kolaylıkla görülür. Örneğin $Z \subseteq A \cup (S \setminus B), Z \cap A \neq \emptyset, Z \cap (S \setminus B) \neq \emptyset$ ve $Z \cap A \cap (S \setminus B) = \emptyset$ yazılır (Diker 1999).

Tanım 4.1.2 (Dibağlantısızlık): $(\mathcal{L},\tau,\kappa)$, S üzerinde bir ditopolojik doku uzayı ve $Z \subseteq S$ olsun. Eğer $G \in \tau$ ve $F \in \kappa$ ile $\{G,F\}$ parçalanışı yoksa Z ye bağlantılıdır denir.

$S^* = \{0,1\}$ ve $\mathcal{L}^* = P(S^*)$ olsun. $\tau^* = \kappa^* = \{S^*, \{0\}, \emptyset\}$ için S^* üzerinde $(\mathcal{L}^*, \tau^*, \kappa^*)$ ditopolojisini göz önüne alalım. S den S^* a tüm sürekli fonksiyonların ailesini $C(S,S^*)$ ile tanımlayalım (Diker 1999).

Önerme 4.1.3:

i) S bağlantılıdır ancak ve ancak $\tau \cap \kappa = \emptyset$.
ii) Eğer tüm $s, r \in S$, $s \neq r$ için $s, r \in Z$ ile $Z \subseteq S$ bağlantılı ise S de bağlantılıdır.
iii) S bağlantılıdır ancak ve ancak tüm sürekli $f \in C(S,S^*)$ fonksiyonları sabittir (Diker 1999).

İspat:

i) $\tau \cap \kappa \neq \emptyset$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $H \neq S$ ve $H \neq \emptyset$ olacak şekilde bir $H \in \tau \cap \kappa$ kümesi seçebiliriz. Buradan

$$H \cap S \neq \emptyset\,, S \nsubseteq H \text{ ve } H \cap S = H \cap S$$

olduğu kolaylıkla görülür. Dolayısıyla $\{H, H\}$, S nin bir parçalanışıdır ve bu bir çelişkidir. Tersine eğer $\tau \cap \kappa = \{S, \emptyset\}$ seçilirse S bağlantılı olur. Diğer bir ifadeyle, $G = F \in \tau \cap \kappa \neq \{S, \emptyset\}$ olacak şekilde S nin $\{G, F\}$ parçalanışını buluruz.

ii) S nin bağlantısız olduğunu kabul edelim. i) den $\tau \cap \kappa \neq \emptyset$ ve $H \in \tau \cap \kappa$ alalım. Buradan $H \neq S$ ve $H \neq \emptyset$ alınır. $s, r \in S$ için $s \notin H$ ve $r \in H$ olacak şekilde s ve r elemanlarını seçilir. Hipotezden $s, r \in Z$ iken Z bağlantııdır. $H \cap Z \neq \emptyset\,, Z \nsubseteq H$ için $\{H, H\}$, Z nin bir parçalanışıdır ve bu Z nin bağlantılı olduğuyla çelişir.

iii) S bağlantılı olsun. i) den $\tau \cap \kappa = \{S, \emptyset\}$ yazılır. Eğer $f: S \to S^*$ sürekli bir fonksiyon ise $\check{f}^{-1}(\{0\}) = S$ ya da $\emptyset$ dir. Buradan f sabittir. Tersine her sürekli fonksiyonun sabit ve S nin bağlantısız olduğunu kabul edelim. $H \in \tau \cap \kappa$ seçelim. Buradan $H \neq S$ ve $H \neq \emptyset$ yazılır. $f: S \to S^*$ $f(H) = \{\emptyset\}$ ve $\forall\, s \notin H$ için $f(s) = 1$ fonksiyonunu tanımlayalım. Burada f sürekli fonksiyonu sabit değildir.

Not 4.1.4: $\forall\, s \in S$ için $\{s\}$ tek nokta kümeleri bağlantılıdır. Eğer $(G, F) \in \tau \times \kappa, \{s\} \cap G \neq \emptyset$ ve $\{s\} \nsubseteq F$ ise $\{s\} \cap G = \{s\} \neq \{s\} \cap F$ yazır. O halde $\{s\}$ bağlantılıdır (Diker 1999).

Örnek 4.1.5:

(1) S^* üzerinde $(\mathcal{L}^*, \tau^*, \kappa^*)$ ditopolojik uzayı bağlantılı değildir.

(2) $S = \mathbb{R}$ ve $\mathcal{L} = \{(-\infty, a): a \in \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, b]: b \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}, \emptyset\}$ olsun. $\tau = \{(-\infty, a): a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}, \emptyset\}$ ve $\kappa = \{(-\infty, b]: b \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}, \emptyset\}$ için $(\mathcal{L}, \tau, \kappa)$ bağlantılıdır (Diker 1999).

Teorem 4.1.6: $\{Z_i: i \in \mathrm{I}\}$, $\mathcal{L}$ nin bağlantılı alt kümelerinin bir ailesi olsun. Eğer $\bigcap_{i\in\mathrm{I}} Z_i \neq \emptyset$ ise $\bigvee_{i\in\mathrm{I}} Z_i$ de bağlantılı bir kümedir (Diker 1999).

