KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

FUZZY CEBİRSEL YAPILARI ve GRUPLARIN FUZZY GÖSTERİMLERİ

Sultan YAMAK

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
" Doktor "
Ünvanı Verilmesi için Kabul Edilen Tezdir

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 20 / 02 / 1995
Tezin Sözlü Savunma Tarihi : 26 / 05 / 1995

Tezin Danışmanı : Prof. Dr. Ergün BAYAR
Jüri Üyesi : Yrd. Doç. Dr. M. Sabri TERZİ
Jüri Üyesi : Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU

Enstitü Müdürü : Prof. Dr. Temel SAVAŞKAN

Şubat 95

TRABZON

ÖNSÖZ

Konunun seçiminde ve bu çalışmanın gerçekleşmesinde değerli zamanlarını ayırarak, yapıcı tenkitleriyle çalışmamı sağlayan saygıdeğer hocalarım Sayın Prof.Dr. Ergün BAYAR ve M. Sabri TERZİ`ye sonsuz teşekkürlerimi bir borç bilirim. Ayrıca ortak çalışmalarımızda birlikte tartıştığım değerli arkadaşım Arş. Gör. Osman KAZANCI`ya teşekkür ederim.

Trabzon, Şubat 1995 Sultan YAMAK

İÇİNDEKİLER **Sayfa No**

ÖZET

Bu tezin amacı, bir tam distribütif tam kafes üzerinde fuzzy grup homomorfilerini, fuzzy Ω-cebir homomorfilerini bu homomorfilerin sağladığı özellikleri inceleyip, daha sonra bir sonlu G grubunun fuzzy gösterimlerini incelemektir. Gösterimleri bir kategori yapısı ile ele alıp, bu kategorilerin FG-modüllerin kategorisi ile denk olduğu görüldü.

Bu tez, üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde özet olarak tam kafesler, kapalı sistemler ve kategoriler verilmiştir.

İkinci bölümde kısaca teorik çalışma tanıtılmıştır.

Son bölümde, Fuzzy Lojik ve cebirsel yapıların klasik teorileri verilerek, Fuzzy Lojik yardımıyla, bilinen cebirsel yapıların bazı özellikleri fuzzy cebirsel yapılara taşınmıştır. Genel teoriye başlangıç olarak fuzzy altgrupları, fuzzy grup homomorfileri, fuzzy çekirdek, fuzzy resim ve bunların bazı sonuçları verilmiştir. Ayrıca; kısa olarak fuzzy althalkalar, fuzzy idealler incelenmiştir. Bu bölümde son olarak Ω-cebir homomorfileri verilerek resim ve ters resmin Ω-altcebir olduğu görülmüştür. Grupların fuzzy gösterimleri tanımlanmış ve bu gösterimler bir kategori yapılarak bu kategorinin FG-modüllerin kategorisine denk olduğu gösterilmiştir. Ayrıca fuzzy ayrışamaz modüllerin tanımı ve bazı sonuçları incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Tam kafesler, Ω-cebirler, fuzzy Ω-cebirler, fuzzy homomorfiler ve fuzzy gösterimler.

SUMMARY

Fuzzy Algebraic Structure and Fuzzy Representations

In this study, we investigate fuzzy homomorphism of groups, fuzzy homomorphism of Ω-algebra on a complete lattices. Also, we prove some fundamental properties of this homomorphism. Futher, we show that abaut the categori of fuzzy represantations of groups is equivalent the categori FG- modules.

In this study consist of 3 chapters. In chapter 1, complete latices, closure systems and categories are discussed briefly.

In chapter 2, it is given theory works as shortly.

In the final chapter, the classical theorems of algebraic structures and fuzzy logic are discussed and the properties of some known algebraic structures are applied to fuzzy algebraic structure by means of fuzzy logic. Fuzzy subgroups fuzzy homomorphism, fuzzy kernel, fuzzy image and some results of these are given as a support for the general theory. In additional, we investigate briefly fuzzy subrings and fuzzy ideals. We complete this chapter by giving fuzzy Ω-algebraic homomorphism. We see that the image and inverse image are fuzzy Ω-subalgebra. We definite the fuzzy representations of a finite groups. By constructing a category out of these representations. We prove that this category is equivalent to the category of FG-modules and some results are given.

Key Words : Complete Lattices, Ω-algebras, fuzzy Ω-algebras, fuzzy homomorphism, fuzzy representations.

1. GENEL BİLGİLER (Literatür Araştırması)

1.1. Giriş

Zadeh, ilk olarak "fuzzy" belirsiz kavramını 1965 yılında ortaya attı. Günümüzde; bu teori, matematiğin dışında birçok alanda, özellikle mühendisliklerde ve bilgisayarlarda somut olarak uygulanmaya başlanmıştır. Zadeh'in ilk olan bu çalışmasında değer kümesi (üyelik derecesi) $[0,1]\subseteq IR$ olarak alınmiştir. Bu çalışmada fuzzy kümeleri arasındaki arakesit, birleşim ve fark kavramları tanımlanmıştır [1]. Daha sonra, bir çok yazar tarafından üyelik derecesinin zorunlu olarak $[0,1]\subseteq IR$ olması gerekmediği görülmüştür. Fuzzy kavramı, matematiğin hemen her dalında (topoloji, cebir ve ölçü teori v.b.) uygulanmaya başlanmıştır.

Rosenfeld, grup teori dalında ilk olarak çalışma yapmıştır. Daha sonra bu konuda birçok bilim adamı tarafından birbirlerine benzerlik gösteren araştırmalar yapılmıştır [2]. Örneğin; Das [3], Mukherjee ve Bhattacharya [4], [5], Kumar, Dixit ve Ajmal [6], Anthony ve Sherwood [7], Liu [8] ve Eroğlu [9]. Çalışmalarda fuzzy altgruplar, fuzzy normal altgruplar, bir normal altgrup üzerinde fuzzy denklik sınıfları yardımıyla fuzzy bölüm grupları, Lagrange's Teoremi, Homomorfi teoremleri ve fuzzy karakteristik altgrup ifadeleri incelenmiştir. Burada klasik teorinin bazı teoremlerinin doğru kalmadığı belirlenmiştir.

Fuzzy althalkaları alanında; Lui ve Katsaras [10], Dixit, Kumar ve Ajmal [11], Kurgoka ve Kuroki [12], Kumar [13], Kumbhojker ve Babat [14], [15], Malik ve Mordeson [16], Swamy [17], Yehia [18] ve Zahedi [19], [20] araştırmacıları birçok çalışma yapmıştır. Özet olarak; fuzzy althalkalar, fuzzy idealler, fuzzy bölüm idealleri, fuzzy asal idealler, fuzzy güçlü asal idealler, fuzzy zayıf asal idealler tanımları verilerek bütün amacın klasikteki teorilerin bu alana taşınması fikri ile yola çıkılarak birçok teori verilmiştir. Burada; araştırmacılar, özellikle bazı tanımlarda uyumluluk göstermemişler. Her faklı tanım, klasikteki teoriyi belli alanlarda doğru kılmıştır.

Sasaki [21], Malik ve Mordeson [22], Höhle ve Neft Stout [23], değişik fuzzy fonksiyonları tanımlamıştır. Bu tanımlama klasik teorinin özelliklerini sağladılar. Malik ve Mordeson halkalar arasındaki fuzzy halka homomorfisini tanımlayarak homomorfi teoremlerini ve fuzzy doğal homomorfinin özelliklerini inceledi [22].

Swamy ve Visvanada Raju, boştan farklı bir X kümesi üzerinde $\Im$-fuzzy altküme notasyonu ile fuzzy altkümeler sistemine çok genel bir ifade getirmiştir. Bu çalışmalarda, bir diğer farklılık, değer kümesi tam Brauwerian kafes üzerinde alınmasıdır [24]; [25]. Bu çalışmalardaki ifadelerin özel durumları incelendiğinde daha önce birçok araştırmacı tarafından ifade ve ispat edilen teoremler sonuç olarak elde edilmiştir.

1.2. Tam Kafesler

Tanım 1: L bir küme olsun. L de bir "$\leq$" bağıntısına kısmi sıralama (bölümsel sıralama) denir :$\Leftrightarrow$ Her x,y,z $\in$L için

i) $x \leq x$

ii) $x \leq y$ ve $y \leq x$ ise $x = y$

iii) $x \leq y$ ve $y \leq z$ ise $x \leq z$

"$\leq$" L`de kısmi sıralama bağıntısı ise $(L,\leq)$ ikilisine kısmi sıralanmış küme veya bölümsel sıralanmış küme denir.

Tanım 2: $(L,\leq)$ kısmi sıralanmış bir küme olsun. Her x, y $\in$L için $x \leq y$ veya $y \leq x$ ise $(L, \leq)$ ye tam (tümel) sıralı denir.

Tanım 3: $(L, \leq)$ kısmi sıralı bir küme; x, y $\in$L ise

$x < y :\Leftrightarrow x \leq y$ ve $x \neq y$

$x \geq y :\Leftrightarrow y \leq x$

$x > y :\Leftrightarrow y < x$

ile tanımlanır.

Tanım 4: L kısmi sıralanmış bir küme olsun. L nin tümel sıralanmış her altkümesine L de bir zincir denir.

Tanım 5: $(L, \leq)$ kısmi sıralanmış bir küme olsun. b$\in$L, A$\subseteq$L için

i) b ye A nın L de bir üst sınırıdır denir : $\Leftrightarrow$ Her a $\in$A için $a \leq b$ dır.

ii) b ye A nın L de bir alt sınırıdır denir : $\Leftrightarrow$ Her a $\in$A için $b \leq a$ dır.

A kümesinin L deki üst sınırlarının kümesini ÜS(A) ve alt sınırlarının kümesini AS(A) ile göstereceğiz. A kümesine üstten (alttan) sınırlıdır denir $\Leftrightarrow$ ÜS(A) $\neq \varnothing$ (AS(A) $\neq \varnothing$) dır.

Tanım 6: $(L,\leq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. ÜS(L) (AS(L)) kümeleri boştan farklı iseler L nin en büyük (en küçük) elemanları vardır denir. $|$ÜS(L)$|\leq 1$ ve $|$AS(L)$|\leq 1$ olacağından en büyük üst (alt) sınır varsa tektir. Bu elmanlara en büyük elman (en küçük eleman) denir ve sırasıyla 1, 0 ile gösterilir. $(L,\leq)$ kısmi sırali bir küme ve a$\in$L olsun.

i) a ya L de bir maksimal elemandır denir $\Leftrightarrow$ Her x $\in$L için $a \leq x$ ise $a = x$ dır.

ii) a ya L de bir minimal elemandır denir $\Leftrightarrow$ Her x $\in$L için $x \leq a$ ise $a = x$ dır.

Tanım 7: (L , $\leq$) kısmi sıralı bir küme olsun. L yukarıya direkt yönlenmiştir denir $\Leftrightarrow$ Her $A \subseteq L$ $|A| \leq \infty$ için ÜS(A) $\neq \varnothing$ dır.

Tanım 8: (L , $\leq$) kısmi sıralı bir küme olsun ve $A \subseteq L$ olsun.A nın üst (alt) sınırlarının en küçük (en büyük) elemanı varsa bu elemana A kümesinin Supremumu (İnfimumu) denir ve sırasıyla Sup A $:=\vee A$, İnf A $:=\wedge A$ ile gösterir.

Tanım 9: (L ,$\leq$) kısmi sıralı bir küme olsun. Her x, y $\in$L için

$$\mathrm{Sup}\{x , y\} = x \vee y, \quad \mathrm{İnf}\{ x , y \} = x \wedge y$$

elemanları varsa (L, $\leq$) ye bir kafes (= örgü) denir.

Teorem 1: [26] (L, $\leq$) bir kafes ise aşağıdakiler gerçeklenir. Her x, y, z $\in$L için

i) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$, $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$

ii) $x \vee y = y \vee x$, $x \wedge y = y \wedge x$

iii) $x \wedge (x \vee y) = x$, $x \vee (x \wedge y) = x$

iv) $x \vee x = x$, $x \wedge x = x$

Teorem 2: [26] Bir L kümesi üzerinde Teorem i -), ii -), iii -), iv -) özelliklerini sağlayan iki "$\wedge$" ve "$\vee$" ikili işlemleri verilsin. Bu taktirde L kümesi üzerinde her x, y$\in$Liçin,

$$x \leq y \ :\Leftrightarrow x \vee y = y$$

ile tanımlanan " $\leq$ " bağıntısı bir kafestir. Ayrıca her x, y $\in$L için

Sup { x, y } = $x \vee y$ ve İnf { x, y } = $x \wedge y$

ile tanımlanıyor. (L , $\leq$) bir kafes ise (L, $\leq$, $\vee$, $\wedge$) ile de gösterilebilir.

Tanım 10: (L , $\leq$) kısmi sıralanmış bir küme olsun. L ye tam kafes denir $\Leftrightarrow$ Her $A \subseteq L$ için $\wedge A$ vardır.

Teorem 3: [27] (L, $\leq$) kısmi sıralanmış bir küme olsun. (L, $\leq$) tam kafestir $\Leftrightarrow$ Her $A \subseteq L$ için $\vee A$ vardır.

Tanım 11: (L, $\leq$) tam kafesine üstten-yarı tümleyenli (= Brauwerian) denir $\Leftrightarrow$ Her a $\in$L, $B \subseteq L$ için $a \wedge (\vee B) = \vee \{ a \wedge b \mid b \in B \}$ dır.

Tanım 12: (L, $\leq$) tam kafesine tam dağılımlı denir $\Leftrightarrow$ Her b$\in$L, $A \subseteq L$ için aşağıdaki özellikler sağlanır:

$$b \wedge (\vee A) = \vee \{ b \wedge a \mid a \in A \}$$
$$b \vee (\wedge A) = \wedge \{ b \vee a \mid a \in A \}$$

Teorem 4: [26] $(L,\leq)$ Brauwerian kafes $\Leftrightarrow$ Her $A,B\subseteq L$ için aşağıdakiler sağlanır:

$$(\vee A)\wedge(\vee B)=\vee\{a\wedge b \mid a\in A,\ b\in B\}$$

Teorem 5: [26] $(L,\leq)$ tam kafesi tam dağılımlıdır $\Leftrightarrow$ Her $A\subseteq L$, $B\subseteq L$ için aşağıdakiler sağlanır:

$$(\vee A)\wedge(\vee B)=\vee\{a\wedge b \mid a\in A,\ b\in B\}$$

$$(\wedge A)\vee(\wedge B)=\vee\{a\wedge b \mid a\in A,\ b\in B\}$$

dır.

Teorem 6: [26] $(L,\leq)$ kısmi sıralanmış kümesi tam sıralı ise $(L,\leq)$ bir kafestir.

Teorem 7: [26] $(L,\leq)$ bir kafes ise aşağıdakiler birbirlerine denktir.

i) $a\leq b$

ii) $a\vee b=b$

iii) $a\wedge b=a$

Teorem 8: [26] $(L,\leq)$ bir kafes ise her $a, b, c\in L$ için aşağıdakiler sağlanır :

i) $a\leq b$ ise $a\vee c\leq b\vee c$ ve $a\wedge c\leq b\wedge c$

ii) $a\leq b$ ve $c\leq d$ ise $a\vee c\leq b\vee c$ ve $a\wedge c\leq b\wedge d$

dır.

Tanım 13: $(L,\leq)$ bir kafes $a, b\in L$ ve $a\leq b$ ise $[a, b]=\{x\in L \mid a\leq x\leq b\}$ kümesine a, b kapalı aralığı denir.

Tanım 14: $(L,\leq)$ kafesine modülar (:= Dedekind) denir :$\Leftrightarrow$ Her $a, b, c\in L$ için aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$a\leq b \text{ ise } b\wedge(a\vee c)=a\vee(b\wedge c).$$

Tanım 15: $(L,\leq)$ kafesine distribütif (:= dağılımlı) denir $\Leftrightarrow$ Her $a, b, c\in L$ için aşağıdaki eşitlik sağlanır :

$$a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c).$$

Teorem 9: [27] $(L,\leq)$ kefesi distribütifdir $\Leftrightarrow$ Her $a, b, c\in L$ için

$$a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c).$$

Tanım 16: $(L,\leq)$, $(L^*,\leq^*)$ iki kafes ve $f:L\rightarrow L^*$ dönüşümüne bir kafes homomorfi denir :$\Leftrightarrow$ Her $x, y\in L$ için

$$f(x\vee y)=f(x)\vee f(y) \text{ ve } f(x\wedge y)=f(x)\wedge f(y)$$

dır.

Tanım 17: $(L, \leq)$ en küçün elemanı 0 olan bir kafes olsun. $\neg: L \to L$ dönüşümüne L üzerinde bir yarı-tümleyen dönüşümü denir $\Leftrightarrow$ Her x, $y \in L$ için aşağıdakiler sağlanır:

i) $\neg(\neg(x)) = x$

ii) $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$

iii) $x \wedge \neg x = 0$

Tanım 18: Eğer "$\neg$" L üzerinde bir yarı-tümleyen dönüşümü ise $(L,\leq)$ ye yarı-tümleyenli kafes denir.

Teorem 10: [27] $(L, \leq)$ yarı-tümleyenli bir kafes ise $\neg 0 = 1$ dır.

Teorem 11: [28] $(L, \leq)$ kafesi üstten yarı-tümleyenlidir $\Leftrightarrow$ Her a, b $\in L$ için $a \wedge c \leq b$ olacak şekilde bir en büyüktür $c \in L$ vardır. Bu c elemanını $a \to b$ ile göstereceğiz.

Teorem 12: [28] $(L, \leq)$ bir kafes olsun. L Brauverian kafestir $\Leftrightarrow$ Her a, b, c $\in L$ için

i) $a \to a = 1$

ii) $a \wedge (a \to b) = a \wedge b$

iii) $(b \to a) \wedge a = a$

iv) $a \to (b \wedge c) = (a \to b) \wedge (a \to c)$

Tanım 19: $(L, \leq)$ Brauwerian kafes ve $a \in L$ ise $a \to 0 \in L$ elemanına a nın yarı tümleyeni denir ve $\sim a$ ile gösterilir.

Teorem 13: [28] $(L, \leq)$ Brauwerian kafes ise aşağıdakiler sağlanır: Her a, b $\in L$ için

i) $\sim(\sim a) = a$

ii) $a \wedge \sim a = 0$

iii) $\sim(a \vee b) = \sim a \wedge \sim b$

dır. Yani "$\sim$" L üzerinde bir yarı-tümleyen dönüşümüdür.

Teorem 14: [28] Her $(L, \leq)$ üstten yarı-tümleyenli kafes distiributifdir.

Teorem 15: [28] Her tam sıralı küme aşağıdaki gibi Brauwerian kafes yapılabilir.

$$a \to b = \begin{cases} 1 & , a \leq b \\ b & , \text{diğer} \end{cases} \quad \text{dır.}$$

Tanım 20: $(L, \leq)$ kısmi sıralı bir küme olsun.
$\Lambda \subseteq L$ ye kapalı sistem denir : $\Leftrightarrow$ Her $\mathfrak{I} \subseteq \Lambda$ için $\wedge\mathfrak{I} \in \Lambda$ dır.