İspat: $Z = \bigvee_{i\in\mathrm{I}} Z_i$ nin bağlantısız olduğunu kabul edelim.$(G, F) \in \tau \times \kappa$ için $\{G, F\}$, Z nin bir parçalanışı olsun. Bu durumda $Z \cap G \neq \emptyset, Z \nsubseteq F$ ve $Z \cap G = Z \cap F$ yazılır. Buradan $\forall\, i \in \mathrm{I}$ için $Z_i \cap F = Z_i \cap G$ olur. Her bir $i \in \mathrm{I}$ için Z_i ler bağlantılı olduğundan $Z_i \cap G = \emptyset$ ya da $Z_i \subseteq F$ yazılır. Şimdi $s \in \bigcap_{i\in\mathrm{I}} Z_i$ seçelim. Buradan $s_i \in G$ ya da $s \notin F$ olur. Başka bir ifadeyle eğer $s \notin G$ ve $s \in F$ ise $s \notin Z \cap G$ ve $s \in Z \cap F$ yazılır. Buradan $Z \cap G \neq Z \cap F$ bulunur ki bu bir çelişkidir. $s \in G$ olduğunu varsayalım. $\forall\, i \in \mathrm{I}$ için $Z_i \cap G \neq \emptyset$ olur. Dolayısıyla $\forall\, i \in \mathrm{I}$ için $Z_i \subseteq F$ ve buradan $\bigvee_{i\in\mathrm{I}} Z_i = Z \subseteq F$ çelişkisi ortaya çıkar. Şimdi $s \notin F$ olduğunu kabul edelim. $\forall\, i \in \mathrm{I}$ için $s \in Z_i$ ve $Z_i \nsubseteq F$ dir. Dolayısıyla $\forall\, i \in \mathrm{I}$ için $Z_i \cap G = \emptyset$ yazılır. $\mathcal{L}$ tamamen dağılımlı olduğundan

$G \cap (\bigvee_{i\in\mathrm{I}} Z_i) = \bigvee_{i\in\mathrm{I}}(G \cap Z_i) = \emptyset$ ve $G \cap Z = \emptyset$ yazılır ki bu bir çelişkidir. O halde ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.7: $Z \subseteq S$ bağlantılı bir küme olmak üzere $Z \subseteq A \subseteq [Z]$ ve $ext(Z) \cap A = \emptyset$ olsun. Bu durumda A bağlantılıdır (Diker 1999).

İspat: A nın bağlantısız olduğunu kabul edelim. Bu durumda $G \in \tau$ ve $F \in \kappa$ için A nın bir $\{G, F\}$ parçalanışı vardır. Parçalanışın tanımından $G \cap A \neq \emptyset\,, A \nsubseteq F$ ve $G \cap A = F \cap A$ yazılır. Aynı zamanda $Z \subseteq A$ ise $G \cap Z = G \cap F$ yazılır. Hipotezde Z bağlantılı verildiğinden burada $Z \cap G = \emptyset$ ya da $Z \subseteq F$ yazılır. $Z \cap G = \emptyset$ den $G \subseteq ext(Z)$ olur. $ext(Z) \cap A = \emptyset$ ve $G \cap A = \emptyset$ olur ki bu bir çelişkidir. Şimdi $Z \subseteq F$ olduğunu varsayalım. $F \in \kappa$ olduğundan $[Z] \subseteq F$ dir. Bu yüzden $A \subseteq F$ olur.

Tanım 4.1.8 (Diayrılmış Kümeler): Eğer $A \cap [B]^{\tau} = B \cap [A]^{\kappa} = \emptyset$ ise $(S, \mathcal{L}, \tau, \kappa)$ nın boş olmayan A, B alt kümelerine ayrılmış kümeler denir. Burada A ve B nin rollerinin değiştirebiliriz. Daha doğrusu A, B ayrılmış kümeler ise $B \cap [A]^{\tau} = A \cap [B]^{\kappa} = \emptyset$ dir. Burada $[B]^{\tau}, B$ nin τ ya göre kapanışı ve $[A]^{\kappa}, A$ nın κ ya göre kapanışıdır (Tantawy *et al.* 2014).

Teorem 4.1.9: $A \subseteq C, B \subseteq D$ ve C, D $(S, \mathcal{L}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayının şartları sağlayan ayrılmış öz alt kümeleri olsun. Bu durumda A, B ayrılmış kümelerdir (Tantawy *et al.* 2014).

İspat: $A \subseteq C$ olduğu için $[A]^{\kappa} \subseteq [C]^{\kappa}$ yazılır. Buradan $B \cap [A]^{\kappa} = D \cap [A]^{\kappa} \subseteq D \cap [C]^{\kappa} = \emptyset$ olur. Yani $[A]^{\kappa} \cap B = \emptyset$'dir. Benzer şekilde $[B]^{\tau} \cap A = \emptyset$ bulunur. O halde A, B ayrılmış kümelerdir.

Teorem 4.1.10: A ve $B, A \cup B \in \tau \cap \kappa$ olacak şekilde ayrılmış kümeler olsun. Buradan $A(\text{veya } B) \in \tau \cap \kappa$ dır (Tantawy *et al.* 2014).

İspat: $A, B, A \cup B \in \tau \cap \kappa$ olacak şekilde ayrılmış kümeler olsun. Buradan $[A \cup B]^{\tau} = \tau'$ yazılır. $[B]^{\tau} \in \tau'$ olduğu için $([B]^{\tau})' \in \tau$ ve buradan $(A \cup \mathrm{B}) \cap ([B]^{\tau})' \in \tau$ yazılır. $(A \cap ([B]^{\tau})') \cup (B \cap ([B]^{\tau})') \in \tau$ olduğundan $A \in \tau$ dur. $A \cup B \in \kappa$ ve $[A]^{\kappa} \in \kappa$ olduğundan $(A \cup B) \cap [A]^{\kappa} \in \kappa$ olur. Ayrıca $(A \cap [A]^{\kappa}) \cup (B \cap [A]^{\kappa}) \in \kappa$ olduğundan $A \in \kappa$ bulunur. Bu yüzden $A \in \tau \cap \kappa$ dır. Benzer şekilde $B \in \tau \cap \kappa$ bulunur.

Tanım 4.1.11 (Clopen): Hem τ-açık hem de κ-kapalı olarak adlandırdığımız A kümesi clopendir (Tantawy *et al.* 2014).

Teorem 4.1.12: $(S, \mathcal{L}, \tau, \kappa)$ herhangi bir ditopolojik uzay olmak üzere aşağıdaki maddeler birbirine denktir.

1) S bağlantılıdır.

2) $A \in \tau$ ve $B \in \kappa$ olmak üzere S nin $\{A, B\} \subseteq P(S)$ parçalanışı yoktur.

3) S nin clopen olan bir A alt kümesi yoktur.

4) $S, A \in \tau$ ve $B \in \kappa'$ olmak üzere S nin boş olmayan birbirinden farklı A ve B alt kümelerinin birleşimi şeklinde ifade edilemez.

5) $S, A \in \tau'$ ve $B \in \kappa$ olmak üzere S nin boş olmayan birbirinden farklı A ve B alt kümlerinin birleşimi şeklinde ifade edilemez.

6) S, S nin ayrılmış A, B alt kümelerinin birleşimi şeklinde ifade edilemez (Tantawy *et al.* 2014).

İspat:

3)⇒4) $A \cap B = \emptyset$, $A \in \tau$ ve $B \in \kappa'$ olmak üzere $S = A \cup B$ olarak yazılabildiğini varsayalım. $A = B' \in \tau \cap \kappa$ olduğundan bu 3)maddesiyle çelişkilidir. Bu yüzden kabulümüz yanlış olur.

4)⇒5) $A \cap B = \emptyset$, $A \in \tau'$ ve $B \in \kappa$ olmak üzere $S = A \cup B$ olarak yazılabildiğini varsayalım. $A' \in \tau$, $B' \in \kappa', A = B', A' \cap B' = \emptyset$ ve $S = A' \cup B'$ olduğundan bu 4) maddesiyle çelişkidir. Bu yüzden kabulümüz yanlış olur.

5)⇒6) A ve B, S nin ayrılmış iki alt kümesi olmak üzere $S = A \cup B$ olduğunu varsayalım. Buradan $S = A \cup B, A \cap B = \emptyset, A = B'$ ve $B = A'$ yazabiliriz. $A \cap [B]^\tau = \emptyset$ olduğu için $[B]^\tau \subseteq A'$ yazılır. Aynı zamanda $B \subseteq [B]^\tau$ oldğundan $B = [B]^\tau$ olmalıdır. Bu da bize $B \in \tau'$ olduğunu gösterir. Benzer şekilde $A \in \kappa$ olduğunu bulunur. Buradan $S, A \in \tau$ ve $B \in \kappa'$ olmak üzere S nin boş olmayan birbirinden farklı A ve B alt kümelerinin birleşimi şeklinde yazılır. Bu da 5) maddesiyle çelişkilidir. Bu yüzden kabulümüz yanlış olur.

6)⇒1) S nin bağlantısız olduğunu varsayalım. $(A, B) \in \tau \times \kappa$ olmak üzere S nin bir $\{A, B\} \subseteq P(S)$ parçalanışı bulunur. Buradan $A = B \in \tau \cap \kappa$, $A' \in \tau'$, $A \cap [A']^\tau = \emptyset$ ve $A \cup A' = S$ yazılır. Dolayısıyla S , S nin A ve A' gibi ayrılmış iki alt kümesinin birleşimi şeklinde yazılabilir. Bu da 6) maddesiyle çelişkilidir. Bu yüzden kabulümüz yanlış olur.

Teorem 4.1.13: $Z, (S, \mathcal{L}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayının bir altkümesi olsun. Z nin bağlantısız olması için gerek ve yeter şart olmak üzere τ-açık ve κ-açık veya (τ-kapalı ve κ-kapalı) olarak adlandırdığımız en az bir tane birbirinden farklı boş olmayan $A, B \subseteq S$ olacak şekilde öz alt kümelerin olmasıdır. Burada A ve B kümeleri $Z \cap A \neq \emptyset, Z \cap B \neq \emptyset, (Z \cap A) \cap (Z \cap B) = \emptyset$ ve $(Z \cap A) \cup (Z \cap B) = Z$ şartlarını sağlar (Tantawy *et al.* 2014).