$\Lambda \subseteq L$ için bir kapalı sistem ise genelde $\mathfrak{I} \subseteq L$ için $\wedge_L \mathfrak{I} \neq \wedge_\Lambda \mathfrak{I}$ dır.

Teorem 16: [29] $(L, \leq)$ Brauwerian kafes ise aşağıdakiler sağlanır. Her $a,b,c \in L$ için

i) $a \to 1 = 1$, $a \to a = 1$

ii) $1 \to a = a$

iii) $a \to b = 1 \Leftrightarrow a \leq b$

iv) $(a \to b) \wedge (b \to c) \leq a \to c$

v) $(\bigvee_{i \in I} a_i) \to b = \bigwedge_{i \in I} (a_i \to b)$

vi) $a \to (\bigwedge_{i \in I} b_i) = \bigwedge_{i \in I} (a \to b_i)$

vii) $(a \wedge b) \to c = b \to (a \to c)$

Tanım 21: $(L, \leq)$ tam kafesine kompakt kafes denir $:\Leftrightarrow$ Her $S \subseteq L$ ve $t \in L$ için $t < \vee S$ ise $\exists s \in S$ öyleki $t < s$ dir.

Uyarı 1: Her tam sıralı kafes kompakt kafesdir.
Bundan sonra aksi söylenmedikçe $(L, \leq)$ kafesi kompakt kafes olarak alınacakdır.

1.3. Kapalı Sistemler, Kapanış Operatörleri, Cebirsel ve Cebirsel Kapalı Sistemler

Kapalı Sistemlaere ait örnekleri Cohn [27] kaynağından derlenerek verildi.

Örnekler 1:

1) G bir grup, $L = 2^G$ ve $S(G) = \{H \in L \mid H \text{ altgrup}\}$;
$SN(G) = \{H \in L \mid H \text{ normal altgrup}\}$ olsun. Bu taktirde $S(G)$ ve $SN(G)$ $(L, \subseteq)$ de kapalı sistemlerdir.

2) R bir halka, $L = 2^R$ ve $I(R) = \{ I \in L \mid I \text{ ideal} \}$, $S(R) = \{I \in L \mid I \text{ althalka}\}$ olmak üzere $I(R)$ ve $S(R)$ kümeleri $(L, \subseteq)$ de kapalı sistemlerdir.

3) R bir halka M R-sol modül ve $L = 2^M$ olsun. Bu taktirde

$$\Lambda_R(M) = \{ N \in L \mid N \text{ R-altmodül} \}$$

kümesi $(L, \subseteq)$ de bir kapalı sistemdir.

Tanım 22: $J : 2^A \to 2^A$ dönüşümüne A üzerinde bir kapanış operatörü denir $\Leftrightarrow$

i) $X, Y \in 2^A$, $X \subseteq Y$ ise $J(X) \subseteq J(Y)$

ii) Her $X \in 2^A$ için $X \subseteq J(X)$

iii) Her $X \in 2^A$ için $J(X) = J(J(X))$

Kapanış Operatörlerine ait örnekler Cohn [27] kaynağından derlenerek verildi.

Örnekler 2:

1) G bir grup ve $X \subseteq G$ olsun. Bu taktirde $J(X) = \bigcap_{X \subseteq H \in S(G)} H$ ile tanımlanan dönüşüm bir kapanış öperatörüdür.

2) G bir grup ve $X \subseteq G$ olsun. Bu taktirde $J(X) = \bigcap_{X \subseteq H \in S_N(G)} H$ ile tanımlanan dönüşüm bir kapanış operatörüdür.

3) R bir halka, $X \subseteq R$ için

$$J_1(X) = \bigcap_{X \subseteq I \in S(R)} I \quad , J_2(X) = \bigcap_{X \subseteq I \in I(R)} I$$

ile tanımlanan J_1 ve J_2 dönüşümleri birer kapanış operatörüdürler.

4) R bir halka, M R-modül, $X \subseteq M$ ise $J(X) = \bigcap_{X \subseteq N \in \Lambda_R(M)} N$ ile tanımlanan dönüşüm bir kapanış operatörüdür.

Teorem 17: A bir küme olmak üzere

$KS(A) = \{ \Lambda \subseteq 2^A \mid \Lambda$ bir kapalı sistem $\}$

$KO(A) = \{ J \mid J$ A üzerinde bir kapanış operatörü $\}$

kümeleri için $KS(A) \cong KO(A)$ dır. Gerçekten;

$$\alpha(\Lambda) = \bigcap_{X \subseteq Y \in \Lambda} Y \quad \text{ve} \quad \beta(J) = \Lambda_J, \quad \Lambda_J = \{ X \in 2^A \mid J(X) = X \}$$

ile tanımlanan $\alpha : KS(A) \to KO(A)$, $\beta : KO(A) \to KS(A)$ fonksiyonları $\alpha o \beta = 1$ ve $\beta o \alpha = 1$ özelliklerini gerçeklerler. Böylece α birebir ve örtendir.

Tanım 23: $J \in KO(A)$ olsun. J ye A üzerinde cebirsel denir $\Leftrightarrow$ Her $X \subseteq A$ ve $x \in J(X)$ için $\exists\, X_f \subseteq X$ sonlu öyleki $x \in J(X_f)$ dır.

Tanım 24: $\Lambda \in KS(A)$ ya cebirsel kapalı sistem denir $\Leftrightarrow$ J_Λ cebirsel dır.

Teorem 18: [27] $\Lambda \in KS(A)$ cebirseldir $\Leftrightarrow$ Her $X \subseteq A$ için

$$J_\Lambda(X) = \bigcup_{\substack{Y \subseteq X \\ Y \text{ sonlu}}} J_\Lambda(Y)$$

Tanım 25: $\Lambda \in KS(A)$ indüktif denir $\Leftrightarrow$ Her $D \subseteq \Lambda$ zinciri için $\vee D \in \Lambda$ dır.

Teorem 19: [27] $\Lambda \in KS(A)$ cebirseldir $\Leftrightarrow$ Λ indüktifdir.

Cebirsel ve Cebirsel Kapalı Sistemlere ait örnekler Cohn [27] kaynağından derlenerek verildi.

Örnekler 3:

1) G bir grup ve $\Lambda \in \{ S(G), S_N(G) \}$ ise Λ cebirseldir.

2) R bir halka, $\Lambda = I(R)$ olsun. Bu taktirde Λ cebirseldir.

3) K bir cisim V K-vektör uzayı ise $\Lambda_K(V)$ cebirsel kapalı sistemdir.

Tanım 26: Ω bir küme, $a : \Omega \to \mathbb{N}$ bir fonksiyon olsun.
Bu taktirde Ω nın elemanlarına operatörler, Ω ya operatör bölgesi ve a(w) yada w nın aritesi denir.

Tanım 27: A bir küme ve n bir doğal sayı olsun. Bu taktirde α: $A^n \to A$ dönüşümüne A üzerinde bir n-li operasyon denir. $n = 0$ için bu operasyon A kümesinde bir eleman, $n = 1$ için kendisinden kendisine bir dönüşüm olarak verilir. Açık olarak her n-li operasyon A üzerinde $(n + 1)$-li bir bağıntıdır.

Tanım 28: A bir küme, α bir n-li operasyon, $B \subseteq A$ olsun. B ye α operasyonuna göre kapalıdır denir : $\Leftrightarrow$ Her $b_1, b_2, \ldots, b_n \in B$ için $\alpha(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in B$ dır.

Her $n \in \mathbb{N}$ için Ω kümesinin n-ariteli elemanlarının kümesi

$$\Omega(n) = \{ w \in \Omega \mid a(w) = n \}$$

ile gösterilsin.

Tanım 29: A bir küme ve Ω bir operatör bölgesi olsun. A kümesine bu yapı ile Ω- cebir denir :$\Leftrightarrow$ $\forall$ $n \in \mathbb{N}$ için $\Omega(n) \to A^{A^n}$ döşümler ailesi ve n-li operasyonu asosyatifdir. Buradan A bir Ω- cebir ise (A, Ω) ikilisi ile gösterilir. $w \in \Omega(n)$ ise her $A^n \to A$ dönüşümü her $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ için $w.a_1.a_2 \ldots a_n$ ile tanımlanır.

Tanım 30: (A,Ω) bir Ω-cebir olsun. $B \subseteq A$ ya bir alt cebir denir $\Leftrightarrow$ $\forall w \in \Omega(n)$, $b_1, b_2, \ldots, b_n \in B$ için $w.b_1.b_2 \ldots b_n \in B$ dır. A nın bütün Ω-altcebirlerinin kümesini $\Gamma_\Omega(A)$ ile göstereceğiz.

Tanım 31: (A, Ω), (B, Ω) Ω-cebirler ve $f: A \to B$ bir fonksiyon olsun. f ye A dan B ye Ω-cebir homomorfisi denir $\Leftrightarrow$ Her $n \in \mathbb{N}$, $w \in \Omega(n)$ ve $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ için

$$f(w.a_1.a_2 \ldots a_n) = w.\ f(a_1).f(a_2) \ldots f(a_n)$$

dır. Eğer f bir izomorfi ise $A \cong_\Omega B$ ile gösterilir .

Teorem 20: [27] A, B Ω-cebirler, $f: A \to B$ Ω-cebir homomorfisi ve $C \in \Gamma_\Omega(A)$ ise $f(C) \in \Gamma_\Omega(B)$ dır.

Teorem 21: [27] A, B Ω-cebirler, $f: A \to B$ Ω-cebir homomorfisi ve $C \in \Gamma_\Omega(B)$ ise $f^{-1}(D) \in \Gamma_\Omega(A)$ dır.

Teorem 22: [27] $f: A \to B$ ve $g: B \to D$ Ω-cebir homomorfileri ise $gof: A \to D$ Ω-cebir homomorfisidir.

1.4. Kategoriler ve Ω-Cebirler

Tanım 32: Bir $\mathbb{K}$ kategorisi aşağıdaki üç veri ile belirlidir.

i) Bir Nes($\mathbb{K}$) sınıfı ki bu sınıfa IK nın nesnelerinin sınıfı denir. Bu sınıfın elemanlarına IK nın nesneleri denir. Bunlar A , B, C, ... , ile gösterilir.

ii) $\mathbb{K}$ nın nesnelerinin her (A, B) ikilisi için bir $\mathrm{Mor}_{\mathbb{K}}(A, B)$ kümesi vardır öyleki farklı $(A, B) \neq (C, D)$ nesne ikilileri için $\mathrm{Mor}_{\mathbb{K}}(A,B) \cap \mathrm{Mor}_{\mathbb{K}}(C,D) = \varnothing$ verilir. $\mathrm{Mor}_{\mathbb{K}}(A,B)$ kümesinin elemanlarına A dan B ye morfiler denir. Bunlar $\alpha, \beta, \ldots$, ile gösterilir.

iii) $\mathbb{K}$ nın nesnelerinin her (A, B, C) üçlüsü için çarpma adı verilen bir

$$\mathrm{Mor}_{\mathbb{K}}(B, C) \times \mathrm{Mor}_{\mathbb{K}}(A, B) \to \mathrm{Mor}_{\mathbb{K}}(A, C)$$
$$((\beta, \alpha) \to \beta\alpha)$$

dönüşümü aşağıdaki özellikleri gerçeklemek üzere mevcuttur.

a) Asosyatif Kuralı : $\forall \alpha \in \mathrm{Mor}_{\mathbb{K}}(A, B)$, $\forall \beta \in \mathrm{Mor}_{\mathbb{K}}(B, C)$ ve $\forall \gamma' \in \mathrm{Mor}_{\mathbb{K}}(C, D)$ için aşağıdaki eşitlik gerçeklenir:

$$\gamma(\beta\alpha) = (\gamma\beta)\alpha$$

b) İdantiklerin Varlığı: $\forall$ $A \in$ INes (IK) için bir $1_A \in Mor_{IK}(A, A)$ morfisi $\forall \alpha \in Mor_{IK}(A, B)$ için $\alpha.1_A = 1_B.\alpha = \alpha$ olacak şekilde mevcuttur. 1_A morfisine A nın idantiği denir.

Notasyonlar 1:

i) $Mor (A, B) = Mor_{IK} (A, B)$

ii) $Mor (IK) = \bigcup_{A,B \in Nes(IK)} Mor_{IK}(A,B)$

ile IK nın morfilerinin sınıfı gösterilsin.

iii) $A \in IK \ :\Leftrightarrow A \in Nes (IK)$, $\alpha \in IK :\Leftrightarrow \alpha \in Mor (IK)$

iv) $\alpha \in Mor (A,B)$ ise $A =: Tan(\alpha)$, $B =: Değ (\alpha)$ sırasıyla α nın tanım ve değer bölgesi denir. $(A,B) \neq (C,D)$ için $Mor(A,B) \cap Mor(C,D) = \varnothing$ ise $Tan(\alpha)$ ve $Değ(\alpha)$ α ile tektürlü belirlidir.

v) $\alpha \in Mor(A, B) :\Leftrightarrow \alpha : A \rightarrow B :\Leftrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B$ notasyonlarından biri ile gösterilir.

Her A, B, C, $D \in IK$; $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in Mor(IK)$ için

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\gamma"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ D \arrow[r, "\delta"] & C \end{tikzcd}$$

diyagramı komütatiftir denir $:\Leftrightarrow \beta \alpha = \delta \gamma$ dır .

vi) $\alpha, \beta \in Mor(IK)$ için $\beta\alpha$ çarpımının yapılması halinde $Değ(\alpha) = Tan(\beta)$ olduğu kabul edilmiş olur.

Tanım 33: IK bir kategori ve $\alpha : A \rightarrow B$ ye IK nın bir morfisi olsun.

i) α ya monomorfi denir : $\Leftrightarrow \forall C \in IK, \forall \gamma_1, \gamma_2 \in Mor (C, A)$ için $\alpha \gamma_1 = \alpha \gamma_2$ ise $\gamma_2 = \gamma_1$ dır. Yani,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] & B \\ C \arrow[u, "\gamma_1"] \arrow[r, "\gamma_2"'] & A \arrow[u, "\alpha"'] \end{tikzcd} \quad \text{veya} \quad \begin{tikzcd} C \arrow[dr, "\gamma_1"] & & \\ & A \arrow[r, "\alpha"] & B \\ C \arrow[ur, "\gamma_2"'] & & \end{tikzcd}$$

diyagramlarını komutatif yapan γ_1, γ_2 morfileri için $\gamma_1 = \gamma_2$ dır.

ii) α ya epimorfi denir : $\Leftrightarrow \forall C \in IK, \forall \beta_1, \beta_2 \in Mor (B, C)$ için $\beta_1 \alpha = \beta_2 \alpha$ ise

$\beta_1 = \beta_2$ dır. Yani,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[d, "\beta_2"] \\ B \arrow[r, "\beta_1"'] & C \end{tikzcd} \quad \text{veya} \quad \begin{tikzcd} & & C \\ A \arrow[r, "\alpha"] & B \arrow[ur, "\beta_2"] \arrow[dr, "\beta_1"'] & \\ & & C \end{tikzcd}$$

diyagramlarını komütatif yapan β_1, β_2 morfileri için $\beta_1 = \beta_2$ dır.

iii) α ya bi morfi denir $\Leftrightarrow$ α monomorfi ve α epimorfi.

Buna göre $\forall C \in \mathbb{K}$, $\forall \gamma_1, \gamma_2 \in Mor\,(C, A)$, $\forall\ \beta_1, \beta_2 \in Mor\,(B, C)$ için

$\alpha\, \gamma_1 = \alpha\, \gamma_2$ ve $\beta_1\, \alpha = \beta_2\, \alpha$ ise $\gamma_1 = \gamma_2$ ve $\beta_1 = \beta_2$

dır. Yani, $\beta_1 \alpha \gamma_1 = \beta_2 \alpha \gamma_2$ ise $\beta_1 = \beta_1$ ve $\gamma_1 = \gamma_2$ dır. Diyagram olarak, aşağıdaki şakilde ifade edilebilir:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[dr, "\gamma_1"] & & & C \\ & A \arrow[r, "\alpha"] & B \arrow[ur, "\beta_2"] \arrow[dr, "\beta_1"'] & \\ C \arrow[ur, "\gamma_2"'] & & & C \end{tikzcd}$$

Diyagramını komutatif yapan β_1, β_2, γ_1, γ_2 için $\beta_1 = \beta_2$ ve $\gamma_1 = \gamma_2$ dır.

iv) α ya endomorfi denir $\Leftrightarrow$ Tan (α) = Değ (α).

v) α ya izomorfi denir $\Leftrightarrow \exists\ \beta \in Mor\,(B, A)$ öyleki $\beta\alpha = 1_A$ ve $\alpha\beta = 1_B$ dır.

vi) α ya otomorfi denir $\Leftrightarrow$ α izomorfi ve α endomorfi $\Leftrightarrow$ $\exists \beta \in Mor\,(A, A)$ öyleki $\beta\alpha = 1_A$ ve $\alpha\beta = 1_A$ dır.

Tanım 34: $\mathbb{K}$, $\mathbb{L}$ iki kategori olsun. $\mathbb{F} = (\mathbb{F}_o, \mathbb{F}_M)$ ye $\mathbb{K}$ dan $\mathbb{L}$ ye bir funktor denir: $\Leftrightarrow$

i) $\alpha : A \to B$ için $\mathbb{F}_M(\alpha) : \mathbb{F}_o(A) \to \mathbb{F}_o(B)$

ii) $\alpha \in Mor_{\mathbb{K}}(A, B)$, $\beta \in Mor_{\mathbb{K}}(B, C)$ için $\mathbb{F}_M(\beta o \alpha) = \mathbb{F}_M(\beta) o \mathbb{F}_M(\alpha)$

iii) $\mathbb{F}_M(1_A) = 1_{\mathbb{F}o(A)}$

dır.

Tanım 35: $\mathbb{K}$, $\mathbb{L}$ iki kategori olsun. $\mathbb{K}$ ve $\mathbb{L}$ kategorileri denktirler denir :$\Leftrightarrow \exists\ \mathbb{F}$ ve G funktorları öyleki $\mathbb{F}oG = 1_G$ ve $Go\mathbb{F} = 1_{\mathbb{F}}$ dır.

Kategori ve Ω-cebirlere ait örnekler Cohn [27] kaynağından derlenerek verildi.

Örnekler 4:

1) Bir A grupoidi Ω aritesi iki olan bir tek μ elemanından oluşan bir Ω-cebirdir. Bir grupoid asosyatif kuralını gerçekler. Yani, her x, y, z$\in$A için

$\mu (z, \mu (x, y)) = \mu (\mu(z, x), y)$

dır. A bir grupoid ise $\Omega = \{\mu\}$ olmak üzere bir Ω-cebirdir. Birim elemanlı bir grupoidden şu anlaşılacaktır: $\exists\ e\in A$ öyleki $\forall x\in A$ için

$x = \mu (x, e) = \mu (e, x)$

dır. Kolaylıkla gösterilebilir ki birim eleman tektir.