Sonuç 4.1.14: $(S, \mathcal{L}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayının boş olmayan ve birbirinden farklı iki alt kümesinin birleşimi bağlantısızdır (Tantawy *et al.* 2014).

Önerme 4.1.15: $A \cup B$ nin herhangi bir $(S, \mathcal{L}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayı içerisindeki bir Z alt kümesinin bağlantısız olması için gerek ve yeter şart $Z \cap A \neq \emptyset, Z \cap B \neq \emptyset, A \cap B \subseteq Z'$ ve $Z \subseteq A \cup B$ şartlarını sağlayan $A \in \tau$-açık ve $B \in \kappa$-açık ya da $A \in \tau$-kapalı ve $B \in \kappa$-kapalı olan S nin A ve B öz alt kümelerinin olmasıdır (Tantawy *et al.* 2014).

Tanım 4.1.16 (Bağlantılı Alt Kümelerin Maksimalı): $(S, \mathcal{L}, \tau, \kappa)$ ditopolojik bir doku uzayı ve $x \in Z$ olmak üzere $Z \subseteq S$ olsun. Z nin x olarak ifade edilen bileşeni, Z nin x i içeren tüm bağlantılı alt kümelerinin maximalıdır ve $C(Z, x)$ olarak gösterilir. Yani

$$C(Z, x) = \vee \{Y \subseteq Z : x \in Y, Y\ bağlantılı\}$$

dir (Tantawy *et al.* 2014).

Teorem 4.1.17: $(S, \mathcal{L}, \tau, \kappa)$ ditopolojik uzayının her bileşeni S nin maximal bağlantılı bir alt kümesidir (Tantawy *et al.* 2014).

Teorem 4.1.18: $(S, \mathcal{L}, \tau, \kappa)$ ditopolojik bir doku uzayı olsun.

1) S nin her noktası S nin tam olarak bir bileşeni tarafından içerilir.
2) S nin herhangi iki bileşeni birbirinden farklıdır (Tantawy *et al.* 2014).

Sonuç 4.1.19: S nin bağlantılı olması için gerek ve yeter şart S nin S üzerinde bir bileşen olmasıdır (Tantawy *et al.* 2014).

Teorem 4.1.20: $(S, \mathcal{L}, \tau, \kappa)$ ditopolojik uzayının her clopen bağlantılı alt kümesi S nin bir bileşenidir (Tantawy *et al.* 2014).

İspat: Z nin $(S, \mathcal{L}, \tau, \kappa)$ ditopolojik uzayının herhangi bir clopen bağlantılı alt kümesi olduğunu varsayalım. Eğer $Z = \emptyset$ ise ispat açıktır. $Z \neq \emptyset$ ise $x \in Z$ olmak üzere Z, x i içeren bağlantılı bir kümedir. Fakat S nin $C(S, x)$ olarak gösterilen x bileşeni x i içeren bağlantılı kümelerin en büyüğü olduğu için $Z \subseteq C(S, x)$ yazılır. Şimdi de $C(S, x) \subseteq Z$ yi yani $C(S, x) \cap Z' = \emptyset$ olduğunu göstermek istiyoruz. Tersine biz $C(S, x) \cap Z' \neq \emptyset$ olduğunu varsayalım. $x \in Z \cap C(S, x)$ olduğundan $Z \cap C(S, x) \neq \emptyset$ dir.

$Z \in \tau \cap \kappa$ olduğu için $Z' \in \tau'$, $Z \in \kappa$, $(C(S, x) \cap Z) \cap (C(S, x) \cap Z') = \emptyset$ ve $(C(S, x) \cap Z) \cup (C(S, x) \cap Z') = C(S, x)$ olur. Buradan $Z \cup Z'$ Teorem 4.1.13 den $C(S, x)$ in bir bağlantısızlığıdır. Bu da $C(S, x)$ in bağlantılı olmasıyla çelişir. O halde $C(S, x) \subseteq Z$ dir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.21: $(S, \mathcal{L}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayının tüm farklı bileşenlerinin kümesi S nin parçalanışıdır (Tantawy *et al.* 2014).

Sonuç 4.1.22: Eğer Z maximal bağlantılı bir küme ise $Z \subseteq S$ bir bileşendir (Diker 1999).

Teorem 4.1.23: Eğer Z bir bileşen ve $ext(Z) = \emptyset$ ise $Z = [Z]$ dir (Diker 1999).

İspat: $s \notin Z$ olsun. Z maximal olduğundan $Z \cup \{s\}$ bağlantılı bir küme olmayabilir. $Z \cup \{s\}$ nin $G \in \tau$ ve $F \in \kappa$ olmak üzere $\{G, F\}$ parçalanışını alalım. Buradan $(Z \cup \{s\}) \cap G \neq \emptyset$, $Z \cup \{s\} \nsubseteq F$ ve $(Z \cup \{s\}) \cap G = (Z \cup \{s\}) \cap F$ yazılır. Z bağlantılı olduğundan $Z \cap G = Z \cap F$, $Z \cap G = \emptyset$ ya da $Z \subseteq F$ yazılır. $Z \cap G = \emptyset$ olduğunu kabul edelim. Buradan $s \in G$ ve $s \in ext(Z)$ dir. Fakat bu bir çelişkidir. Çünkü $ext(Z) = \emptyset$ dir. Eğer $Z \subseteq F$ ise $s \notin F$ ve buradan $s \notin Z$ yazılır.

Teorem 4.1.24: Z , S kümesindeki $(\mathcal{L}, \tau, \kappa)$ ditopolojik uzayında bağlantılı bir küme ve S' üzerindeki $(\mathcal{L}', \tau', \kappa')$ ditopolojik doku uzayında S nin Teorem3.1.26 daki eşit şartlardan birini sağlayan sürekli fonksiyonlardan biri f olsun. Bu durumda $f(Z)$, S de bağlantılıdır (Diker 1999).

İspat: Farzedelim ki $f(Z)$ bağlantılı olsun. $G \in \tau'$ ve $F \in \kappa'$ için $f(Z)$ nin bir parçalanışı olan bir $\{G, F\}$ vardır. Buradan $f(Z) \cap G \neq \emptyset$, $f(Z) \nsubseteq F$ ve $f(Z) \cap G = f(Z) \cap F$ yazılır. $\check{f}^{-1}(G) = f^{-1}(G)$ ve $\check{f}^{-1}(F) = f^{-1}(F)$ olduğundan $\{f^{-1}(G), f^{-1}(F)\}$ de Z nin bir parçalanışıdır. $f^{-1}(G) \in \tau$ ve $f^{-1}(F) \in \kappa$ dır. O halde $f(Z)$ bağlantılıdır.

Tanım 4.1.25: $(\mathcal{L}, \tau, \kappa)$, S üzerinde bir ditopolojik uzay ve $Z \subseteq S$ olsun. Eğer $[Z] = S$ ise Z , S de yoğundur denir (Diker 1999).

$i \in \mathrm{I}$ için $(\mathcal{L}_i, \tau_i, \kappa_i)$, boş olmayan bir S_i kümesi üzerinde ditopolojik doku uzayı olsun. $S = \prod_{i \in \mathrm{I}} S_i$ üzerindeki $(\mathcal{L}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayların çarpımını düşünelim. $s = (s_i)_{i \in \mathrm{I}} \in S$ noktasını alalım. Her bir $j \in \mathrm{I}$ için $E(s, j) = S_j \times \prod\{\{s_i\}: i \in \mathrm{I} \setminus \{j\}\}$ olsun.

Lemma 4.1.26: $i \neq j$ için $\mathcal{L}_{s_i} = \tau_{s_i} = \kappa_{s_i} = \{\{s_i\}, \emptyset\}$ iken $\{s_i\}$ üzerindeki $(\mathcal{L}_{s_i}, \tau_{s_i}, \kappa_{s_i})$ ditopolojik doku uzayını alalım. Eğer $E(s, j)$ üzerindeki $\{(\mathcal{L}_j, \tau_j, \kappa_j)\} \cup \{(\mathcal{L}_{s_i}, \tau_{s_i}, \kappa_{s_i}): i \in \mathrm{I} \setminus \{j\}\}$ ailesinin çarpımı $(\mathcal{L}', \tau', \kappa')$ ise bu durumda $f(a_j) = (a_i)_{i \in \mathrm{I}}$, $\prod_j((a_i)_{i \in \mathrm{I}}) = a_j$ ile tanımlanan

$$f: S_j \to E(s, j)$$

fonksiyonu süreklidir (Diker 1999).

İspat: $\forall\ i \in \mathrm{I} \setminus \{j\}$ ve $\forall\ G_i \in \tau_{s_i}$ için $E(i, G_i) = E(s, j)$ ve j , $\forall\ G_j \in \tau_j$ için

$$E(j, G_j) = G_j \times \prod \left\{\{s_i\}: i \in \mathrm{I} \setminus \{j\}\right\}$$

yazılır. Şimdi $G \in \tau'$ olsun. Bu durumda A nın her indis kümesi ve B nin her sonlu indis kümesi için $G_{j_k}^{\propto} \in \tau_j$ için,

$$G = \bigvee_{x \in A} \bigcap_{k \in B} E(j, G_{j_k}^{\propto})$$

yazılır. Lemma 3.1.28 den,

$$\bigvee_{\propto \in A} \bigcap_{k \in B} E(j, G_{j_k}^{\propto}) = E\left(j, \bigvee_{\propto \in A} \bigcap_{k \in B} G_{j_k}^{\propto}\right)$$

yazılır. Dolayısıyla tüm $G \in \tau'$ için $f^{-1}(G) \in \tau_j$ dir. Benzer olarak $\forall\ F \in \kappa'$, $f^{-1}(F) \in \kappa_j$ kolaylıkla yazılır. Bu da f nin sürekli olduğunu gösterir.

Teorem 4.1.27: $\forall\ i \in \mathrm{I}$ için boş olmayan S_i kümesi üzerinde $(\mathcal{L}_i, \tau_i, \kappa_i)$ bir ditopolojik uzay olsun. $S = \prod_{i \in \mathrm{I}} S_i$ kümesi üzerindeki $(\mathcal{L}, \tau, \kappa)$ çarpım ditopolojik doku uzayının bağlantılı olması için gerek ve yeter şart her bir $i \in \mathrm{I}$ için $(\mathcal{L}_i, \tau_i, \kappa_i)$ nin bağlantılı olmasıdır (Diker 1999).