2) Bir birim elemanlı grupoid iki operasyonlu bir kümedir. Bunlardan biri 2-ariteli μ, diğeri 0-ariteli e dır. Bir e birim elemanlı grupoidin bir alt grupoidinin aynı birim elmanlı olması gerekmez. Sonuç olarak birim elemanlı bir A grupoidi $\Omega = \{\mu, e\}$ olan bir Ω-cebirdir.

3) Bir A grubu e birim elemanlı bir grupoid ile θ üniter operasyonlu aşağıdaki özelliği gerçekleyen bir Ω-cebirdir. Her $x\in A$ için $\mu (\theta (x), x) = \mu (x, \theta (x)) = e$ dır. $\Omega = \{\mu, \theta, e\}$ olmak üzere e 0-ariteli, θ 1-ariteli ve μ 2-ariteli bir küme ile A Ω-cebirdir. $\mu (x, y)$ yi x.y ve θ (x) yi x^{-1} ile gösterecek olursak bir A grubu aşağıdaki özellikleri gerçekler:

i) Her x , y , $z\in A$ için $x.(y.z) =(x.y).z$ (Asosyatiflik kuralı)

ii) Her $x\in A$ için $x.e = e.x = x$ (Birim elemanın varlığı)

iii) Her $x\in A$ için $x.x^{-1} = x^{-1}.x = e$ (Ters elemanın varlığı)

Şimdi grupların bir kategorisini verelim:

I) Nes (G) = { G | G bir grup }

II) $Mor(A, B) =\{\alpha \mid \alpha: A\to B$ bir grup homomorfisi $\}$

III) o G grup homomorfilerinin bileşkesi.

4) R kümesine bir halka denir $:\Leftrightarrow$ R üzerindeki $\mu = +$, $\theta = -$ işlemlerine göre bir abel grubu, çarpma işlemi dediğimiz bir başka yarı grup yapısına sahip 2-ariteli işlem ve distribütif kuralı dediğimiz özellikleri sağlayan bir kümedir. Açık olarak $\Omega = \{\mu, \theta, \eta, 0\}$ için

$\mu (x, y) = x+y$, $\theta (x) = -x$ ve $\eta (x, y) = x.y$

operasyonları aşağıdaki özellikleri sağlarlar. Her x, y, $z\in A$ için

$\eta(x, \mu(y, z)) = \mu(\eta (x, y), \eta (x , z))$

$\eta(\mu(x ,y),z) = \mu(\eta(x, z), \eta(y, z))$

$x.(y+z) = x.y+x.z$, $(x+y).z = x.y+x.z$

elde edilir. Şimdi A ve B iki halka $f : A \to B$ halka homomorfisidir $\Leftrightarrow \forall$ x, $y\in A$ için

$f (\eta (x,y)) = \eta(f(x), f(y))$ ve $f(\mu(x,y)) = \mu(f(x),f(y))$

$f(x+y) = f(x)+f(y)$, $f(x.y) = f(x).f(y)$

5) Bir M R-modül bir abel grubu öyleki $\forall a\in R$ için M nın ω_a üniter operasyonları vardır ve aşağıdaki özellikleri gerçeklerler: Her a, $b\in R$ için

$\omega_a.\omega_b = \omega_{a.b}$, $\omega_a+\omega_b = \omega_{a+b}$ (1)

Eğer R 1_R birim elemanlı ve ω_1 M üzerinde idantik endomorfizm özelliğini gerçekliyor ise M ye üniter R-modül denir. Sonuç olarak bir R-modül

$\Omega = \{+, -, 0, \omega_a \mid a \in R\}$

kümesi üzerinde (1) özelliklerini sağlayan bir Ω-cebirdir. Buna kısaca R-modül diyeceğiz.

(M, +) Bundan sonra $x \in M$, $a \in R$ için

$a.x = \omega_a(x)$

ile a ile x in soldan çarpımını anlayacağız.

Şimdi Modüllerin Kategorisini verelim:

I) Nes ($_R$M) := { M | M R-modül }

II) Mor(M, N) = { $\alpha \mid \alpha : M \to N$ R-modül homomorfisi }

III) R-modül homomorfilerinin bileşkesi

Tanım 36: K komütatif, birim elemanlı bir halka olsun. A ya K-cebir denir

$\Leftrightarrow$ A K-üniter modül ve $\forall a, b \in A, \lambda \in K$ için

$\lambda.(a.b) = (\lambda.a).b = a.(\lambda.b)$

dır. Eğer A bir e birim elemanına sahip ise $K \to Z(A)$ ($\lambda \to \lambda e$) dönüşümü A nın K-modül yapısını tam olarak açıklar.

Tanım 37: (A, Ω), (B, Ω) Ω-cebirler ise AxB üzerinde her $\omega \in \Omega(n)$, $(a_1,b_1),\ldots,(a_n, b_n) \in A\mathrm{x}B$ için

$\omega(a_1, b_1)\ldots(a_n, b_n) := (\omega a_1\ldots a_n, \omega b_1\ldots b_n)$

yardımıyla AxB bir Ω-cebirdir. Bu Ω-cebire (A, Ω) ile (B, Ω) Ω-cebirlerinin çarpımı denir.

Teorem 33: [27] (A, Ω), (B, Ω) Ω-cebirler ve $A^* \in \Gamma_\Omega(A)$, $B^* \in \Gamma_\Omega(B)$ ise $A^*\mathrm{x}B^* \in \Gamma_\Omega(A\mathrm{x}B)$ dır.

2. TEORİK ÇALIŞMA

Bu tezin amacı, bir tam Brauwerian kafes üzerinde fuzzy grup homomorfilerini, fuzzy Ω-cebir homomorfilerinin, bir sonlu G grubunun fuzzy gösterimlerini bir kategori olarak ele alınmasıdır. Mordeson ve Malik kaynaklarındaki fuzzy fonksiyon tanımına bağlı kalarak fuzzy grup homomorfisi, fuzzy çekirdek, fuzzy resim ve bu homomorfilerin bazı özellikleri 3.1. Fuzzy Altgruplar bölümünde incelenmiştir [22]. Tanım 46'da fuzzy resmin ve ters resmin tanımı verilmiştir. Uyarı 2'de tanımların, önceki tanımlardan daha genel olduğu verilmiştir. Teorem 54'de karakteristik fonksiyonların özel durumlar için özellikleri verilmiştir. Teorem 60'da ideallerin bir değişik özelliği verilmiştir.

Daha sonra, tanım 46'da Swamy ve Vısvanada Raju [24], [25] çalışmaları destekli olarak fuzzy Ω-cebir homomorfisi tanımlanmıştır. Teorem 65'de bir fuzzy homomorfi altında fuzzy resmin ve ters resmin Ω-altcebir olduğu görülmüştür.

Tanım 68 ileGrupların fuzzy gösterimleri verilerek, Teorem 67 ilede iki gösterimin direkt toplamının bir fuzzy gösterim olduğu verilmiştir. Teorem 68 ile klasik ayrışamaz gösterimlerin, karakteristik fonksiyonlar yardımıyla fuzzy ayrışamazlığa denk olduğu görülmüştür. Tanım 71 ile iki gösterim arasındaki fuzzy kenetleyen verilmiştir. Teorem 69 ve Teorem 70 ile gösterimlerin kategorik yapısı verilmiştir. Yine, Teorem 74 ve Teorem 75'de FG-modüllerin kategorisi ile fuzzy gösterimlerin kategorisi arasındaki ilişkiler verilmiştir.

3. BULGULAR

3.1. Fuzzy Lojik ve Fuzzy Cebirsel Sistemler

Fuzzy sözcüğünün tam bir karşılığı yok, ancak yaygın olarak kullanılan "bulanık" veya "belirsiz" anlamları vardır. Önce, bu kavramı açıklamaya çalışalım. Küme tanımı kısaca belli özelliklere sahip nesneler topluluğu olarak verilebilir. Örneğin; K.T.Ü. Matematik Bölümün'deki öğrenciler bir küme oluştururlar. K.T.Ü. Matematik Bölümün'deki bütün öğrenciler evrensel küme olarak alınırsa, K.T.Ü. Matematik Bölümü Soyut Matematik dersini alan öğrenciler ile bir küme oluşturulsun. Şimdi K.T.Ü. Matematik Bölümün'deki herhangi bir öğrenci ele alınırsa, bu kişi, ya Soyut Matematik dersini alıyor yada almıyor olacaktır. Yani; yapılan tanımlama Matematik Bölümün'deki her bir öğrenciyi Soyut Matematik dersini alanların kümesine sokuyor veya dışında bırakıyor. Kümeler, Ven şeması çizerek ifade edilebilirler. Bir başka yöntem ise karakteristik fonksiyonlar yardımıyla, eğer bir eleman bir kümenin elemanı ise kümeyi tanımlayan karakteristik fonksiyon 1, değilse 0 olarak alınabilir. Karakteristik fonksiyon, evrensel kümenin her bir elemanını $\{0,1\}$ kümesine eşler. Örneğin; $\mathbb{R}$ kümesi için

$$\chi_Q = \begin{cases} 1 & ,x \in Q \\ 0 & ,x \notin Q \end{cases}$$

ile tanımlanan χ_Q: $\mathbb{R} \to \{0,1\}$ fonksiyonu Q rasyonel sayılar kümesinin karakteristik fonksiyonudur. Bu karakteristik fonksiyon, $\mathbb{R}$ evrensel kümesinin Q rasyonel sayılar altkümesine karşılık gelir. Şu ana kadar kümeleri tanımlamada bir zorluk çıkmadı. Şimdi K.T.Ü. Matematik Bölümün'de okuyan, Soyut Matematik dersinde başarılı olan öğrenciler kümesi düşünülsün. Bir tanım yapılıp notu 50 nın üstünde olanlara başarılı denilirse, notu 49 olan bir öğrenci için çok acımasız davranılmış olur. İşte fuzzy kümeleri buna az da olsa bir çözüm getirmektedir. En kaba tanımıyla bir fuzzy kümesi, bu kümeyi oluşturan her bir elemanı bir "üyelik derecesi" ile belirler. Buna göre, fuzzy kümeleri aşağıdaki gibi tanımlanır. Örnek olarak Matematik Bölümündeki Soyut Matematik dersini alan öğrenciler :={A, B, C} kümesi, Soyut Matematik dersindeki başarılı öğrenciler :={A/1, B/0.2, C/0.5} üyelik dereceleri ile verilsin. Burada isimlerin yanına yazılan rakamlar, o kişinin ne kadar başarılı olduğunu, bir başka değişle Matematik Bölümün'deki Soyut Matematik dersinden başarılı öğrencilerin kümesinin ne kadar elemanı olduğunu gösteriyor. Yukarıdaki örnekte A kişisi tümüyle başarılı, C kişisi ise yarı yarıya başarılı olarak düşünülmüştür.

Fuzzy kümeleri, ilk olarak 1965 yılında Zadeh tarafından ortaya atılmış. Zadeh, küme elemanlarının üyelik derecelerini göstermek için $[0,1\subseteq IR]$ kapalı aralığındakı reel sayıların kullanılmasını önermiştir. Eğer bir elemanın üyelik derecesi 1 ise tümü ile o kümenin içerisinde, 0 ise hiç bir şekilde o kümenin elemanı olmadığı söylemektedir [1]. Matematik Bölümünde okuyan öğrencilerin kümesi tek bir şekilde ifade edilebilir. Ancak; bu bölümde okuyan başarılı öğrencilerin kümesi değişik şekilde ifade edilebilirler. Fuzzy kümelerinin karakteristik fonksiyonuna "üyelik fonksiyonu" da denmektedir.

Şimdi; tekrar klasik kümeler teorisine dönersek, önce Matematik Bölümün'deki Soyut Matematik dersini alan öğrencilerin kümesi, sonrada Matematik Bölümündeki Analiz-I dersini alan öğrencilerin kümesi düşünülsün.

S : Soyut Matematik dersini alan öğrenciler

A : Analiz-I dersini alan öğrenciler

ise, "Soyut Matematik dersini alan öğrenciler" ve "Analiz-I dersini alan öğrenciler" in kümesi $C = S\cap A$ olur. Fuzzy kümeler kuramında bu işlemin karşılığı; eğer μ_S Soyut Matematik dersinden başarılı öğrencilerin üyelik fonksiyonu, μ_A Analiz-I dersinden başarılı öğrencilerin üyelik fonksiyonları ise, $C(x) = \mu_S(x)\wedge\mu_A(x)$ Soyut Matematik ve Analiz-I dersinden başarılı öğrencilerin üyelik fonksiyonunu belirler. Benzer şekilde eğer Soyut Matematik veya Analiz-I dersinden başarılı öğrencilerin üyelik fonksiyonunu bulmak istenirse, bu sefer, tek tek üyelik derecelerinin maksimumu alınır. Nasıl ki kümeler kuramı matematiğin hemen her alanında etkili olmuşsa, fuzzy kümeleri de yeni matematiksel kavramların doğmasına, araştırma konularının çıkmasına yol açmıştır. Fuzzy kümeleri hakkında bazı temel bilgiler ve notasyonlar, özet olarak aşağıda verilmeye çalışılmıştır.

3.2. Fuzzy $\mathfrak{I}$-cebirsel Sistemler

Tanım 38: X bir küme, $(L,\leq)$ tam distribütif tam kafes ve $\neg L$ üzerinde bir tümleyen dönüşümü olsun. L^X in bütün elemanlarına X in L-fuzzy altkümeleri denir. Bütün L-fuzzy altkümelerini $F(X,L)$ ile göstereceğiz. $L = [0,1]$ ise $F(X,L) = F(X)$ ile gösterilir. $f, g\in F(X, L)$ ise

$$(f\vee g)(x) = f(x)\vee g(x)$$

$$(f\wedge g)(x) = f(x)\wedge g(x)$$

$$f\leq g :\Leftrightarrow \forall x\in X \text{ için } f(x)\leq g(x)$$

$$(\neg f)(x) = \neg(f(x))$$

Λ bir indis kümesi; $f_\lambda\in F(X, L)$, $\lambda\in\Lambda$ ise $\bigvee_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda$, $\bigwedge_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda$ L-fuzzy kümelerinden

$$(\bigvee_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda)(x) = \bigvee_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(x)\ ,\ (\bigwedge_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda)(x) = \bigwedge_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(x)$$

anlaşılmaktadır. $A\subseteq X$ bir küme ve $t\in L$ için $\chi_{t,A}$ fuzzy altkümesi

$$\chi_{t,A} = \begin{cases} 1 & ,x\in A \\ t & ,x\notin A \end{cases}$$

ile tanımlanıyor.

Teorem 24: X bir küme, $(L, \leq)$ tam distribütif tam kafes ve $\neg$ L üzerinde bir tümleyen dönüşümü olsun. Bu taktirde ($F(X, L), \leq, \neg$) tam distribütif, tam kafes ve $\neg$ F (X, L) üzerinde bir tümleyen dönüşümüdür.

Tanım 39: $f\in F(X, L)$ ve $g\in F(Y,L)$ olsun. Bu taktirde,

$$(f x g)(x, y) = f(x) \wedge g(y)$$

ile tanımlanan $fxg\in F(XxY,L)$ L-fuzzy altkümesine f ve g fuzzy altkümelerinin kartezyen çarpımı denir.

Tanım 40: X, Y kümeler olsun . $\theta\in F(XxY, L)$ ye X den Y ye bir fuzzy bağıntı denir.

Tanım 41:

i) $\Phi\in F(XxY, L)$ için

$\Phi^{-1}(y, x) = \Phi(x, y)$

ile verilen $\Phi^{-1}\in F(YxX, L)$ L-fuzzy bağıntısına Φ L-fuzzy bağıntısının tersi denir.

ii) $\Phi\in F(XxY, L)$, $\Psi\in F(YxZ, L)$ ise $\forall (x, z)\in XxZ$ için

$$(\psi o \Phi)(x, z) = \bigvee_{y\in Y} \Phi(x, y) \wedge \psi(y, z)$$

ile tanımlı bağıntıya Φ ile Ψ bağıntılarının bileşkesi denir.

Tanım 42: $\Phi\in F(XxX,L)$ L-fuzzy bağıntısı verilsin.

i) Φ ye yansıyan denir $\Leftrightarrow$ $\forall x\in X$ için $\Phi(x, x) = 1$.

ii) Φ ye geçişken denir $\Leftrightarrow$ $\Phi o \Phi \subseteq \Phi$

iii) Φ ye simetrik denir $\Leftrightarrow$ $\Phi = \Phi^{-1}$

Tanım 43: $\Phi\in F(XxY, L)$, $t\in L$ olsun. Φ ye t-fuzzy fonksiyon denir $\Leftrightarrow$ $\forall x\in X$ için $\exists! y\in Y$ öyleki $\Phi(x, y) > t$ dır.

Tanım 44: $f \in F(XxY,L)$ ve $g \in F(XxY,L)$ t-fuzzy fonksiyon olsun. Bu taktirde f ve g t-fuzzy fonksiyonlarına t-seviyesinde eşittir denir $:\Leftrightarrow [f(x,y)>t \Leftrightarrow g(x, y)>t\ ]$
f ve g t-fuzzy fonksiyonlarına t-seviyesinde eşit iseler $f =_t g$ ile gösterilecek.

Tanım 45: Φ X den Y ye bir t-fuzzy fonksiyon olsun .

i) Φ ye X den Y ye t-fuzzy birebir denir $\Leftrightarrow \Phi(x, y) >t$ ve $\Phi(x^*, y) >t$ ise $x = x^*$ dır.

ii) Φ ye X den Y ye t-fuzzy örten fonksiyon denir $\Leftrightarrow \forall y \in Y$ için $\forall x \in X$ öyleki $\Phi(x,y)>t$ dır.

iii) Φ'ye X den Y ye t-fuzzy tam eşleme (bijeksiyon) denir $\Leftrightarrow \Phi$ t-fuzzy birebir ve örtendir.

Tanım 46: $A \in F(X, L)$, $B \in F(Y, L)$ ve Φ X den Y ye bir t-fuzzy fonksiyon ise

$$\Phi(A)(y) = \bigvee_{x \in X} \Phi(x,y) \wedge A(x)$$

$$\Phi^{-1}(B)(x) = B(y) \Leftrightarrow \Phi(x,y) > t.$$

kümelerine sırasıyla A nın fuzzy resmi ve B nin fuzzy ters resmi denir.

Teorem 25: [30] f, g, $h \in F(X, L)$ ise aşağıdakiler gerçeklenir:

i) $fx(g \vee h) = (fxg) \vee (fxh)$

ii) $fx(g \wedge h) = (fxg) \wedge (fxh)$

iii) $fxg = gxf$ ise $f = g$ olması gerekmez .

iv) $fxg \leq fxh$ ise $g \leq h$ olması gerekmez .

Tanım 47: f, $g \in F(X, L)$ için

$$(f \setminus g) = f(x) \wedge \neg g(x)$$

ile tanımlanan $f \setminus g \in F(X, L)$ ye f ile g nin fuzzy farkı denir.