İspat: $(\mathcal{L}, \tau, \kappa)$ bağlantılı olsun. π_i sürekli izdüşüm fonksiyonları Teorem 3.1.26 daki eşit şartlardan birini sağladığından Teorem 4.1.24 deki her bir $i \in \mathrm{I}$ için $(\mathcal{L}_i, \tau_i, \kappa_i)$ bağlantılıdır.

Şimdi $\forall\, i \in \mathrm{I}$ için $(\mathcal{L}_i, \tau_i, \kappa_i)$ bağlantılı olsun. Bir $s_0 \in S = \prod_{i\in\mathrm{I}} S_i$ sabit noktasını alalım.$s_0^n \in \prod_{i\in\mathrm{I}} S_i$ çoğunluğu n −koordinatlarında olan s_0 dan farklı keyfi bir nokta olsun. s_0 ve s_0^n noktaları için s_0 , $s_0^n \in S'$ olacak şekilde bağlantılı bir $S' \subseteq S$ kümesinin var olduğunu gösterelim. Bunu n üzerinde tümevarımla gösterelim. Bu iddia $n = 1$ için doğrudur. Bunu ispat etmemiz için s_0 ve $s_0' = (s_i)_{i\in\mathrm{I}}$ j. koordinattan farklı olsun. $S' = E(s, j)$ alalım. Lemma 4.1.26 dan $f\colon S_j \to E(s, j)$, $\pi_j((a_i)_{i\in\mathrm{I}}) = a_j$ iken $f(a_j) = (a_i)_{i\in\mathrm{I}}$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonu süreklidir. f nin Teorem 3.1.26 daki denklik şartlarından birini sağladığı açıktır. O halde Teorem 4.1.24 den $(\mathcal{L}', \tau', \kappa')$ bağlantılıdır ve s_0 , $s_0' \in S'$ dir. S' de S de bağlantılı olduğu kolaylıkla görülür. Şimdi iddiamızın $n - 1$ için doğru olduğunu varsayalım. $s_0^n \in S$ ve s_0^n , çoğu n −koordinatlarında s_0 dan farklı ve s_0^{n-1} çoğu $n - 1$ −koordinatlarında s_0^n den farklı bir nokta olsun. $n = 1$ için iddiamız doğrudur ve böylece s_0^n ve s_0^{n-1} için s_0^n ve $s_0^{n-1} \in S_1$ olacak şekilde bir bağlantılı S_1 kümesi vardır. Varsayımımızdan s_0 ve s_0^{n-1} bir S_2 bağlantılı kümesinde bulunur. $s_0^{n-1} \in S_1 \cap S_2$ olduğundan Teorem 4.1.6 dan $S_1 \cup S_2$ bağlantılıdır. Şimdi Z , s_0 ı içeren bütün bağlantılı kümelerin birleşimi olsun. Teorem 4.1.6 dan Z bağlantılıdır. Çoğu sonlu koordinatlarda s_0 dan farklı olan noktaların Z' kümesini göz önüne alalım. $Z' \subseteq Z$ olduğu açıkça görülür. Şimdi S de yoğun olan Z kümesinin $[Z] = S$ olduğunu göstereceğiz. $F \in \kappa$, $F \neq S$ alalım. Her A indeks kümesi ve sonlu B kümesi için $F_j^{\propto} \in \kappa_j$ iken

$$F = \bigcap_{\propto\in A} \bigcup_{j\in B} E(j, F_j^{\propto})$$

yazılır. Bazı $\propto \in A$ ve $\forall\, j \in B$ için $s_j^{\propto} \notin F_j^{\propto}$ alalım. $j \in B$ için $\pi_j(s) = s_j^{\propto}$ ve $\forall\, i \in \mathrm{I} \setminus B$ için $\pi_i(s) = \pi_i(s_0)$ iken $s \in S$ noktasını düşünelim. Sonra kolaylıkla $s \notin F$ ve $s \in Z'$ olduğunu görürüz. Bu bize $Z' \nsubseteq F$ yi verir. Bu da $[Z'] = S$ dir. $Z' \subseteq Z$ olduğundan Z de S de yoğundur. Şimdi $G \in \tau$ ve $s \in G$ alalım. Sonlu bir B kümesi için

$$s \in \bigcap_{j \in B} E(j, G_j) \subseteq G$$

yazılır.

$$s \in \bigcap_{j \in B} E(j, G_j) = \prod_{j \in B} G_j \times \prod_{i \in \mathrm{I} \setminus B} S_i$$

den $s_0^m \in G \cap Z' \neq \emptyset$ yazılır. $Z' \subseteq Z$ olduğundan $Z \cap G \neq \emptyset$ dir ve buradan $ext(Z) = \emptyset$ buluruz. Son olarak Teorem 4.1.7 den S bağlantılıdır ve ispat tamamlanmış olur.

Tanım 4.1.28 (Lokal Bağlantılılık): Herhangi bir $(S, \mathcal{L}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayının bir $x \in S$ noktasında lokal bağlantılı olması için gerek ve yeter şart S kümesinin x noktasını içeren her açık alt kümesinin x i içeren bağlantılı bir açık kümeyi kapsamasıdır. Eğer S her noktasında lokal bağlantılı ise S ye lokal bağlantılıdır denir (Tantawy *et al.* 2014).