Teorem 26: A^*, $A \in F(X, L)$, $\{A_i \mid i \in \Delta\} \subseteq F(X, L)$ ve B^*, $B \in F(Y, L)$ ve $\{B_i \mid i \in \Delta\} \subseteq F(Y,L)$ ve $\alpha \in F(XxY, L)$ bir t-fuzzy fonksiyon olsun. Bu taktirde aşağıdakiler gerçeklenir:

i) $\alpha(\bigvee_{i \in \Delta} A_i) = \bigvee_{i \in \Delta} A_i\, \alpha(A_i)$

ii) $\alpha(\bigwedge_{i \in \Delta} A_i) \leq \bigwedge_{i \in \Delta} \alpha(A_i)$

iii) $\alpha^{-1}(\bigvee_{i \in \Delta} B_i) = \bigvee_{i \in \Delta} \alpha^{-1}(B_i)$

iv) $\alpha^{-1}(\bigwedge_{i\in\Delta} B_i) = \bigwedge_{i\in\Delta} \alpha^{-1}(B_i)$

v) $A \leq A^*$ ise $\alpha(A) \leq \alpha(A^*)$ ve $B \leq B^*$ ise $\alpha^{-1}(B) \leq \alpha^{-1}(B^*)$

vi) $A \leq \alpha^{-1}(\alpha(A))$ ve $\alpha(\alpha^{-1}(B)) \leq B$ olması gerekmez.

İspat :

i) $\alpha(\bigvee_{i\in\Delta} A_i)(y) = \bigvee_{x\in X} \alpha(x,y) \wedge (\bigvee A_i)(x)$

$$= \bigvee_{x\in X} \alpha(x,y) \wedge (\bigvee_{i\in\Delta} A_i(x)) = \bigvee_{x\in X} \bigvee_{i\in\Delta} \alpha(x,y) \wedge A_i(x)$$

$$= \bigvee_{i\in\Delta} \bigvee_{x\in X} \alpha(x,y) \wedge A_i(x) = \bigvee_{i\in\Delta} \alpha(A_i)(y) = (\bigvee_{i\in\Delta} \alpha(A_i))(y).$$

Bu sonuç ile $\alpha(\bigvee_{i\in\Delta} A_i) = \bigvee_{i\in\Delta} \alpha(A_i)$ elde edilir.

ii) $\alpha(\bigvee_{i\in\Delta} A_i)(y) = \bigvee_{x\in X} \alpha(x,y) \wedge (\bigwedge_{i\in\Delta} A_i)(x) = \bigvee_{x\in X} \alpha(x,y) \wedge (\bigwedge_{i\in\Delta} A_i(x))$

$$\leq \bigvee_{x\in X} \bigwedge_{i\in\Delta} \alpha(x,y) \wedge A_i(x) = \bigwedge_{i\in\Delta} \bigvee_{x\in X} \alpha(x,y) \wedge A_i(x)$$

$$= \bigwedge_{i\in\Delta} \alpha(A_i)(y) = (\bigwedge_{i\in\Delta} \alpha(A_i))(y).$$

Buradan $\alpha(\bigvee_{i\in\Delta} A_i) \leq \bigwedge_{i\in\Delta} \alpha(A_i)$ elde edilir.

iii) $\alpha^{-1}(\bigvee_{i\in\Delta} B_i(x) = (\bigvee_{i\in\Delta} B_i)(y) \overset{\alpha(x,y)>t}{===} \bigvee_{i\in\Delta} B_i(y) = \bigvee_{i\in\Delta} \alpha^{-1}(B_i)(x) = (\bigvee \alpha^{-1}(B_i))(x)$

sonucu ile $\alpha^{-1}(\bigvee_{i\in\Delta} B_i) = \bigvee_{i\in\Delta} \alpha^{-1}(B_i)$ elde edilir.

iv) Benzer şekilde elde edilir.

v) $A \leq A^*$ olsun. Buradan

$$\alpha(A)(y) = \bigvee_{x\in X} \alpha(x,y) \wedge A(x)$$

$$\leq \bigvee_{x\in X} \alpha(x,y) \wedge A^*(x) = \alpha(A^*)(y)$$

elde edilir . Bu sonuçla $\alpha(A) \leq \alpha(A^*)$ olduğu görülür.

$B \leq B^*$ olsun . Her $x \in X$ için

$\alpha^{-1}(B)(x) = B(y) \Leftrightarrow \alpha(x,y) > t$ ve $B(y) \leq B^*(y) = \alpha^{-1}(B^*)(x)$

elde edilir. Buradan $\alpha^{-1}(B) \leq \alpha^{-1}(B^*)$ elde edilir.

vi) $\alpha(\alpha^{-1}(B))(y) = \bigvee_{x\in X} \alpha(x,y) \wedge \alpha^{-1}(B)(x)$

$$= \bigvee_{\substack{x\in X \\ \alpha(x,y^*_x)>t}} \alpha(x,y) \wedge B(y^*_x) \not\leq B(y)$$

Uyarı 2:

$f : X \to Y$ bir fonksiyon, $A \in F(X, L)$, $B \in F(Y, L)$ için

$f(A)(y) = \bigvee_{x\in f^{-1}(y)} A(x)$ ve $f^{-1}(B)(x) = B(f(x))$

ile tanımları için,

$$\alpha_f : XxY \to L, \quad \alpha_f(x,y) = \begin{cases} 1 & ,\alpha(x) = y \\ t & ,\alpha(x) \neq y \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa $\alpha_f \in F(XxY,L)$ bir t-fuzzy fonksiyondur. Ayrıca

$$\alpha_f(A)(y) = \bigvee_{x\in X} \alpha_f(x,y) \wedge A(x)$$

$$= \bigvee_{y=f(x)} A(x) = f(A)(y)$$

elde edilir. Diğer yandan

$\alpha_f^{-1}(B)(x) = B(y) \Leftrightarrow \alpha_f(x,y) > t \Leftrightarrow y = f(x)$

sonucu ile $\alpha_f^{-1}(B)(x) = B(y) = B(f(x)) = f^{-1}(B)(x)$

elde edilir. Yani $\alpha_f(A) = f(A)$ ve $\alpha_f^{-1}(B) = f^{-1}(B)$ olarak bir çok çalışmadaki eşitlikler gerçeklenir. Yani bu tanımlar daha geneldir. $\Lambda \subseteq 2^X \backslash \{\varnothing\}$ X için bir kapalı sistem ise $\wedge\varnothing = X \in \Lambda$ dır.

Tanım 47: $\Lambda \subseteq 2^X$, $A \in F(X, L)$ olsun. A ya Λ-L-fuzzy altküme denir $\Leftrightarrow$ Her $\alpha \in L$ için $A^{-1}[\alpha, 1] \in \Lambda$ dır. Bütün Λ-L-fuzzy altkümelerinin kümesi $F_\Lambda(X,L)$ ile gösterilir.

Tanımların sonucu olarak aşağıdakiler elde edilir:

1) $\Lambda = \varnothing$ ise $F_\Lambda(X, L) = \varnothing$

2) $F_\Lambda(X, L) \neq \varnothing \Leftrightarrow X \in \Lambda$.

3) $\varnothing \in \Lambda$ ve $F_\Lambda(X, L) \neq \varnothing$ ise her $A \in F(X, L)$ sabit fonksiyonu için $A \in F_\Lambda(X, L)$ dır.

4) $F_\Lambda(X, L) \neq \varnothing$ olmak üzere; her $S \subseteq X$ için $\chi_{t,S} \in F_\Lambda(X, L) \Leftrightarrow S \in \Lambda$ dır.

5) $\Im \subseteq F(X, L) \setminus \{\varnothing\}$ için $\exists \Lambda \subseteq 2^X$ öyleki

$$F_\Lambda(X, L) = \Im \Leftrightarrow [\, A \in \Lambda \Leftrightarrow \forall \alpha \in L \text{ için } \chi_A^{-1}[\alpha, 1] \in F_\Lambda(X, L)]$$

dır. $\Lambda \subseteq 2^X$, $Y \subseteq X$ için $\langle Y \rangle = \bigcap \{ S \in \Lambda \mid Y \subseteq S \}$ ile tanımlansın. Eğer $Y \subseteq S$ olacak şekilde $S \in \Lambda$ yok ise $\langle Y \rangle = X$ dır. Ayrıca $\langle \varnothing \rangle = S_0$ olarak tanımlanıyor.

Teorem 27: [24] $A \in F_\Lambda(X, L)$ ise her $y \in \langle Y \rangle$ için

$$\bigwedge_{x \in Y} A(x) \leq A(y) \text{ ve her } x \in S_0 \text{ için } A(x) = 1$$

elde edilir.

Teorem 28: Eğer Λ X için bir kapalı sistem ise $X \in \Lambda$ olduğu için $\langle 1 \rangle = \chi_{1,X} \in F_\Lambda(X, L)$ dır. Ayrıca her $S \subseteq X$ ve $\alpha \in L$ için $\langle \chi_{\alpha,S} \rangle = \chi_{\alpha,\langle S \rangle}$ dır.

İspat : Gerçekten; $\beta \leq \alpha$ olan her $\beta \in L$ için $\chi_{\alpha,\langle S \rangle}^{-1}[\beta, 1] = X \in \Lambda$ dır. $\beta > \alpha$ ise

$$\chi_{\alpha,\langle S \rangle}^{-1}[\beta, 1] = \langle S \rangle \in \Lambda$$

elde edilir. Buradan $\chi_{\alpha,\langle S \rangle} \in F_\Lambda(X, L)$ elde edilir. Şimdi $\chi_{\alpha,S} \leq A \in F_\Lambda(X,L)$ olsun. Buradan her $x \in S$ için $A(x) = 1$ ve $S \subseteq A^{-1}[1,1]$ sonucu ile $\langle S \rangle \subseteq \chi^{-1}[1,1]$ ve $\chi_{\alpha,\langle S \rangle} \subseteq A$ elde edilir. Sonuç olarak $\langle \chi_{\alpha,S} \rangle = \chi_{\alpha,\langle S \rangle}$ dır .

Tanım 48: $\Lambda \subseteq F(X, L)$ X için bir fuzzy kapalı sistemdir $:\Leftrightarrow$ Her $\{A_i \mid i \in \Delta\} \subseteq \Lambda$ için

$\bigwedge\limits_{i \in \Delta} A_i \in \Lambda$ dır.

Teorem 29: [24] $\mathfrak{I} \subseteq 2^X$ ise aşağıdakiler denktirler:

i) $\mathfrak{I}$ X için bir kapalı sistemdir.

ii) Her $Y \in 2^X$ için $\langle Y \rangle \in \mathfrak{I}$ dır.

iii) $F_{\mathfrak{I}}(X, L)$ X için bir fuzzy kapalı sistemdir.

$F \subseteq X$ sonlu bir küme ise $F \subseteq_f X$ ile göstereceğız.

Teorem 30: [24] $\mathfrak{I} \subseteq 2^X$, $\{A_i \mid i \in \Delta\} \subseteq F_{\mathfrak{I}}(X, L)$ yukarıya direk yönlü bir altküme ise her

$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq X$ için $\bigwedge\limits_{j=1}^{n} \bigvee\limits_{i \in \Delta} A_i(x_j) = \bigvee\limits_{i \in \Delta} (\bigwedge\limits_{j=1}^{n} A_i(x_j))$ dır.

Teorem 31: $\mathfrak{I} \subseteq 2^X$ Xiçin bir kapalı sistem ise aşağıdakiler denktir.

i) $\mathfrak{I}$ X için bir cebirsel kapalı sistemdir.

ii) $A \in F_{\mathfrak{I}}(X,L) \Leftrightarrow$ Her $a_1, a_2, \ldots, a_n \in X$ ve $x \in \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ için

$$\bigwedge_{i=1}^{n} A(a_i) \leq A(x)$$

iii) $F_{\mathfrak{I}}(X, L)$ X için bir fuzzy cebirsel kapalı sistemdir.

İspat : **"i⇒ii"** $A \in F_{\mathfrak{I}}(X, L)$ ve $x \in \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ için $\bigwedge\limits_{i=1}^{n} A(a_i) \leq A(x)$ olduğu açıktır. Şimdi tersinin doğru olduğunu gösterelim. $\alpha \in L$ ve $F \subseteq_f A^{-1}[\alpha, 1]$ ise $\langle F \rangle \subseteq A^{-1}[\alpha, 1]$ ve $\mathfrak{I}$ cebirsel olduğundan $\langle A^{-1}[\alpha, 1] \rangle = A^{-1}[\alpha, 1]$ elde edilerek $A^{-1}[\alpha, 1] \in \mathfrak{I}$ elde edilir.

"ii ⇒ iii" $F_{\mathfrak{I}}(X, L)$ X için bir fuzzy kapalı sistem olduğu açıktır. Şimdi $\{A_i \mid i \in \Delta\}$ $F_{\mathfrak{I}}(X, L)$ de yukarıya direk yönlü bir alt ailesi verilsin. Buna göre $A := \bigvee\limits_{i \in \Delta} A_i$, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in X$ ve $x \in \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ için

$$A(x) = \bigvee_{i\in\Delta} A_i(x) \geq \bigvee_{i\in\Delta} \bigwedge_{j=1}^{n} A_i(a_j) = \bigwedge_{j=1}^{n} \bigvee_{i\in\Delta} A_i(a_j) = \bigwedge_{j=1}^{n} A(a_j)$$

elde edilir. Buradan $A\in F_{\Im}(X, L)$ elde edilir. Sonuç olarak $F_{\Im}(X, L)$ nin X için bir fuzzy cebirsel kapalı sistem olduğunu söylenebilir.

"iii ⇒i" $\{ S_i \mid i\in\Delta \}\subseteq\Im$ yükarıya direkt yönlü bir ailedir $\Leftrightarrow$ $\{ \chi_{S_i} \mid i\in\Delta \}\subseteq F_{\Im}(X, L)$ de yükarıya direk yönlü bir ailedir. Bunun sonucu olarak $\chi_{\bigcup_{i\in\Delta} S_i} = \bigvee_{i\in\Delta} \chi_{S_i}$ olduğundan $\Im$ cebirsel kapalı sistemdir.

Tanım 49: $A\in F(X, L)$ ise $\langle A\rangle = \bigcap\{ B\in F_{\Im}(X, L) \mid A\subseteq B \}$ $\Im$-fuzzy altkümesine A ile üretilen $\Im$-fuzzy altkümesi denir.

Teorem 32: $\alpha.X \to L$ $\alpha(x) = \alpha\in L$ sabit fonksiyon ise $\langle\alpha\rangle = \chi_{\alpha,S_0}$ dır.

İspat : $\langle\alpha\rangle \leq \chi_{\alpha,S_0}$ olduğu açıktır. Diğer yandan $A\in F_{\Im}(X, L)$ ve $\alpha\leq A$ ise $\forall x\in X$ için $\alpha\leq A(x)$ dır. Buradan her $x\in X$ için $\alpha\in A^{-1}[\alpha, 1]\in\Im$ ve $X = A^{-1}[\alpha, 1]$ elde edilir. Böylece $\chi_{\alpha,S_0} \leq A$ elde edilerek $\langle\alpha\rangle = \chi_{\alpha,S_0}$ olduğu gösterilmiş olur. Bundan sonra aksi söylenmedikçe $\Im$ daima cebirsel kapalı bir sistem olarak alınacaktır .

Teorem 33: $A\in F(X, L)$ olmak üzere her $x\in X$ için

$$\langle A\rangle(x) = \bigvee_{\substack{F\subseteq_f X \\ x\in\overline{F}}} \left(\bigwedge_{a\in F} A(a) \right)$$

dır.

İspat : $B(x) := \bigvee_{\substack{F\subseteq_f X \\ x\in\overline{F}}} \left(\bigwedge_{a\in F} A(a) \right)$ olsun. Açık olarak $A\leq B$ dır. $a_1, a_2, \ldots, a_n\in X$ ve $x\in\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle$ için

$$\bigwedge_{i=1}^{n} B(a_i) = \bigvee_{\substack{F_i \subseteq_f X \\ a_i \in \langle F_i \rangle}} \left(\bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{a \in F_i} A(a) \right)$$

dır.

Ancak $F_1, F_2, \ldots, F_n \subseteq_f X$ ve $a_i \in \langle F_i \rangle$ için $F = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$ olmak üzere $a_i \in \langle F_i \rangle$ ve

$x \in \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle \subseteq \langle F \rangle$ olduğundan $\bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{a \in F_i} A(a) \leq \bigwedge_{a \in F} A(a)$ sonucu ile $\bigwedge_{i=1}^{n} B(a_i) \leq B(x)$ elde edilir. Teorem 20: den $B \in F_{\Im}(X, L)$ elde edilir. Diğer yandan her $\alpha \in L$ için

$$B^{-1}[\alpha, 1] = \bigcup_{\substack{j\, j \in J \\ \alpha \leq \bigvee_{j \in J} \beta_j}} \bigcap_{j \in J} \langle A^{-1}[\beta_j, 1] \rangle$$

dır. Buradan $\alpha \leq \bigvee_{j \in J} \beta_j$ dır. $\{ A_i \mid i \in \Delta \} \subseteq F_{\Im}(X, L)$ ise $\langle \bigvee_{i \in \Delta} A_i \rangle \in F_{\Im}(X, L)$ $\Im$-fuzzy altkümesine $\{ A_i \mid i \in \Delta \}$ailesinin supremumu denir. Sonuç olarak aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 34: $\Im$ X için fuzzy cebirsel kapalı sistem ise ($F_{\Im}(X, L)$, $\leq$) bir tam kafestir.

İspat : Her $\{A_i \mid i \in \Delta\} \subseteq F_{\Im}(X, L)$ için $\bigwedge_{i \in \Delta} A_i \in F_{\Im}(X, L)$ olduğu açıktır. Teorem 32 ile ($F_{\Im}(X, L)$, $\leq$) tam kafestır.

Literatürde bir (L, $\leq$) tam kafesine cebirsel denir $\Leftrightarrow$ Her $\alpha \in L$ için α kompakt elemanların supremumu olarak yazılabilir. Bir (L,$\leq$) cebirsel kafesi yine bir X kümesi üzerindeki cebirsel kapalı sisteme izomorftur.

Teorem 35: [24] $\Im$ cebirsel kapalı ve (L, $\leq$) cebirsel kafes ise$F_{\Im}(X,L)$ cebirsel kafestir. (L, $\leq$) cebirsel olmadığı halde $F_{\Im}(X, L)$ cebirsel olabilir.

Teorem 36: [24] $\Im$ X için bir cebirsel kapalı sistem olsun. $\Im$ modülar (distribütif) $\Leftrightarrow$ $F_{\Im}(X, L)$ modülar (distribütif) dir.
$F_{\Im}(X, L)$ distribütif ise doğal olarak cebirseldir. Buradan $F_{\Im}(X, L)$ Brauwerian $\Leftrightarrow$ $\Im$ Brauwerian'dır.