Teorem 4.1.29: Her bağlantılı uzay lokal bağlantılıdır ama tersi genelde doğru değildir (Tantawy *et al.* 2014).

İspat: $(S, \mathcal{L}, \tau, \kappa)$ nın bağlantılı bir ditopolojik doku uzayı olduğunu varsayalım. Buradan $\tau \cap \kappa = \{S, \emptyset\}$ yazılır. $\forall x \in S$ için S ler bağlantılı olduğundan $x \in S \subseteq S$ yazılır. Dolayısıyla S lokal bağlantılıdır. Diğer taraftan S üzerinde birden fazla nokta içeren $(P(S), P(S))$ ditopolojik doku uzayı lokal bağlantılıdır ancak bağlantılı değildir.

Teorem 4.1.30: Lokal bağlantılı bir ditopolojik doku uzayının bileşeni açık bir kümedir (Tantawy *et al.* 2014).

İspat: (S, L, τ, κ) lokal bağlantılı bir ditopolojik doku uzayı, $x \in S$ ve C, x i temsil eden S nin bileşeni olsun. (S, L, τ, κ) lokal bağlantılı bir uzay olduğu için x i içeren her açık küme x i içeren bağlantılı bir G kümesini içerir. Fakat C, x i içeren en geniş bağlantılı küme olduğundan $x \in G \subseteq C$ dir. Yani C, x in $\tau -$ komşuluğudur. $C,$ onun noktalarının her birinin τ −komşuluğu olduğundan C açık bir kümedir.

Tanım 4.1.31: $(S, \mathcal{L}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayının total bağlantısız olması için gerek ve yeter şart $\forall x, y \in S$, $x \neq y$ için $x \in A$ ve $y \in B$ olmak üzere S nin A, B gibi bazı boş olmayan farklı clopen öz alt kümelerinin olmasıdır (Tantawy *et al.* 2014).

Teorem 4.1.32: Her total bağlantısız ditopolojik doku uzayı bağlantısızdır (Tantawy *et al.* 2014).

Not 4.1.33: Teorem 4.1.32 nin tersi her zaman doğru değildir. Aşağıdaki örnekte bunu gösterebiliriz (Tantawy *et al.* 2014).

$S = \{a, b, c\}$, $\mathcal{L} = \{S, \emptyset, \{a\}, \{a, c\}, \{a, b\}\}$, $\tau = \{S, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$ ve

$\kappa = \{S, \emptyset, \{a\}, \{a, c\}\}$ olsun. Burada $(S, \mathcal{L}, \tau, \kappa)$ bağlantısızdır fakat total bağlantısız değildir.

Teorem 4.1.34: Total bağlantısız bir $(S, \mathcal{L}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayının bileşenleri S nin tek noktadan oluşan alt kümleridir (Tantawy *et al.* 2014).

İspat: $Y, (S, \mathcal{L}, \tau, \kappa)$ total bağlantısız ditopolojik doku uzayının birden fazla nokta içeren bir alt kümesi olsun. $y_1 \neq y_2$ olmak üzere $y_1, y_2 \in Y \subseteq S$ olsun. S total bağlantısız olduğundan $y_1 \in A$ ve $y_2 \in B$ olmak üzere S nin A, B gibi boş olmayan birbirinden farklı clopen alt kümesi vardır.

Açıkça görülüyorki $\{A, A\}, S$ nin bir bölünmesidir. Yani Y bağlantısız bir kümedir. Fakat bileşenler bağlantılı kümelerdir. Buradan birden fazla nokta içeren S nin her alt kümesi S nin bileşeni olabilir.

Teorem 4.1.35: $(\mathcal{L},\tau,\kappa), S$ üzerinde herhangi bir ditopolojik uzay olsun. Eğer bu uzay bağlantılı yoğun bir alt kümeye sahip ise bağlantılıdır.

İspat: $(\mathcal{L},\tau,\kappa), S$ üzerinde herhangi bir ditopolojik uzay ve Z, S de yoğun ve bağlantılı bir alt küme olsun. $Z \subseteq S \subseteq [Z]$ olduğu biliniyor. $ext(Z) = \bigvee\{G: G \in \tau\ ve\ G \cap Z = \emptyset\}$ olduğu göz önüne alınırsa Z bağlantılı olduğundan $G \cap Z = \emptyset$ olacak şekilde $G \in \tau$ yoktur. Dolayısıyla $ext(Z) = \emptyset$ ve $ext(Z) \cap S = \emptyset$ dir. Teorem 4.1.7 den S bağlantılıdır.

Teorem 4.1.36: $(\mathcal{L},\tau,\kappa), S$ üzerinde ve $(\mathcal{L}',\tau',\kappa')$, S' üzerinde ditopolojik uzay ve $f: (\mathcal{L},\tau,\kappa) \to (\mathcal{L}',\tau',\kappa')$ bir dihomeomorfizm olsun. Eğer Z, Snin bir bileşeni ise $f(Z)$ de S' nün bir bileşenidir.