Teorem 37: [24] $\Im$ X için cebirsel kapalı sistem $\{ S_\alpha \mid \alpha \in L \} \subseteq \Im$ öyleki her $M \subseteq L$ için

$S_{\underset{\alpha \in M}{\vee}} = \bigcap_{\alpha \in M} S_\alpha$ ise her $x \in X$ için $A(x) = \vee \{ \alpha \in L \mid x \in S_\alpha \}$

ile tanımlanan fuzzy altküme bir $\Im$-fuzzy altkümedir.

İspat : $M = \{\alpha \in L \mid x \in S_\alpha\}$ ise $\bigcap_{\alpha \in M} S_\alpha = S_{\underset{\alpha \in M}{\vee}}$ olduğundan $\forall \beta \in L$ için

$$A^{-1}[\beta, 1] = \bigcup \{S_\alpha \mid \beta \leq \alpha \in L\}$$

dır. $\{S_\alpha \mid \beta \leq \alpha\}$ yukarıya direkt yönlü bir aile olduğundan $A^{-1}[\beta,1] \in \Im$ ve $A \in F_\Im(X, L)$ elde edilir.

Sonuç 1: [24] $\Im$ X için cebirsel kapalı sistem, $S_i \in \Im$ $(i = 1,\ldots,n)$ öyleki

$$S_1 \subseteq S_2 \subseteq \ldots S_n = X, \; \alpha_n \leq \alpha_{n-1} \leq \ldots \leq \alpha_1 = 1$$

için $A(x) = \alpha_i$ $i :=$ e.k.e.$\{ j \mid x \in S_j \}$ olarak tanımlanırsa
$A \in F_\Im(X, L)$ dır .

$\Im \subseteq 2^X$, $\Im_\varnothing = \Im \cup \{\varnothing\}$ ise $\Im$ X için cebirsel kapalı sistemdır $\Leftrightarrow$ $\Im_\varnothing$ X için cebirsel kapalı sistemdir.

3.3. $\Im$ ve $F_\Im(X, L)$ Üzerinde Kalıtsal Operasyonlar

Tanım 50: "o" işlemine $\Im$ üzerinde kalıtsal içerme özelliğini sağlar denir
$\Leftrightarrow$ Her $U,S,T \in \Im$ için

$S \subseteq T$ ise $SoU \subseteq ToU$ ve $UoS \subseteq UoT$

dır.

Tanım 51: $\Lambda \subseteq F(X, L)$ olmak üzere "$*$" ikili işlemine kalıtsal içerme özelliğini sağlıyor denir $\Leftrightarrow$ Her $A, B, C \in \Lambda$ için $A \leq B$ ise $A*C \leq B*C$ ve $C*A \leq C*B$ dır.

Tanım 52: ($\Im$, o) ikili işlemli bir küme, $A,B \subseteq F(X,L)$ $\Im$-fuzzy altküme olsun. Bu takdirde

$$A\bar{o}B(x) = \vee \{ \bigwedge_{s \in S} A(s) \wedge \bigwedge_{t \in T} B(t) \mid x \in SoT,\ S,T \in \Im \}$$

ile bir $A\bar{o}B(x) \in F(X,L)$ tanımlanır.

Teorem 38: [25] "o" ikili işlemi $\mathfrak{I}$ üzerinde içermeye göre kalıtsal invaryant özelliğini sağlıyor ise "$\bar{o}$" ikili işlemi $F_{\mathfrak{I}}(X, L)$ üzerinde içermeye göre kalıtsal invaryant özelliğini sağlar.

İspat : $A,B \in F_{\mathfrak{I}}(X, L)$, $\alpha \in L$ olsun.

$$(A\bar{o}B)^{-1}[\alpha, 1] = \cup\{\bigcap_{j \in J}(A^{-1}[\beta j, 1] o B^{-1}[\beta j, 1] \mid \alpha \leq \bigvee_{j \in J} \beta j, \{bj\}_{j \in J} \subseteq L\}$$

ve $\{\bigcap_{j \in J}(A^{-1}[\beta j, 1] o B^{-1}[\beta j, 1] \mid \alpha \leq \bigvee_{j \in J} \beta j, \{bj\}_{j \in J} \subseteq L\}$

kümesi yukarıya direk yönlü ve $\mathfrak{I}$ cebirsel kapalı olduğundan $(A\bar{o}B)^{-1}[\alpha, 1] \in \mathfrak{I}$ elde edilir .Buradan $A\bar{o}B$ X in $\mathfrak{I}$-fuzzy altkümesidir. Şimdi $A,B,C \in F_{\mathfrak{I}}(X, L)$ için $A \leq B$ ise

$$(A\bar{o}C)(x) = \vee\{\bigwedge_{s \in S} A(s) \wedge \bigwedge_{t \in T} C(t) \mid x \in SoT, S, T \in \mathfrak{I}\}$$

$$\leq \vee\{\bigwedge_{s \in S} B(s) \wedge \bigwedge_{t \in T} B(t) \mid x \in SoT, S, T \in \mathfrak{I}\} = B\bar{o}C(x)$$

elde edilir. Buradan $A\bar{o}C \leq B\bar{o}C$ elde edilir. Benzer şekilde $B\bar{o}C \leq A\bar{o}C$ dır.

Teorem 30: [25] $\mathfrak{I}$ cebirsel kapalı bir sistem ise $\{\chi_{\alpha,S} \mid \alpha \in L, S \in \mathfrak{I}\} \subseteq F_{\mathfrak{I}}(X, L)$ her alt ailesi olarak aşağıdaki özellikleri sağlar.

i) Her $S, T \in \mathfrak{I}$; $\alpha, \beta \in L$ için $\chi_{\alpha \wedge \beta, SoT} \leq \chi_{\alpha,S} \bar{o} \chi_{\beta,T}$

ii) Her $S, T \in \mathfrak{I}$ için $\chi_{0,S} \bar{o} \chi_{0,T} = \chi_{0,SoT}$ dır.

İspat : i) $x \notin SoT$ olsun. Buradan her $U, V \in \mathfrak{I}$ ve $x \in UoV$ için $U \not\subseteq S$ veya $V \not\subseteq T$ dır.

Buradan $\bigwedge_{u \in U} \chi_{\alpha,S}(u) = \alpha$ veya $\bigwedge_{v \in V} \chi_{\beta,T}(v) = \beta$ elde edilir. Bunu kullanarak

$$(\chi_{\alpha,S} \bar{o} \chi_{\beta,T})(x) = \vee\{\bigwedge_{u \in U} \chi_{\alpha,S}(u) \wedge \bigwedge_{v \in V} \chi_{\beta,T}(v) \mid x \in UoV, U, V \in \mathfrak{I}\}$$

elde edilir. Bu sonuçla

$$\alpha \wedge \beta \leq (\chi_{\alpha,S} \bar{o} \chi_{\beta,T})(x) \text{ ve } \chi_{\alpha \wedge \beta, SoT}(x) \leq \chi_{\alpha,S} \bar{o} \chi_{\beta,T}(x)$$

ifadeleri elde edilir.

Eğer $x \in SoT$ ise $(\chi_{\alpha,S} \bar{o} \chi_{\beta,T})(x) = 1 = \chi_{\alpha \wedge \beta, SoT}(x)$. Böylece

$$\chi_{\alpha,S} \bar{o} \chi_{\beta,T} \geq \chi_{\alpha \wedge \beta, SoT}$$

elde edilir.

ii -) $\alpha = \beta = 1$ ise eşitlik yukarıdan açıktır. Çünkü $x \notin SoT$ ise $U, V \in \Im$ için $x \in UoV$ olması durumunda $U \not\subset S$ veya $V \not\subset T$ dır. Buradan $\bigwedge_{u \in U} \chi_{\alpha,S}(u) = 0$ veya $\bigwedge_{v \in V} \chi_{\beta,T}(v) = 0$ dır.

Buradan $(\chi_{0,S} \bar{o} \chi_{0,T})(x) = 0$. Yani $x \notin SoT$ ise

$$(\chi_{0,S} \bar{o} \chi_{0,T})(x) = 0 = \chi_{0,SoT}(x)$$

dır. Diğer yandan $x \in SoT$ ise $\chi_{0,S} \bar{o} \chi_{0,T} = \chi_{0,SoT}$ elde edilir. Sonuç olarak $\theta(S) = \chi_{0,S}$ yardımıyla tanımlanan $\theta : \Im \to F_{\Im}(X, L)$ dönüşümü işlemi koruyan bir monomorfidir. "o" ikili işlemi $\Im$ üzerinde içermeye göre kalıtsal ise "o" işlemi $\Im$ üzerinde komütatif $\Leftrightarrow$ "$\bar{o}$" işlemi $F_{\Im}(X, L)$ üzerinde komütatifdir.

Tanım 53: $\Im$ X üzerinde bir cebirsel kapalı sistem olsun. "o" işlemine $\Im$ üzerinde distribütif denir $\Leftrightarrow$ Her $\{T_i \mid i \in \Delta\} \subseteq \Im$ yukarıya direkt yonlü ailesi ve $S \in \Im$ için

$$So\left(\bigcup_{i \in \Delta} T_i\right) = \bigcup_{i \in \Delta} (SoT_i) \text{ ve } \left(\bigcup_{i \in \Delta} T_i\right)oS = \bigcup_{i \in \Delta} (T_i oS)$$

dır.

Tanım 54: "$*$" ikili işlemine $F_{\Im}(X, L)$ üzerinde distribütif denir $\Leftrightarrow$ Her $\{A_i \mid i \in \Delta\} \subseteq F_{\Im}(X, L)$ yukarıya direk yönlü altküme ve $A \in F_{\Im}(X, L)$ için

$$A * \left(\bigvee_{i \in \Delta} A_i\right) = \bigvee_{i \in \Delta} (A * A_i) \text{ ve } \left(\bigvee_{i \in \Delta} A_i\right) * A = \bigvee_{i \in \Delta} (A_i * A)$$

dır.

Teorem 40: [25] "o" işlemi $\Im$ üzerinde kalıtsal özelliğine sahip ise aşağıdakiler birbirlerine denktirler:

i) Her $S, T \in \Im$ için $SoT = \bigcup \{ <F>o<G> \mid F \subseteq_f S,\ G \subseteq_f T \}$

ii) "o" yukarıya direkt yönlü kümeler üzerinde distribütiftir.

iii) Her $A, B \in F_{\Im}(X,L)$ için aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$A \bar{o} B(x) = \bigvee \{ \bigwedge_{a \in F} A(a) \wedge \bigwedge_{b \in G} B(b) \mid x \in <F>o<G>,\ F, G \subseteq_f X \}$$

iv) "$\bar{o}$" işlemi $F_{\Im}(X,L)$ de yukarıya direkt yönlü kümeler üzerinde distribütifdir.

$\mathfrak{I}$ üzerinde "$\vee$" ve "$\wedge$" kafes operasyonları verilsin. Buna göre kolaylıkla gösterilebirki; "$\vee$" ve "$\wedge$" operasyonları $\mathfrak{I}$ üzerinde komütatif, asosyatif, yukarıya direk yönlü kümeler üzerinde distribütif ise $\overline{\vee}$ ve $\overline{\wedge}$ $F_{\mathfrak{I}}(X,L)$ de aynı özellikleri gerçekler. Ayrıca $A\leq B \Leftrightarrow A\overline{\wedge}B = A$ dır. Dığer yandan $A\overline{\vee}B$, $A\overline{\wedge}B$ sırasıyla $\{ A, B \}\subseteq F_{\mathfrak{I}}(X,L)$ kümesinin supremumu ve infimumudur. Yine kolaylıkla gösterilebilir ki

$$\theta_\alpha : \mathfrak{I} \to F_{\mathfrak{I}}(X,L) \quad \theta_\alpha(s) = \chi_{\alpha,S}$$

dönüşümü bir kafes monomorfisidir.

3.4. $\mathfrak{I}$-Fuzzy Asal ve Maksimal Altkümeler

Bir halkanın fuzzy asal idealleri Swamy [17] yazarı tarafından verildi. Swamy [17] doğruluk değerı L de olan bu özellikleri inceledi. Bu yapıları; yani: $\mathfrak{I}$-fuzzy asal ve maksimal altkümelerin tanımları derlenerek aşağıdaki şekilde verilsin.
"o" $\mathfrak{I}$ üzerinde her $S,T\in\mathfrak{I}$ için $SoT\subseteq S\cap T$ özelliğini sağlayan bir ikili işlem olarak verilsin.

Tanım 55: L bir kafes, $\alpha\in L\setminus\{1\}$olsun. α ya indirgenemez (ayrışamaz) denir $\Leftrightarrow$
Her a, $b\in L$ için $a\wedge b\leq\alpha$ ise $a\leq\alpha$ veya $b\leq\alpha$ dır.

Tanım 56: $P\in\mathfrak{I}$ o-asal denir $\Leftrightarrow$ $P\in\mathfrak{I}\setminus\{\varnothing,X\}$ ve her $S,T\in\mathfrak{I}$ için $SoT\subseteq P$ ise $S\subseteq P$ veya $T\subseteq P$ dır.

Tanım 57: $A\in F_{\mathfrak{I}}(X,L)$ $\overline{n}$-asal denir $\Leftrightarrow$ $A \neq$ sabit ve B, $C\in F_{\mathfrak{I}}(X,L)$ için $B\overline{o}C\leq A$ ise $B\leq A$ veya $C\leq A$ dır.

Teorem 41: [25] $A\in F(X,L)$ olsun $A\in F_{\mathfrak{I}}(X,L)$ $\overline{n}$-fuzzy asal denir $\Leftrightarrow$

$\exists\alpha\in L$ indirgenemez, $P\in\mathfrak{I}$ n-asal öyleki $A= \chi_{\alpha,P}$ dır.

Eğer $\varnothing \notin\mathfrak{I}$ ise "o" işlemini $\mathfrak{I}_\varnothing$ üzerinde aşağıdaki şekilde genişletilebilir:

$$SoT = \varnothing \Leftrightarrow S = \varnothing \text{ veya } T = \varnothing$$

Buradan $\mathfrak{I}$ n-asal elemanaları ile $\mathfrak{I}_{\varnothing}$ n-asal elmanlarına ve $F_{\mathfrak{I}}(X,L)$ nin $\overline{n}$-fuzzy asal elemanlarını $F_{\mathfrak{I}_{\varnothing}}(X,L)$ $\overline{n}$-asal elemanlarına genişletilebilir. $\mathfrak{I}$ üzerindeki arakesit işlemi invaryant özelliğini sağladığından her A, $B\in F_{\mathfrak{I}}(X,L)$ için $A\overline{\wedge}B := A\wedge B$ ile yeni bir işlem tanımlayalım. Ancak yukarıdaki teorem yardımıyla $F_{\mathfrak{I}}(X,L)$ nın $\overline{n}$-fuzzy asal elemanları ile $\mathfrak{I}$ nın n-asal ve $\alpha\in L$ indirgenemez olmak üzere (P,α) ikilileri ile birebir eşleme yapılır. $\mathfrak{I}$ nın n-asal ($F_{\mathfrak{I}}(X,L)$ nın $\overline{n}$-fuzzy asal) elemanlarına ayrışamazda denir. Her (P,α) ikilisine karşılık gelen $\mathfrak{I}$-fuzzy asal eleman $\chi_{\alpha,P}$ dır. Buradan aşağıdaki denklik sağlanır:

$$\chi_{\alpha,P}\leq\chi_{\beta,Q} \Leftrightarrow \alpha\leq\beta \text{ ve } P\subseteq Q$$

Yukarıdaki uyarılarla F (X, L) nın $\mathfrak{I}$-fuzzy asal elmanları ile L nın α indirgenemez ve $\mathfrak{I}$ nin n-asal elemanlan ikililerinin arasında birebir bir eşleme vardır.
Şimdi (L, $\vee$, $\wedge$, 0, 1) bir tam kafes ve "o" L üzerinde invaryant öyleki her $a,b\in L$ için $aob\leq a\wedge b$ olsun. $\wp(L)$ Rnın bütün asal (indirgenemez) elmanları ise $\{ \wp(a) \mid a\in L \}$ $\wp(a) = \{p\in \wp(L) \mid a\not\leq p \}$ $\wp(L)$ üzerinde bir topoloji açıklar. Buna Hull-Kernel topolojisi denir. L, $\mathfrak{I}$, $F_{\mathfrak{I}}(X,L)$, $\wp(F_{\mathfrak{I}}(X,L))$ Hull-Kernel topolojilerine sahibiz.

$$U(x,\alpha) = \{ \chi_{\alpha,P} \in \wp(F_{\mathfrak{I}}(X,L)) \mid x\notin P ,\ a\not\leq\alpha \}$$

olmak üzere $\{U(x,\alpha) \mid x\in X ,a\in L\}$
$\wp(F_{\mathfrak{I}}(X,L))$ nin bir tabanını açıklar . Ayrıca

$$\psi : \wp(F_{\mathfrak{I}}(X,L)) \to \wp(\mathfrak{I})x\wp(L), \qquad \psi(\chi_{\alpha,P}) = (P,\alpha)$$

dönüşümü bir topolojik dönüşümdür.

Tanım 58: $\alpha\in L\backslash\{0,1\}$ e dual-atom denir $\Leftrightarrow$ $\beta\in L$ öyleki $\alpha<\beta\leq 1$ise $\beta=1$ dır.

Tanım 59: $M\in\mathfrak{I}$ maksimal denir $\Leftrightarrow$ $M\neq X$ ve $Q\in\mathfrak{I}$ $M\subseteq Q\subseteq X$ ise $Q = X$ veya $M=Q$ dır.

Tanım 60: $A\in F(X,L)$, $A \neq$ Sabit olsun. $A\in F_{\mathfrak{I}}(X,L)$ fuzzy maksimal denir
$\Leftrightarrow$ Her $B\in F_{\mathfrak{I}}(X,L)$ için $A<B$ ise B sabittir.

Teorem 42: [25] $\alpha\in L$, $A\in F_{\mathfrak{I}}(X,L)$ ve $x\in X$ için

$$(A\vee\alpha)(x) = A(x)\vee\alpha$$

ile tanımlanan fuzzy altkümesi $A\vee\alpha\in F_{\mathfrak{I}}(X,L)$ dır.

İspat : Her $\beta \in L$ için $S=(A\vee\alpha)^{-1}[\beta, 1] \in \Im$ olduğu gösterilsin. $F \subseteq_f S$ ve $\gamma = \bigwedge_{y \in F} A(y)$ ise $F \subseteq A^{-1}[\gamma, 1]$ ve buradan $<F> \subseteq A^{-1}[\gamma, 1]$ elde edilir. Buradan her $z \in <F>$ için $\gamma \leq A(z)$ dır. Diğer yandan

$$(A\vee\alpha)(z) = A(z)\vee\alpha \geq \bigwedge_{y \in F} A(y)\vee\alpha = \bigwedge_{y \in F} (A(y)\vee\alpha)$$

sonucu ile $\bigwedge_{y \in F} (A\vee\alpha)(y) \geq \beta$ elde edilir. Buradan $<F> \subseteq S$ elde edilerek $S = \bigcup_{F \subseteq_f S} <F>$ ve $\Im$ cebirsel olduğundan $S \in \Im$ dir.

Teorem 43: [25] $A \in F_{\Im}(X, L)$ maksimal olsun. Bu taktirdeIm(A) bir zincirdir.
İspat : $x, y \in X$ için $A(x) = \alpha$, $A\vee\alpha \in F_{\Im}(X,L)$ olduğundan açık olarak $A \leq A\vee\alpha$ dır. A maksimal olduğundan $A = A\vee\alpha$ veya $A\vee\alpha$ sabittir. Eğer $A = A\vee\alpha$ ise $A(y) = A(y)\vee A(x)$ elde edilir. Buradan $A(x) \leq A(y)$ dır. Eğer $A\vee\alpha$ sabit ise $(A\vee\alpha)(y) = (A\vee\alpha)(x)$ dır. Buradan $A(y)\vee A(x) = A(x)\vee A(x)$ sonucu ile $A(y) \leq A(x)$ elde edilir.

Teorem 44: [25] $A \in F_{\Im}(X,L)$ maksimal olsun. Bu taktirde $\exists \alpha \in L$ öyleki

$$Im(A) = \{1, \alpha\}$$

dır.

İspat : $a, b \in X$, $A(a)<1$ ve $A(b)<1$ olsun. $B(x) = \begin{cases} 1 & , A(a) \leq A(x) \\ A(x) & , \text{diğer} \end{cases}$

ise açık olarak her $\beta \in L$ için

$$B^{-1}[\beta, 1] = A^{-1}[A(a), 1] \cup A^{-1}[\alpha, 1]$$

olduğundan $B^{-1}[\beta, 1] \in \Im$ ve $B \in F_{\Im}(X,L)$ dır. A maksimal ve $A \leq B$ olduğundan $A = B$ veya B sabittir. $A(a)<1=B(a)$ olduğundan B sabit olmak zorundadır. Buradan $B(b) = 1$ ve sonuç olarak $A(a) \leq A(b)$ elde edilir. Benzer şekilde $A(b) \leq A(a)$ elde edilerek $A(a)=A(b)$ eşitliği gösterilmiş olur.

Teorem 45: [25] $A \in F_{\Im}(X, L)$ fuzzy maksimal $\Leftrightarrow$ $\exists$ $\alpha \in L$ dual-atom ve $M \in \Im$ maksimal öyleki $A = \chi_{\alpha,M}$ dır.

Sonuç 2: [25] $(\Im, \wedge, \vee)$ distribütif ise her $A \in F_{\Im}(X, L)$ fuzzy maksimal meet-indirgenemezdir.

Teorem 46: [25] L cebirsel bir kafes olsun. L distribütif $\Leftrightarrow$ L nin her elmanı meet-indirgenemez elmanların infimumudur.
Eğer $\Im$ cebirsel kapalı bir sistem, L bir cebirsel kafes ise $F_\Im(X,L)$ cebirsel sistemdir. Ancak cebirsel kafes olması gerekmez.

Teorem 47: [25] $\Im$ X için bir cebirsel kapalı sistem olsun. L nın her bir elmanı meet-indirgenemez elemanların infimumu olsun. Bu taktirde $F_\Im(X,L)$ distiribütif $\Leftrightarrow$ $F_\Im(X,L)$ nın her elemanı $F_\Im(X,L)$ de meet-indirgenemez elemanların infimumudur.

İspat : $F_\Im(X,L)$ distribütif olsun. P distribütif olduğunundan $\Im$ nın her elemanı meet-indirgenemez elemanların arakesiti olarak yazılır.
Şimdi $A \in F_\Im(X,L)$ ve $B = \wedge\{I \mid I \in F_\Im(X,L),\ A \subseteq I$ indirgenemez $\}$ise açık olarak $A \subseteq B$ dır. Varsayalımkı $\exists x \in X$ öyleki $B(x) \not\leq A(x)$ olsun. L nin her bir elmanı meet-indirgenemez elmanların kesişimi olduğundan $\exists \alpha \in L$ indirgenemez öyleki $B(x) \not\leq \alpha$ ve $A(x) \leq \alpha$ dır. S kümesi

$$S = \cup\{\ A^{-1}[\beta,1] \mid \beta \not\leq \alpha\ \}$$

olarak tanımlansın. α indirgenemez olduğundan $\{\ A^{-1}[\beta,1] \mid \beta \not\leq \alpha\ \} \subseteq \Im$ de yukarıya direk yönlü bir ailedir. Buradan $S \in \Im$ dır. Keza $x \notin S$ ve diğer yandan $\beta \not\leq \alpha$ olmak üzere $\beta \leq A(x)$ dır. Bu ise $A(x) \leq \alpha$ olması ile çelişir. Öte yandan $\exists P \in \Im$ indirgenemez eleman öyleki $x \notin S$ $S \subseteq P$ dır. Şimdi $A \leq \chi_{\alpha,P} \in \wp(F_\Im(X,L))$ öyleki $B(x) \leq \chi_{\alpha,P}(x) = \alpha$. Bu ise bir çelişkidir. Buradan $A = B$ elde edilir. Teoremin diğer kısmının ispatı kolaylıkla elde edilir.

3.5. Genel Teoriye Başlangıç

Burada bir halkanın fuzzy althalkaları, fuzzy idealleri, bir kafesin fuzzy idealleri, bir grubun fuzzy altgrupları, fuzzy normal altgrupları, bir üniversal cebirin fuzzy altcebiri, bir küme üzerinde fuzzy denklikler ve fuzzy kongrüans bağıntılarının tanımlarını vererek kısa olarak gerekli bazı teoremleri Kumbhojker ve Babat [15], Kumar [13], Dixit, Kumar ve Ajmal [6], Das [3], Malik ve Mordeson [16] kaynaklarından derlenerek verilmiştir.

3.4.1. Fuzzy Altgrupları

G bir grup olsun. $\Im = S(G)$ ise $A \in F_\Im(G,L)$ ye G nin fuzzy altgrubu denir.
$\Im = S_N(G)$ ve $A \in F_\Im(G,L)$ ise A ya G nin fuzzy normal altgrubu denir. Tanımlar açıldığında:
A bir fuzzy altgruptur $\Leftrightarrow$ Her x, $y \in G$ için

$$A(xy^{-1}) \geq A(x) \wedge A(y)$$

A bir fuzzy normal altgruptur $\Leftrightarrow$ Her x, $y \in G$ için

$A(xy^{-1}) \geq A(x) \wedge A(y)$ ve $A(xyx^{-1}) \geq A(x)$

dır.

$\mathfrak{I}' = \{ H \in S_N(G) \mid ab \in H$ olan $\forall\, a,b \in G$ için $a \in H$ veya $b \in H \}$

kümesi G için cebirsel kapalı bir sistemdir. $A \in F_{\mathfrak{I}'}(G,L)$ ise A ya quası-fuzzy normal altgrup denir. Açık olarak bir fuzzy normal altgrup $\mathfrak{I}'_{\varnothing}$ fuzzy altkümedir. $\mathfrak{I}$ modülar ve $\mathfrak{I}' \subseteq \mathfrak{I}$ olduğundan G nın quası-fuzzy normal altgruplarının kafesi modülardır.

Tanım 61: $A,B \in F(G,L)$ ise

$$(A.B)(x) = \bigvee_{x=a.b} A(a) \wedge B(b)$$

L-fuzzy altkümesine A ve B nin çarpımı denir.

Teorem 48: [4] $A,B \in F(G,L)$ L-fuzzy altgrup olsun.
A.B L-fuzzy altgrupdur $\Leftrightarrow$ A.B = B.A dır.

Teorem 49: [4] $A,B,C \in F(G,L)$ ise $(A.B).C = A.(B.C)$ dır.

Teorem 50: [4] $A,B \in F(G,L)$, A L-fuzzy normal , B L-fuzzy altgrup ise $A.B \in F(G, L)$ L-fuzzy altgrupdur.

Teorem 51: [4] A, $B \in F(G, L)$ L-fuzzy normal ise A.B L-fuzzy normaldır.

Tanım 62: Her G grup bir $\Omega = \{ \mu, \theta, e\}$-cebir olarak incelenmişti.
Şimdi $\alpha : GxH \to L$ (L-t) fuzzy fonksiyonuna G den H ya bir fuzzy grup homomorfisi denir $\Leftrightarrow$

i) Her a, $b \in G$ ve c, $d \in H$ için $\alpha(a.b,c.d) \geq \alpha(a,c) \wedge \alpha(b,d)$

ii) Her $(a,b) \in GxH$ için $\alpha(a^{-1},b^{-1}) \geq \alpha(a,b)$

dır.

Tanım 63: $\alpha : GxH \to L$ bir L-fuzzy grup homomorfisi ise

$\text{Ker}\,\alpha : G \to L \qquad (\text{Ker}\,\alpha)(g) = \alpha(g,e)$

$\text{Im}\,\alpha : H \to L \qquad (\text{Im}\,\alpha)(h) = \bigvee_{g \in G} \alpha(g,h)$

L-fuzzy altkümelerine sırasıyla α fuzzy homomorfisinin çekirdeği ve resmi denir.

Teorem 52: $\alpha \in F(GxH,L)$bir L-fuzzy grup homomorfisi ise Kerα ve Imα sırasıyla G nın ve H nın L-fuzzy altgruplarıdır.

İspat :
$$\begin{aligned}\text{Ker}\,\alpha\,(a.b^{-1}) &= \alpha\,(a.b^{-1}, e)\\ &= \alpha\,(a.b^{-1}, ee^{-1}) \geq \alpha\,(a, e) \wedge \alpha\,(b, e)\\ &= \text{Ker}\,\alpha(a) \wedge \text{Ker}\,\alpha\,(b)\end{aligned}$$
elde edilir. Buradan Ker $\alpha \in F(G, L)$bir L- fuzzy altgrupdur.

$$\begin{aligned}\text{Im}\,\alpha\,(c.d^{-1}) &= \bigvee_{g\in G} \alpha\,(g, c.d^{-1}) = \bigvee_{a,b\in G} \alpha\,(a.b^{-1}, c.d^{-1})\\ &\geq \bigvee_{a,b\in G} \alpha\,(a,c) \wedge \alpha(b,c) = \bigvee_{a\in G} \alpha\,(a,c) \wedge \bigvee_{b\in G} \alpha(b,c)\\ &= \text{Im}\,\alpha\,(c) \wedge \text{Im}\,\alpha\,(d)\end{aligned}$$
elde edilir. Buradan Im $\alpha \in F(H, L)$ L-fuzzy altgrupdur. Kerα nın L-fuzzy normal altgrup olması gerekmez.

Teorem 53: $\alpha \in F(GxH, L)$ L-fuzzy grup homomorfisi için aşağıdakiler geçerlidir.

i) Im $\alpha = 1$ ise α L-fuzzy örtendır.

ii) i) nin tersi genelde doğru değildir.

iii) Ker $\alpha \neq 0$ olduğundan α'nın L-fuzzy birebirliği Ker α ile karakterize edilemiyor.

İspat : i) Im $\alpha = 1$ ve $y \in H$ ise $\bigvee_{a\in G} \alpha\,(a, y) = 1(y) = 1$ olduğundan $\exists a \in G$ öyleki $\alpha\,(a, y) > t$ dır. Buradan α L-fuzzy epimorfidir.

ii) $L = [0, 1]$, $t = 0$ ve $\alpha(x, y) = 1/2$ olsun. α L-fuzzy epimorfi ancak Im $\alpha \neq 1$ dır.

iii) α L-fuzzy fonksiyon olduğundan $\exists h \in H$ öyleki $\alpha(e,h) > t$ dır. Buradan Ker$\alpha(e) > t$ elde edilir ve Ker $\alpha \neq 0$ sonucu elde edilir.

Teorem 54: α $G \to H$ bir grup homomorfisi ise

$$\text{Ker}\,\chi_{t,\alpha} = \chi_{t,\text{Ker}\alpha} \quad \text{ve} \quad \text{Im}\chi_{t,\alpha} = \chi_{t,\text{Im}\alpha}$$

dır.

İspat : Her $g \in G$ için

$$\operatorname{Ker}\chi_{t,\alpha}(g) = \chi_{t,\alpha}(g,e) = \begin{cases} 1 & ,(g,e)\in\alpha \\ t & ,(g,e)\notin\alpha \end{cases} = \begin{cases} 1 & ,\alpha(g)=e \\ t & ,\alpha(g)\neq e \end{cases} = \begin{cases} 1 & ,g\in \operatorname{Ker}\alpha \\ t & ,g\notin \operatorname{Ker}\alpha \end{cases} = \chi_{t,\operatorname{Ker}\alpha}(g)$$

dır. Buradan Ker $\chi_{t,\alpha} = \chi_{t,\operatorname{Ker}\alpha}$ elde edilir.

Her $h\in H$ için

$$\operatorname{Im}\chi_{t,\alpha}(h) = \bigvee_{a\in G}\chi_{t,\alpha}(a,h) = \bigvee_{a\in G}\begin{cases} 1 & ,\alpha(g)=h \\ t & ,\alpha(g)\neq h \end{cases} = \begin{cases} 1 & ,h\in \operatorname{Im}\alpha \\ t & ,h\notin \operatorname{Im}\alpha \end{cases} = \chi_{t,\operatorname{Im}\alpha}(h)$$

elde edilir. Buradan Im $\chi_{t,\alpha} = \chi_{t,\operatorname{Im}\alpha}$ sonucu çıkar.

Teorem 55: $\alpha\in F(GxH, L)$ bir L-fuzzy grup homomorfisi, $A\in F(G, L)$ L-fuzzy altgrup ise $\alpha(A)\in F(H,L)$ L-fuzzy altgruptur.

İspat : $\alpha(A)(c.d^{-1}) = \bigvee_{a\in G} \alpha(a, c.d^{-1}) \wedge A(a) = \bigvee_{a,b\in G} \alpha(ab^{-1},c.d^{-1})\wedge A(a.b^{-1})$

$$\geq \bigvee_{a,b\in G} \alpha a,c)\wedge\alpha(b,d)\wedge A(a)\wedge A(b)$$

$$= [\bigvee_{a\in G} \alpha(a,c)\wedge A(a)]\wedge[\bigvee_{b\in G} \alpha(b,d)\wedge A(b)]$$

$$= \alpha(A)(c)\wedge\alpha(A)(d)$$

elde edilir. Buradan $\alpha(A)$ L-fuzzy altgruptur.

Teorem 56: $\alpha: GxH \to L$ bir L-fuzzy grup homomorfisi, $B\in F(H,L)$ L-fuzzy altgrup ise $\alpha^{-1}(B)$ L-fuzzy altgrupdur.

İspat: $\alpha^{-1}(B)(a.b^{-1}) = h \Leftrightarrow \alpha(a.b^{-1},h)>t$ dır.

Şimdi $\alpha(a,c)>t$ ve $\alpha(b,d)>t$ ise

$$\alpha(a.b^{-1},c.d^{-1})\geq\alpha(a,c)\wedge\alpha(c,d)>t$$

elde edilir. Buradan $c.d^{-1}= h$ dır. Buradan

$$\alpha^{-1}(B)(a.b^{-1}) = B(c.d^{-1})\geq B(c)\wedge B(d)$$
$$= \alpha^{-1}(B)(a)\wedge\alpha^{-1}(B)(b)$$

sonucu ile

$$\alpha^{-1}(B)(a.b^{-1})\geq\alpha^{-1}(B)(a)\wedge\alpha^{-1}(B)(d)$$

elde edilir.

Teorem 57: $\alpha:GxH \rightarrow L$ bir L-fuzzy grup homomorfisi, $B\in F(H,L)$ L-fuzzy normal altgrup ise $\alpha^{-1}(B)$ L-fuzzy normal altgrupdur.

İspat : $\alpha^{-1}(B)(ba.b^{-1}) = B(h) \Leftrightarrow \alpha(ba.b^{-1},h)>t$

dır. Eğer $\alpha(a,c)>t$ ve $\alpha(b,d)>t$ ise

$$\alpha(ba.b^{-1},dc.d^{-1})\geq\alpha(a,c)\wedge\alpha(c,d)>t$$

elde edilir. Buradan $d.c.d^{-1}= h$ dır. Böylece

$$\alpha^{-1}(B)(ba.b^{-1}) = B(dc.d^{-1})\geq B(c) = \alpha^{-1}(B)(c)$$

dır. Yani $\alpha^{-1}(B)(ba.b^{-1})\geq\alpha^{-1}(B)(b)$

elde edilir. Bu ise ispatı bitirir.

3.5.2. Fuzzy Althalkalar ve İdealler

$\Im$ bir R halkasının bütün althalkalarının (ideallerinin) kümesi R için cebirsel kapalı sistemdır. Yine tanımlar açıldığında; $A\in F(R,L)$ R nın bir L-fuzzy althalkası (ideali) dır $\Leftrightarrow$ Her x, $y\in R$ için

i) $A(x-y)\geq A(x)\wedge A(y)$

ii) $A(x.y)\geq A(x)\wedge A(y)$ $(A(x.y)\geq A(x\vee A(y))$

F(R, L) kümesi üzerinde üç işlem verelim:

i) $(A\oplus B)(x) = \bigvee_{x=a+b} A(a)\wedge B(b)$

ii) $(A\otimes B)(x) = \bigvee_{x=a.b} A(a)\wedge B(b)$

iii) $(A.B)(x) = \bigvee_{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i} \bigwedge_{i=1}^{n} (A(a_i)\wedge B(b_i))$

Teorem 58: [8] $A,B\in F(X, L)$ iki fuzzy ideal ise $A\otimes B$ ve A.B iki L-fuzzy idealdir.

Teorem 59: [8] $I\in I(R) \Leftrightarrow \chi_{t,I} \in F(X , L)$ L-fuzzy idealdir.

Teorem 60: $I,J\in I(R)$ ise

$$\chi_{t,I\oplus J} = \chi_{t,I}\oplus\chi_{t,J} \text{ ve } \chi_{t,I.J} = \chi_{t,I}\cdot\chi_{t,J}$$

dır.

İspat : $\chi_{t,I\oplus J}(r) = t$ için $r\notin I+J$ dır. Buradan her $u\in I$ ve $v\in J$ için $r \neq u+v$ dır. Her $r = u+v$ için

$$\chi_{t,I}(a)\wedge\chi_{t,J}(b) = t$$

dır. Böylece $\chi_{t,I\oplus J} = \chi_{t,I}\oplus\chi_{t,J}$ elde edilir. Bu konuda geniş bilgi olarak Swamy [34] nın çalışmasında $\Im_{\varnothing}$-fuzzy altkümeleri için incelendi. R nın ideallerin kafesi modülar olduğundan fuzzy ideallerinin kümeside modülardır.