İspat: Z bir bileşen olduğundan bağlantılı bir kümedir. f bir homeomorfizm oluğundan Teorem 3.1.32 deki şartlardan en az birini sağlar. Bu durumda Teorem 4.1.24'den $f(Z)$ bağlantılıdır. Eğer $f(Z)$ maximal bağlantılı ise bileşendir.

Teorem 4.1.37: $(\mathcal{L},\tau,\kappa), S$ üzerinde ve $(\mathcal{L}',\tau',\kappa'), S'$ üzerinde birer ditopolojik doku uzayları olsun. $f: (\mathcal{L},\tau,\kappa) \to (\mathcal{L}',\tau',\kappa')$ açık ve sürekli bir fonksiyon olmak üzere eğer S lokal bağlantılı ise $f(S)$ de lokal bağlantılıdır.

İspat: $y \in f(S)$ ve U, y yi kapsayan açık bir küme olsun. Difonksiyon tanımından $f(x) = y \in f(S)$ olacak şekilde $x \in S$ vardır. O halde $f^{-1}(U), x$ noktasını içeren açık bir kümedir. S lokal bağlantılı olduğundan S nin her açık alt kümesi x i içeren bağlantılı açık bir kümeyi kapsar. O halde V, x i içeren bağlantılı açık bir kümedir. f hem açık hem de sürekli olduğundan $f(V), y$ yi içeren bağlantılı bir kümedir ve $f(V) \subseteq U$ yazılır. Buradan $f(S)$ de lokal bağlantılıdır.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu çalışmada, daha önceki yıllarda tanımlanmış olan ditopolojik uzaylardaki bağlantılılık, lokal bağlantılılık ve total bağlantılılık kavramlarına yer verildi. Ayrıca bu tezde farklı olarak bağlantılı ve yoğun bir alt kümeye sahip olan $(S,\mathcal{L},\tau,\kappa)$ ditopolojik doku uzayının da bağlantılı olduğu, lokal bağlantılı bir $(S,\mathcal{L},\tau,\kappa)$ ditopolojik doku uzayının sürekli ve açık bir difonksiyon altındaki görüntüsünün de lokal bağlantılı olduğu ve herhangi bir $(S,\mathcal{L},\tau,\kappa)$ ditopolojik doku uzayın $Z \subseteq S$ bileşeninin homeomorfizm altındaki görüntüsünün de bileşen olduğu gösterildi.

KAYNAKLAR

Aslım, G., 2004. Genel Topoloji, Ege Üniversitesi Basımevi, 274p, Bornova-İzmir.

Birkhoff, G., 1967. Lattice Theory. American Mahematical Society Colloqoium Publications, 418p, USA.

Bizim, O., 2013. Genel Topoloji, Dora Yayıncılık, 564p, Bursa.

Brown, L. M. and Diker, M., 1998a. Ditopological texture spaces and intuitionistic sets. Fuzzy Sets and Systems, 98, 217-224.

Brown, L. M. and Ertürk, R., 2000a. Fuzzy sets as texture spaces, I. Representation theorems. Fuzzy Sets and Systems, 110, 227-236.

Brown, L. M., 1993a. Ditopological fuzzy structures I. Fuzzy Systems a A. I M, 3(1).

Brown, L. M., 1993b. Ditopological fuzzy structures II. Fuzzy Systems a A. I M, 3(2).

Brown, L. M., Ertürk, R. and Dost S., 2004a. Ditopological texture spaces and fuzzy topology, I. Basic concepts. Fuzzy Sets and Systems, 147, 171-199.

Brown, L. M., Ertürk, R. and Dost S., 2004b. Ditopological texture spaces and fuzzy topology, II. Topological Consideration. Fuzzy Sets and Systems, 147, 201-231.

Coker, D., 1996. A note on intuitionistic sets and intuitionistic points, Turkish J. Math. 20(3) 343-351,

Diker M., 1999. Connectedness in ditopological texture spaces. Fuzzy Sets and Systems, 108, 223-230.

Gohar, M.M., 2002. Compactness in ditopological texture spaces. PhD Thesis, Hacettepe University, Ankara.

Mucuk, O., 2010. Topoloji ve Kategori, Nobel Yayın Dağıtım, 462p, Ankara.

Munkres, J.R., 1975. Topology A First Course, Prentice-Hall,Inc.Englewood Ciffs, 413p, New Jersey.

Tantawy, O.A.E., El-Sheikh, A.S., Yakout, M., Abd El-Latif, A.M., 2014. On connectedness in ditopological texture spaces. Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics 7(2) 343-354.

Yıldız, C., 2002. Genel Topoloji, Gazi Basımevi, 328p, Ankara.

Yüksel, Ş., 2002. Genel Topoloji. Selçuk Üniversitesi Basımevi, 490p, Konya.

ÖZGEÇMİŞ

1990 yılında Trabzon'da doğdu. Öğrenimine 1996 Trabzon Şehit Yüzbaşı Cengiz Topel İlköğretim Okulunda başladı. 2004 yılında ortaöğretimine Trabzon Fatih Lisesinde başlayıp 2007 yılında Ortaöğretimini tamamlayarak aynı yıl Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde lisans eğitimine başladı. 2011 yılında lisans eğitimini tamamlayıp 2012 yılında Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans öğrenimine başladı. Halen lisansüstü eğitimi devam etmektedir.