Tanım 64: R,R^* halkalar, $\alpha : RxR^* \to L$ t-fuzzy fonksiyonu olsun. α ya L-fuzzy halka homomorfisi denir $\Leftrightarrow$ Her $a, b\in R$ ve $c, d\in R^*$ için

i) $\alpha(a+b,c+d)\geq\alpha(a,c)\wedge\alpha(b,d)$

ii) $\alpha(a.b,c.d)\geq\alpha(a,c)\wedge\alpha(b,d)$

Teorem 61: $\alpha:RxR^*\to L$ L-fuzzy halka homomorfisi olsun. Bu taktirde aşağıdakiler gerçeklenir:

i) $A\in F(R,L)$ bir althalka ise $\alpha(A)\in F(R^*, L)$ bir L-fuzzy althalkadır.

ii) $B\in F(R^*,L)$ bir althalka ise $\alpha^{-1}(B)\in F(R, L)$ bir L-fuzzy althalkadır.

İspat : i) $\alpha(A)(c+d) = \bigvee_{r\in R} \alpha(r,c+d)\wedge A(r) = \bigvee_{a,b\in R} \alpha(a+b, c+d)\wedge A(a+b)$

$$\geq \bigvee_{a,b\in R} \alpha(a,c)\wedge\alpha(b,d)\wedge A(a)\wedge B(d) = [\bigvee_{a\in R} \alpha(a,c)\wedge A(a)]\wedge[\bigvee_{b\in R} \alpha(b,d)\wedge B(d)]$$

$$= \alpha(A)(c)\wedge\alpha(B)(d)$$

elde edilir.

$$\alpha(A)(c.d) = \bigvee_{r\in R} \alpha(r,c.d)\wedge A(r) \geq \bigvee_{a,b\in R} \alpha(a.b, c.d)\wedge A(a.b)$$

$$\geq \bigvee_{a,b\in R} \alpha(a,c)\wedge\alpha(b,d)\wedge A(a)\wedge B(d) = [\bigvee_{a\in R} \alpha(a,c)\wedge A(a)]\wedge[\bigvee_{b\in R} \alpha(b,d)\wedge B(d)]$$

$$= \alpha(A)(c)\wedge\alpha(B)(d)$$

elde edilir. Bunun sonucu olarak $\alpha(A)$ bir L-fuzzy althalkadır.

ii) $\alpha^{-1}(B)(a+b) = B(r^*) \Leftrightarrow \alpha(a+b,r^*)>t$

dır. Eğer $\alpha(a,c)>t$ ve $\alpha(b,d)>t$ ise

$$\alpha(a+b,c+d)\geq\alpha(a,c)\wedge\alpha(b,d)$$

olduğundan

$$r^* = c+d \text{ ve } B(c+d)\geq B(c)\wedge B(d) = \alpha^{-1}(B)(a)\wedge\alpha^{-1}(B)(b)$$

sonucu ile

$$\alpha^{-1}(B)(a+b)\geq \alpha^{-1}(B)(a)\wedge\alpha^{-1}(B)(b)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\alpha^{-1}(B)(a.b)\geq \alpha^{-1}(B)(a)\wedge\alpha^{-1}(B)(b)$$

elde edilir. Bu sonuçla $\alpha^{-1}(B)$ nin L-fuzzy althalka olduğu gösterilmiş olur.

3.5.3. Fuzzy Altmodüller

M R-modül ise $\Im = \Lambda_R(M)$ M için bir bir cebirsel kapalı sistemdir. M nin bütün $\Lambda_R(M)$-fuzzy altkümelerine M nın L-fuzzy altmodülü denir. Açık olarak $A\in F(M,L)$ L-fuzzy altmodül $\Leftrightarrow$ Her a, b, $c\in R$ ve u, $v\in M$ için aşağıdaki özellik sağlanır:

$$A(au+bv)\geq A(u)\wedge A(v)$$

Teorem 62: [31] A, $B\in F(M, L)$ iki L-fuzzy altmodül ise $A\otimes B$ ve $A\wedge B$ L-fuzzy altmodüldür.

Teorem 63: $A\in F(M,L)$ M nin L-fuzzy altmodül ve $\lambda\in R$ için

$$(\lambda A)(x) = \bigvee_{x=\lambda u} A(u)$$

ile tanımlanan $\lambda A\in F(M, L)$ bir L-fuzzy altmodüldür.

Tanım 65: $\alpha{:}M\text{x}N \rightarrow L$ L-fuzzy R-modül homomorfisi denir $\Leftrightarrow$ $\forall a,b\in R$; $u,v\in M$ ve $m,n\in N$ için

$$\alpha(au+bv,\ am+bn)\geq\alpha(u,\ n)\wedge\alpha(v,\ m)$$

dır.

Teorem 66: $\alpha{:}M\text{x}N \rightarrow L$ L-fuzzy R-modül homomorfisi, $A\in F(M,L)$, $B\in F(N,L)$ L-fuzzy altmodül iseler $\alpha(A)\in F(N,L)$, $\alpha^{-1}(B)\in F(M,L)$ L-fuzzy R-altmodülerdir.

İspat : $\alpha(A)(an+bn^*) = \bigvee_{m\in M} \alpha(m,an+bn^*)\wedge A(m)$

$$\geq \bigvee_{m,m^*} \alpha(am+bm^*, an+bn^*) \wedge A(am+bm^*)$$

$$\geq \bigvee_{m,m^*} \alpha(m, n) \wedge \alpha(m^*, n^*) \wedge A(n) \wedge A(n^*)$$

$$= [\bigvee_{m \in M} \alpha(m,n) \wedge A(n)] \wedge [\bigvee_{m^* \in M} \alpha(m^*,n^*) \wedge A(n^*)] = \alpha(A)(n) \wedge \alpha(A)(n^*)$$

elde edilerek $\alpha(A)$ nın L-fuzzy altmodül olduğu görülür.

$\alpha^{-1}(B)(am+bm^*) = B(n^*) \Leftrightarrow \alpha(am+bm^*,n^*)>t.$

$\alpha(m,u)>t$ ve $\alpha(m^*,v)>t$ ise $\alpha(am+bm^*,au+bv) \geq \alpha(m,u) \wedge \alpha(m^*,v)>t$

olduğundan $au+bv = n^*$ elde edilir. Buradan

$\alpha^{-1}(B)(am+bm^*) = B(au+bv) \geq B(u) \wedge B(v) = \alpha^{-1}(B)(m) \wedge \alpha^{-1}(B)(m^*)$

sonucu ile $\alpha^{-1}(B)$ nın L-fuzzy altmodül olduğu görülür.

3.5.4. Fuzzy Ω-Cebirler

Tanım 66: (X,Ω) bir Ω-cebir, $A \in F(X, L)$ Ω-altcebir denir $\Leftrightarrow$ Her $n \in \mathbb{N}$ ve $w \in \Omega(n)$ $a_1, a_2, \dots, a_n \in X$ için aşağıdakiler sağlanır:

$$A(wa_1.a_2 \dots a_n) \geq \bigwedge_{i=1}^{n} A(a_i)$$

Tanım 67: (X, Ω), (Y, Ω) iki Ω-cebir $\alpha : XxY \to L$ L-fuzzy fonksiyon olsun. α ya L-Ω-fuzzy homomorfi denir $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, $w \in \Omega(n)$ $a_1,a_2,\dots,a_n \in X$, $b_1,b_2,\dots,b_n \in Y$ için aşağıdaki ifade sağlanır:

$$\alpha(wa_1.a_2 \dots a_n , wb_1.b_2 \dots b_n) \geq \bigwedge_{i=1}^{n} \alpha(a_i,b_i)$$

Teorem 65: (X, Ω), (Y, Ω) Ω-cebirler $A \in F(X, L)$ ve $B \in F(Y, L)$ L-Ω-fuzzy altkümeler; $\alpha: XxY \to L$ L-Ω-fuzzy homomorfi ise $\alpha(A)$ ve $\alpha^{-1}(B)$ sırasıyla X ve Y nın L-Ω-fuzzy altcebirleridir.

İspat : $n \in \mathbb{N}$, $w \in \Omega(n)$ ve $b_1,b_2,\dots,b_n \in Y$ olsun.

$$\alpha(A)(wa_1.a_2 \dots a_n) = \bigvee_{a \in X} \alpha(a,wb_1.b_2 \dots b_n) \wedge A(a)$$

$$\geq \bigvee_{a_i \in X} \alpha(wa_1.a_2 \dots a_n , wb_1.b_2 \dots b_n) \wedge A(wa_1.a_2 \dots a_n)$$

$$\geq \bigvee_{a_i \in X} \left[\bigwedge_{i=1}^{n} \alpha(a_i, b_i) \right] \wedge \left[\bigwedge_{i=1}^{n} A(a_i) \right] = \bigvee_{a_i \in X} \bigwedge_{i=1}^{n} [\alpha(a_i, b_i) \wedge A(a_i)]$$

$$= \bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{a_i \in X} [\alpha(a_i, b_i) \wedge A(a_i)] = \bigwedge_{i=1}^{n} \alpha(A)(b_i)$$

elde edilerek $\alpha(A)$ nın L-Ω-fuzzy altcebir olduğu görülür.

$$\alpha^{-1}(B)(wa_1.a_2 \ldots a_n) = B(b)$$

olsun. Buradan $\alpha(wa_1.a_2 \ldots a_n, b)>t$ dır.
Diğer yandan $\forall 1 \leq i \leq n$ için $\alpha(a_i, b_i)>t$ olsun. Buradan

$$\alpha(wa_1.a_2 \ldots a_n, wb_1.b_2 \ldots b_n) \geq \bigwedge_{i=1}^{n} \alpha(a_i, b_i) > t$$

sonucu ile $wb_1.b_2 \ldots b_n = b$ dır.

$$\alpha^{-1}(B)(wa_1.a_2 \ldots a_n) = B(wb_1.b_2 \ldots b_n)$$

$$\geq \bigwedge_{i=1}^{n} B(b_i) = \bigwedge_{i=1}^{n} \alpha^{-1}(B)(b_i)$$

özelliği ile $\alpha^{-1}(B)$ nın bir L-Ω-fuzzy altcebir olduğu görülür.

Teorem 66: (X, Ω), (Y, Ω), (Z, Ω) Ω-cebirler olsun.
$\alpha : XxY \rightarrow L$, $\beta : YxZ \rightarrow L$ Ω-cebir homomorfileri ise $\beta o \alpha : XxZ \rightarrow L$ L-fuzzy Ω-cebir homomorfisidir.

İspat : $(\beta o \alpha)(wa_1.a_2 \ldots a_n , wb_1.b_2 \ldots b_n) = \bigvee_{c \in Y} \beta(c, wb_1.b_2 \ldots b_n) \wedge \alpha(wa_1.a_2 \ldots a_n, c)$

$$\geq \bigvee_{\substack{c_i \in Y \\ c = wc_1 \ldots c_n}} \beta(wc_1.c_2 \ldots c_n , wb_1.b_2 \ldots b_n) \wedge \alpha(wa_1.a_2 \ldots a_n , wc_1.c_2 \ldots c_n)$$

$$\geq \bigvee_{\substack{c_i \in Y \\ 1 \leq i \leq n}} \bigwedge_{i=1}^{n} \beta(c_i , b_i) \wedge \alpha(a_i, c_i) = \bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{c_i \in Y} \beta(c_i , b_i) \wedge \alpha(a_i, c_i)$$

$$= \bigwedge_{i=1}^{n} \beta o \alpha(a_i , b_i)$$

eşitsizlikleri ile $\beta o \alpha$'nın X den Z ye L-fuzzy Ω-cebir homomorfisidir.

3.3. Grupların Fuzzy Gösterimleri

Tanım 68: F bir cisim, $n \in \mathbb{N}^*$, $GL(n, F) = \{ A \in M_n(F) \mid A \text{ tersinir} \}$.
$\theta \in F(GxG(n,F),L)$ fuzzy grup homomorfisine n dereceli bir L-fuzzy grup gösterimi denir.

θ n dereceli bir fuzzy gösterim ise $n = d^o\theta$ ile gösterilecek.

$$\mathbb{F}G(L) = \{ \theta \mid \theta \text{ G nın bir L-fuzzy gösterimi} \}$$

olarak tanımlansın.

Teorem 67: $\theta, \psi \in \mathbb{F}G(L)$ ise

$$(\theta \oplus \psi)(g, A) = \bigvee_{A = B \oplus C} \theta(g,B) \wedge \psi(g,C)$$

olarak tanımlansın.

Burada $B \oplus C = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$ olarak tanımlanıyor.

Bu taktirde $\theta \oplus \psi$ G nın $d^o\theta + d^o\psi$ dereceli L-fuzzy gösterimidir.

İspat : Her $g \in G$ için θ, ψ L-fuzzy fonksiyon olduklarından $\exists B \in GL(n,F)$, $C \in GL(m,F)$ öyleki $\theta(g, B) > t$, $\psi(g, C) > t$ dır. Buradan

$$\theta \oplus \psi(g, B \oplus C) \geq \theta(g, B) \wedge \psi(g, C) > t$$

elde edilir. A, $A^* \in GL(n+m, F)$, $g \in G$ için $\theta \oplus \psi(g, A) > t$ ve $\theta \oplus \psi(g, A^*) > t$ olsun. Buradan $\exists B, B^* \in GL(n, F)$, $C, C^* \in GL(m, F)$ öyleki

$$A = B \oplus C \ , \ A^* = B^* \oplus C^* \text{ ve}$$

$$t < \theta(g,B), \ t < \theta(g, B^*), \ t < \psi(g, C), \ t < \psi(g, C^*)$$

dır. θ, ψ L-fuzzy fonksiyon olduklarından $B = B^*$ ve $C = C^*$ elde edilir. Bu sonuçla

$$A = B \oplus C = B^* \oplus C^* = A^*$$

eşitliği elde edilir. Buradan $\theta \oplus \psi \in F(GxG(n+m,F),L)$ bir L-fuzzy fonksiyondur.

$$(\theta \oplus \psi)(g.g^{*-1}, A.B^{-1}) = \bigvee_{A.B^{-1} = U \oplus V} \theta(g.g^{*-1}, U) \wedge \psi(g.g^{*-1}, V)$$

$$\geq \bigvee_{\substack{A = A_1 \oplus A_2 \\ B = B_1 \oplus B_2}} \theta(g.g^{*-1}, A_1 B_1^{-1}) \wedge \psi(g.g^{*-1}, A_2 B_2^{-1})$$

$$\geq \bigvee_{\substack{A = A_1 \oplus A_2 \\ B = B_1 \oplus B_2}} \theta(g,A_1) \wedge \theta(g^*,B_1) \wedge \psi(g,A_2) \wedge \psi(g^*,B_2)$$

$$= [\bigvee_{A=A_1\oplus A_2} \theta(g,A_1)\wedge\psi(g, A_2)]\wedge[\bigvee_{A=B_1\oplus B_2} \theta(g^*,B_1)\wedge\psi(g^*,B_2)]$$

$$= (\theta \oplus\psi)(g, A)\wedge(\theta \oplus\psi)(g^*, B)$$

elde edilir. Bu sonuçla $\theta+\psi$ G`nın n+m-li bir fuzzy gösterimidir.

Tanım 69: $\theta,\psi\in$ IFG(L) ise $\theta\oplus\psi$ gösterimine θ ile ψ gösterimlerinin direkt toplamı denir

Tanım 70: $\theta\in$ IF (G,L) gösterimine fuzzy ayrışamaz denir $\Leftrightarrow$ θ iki fuzzy gösterimin direk toplamı şeklinde yazılamaz.

Teorem 68: θ:G$\rightarrow$GL(n,F) grup gösterimi olsun Bu taktirde $\chi_{t,\theta}$ L-fuzzy ayrışamaz $\Leftrightarrow$ θ ayrışamaz gösterimdir.

İspat : θ ayrışamaz ve $\chi_{t,\theta}$ L-fuzzy ayrışabilir olsun. Buradan $\exists\theta_1,\theta_2\in$ IF (G, L) öyleki

$\chi_{t,\theta} = \theta_1+\theta_2$ dır.

$$\theta_i^*(g) = A_i \Leftrightarrow \theta_i(g, A_i)>t$$

ile tanımlanan θ_i^* : G $\rightarrow$ GL(n_i, F) G nin grup gösterimidir. Burada n_i= $d^o\theta_i$ dır.

$\theta = \theta_1^*+\theta_2^*$ olduğunu gösterelim. θ(g) = A olsun. Buradan

$$\chi_{t,\theta}(g,A) = 1 = \bigvee_{A=B\oplus C} \theta_1(g,B)\wedge\theta_2(g,C)$$

dır. Buradan $\exists$ B,C matrisleri öyleki

A=B$\oplus$C ve $\theta_1(g,B)>t$, $\theta_2(g,C)>t$

elde edilir. Bu sonuçla $\theta_1^*(g)$ = B ve $\theta_2^*(g)$ = C dır. Diğer yandan

$$(\theta_1^* +\theta_2^*) (g) = \begin{bmatrix} \theta_1^*(g) & 0 \\ 0 & \theta_2^*(g) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

B$\oplus$C = A ve $(\theta_1^*+\theta_2^*)(g)$ = A

çıkarılarak $\theta_1^*+\theta_2^* = \theta$ elde edilir.

Tanım 71: $\theta : GxGL(n,F) \to L$, $\psi : GxGL(m,F) \to L$ G nın fuzzy gösterimleri olsun. $T : M_{mxn}(F) \to L$ L-fuzzy altkümesine θ ile ψ gösterimlerinin kenetliyor denir $\Leftrightarrow$

$[\ T(A)>t \Leftrightarrow \forall g\in G$ için $\theta(g,B)>t$ ve $\psi(g, C)>t$ ise $A.B = BC\ ]$.

Buradaki T yi $Mor(\theta,\psi)$ ile göstereceğiz.

Tanım 72: $T = Mor(\theta, \psi)$ ve $K = Mor(\psi, \chi)$ ise

$$ToK : M_{kxn}(F) \to L \qquad ToK(D) = \bigvee_{D=U.V} K(U)\wedge T(V)$$

ile tanımlanan dönüşüme T ile K kenetleyenlerinin bileşkesi denir ve ToK ile gösterilir.

Teorem 69: $T = Mor(\theta, \psi)$ ve $K = Mor(\psi, \chi)$ ise $ToK =_t Mor(\theta,\chi)$ dır.

İspat : $ToK(D) >t \Leftrightarrow \bigvee_{D=U.V} K(U)\wedge T(V)>t \Leftrightarrow \exists U\in M_{kxm}(F)$ ve $V\in M_{mxn}(F)$ öyleki

$D=U.V$ $K(U)>t$ ve$T(V)>t$

$\Leftrightarrow \forall g\in G$ için $\theta(g,A)>t$, $\psi(g,B)>t$ $\chi(g,C)>t$ için

$U.B = C.U$ ve $V.A = B.V$

dır. Buradan

$$\begin{aligned}(U.V)A &= U(VA) = U(BV)\\ &= (UB)V = (CU)V = C(UV)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu sonuçla $DA = CD$ elde edilerek

$KoT =_t Mor(\theta,\chi)$ olduğu görülür.

$\mathbb{F}(G, L)$ nın bir kategori olduğu gösterilecektir.

Teorem 70:

i) $\theta\in\mathbb{F}(G,L)$ için $1_\theta(A)>t \Leftrightarrow A = I$ ile tanımlanırsa ise $\psi\in FG(G,F)$ ve $T = Mor(\theta,\psi)$ için $1_\theta oT =_t To1_\psi =_t T$ dır.

ii) T_i ($i = 1,2,3$) kenetleyenleri için

$$(T_1oT_2)oT_3 = T_1o(T_2oT_3)$$

dır. Buradan $\mathbb{F}G(L)$ bir kategoridir.

Teorem 71: $\theta : G \to GL(n,F)$, $\psi : G \to GL(m,F)$ iki grup gösterimi ise

$$\chi_{Mor(\theta,\psi)} =_t Mor(\ \chi_{t,\theta},\ \chi_{t,\psi})$$

dır.

İspat : $\chi_{Mor(\theta,\psi)}(A)>t \Leftrightarrow A\in Mor(\ \theta,\psi) \Leftrightarrow \forall g\in G$ için $A.\theta(g) = \psi(g).A$

$\Leftrightarrow$ $\forall g \in G$ için $\chi_{t,\theta}(g,B)>t$, $\chi_{t,\psi}(g,C)>t$ için $A.B = C.A$

$\Leftrightarrow$ $Mor(\chi_{t,\theta}, \chi_{t,\psi})(A)>t$.

Bu sonuç bize t-seviyesinde eşitliği verir.

$\theta \in IFG(L)$, $d^{o}(\theta)=n$ olsun. $M_\theta = \{ \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ . \\ . \\ v_n \end{bmatrix} \mid v_i \in F\ 1 \le i \le n \}$ F-vektör uzayı için

$\theta(g,A)>t$ olmak üzere,

$$g \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ . \\ . \\ v_n \end{bmatrix} := A \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ . \\ . \\ v_n \end{bmatrix}$$

ile M_θ FG-modül yapısına kavuşturulabilir. θ, $\psi \in FG(L)$ $A \in Mor(\theta,\psi)$ için

$$\eta_A(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ . \\ . \\ v_n \end{bmatrix}) := A \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ . \\ . \\ v_n \end{bmatrix}$$

$\eta_A : M_\theta \to M_\psi$ F-lineer dönüşümü bir FG-modül homomorfisidir. Gerçekten, $\theta(g,B)>t$ ve $\psi(g,C)>t$ için $A.B = BC$ olduğundan

$$\eta_A(g \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ . \\ . \\ v_n \end{bmatrix}) := \eta_A(B \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ . \\ . \\ v_n \end{bmatrix} = A(B \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ . \\ . \\ v_n \end{bmatrix}) = (AB) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ . \\ . \\ v_n \end{bmatrix}$$

$$= (CA) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ . \\ . \\ v_n \end{bmatrix} = C(A \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ . \\ . \\ v_n \end{bmatrix} = C\ \eta_A \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ . \\ . \\ v_n \end{bmatrix} = g\,\eta_A(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ . \\ . \\ v_n \end{bmatrix})$$

elde edilir.

Teorem 72: $\theta,\psi \in IFG(L)$,$A \in Mor(\theta,\psi)$ için $G : IFG(L) \to IFG^M$ $G = (G_o, G_M)$

$G_o(\theta) = M_\theta$, $G_M(A) = \eta_A$

ile IFG(L) kategorisinden IFG^M kategorisine bir kovaryant funktor tanımlanır.

Teorem 73: $\theta,\psi \in IFG(L)$ ise $M_{\theta\oplus\psi} \cong M_\theta \oplus M_\psi$ dır.

İspat :

$$f\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ w_n \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ v_n \\ w_1 \\ w_2 \\ w_m \end{bmatrix}$$

ile tanımlanan dönüşüm istenen FG- modül izomorfisidir. f nın F-lineer izomorfi olduğu açıktır. Şimdi $\theta(g,A)>t$, $\psi(g,B)>t$ için $\theta\oplus\psi(g,A\oplus B)>t$ olduğundan

$$f\left(g\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, g\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}\right) = f\left(A\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, B\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} A\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \\ B\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_n \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= (A+B)\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ v_n \\ w_1 \\ w_2 \\ w_m \end{bmatrix} = gf\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ w_n \end{bmatrix}\right)$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 74: $[M : F] = n$ olan bir $M\in IFG^M$ için $\exists\theta\in IFG(L)$ öyleki $d^o\theta = n$ ve $M_\theta \cong M$ dır.

İspat : $\{ m_1, m_2, \dots , m_n \}$ M nin F-tabanı olsun: $\forall\ g\in G$ için $g.m = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}m_j$ ise

$\theta\in IFG(L)$, $\theta(g, [\ a_{ij}]\ )>t$ olan bir fuzzy gösterimi olsun. $f :\ M_\theta \to M$

$$f\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}\right) = \sum_{i=1}^{n} v_i m_i$$

istenen izomorfidir. f nin F-lineer izomorfi olduğu açıktır.

$$f(g\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ v_n \end{bmatrix}) = f([a_{ij}]\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ v_n \end{bmatrix}) = f(\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1i}\lambda_i \\ \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ni}\lambda_i \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n} a_{ji}v_i)m_j = \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{n} a_{ji}v_i m_j = \sum_{i=1}^{n}(v_i \sum_{j=1}^{n} a_{ji}m_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} v_i g m_i = g\sum_{i=1}^{n} v_i m_i$$

$$= g f(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_n \end{bmatrix})$$

elde edilir.

Teorem 75: $\theta, \psi \in \mathbb{F}G(L)$, $T = Mor(\theta,\psi)$ ve $T^* = Mor(\psi,\theta)$ olsun.

$$M_\theta \cong M_\psi \Leftrightarrow \exists T(A)>t \text{ ve } T^*(B)>t \text{ öyleki } AB = BA = I$$

dır.

İspat : $M_\theta \cong M_\psi$ ise $\exists f : M_\theta \to M_\psi$ ve $g : M_\psi \to M_\theta$ FG-modül homomorfisi öyleki $gof = 1_{M_\theta}$ ve $fog = 1_{M_\psi}$ dır. $e_i = [\delta_{ji}]_{nx1}$ j-ye göre sütün matrisi M_θ nın ve benzer şekilde e_i^* M_ψ FG-mödüllerinin F-tabanlarıdır. Ayrıca aşağıdaki özelliği gerçekler:

$$f(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j^* \quad \text{ve} \quad g(e_i^*) = \sum_{j=1}^{n} b_{ji} e_i \qquad (2)$$

Böylece $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ matrisleri istenen özellikleri sağlarlar.
Tersine $T(A)>t$ ve $T^*(B)>t$ öyleki $AB = BA = I$ özelliklerine sahip A,B matrisleri için (2) deki tanımlanan f, g dönüşümleri

$$gof = 1_{M_\theta} \text{ ve } fog = 1_{M_\psi}$$

eşitlikleri ile bir FG-modül izomorfisi tanımlarlar.

4. İRDELEME

$\Re$ önermelerin bir ailesi olsun. Her $p \in \Re$ için

$$[\ ] : \Re \to \{0, 1\}\ [\ ](p) = [p] = \begin{cases} 1\ , & p \ \text{doğru önerme} \\ 0\ , & p \ \text{yanlış önerme} \end{cases}$$

olarak alınırsa bu dönüşüm aşağıdaki özellikleri gerçekler :

a) $[p \vee q] = [p] \vee [q] = \text{mak}\{[p], [q]\}$
b) $[p \wedge q] = [p] \wedge [q] = \min\{[p], [q]\}$ (3)
c) $[\sim p] = 1 - [p]$
d) $[p \Rightarrow q] = [\sim p \vee q] = [\sim p] \vee [q] = (1-[p]) \vee [q] = \text{mak}\{(1-[p]), [q]\}$

Bunlara ilaveten, tüm geçerli önermeleri 1 ve tümgeçersiz önermeleri 0 ile gösterecek olursak, aşağıdaki iki özellik elde edilir:

1) $[\sim p] = [p \Rightarrow o]$
2) $[p \Rightarrow q] = 1 \Leftrightarrow [p] \leq [q]$ (4)

Bu şekilde oluşturulan mantığa klasik mantık denir. Zadeh, yukarıda tanımlanan dönüşümü, değer kümesini [0, 1] için alarak (3) bağıntılarını gerçekleyen özllikleri ile fuzzy küme kavramlarını inşa etmeye çalışmıştır. Daha sonra birçok araştırmacı tarafından [0, 1] yerine değişik kafesler alınarak bir lojik oluşturmaya gidilmiştir. Şimdi, bu kafeslerden birkaç örnek vererek lojiğimizi tanıtmaya çalışalım.

$(L, \leq, \wedge, \vee, 1)$ bir kafes "$*$", "$\to$" L üzerinde iki ikili işlem olsun. Aşağıdaki özelliklerin gerçeklenmesi halinde L ye bir Residual Kafes denir:

i) $(L, *)$ Asosyatif ve komütatiftir.
ii) Her $a, b, c \in L$ için $a \leq b$ ise $a*c \leq b*c$.
iii) Her $a \in L$ için $1*a = a*1 = a$.
iv) Her $a, b \in L$ için $a*c \leq b \Leftrightarrow c \leq a \to b$.

Örnekler:

1) $L = \{0, 1\}$ olsun.

$a \vee b = \text{mak}\{a, b\}$, $\quad a \wedge b = \min\{a, b\}$

$$a*b = a\wedge b, \qquad a\to b = \begin{cases} 1 & , \ a\leq b \\ b & , \ a>b \end{cases}$$

ile L bir Residual kafestir.

2) $L = [0, 1]$ olarak alınsın. Her a, $b\in L$ için,

$$a\vee b = \text{mak}\{0, a+b-1\}, \qquad a\wedge b = \min\{a, b\}$$

$$a*b = a\wedge b \qquad a\to b = 1\wedge(1-a+b)$$

olarak alınırsa L bir Residual kafestir. Buna Lukasiewicz cebir denir.

3) L bir tam kafes ve Brauwerian olsun. $a*b = a\wedge b$ olarak alınırsa

$$a\to b = \bigvee_{a\wedge c\leq b} c$$

elde edilir. Buradan L bir Rasidual kafestir. Bu çalışma, bu lojik ile ele alınmıştır. Mantık, bu lojik ile ele alındığında (3) ve (4) bağıntıları aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$[p\vee q] = [p]\vee[q], \qquad [p\wedge q] = [p]\wedge[q]$$

$$[\sim p] = [p]\to 0, \qquad [p\Rightarrow q] = [p]\to[q]$$

5. SONUÇLAR

1) Tanım 46'da bir fuzzy altkümenin, bir fuzzy fonksiyon altındaki resminin ve ters resminin tanımı yapılarak, bunlarla ilgili bazı özellikler Teorem 26'da ispatlanmıştır

2) Teorem 30 ile kapalı sistemler üzerinde tanımlı $\chi_{\alpha,S}$ fuzzy altkümelerinin iki özelliği ispatlanmıştır.

3) Teorem 62 ile fuzzy grup homomorfisi tanımlanarak, fuzzy çekirdek, fuzzy resim tanımları Teorem 63 de verildi. Teorem 52, Teorem 53, Teorem 54 ve Teorem 55 bunlarla ilgili ispat edilmiş olan bazı teoremlerdır.

4) Teorem 60'da halkalarda, fuzzy idealler için toplam ve çarpımla ilgili $\chi_{\alpha,S}$ fuzzy altkümesinin gerçeklediği özellik ispatlanmıştır.

5) Tanım 67 ile fuzzy Ω-cebir homomorfisi tanımlanarak, Teorem 65'de fuzzy altcebirlerin resim ve ters resimlerinin Ω-altcebir oldukları ispatlanmıştır. Ayrıca, Teorem 66'da iki fuzzy Ω-cebir homomorfisinin bileşkesinin fuzzy Ω-cebir homomorfisi olduğu ispatlanmıştır.

6) 3.3.'de Grupların fuzzy gösterimleri tanımlanarak, bu gösterimlerin direkt toplamı, ayrışamaz gösterimler ve gösterimlerin kenetleyenleri ile bu yapı bir kategoriye kavuşrurulmuştur.

6. ÖNERİLER

Henüz oluşturulmuş bir fuzzy lojiği yoktur. Bunun için bu alanda matematik yapmak isteyen bir kişi, önce lojiğini seçmesi gerekir. Tüm konularda henüz yerleşmiş bir tanım olmadığından cebirsel yapılardada yine bir dallanma sözkonusudur. Ancak, yapılan tanımlar, karakteristik durumlar için bütün lojiklerle uyumluluk arzetmektedir. İşte, bu durumda yapılan tanımlar, klasik teoriyi bir genellemeye götürmesi gerekir.

Cebir dalında bir çok alan olduğundan, hepsini bir doktorada çalışmak mümkün değildir. Burada sadece gösterim teorisi konusunu ele alınmıştır. Kaldiki; bu teoride yapılan ilk çalışma olduğundan klasik teorideki genişliği bakımından problemlerle dolu bir yolun temelini atmıştır. Bunlardan birkaçı şunlardır; grupların fuzzy gösterimleri kategorisindeki fuzzy denkliği ve bu ayrışımın özellikleri, fuzzy Masche Teoremi ve fuzzy gösterimlerle G grubunun grup teorik hangi özellikleri kazanılabilir?, İndüklenmiş fuzzy gösterimler ve fuzzy Frobenius Reciprocity Theorem inşa edilebilir mi?.

8. KAYNAKLAR

[1] Zadeh, L.A., Fuzzy Sets, Inform. and Control 8 (1965) 338-353.

[2] Rosenfeld, A., Fuzzy Groupps, J. Math. Anal. Appl. 35 (1971) 512-517.

[3] Das, P.S., Fuzzy Groups and Level Subgroups, J.Math. Anal. Appl. 84 (1981) 264-269.

[4] Mukherjee, N.P. ve Battacharya, P., Fuzzy Groups Some Groups Theoretic Analogs, Inf. Sci. 34 (1986) 247-268.

[5] Mukherjee, N.P. ve Bhattacharya, P., Fuzzy Normal Subgroups and Fuzzy Cosets, Inf. Sci. 34 (1984) 225-239.

[6] Kumar, R. ve Dixit, N.V., Ajmal N., Level Subgroups and Union of Fuzzy Subgroups, Fuzzy Set and Systems 37 (1990) 354-371.

[7] Anthony, J.M. ve Sherwood, H., A Characterization of Fuzzy Subgroups, Fuzzy Set and Systems 7 (1982) 297-305.

[8] Liu, J. W., Fuzzy Invariant Subgroups and Fuzzy Ideals, Fuzzy Set and Systems 8 (1992) 133-139.

[9] Eroğlu, M.S., The Homomorphic Image of Fuzzy Subgroups is Always a Fuzzy Subgroups, Fuzzy Set and Systams 37 (1990) 255-256.

[10] Katsaras, A.K. ve Liu, D.B., Fuzzy Vektor Space and Fuzzy Topolocigal Vektör Spaces, J. Math. Anal. Appl. 58 (1977) 135-146.

[11] Dixit, V. N. ve Kumar, R., Ajmal N., Fuzzy Ideals and Fuzzy Prime Ideals of a Rings, Fuzzy Set and Systems 44 (1991) 127-138.

[12] Kurgoka, T. ve Kuroki, N. On Fuzzy Quetiend Rings Induced by Fuzzy Ideals, Fuzzy Set and Systems 47 (1992) 381-386.

[13] Kumar, R., Fuzzy irreducible Ideals in Rings, Fuzzy Set and Systems 42 (1991) 369-379.

[14] Kumbhojker, H.V. ve Babat, M.S., Correspondence Theeorem for Fuzzy Ideals, Fuzzy Set and Systems 41 (1981) 213-219.

[15] Kumbhojkar, H. V. ve Babat, M. S., Not-So-Fuzzy Fuzzy Ideals, Fuzzy Set and Systems 37 (1990) 237-243.

[16] Malik, D.S. ve Mordeson, J.N., Fuzzy Maksimal Radical and Fuzzy Primary Ideals of a Ring, Inf. Sci. 53 (1991) 237-250.

[17] Swamy, U.M. ve Swamy, K.L.N., Fuzzy Prıme Ideals of Rings, J. Math. Anal. Appl. 134 (1988) 94-103.

[18] Yehia, E.B. S., Fuzzy Partitions and Fuzzy-quotient Rings, Fuzzy Set and Systems 59 (1993) 57-62.

[19] Zahedi, M.M., A Note on L-fuzzy Primary and Semi Primary Ideals, Fuzzy Set and Systems 51 (1992) 243-247.

[20] Zahedi, M.M., On L-fuzzy Resudial Quotient Modules and Primary Submodules, Fuzzy Set and Systems 51 (1992) 333-334.

[21] Sasaki, M., Fuzzy Functions, Fuzzy Set and Systems 45 (1993) 295-301.

[22] Malik, D.S. ve Mordeson, J. N., Fuzzy Homomorphism of Rings, Fuzzy Set and Systems, 46 (1992)139-146.

[23] Höhle, U. ve Stout, N. L., Foundations of Fuzzy Sets, Fuzzy Set and Systems 40 (1991) 257-296.

[24] Swamy, U.M. ve Visvanada, R.D., Algebraic Fuzzy Systems, Fuzzy Set and Systems 41 (1991) 187-194.

[25] Swamy, D.M. ve Visvanada R.D., Irreducibility in Alcebraic Fuzzy System, Fuzzy Set and Systems 41 (1991) 233-241.

[26] Skornjakov, L.A., Elements of Lattice Theory, Hinduston Publishing Corporation, 1977.

[27] Cohn, P.M., Universal Algebra, D. Reidel Publishing Company, 1981.

[28] Johnstone, P.T., Stone Spaces, Cambridge Uni. Press, 1982

[29] Turunenen, E., Algebraic Structure in Fuzzy Logic, Fuzzy Set and Systems 52 (1992) 181-188.

[30] Eroğlu, M. S., Fuzzy Algebraic Structures, The Balcanic Union for Fuzzy Systems and Artificial Intellence, Eylül 1992, Trabzon, BUFSA, 172-175.

[31] Zahedi, M.M., Some Results on L-fuzzy Modules, Fuzzy Set and Systems 35 (1993) 355-361.

8. ÖZGEÇMİŞ

1963 yılında Rize-Çamlıhemşin de doğan Sultan Yamak 1975 yılında Pazar Alçılı İlkokulunu, 1978 yılında Rize Merkez Ortaokulunu ve 1981 yılında Pazar Lisesini bitirdi. 1983 yılında Karadeniz Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne başladı. 1987 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldu. Aynı yıl Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen-Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans proğramına başladı. 1990 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen-Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans proğramından mezun oldu. Aynı yıl Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen-Bilimleri Enstitüsü Doktara proğramına başladı. Halen Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Matematiğin Temelleri ve Lojik Anabilim dalında Araştırma Görevlisi olarak görevini sürdürmektedir. Evli ve bir çocuk babasıdır.